$$\int f\,d\sigma$$

Воронежская весенняя математическая школа

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ "ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-XII"

Тезисы докладов

$$dx = dF$$

(3-9 мая 2001г.)

Воронеж

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА

Воронежская весенняя математическая школа

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
«ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XII»

Тезисы докладов

3 мая — 9 мая 2001 г.

Воронеж — 2001

УДК 517.53, 517.97, 517.98

Современные методы в теории краевых задач «Понтрягинские чтения». Тезисы докладов. — Воронеж, ВГУ, 2001, — 178 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом РАН им. В.А.Стеклова и Московским госуниверситетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем оптимального управления, теории игр, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

Оргкомитет:

Ильин В.А. (председатель), Борисов И.И. (сопредседатель), Покорный Ю.В. (зам. председателя), Костин В.А. (зам. председателя), Звягин В.А. (зам. председателя), Провоторов В.В. (ученый секретарь), Бобылев Н.А., Ерусалимский Я.М., Потапов А.С. Репников В.Д., Розов Н.Х., Савинков Ю.А., Сапронов Ю.И.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных иследований

ISBN (5-7458-0738-5)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абдурагимов Г.Э. (Махачкала)

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + \rho(t)x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{21}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — действительные числа, $\rho(t)$ — неотрицательная суммируемая со степенью $q \in (1, \infty)$ на отрезке $[0, 1]$ функция, $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ $(t \in [0, 1]$, $-\infty < u < \infty)$ положительна в полосе $(0, 1) \times (0, \infty)$ и удовлетворяет условию Каратеодори, причём $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Теорема. Предположим, что $T : C \to L_p$ положительный (монотонный) на конусе $\tilde{K}$ [1] оператор и выполнены условия:

1)$a(t)u^{p/q} \le f(t, u) \le bu^{p/q}$, $\quad t \in [0, 1]$, $u \ge 0$, $p \ne q$,

2)$||\rho||_{L_q} < \frac{m}{M^2}$,

где $a(t)$ — неотрицательная ($a(t) \not\equiv 0$) суммируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, b — некоторое число, постоянные m и M представляют собой соответственно нижние и верхние оценки функций Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2).

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

В случае $\rho(t) = 0$ существование и единственность положительного решения задачи (1)–(2) было установлено автором в [1].

Литература

1. Абдурагимов Г.Э., Рамазанова А.М. О существовании и единственности положительных решений краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Воронежская зимняя математическая школа: Тезисы докл. Воронеж, 27 января 2000 г.- 4 февраля 2001 г. - с.4-5.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НЬЮТОНА[1]

Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. (Москва)

В задачах управления, даже исследованных до конца в теоретическом плане, обычно возникает проблема вычисления некоторых констант, постоянных интегрирования и т.д. В докладе этот вопрос обсуждается для аэродинамической задачи Ньютона (см. В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин.

---

[1] Работа поддержана ГПВНШ 00-15-96086, УР-ФИ 990893.

Оптимальное управление, 1979, и WEB-страницу: А.Иванов, http://home.imm.uran.ru/iagsoft/Newton/)

$$\dot{x} = u, u \geq 0, x(0) = 0, x(T) = X, \; L(u) = \int_0^T t/(1+u^2)\,dt \to \min_{u(\cdot)}, \qquad (1)$$

где параметры $T, X > 0$ заданы. Оптимальный профиль $x(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq \tau$, $\tau \in (0,T)$, при $\tau \leq t \leq T$ траектория описывается параметрическими уравнениями

$$t = P\vartheta(u), x = P\xi(u), \quad 1 \leq u \leq U, \qquad (2)$$

где $\vartheta(u) = (u^2+1)^2/u$, $\xi(u) = 3u^4/4 + u^2 - \ln(u) - 7/4$. Числа $P > 0$, $U > 1$ в (2) находятся из краевого условия $x(T) = X$, которое приводит к уравнению для вычисления единственного корня $u = U > 1$:

$$\xi(u)/\vartheta(u) = X/T; \qquad (3)$$

параметр $P = T/\vartheta(U) = X/\xi(U)$. Оптимальное управление $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq \tau$; в точке переключения $\tau = 4P \in (0,T)$ оно имеет единичный скачек: $u(\tau+0) = 1$; $u(T) = U$; $1 \leq u(t) \leq U$, $\tau \leq t \leq T$, здесь управление $u(t)$ определяется неявно первым уравнением (2). Построение оптимального решения требует вычисления корня $U > 1$ уравнения (3), которое мы запишем в форме

$$L(u) \equiv \ln\xi(u) - \ln\vartheta(u) - \ln(X/T) = 0; 1 < u < +\infty. \qquad (4)$$

Для функции $L(u)$, $L'(u) > 0$, $L''(u) < 0$, классический метод Ньютона $u_{k+1} = u_k - L(u_k)/L'(u_k)$, $k = 0,1,\ldots$; $u_0 > 1$, $L(u_0) < 0$, сходится: $u_k \uparrow U$, $k \to \infty$. Для поиска корня U уравнения (4) предлагается **нелинейная версия метода Ньютона** (*с логарифмической аппроксимацией* $L(u) \approx l(u,\bar{u}) \equiv a(\bar{u}) + b(\bar{u})\ln(u-1)$): $u_{k+1} = 1 + \exp(-a_k/b_k)$, $k = 0,1,\ldots$; $u_0 > 1$, $b_k = (u_k - 1)L'(u_k) > 0$, $a_k = L(u_k) - b_k \ln(u_k - 1)$. Оба процесса обладают квадратичной сходимостью. Преимущества последнего процесса показывают два примера ($X = T = 1$). **Пример 1.** $u_0 = 1.1$. *Оба процесса сходятся к корню* $U \approx 1.916801246$, *число итераций 6 и 3 соответственно.* **Пример 2.** $u_0 = 3, 30, 300, 3000$. *Второй процесс сходится, в первом сходимости нет.* Найдены: U, $P \approx 0.0877356431$, $\tau = 4P \approx 0.350942572$. Рис. 1 содержит графики оптимального решения задачи (1), Рис. 2 – зависимость от u функции Гамильтона-Понтрягина $K = -(t/2)/(1+u^2) - pu$ при $t = \tau$, $p = P$, с двумя максимизаторами $u_* = 0$, $u_* = 1$ и равными максимумами.

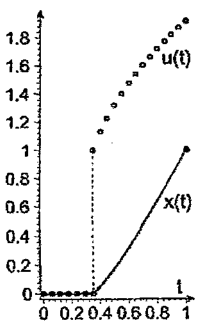


Рис. 1.

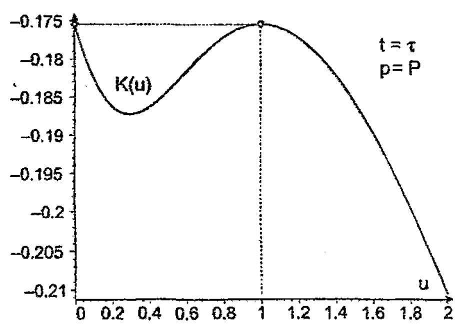


Рис. 2.

Литература

1. В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин Оптимальное упрвление. М. Наука. 1979.

2. С.Н. Аввакумов, Ю.Н. Киселев Решение систем нелинейных уравнений на основе ряда Чебышева. Сб. "Проблемы математической физики". ДИАЛОГ-МГУ. Москва. 1998. с. 5-27.

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ВНУТРЕННЕГО РАДИУСА ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Аксентьев Л.А.(Казань), Бирюков В.Ю., Микка В.П., Микка В.К. (Йошкар-Ола)

kokurin@marsu.ru

В работе [1] доказано следующее утверждение: пусть двупараметрическое семейство $S^*(\alpha, \beta)$ регулярных функций

$$f(\xi) = \xi + a_3\xi^3 + \dots, \quad \xi \in E = \{\xi : |\xi| < 1\}$$

такое, что

$$\xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \prec \frac{1+\beta\xi}{1-\alpha\xi} = f_0(\alpha, \beta; \xi),$$

$$(\alpha, \beta) \in \Delta = \{(\alpha, \beta) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : \alpha + \beta > 0\}$$

Тогда внутренний радиус звездообразной области $f(E)$ имеет единственную критическую точку $\xi = 0$, если $\alpha + \beta < 2/3$ В классе функций $S^*(\alpha, \beta)$ можно ввести естественную частичную упорядоченность с помощью соотношения

$$f_0(\alpha, \beta; E) \subset f_0(\alpha', \beta'; E)$$

Обозначим через

$$\Delta_{\alpha', \beta'} = \{(\alpha, \beta) \in \Delta : \alpha - 1 \le \frac{\alpha' - 1}{\beta' + 1}(\beta + 1), \quad \alpha + 1 \le \frac{\alpha' - 1}{\beta' - 1}(\beta - 1)\} \setminus \{\alpha' . \beta'\},$$

когда параметры α', β' принадлежат отрезку $\alpha' + \beta' = 2/3, \quad \alpha' \in [-1/3, 1]$

Теорема.Если $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\alpha', \beta'}$, то

$$S^*(\alpha, \beta) \subset S^*(\alpha', 2/3 - \alpha' - \varepsilon),$$

где ε сколь угодно малое положительное число.

Литература

1. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И. О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций // Изв. вузов. Математика.–1998.–N8.–С.3–13.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР[1]

Алеева С.Р., Ухоботов В.И. (Челябинск)
aleeva@csu.ru, ukh@csu.ru

Дифференциальная игра "шофер — убийца" [1], а также ряд аналогичных задач имеют уравнения движения следующего вида:

$$\dot{x} = -u - f_1(t, \varphi, v),\ \dot{\varphi} = f_2(t, \varphi, v),\ x \in R^n, \varphi \in R^m.$$

В докладе исследуется случай, когда управление $u \in A(\alpha(t))$ выбирает первый игрок, где многогранник:

$$A(y) = \{x \in R^n : \langle x_j, x\rangle \le y_j, j = 1, \ldots, l\}$$

определяется с помощью фиксированного набора вектров $x_j \in R^n$. Известно [2], что этот многогранник не пуст тогда и только тогда, когда $y \in K$, где конус

$$K = \left\{ y \in R^l : \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_j \ge 0,\ \lambda_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_j = 0 \right\}.$$

Предполагается, что $A(y+z) = A(y) + A(z)$ для любых $y, z \in K$. Функция $\alpha(t) \in K$ является кусочно-непрерывной. Терминальное множество $Z \subset R^n \times R^m$ задается с помощью фиксированной функции $F : R^m \to R^l$ и имеет вид

$$Z = \{(x, \varphi) :\ F(\varphi) \in K,\ x \in A(F(\varphi))\}$$

Построен максимальный стабильный мост, который в заданный момент времени p совпадает с терминальным множеством.

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. Мир:, 1967. 479с.

2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ МАРСЕЛЯ РИССА[1]

Александров А.В. (Владимир)
E-mail:alex@vgpu.vladimir.ru

Класс Харди h_p гармонических в единичном круге функций определяется условием

$$\|u\|_{h_p} = \sup_{0<r<1} \|u(re^{i\varphi})\|_{L_p(0,2\pi)} < \infty, \tag{1}$$

порождающем в этом классе норму при $1 < p < \infty$.

Хрошо известен результат М.Рисса о том, что пара сопряженных гармонических функций u и v принадлежат классу h_p, $1 < p < \infty$ одновременно. С

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 00-01-00018

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(проект №99-01-00893)

помощью аппарата конформных отображений это предложение переносится и в классы типа Харди $e_p(D)$ гармонических функций в области D с гладкой границей.

В докладе рассматривается вопрос о распространении теоремы М.Рисса в классы типа Харди $e_p(D)$ [1] для эллиптических по Петровскому систем второго порядка на плоскости с постоянными коэффициентами.

Пусть $u(x_1, x_2) = (u_1, \ldots, u_l)$, $x \in R^2$ - действительный вектор - решение эллиптической по Петровскому системы второго порядка на плоскости

$$Lu = 0, \quad L := \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} \in R^{l \times l}.$$

Для краткости вектор u назовем L- гармоническим.

Для u можно ввести d - сопряженный вектор v следующим равенством для градиентов [2]:

$$\nabla u = d \nabla v, d \in R^{2l \times 2l}.$$

Частным случаем приведенного соотношения являются условия Коши - Римана, связывающие гармонические векторы u и v - решения эллиптической системы типа Лапласа с коэффициентами $a_{11} = a_{22} = diag(1)$, $a12 = a21 = diag(0)$. В общем случае для L - гармонического вектора d-сопряжения вектор v может оказаться решением другой системы уравнений, в том числе не эллиптической.

Рассматриваются условия на коэффициенты d_{ij} блочной матрицы d. при которых теорема М.Рисс имеет место для d - сопряженной пары векторов u и v.

Литература

[1] Александров А.В. Задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка на плоскости в классах типа Харди. // Дифф. уравнения. -1998.- т.34, N6. С.775 - 781.

[2] Солдатов А.П. Аналог интеграла типа Коши для эллиптических систем // ДАН СССР. - 1986.- Т. 289, N4. - С. 800 - 804.

О ПРОПЕДЕВТИЧЕСКОМ КУРСЕ "ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ" Алексеева С.М. (Калининград)

alekseeva@email.albertina.ru

Для студентов-математиков второго курса на кафедре математического анализа Калининградского государственного университета читается курс (по выбору студентов) с рабочей программой, рассчитанной на 64 часа. Мы считаем, что на раннем этапе обучения можно ознакомить студентов со всем кругом идей, связанных с ортогональными рядами с единой позиции, если в качестве источника ортогональных систем выбрать самосопряженную задачу Штурма-Лиувилля. Такой подход полезен, во-первых, потому, что связывает классические университетские курсы, во-вторых, помогает ориентации студентов в осознанном выборе своей будущей специальности, готовит студентов к восприятию различных спецкурсов кафедры, например, "Некорректные задачи".

В первой части курса рассматриваются и систематизируются некоторые вопросы линейной алгебры, которые обобщаются и получают развитие в последующих главах. Вторая часть представляет собой элементарное введение в спектральную теорию линейных самосопряженных операторов на основе умеренного использования идей и понятий функционального анализа. Здесь изучаются структура пространства L_2, спектральные свойства интегральных и дифференциальных линейных операторов, в частности, оператора Штурма–Лиувилля, доказываются теоремы разложения Гильберта–Шмидта и Стеклова. В третьей, заключительной части рассматриваются конкретные системы функций, построенные по единой методологии как собственные функции некоторой задачи Штурма–Лиувилля, такие как многочлены Лежандра, Чебышева и др. подробно исследуются их свойства и возможные приложения.

Опыт преподавания курса показал, что уже на ранних стадиях обучения студенты могут успешно выполнять не только курсовые работы, но и готовить материалы к будущей дипломной работе, так как изучаемый в курсе материал дает возможность ориентироваться в современных направлениях научных исследований по теории оптимального управления, спектральной теории краевых задач.

ОБ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ[1]

Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А. (Екатеринбург)
ernst.albrekht@usu.ru

Сходимость итерационных методов построения допустимого управления, приводящего нелинейную систему в заданное состояние, обоснована [1] при условии малости возмущений, вызываемых нелинейностями в уравнениях движения. Наш пример показывает существенность таких условий. Управляемый процесс описывается системой $x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$, $x_2(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) + u(k) + x_1^3(k)$, $k = 0,\ldots,4$; качество процесса оценивается величиной $I\left[u\right] = \sum_{k=0}^{4} u^2(k)$. Задача состоит в отыскании управления $u(k)$, переводящего систему из состояния $x(0) = [0;0]^{\top}$ в состояние $x(5) = [a;b]^{\top}$ и такого, что $I\left[u\right] < \infty$ (при этом a и b играют роль параметров).

Методы [1,2] в нашем примере сходятся, если координаты конечной точки достаточно малы. Рассмотрим итерационную процедуру [2] построения управления как предела последовательности решений $\{x^{(s)}(k), u^{(s)}(k),\ k = 0,\ldots,4\}$ $(s = 0, 1, \ldots)$ линейных задач оптимального управления с показателем качества $I\left[u\right] \to \min$. В результате численного решения найдены границы сходимости метода. При удалении $x(5)$ от начала координат сходимость ухудшается; вне границ появляются движения, с увеличением числа итераций стремящиеся к бесконечности, что приводит к расходимости последовательности решений. На границах существуют точки $x(5)$, для которых последовательность сходится очень медленно (так, при $x(5) = [2.025; 2.025]^{\top}$ требуется

---

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект № 00-01-00753.

≈ 2000 итераций для достижения точности 10^{-2}), и точки, для которых она расходится, но ограничена.

Граница области сходимости состоит из точек этих двух типов и имеет вид криволинейного кольца. На некоторых участках кольца ухудшение сходимости при удалении от точки [0; 0] происходит постепенно, на других (ближе к осям координат) малое изменение параметров (в 4-м знаке после запятой !) превращает сходящуюся последовательность в расходящуюся.

Литература

[1]. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

[2]. Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А. О сходимости одной итерационной процедуры вычисления допустимого управления в нелинейных системах. Всеросс. науч. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", Екатеринбург, 26.02-2.03.2001 г. Тез. докл., С. 127-128.

ПРИМЕР УСТОЙЧИВОСТИ ГИЛЬБЕРТОВОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА $Lu = u'' + q(x)u$ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ $\|q\|_1$

Ассонова Н.В. (Смоленск)

assonova@mail.ru

Систему $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов пространства $\mathbf{L}_2(0,1)$ будем называть гильбертовой (бесселевой), если $(\exists\alpha > 0)(\forall f \in \mathbf{L}_2(0,1))$ $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \geq \alpha\|f\|^2$, $\left((\exists\beta > 0)(\forall f \in \mathbf{L}_2(0,1)) \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leq \beta\|f\|^2\right)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbf{L}_2(0,1)$.

Устойчивость гильбертовости и бесселевости систем собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов (д. о.) второго порядка в пространстве $\mathbf{L}_2(0,1)$ при малом изменении их коэффициен-тов рассмотрена в работе [1].

Пусть на интервале $(0,1)$ заданы два формальных д. о., "возмущённый" $Lu = u'' + q(x)u$, $q(x) \in \mathbf{L}_1(0,1)$, и простейший $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{u}''$. Пусть $\{\mu_n\}$ – произвольная последовательность комплексных спектральных параметров, $\{u_{n,p}(x)\}$, $\{\tilde{u}_{n,p}(x)\}$ $(n = 1,2,..., p = \overline{0,l_n})$ – отвечающие ей соответственно системы к. ф. выписанных д. о. (понимаемые безотносительно к виду краевых условий). Для однозначности построения одной системы по другой требуется выполнение условий:

$\tilde{u}_{n,p}(0) = u_{n,p}(0)$, $\tilde{u}'_{n,p}(0) = u'_{n,p}(0)$.

Теорема. *Пусть выполнено условие "сумма единиц" и карлемановское условие:* $(\exists M)(\forall k \in \mathbf{N})(\forall\mu \geq 0) \sum\limits_{\mu \leq |\mu_k| \leq \mu+1} 1 \leq M$, $(\exists C)(\forall k \in \mathbf{N})\ |\mathrm{Im}\,\mu_k| \leq C$. *Пусть система* $\{\tilde{u}_{n,p}/\|\tilde{u}_{n,p}\|\}$ *гильбертова в* $\mathbf{L}_2(0,1)$ *с постоянной* $\tilde{\alpha}$, *причём* $\|q\|_1 < K_1$. *Тогда система* $\{u_{n,p}/\|u_{n,p}\|\}$ *также гильбертова в* $\mathbf{L}_2(0,1)$ *с постоянной* α.

В формулировке теоремы K_1, α– константы, выписываемые в явном виде и зависящие от констант C, M, A, C_1, две последние из которых взяты из оценок $\|u_{n,p}\|_\infty \leq C_1\|u_{n,p}\|$ $(n \in \mathbf{N}, p = \overline{0,l_n}, l_n \in \mathbf{N}\cup\{0\})$, $\|u_{n,p-k}\| \leq A\|u_{n,p}\|$ $(n \in \mathbf{N}, p = \overline{0,l_n}, k = \overline{1,p})$.

Примером использования указанной теоремы служит утверждение: *для любой функции* $q(x) \in \mathbf{L}_1(0,1)$, *такой, что* $||q||_1 < 0,001$, *существует система корневых функций* $\{u_{n,p}\}$ $(n = 1,2,...,p = \overline{0,2})$, *соответствующая последовательности спектральных параметров* $\{2\pi n\}$, *являющаяся гильбертовой с константой* $9,9 \cdot 10^{-5}$.

Литература

1. Ассонова Н.В., Будаев В.Д. // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, N2. С.147-151.

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВИНЕРА-ХОПФА

Асхабов С.Н. (Майкоп)

E-mail askhabov@aport2000.ru

В вещественных пространствах Лебега $L_{1+\alpha}(0,\infty)$, $\alpha \geq 1$, рассматриваются уравнения вида

$$u^{\alpha}(x) + b(x) \int_0^{\infty} b(t)\, h(x-t)\, u(t)\, dt = f(x), \qquad (1)$$

где функция $b(x)$ и ядро $h(x)$ удовлетворяют условиям:

$$b(x) \in L_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}(0,\infty) \text{ при } \alpha > 1, \quad \sup_{-\infty<x<\infty} vrai\ |b(x)| < \infty \text{ при } \alpha = 1,$$

$$h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(x\,t)\, dt \geq 0 \text{ для почти всех } x \geq 0.$$

Используя градиентный метод, известный в теории потенциальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, доказывается

Теорема 1. Если $\alpha = r/s \in [1,\infty)$, где r и s - любые нечетные числа, то уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(0,\infty)$ при любом $f(x) \in L_{1+1/\alpha}(0,\infty)$. Если, кроме того, $h(x)$ является четной функцией и $\alpha \geq 3$ - любое нечетное число, то последовательность $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемая по формуле:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \delta_n\, ||Au_n - f||_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha}\, |(Au_n)(x) - f(x)|^{1/\alpha-1}\, [(Au_n)(x) - f(x)],$$

где $u_0(x) \in L_{1+\alpha}(0,\infty)$ - начальное приближение, $Au = u^{\alpha} + b \cdot [h * (b \cdot u)]$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + \alpha\,(||u_n||_{1+\alpha} + ||Au_n - f||_{1+1/\alpha})^{\alpha-1} + ||b||^2_{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}||h||_1}\right),$$

$\varepsilon > 0$ - любое число, сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(0,\infty)$.

Аналог теоремы 1 имеет место и для уравнений $\varrho \cdot u^{\alpha} + h * u = f$ в весовом пространстве Лебега, если вес $\varrho(x)$ удовлетворяет условию: $\int_0^{\infty} \varrho^{2/(1-\alpha)}(x)\, dx < \infty$ при $\alpha > 1$ и $\sup_{-\infty<x<\infty} vrai\ |\varrho(x)| < \infty$ при $\alpha = 1$.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЕ[1]

Афанасьева Г.Б., Барабанов А.Е. (Санкт-Петербург)
Andrey.Barabanov@pobox.spbu.ru

Двойственность бесконечномерных задач H^∞ оптимального управления и фильтрации обычно доказывается методом сведения к системе первого порядка, что предполагает решение операторных уравнений Риккати. В данной работе доказано, что для линейных объектов, в уравнение которых входят интегро-дифференциальные операторы, двойственность задается простым алгебраическим преобразованием передаточных функций.

В задаче фильтрации объект наблюдения и измеритель описываются уравнениями $a_o(p)x_o(t) = b_o(p)w_o(t)$, $y_o(t) = c_o(p)x(t) + v(t)$, $z_o(t) = d_o(p)x(t)$, где w_o, v_o – возмущения, y_o – измерение, z_o – оцениваемая переменная, все величины векторные; a_o, b_o, c_o, d_o, – матричные целые функции из класса Харди H^∞; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Требуется найти линейную оценку $\hat{z}(t) = h_o(p)y_o(t)$, минимизирующую функционал

$$J_o(h_o) = \sup_{\kappa^{-1}\|w\|^2_{L^2(-\infty,0)} + \lambda^{-1}\|v\|^2_{L^2(-\infty,0)} \le 1} \|z_o - \hat{z}\|^2_{L^2(-\infty,0)} \quad \to \quad \min_{h_o}.$$

В задаче управления требуется найти оптимальную обратную связь $u_c(t) = h_c(p)w_c(t)$ для объекта $a_c(p)y_c(t) = b_c(p)u_c(t) + c_c(p)w_c(t)$, минимизирующую функционал

$$J_c(h_c) = \sup_{\|w\|^2_{L^2(0,\infty)} \le 1} \left(\kappa\|y_c\|^2_{L^2(0,\infty)} + \lambda\|u_c\|^2_{L^2(0,\infty)}\right) \quad \to \quad \min_{h_c}$$

при нулевых начальных данных. Здесь w_c – возмущение в объекте, u_c – управление; a_c, b_c, c_c – матричные целые функции из класса Харди H^∞.

Теорема. Пусть левосторонняя факторизация заменена на правостороннюю: $a_o^{-1}b_o = \tilde{b}_o\tilde{a}_o^{-1}$, и выполнены уравнения двойственности: $a_c = \tilde{a}_o^T$, $b_c = \tilde{b}_o^T c_o^T$, $c_c = \tilde{b}_o^T d_o^T$. Тогда функционалы качества в задачах управления и оценивания совпадают, $J_o(h_o) = J_c(h_c)$, если $h_c = -h_o^T$.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Афанасьева Т.Н. (Краснодар)
e-mail du@math.kubsu.ru

Рассматривается линейное разностное уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A_{nk}x_k + f_n, \qquad n \ge 0, \tag{1}$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ.

где $\{x_n\}, \{f_n\}$ –последовательности элементов из R^m. Всюду далее A_{nk} – $m \times m$ матрицы с неотрицательными элементами. Предполагается, что $(I - A_{nn})$ обратимы при $n \geq 0$ (I – единичная матрица) и $(I - A_{nn})^{-1} \geq 0$, $n \geq 0$.

Определение 1. Уравнение (1) устойчиво, если при любом свободном члене f таком, что $\sup\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_{R^m} < \infty$ решение x уравнения (1) удовлетворяет условию $\sup\limits_{n\geq 0} \|x_n\|_{R^m} < \infty$.

Определение 2. Уравнение (1) асимптотически устойчиво, если из того, что $f_n \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 3. Пара пространств (X, Y) допустима относительно уравнения (1), если при любом $f \in X$ решение $x \in Y$.

Положим $A^1_{nk} = A_{nk}$, $\quad A^p_{nk} = \sum\limits_{l=k}^{n} A_{nl} A^{p-1}_{lk}$, $\; p \geq 2$.

Обозначим через $\lambda_j(B)$ собственные числа матрицы B.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *1) Для устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_{n\geq 0} \sum\limits_{k=0}^{n} \|A_{nk}\| < \infty$ *и при некотором* p $\sup\limits_{j} |\lambda_j(B_p)| < 1$, *где*

$B_p = \lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=N}^{n} A^p_{nk}$.

2) Если уравнение (1) устойчиво, то при любом p $\sup\limits_{j} |\lambda_j(C_p)| < 1$, *где*

$C_p = \lim\limits_{N\to\infty} \liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=N}^{n} A^p_{nk}$.

Будем обозначать через X линейное пространство последовательностей, замкнутое относительно нормы $\|x\| = \sup\limits_{n\geq 0} \|x_n\|_{R^m}$.

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) устойчиво. Тогда пара (X, X) допустима относительно уравнения (1) в том и только в том случае, если при любом* $\{y_n\} \in X$ *последовательность* $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} A_{nk} y_k \right\} \in X$.

Теорема 3. *Для асимптотической устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) было устойчивым и при любом* $N \geq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nN} = 0$.

Литература

1. Цалюк З.Б. Линейные интегральные уравнения Вольтерра. – Краснодар, 1980. - 71с.

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ МНОГОЧЛЕНА ЧЕБЫШЕВА ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{p_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{q_\nu(t)\}_{\nu=0}^{\infty}$ – ортонормированные на $[a, b]$ с весами p и q, соответственно, системы функций, полученные при ортогонализации методом

Шмидта одной и той же линейно независимой и замкнутой в $L_q^2[a,b]$ последовательности. В [1] получена формула для разности сумм Фурье функции $f \in L_q^2$ по рассматриваемым системам:

$$s_n^{(p)}(f;x) - s_n^{(q)}(f;x) = \sum_{k=o}^{n} p_k(x) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_k^{(p)}(q_\nu) c_\nu^{(q)}(f), \qquad (1)$$

где $c_k^{(p)}(q_\nu) := \int_a^b q_\nu p_k p dt$, $c_\nu^{(q)}(f) := \int_a^b f q_\nu q dt$. На основе (1) в [1] получены оценки сверху модуля левой части (1) в зависимости от x, n и $||f||_{L^\infty[a,b]}$ в случае ортогональных на [-1,1] систем многочленов Якоби. Для их получения применялись оценки сверху модулей величин

$$c_k^{(p)}(q_\nu), \ \ \varrho_{k,\nu}^{p,q} := c_k^{(p)}(q_\nu)[q_\nu(1)]^{-1} - c_k^{(p)}(q_{\nu+1})[q_{\nu+1}(1)]^{-1}, \qquad (2)$$

найденных в явном виде в ряде случаев. Такие случаи редки. При этом для оценки сверху модуля левой части (1) достаточно иметь более или менее точные оценки сверху модулей величин (2). В частности, их дает

Теорема. *Пусть $g(\delta)$ - вогнутый модуль непрерывности, а $\{q_\nu\}$ и $\{p_k\}$ – системы многочленов, ортонормированные на [-1,1] с весами $q(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ и $p(t) = q(t)g(\sqrt{1-t})$, соответственно. Тогда равномерно по $k = 0, 1, \ldots$ и $\nu = k, k+1, \ldots$*

$$c_k^{(p)}(q_\nu) = O(\frac{\sqrt{g((\nu-k+1)^{-1})}}{(\nu-k+1)}), \ \ \varrho_{k,\nu}^{p,q} = O(\frac{\sqrt{g((\nu-k+1)^{-1})}}{(\nu-k+1)^2}). \qquad (3)$$

Замечание. Для удовлетворяющего теореме якобиева веса p оценки (3) являются двусторонними. На основе (3) для левой части (1) получены аналоги оценок из [1].

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00175), программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96035) и грантом Минобразования РФ (проект Е00-1.0-184)

Литература

1.Бадков В.М. Равносходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам//Матем. заметки, 1969. Т.5. Вып.3. С.285-295.

АЛГЕБРА КАНОНИЧЕСКИХ АФФИНОРНЫХ СТРУКТУР ОДНОРОДНОГО Ф-ПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Балащенко В.В. (Минск)

Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка k ($\Phi^k = id$), $g = h \oplus m$ — каноническое редуктивное разложение алгебры Ли g группы Ли G, соответствующее ее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$. Обозначим через θ ограничение φ на подпространстве m, которое отождествляется с касательным пространством к G/H в точке $o = H$. Инвариантная аффинорная структура F на G/H называется канонической [1], если ее значение в точке o есть полином от θ.

Все канонические аффинорные структуры на G/H образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур. Заметим, что для однородного симметрического пространства ($\Phi^2 = id$) алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ тривиальна (состоит лишь из скалярных структур, т.е. изоморфна $\mathbf{R}$).

Обозначим далее через s число пар сопряженных корней степени k из 1, входящих в спектр оператора θ.

Теорема 1 *Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ однородного Φ-пространства G/H порядка k изоморфна алгебре*

$$\underbrace{\mathbf{C} \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}}_{s}(\oplus \mathbf{R}),$$

при этом слагаемое $\mathbf{R}$ входит тогда и только тогда, когда $-1 \in spec\theta$.

Выделим некоторые частные случаи.

Следствие 1 *Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ однородного Φ-пространства G/H порядка 3 изоморфна $\mathbf{C}$, причем роль мнимой единицы в $\mathcal{A}(\theta)$ играет широко известная каноническая почти комплексная структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta)$ ([2], [3]).*

Следствие 2 *Если однородное Φ-пространство G/H порядка 4 не является локально симметрическим (т.е. $[m, m] \not\subseteq h$), то его алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ изоморфна $\mathbf{C} \oplus \mathbf{R}$.*

В качестве примеров однородных Φ-пространств, реализующих следствие 2, выделим 6-мерную обобщенную группу Гейзенберга, а также сферу $S^5 \cong SU(3)/SU(2)$. Отметим, что строение $\mathcal{A}(\theta)$ для этой сферы установлено в работе [4].

Литература

1. Балащенко В.В., Степанов Н.А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах // Мат. сборник. 1995. Т.186. N 11. С.3-34.

2. Степанов Н.А. Однородные 3-циклические пространства // Изв. ВУЗов. Математика. 1967. N 12. С.65-74.

3. Wolf J., Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. N. 1-2. P. 77-159.

4. Липагина Л.В. О строении алгебры инвариантных аффинорных структур на сфере S^5 // Изв. ВУЗов. Математика. 1997. N 9. С.17-20.

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ СИММЕТРИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Банару Г.А. (Смоленск)

banaru@keytown.com

Изучение групп симметрий дифференциальных уравнений вообще и обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, – одна из важнейших задач современной дифференциальной геометрии и математической физики. Автор настоящих тезисов исследует обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка.

Рассматривается задача об отыскании в инвариантном виде необходимых и достаточных условий, при выполнении которых обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка обладает k-мерной группой точечных симметрий. Задача полностью решена для $k = 5, 6, 7$. (Напомним [1], что 7 - максимальная из возможных размерность группы точечных симметрий уравнения $y''' = f(x, y, y', y'')$.)

Доказано, что единственно возможной 5-мерной группой точечных симметрий такого уравнения является (с точностью до изоморфизма) группа $g_{5,5}$, 6-мерной - $g_{4,2}$, 7-мерной $g_{2,6}(3)$ (в терминологии Картана [2]).

Исследование проводится с использованием метода внешних дифференциальных форм Картана-Лаптева, развитого А.М. Васильевым [3].

Литература

1. Степанов Н.В. Геометрия дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.- 1981, т. 12.- С. 127-165.

2. Cartan E. Les sous-groupes des groupes continus de transformantions // Oeuvres completes.- P.2, v. 2.- Paris, 1953.

3. Васильев А.М. Общие инвариантные группы в дифференциальной геометрии // Доклады АН СССР LXXIX, 1951.- N1.- С. 5-7.

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГУСЕНИЧНОГО РОБОТА[1]

Барабанов О.О. (Ковров)

Для управления гусеничным роботом необходимо вычислять в режиме реального времени его поле скоростей $v(x)$ по известным скоростям v_1, v_2 гусениц относительно робота. Жесткопластическая модель взаимодействия гусениц и опорной плоскости приводит к задаче

$$\int\limits_{G_1 \cup G_2} |v - v_0| p \, dx \to \min, \quad v = \Lambda x + u, \tag{1}$$

где G_1 и G_2 — правая и левая "гусеницы", v_0 — известное поле скоростей гусениц относительно робота, $0 \le p$ — известная плотность нормального давления, Λ — произвольная постоянная кососимметрическая матрица (2×2), u — произвольный постоянный вектор. Более точно, считаем, что $G_1 = G - (0, c)^T$, $G_2 = G + (0, c)^T$, где $G = [-a, a] \times [-b, b]$, $b < c$. Кроме того, предположим, что $p(x_1, x_2) = p(x_1, -x_2)$ $\forall x_1, x_2$ (гусеницы равнонагружены), $v_0 = (v_j, 0)^T$ на G_j, $|v_1| < v_2$, и введем $p_1(x_1, x_2) = p(x_1, x_2 - c)$, $0 \ne p_1 \in L_1(G)$.

При сделанных предположениях задача (1) имеет следующее решение: $u = (\frac{v_1 + v_2}{2}, 0)^T$, $\Lambda_{12} = -\Lambda_{21} = \lambda \frac{v_2 - v_1}{2c}$, где λ является единственным решением одномерной строго выпуклой задачи

$$\int\limits_G \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \left(\lambda(x_2 - c) + c\right)^2} \, p_1(x) \, dx \to \min, \quad \lambda > 0.$$

Например, в случае $a = 400$, $b = 55$, $c = 220$, $p = 1$ получим $\lambda = 0.5338$ вместо $\lambda = 1$ для двухколесного средства.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 99-01-00072 и 99-01-00893

Пусть $G^\varepsilon = \varepsilon G$, $p_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}p_1(\varepsilon^{-1}x)$. Тогда последовательность функций

$$F_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_{G^\varepsilon} \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \big(\lambda(x_2 - c) + c\big)^2}\, p_1^\varepsilon(x)\, dx$$

Г-сходится к $F_0(\lambda) = c|\lambda - 1| \int\limits_G p_1(x)\, dx$. Соответственно,

$$\lambda(\varepsilon) = \arg\min F_\varepsilon(\lambda) \to \arg\min F_0(\lambda) = 1.$$

Таким образом, в предельном случае получаем совпадение с известными формулами для двухколёсного средства.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА СТИЛТЬЕСА

Бахтин И.А. (Воронеж)

Приводятся различные новые признаки существования интеграла Стилтьеса.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на отрезке $[a,b]$ $(a < b)$; $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ — какое-нибудь разбиение отрезка $[a,b]$ на конечное число частей $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ — произвольные точки и число $\lambda = \max \Delta x_i$. Составим суммы

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i),\ s = \inf_{\xi_i} \sigma,\ S = \sup_{\xi_i} \sigma,$$

которые называются соответственно интегральной суммой Стилтьеса и нижней и верхней суммами Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$. Как известно, интеграл Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = J \in \mathbb{R}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на отрезке $[a,b]$, где $a < b$. Тогда для существования интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0,$$

где s и S — это есть соответственно нижняя и верхняя суммы Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$, и чтобы существовал по крайней мере один из пределов:

$$\lim_{\lambda \to 0} s = J \in \mathbb{R},\ \lim_{\lambda \to 0} S = J \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на отрезке $[a,b]$, где $a < b$.*

Тогда для существования интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0,$$

где s и S — это есть соответственно нижняя и верхняя суммы Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$;

2) множество $\{s\}$ всех нижних сумм Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$ ограничено сверху и от присоединения новых точек деления нижняя сумма Стилтьеса s не уменьшается.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С МИНИЭДРАЛЬНЫМИ КОНУСАМИ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве с миниэдральным конусом приводятся новые признаки существования положительных собственных векторов линейных положительных монотонно компактных операторов.

Теорема 1. *Пусть в вещественном банаховом пространстве E*

1) воспроизводящий конус K нормален и миниэдрален;

2) линейный положительный оператор A монотонно компактен и u-ограничен сверху на конусе K;

3) оператор A неразложим и его спектральный радиус $r = r(A)$ положителен.

Тогда существует элемент $x_0 > 0$ такой, что $Ax_0 = rx_0$.

Теорема 2. *Пусть*

1) выполняются условия 1)-2) теоремы 1;

2) оператор A u-неразложим и значение $Au \neq 0$.

Тогда спектральный радиус $r = r(A)$ оператора A положителен и существует элемент $x_0 > 0$, такой, что $Ax_0 = rx_0$.

Теорема 3. *Пусть в вещественном банаховом пространстве E*

1) конус K миниэдрален;

2) линейный оператор A преобразует конус K в некоторый конус Рутмана $K_q(u)$, где $u > 0$, $\|u\| = 1$ и $q \in (0,1]$ — некоторые фиксированные числа, и значение $Au \neq 0$;

3) для числа

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda > 0 | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^{n-1}u \text{ сходится}\}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^n} A^{n-1} u$$

расходится.

Тогда существут элемент $x_0 > 0$, такой, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ К-ФУНКЦИОНАЛА В ПАРЕ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА [1]

Беломытцева Е.Г. (г. Воронеж)

E-mail bell@kmm.vsu.ru

Пусть $\{H_0, H_1\}$ — пара гильбертовых пространств. Символом $L(H)$ будем обозначать пространство всех линейных ограниченных операторов в H с обычной операторной нормой. Легко видеть, что пространства $L(H_0)$ и $L(H_1)$ образуют банахову пару $\{L(H_0), L(H_1)\}$.

Напомним, что для любой банаховой пары $\bar{X} = \{X_0, X_1\}$ определен К-функционал Петре на пространстве $X_0 + X_1$:

$$K\left(s,t,x,\bar{X}\right) = \inf_{x=x_0+x_1} s\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}, \quad s,t>0.$$

Пусть задана алгебра фон Неймана $\beta \subset L(H_0) \cap L(H_1)$, действующая одновременно и в H_0 и в H_1. Для каждого $j = 0,1$ рассмотрим операторы $T: H_j \to H_j$ такие, что для любого оператора $A \in \beta$ и $x \in H_j$ $(j = 0,1)$ $\quad T(Ax) = AT(x)$, то есть T принадлежит коммутанту β' алгебры фон Неймана β в $L(H_j)$. Тогда можно рассмотреть интерполяционную пару алгебр операторов $\left\{\beta'_{H_0}, \beta'_{H_1}\right\}$, которая является подпарой пары $\{L(H_0), L(H_1)\}$.

Мы рассмотрели случай пары $\left\{m'_{l_2(H_0)}, m'_{l_2(H_1)}\right\}$, где m — алгебра мультипликаторов M_α в $l_2(H_j)$ $(j=0,1)$, а $\alpha = \{\alpha_n\} \in l_\infty$, $\{x_n\} \in l_2(H_j)$ $(j=0,1)$, $M_\alpha(\{x_n\}) = \{\alpha_n x_n\}$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Для любого оператора $U \in m'_{l_2(H_0)} + m'_{l_2(H_1)}$*

$$K\left(s,t,U,\left\{m'_{l_2(H_0)}, m'_{l_2(H_1)}\right\}\right) \asymp K\left(s,t,U,\left\{L\left(l_2(H_0)\right), L\left(l_2(H_1)\right)\right\}\right).$$

Иными словами К-функционал не меняется при переходе от пары $\{L(l_2(H_0)), L(l_2(H_1))\}$ к паре $\left\{m'_{l_2(H_0)}, m'_{l_2(H_1)}\right\}$.

Аналогичная теорема справедлива для алгебры операторов A умножения на измеримые функции $a(t) \in L_\infty([0,1])$ в гильбертовом пространстве $L_2([0,1], H_j)$, то есть $a(t)x(t) = A(x(t))$ и $A: L_2(H_j) \to L_2(H_j)$ $(j=0,1)$. Такие операторы образуют алгебру фон Неймана M. Тогда можно рассмотреть пару алгебр $\left\{M'_{L_2(H_0)}, M'_{L_2(H_1)}\right\}$ и справедлива

[1] Работа поддержана фондом С.Г. Крейна, программа "Молодые математики".

Теорема 2. Для любого оператора $U \in M'_{L_2(H_0)} + M'_{L_2(H_1)}$

$$K\left(s,t,U,\left\{M'_{L_2(H_0)},M'_{L_2(H_1)}\right\}\right) \asymp K\left(s,t,U,\left\{L\left(L_2\left(H_0\right)\right),L\left(L_2\left(H_1\right)\right)\right\}\right).$$

АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ[1]

Белышев Д.В. (Переславль-Залесский)
belyshev@u-pereslavl.botik.ru

Рассматривается дискретная система как цепочка операторов с ограничением на управление

$$x(t+1) = f(t,x(t),u(t)), t \in T = \{t_I, t_I+1, ..., t_F\}, \tag{1}$$

Пусть M — множество троек $(T, x(t), u(t)) = m$. Рассматривается задача (D, I) о минимуме функционала $I : M \to \mathbb{R}$ на множестве $D \in M$, удовлетворяющем связям (1) и требуется найти последовательность $\{m_s\} \in D$, на которой $I(m_s) \to I_* = \inf\limits_D I$.

Строится итеративный алгоритм второго порядка, основанный на достаточных условиях локального минимума функционала [Гурман, 1997].

Вводится вспомогательная функци $H = \varphi^T(t+1)f(t,x(t),u(t))$ и произвольные функции $\psi(t)$ и $\sigma(t)$, которые определяются из теоремы о локальном минимуме как

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = H_x(t,x(t),u(t)),\\
&\sigma(t) = f_x^T\sigma(t+1)f_x + H_{xx} -\\
&\qquad (H_{xu} + f_u^T\sigma(t+1)f_x)^T N^{-1}(H_{xu} + f_u^T\sigma(t+1)f_x),\\
&H_u = 0, \quad N = (H_{uu} + f_u^T\sigma(t+1)f_u) < 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

при $t = t_F$

$$\psi(t_F) = -F_\chi(x(t_F)), \quad \sigma(t_F) = -F_{\chi\chi}(x(t_F)). \tag{3}$$

Перед началом итеративного процесса определяется глобальный минимум для конечного момента времени, и вычисляются начальные данные для дальнейших итераций.

Далее решается задача локального поиска минимума функционала на дискретном интервале $\tilde{T} = \{\tau, t_F\}, \quad \tau < t_F$ с использованием условий (2)-(3). Новая программа управления определяется как $u^{II}(t) = u^I(t) - N^{-1}(f_u^T\sigma(t+1)f_x + H_{xu})$. Решается цепочка (1), определяется функционал $F(x^{II}(t_F))$ и если $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$, то происходит расширение интервала $\tau = \tau - 1$, в противном случае — дополнительное разбиение временного интервала.

Предложенная схема гарантирует улучшение любого локально неоптимального режима. Результатом поиска является пара: локальная минималь и локально оптимальный синтез управления в ее окрестности.

Литература

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления — 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Физматлит, 1997.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 00-01-00073l

О ВОЛЬТЕРОВОЙ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ

Беляева О.П., Жуковский Е.С. (Тамбов)[1]
aib@tsu.tmb.ru

Различным обобщениям интегрального оператора Вольтерра посвящены многочисленные исследования [1,2]. Мы предлагаем следующее определение вольтерровости. Обозначим $\mathrm{v} = \{e_\gamma \subset [a,b] | \forall\gamma,\eta \in [0, b-a]\ \mu(e_\gamma) = \gamma,\ \gamma < \eta \Rightarrow e_\gamma \subset e_\eta.\}$ Пусть B - банахово пространство функций $y : [a,b] \to R^m$. Линейное отображение $F : B \to B$ назовем вольтерровым на v, если для каждого $e_\gamma \in \mathrm{v}$ и любого $y \in B$ из $y(s) = 0$ на e_γ следует $(Fy)(s) = 0$ на e_γ. Исследуем условия обратимости вольтерровых операторов.

Обозначим $B(e_\gamma)$ - пространство сужений функций из B на множество e_γ с нормой $||y_\gamma||_{B(e_\gamma)} = \inf ||y||_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$. Определим оператор $\Pi_\gamma : B \to B(e_\gamma)$ равенством $(\Pi_\gamma y)(t) = y(t)$ при всех $t \in e_\gamma$. Пусть оператор $P_\gamma : B(e_\gamma) \to B$ некоторым образом продолжает каждую функцию y_γ на весь $[a,b]$.

Будем говорить, что в банаховом пространстве B выполнено V-*условие*, если $\forall e_\gamma \in \mathrm{v},\ \forall\{y_i\} \subset B\ ||y_i - y||_B \to 0,\ y_i(t) = 0,\ \forall t \in e_\gamma \Rightarrow y(t) = 0\ \forall t \in e_\gamma$; и выполнено C-*условие*, если для каждого $y \in B$ норма $||\Pi_\gamma y||_{B(e_\gamma)}$ является непрерывной функцией аргумента γ. Отметим, что при выполнении V-условия пространство $B(e_\gamma)$ является банаховым.

Теорема 1. *Пусть в пространстве B выполнено V-условие; операторы $\{F_i\} : B \to B$, $i = 1, 2, \ldots$ являются вольтерровыми на системе v. Если $||F_i y - Fy||_B \to 0$ при каждом $y \in B$, то и предельный оператор $F : B \to B$ также вольтерров на системе v.*

Следствие. *Если $K : B \to B$ линейный ограниченный вольтерровый на v оператор со спектральным радиусом $\rho(K) < 1$, то оператор $(I - K)^{-1}$ также вольтерровый на системе v.*

Теорема 2. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие. Если вольтерровый на системе v оператор $Q : B \to B$ обратим, то для вольтерровости на v оператора Q^{-1} необходимо и достаточно обратимости операторов $Q_\gamma = \Pi_\gamma Q P_\gamma$ для каждого $\gamma \in [0, b-a]$.*

Теорема 3. *Пусть в банаховом пространстве B выполнены условия V, C; оператор $K : B \to B$ является линейным улучшающим вольтерровым на системе v. Тогда спектральный радиус этого $\rho(k) = 0$.*

Следствие. Для вольтеррового на v линейного улучшающего оператора K обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$ при любом λ является вольтерровым на v.

Теорема 4. *Пусть в банаховом пространстве B выполнены условия V, C; оператор $K : B \to B$ является линейным улучшающим вольтерровым на системе v, оператор $S : B \to B$ линейный ограниченный вольтерровый на системе v. Тогда, если один из операторов $I - K - S$, $I - S$ обратим и обратный к нему оператор вольтерров на v, то обратим и другой и обратный к нему также вольтерров.*

Литература

1. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровые уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.

---

[1] Работа поддержана РФФИ (грант № 01-01-00140)

2. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №9. С. 1599-1605.

К ВОПРОСУ ОБ ОБОСНОВАНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Беляева Э.С. (Воронеж)

"Уравнения, неравенства и их системы" традиционно является стержневой темой школьной математики, изучаемая уже с начальных классов. И никогда, начиная с 50 годов 20в, эта тема не изучалась в школе так формально (на уровне рецептов), как в последние годы. Практически отсутствует теория равносильности уравнений, неравенств и их систем в учебной и методической литературе. И одна из главных причин такого положения, на мой взгляд, в самом понятии "равносильность". Если говорить о равносильности уравнений над некоторым числовым полем, то соответствующая теория довольно громоздка, сложна и не пригодна для школы. А именно такое определение и даётся в школьных учебниках.

Но ведь ещё известным методистом П.А. Буданцевым [1] было дано оригинальное определение равносильности уравнений. В нём удачно выбирается множество M, на котором рассматриваются решаемые уравнения. В современной трактовке оно звучит так: "Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ (1) с областью определения M_1 и $f_2(x) = g_2(x)$ (2) с областью определения M_2 называются *равносильными на множестве* $M \subseteq M_1 \cap M_2$, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений на этом множестве". Если уравнения равносильны на множестве $M = M_1 \cap M_2$, то будем просто говорить, что они *Б-равносильны*. Сформулированные теоремы равносильности почти не содержат оговорок, удобны в применении.

В течение полутора лет (2000-2001г) под руководством автора тезисов при ВОИПКРО работали проблемные курсы по теме "Равносильность в курсе математики средней школы", посвящённые памяти П.А. Буданцева. Была изучена научно-методическая литература по теме исследования, начиная с 30 годов 20в, в том числе методическое наследие П.А. Буданцева.

Среди участников курсов — руководители районных методических объединений, творчески работающие учителя всех видов школ г. Воронежа и Воронежской области, а также методисты ВГПУ (более 50 человек).

Мы построили теорию равносильности уравнений, неравенств, их систем и совокупностей, опираясь на определение равносильности, данное П.А. Буданцевым. Прорешали с обоснованием все основные типы уравнений, неравенств и их систем курса элементарной алгебры, а также разработали методику внедрения результатов исследования в практику работы школы (без увеличения количества часов).

Начата уже экспериментальная проверка материалов, в успешных результатах которой мы не сомневаемся.

Литература

1. П.А. Буданцев и Г.М. Щипакин. Квадратные и иррациональные уравнения. Учпедгиз, 1956.

МЕТОД ПЕРРОНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Беседина С.В., Пенкин О.М.[1] (Воронеж)

Пусть, для простоты, Ω – связное множество, полученное пересечением трехмерной области G с конечным числом плоскостей. Это множество имеет естественную стратификацию, составленную из плоских кусков σ_{2i} - двумерных стратов- и их граничных отрезков (или кривых, лежащих в ∂G) σ_{1j} – одномерных стратов. На объединении $\partial\Omega_0$ одномерных стратов, лежащих в ∂G задаются краевые условия, а на $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega_0$ задается оператор Лапласа Δ. В двумерных стратах он определяется обычным образом, а в одномерных стратах – формулой

$$\Delta u(x) = \sum_{\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x),$$

где ν – единичные нормали в точке x, направленные внутрь стратов σ_{2j}. Запись $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ означает примыкание страта σ_{2j} к σ_{1i}.

В докладе сначала приводится аналог формулы Пуассона для задачи Дирихле в стратифицированном шаре и на ее основе реализуется метод Перрона решения задачи Дирихле в произвольном стратифицированном множестве. Как частный случай получается формула Пуассона для дивергентного уравнения с разрывным коэффициентом.

Аналогичные результаты получены и в многомерном случае.

Постановка задачи Дирихле в самом общем случае подробно описана в работах [1, 2, 3].

Литература

1. O.Penkin. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions, in: F.Ali Mehmeti, J. von Below and S.Nicaise eds., Partial differential equations on multistructures, Marcel Dekker, 2001, P.183-191

2. О.М. Пенкин, Е.М. Богатов, О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах//Матем. заметки, 2000, Т.68, вып.6, С. 874-886

3. О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный, О дифференциальных неравенствах для эллиптических операторов на сложных многообразиях//ДАН, 1998, Т.300, 4, С. 456- 458

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА[1]

Бигильдеев С.И. (Челябинск)

sbig@math.cgu.chel.su

Аппроксимационный градиент представляет собой градиент линейной функции, имеющей наименьшее среднеквадратическое отклонение вблизи

[1] Работа частично поддержана грантами РФФИ: 01-01-00417, 01-01-00418

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00018).

рассматриваемой точки от исследуемой функции [1]. В случае дифференцируемой функции этот вектор при стягивании области интегрирования в точку будет совпадать с ее градиентом.

В настоящей работе аппроксимационный градиент представлен в виде линейного интегрального оператора свертки исследуемой и, так называемой, весовой функций. Показано, что при выборе весовой функции специального вида компоненты вектора аппроксимационного градиента являются усреднениями по Стеклову обобщенных производных Соболева. Это позволяет исследовать экстремальные свойства функций из пространств Соболева, по крайней мере, в существенном смысле. Введен класс регулярно аппроксимируемых функций, для которых предлагаемый здесь подход к решению экстремальных задач сводится к поиску существенно стационарных точек и к анализу выпуклозначного полунепрерывного отображения. Для локально липшицевых функций это многозначное отображение совпадает с субдифференциальным отображением Ф.Кларка [2].

Литература.

1. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. Разрывные экстремальные задачи. С.-П.: Гиппократ, 1995, 358с.

2. Бигильдеев С. И., Рольщиков В. Е. Свойства аппроксимационного градиента в зависимости от весовой функции// Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. N 4. С.89-94.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСОБИЕ "СОРЕВНОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ"[1]

Бигильдеева Т.Б., Таркаева О.В. (Челябинск)

E-mail: tbig@cgu.chel.su

Курс "Методы оптимизации", предназначенный для студентов специальности "Прикладная математика", включает раздел "Численные методы оптимизации". Обычно лектор последовательно приводит схемы методов оптимизации, указывает их особенности, формулирует и доказывает теоремы о сходимости методов.

К сожалению, традиционное изложение материала по этой теме приводит к тому, что студентам методы кажутся похожими один на другой, они плохо чувствуют специфику методов, их плюсы и минусы.

На кафедре теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета разработана программа "Соревнование методов оптимизации", предназначенная для показа студентам на лекциях по курсу "Методы оптимизации".

Лектор имеет возможность выбирать по два метода оптимизации, двухмерную задачу, при решении которой они будут соревноваться, и начальную точку. На экране отображается движение к оптимуму на линиях уровня минимизируемой функции и таблица с более полной информацией о ходе процесса (достигнутая точность, затраченное число вычислений функции и градиента и т.д.). Результаты каждого соревнования заносятся в протокол, который

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00018)

можно сортировать по разным критериям. Смена масштаба изображения позволяет рассматривать поведение траекторий как вблизи точки минимума, так и "панорамно".

Лекция с использованием программы вызывает большой интерес у студенческой аудитории. Она дает студентам возможность наглядно увидеть особенности изучаемых методов оптимизации.

С программой можно ознакомится по адресу
http://www.math.cgu.chel.su/ trk/oscreen.htm.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ У ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Близняков Н.М. (Воронеж)

Рассматривается классическая задача [1], [2] о существовании вещественных решений у системы полиномиальных уравнений и неравенств с n неизвестными. Предлагается алгоритм решения такой задачи для конкретных полуалгебраических систем, основанный на теореме Пуанкаре-Мейсснера-Пойа [3] о положительной определенности вещественных форм от n переменных в положительном октанте $\mathbb{R}^n_+$. Алгоритм позволяет решить задачу о существовании вещественного решений у полуалгебраической системы в результате арифметических и логических операций над коэффициентами многочленов, задающих полуалгебраическую систему. Алгоритм удобен для использования в его вычислительных процедурах компьютерной техники.

Литература

1. Горин Е.А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // Успехи математических наук, 1961. - т. 16 Вып. 1 (97). - с. 91-117.

2. Коркина Е.И, Кушниренко А.Г. Еще одно доказательство теоремы Тарского-Зайденберта // Сибирский математический журнал, 1985. - т. 26, № 5. - с. 94-98.

3. Харди Г.Г, Литтльлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: ГИИЛ, 1948. - 456с.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 99-01-00390) и программы "Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России" (проект № 015-04-01-12).

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА БЭКУСА — ГИЛБЕРТА[1]

Близорукова М.С., Дигас Б.В., Частоедова Л.П. (Екатеринбург)

msb@imm.uran.ru, digas@imm.uran.ru

Во многих областях науки и техники требуется получить оценку модели по известному набору данных. Довольно часто необходимо оценивать непрерывную модель с бесконечно большим числом степеней свободы, в то время как набор заданных величин конечен. Возникающая при этом обратная задача является, как правило, некорректной и требует создания специальных методов ее решения. В настоящем сообщении обсуждается вопрос восстановления скоростных характеристик среды по результатам измерений времен пробега сейсмических сигналов. Моделью сейсмоактивного региона служит двумерная область, содержащая некоторый набор источников и приемников сейсмических сигналов. Входными данными задачи являются координаты источников и приемников, а также времена пробега сигнала, измеренные с ошибкой. При помощи методики Бэкуса — Гилберта [1] рассматриваемая задача сводится к задаче нахождения минимального по норме решения системы линейных неравенств в гильбертовом пространстве. Для решения последней указывается итерационный алгоритм, основанный на предложенном в работе [2] методе решения экстремальных задач и реализующий технику агрегирования ограничений. К преимуществам предлагаемого алгоритма относятся сравнительно быстрая сходимость, простота программной реализации. Эффективность работы алгоритма иллюстрируется на просчитанных на компьютере модельных примерах.

Литература

1. Backus G., Gilbert F. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **13**, 1967, pp. 247–276.

2. Kryazhimskii A.V. Convex Optimization via Feedbacks // SIAM J. Control Optimization, vol. 37, 1999, pp. 278–302.

О КОМПЕНСАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ[1]

Близорукова М.С., Максимов В.И. (Екатеринбург)

msb@imm.uran.ru, maksimov@imm.uran.ru

В ограниченной связной области $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МНТЦ (проект 99-1293), РФФИ (грант 00-01-00682) и Программы поддержки ведущих научных школ России (проект 00-15-96086).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №01-01-00566).

задано линейное параболическое уравнение

$$\dot{x}_t(t,\eta) - \sum_{k,l=1}^{n} (a_{k,l}(t,\eta)x_{\eta_k}(t,\eta))_{\eta_l} +$$

$$+ b(\eta)x(t,\eta) = u(t,\eta) - v(t,\eta) \quad \text{в} \quad Q = T \times \Omega,$$

$$x(t,\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad (t,\sigma) \in \Sigma = T \times \Gamma.$$

Предполагается, что на уравнение действует неизвестное неконтролируемое возмущение $t \to v(t) \in Q \subset L_2(\Omega)$ (Q — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество). Рассматривается задача о построении закона формирования управления $u(t) \in P$, $t \in T$ ($Q \subset P$) по принципу обратной связи, обеспечивающего максимально возможную "компенсацию" возмущения $v(\cdot)$. Подобная задача в случае отсутствия ограничений на управление u и возмущение v рассматривалась в работах Wonhuma, H_∞-теории и т.д. В данном сообщении предлагается принципиально новый метод ее решения. Метод основан на известном в теории позиционных дифференциальных игр принципе экстремального сдвига Н. Н. Красовского [1] и теории динамической реконструкции, восходящей к работам Ю. С. Осипова [2].

Литература

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.

2. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Gordon and Breach: London, 1995.

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ $\mathbb{R}^N$ [1]

Блошанский И.Л. (Москва)

E-mail: igorbloshn.msk.ru

Для широкого класса невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^N$, например, для таких преобразований, матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ которых удовлетворяют условию: существует k, $1 \le k \le N$: $\max\limits_{1\le j\le N} |a_{kj}| < 1$ (обозначим этот класс Ψ_1), или, например, для группы вращений $\mathbb{R}^N$ относительно начала координат (обозначим этот класс Ψ_2), ставится и изучается задача: как изменяются (если изменяются) множества сходимости и расходимости всюду или почти всюду (п.в.) кратного тригонометрического ряда (интеграла Фурье) функции $f \in L_p$, $p \ge 1$, $f(x) = 0$ на некотором множестве положительной меры $\mathcal{A} \subset I^N = [0,1)^N$, $N \ge 2$, в зависимости от преобразования ψ пространства $\mathbb{R}^N$, где $\psi \in \Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$.

Данная задача для группы вращений Ψ_2 исследовалась нами ранее (см., например, [1]).

Так как нами (1983-1990 г.) был изучен вопрос об изменении структуры и геометрии множеств сходимости и расходимости (всюду и п.в.) указанных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00355)

разложений Фурье в зависимости от изменения структуры и геометрии множества A (критерии слабой обобщенной локализации п.в. для кратных рядов и интегралов Фурье см., например, [2]), то сформулированная выше задача была сведена к изучению вопроса об изменении геометрии множеств $\psi(A)\cap I^N$ (множеств $\tau^{-1}(A)\cap I^N$ в случае "поворота" $\tau \in \Psi_2$) и $I^N \setminus supp(f\circ\psi)$ в зависимости от $\psi \in \Psi$.

В работе даны решения поставленной задачи для любых $\psi \in \Psi$ и $N \geq 2$. Причем, для рядов Фурье (учитывая периодичность разлагаемых функций) в работе рассматриваются различные постановки данной задачи - в зависимости от того, как понимается ряд Фурье функции $f\circ\psi$.

Вопросы сходимости тригонометрических рядов Фурье функций $f\circ\varphi$, когда $f \in \mathbf{C}$, а φ - гомеоморфизм, $\varphi : I^N \to I^N$, исследовались в работах: H.Bohr (1935 г.), А.М. Олевского (1981 г.) для $N = 1$; А.А.Саакяна (1979 г.), С.Ш.Галстяна и Г.А.Карагуляна (1998 г.) для $N > 1$; О.С.Драгошанского ($N = 2$, $f \in L_\infty$, сходимость п.в., а $\varphi = \tau$ - поворот на $\frac{\pi}{4}$, 1999 г.).

Литература

1. Блошанский И. Л. Критерий СОЛ для кратных разложений Фурье с точки зрения изометрических преобразований // Теория приближения функций и операторов. Тез. докл. Межд. конф., посв. 80-л. со дня рожд. С.Б.Стечкина. Екатеринбург. 2000. С.40-42.

2. Блошанский И. Л. //Матем. сб. 1983. Т.121. No 1. С.87-110. // Докл. АН СССР. 1987. Т.294. No 1. С.15-18. // Изв. АН СССР. Серия матем. 1989. Т.53. No 4. С.675-707.

ФОРМУЛЫ КЛАЙНА ОБОБЩЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ И РЕГУЛЯРНОГО ДОПОЛНЕНИЯ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Блюмин С.Л. (Липецк) *slb@stu.lipetsk.su*

В дополнение к [1] развивается известная формула Клайна для псевдообращения блочных матриц. Пусть SR -некоторое полукольцо.

Формулы Клайна

Пусть $A \in Mat_{m\times n}(SR)$, $A = [P, Q]$, $P \in Mat_{m\times p}(SR)$, $Q \in Mat_{m\times q}(SR)$, $n = p + q$.

Пусть для P *существуют обобщенная обратная и регулярные дополнения*

a) $P^- \in Mat_{p\times m}(SR) : P\cdot P^-\cdot P = P$; *b)* $\widehat{P} \in Mat_{m\times m}(SR) : \widehat{P}\cdot P = 0_{m\times p}, P\cdot P^- + \widehat{P} = I_m$;

c) $\widetilde{P} \in Mat_{p\times p}(SR) : P\cdot\widetilde{P} = 0_{m\times p}$, $P^-\cdot P + \widetilde{P} = I_p$. *Введем для* P, Q *матрицы-связки :*

1-ю - $C = \widehat{P}\cdot Q \in Mat_{m\times q}(SR)$; *пусть существуют* $C^- \in Mat_{q\times m}(SR)$, $\widetilde{C} \in Mat_{q\times q}(SR)$;

2-ю - $F = C^-\cdot\widehat{P} \in Mat_{q\times m}(SR)$, *если* $C \neq 0$, *иначе любая* (F *как выше или* $0_{q\times m}$);

3-ю - *пусть существует* $S \in Mat_{m\times m}(SR)$ *такая, что* $\widehat{P}\cdot S\cdot Q = 0_{m\times q}, S + Q\cdot F = I_m$, *причем* $\widehat{P}\cdot S$ *аддитивно коммутирует с* $Q\cdot F$;

4-ю - пусть существует $U \in Mat_{p\times q}(SR)$ такая, что $P^{-} \cdot S \cdot Q + U = 0_{p\times q}, P \cdot U + Q \cdot \widetilde{C} = 0_{m\times q}$.

Тогда для Асуществуют обобщенная обратная и регулярные дополнения

A) $A^{-} = [P,Q]^{-} = \begin{bmatrix} P^{-} \cdot S \\ F \end{bmatrix} \in Mat_{n\times m}(SR)$;

B) $\widehat{A} = \widehat{[P,Q]} = \widehat{P} \cdot S \in Mat_{m\times m}(SR)$;

C) $\widetilde{A} = \widetilde{[P,Q]} = \begin{bmatrix} \widetilde{P} & U \\ 0_{q\times p} & \widetilde{C} \end{bmatrix} \in Mat_{n\times n}(SR)$.

Литература

1. Блюмин С.Л. Исследование и решение матричных уравнений над полукольцами // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж: ВГУ, 2001. С.44-46.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.

В работе впервые делается попытка рассмотреть с позиций метода регуляризации [1] интегродифференциальные уравнения вида

$$\varepsilon^3 \frac{dy}{dt} = \int\limits_0^t (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \ t \in [0,T], \tag{1}$$

у которых ядро $(t-s)K(t,s) \equiv 0$ при $s = t$ $(K(t,t) \neq 0 \ \forall t \in [0,T])$. Аналогичная задача для интегрального уравнения

$$\varepsilon^2 y = \int\limits_0^t (t-s)K(t,s)y(s.\varepsilon)ds + h(t), \ t \in [0,T] \tag{2}$$

была рассмотрена в [2] в случае $K(t,t) < 0$ $(\forall t \in [0,T])$. Оказалось, что для устойчивости решения (при $\varepsilon \to +0$) интегродифференциального уравнения надо рассмотреть (1) с обратным временем (т.е. для (1) надо поставить начальное условие $y(T,\varepsilon) = y^0$) и с положительным диагональным ядром $K(t,t)$. Показывается, что такая система эквивалентна краевой задаче для интегродифференциального уравнения порядка $n = 3$, для которого становится возможным применение идей метода регуляризации [1].

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 400 с.

2. Бободжанов А.А., Туйчиев О.Д. Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с вырожденным ядром. Дифференц. уравнения. 1997, Т. 33, 11, с. 1537-1542.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

Богатов Е.М., Пенкин О.М. (Ст. Оскол – Воронеж)
e-mail: embogatov@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – стратифицированное множество. Определим на $\overset{\circ}{H^1}(\Omega)\times \overset{\circ}{H^1}(\Omega)$ (определения Ω и $\overset{\circ}{H^i}(\Omega)$ см., например, в [1]) билинейные формы при $i = 1, 2$

$$B_i(v,u) = \int\limits_{\Omega} (q\nabla v\nabla u + (i-1)r\Delta_p v\Delta_p u)\, d\mu. \qquad (1)$$

Здесь μ – мера, порождённая единичной плотностью на Ω, $\Delta_p = \nabla(p\nabla)$ аналог оператора Лапласа-Бельтрами на Ω.

Обозначим через V_1 – замкнутое выпуклое подмножество $\overset{\circ}{H^1}(\Omega)$, определённое условием $v \geq \varphi$, где $\varphi(x)$ – непрерывная на Ω функция, принимающая на $\partial\Omega$ неположительные значения.

Пусть G – некоторое подмножество Ω, причем $\Omega' = \Omega\backslash G \neq \{\emptyset\}$. Обозначим через V_2 – замкнутое выпуклое подмножество $\overset{\circ}{H^2}(\Omega)$, определённое условием $v \geq 0$ на G.

Основной интерес представляет разрешимость следующих односторонних задач

$$B_1(v,u) \geq B_1(u,u), \qquad (2)$$

$$B_2(v-u,u) \geq \int\limits_{\Omega} (v-u)f\, d\mu, \qquad (3)$$

где $f \in L^2_\mu(\Omega)$ – пространству квадратично-суммируемых на Ω функций.

В случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, односторонней задачей вида (3) описывается состояние закрепленной струнно-мембранной системы, растянутой телом с заданной формой $\varphi(x)$. Задачей (4) выражается состояние пластинчато-стержневой системы, нагруженной поперечной силой f, заделанной по краю и частично-опертой в некоторой внутренности.

На основе неравенства Пуанкаре для Ω (см. [1]) с использованием схемы, предложенной в [2], доказывается следующая

Теорема. *Существуют единственные решения задач (3), (4), минимизирующие на V_i, $i = 1, 2$ соответствующие функционалы энергий. При этом решение задачи (4) удовлетворяет уравнению $\Delta_p(r\Delta_p)u - \Delta_q u = f$ на Ω' в слабом смысле.*

Литература

1. Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах. // Матем. заметки, 2000, Т.68, вып. 6. С. 874-886.

2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М., 1974. 160с.

---

[1] Работа выполнена благодаря поддержке РФФИ, проект 01-01-00417

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

Богатов Е.М., Пенкин О.М. (Ст. Оскол – Воронеж)
e-mail: embogatov@mail.ru

Данная работа является естественным продолжением исследования разрешимости эллиптических краевых задач на стратифицированных множествах $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (точное определение см., например, в [1]).

На стратифицированном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассматривается задача Коши вида

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - \Delta_p u + qu = f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \in L^2_\mu(\Omega), u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

где $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$, $\Delta_p = div\,(p\,grad)$ – аналог оператора Лапласа-Бельтрами на Ω, $p = p(x,t)$, $q = q(x,t)$. Класс $L_{2,1}(Q_T)$ состоит из интегрируемых на Q_T функций, для которых конечна норма

$$||u|| = \int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega |u|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Здесь через μ обозначена мера, порождённая единичной плотностью на Ω. Определение пространств $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $L^2_\mu(\Omega)$ подробно описано в [1].

С физической точки зрения задача (1)-(2) моделирует, для $\Omega \in \mathbf{R}^2$, распространение волн в плоской сетке из струн, на отдельные ячейки которой натянуты мембраны.

Обозначим через W - "энергетический" класс функций $u(x,t)$ задачи (1)-(2), определяемый так же, как и в [2]. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $0 \le \alpha \le p(x,t) \le \beta$; $\left| \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \nabla p, q(x,t) \right| \le \gamma$ *для* $(x,t) \in Q_T$, *тогда задача (1)-(2) имеет единственное обобщенное решение из класса* W.

Литература

1. Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах. // Матем. заметки, 2000, Т.68, вып. 6. С. 874-886.

2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.- М.: Наука, 1973, 407 с.

[1] Работа выполнена благодаря поддержке РФФИ, проект 01-01-00417

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАБОТЫ ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА

Богатова С.В. (Рязань)

E-mail dma@ttc.ryazan.ru

Процесс работы лампового генератора электромагнитных колебаний с трехэлектродной лампой, резонансном контуром в цепи сетки и элементом запаздывания в цепи обратной связи описывается дифференциальным уравнением [1]

$$LC\ddot{v}(t) + RC\dot{v}(t) + v(t) = MS[v(t-\tau)]\dot{v}(t), \tag{1}$$

где τ - запаздывание обратной связи, выраженное в секундах, L - индуктивность, C - емкость, R - активное сопротивление резонансного контура, M - коэффициент взаимной индукции, $v(t)$ - переменное напряжение в резонансном контуре, $S[v]$ - крутизна характеристики лампы.

Система дифференциальных уравнений (1) эквивалентна системе

$$\dot{v} - w = 0, \quad \dot{w} - \alpha w - \beta v - \gamma S[v(t-\tau)]w(t-\tau) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha = R/L$, $\beta = 1/(LC)$, $\gamma = M/(LC)$. Предполагается, что $S[v(t-\tau)] = c_0 + c_1 v(t-\tau) + o(v(t-\tau))$, где $c_0,\ c_1 \in R$, $o(v(t-\tau))-$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $v(t-\tau)$. Решение системы уравнений (2) отыскивается в пространстве Q тригонометрических рядов вида $x(t) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ с коэффициентами $a_0,\ a_n,\ b_n \in R^2$. Найдены условия существования единственного собственного вектора h, соответствующего нулевому собственному числу оператора B, заданного системой равенств $B_1 = \dot{v} - w$, $B_2 = \dot{w} - \alpha w - \beta v$. Пространство Q представляется в виде прямой суммы подпространств $Q = L(h) + Q_0$, где $L(h)-$ линейная оболочка собственного вектора h, Q_0- инвариантное относительно оператора B подпространство. Система (2) сводится к системе

$$P(x,\gamma) = 0, \tag{3}$$

$$-\gamma p^2\delta + F(\tau) + o(\|(\delta,\gamma)\|^2) = 0, \tag{4}$$

где $P-$ оператор ортогонального проектирования левой части системы (2) на инвариантное подпространство Q_0, $\delta \in R$, $F(\tau)-$ некоторая функция переменной τ, $o(\|(\delta,\gamma)\|^2)-$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\|(\delta,\gamma)\|^2$.

Система (3) разрешается с помощью метода неподвижной точки. Для системы (4) доказана теорема о существовании ненулевого решения.

Литература

1. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука. - 1969. -288с.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Бойцова И.А. (Одесса)

E-mail: nuker@mail.od.ua

Рассматривается задача оптимального управления, содержащая медленные и быстрые переменные. Для решения задачи применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина, по которому строится соответствующая краевая задача. Если при этом для медленных переменных получаются только начальные условия, а для быстрых - краевые условия вида $R(y(0), y(T)) = 0$, то для решения такой задачи применяется следующий алгоритм.

Краевой задаче принципа максимума ставится в соответствие краевая задача в медленном времени, которая является сингулярно возмущенной. Решение краевой задачи для быстрых переменных ищется с использованием асимптотоки А.Б. Васильевой [1] в виде функции, содержащей два пограничных слоя в окрестностях начального и конечного моментов времени. Это решение затем подставляется в начальную задачу для медленных переменных и получается соответствующая возмущенная задача. Доказывается близость решений исходной и возмущенной задач по медленным переменным. Если для возмущенной задачи рассматривается соответствующая частично усредненная задача [2], то доказывается близость их решений, а значит и близость решений исходной задачи принципа максимума и частично усредненной задачи по медленным переменным.

Таким образом, строится асимптотически оптимальное управление рассматриваемой задачи.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М., Наука, 1973.

2. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. - Киев-Одесса: Изд-во Лыбидь, 1992.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Бондаренко Т.Е. (Воронеж)

Материал, представленный в школьных учебниках, характеризуется содержанием и структурой. Его содержание определяется программой по математике, а структура — авторским коллективом. Поэтому возможности совершенствования структуры учебного материала более реальны. Проиллюстрируем их на следующих примерах.

При изучении тригонометрии в X классе традиционно рассматриваются понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, затем уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ и примеры решения простейших неравенств. Последовательность изучения этого материала может быть изменена следующим образом: первый блок составит материал, связанный только с синусом: понятие арксинуса числа, уравнение $\sin x = a$, неравенства $\sin x > a$, $\sin x < a$. Аналогично следующие блоки — материал, связанный с косинусом, тангенсом и котангенсом. Такое изменение структуры способствует более логичному изложению материала, позволяет использовать понятие арка для решения не только уравнений, но и неравенств, дает возможность естественно вывести несложные формулы решения, привести алгоритм.

При изучении тождественных преобразований совершенствование структуры материала может осуществляться за счет систематизации упражнений. Так, в действующих учебниках задания, в которых предлагается вынести за скобки общий множитель в выражениях $9xa+9xb$, $15a+10b$, c^3+c^4, $18ab^3-9b^4$ включаются в один номер, хотя очевидно, что преобразование предполагает разный набор операций и их сочетание. Систематизация упражнений, в основу которой положено единство состава операций, позволит сформулировать правило преобразования для каждого случая, что будет способствовать успешности деятельности ученика.

Таким образом, совершенствование структуры учебного материала может служить действенным средством повышения эффективности обучения.

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ "УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ" В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Борисова Е.А., Булгакова Н.И., Катаева Н.С., Серикова З.И.

Решение уравнений и неравенств с параметром является прекрасным средством развития логического мышления, строгости суждения, математического вкуса. Воспитывает инициативу и настойчивость. Задачи с параметрами традиционно изучались в математике средней школы, но не отдельной темой. В последние же годы из школьных учебников практически исчезли уравнения и неравенства с параметром, но зато активно включаются в материалы выпускных и вступительных экзаменов. Причём уровень их сложности порой не доступен и учителю. Учителя школ, знакомя школьников с параметром, испытывают большие трудности в подборе материала, т.к. нет практически доступной методической литературы.

С выходом серии книг авторского коллектива ВГПУ, возглавляемого доц. Беляевой Э.С. ([1] – [4]), учителя получили методические пособия, которые стали для них настольными книгами. Подбор упражнений отвечает всем дидактическим требованиям: доступность, логичность, системность, последовательность, наглядность. Реализуется единый методический подход при решении уравнений и неравенств с параметром. В каждом пособии есть необходимый справочный материал, затем идут подготовительные упражнения, простейшие, более сложные. Чёткие определения основных понятий вносят ясность в существующую путаницу трактовки терминов темы. Особенностью разработанной методики является использование координатной прямой параметра и системы координат (aox), позволяющие не только познакомить школьников с графическим методом решения задач с параметром, но и глубже осознать сущность понятия "параметр", сделать наглядным результат решения. Снимается проблема записи ответа.

Язык пособий научно-популярный, логично-доказательный. Кажущаяся простота — результат методического мастерства авторов, много лет работающих с учительской и ученической аудиторией. При решении тригонометрических уравнений и неравенств широко используется числовая окружность как вторая модель множества действительных чисел. Ученикам очень нравится "метод лепестков", делающий тригонометрию понятной, разноцветной и красивой.

Базисные задачи группируют вокруг себя целый класс аналогичных задач, что позволяет, научив школьников решать ключевую задачу с параметром, открыть им путь к решению задач — "родственников". Интересны задачи, решаемые несколькими способами, что даёт материал для уроков одной задачи.

Работая с пособиями, познавательные интересы могут удовлетворить и математики, и гуманитарии, потому что эстетика мысли захватывает интеллектуалов.

Литература

1. Э.С. Беляева, А.С. Потапов. Уравнения и неравенства первой степени с параметром и к ним сводимые. Пособие для учителя и учащихся. Воронеж, 1999.

2. Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титаренко. Уравнения и неравенства второй степени с параметром и к ним сводимые. Пособие для учителя и учащихся. Воронеж, 2000.

3. Э.С. Беляева, А.С. Потапов. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром. Пособие для учителя и учащихся. Воронеж, 2000.

4. Э.С. Беляева, А.С. Потапов Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром. Пособие для учителя и учащихся. Воронеж, 2001.

ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ[1]

Боровских А.В. (Воронеж)

E-mail: bor bor.vsu.ru

Теорема. *Пусть* $k(x) > 0$ *и функция* $\varphi(x) = \dfrac{k'(x)}{2k(x)}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда общее решение уравнения* $k(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, *в классе функций* $u(t,x)$, *дважды непрерывно дифференцируемых на вещественной оси и имеющих конечную энергию* $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{IR}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]k(x)\,dx$, *описы-*

[1] Результаты, представленные в данной работе, получены во время работы автора в университете г.Валансьен (Франция) в июне 2000 г., (Results presented in this paper were obtained during the author's visit by invitation to the University of Valenciennes end of Hainait-Cambresis at June 2000) их обработка и публикация осуществляется благодаря поддержке грантов Госкомвуза РФ N 97-0-1.8-100 в области фундаментального естествознания (Конкурсный центр СПб ун-та) и N 11 в области математики (Конкурсный центр Новосибирского ун-та)

вается формулой

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{k(x-t)}{k(x)}}V(x-t)+\sqrt{\frac{k(x+t)}{k(x)}}W(x+t)+ \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}V(y)J(\frac{x+y-t}{2},\frac{x-y-t}{2},x)\,dy- \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}W(y)J(\frac{x+y+t}{2},\frac{x-y+t}{2},x)\,dy+ \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}W(y)\tilde{J}(\frac{x+y-t}{2},\frac{x-y-t}{2},x)\,dy- \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}V(y)\tilde{J}(\frac{x+y+t}{2},\frac{x-y+t}{2},x)\,dy
\end{aligned}
$$

где V,W – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{I\!R}\Big[\Big(V'(x)+\varphi(x)V(x)-\varphi(x)W(x)\Big)^2+ \\
&+\Big(W'(x)+\varphi(x)W(x)-\varphi(x)V(x)\Big)^2\Big]\,k(x)\,dx<\infty,
\end{aligned}
$$

и связанные с начальными условиями $u_0(x), u_1(x)$ соотношениями

$$V(x)+W(x)=u_0(x),\quad -[k(x)V(x)]'+[k(x)W(x)]'=k(x)u_1(x).$$

Через $J(a,b,x)$ и $\tilde{J}(a,b,x)$ обозначены функции, являющиеся решениями интегральных уравнений

$$J(a,b,x)=-\int\limits_a^x\varphi(\sigma-b)\varphi(\sigma)\,d\sigma-\int\limits_a^x\int\limits_b^0\varphi(\sigma-b)\varphi(\sigma-\tau)J(\sigma,\tau,x)\,d\tau d\sigma$$

и

$$\tilde{J}(a,b,x)=\varphi(a)-\int\limits_b^0\int\limits_a^x\varphi(a-\tau)\varphi(\sigma-\tau)\tilde{J}(\sigma,\tau,x)\,d\sigma d\tau.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ "КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА"

Бояринов Д.А. (Смоленск)

Понятие ключевой задачи в неявном виде было введено достаточно давно - в виде ситемы требований, которым она должна отвечать [1]. До сих пор не было предложено строгого определения ключевой задачи. Предлагаемый путь к определению понятия "ключевая задача" и созданию технологии отбора таких задач основывается на использовании структурно-логической схемы материала данной темы [2,3]. После получения графовой модели или семантической сети материала пол данной теме [4] устанавливается соответствие между множеством всех задач по данной теме и множеством всех вершин получившегося графа. Каждой задаче сопоставляются те элементы знания, усвоению которых она способствует (в дальнейшем будем говорить, что задача связана с определенным непустым набором вершин графа). Системой ключевых вершин семантической сети назовем множество вершин, являющихся центрами минимального покрытия данного графа кругами радиуса 1 (выбор радиуса покрытия, равного 1, обусловлен стремлением упростить структуру задачи с целью оптимизации времени на обучение). Определение ключевой задачи:*ключевая задача по данной теме - это задача, связанная с одной или несколькими смежными ключевыми вершинами семантической сети, соответствующей данной теме (под смежными вершинами понимаются вершины, связанные общим ребром).* Такой подход к определению ключевых задач позволяет технологизировать процесс отбора таких задач, кроме того, использование графовой модели данных позволяет автоматизировать процесс обработки инфпрмации, в частности процесс отыскания ключевых задач [5,6].

Литература

1. Зильберберг Н.И. Приобщение к математическому творчеству.// Уфа. 1988. С. 12 - 17.

2. Практикум по педагогике и математике. Под ред. Столяра А.А.// Минск. 1980.

3. Зльберберг Н.И. Методические указания по проведениюанализа материала учебника математики. // Псков. 1990.

4. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект - основа новой информационной технологии. // М. 1988.

5. Лорьер, Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта.// М. Мир. 1991.

6. Хант, Эрл. Искусственный интеллект. // М. Мир. 1978.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Бравый Е. (Пермь)

bravyi@pi.ccl.ru

Рассмотрим задачу Коши для системы двух уравнений

$$\dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + F_1(x,y)(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ N 01-01-00511.

$$\dot{y}(t) = -(T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + F_2(x,y)(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

$$x(a) = c_1, \quad y(a) = c_2, \tag{3}$$

где $c_1, c_2 \in R^1$; $T_{ij} : C[a,b] \to L[a,b]$, $i,j = 1,2$, — линейные изотонные операторы; $F_1, F_2 : C[a,b] \times C[a,b] \to L[a,b]$ — непрерывные операторы, удовлетворяющие условиям:

1) существуют такие функции $g_i \in L[a,b]$, $i = 1,2$, что при всех $x, y \in C[a,b]$ выполнены неравенства

$$F_1(x,y)(t)\mathrm{sign}x(t) \le g_1(t), \quad t \in [a,b],$$

$$F_2(x,y)(t)\mathrm{sign}y(t) \le g_2(t), \quad t \in [a,b];$$

2) при любом $r > 0$

$$\sup\{|F_i(x,y)(\cdot)| : \|x\|_{C[a,b]} \le r, \|y\|_{C[a,b]} \le r\} \in L[a,b], \quad i = 1,2.$$

Решением задачи (1), (2), (3) называется пара абсолютно непрерывных функций x, y, которые удовлетворяют при почти всех $t \in [a,b]$ уравнениям (1), (2) и начальным условиям (3).

Обозначим $a_{ij} = \|T_{ij}\|_{C[a,b] \to L[a,b]}$, $i,j = 1,2$.

Теорема. Если $a_{11} < 1$, $a_{22} < 1$ и

$$a_{12}a_{21} < 4\sqrt{(1-a_{11})(1-a_{22})},$$

то существует решение задачи (1), (2), (3).

Условия разрешимости аналогичной скалярной задачи были получены в работе E. Bravyi, R. Hakl, A. Lomtatidze On Cauchy Problem for the first order nonlinear functional differential equations of non-Volterra's type // Czechoslovak Math. Journal, (submitted).

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНЫМ ГРИНАЧНЫМ УПРАВЛЯЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Бражник С.А., Мартыненко Г.В. (Воронеж)

При исследовании проблемы управляемости для гиперболических систем неизбежно сталкиваются со следующим эффектом (см. [1]): управляемость за время $T > 0$ имеет место, лишь если T достаточно велико. Обычно этот факт интерпретируется в терминах времени распространения лучей (см. [2]).

В настоящей работе факт управляемости формулируется в терминах так называемых "областей покоя".

Пусть Ω компактная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Γ. Подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$ будем называть областью покоя, если существует ненулевое решение $w(t,x)$ гиперболического уравнения

$$w'' + Aw = 0, \qquad (t,x) \in \Omega \times [0,T],$$

такое, что $w(t,x) \equiv 0$ при $(t,x) \in \Omega_1 \times [0,T]$.

Весьма важным для проблемы управляемости является вопрос о том, для каких Ω и при каких $T > 0$ в области Ω отсутствуют подобласти покоя.

В частности, в этих терминах формулируются теоремы об управляемости не только для распределенного, но и для граничного управления.

Указанный подход позволяет некоторые задачи для граничного управления сводить к задачам для распределенного управления.

Литература
1. А. Бенсусан УМН. 1991. Т. 46. вып. 9.
2. Ж.А. Лионс М.: Мир. 1972.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Булатов М.В. (Иркутск)
E-mail: mvbul@icc.ru

Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + f(x(t),t) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = a, \tag{2}$$

где $A(t)$ – $(n \times n)$– матрица, $f(t) : D_1 \to D_2$, $D_1 \subseteq R^{n+1}, D_2 \subseteq R^n$, $x(t)$– искомая n– мерная вектор-функция.

Предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) с условием (3) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Входные данные $A(t), f(x(t),t)$ обладают той степенью гладкости, которая необходима для дальнейших рассуждений. Под решением исходной задачи будет подразумеваться любая непрерывно-дифференцируемая вектор-функция $x(t)$, которая обращает (1) в тождество и $x(0) = a$.

Дано определение индекса ДАУ. Подчеркнуты трудности, возникающие при численном решении данных задач, имеющих индекс выше единицы.

Показано, что в ряде случаев для численного решения ДАУ можно применять неустойчивые (в классическом определении) разностные схемы. При этом порядок сходимости, за исключением первых точек, равен порядку аппроксимации.

Приведены разностные схемы для некоторых классов задач (1), (2). Получена оценка сходимости к точному решению.

КВАЗИРЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С. (Тамбов)[1]
aib@tsu.tmb.ru

Понятие квазирешения (квазитраектории) для дифференциальных включений было введено Важевским (T. Wazewski) (см. [1,2 стр 63]). Как установлено А.Ф. Филипповым, свойства квазирешений являются полезными для изучения этих включений. Здесь вводится понятие квазирешения возмущенного включения с нелинейным оператором и сформулировано их основное свойство.

Пусть $\mathbf{R}^n$ – пространство n-мерных вектор столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$ ($L^n[a,b]$) пространство непрерывных (суммируемых) вектор-функций с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ ($\|x\|_L = \int\limits_a^b |x(s)|\,ds$); $\overline{\text{co}}(\cdot)$ – выпуклую замкнутую оболочку соответствующего множества; $\text{cl}[C^n[a,b]]$ - множество непустых замкнутых подмножеств пространства $C^n[a,b]$.

Будем говорить, что множество $\Phi \subset L^n[a,b]$ выпукло по переключению, если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi(e)x + \chi([a,b] \setminus e)y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим $\Pi[L^n[a,b]]$ множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $L^n[a,b]$.

Рассмотрим включение

$$x \in \Psi(x) + V(x, \Phi(x)), \tag{1}$$

где $\Psi : C^n[a,b] \to \text{cl}[C^n[a,b]]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, $V : C^n[a,b] \times L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ и для любого $x \in C^n[a,b]$ отображение $V(x,\cdot)$ слабо непрерывно.

Под решением включения (1) понимаем функцию $x \in C^n[a,b]$, для которой существуют такие функции $\psi \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$, что $x = \psi + V(x,z)$.

Под квазирешением включения (1) понимаем функцию $x \in C^n[a,b]$, для которой существует такой элемент $\psi \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что $\psi + V(x, z_i) \to x$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим включение

$$x \in \Psi(x) + V(x, \overline{\text{co}}\Phi(x)). \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{H}$ – множество квазирешений включения (1), а H_{co} – множество решений включения (2).

Теорема. $\mathcal{H} = H_{\text{co}}$.

Замечание. Сформулированная теорема обобщает соответствующее утверждение в [3].

Литература

1. *Wazewski T.* Sur géneralisation de la notion des solutions d'une equation au contingent. - Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1962, V. 10, №10. P. 529-531.

2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. "Наука", 1985.

---

[1]Работа поддержана РФФИ, грант №01-01-00140.

3. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189, №6. С. 3-32.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПО КРАЙНИМ ТОЧКАМ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Булгаков А.И., Скоморохов В.В. (Тамбов) [1]

aib@tsu.tmb.ru, uaa@hmd.nnn.tstu.ru

Пусть $\mathbf{R}^n$– n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$; $\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$ – множество всех непустых компактов $\mathbf{R}^n$; $B[u,r]$ – замкнутый шар пространства $\mathbf{R}^n$ с центром в точке u и радиусом $r>0$; $B[u,0]\equiv\{u\}$, $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами. Пусть $V\subset\mathbf{R}^n$. Обозначим $\operatorname{co}V$ выпуклую оболочку множества V, $\overline{\operatorname{ext}}V$ – замыкание множества крайних точек множества V.

Обозначим через $K([a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta:[a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждых $(x,\delta)\in\mathbf{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,x,\delta)$ измерима; при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\delta\in[0,\infty)$ функция $\eta(t,\cdot,\delta)$ непрерывна; для каждых $U\in\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}:[a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau)\le m_{U,\delta}(t)$; при почти всех $t\in[a,b]$ и каждого $x\in\mathbf{R}^n$ выполняются равенства $\lim\limits_{z\to x\,\delta\to0+0}\eta(t,z,\delta)=0$, $\eta(t,x,0)=0$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\quad t\in[a,b],\tag{1}$$

где отображение $F:[a,b]\times\mathbf{R}^n\to\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F:[a,b]\times\mathbf{R}^n\to\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbf{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка $h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)]\le\le\xi(t,x,\delta)$. Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть аппроксимирующим. Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty))$. Определим отображения $\Phi:[a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$, $\Phi_{\eta_0\eta}:[a,b]\times\mathbf{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbf{R}^n]$ равенствами

$$\Phi(t,x,\delta)=\overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co}\widetilde{F}(t,x,\delta)),\ \Phi_{\eta_0\eta}(t,x,\delta)=(\Phi(t,B[x,\eta_0(t,x,\delta)],\delta))^{\eta(t,x,\delta)}.$$

Для каждого фиксированного $\delta>0$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in\Phi_{\eta_0\eta}(t,x(t),\delta),\quad t\in[a,b].\tag{2}$$

Дифференциальное включение (2) будем называть аппроксимирующим дифференциальное включение (1) по крайним точкам значений аппроксимирующего отображения с внутренними и внешними возмущениями.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-01-00140).

В докладе рассматривается вопрос при каких условиях пересечение замыканий в пространстве непрерывных функций множеств решений включения (2) совпадает с замыканием множества решений включения (1).

Подробнее о постановке задачи см. [1].

Литература

1. *Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А.* Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, 12. С. 1587-1598.

C–СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА

Вагабов А.И., Галяев В.С. (Махачкала)

Рассматривается регулярный пучок дифференциальных операторов

$$\sum_{k_0+k_1\le n} \lambda^{k_0} A^{(k_0k_1)}(x)\frac{d^{k_1}V}{dx^{k_1}} - \lambda^n V, \quad a < x < b, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\ k_1<n}} \lambda^{k_0}\left\{\alpha^{(k_0k_1)}\left.\frac{d^{k_1}V}{dx^{k_1}}\right|_{x=a} + \beta^{(k_0k_1)}\left.\frac{d^{k_1}V}{dx^{k_1}}\right|_{x=b}\right\} = 0 \tag{2}$$

где $\frac{dA^{(k_0k_1)}(x)}{dx}$ при $k_0+k_1=n$ и $A^{(k_0k_1)}(x)$ при $k_0+k_1<n$ — суммируемые на $[a,b]$ функции. Полагается, что φ–корни характеристического уравнения

$$A^{(0,n)}(x)\varphi^n + A^{(1,n-1)}(x)\varphi^{n-1} + \ldots + A^{(n-1,1)}(x)\varphi - 1 = 0$$

различны, отличны от нуля при всех x, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x. Введем обозначение для ряда Фурье "со скобками" по корневым функциям пучка (1)–(2).

$$\lim_{m\to\infty} J_m(h) = \lim_{m\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda^{m-1}d\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(A^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)d\xi \tag{3}$$

(G — функция Грина пучка).

Теорема . Пусть пучок (1)–(2) удовлетворяет оговоренным условиям. Какова бы ни была ограниченная суммируемая функция $h(x)$, $a\le x\le b$ ряд $\lim\limits_{m\to\infty} J_m(h)$ суммируем почти везде на (a,b) по методу средних арифметических Фейера и будет иметь суммой $h(x)$. Другими словами, почти везде в промежутке (a,b) имеем

$$h(x) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{m=1}^{\nu} J_m(h). \tag{4}$$

Во всех точках внутри (a,b), в которых существуют пределы $h(x+0)$, $h(x-0)$, имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{m=1}^{\nu}J_m(h)=\frac{h(x+0)+h(x-0)}{2}.$$

Правая часть формулы (3) стремится к своему пределу равномерно при $x\in[a_1,b_1]\subset(a,b)$, $\forall a_1,b_1$, если $h(x)$ непрерывна на $[a_1,b_1]$.

Литература

1. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряд. Петроград. Тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.

2. *Вагабов А. И.* // Дифференциальные уравнения. Т. 24, №2. 1991. С. 347–350.

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Васильев В.В. (Тамбов)[1]

aib@tsu.tmb.ru

Пусть $\mathbf{R}^n$ – пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbf{R}^n]$ – множество непустых компактных подмножеств в $\mathbf{R}^n$; $\rho[x,A]$ – расстояние от точки x до множества A в пространстве $\mathbf{R}^n$; $\|A\|=\sup\{|a|:a\in A\}$; $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами пространства $\mathbf{R}^n$; $L^n[a,b]$ $(L^n_\infty[a,b])$ – пространство суммируемых (измеримых и ограниченных в существенном) функций $x:[a,b]\to\mathbf{R}^n$

Пусть отображение $F:[a,b]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbf{R}^n]$ удовлетворяет следующим условиям: 1) для любых $(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ отображение $F(\cdot,x,y)$ измеримо; 2) существуют такие функции $\alpha\in L^1[a,b]$ и $\beta\in L^1_\infty[a,b]$, что для любых $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{R}^n$ и любого $t\in[a,b]$ справедлива оценка $h[F(t,x_1,y_1),F(t,x_2,y_2)]\le\alpha(t)|x_1-x_2|+\beta(t)|y_1-y_2|$; 3) существует функция $\gamma(\cdot)\in L^1[a,b]$, что при п. в. $t\in[a,b]$ выполняется оценка $\|F(t,0,0)\|\le\gamma(t)$

Пусть функция $p:[a,b]\to\mathbf{R}^1$ измерима и при всех $t\in[a,b]$ удовлетворяет неравенству $p(t)\le t$, а функция $g:[a,b]\to\mathbf{R}^1$ удовлетворяет условиям: существует такое число $\tau\in(0,b-a)$, что для любого $t\in[a,b]$ выполняется неравенство $g(t)\le t-\tau$; справедливо соотношение $\sup\limits_{e\subset[a,b],\mu(e)\neq0}\frac{\mu[g^{-1}(e)]}{\mu(e)}<\infty$ ($g^{-1}(e)$ – прообраз измеримого множества, $\mu(e)$ – мера Лебега). Определим непрерывные операторы $P:C^n[a,b]\to L^n_\infty[a,b]$ и $G:L^n[a,b]\to L^n[a,b]$ равенствами

$$(Px)(t)=\begin{cases}x(p(t)), & p(t)\in[a,b],\\ 0, & p(t)\notin[a,b],\end{cases}\qquad (Gx)(t)=\begin{cases}x(g(t)), & g(t)\in[a,b].\\ 0, & g(t)\notin[a,b].\end{cases}$$

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t)\in F(t,(Px)(t),(G\dot{x})(t)),\quad x(a)=x_0 \tag{1}$$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант №01-01-00140)

Под решением задачи (1) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющую включению при почти всех $t \in [a, b]$ и равенству $x(a) = x_0$.

Пусть для абсолютно непрерывной функции $y : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ существует такая функция $\kappa \in L^n[a, b]$, что при почти всех $t \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$\rho[\dot{y}(t), F(t, (Py)(t), (G\dot{y})(t))] \leq \kappa(t). \tag{2}$$

Определим функции $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^1$, $\psi : [a, b] \to \mathbf{R}^1$, и $\xi : [a, b] \to \mathbf{R}^1$ равенствами $\varphi(t) = (\sum\limits_{i=0}^{m-1} (\beta G)^i(\varepsilon + \kappa))(t)$, $\psi(t) = (\sum\limits_{i=0}^{m-1} \prod\limits_{k=0}^{i} G^{k-1}(\beta)G^i(\alpha))(t)$, $\xi_\varepsilon(t) = (|y(a) - x_0| + \int\limits_a^t \varphi(\tau)\exp(-\int\limits_a^\tau \psi(s)\,ds)d\tau)\exp(\int\limits_a^t \psi(s)\,ds)$, где $\varepsilon > 0$. m — целая часть отношения $\frac{b-a}{\tau}$.

Теорема. *Пусть абсолютно непрерывная функция y удовлетворяет неравенству (2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ задачи (1), что при всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi_\varepsilon(t), \tag{3}$$

а при п. в. $t \in [a, b]$ имеет место соотношение $|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| \leq \dot{\xi}_\varepsilon(t)$.

Замечание. Если в задаче (1) положить $p(t) = t$, а в свойстве 2) $\beta(t) \equiv 0$, то из оценки (3) вытекает оценка А.Ф. Филиппова.

К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ

Васильева И.Е. (Воронеж)

E-mail: mfkfa@vsu.main.ru

В работе доказан обобщенный вариант теоремы о разрешимости уравнений с нелинейными дифференциалами [1].

Пусть функция $D(t, x, dt)$ определена при $(t, x) \in U \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ и любых $dt \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ и принимает значения в $\mathbf{R}^n$. Пусть функция $E(t, \tau)$ определена при $(t, \tau) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\tau \geq t$, принимает значения в $\mathbf{R}$ и обладает свойствами: $E(t, \tau)$ ограничена на ограниченных множествах; $E(t, \tau) \geq 1$; $E(t, t+\delta_1)E(t+\delta_1, t+\delta_1+\delta_2) \leq E(t, t+\delta_1+\delta_2)$; $|E(t, t+\delta) - E(t, t)| \leq K(t)\delta$, где $K(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $D(t, x, 0) = 0$;

2) $t \leq t + \delta \leq H$ $(H \geq 0) \Rightarrow (t + \delta, x + D(t, x, \delta)) \in U$;

3) $\|x + D(t, x, \delta) - \tilde{x} - D(t, \tilde{x}, \delta)\| \leq E(t, t + \delta)\|x - \tilde{x}\|$;

4) $\|D(t, x, \delta_1 + \delta_2) - D(t, x, \delta_1) - D(t_1, x_1, \delta_2)\| \leq$

$\leq \Omega(\delta_1)(E(t + \delta_1, t + \delta_1 + \delta_2) - E(t + \delta_1, t + \delta_1))$,

где $\lim\limits_{\delta\to 0+} \Omega(\delta) = 0$; $t_1 = t + \delta_1$, $x_1 = x + D(t, x, \delta_1)$.

Тогда для любого $(t_0, x_0) \in U$ существует единственное решение $\varphi(t) := g_{t_0}^t x_0$ уравнения с нелинейным дифференциалом [1]

$$x(t+dt) - x(t) = D(t, x(t), dt) + o(dt)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенное на всем промежутке $[t_0, H)$, причем для любого транзитного квазипотока [2] $\gamma[A]_{t_0}^t x_0$ *на промежутке $[t_0, H)$ справедлива оценка*

$$\|\gamma[A]_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t x_0\| \le \Omega(d(A))(E(t_0, t) - E(t_0, t_0)).$$

Указанная теорема позволяет расширить класс процессов, описываемых с помощью уравнений с нелинейными дифференциалами (например, включить в этот класс процессы с импульсным воздействием).

Литература

1. Kloeden P.E., Sadovsky B.N., Vasilyeva I.E. Quasi-flows and equations with nonlinear differentials. Preprint 41/2000. FB Mathematik Johann-Wolfgang-Goethe Universitat, Frankfurt am Main, Germany. - 23 p.

2. Садовский Б.Н. *О квазипотоках* // Тезисы докладов конференции 26-29 апреля 1995. – Воронеж: ВГУ, 1995. – С.80

О РАЗВИТИИ МЕТОДОВ РЕШЕТА

Вахитова Е.В. (Стерлитамак)

Методы решета в теории чисел применяются в большом количестве работ, но в основном они посвящены приложению, а о самом методе мало работ. Отметим некоторые этапы развития методов.

1. А.А. Бухштаб [1] дал более совершенную структуру решета Бруна, применив интегро-конечно-разностные уравнения.

2. Б.В. Левин [2] исследовал различные методы решета. А.А. Бухштаб построил весовое комбинаторное решето. Х. Хальберстам и Х.-Э. Рихерт [3] исследовали методы решета в чистом виде и с весами Рихерта. М. Лаборде [4] упростил веса Бухштаба, получил непрерывную форму и показал, что веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба и заведомо хуже.

3. А.А. Бухштаб анонсировал новый тип весового решета. А.Л. Чекин [5] исследовал двумерное, а Е.В. Вахитова [6] - одномерное решето с весами Бухштаба в непрерывной форме Лаборде. Методы решета Бруна и Сельберга с весами Бухштаба нового типа изучались в работах автора. В настоящее время автором подготовлена рукопись монографии "Методы решета с весами Бухштаба и их приложения" (объемом 240 с., набранных на компьютере, библиографический список содержит 160 наименований).

Литература. 1. *Бухштаб А.А.* Новые исследования по методу эратосфенова решета. Дис. ...д-ра физико-матем. наук.М.,1944.129 с.

2. *Левин Б.В.* Метод решета и его применения. Дис. ... д-ра физико-матем. наук. - М., 1963. – 240 с.

3. *Halberstam H., Richert H.-E.* Sieve methods.– London: Acad. Press. 1974. – 364 P.

4. *Laborde M.* Les sommes trigonometriques de Chen et les poids de Buchstab en theorie du crible. These presentee a luniversite de Paris-sud, 1978. – 48 p.

5. *Чекин А.Л.* Двумерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико- числовым задачам. Дис. ... канд. физико-матем. наук. - М., 1987. - 133 с.

6. *Вахитова Е.В.* Одномерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико-числовым задачам. Дис. ... канд. физико-матем. наук. - М., 1992. - 132 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОУПРУГОСТИ

Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д. (Ульяновск)
velmisov@ulstu.ru

Рассматривается задача о динамике упругого элемента конструкции, представляющей собой модель механической системы "трубопровод - датчик давления". Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,\ (x,y) \in G = \{(x,y):\ 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\},$$

$$\varphi_y(x,0,t) = \varphi_y(x,y_0,t) = 0, \qquad x \in (0,x_0),$$

$$P_* - \rho\varphi_t(x_0,y,t) = P(y,t), \qquad y \in (0,y_0),$$

$$\varphi_x(0,y,t) = \dot{w}(y,t), \qquad y \in (0,y_0),$$

$$L(w) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \gamma\dot{w} + \beta w = P_0 - P_* + \rho\varphi_t(0,y,t),\ y \in (0,y_0).$$

Здесь $x, y-$ декартовы координаты; $t-$ время; $\varphi(x,y,t)-$ потенциал скорости среды, которая предполагается несжимаемой (ее плотность $\rho - const$); $w(y,t)-$ прогиб(деформация) упругого элемента датчика; $P(y,t)-$ закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод ($x = x_0$); x_0, y_0 – продольный и поперечный размеры трубопровода; $m, D, N, \alpha, \gamma, \beta, P_0, P_*$ – постоянные, характеризующие свойства упругого элемента и газожидкостной среды; буквенные индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t, точка и штрих сверху - частные производные по t и y.

Показано, что решение задачи можно свести к исследованию интегродифференциального уравнения, связывающего между собой функцию прогиба $w(y,t)$ упругого элемента датчика, находящегося на одном конце трубопровода ($x = 0$), и закон изменения $P(y,t)$ давления среды на другом конце трубопровода ($x = x_0$).

$$L(w) = P_0 - \frac{1}{y_0}\int\limits_0^{y_0}(P + \rho x_0\ddot{w})\,dy - \frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(\lambda_n y)}{ch(\lambda_n x_0)}\int\limits_0^{y_0}\left[\frac{1}{\rho}P + \frac{1}{\lambda_n}sh(\lambda_n x_0)\ddot{w}\right]\times$$
$$\times cos(\lambda_n y)dy$$

На основе этого уравнения проведено исследование динамики упругого элемента датчика. В частности, при периодическом изменении давления ($P = f(y)sin\omega t$) исследовались резонансные явления.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Виноградова Г.А. (Воронеж)

Задача для уравнения внутренних волн с граничными условиями в виде приближения "твердой крыши" ставится следующим образом: найти решение уравнения

$$Lu = f(x, z, t)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = U_0(x,z), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = U_1(x,z)$$

и граничных условиях

$$u|_{z=0} = 0, \qquad u|_{z=H} = 0,$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + N^2(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad -$$

оператор внутренних волн, t - время, x - горизонтальная координата, z - вертикальная координата.

В работе [1] получена асимптотическая оценка функции Грина при $t \to +\infty$

$$G(x,z,z',t) = \frac{1}{8N} ln\left|\frac{\cos\pi(z-z')}{\cos\pi(z+z')}\right| +$$

$$+(\cos^{-\delta}(\pi(z+z')) + cos^{-\delta}(\pi(z-z')) + \cos^{-\delta}(\pi x))O(t^{-\frac{1}{2}}).$$

Используя методы, примененные в [1], можно получить и асимптотическую оценку для ее производной. Эта оценка имеет следующий вид

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,z,z',t) = (\cos^{-\delta}\pi x)O(t^{-\delta}) + (\cos^{-\delta}\pi(z-z') + \cos^{-\delta}\pi(z+z'))O(t^{-\frac{3}{2}}).$$

Литература

1. Г.А.Виноградова. Об асимптотике при $t \to \infty$ функции Грина смешанной задачи для уравнения внутренних волн / Вестник факультета прикладной математики и механики — т.2 — 2000 — с.43-49.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Вылегжанин Д.В. (Минск)

Понятие обобщенной почти эрмитовой структуры, введенной В.Ф. Кириченко [1], является естественным развитием таких понятий как почти эрмитова структура, f-структура, почти контактная структура и других.

Оказывается, что примеры обобщенных почти эрмитовых структур можно найти в классе канонических f-структур на однородном Ф-пространстве G/H. Ниже изложен один из результатов в данном направлении.

Рассмотрим однородное Ф-пространство G/H порядка n и возникающие на нем канонические f-структуры. Алгоритм вычисления канонических структур классических типов для периодических Ф-пространств был описан в работе [2]. Мы рассмотрим случай, когда спектр оператора θ максимален [2]. После вычислений получаем $3^a - 1$ канонических f-структур, где $a = \begin{cases} k, & n = 2k+1 \\ k-1, & n = 2k \end{cases}$. Каждая такая структура в точке $o = H$ будет иметь следующий вид [2]

$$f_0 = \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{a}\xi_j \sin\frac{2\pi m j}{n}\right)(\theta^m - \theta^{n-m}),$$

где $\xi_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, a$, причем среди чисел ξ_j есть ненулевые.

Из возникающих f-структур можно выбрать a штук $(f_0)_i$, $i = 1, \ldots, a$ таких, что их попарные произведения будут нулевыми (для структуры с индексом i полагаем $\xi_i = 1$, а все остальные $\xi_j = 0$, $j \neq i$).

Более того, в [3] доказана согласованность всех классических структур со стандартной метрикой (порождаемой формой Киллинга).

Тогда мы получаем случай, полностью укладывающийся в требования теоремы из [4]. Можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема. *Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка n, причем с максимальным спектром оператора θ [2]. Предположим, что G — полупростая группа Ли, g — инвариантная псевдориманова метрика на G/H, индуцированная формой Киллинга. Тогда на указанном пространстве может быть задана инвариантная GAH-структура ранга $r = a$ (или любого ранга меньшего a) $\{g, f_1, \ldots, f_r, T\}$, где $T = \sum_{i=1}^{r} T_i$. Здесь T_i обозначает композиционный тензор для структуры f_i [1].*

Литература

1. Кириченко В.Ф. // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1986. Т.18. С.25-71.

2. Балащенко В.В., Степанов Н.А. // Матем. сборник. 1995. Т.186. N11. С.3-34.

3. Balashchenko V.V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces. Preprint Nr. 174/1994. Fakultat für Mathematik der Ruhr-Universitat Bochum.

4. Вылегжанин Д.В. Классы обобщенных почти эрмитовых структур высших рангов // ВВМШ "Понтрягинские чтения - XI". Тезисы докл. Воронеж. 2000. С.35.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ГУРСА-ДАРБУ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Гаврилов В.С., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

E-mail: m_sumin@mm.unn.ac.ru

В работе продолжены исследования параметрических задач оптимального управления, начатые в [1]. Рассматривается параметрическая задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf, \ I_1(u) \in \mathcal{M} + q, \ u \in \mathcal{D}, \ q \in R^\kappa \text{ -- параметр,} \quad (1)$$

где $I_1(u) \equiv (J_1(u), \ldots, J_\kappa(u))$,

$$J_i(u) \equiv \int_\Pi F_i(x, y, z[u](x,y), z_x[u](x,y), z_y[u](x,y), u(x,y))\, dxdy +$$

$$\sum_{j=1}^{l} G_{i,j}(z[u](x^{i,j}, y^{i,j})), \ (x^{i,j}, y^{i,j}) \in \Pi, \ I_0(u) \equiv J_0(u),$$

$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(\Pi) : u(x,y) \in U$ п.в. на $\Pi\}$, $U \subset R^m$ - компакт, $\Pi \equiv [0,a] \times [0,b]$, $\mathcal{M} \equiv \{t \in R^\kappa : t_1 \le 0, \ldots, t_{\kappa_1} \le 0, t_{\kappa_1+1} = 0, \ldots, t_\kappa = 0\}$, $(x,y) \in \Pi$, - абсолютно непрерывное решение нелинейной системы Гурса-Дарбу ($z \in R^n$)

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y, u(x,y)), \ z(x,0) = \varphi(x), \ z(0,y) = \psi(y).$$

Предполагается, что исходные данные задачи (1) удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям. Утверждается, что для подобных нелинейных распределенных систем в качестве "базового" элемента теории естественно рассматривать не оптимальное управление, а так называемое минимизирующее приближенное решение (м.п.р.) в смысле Дж.Варги. Изучаются дифференциальные свойства соответствующей понятию м.п.р. функции значений задачи (1) как функции параметра q, а также их связь с различными свойствами регулярности и нормальности задачи [1]. Показывается, в частности, что: 1) регулярность задачи (1) имеет место для "почти всех" значений параметра q из эффективного множества функции значений (типичность регулярности); 2) нормальность задачи (1) влечет липшицевость ее функции значений (проблема чувствительности). Приводятся иллюстративные примеры.

Литература

1. Sumin M.I. Suboptimal control of systems with distributed parameters: minimizing sequences, value function, regularity, normality // Control and Cybernetics. 1996. V.25. No.3. P.529-552.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 98-01-00793.

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ НА ГРАНИЦЕ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА.

Гайденко С.В. (Краснодар)

Пусть в ограниченной области $Q \subset \mathrm{R_n}$, $n \geq 2$, с границей ∂Q класса C^2 задано эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = 0$$

с коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{Q})$, $a_i \in C^1(\bar{Q})$, $a \in C(\bar{Q})$. Предполагается, что в классе $\overset{0}{W}{}_2^1(Q)$ решение этого уравнения нулевое. В работе рассматриваются решения уравнения из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, которые удовлетворяют граничному условию Дирихле локально: для граничной точки x^0 существует окрестность $U(x^0) \subset \partial Q$, в которой $\lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_{U(x^0)} u(x - \delta\nu(x))\varphi(x)\,dS$ для любой функции $\varphi \in C^1(\partial Q)$. Здесь $\nu(x)$ — вектор внешней единичной нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Предполагается, что решение уравнения удовлетворяет граничному условию всюду на ∂Q, кроме некоторого компактного множества $\mathcal{E} \subset \partial Q$. Выясняется связь между "размером" исключительного множества $\mathcal{E}$ и допустимым ростом решения вблизи этого множества, чтобы решение оставалось тривиальным.

Оказывается, если $|u(x)| \leq \rho(\mathrm{dist}(x, \mathcal{E}))$, а множество $\mathcal{E}$ имеет нулевую h-меру Хаусдорфа (см. [1]), где $h(\delta) = \delta^{n-1}\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$, то $u = 0$.

Показано, что этот результат точен: для любого замкнутого множества $\mathcal{E}$ на единичной сфере положительной h-меры Хаусдорфа найдется ненулевая гармоническая в шаре функция, удовлетворяющая указанному ограничению на рост вблизи сферы и принимающая нулевые граничные значения равномерно в окрестности каждой точки дополнения множества $\mathcal{E}$. В случае одноточечного множества $\mathcal{E}$ пример неединственности дает ядро Пуассона, рост которого ограничен степенной функцией $\rho(\delta) = \delta^{1-n}$.

Ранее описанная задача исследована автором в классе решений из $L_p(Q)$ [2].

Литература

1. Л. Карлесон, Избранные проблемы теории исключительных множеств, Москва, изд-во "Мир", 1971, 125 с.

2. С.В. Гайденко, Об исключительных множествах на границе и единственности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Матем. сборник, т.111 (153), №1, 1980, с. 116 – 134.

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Геккиева С.Х. (Нальчик)

niipma@yahoo.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0y}u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь D^{α}_{0y} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка α, $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим аналог задачи Трикоми для уравнения (1).

Пусть $D = D^{+} \cup D^{-}$, где D^{+} – одна из областей: $D_1^{+} = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ y > 0\}$, $D_2^{+} = \{(x,y) : 0 \le x < \infty,\ y > 0\}$ или $D_3^{+} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y > 0\}$, а D^{-} – область, ограниченная характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ и отрезком [0,1] прямой $y = 0$, $y < 0$.

Задача Т. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{\partial D^{+} \setminus (0,1)} = 0,$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\psi(x)$ – заданная функция. На линии $y = 0$ выполняются следующие условия склеивания:

$$\lim_{y \to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \lim_{y \to 0-} u(x,y), \quad \lim_{y \to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \lim_{y \to 0-} u_y(x,y),$$

где $0 < x < 1$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\psi(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ и выполнено условие согласования $\psi(0) = 0$. Тогда задача Т имеет единственное решение такое, что $y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\bar{D}^{+})$, $y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u)_y \in C(D^{+} \cup \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\})$, $u(x,y) \in C(\bar{D}^{-})$, $u_{xx} \in C^2(D^{+} \cup D^{-})$, $u_{yy} \in C^2(\bar{D}^{-})$.*

К СВОЙСТВАМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Гладких С.А. (Воронеж)

Пусть функция $u(x_1, x_2, x_3)$ является гармонической в области $\Omega \subset R^3$. Пусть точки 0 и $\alpha = (\alpha_1, 0, 0)$ лежат в Ω вместе с замыканием области, ограниченной эллипсоидом

$$\frac{(\xi_1 - \alpha_1/2)(r^2 - \alpha_1^2)}{r^2 t^2} + \frac{\xi_2^2}{t^2} + \frac{\xi_3^2}{t^2} = 1 \qquad (1)$$

где $r > 0$, $|\alpha| < r$, $2t = \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}$. Введём оператор усреднения по формуле

$$B^{\alpha}u = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\left(t \int\limits_{|\mu|=1} u\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{r\mu_1 t}{\sqrt{r^2 - |\alpha_1|^2}}, t\mu_2, t\mu_3\right) d\omega_\mu\right) \qquad (2)$$

где $d\omega_\mu$ - элемент поверхности единичной сферы в R^3, $\frac{\partial}{\partial t^2} = \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}$.

Доказана формула

$$u(\alpha) + u(0) = B^\alpha u \qquad (3)$$

Литература

1. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях// Дифференциальные уравнения. - 1974. - Т.10, №12 - с.2184 - 2191.

2. Половинкин И.П. Общие теоремы о среднем значении для волнового уравнения// Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т.27, №11 - с.1987 - 1990.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С СУЩЕСТВЕННО ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУЦИЛИНДРЕ

Глушко В.П., Малютина О.П. (Воронеж)

В полуцилиндре $D \times (0,\infty)$, где $x \in D \subset R_n$ — ограниченная область в R_n с достаточно гладкой границей S, $t \in (0,\infty)$ рассматривается оператор $L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ второго порядка, удовлетворяющий условию α-эллиптичности (см. [1]). "Весовая" функция $\alpha(t)$ в условии α-эллиптичности удовлетворяет следующим требованиям: $\alpha(t) \in C^2(0,\infty)$, $\alpha(t) > 0$, $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$, причем выполнено условие

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty \qquad (1)$$

Заметим, что функция $\alpha(t)$ может обращаться в нуль при $t = +0$, однако при этом интеграл (1) должен сходиться в нуле.

В $D \times (0,\infty)$ рассматривается задача

$$L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u = f(x,t); \qquad (2)$$

$$u\Big|_S = 0; \quad u\Big|_{t=0} = 0; \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0. \qquad (3)$$

Задача (2)–(3) изучается в весовых пространствах $H^s(D\times(0,\infty))$ ($s \geq 0$ — целое) с нормой

$$\|u\|_{s,D} = \left\{ \sum_{j+|\tau|\leq s} \int_0^\infty \int_D \left| \left(\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\tau u(x,t)\right|^2 dx \frac{dt}{\alpha(t)} \right\}^{1/2}.$$

Вводится оператор $A : H^s(D\times(0,\infty)) \to H^0(D\times(0,\infty))$, соответствующий задаче (2)–(3).

Теорема. *При выполнении условия α-эллиптичности, условия (1) и достаточной гладкости коэффициентов оператора L и границы S оператор A*

является нетеровым, т.е. ядро оператора $\mathcal{A}$ конечномерно и область значений оператора $\mathcal{A}$ в $H^0(D \times (0,\infty))$ замкнута, причем справедлива оценка:

$$\|u\|_{2,(d\times(0,\infty))} \le C\left(\|Lu\|_{0,(D\times(0,\infty))} + \|u\|_{0,(D\times(0,\infty))}\right) \tag{4}$$

для любой функции $v(x,t) \in H^2(D \times (0,\infty))$, удовлетворяющей граничным условиям (3).

Слагаемое $\|u\|_{0,(D\times(0,\infty))}$ в правой части (4) можно отбросить в том и только том случае, когда решение задачи (2)–(3) единственно в $H^2(D\times(0,\infty))$.

В заключение заметим, что в отличие от ранее рассмотренных случаев (см. [1], [2] и др.), оператор L может содержать смешанные производные старшего порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}$ $(1 \le j \le n)$.

Литература

1. Глушко В.П. Оценки в $\mathcal{L}_2$ и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Труды московского математического общества. Т. 23. С. 113–178.

2. Малютина О.П. Эллиптическая граничная задача при слабом вырождении на границе. // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — Воронеж, ВГУ, 2000. — С. 29–33.

О ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Губенков А. А. (Саратов)

Рассмотрим произвольную акустическую колебательную систему объема V, ограниченную свободной поверхностью S. Внутри V могут содержаться неоднородности и анизотропные включения, ограниченные поверхностями S_i $(i = 1, \dots, n)$.

Является очевидным следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\Psi(\nu, T) = \int\limits_V \Big[&(\nabla_S \nu - jks : T)^* s^{-1} (\nabla_S \nu - jks : T) + \\ &+ (\nabla \bullet T - jk\rho\nu)^* \rho^{-1} (\nabla \bullet T - jk\rho\nu)\Big]\, dV \ge 0,\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ и s — соответственно плотность среды и тензор упругой податливости, звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина, ν и T — искомые векторы полей скоростей и напряжений.

Из неравенства (1) легко получается неравенство

$$\Psi \ge \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)(k_n - k)^2 \ge 0, \tag{2}$$

если поля в V представить как:

$$\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \nu_n, T = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T_n, \text{ где } \nabla_S \nu_n = jk_n s : T_n, \nabla \bullet T_n = jk_n \rho \nu_n \tag{3}$$

т.е. ν_n и T_n являются решениями задачи для однородной среды, заполняющей V, ∇_S и $\nabla\bullet$ — операторы акустической задачи [1].

Из (2), действуя по методике работы [2], обозначив наим. $|k_m - k| = \Delta k$, получим:

$$\Delta k^2 \leq (1/w)\Psi(\nu, T), \text{ где } w = \int\limits_V (\rho\nu\nu^* + s : TT^*)\, dV. \tag{4}$$

С другой стороны, правая часть (4) принимает наименьшее значение при

$$k = -\left(\frac{j}{w}\right) \int\limits_V (\nu^* \nabla \bullet T + T^* \nabla_S \nu)\, dV = k_{\nu T}. \tag{5}$$

Наконец, если преобразовать (4) с учетом (5), то получим

$$\begin{aligned} \Delta k^2 \leq \int\limits_V \left(\nabla_S \nu^* s^{-1} \nabla_S \nu + \nabla \bullet T^* \rho^{-1} \nabla \bullet T\right) dV \cdot \\ \cdot \left(\int\limits_V (\rho\nu\nu^* + s : TT^*)\, dV\right)^{-1} - k_{\nu T}^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, если m-ое собственное число резонаторной акустической системы находится на основе стационарных свойств функционала (5), то погрешность приближенного решения задачи можно оценить при помощи формулы (6). Данный метод справедлив, если касательные компоненты акустических полей непрерывны на всех поверхностях S_i внутри объема V (при этом возможны наличия разрывов нормальных компонент соответствующих полей). Следует отметить, что оценки (6) менее точны, чем оценки, построенные по Като [3]. Однако, с вычислительной точки зрения, достоинством изложенной методики является то, что при определении погрешности вычислений не требуется предварительное знание собственных частот резонатора, ближайших к искомому значению, нахождение которых представляет собой самостоятельную достаточно сложную задачу.

Литература

1. Губенков А.Н., Казанкин Л.К., Куликов Э.Л. Вариационный метод расчета пьезоэлектрических устройств // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 9. – с. 1883-1892.

2. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. – М.: Изд. "Наука". Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967.

3. Kato T. On the upper and lower bounds of eigenvalues // J. Phys. Soc. Japan. – 1949. - № 4. - p. 334.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА АКУСТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЬЕЗОВОЛНОВОДНЫХ СТРУКТУР С ПОТЕРЯМИ

Губенков А. Н. (Саратов)

Периодические структуры находят многообразные применения в науке и технике [1-3]. Среди многочисленных теоретических методов распространения волн в акустических периодических пьезоволноводных структурах (АППС) большой интерес вызывает вариационный метод, развитый в работе [3]. Однако этот метод является квазистатическим и не дает возможности в силу этого ограничения провести учет потерь. В данной работе вариационный метод, предложенный в [4], развивается на случай реальных АППС, не накладывая никаких ограничений на потери в среде, заполняющей периодический волновод.

Рассмотрим волновод произвольной формы (АППС), периодический вдоль оси z с периодом L, заполняющий объем V, ограниченный поверхностью S.

Физические процессы в объеме V описываются уравнениями Максвелла, уравнениями линейной теории упругости, записанными в форме "уравнений Максвелла" и уравнениями пьезоэффекта [4] (здесь и ниже сохраняются обозначения работы [4]):

$$\nabla \bullet T = jwP - F, B = \mu \bullet H, \nabla_S v = jwS, P = \rho v,$$

$$-\nabla \times E = jwB, D = \varepsilon \bullet E + d : T, \nabla \times H = jwD + I, S = d \bullet E + s : T.$$

На границе S, S_1, S_2 для электрических и акустических функций выполняются условия Леонтовича [5,6] с соответственно электрическим и акустическим операторами импеданса W и W_a, записанными в общем виде так: $E - w_E H - \Phi = 0$, $v - w_A : T - \Phi_A = 0$.

В виду периодичности волновода (АППС), поля можно представить в форме Флоке [1,6]:

$$E = e(x, y, z) \cdot e^{-j\beta_0 z}, H = h(x, y, z) \cdot e^{-j\beta_0 z},$$

$$v = v(x, y, z) \cdot e^{-j\beta_0 z}, T = t(x, y, z) \cdot e^{-j\beta_0 z},$$

где β_0 — комплексная постоянная распространения, а e, h, v, t — периодические функции вдоль оси z.

Тогда искомая величина может быть найдена из функционала, построенного для определения собственных чисел по методике работы [4], так:

$$w = j\left(\int\limits_{V_0}\left((\nabla \bullet t)\cdot\overline{v}^* + (\nabla_S v)\cdot\overline{t}^* + (\nabla \times e)\cdot\overline{h}^* + (\nabla \times h)\cdot\overline{e}^*\right)dv - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{S_0}(e - w_E - \Phi)\times\overline{h}^*\cdot n ds - \int\limits_{S_0}(v - w_A : t - \Phi_A)\cdot\overline{t}^*\cdot n ds\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\int\limits_{V_0}\left((\mu \bullet h)\cdot\overline{h}^* - (\rho v)\cdot\overline{v}^* - (d \bullet e)\cdot\overline{t}^* - (s : t)\cdot\overline{t}^* - (\varepsilon \bullet e)\cdot\overline{e}^* - (d : t)\cdot\overline{e}^*\right)dv}$$

Здесь областью V_0, ограниченной S_0, является отрезок волновода, заключенный между двумя поперечными плоскостями S_1 и S_2, расположенными на расстоянии, равном периоду L, черта над функциями — принадлежность к сопряженной задаче, * — комплексное сопряжение.

Литература

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. - М.: ИЛ, 1959.

2. Нефедов Е.И., Сивов А.Н. Электродинамика периодических структур. – М.: Наука, 1977.

3. Abe H., Sato T. Boundary integral equations from Hamilton's Principle for surface acoustic waves under periodic metal grating // IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. – 2000. – V.47, № 6. - pp. 1601-1603.

4. Губенков А.Н., Казанкин Л.К., Куликов Э.Л. Вариационный метод расчета пьезоэлектрических устройств // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 9. – с. 1883-1892.

5. Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению волн, Изд. АН СССР. – 1948. – с. 5-12.

6. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. – М.: Изд. "Наука". Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967.

ФРЕДГОЛЬМОВА РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Гуревич П.Л. (Москва)

gurevichp@mtelecom.ru

При изучении нелокальных эллиптических задач в n-мерных ($n \geq 3$) областях в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей области в качестве модельных возникают нелокальные задачи в плоских областях (см. [1, 2]). Рассмотрим в качестве примера модельную задачу

$$-\Delta u + u = f(y) \quad (y \in K), \tag{1}$$

$$u(y)|_{\gamma_1} + \alpha u(\mathcal{G}y)|_{\gamma_1} = g_1(y) \ (y \in \gamma_1), \quad u(y)|_{\gamma_2} = g_2(y) \ (y \in \gamma_2). \tag{2}$$

Здесь $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ b_1 < \varphi < b_2\}$, $\gamma_i = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi = b_i\}$ $(i = 1, \ 2)$; $-\pi < b_1 < 0 < b_2 < \pi$; $\mathcal{G} : (\varphi, \ r) \mapsto (\varphi + |b_1|, \ \chi_1 r)$, где $(\varphi, \ r)$ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $\chi_1 > 0$.

Обозначим через $E_a^l(K)$ замыкание множества $C_0^\infty(\bar{K}\setminus\{0\})$ по норме $\|u\|_{E_a^l(G)} = \Big(\sum\limits_{|\beta| \leq l} \int\limits_K |y|^{2a}(|y|^{2(|\beta|-l)} + 1)|D^\beta u|^2 \Big)^{1/2}$. Через $E_a^{l-1/2}(\gamma)$ обозначим пространство следов на луче $\gamma \subset \bar{K}$ с нормой $\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma)} = \inf \|u\|_{E_a^l(K)}$ $(u \in E_a^l(K) : \ u|_\gamma = \psi)$.

Будем изучать решения $u \in E_a^2(K)$ задачи (1)–(2), предполагая, что $(f, \ g_1, \ g_2) \in E_a^0(K) \times E_a^{3/2}(\gamma_1) \times E_a^{3/2}(\gamma_2)$.

Для нахождения необходимых и достаточных условий фредгольмовой разрешимости задачи (1)–(2) рассмотрим вспомогательную задачу с параметром λ для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tilde{u}_{\varphi\varphi} - \lambda^2 \tilde{u} = 0 \quad (\varphi \in (b_1, \ b_2)), \tag{3}$$

$$\tilde{u}(\varphi)|_{\varphi=b_1} + \alpha e^{i\lambda \ln \chi_1} \tilde{u}(\varphi + |b_1|)|_{\varphi=b_1} = 0, \quad \tilde{u}(\varphi)|_{\varphi=b_2} = 0. \tag{4}$$

Теорема. *Модельная нелокальная задача (1)–(2) фредгольмова тогда и только тогда, когда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *не содержит собственных значений задачи (3)–(4).*

Доказательство основано на изучении нелокальной задачи трансмиссии

$$-\Delta v_i + v_i = f_i(y) \quad (y \in K_i;\ i = 1,\ 2), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} v_1(y)|_{\gamma_1} = g_1(y)\ (y \in \gamma_1),\ v_2(y)|_{\gamma_2} = g_2(y) \quad (y \in \gamma_2), \\ v_2(y)|_\gamma - v_1(y)|_\gamma = h_1(y), \\ \frac{\partial v_2}{\partial n}(y)|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}(y)|_\gamma - \alpha\chi_1^{-1}\frac{\partial v_1}{\partial n_1}(\mathcal{G}^{-1}y)|_\gamma = h_2(y) \quad (y \in \gamma). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $K_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ b_1 < \varphi < 0\}$, $K_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \varphi < b_2\}$; $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi = 0\}$; n_1 и n — нормали к γ_1 и γ, направленные внутрь K_1 и K_2 соответственно.

Задачи (1)–(2) и (5)–(6) формально сопряжены; т.е. для любой $u \in E_a^2(K)$, удовлетворяющей однородным условиям (2), и любых $v_i \in E^2_{-a+2}(K_i)$ $(i = 1,\ 2)$, удовлетворяющих однородным условиям (6), $\sum\limits_{i=1}^{2}\int\limits_{K_i}(-\Delta u + u)\bar{v}_i\,dy = \sum\limits_{i=1}^{2}\int\limits_{K_i} u(-\Delta\bar{v}_i + \bar{v}_i)\,dy$. Можно показать, что ядра задач (1)–(2) и (5)–(6) конечномерны, а размерность коядра задачи (1)–(2) равна размерности ядра задачи (5)–(6); отсюда следует утверждение Теоремы.

Все результаты получены для произвольных эллиптических операторов порядка $2m$ и общих краевых условий, содержащих конечное число нелокальных членов.

Литература

[1] А.Л. Скубачевский, *Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах*, Дифференц. уравнения. 26, No 1 (1990), 120–131.

[2] А.Л. Скубачевский, *О методе срезающих функций в теории нелокальных задач*, Дифференц. уравнения. 27, No 1 (1991), 128–139.

МНОГОМЕТОДНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Гурман В.И. (Переславль-Залесский)
E-mail: gurman@cprc.botik.ru

Бурный рост разнообразных методов в теории систем и управления — процесс противоречивый: с одной стороны, он несет новые возможности, но с другой — выдвигает чрезмерные требования к компетенции практических пользователей при выборе метода среди многих, основанных на различных математических теориях. Это ведет к отчуждению практиков от ценных теоретических находок. В то же время, несмотря на обилие методов, они покрывают далеко не равномерно всю область задач управления, и существует объективная необходимость развивать все новые методы. Единственный путь разрешения этого противоречия — создание интеллектуальных систем, позволяющих выбирать или комбинировать различные методы в эффективных процедурах поиска в зависимости от характеристик задачи.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 00-01-000731

В докладе предлагается подход к решению этой проблемы и представлены предварительные результаты по его реализации:

– архитектура Интеллектуальной Системы поддержки построения процедур Оптимизации Управления (ИСОУ);

– классификация задач и методов оптимального управления по признакам, существенным для генерирования процедур оптимизации;

– пример многометодной процедуры оптимизации стратегии развития региона на основе его социо-эколого-экономической модели.

Соответствующие разработки опираются на общий принцип расширения [1], позволяющий генерировать и интерпретировать различные конкретные методы как способы задания содержащихся в нем функциональных параметров.

Литература

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления.— М.: Наука. Физматлит, 1997.

К ДИСКРЕТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

aegurjanov@mail.ru

При решении задачи стабилизации линейной стохастической системы управления линейным дискретным регулятором [1]

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(kh), t \in [kh, (k+1)h), k = 0, 1, \ldots, h > 0, \qquad (1)$$

где $t \in R^1$, положительная случайная величина $h \in R^1$, стохастическая абсолютно непрерывная векторная функция $x(t) \in R^n$ и где $A(t)$, $B(t)$ суть $n \times n$–матрицы, элементами которых являются измеримые интегрируемые при $t \in R^1$ случайные процессы, полезно иметь в виду то, что глобальная экспоненциальная асимптотическая устойчивость в смысле А. М. Ляпунова нулевого решения ($x(t) \equiv 0$) системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (1) может быть при условии положительности с вероятностью 1 вещественных частей всех собственных чисел матриц $A(t)$ и $A(t) + B(t)$ даже при неизменности матриц $A(t)$ и $B(t)$. Например, если в стохастической системе дискретного регулирования (1) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} \eta & \xi \\ -\xi & \eta \end{pmatrix}$, $B = -0.5A$, а случайные величины η и ξ таковы, что $0 < \eta < \ln(3)/h$ и $\xi = \pi/h$, то тогда вещественные части всех собственных чисел матриц A и $A + B$ положительны с вероятностью 1 и, как выяснено в [2], тогда нулевое решение ($x(t) \equiv 0$) рассматриваемого примера системы уравнений (1) с вероятностью 1 глобально экспоненциально асимптотически устойчиво в смысле А. М. Ляпунова.

Литература

1. Гурьянов А. Е. Стабилизация стохастической системы управления линейным дискретным регулятором // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1, 1999, вып. 2 (N8). С. 14–19.

2. Гурьянов А. Е. Linear discrete regulator stochastic control system stabilization // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. YI международный семинар. Тезисы докладов. М., ИПУ РАН. 2000. С. 93.

БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В УСЛОВИЯХ НАЛОЖЕНИЯ КРАЕВЫХ И СИММЕТРИЧНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ[1]

Данилова О. Ю. (Воронеж)

E-mail danilovaolga@rambler.ru

Известно, что к изучению краевых особенностей гладких функций приводят вариационные задачи при наличии симметрии или полуограничения (в виде дополнительного неравенства $g(x) \geq 0$). Переход от исследования функционала V к анализу функции (ключевой) W на конечномерном пространстве ключевых параметров осуществляется с помощью схем конечномерной редукции [1]. При некоторых естественных условиях функция W наследует аналитические и топологические свойства функционала V. Наличие гладкого регулярного полуограничения приводит к исследованию функции в окрестности краевой особенности [2] (особенности, лежащей на крае области). Дополнительное наложение симметрии приводит к новым типам краевых особенностей, представляющих интерес для теории упругости [3] и теории кристаллов [4]. Прогнозирование фазовых состояний потенциальных физических систем базируется на описании bif – раскладов ключевых функций в особых точках типа n–мерных сборок.

Бифуркационные эффекты, вызванные совмещением краевых и симметричных особенностей можно изучать через включение $g(x)$ в совокупность ключевых параметров.

Литература:

1. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук, 1996, т. 51, вып. 1, С. 101 - 132.

2. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют// Успехи матем. наук, 1978, т. 33, вып. 5(203), С. 91 - 105.

3. Данилова О. Ю. Двухмодовые бифуркации решений уравнения Кармана при наличии интегрального полуограничения// Труды матем. фак - та (новая серия), Воронеж, ВГУ, 1999, вып. 4, С. 41 - 50.

4. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков. // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа, Воронеж, ВГУ, 2000, С. 41- 57.

[1] Работа выполнена при поддержке Фонда С.Г. Крейна. Программа "Молодые математики".

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Databases Дободеич И.А., Барметов Ю.П. (Воронеж)
E-mail: post@vgta.comch.ru

Ряд прикладных задач сводится к интегрированию следующего уравнения

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} + (M \pm 1)\frac{\partial M}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

где M, z и τ - безразмерные скорость, продольная координата и время. Решения этого уравнения являются частными для уравнения

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial M}{\partial \tau}\frac{\partial M}{\partial z} + 2M\frac{\partial^2 M}{\partial \tau \partial z} + 2M(\frac{\partial M}{\partial z})^2 + (M^2-1)\frac{\partial^2 M}{\partial^2 z} = 0, \qquad (2)$$

к которому сводится известная система уравнений Эйлера для описания движения невязкой сжимаемой жидкости [1].

Если искать решение уравнения (1) в виде $M = \Phi(\tau)\cdot\Psi(z)$, получим

$$M = \frac{k_1 + z}{u} \mp 1, \quad u = k_2 + \tau, \quad k_i = const. \qquad (3)$$

Используя выражение (3), методом последовательных обобщений можно найти несколько семейств частных решений уравнения (1) и, соответственно, (2). Например,

$$M_1 = \frac{k_1 + z}{u} \mp 1 + \frac{k_4}{2u^2} \pm \frac{1}{u}\sqrt{L_1} \qquad (4)$$

и

$$M_2 = \frac{1}{u}(k_1 + \frac{z}{2} \pm \sqrt{L_2}) - k_3 \mp 1, \qquad (5)$$

$$L_1 = k_3 + k_4\frac{k_1 + z}{u} + \frac{k_4^2}{4u^2}, \; L_2 = (k_3 \cdot u + k_1 + \frac{z}{2})^2 + k_4 \cdot u.$$

Выражение (5) позволяет, в частности, построить профиль начальной волны разрежения при открытии клапана на трубопроводе в газонаполненной системе с учетом степени и времени открытия, а также параметров трубопровода и газа при $M(\tau = 0) = 0$.

Литература

1.Дободеич И.А. Некоторые математические модели нестационарных процессов в гидропневмолиниях. //Математическое моделирование инфор мационных и технологических систем. Сб. науч. тр. - Вып. 4. /Воронеж. гос. технол. акад. -Воронеж, 2000. -365 с. (с.160 - 163)

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ ПО ПОЛЮ НАПРАВЛЕНИЙ ГРАДИЕНТОВ

Дубовицкий В.А. (Черноголовка)
E-mail: dubv@icp.ac.ru

Пусть Q есть прямоугольник на плоскости R^2, а $\varphi : Q \to S^1$ некоторое поле векторов единичной длины на Q. Рассмотрим задачу восстановления непрерывной на Q функции f из условия компланарности ее градиентов полю

φ и по следу на границе ∂Q. В предположении о непрерывной дифференцируемости φ эта задача имеет классическое решение методом интегрирующего множителя. Однако этот способ решения неустойчив по отношению к возмущениям поля малым по норме, но не по производным, характерным для постановок такого рода задач с "экспериментально измеряемым" полем φ. Для обеспечения устойчивости по отношению к негладким возмущениям поля, в работе предложена иная схема восстановления, основанная на паре последовательно решаемых экстремальных задач и предполагающая априорную выпуклость искомой функции. Рассмотрим задачу

$$\int_Q \|\nabla f(x) - \beta(x)\varphi(x)\|^2 dx \to \min, f \in Conv_2(Q),\ \beta(x) \geq 1 \qquad (1)$$

Минимум в (1) ищется среди пар функций (f, β), где $\beta \in L_2(Q, R)$, через $Conv_2(Q)$ обозначена совокупность непрерывных выпуклых на Q функций, имеющих квадратично интегрируемый градиент. Функция β в (1) является обобщением понятия интегрирующего множителя в ситуации, когда множителя в точном смысле не существует. Решение (1) заведомо неединственно, однако справедлива

Теорема 1. *В задаче (1) достигается минимум, причем функциональная комбинация $w(\varphi) = \nabla f - \beta\varphi$ не зависит от минимизирующей пары (f, β) и непрерывно зависит (по норме L_2) от φ.*

Доказательство основано на рассмотрении конуса $K_\varphi = \{u(x) - \beta(x)\varphi(x) : x \in Q,\ u, \beta \in L_2,\ \beta \geq 0,\ u$ – циклически монотонна на $Q\}$ в пространстве $L_2(Q, R^2)$. Циклическая монотонность возникает как эквивалент описания градиентных полей выпуклой функции [1]. В работе доказано, что конус K_φ замкнут, и что многозначное отображение $\varphi \to K_\varphi$ полунепрерывно сверху по φ. После чего утверждение теоремы сводится к очевидной формуле $w(\varphi) = Pr(\varphi, K_\varphi)$, где $Pr(\cdot, K_\varphi)$ обозначает оператор проектирования на выпуклый замкнутый конус K_φ. Восстановление f завершает решение второй экстремальной задачи

$$\int_{\partial Q} (f(x) - b(x))^2 dl \to \min, \nabla f - \beta\varphi = w,\ f \in Conv_2(Q),\ \beta(x) \geq 1 \qquad (2)$$

где $w \in K_\varphi - \varphi \in L_2(Q, R^2)$, $b \in L_2(Q, R)$ функции-параметры задачи (2), а функционал в ней задан линейным интегралом. Функция b имеет смысл следа на ∂Q восстанавливаемой функции, а w берется из решения задачи (1).

Теорема 2. *Решение (2) существует, единственно и непрерывно зависит от b, w.*

Последовательно решая задачи (1,2) мы получим некое выпуклое обобщенное решение поставленной задачи, причем оно устойчиво по отношению к малым в квадратической норме возмущениям поля и следа. Описанный способ имеет эффективную численную реализацию. Он перспективен , например, для решения актуальной в физике плазмы задачи восстановления температуры $T(u, v)$ и вогнутой энтропии $S(u, v)$ исходя из экспериментально измеренных точек $P(u, v)$ калорического уравнения состояния и уравнения второго начала термодинамики $TdS = dU + Pdv$. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-00981).

Литература

[1] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

НОВЫЙ ПОДХОД К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дубровский В.В., Гугина Е.М. (Магнитогорск)

Процедура обоснования метода Фурье для решения уравнений в частных производных, предложенная впервые в 1922 г. В.А.Стекловым, основана на почленном дифференцировании формального ряда. В.А.Чернятин в 80–90–х годах опубликовал ряд работ, в которых провел обоснование этого метода без использования почленного дифференцирования, но непосредственно суммируя формальный ряд к функции с нужными дифференциальными свойствами.

Приведем новый метод обоснования применительно к следующему сингулярному дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -(1-x^2)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + p(x)u(x,t), \tag{1}$$

где $p(x)$-дважды непрерывно дифференцируемая действительная функция на [-1;1],$p(-1) = p(1) = 0$.

Зададим начальное условие:

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и поставим задачу найти функцию

$$u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}) \tag{3}$$

(смотри [1],$\overline{Q} = [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon] \times [0;T]$, где $0 < \varepsilon < 1$),
удовлетворяющую исходному уравнению (1) и начальному условию (2).

Представив искомое решение в виде ряда Фурье по ортонормальной на $[-1;1]$ системе полиномов Лежандра, нами были выделены в нем две составляющие: регулярная, допускающая почленное дифференцирование нужного порядка, и сингулярная, не допускающая почленного дифференцирования из-за расходимости получаемого ряда и которую мы просуммировали к следующей функции класса $C^{2,1}(\overline{Q})$:

$$v_0(\alpha,0) = \left\{\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})[\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\frac{\theta_n}{n^2} - \int_0^{\alpha}d\tau\int_0^{\tau}q_1(\xi)d\xi]+\right.$$

$$\left. + \cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})[(\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\frac{\theta_n}{n})\alpha - \int_0^{\alpha}d\tau\int_0^{\tau}q_2(\xi)d\xi]\right\}/(\sin\alpha)^{1/2}$$

где

$$q_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\theta_n\cos n\alpha,$$

$$q_2(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\theta_n\sin n\alpha,$$

где θ_n - коэффициент Фурье функции $\theta(x) = p(x)\varphi(x) - \varphi''(x)$ по ортогональной на $[0;\pi]$ системе функций $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Таким образом была доказана следующая теорема:

Теорема 1 *Для разрешимости задачи* (1) – (3) *необходимо и достаточно, чтобы начальная функция* $\varphi(x) \in C^{2,1}[-1;1]$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n| < \infty$. *Тогда решение* $u(x,t)$ *существует, единственно и представляется равномерно сходящимся рядом Фурье по ортонормальной на* $[-1;1]$ *системе полиномов Лежандра.*

Литература

1. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных.М.:МГУ,1991.С.10.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ВОЗМУЩЕННОГО УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Дубровский В.В.[1], Чекашкина З.С. (Магнитогорск)

В нашей работе, используя преобразование Кэли самосопряженного оператора, будут вычислены регуляризованные следы унитарных операторов всех порядков.

Пусть V_i -унитарные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H со спектром, состоящим из собственных значений β_n^i конечной кратности, сходящихся к точке 1, причем выполнено условие Кэли: множество всех векторов $V_ih - h, h \in H$ плотно в H, $i = 1,2$.

Введем самосопряженные операторы A_i, $i = 1,2$, с помощью обратного оператора к преобразованию Кэли: $A_i = (zE - \bar{z}V_i)(1 - V_i)^{-1}$.

Предположим, что оператор A_1 имеет ядерную резольвенту или, что то же самое:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n^1 - 1| < \infty, \qquad (1)$$

где β_n^i-собственные числа оператора V_i, занумерованные согласно формуле $\lambda_n^i = (zE - \beta_n^i)(1 - \beta_n^i)^{-1}$.

Будем дополнительно предполагать, что оператор

$$A_2 - A_1 = (zE - \bar{z}V_2)(1 - V_2)^{-1} - (zE - \bar{z}V_1)(1 - V_1)^{-1} \qquad (2)$$

продолжается по непрерывности до ограниченного, всюду определенного оператора в H. Справедлива следующая

Теорема 2 *Если* V_i*-унитарные операторы со спектром, состоящим из собственных чисел конечной кратности, сходящихся к 1, удовлетворяющие условию Кэли, ограничению (1) и оператор (2) ограничен, то верно соотношение*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} ((\beta_n^2)^k - (\beta_n^1)^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{(\bar{z} - z)(\beta_n^2 - \beta_n^1)}{(k-1)!} *$$

---

[1] Автор поддержан грантом РФФИ

$$* \lim_{\lambda\to\bar z} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\left(\frac{(\lambda-z)^k}{(z-\lambda-\beta_n^2(\bar z-\lambda))(z-\lambda-\beta_n^1(\bar z-\lambda))}\right)]-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{((zE-\bar z V_2)(1-V_2)^{-1}-(zE-\bar z V_1)(1-V_1)^{-1})f_n,f_n)}{(k-1)!}*$$

$$* \lim_{\lambda\to\bar z} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\left(\frac{(\lambda-z)^k(1-\beta_n^1)^2}{(z-\lambda-\beta_n^1(\bar z-\lambda))^2}\right)],$$

где все ряды сходятся абсолютно .

ОБ АЛГОРИТМЕ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ[1]

Дудов С. И., Златорунская И. В. (Саратов)

Рассматривается задача о наилучшем приближении заданного выпуклого компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ шаром $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p \,/\, n(x-y) \le r\}$ в норме $n(\cdot)$:

$$h(D, Bn(x,r)) \to \inf_{x\in\mathbb{R}^p,\, r>0}. \qquad (1)$$

Здесь $h(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\right\}$ – метрика Хаусдорфа, порожденная нормой $n(\cdot)$. Свойства решения задачи (1) изучались в [1]-[2].

Предлагается следующая схема построения последовательных приближений для численного решения задачи (1).

Пусть на k-ом шаге алгоритма получена тройка объектов $\{D_k, M_k, x_k\}$. В ней D_k и M_k являются многогранниками, содержащими соответственно множества D и $Bn(o_p,1)$, а точка $x_k \in D_k$ является решением задачи

$$R_k(x) - \rho_k(x) \to \min_{x\in D_k}. \qquad (2)$$

Здесь $R_k(x) = \max_{y\in D} n_{M_k}(x-y)$, $n_{M_k}(x) = \inf\{\alpha > 0 \,|\, \frac{x}{\alpha} \in M_k\}$ – функция Минковского множества M_k, $\rho_k(x) = \min_{y\in\overline{\mathbb{R}^p\setminus D_k}} n(x-y)$. При $k=0$ выбор многогранников $D_0 \supset D$ и $M_0 \supset Bn(o_p,1)$ осуществляется произвольно.

Переход к новой тройке $\{D_{k+1}, M_{k+1}, x_{k+1}\}$ осуществляется следующим образом.

Построение D_{k+1}. Если $x_k \in D$, то в любой точке $y_k \in \Omega = \overline{\mathbb{R}^p\setminus D}$, для которой $\rho_\Omega(x_k) \equiv \min_{y\in\Omega} n(x_k-y) = n(x_k-y_k)$, строим опорную гиперплоскость $\pi(y_k)$ к D. Если же $x_k \notin D$, то берем любую точку $y_k \in D$, для которой $\rho_D(x_k) = n(x_k-y_k)$, и находим гиперплоскость $\pi(y_k)$, разделяющую D и $Bn(x_k, \rho_D(x_k))$. Построенная гиперплоскость $\pi(y_k)$ вместе с гранями многогранника D_k образует новый многогранник $D_{k+1} \supset D$.

[1] Работа поддержана программой "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

Построение M_{k+1}. Берем любую точку $z_k \in D$, для которой $R(x_k) \equiv \max_{y \in D} n(x_k - y) = n(x_k - z_k)$ и в точке $\dfrac{z_k - x_k}{n(z_k - x_k)}$ находим опорную гиперплоскость $\pi(z_k)$ к $Bn(o_p, 1)$. Вместе с гранями многогранника M_k она образует новый многогранник $M_{k+1} \supset Bn(o_p, 1)$.

Теперь в качестве x_{k+1} берем решение задачи (2) при $k := k+1$. Показано, что задача (2) сводится к задаче линейного программирования и доказана

Теорема. *Любая предельная точка x^* последовательности $\{x_k\}$ является центром шара наилучшего приближения, а $r^* = (R(x^*) + \rho_\Omega(x^*))/2$ его радиусом, причем $h(D, Bn(x^*, r^*)) = (R(x^*) - \rho_\Omega(x^*))/2$.*

Литература

1. Никольский М.С., Силин Д.Б. *О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала* // Тр. МИРАН. - 1995. - Т. 211. - С. 338-354.

2. Дудов С.И., Златорунская И.В. *Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы* // Матем. сборник. - 2000. - Т. 191. - № 10. - С. 13-38.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Еремин И.И. (Екатеринбург)

ermii@imm.uran.ru

Пусть $\{F_\alpha(x)\}_{\alpha \in \Omega}$ — множество векторных функций, причем $F_\alpha : R^n \to R^{nm}$, Ω — произвольное множество нумерующих индексов. Выпишем задачи

$$P_\cap : \sup\{f(x) \mid x \in \bigcap_\alpha M_\alpha := M_\cap\},$$

$$P_\cup : \sup\{f(x) \mid x \in \bigcap_\alpha M_\alpha := M_\cup\},$$

где $M_\alpha := \{x \geq 0 \mid F_\alpha(x) \leq 0\}$, $f : R^n \to R$. Эти задачи могут быть переписаны в форме:

$$\sup\{f(x) \mid \sup_{(\alpha)} |F_\alpha(x)|_{\max} \leq 0, \quad x \geq 0\}, \tag{1}$$

$$\sup\{f(x) \mid \inf_{(\alpha)} |F_\alpha(x)|_{\max} \leq 0, \quad x \geq 0\}. \tag{2}$$

Задача (1) называется конъюнктивной, а (2) — дизъюнктивной задачей оптимизации; здесь $|\cdot|_{\max}$ означает операцию взятия максимального значения из координат вектора, стоящего внутри $|\cdot|_{\max}$. Отдельно выпишем частную задачу

$$\sup\{f(x) \mid F_\alpha(x) \leq 0, \quad x \geq 0\}. \tag{3$_\alpha$}$$

Задачам (1)–(3) поставим в соответствие их функции Лагранжа:

$$F_\cap(x, u) = f(x) - \sup_{(\alpha)} (u_\alpha, F_\alpha(x)), \quad u_\alpha \geq 0, \tag{4}$$

$$F_\cup(x, u) = f(x) - \inf_{(\alpha)} (u_\alpha, F_\alpha(x)), \quad u_\alpha \geq 0, \tag{5}$$

$$F_\alpha(x) = f(x) - (u_\alpha, F_\alpha(x)), \quad u_\alpha \geq 0. \tag{6}$$

Функция (4) — *конъюнктивная* функция Лапранжа, соответствующая задаче $P_\cap$; (5) — *дизъюнктивная* функция Лапранжа, соответствующая задаче $P_\cup$; (6) — стандартная функция Лапранжа, соответствующая задаче (3).

Теорема 1. *Если* $[\bar{x}, \bar{u}] \geq 0$ — *седло функции* (4), *то* $\bar{x} \in \operatorname{Arg} P_\cap$, *при этом* $\sup\limits_{(\alpha)} (\bar{u}_\alpha, F_\alpha(\bar{x})) = 0$; *здесь* $\bar{u} = \{\bar{u}_\alpha\}$.

Теорема 2. *Если* $[\bar{x}, \bar{u}] \geq 0$ — *седло функции* (5), *то* $\bar{x} \in \operatorname{Arg} P_\cup$, *при этом* $\inf\limits_{(\alpha)} (\bar{u}_\alpha, F_\alpha(\bar{x})) = 0$.

Для задачи $P_\cup$ введем модифицированную функцию Лагранжа

$$F_\cup^\oplus(x, u) = f(x) - \inf_{(\alpha)} (u_\alpha, F_\alpha^+(x)); \tag{7}$$

здесь $[z_1, \ldots, z_k]^+ = [z_1^+, \ldots, z_k^+]$, $z_i^+ = \max\{0, z_i\}$.

Введем условия:

$$\left.\begin{array}{l} 1^0.\ f(x) \text{ — непрерывна на } \overline{\bigcup\limits_\alpha M_\alpha}; \\[2ex] 2^0.\ \forall\alpha\ \exists\ [\bar{x}_\alpha, \bar{u}_\alpha] \geq 0 \text{ — седло для (6)}; \\[2ex] 3^0.\ \sup\{\|x\| \mid x \in \bigcup\limits_\alpha \operatorname{Arg}(3)_\alpha\} < +\infty. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (8). *Если* $\{\bar{x}_{\alpha_j}\} \to \bar{x}$, $\bar{x}_{\alpha_j} \in \operatorname{Arg}(3)_{\alpha_j}$, $\bar{u} = \{\bar{u}_\alpha\}$ (*см.* 2^0 *из* (8)), *то* $[\bar{x}, \bar{u}] \geq 0$ — *седло функции* $F_\cup^\oplus(x, u)$.

Рассмотрим функцию

$$F_\cup^R(x) = f(x) - \inf_{(\alpha)} (R_\alpha, F_\alpha^+(x)), \tag{9}$$

$\{R_\alpha\}$ — положительные векторные параметры.

Теорема 4. *Пусть функция* $F_\cup(x, u)$ *обладает седлом* $[\bar{x}, \bar{u}] \geq 0$, $\bar{u} = \{\bar{u}_\alpha\}$ *и* $\forall\alpha:\ R_\alpha \geq \bar{u}_\alpha + \delta$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$\operatorname{Arg}(2) = \operatorname{Arg}\max_{x \geq 0} F_\cup^R(x).$$

Теорема 5. *Пусть функция* $F_\cap(x, u)$ *обладает седлом* $[\bar{x}, \bar{u}] \geq 0$, $\bar{u} = \{\bar{u}_\alpha\}$ *и* $\forall\alpha:\ R_\alpha \geq \bar{u}_\alpha + \delta$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$\operatorname{Arg}(1) = \operatorname{Arg}\max_{x \geq 0} F_\cap^R(x),$$

где $F_\cap^R(x) = f(x) - \sup\limits_{(\alpha)} (R_\alpha, F_\alpha^+(x))$.

Литература

1. Еремин И.И. Двойственность в линейной оптимизации. –Екатеринбург: УрО РАН, 2001. –180 с.

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Ершов Э.Б., Гусятников П.П.

Рассматривается следующая задача: пусть некоторая фирма располагает заданным количеством ресурсов двух типов и может выпускать некоторый конечный продукт используя эти ресурсы в процессе производства. Целью фирмы является максимизация выпуска конечного продукта при фиксированных количествах ресурсов обоих типов. Производя конечный продукт, фирма может использовать две технологии, каждая из которых определяется соответствующей производственной функцией $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$. Считается, что вышеупомянутые производственные функции имеют постоянную отдачу от масштаба, то есть являются однородными функциями первой степени.

Введем следующие обозначения: R_1, R_2 — неотрицательные числа, характеризующие количество ресурсов обоих типов, которым располагает фирма. В дальнейшем будем считать, что вышеупомянутые производственные функции имеют постоянную отдачу от масштаба, то есть являются однородными функциями первой степени. Задача фирмы — распределить имеющиеся в её наличии ресурсы между двумя технологиями таким образом, чтобы максимизировать выпуск конечного продукта.

Таким образом, решается следующая задача максимизации:

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_1(x_1, x_2) + f_2(y_1, y_2) \to \max,$$

при условии что

$$0 \le x_1 + y_1 \le R_1,$$
$$0 \le x_2 + y_2 \le R_2.$$

Здесь x_1 и y_1 — количества ресурса первого типа, используемые в первой и второй технологиях производства соответственно; x_2 и y_2 — количества ресурса второго типа, используемые в первой и второй технологиях производства соответственно.

Целью данной статьи является исследование свойств так называемой композиционной производственной функции

$$F(R_1, R_2) = \max_{x_1, x_2, y_1, y_2} \{f(x_1, x_2, y_1, y_2) | 0 \le x_1 + y_1 \le R_1, 0 \le x_2 + y_2 \le R_2\}$$

и доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Пусть функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$ являются монотонно неубывающими непрерывно дифференцируемыми однородными первой степени функциями. Тогда композиционная производственная функция $F(R_1, R_2)$ также является монотонно неубывающей непрерывно дифференцируемой однородной первой степени функцией, причем существуют некоторые постоянные M_1, M_2, D_1 и D_2, $D_2 > D_1 > 0$ и однородные первой степени функции $G(R_1, R_2)$ и $H(R_1, R_2)$ такие что*

$$F(R_1, R_2) = G(R_1, R_2), \text{ если } \frac{R_1}{R_2} > D_1,$$

$$F(R_1, R_2) = M_1 R_1 + M_2 R_2, \text{ если } D_1 < \frac{R_2}{R_1} < D_2,$$

$$F(R_1, R_2) = H(R_1, R_2), \text{ если } \frac{R_2}{R_1} < D_2,$$

то есть на некотором интервале отношения $\frac{R_1}{R_2}$ значение композиционной функции выражается через свои аргументы линейно.

Доказанная теорема иллюстрируется на примере для случая, когда обе производственные функции являются функциями Кобба-Дугласа. Для некоторых частных типов производственных функций можно также обобщить вышеупомянутую теорему на случай трех видов ресурсов и трех производственных технологий.

О НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ 3-ГО ПОРЯДКА СО СТУПЕНЧАТОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ[1]

Ефремов И.И. (г.Саратов)

Пусть на отрезке $[0,1]$ задан линейный дифференциальный оператор L 3-го порядка, порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y) = \frac{1}{r(x)} y^{(3)}(x),$$

где $r(x)$ – ступенчатая функция, $r : [0,1] \to C$ и $r(x) = r_k = | r_k | e^{i\varphi_k}$, для $x \in I_k$, $k = 0,1,2$, $I_0 = [a_0 = 0, a_1)$, $I_1 = [a_1, a_2)$, $I_2 = [a_2, a_3 = 1]$ и линейно независимыми нормированными краевыми условиями:

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \beta_\nu y^{k_\nu}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} [\alpha_{\nu j} y^{(j)}(0) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(1)],$$

где

$$\nu = 1,2,3,\ 2 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3,\ k_1 > k_3,\ \prod_{\nu=1}^{3} (| \alpha_\nu | + | \beta_\nu |) \neq 0.$$

Пусть $G(x, \xi, \lambda)$ функция Грина дифференциального оператора $L - \lambda E$, где λ не является собственным значением оператора L, а E единичный оператор.

Теорема. *Пусть* $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 \geq \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ *и*

1) при $(k_1, k_2, k_3) \in \{(2,2,1), (2,2,0)\}$, $\alpha_3 \neq 0$ *и* $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$,

2) при $(k_1, k_2, k_3) = (2,1,1)$, $\alpha_1 \neq 0$ *и* $\alpha_2\beta_3 \neq \alpha_3\beta_1$,

3) при $(k_1, k_2, k_3) = (2,1,0)$, $\alpha_1 \neq 0$ *и* $\sqrt[3]{| r_0 |}\alpha_2\beta_3 \neq \sqrt[3]{| r_2 |} e^{i\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{3}} \beta_2\alpha_3$,

4) при $(k_1, k_2, k_3) = (2,0,0)$, $\alpha_1 \neq 0$ *и* $\alpha_2\beta_3 \neq \alpha_3\beta_2$.

Тогда в некотором S - секторе комплексной ρ плоскости справедлива следующая оценка:

$$| G(a_1, 0, \lambda = -\rho^3) | \geq \frac{n}{3| \rho |^2},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

при $|\rho| \geq R_n$, $R_n \to \infty$, $\rho \in S_\delta$

$$\{S_\delta = \rho \in S : |\rho - \rho_i| \geq \delta\},$$

где $\lambda_i = -\rho_i^2$ *- собственные значения оператора* L, δ *некоторое фиксированное положительное число.*

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ БЛОКОВ И РАЗЛОМОВ[1]

Желиговский В.А. (Москва) *vlad@mitp.ru*,
Скуратов Е.Н. (Екатеринбург) *skuratov@imm.uran.ru*

В последние годы активно ведется разработка детерминистских блоковых моделей сейсмических процессов. Модельные потоки сейсмических событий воспроизводят некоторые статистические закономерности реальных последовательностей землетрясений. Для достижения лучшего соответствия между характеристиками реальных и модельных потоков необходимо более полно учитывать и более точно описывать физические процессы, происходящие в литосфере. Одно из направлений — модификация блоковой модели посредством учета миграции флюидов вдоль тектонических разломов в земной коре [1].

Тектонический регион представляется в виде системы абсолютно жестких блоков, и взаимодействие между ними осуществляется посредством сил упругой и вязкой природы, действующих на их границах.

Границы блоков являются сегментами разломов, по системе разломов происходит миграция флюидов.

Модель включает в себя уравнения, описывающие движение блоков, фильтрацию флюидов вдоль тектонических разломов, а также условия возникновения землетрясений. Программа, написанная под операционной системой Windows9x, имеет удобный пользовательский интерфейс. Входными данными для визуализации процесса миграции флюидов являются формализованное описание блоковой структура сейсмического региона и файл физических величин, характеризующих состояние блоковой структуры. Имеется возможность настройки параметров визуализации для следующих физических характеристик: порового давления флюида, электромагнитных параметров, касательного и нормального напряжений на берегах разломов.

Литература

1. Габриэлов А.М., Желиговский В.А., Подвигина О.М. Миграция флюидов и динамика системы блоков и разломов // Вычисл. сейсмология. Вып 31.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований и разработок для независимых государств бывшего СССР (CRDF), проект RG2-2237 и гранта INTAS-РФФИ № 97-1914.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СИСТЕМЕ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Жуковская З.Д., Провоторова Е.Н., Глушко Е.Г. (Воронеж)

Изучение физико-математических дисциплин в техническом вузе начинается с первого семестра и вызывает у студентов-первокурсников, еще неимеющих навыков организации своей учебной деятельности, наибольшие сложности. Поэтому создание системы эффективного непрерывного контроля знаний особенно необходимо при изучении дисциплин физико-математического цикла. Использование современных компьютерных технологий: тестирующих, контрольно-обучающих программ, глобальной компьютерной сети интернет позволяет значительно усовершенствовать процесс управления учебной работой.

Наш опыт преподавания курса высшей математики показывает необходимость введения в систему контроля знаний тестирующих программ по каждому разделу изучаемого курса, при этом тестирующий контроль должен быть направлен на выявление различных познавательных способностей студентов, его восприятия, анализа и воспроизведения учебной информации, способности к творческому мышлению. Анализ результатов такого тестирования позволит преподавателю максимально индивидуализировать и дифференцировать процесс обучения.

Наиболее продуктивно использование компьютерных технологий в системе организации самостоятельной работы, управляемой и диагностируемой преподавателем, в частности, тестирующих программ, позволяющих студентам самостоятельно проверять уровень собственных знаний, готовность к экзаменам. Часть учащихся необоснованно переоценивает свои возможности, некоторые, наоборот, испытывают излишнюю неуверенность, поэтому предварительный самоконтроль, исключающий возможность пристрастного отношения к оценке, обеспечивающий равные возможности для всех студентов, является необходимым для поддержания высокого уровня активности обучения. Более того правильная самооценка в области усвоения учебного знания является необходимым условием интеллектуального роста личности в целом, его правильной ориентации в окружающем мире. Современные системы проверки знаний не должны исключать и традиционный контроль, как текущий, так и итоговый. Только интегрирование различных технологий контроля позволит наиболее эффективно осуществлять управление качеством учебного процесса.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Жуковская Т.В. (Тамбов)

Наряду с традиционными формами обучения, такими как лекции и практические занятия, предлагается включить в учебный процесс самостоятельные занятия под руководством преподавателя. Такие занятия обычно проводятся после цикла лекций с целью более глубокого изучения основных (базовых) понятий темы, на которых строится все дальнейшее изложение (например, понятие предела функции, общей схемы построения интегралов); приобретения навыков самостоятельной работы с новым учебным материалом (наряду с изучением теории по пособиям курсанты учатся самостоятельно доказывать математические утверждения), навыков ведения конспектов и глубокого изучения дисциплины. Во втором и в третьем семестрах самостоятельные занятия, кроме этого, имеют цель приобретения навыков публичных выступлений, умения самостоятельно строить эти выступления, вести дискуссии. Кроме того, в третьем семестре основная часть занятия посвящена изучению нового материала и его ориентации на будущую специальность курсантов.

Основными методами обучения на самостоятельных занятиях являются методы самостоятельной работы: метод работы над книгой (преподаватель учит курсантов вести конспект, выделять важные моменты при изучении нового материала, анализировать, устанавливать связь с ранее пройденным материалом), метод работы по образцу (курсанты овладевают основными навыками рассуждений и решения проблем по способу, определенному преподавателем). При анализе базовых определений преподаватель использует метод обучения - беседу. При изучении нового материала используется метод проблемного изложения: преподавателем создается проблемная ситуация, формулируются вопросы, на которые курсанты должны ответить, изучив материал. После изучения проводится анализ изученного материала, решение проблемы. На втором курсе используется частично-поисковый метод ([1], с.66) ведения занятия, при котором проблемная ситуация создается на лекции, а к занятию курсанты анализируют и изучают материал, привлекая дополнительную литературу, готовят краткие сообщения.

Самостоятельные занятия под руководством преподавателя, как вид учебного занятия, включены в учебный процесс и в течение семи лет успешно применяются при изучении дисциплины "Математика" в Тамбовском ВАИИ ([2], с.74). Они облегчают дальнейшее изучение теории, дают курсантам уверенность в своих знаниях, развивают интерес к изучению дисциплины, учат правильно выражать мысли, давать точные формулировки, приучают к самостоятельной работе над новым материалом, к анализу материала и своих знаний, поэтому являются наиболее перспективными.

Литература

1. *Коровин В.М.* Основные принципы, методы и формы обеспечения курсантов в высшем военном учебном заведении. - Воронеж: Военный институт радиоэлектроники, 1999. - 243 с.

2. *Жуковская Т.В.* Место и роль самостоятельной работы в процессе изучения математики // Материалы научно-методической конференции "Педагогическое мастерство преподавателя как определяющий фактор качества образования в условиях высшей военной школы" - Тамбов: ТВАИИ, 2000 г.

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Жуковский С.Е. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

Изучается известная проблема упрощения управляемых систем за счет сужения множества допустимых управлений, называемая в литературе бэнг-бэнг принципом [1]. Рассмотрим систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$x''(t) = u(t)x(t), \quad t \in [a,b]. \tag{1}$$

Исследуем возможность замены класса измеримых управлений $u : [a,b] \to [-1,1]$ множеством $K_{[a,b]}$ кусочно постоянных функций $u : [a,b] \to \{-1,1\}$, имеющих конечное число разрывов. Отметим, что класс $K_{[a,b]}$ несколько уже множества измеримых функций $u : [a,b] \to \{-1,1\}$, из которого обычно выбирают [1] "упрощенные" управления.

Пусть $L_{[a,b]}$ – пространство суммируемых на $[a,b]$ функций с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^t |y(s)|\, ds$; $C_{[a,b]}$ – пространство кусочно непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; $W_{[a,b]}$ – пространство дифференцируемых функций $x : [a,b] \to R$, имеющих непрерывную производную $x' \in C_{[a,b]}$ с нормой $\|x\|_W = |x(a)| + \|x'\|_C$.

Теорема 1. *Для любых функций $f, u \in L_{[a,b]}$, $u(t) \in [-1,1]$ существует такая последовательность кусочно постоянных функций $u_n \in K_{[a,b]}$, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\int\limits_a^{(\cdot)} (u(s) - u_n(s)) f(s)\, ds\|_C = 0.$

Теорема 2. *Пусть для произвольно взятого управления $u(t) \in [-1,1]$ набор (x_1, x_2) является фундаментальной системой решения уравнения (1). Тогда существует такая последовательность кусочно постоянных управлений $u_n \in K_{[a,b]}$, что для соответствующих фундаментальных решений $(x_{1,n}, x_{2,n})$ уравнений $x_n''(t) = u_n(t)x_n(t)$, $t \in [a,b]$, удовлетворяющих начальным условиям $x_{i,n}(a) \to x_i(a)$, $x_{i,n}'(a) \to x_i'(a)$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_{i,n} - x_i\|_W = 0$, $i = 1,2$.*

Это утверждение позволяет "упрощать" управление краевыми задачами. Пусть $l_1, l_2 : W_{[a,b]} \to R$ – линейные ограниченные функционалы. Рассмотрим краевые задачи

$$x''(t) = u(t)x(t), \quad u(t) \in [-1,1], \quad l_1x = \alpha, \quad l_2x = \beta, \tag{2}$$

$$x_n''(t) = u_n(t)x_n(t), \quad u_n(t) \in \{-1,1\}, \quad l_1x_n = \alpha, \quad l_2x_n = \beta. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть для некоторого управления $u : [a,b] \to [-1,1]$ краевая задача (2) имеет единственное решение x. Тогда существуют такие кусочно-постоянные управления $u_n \in K_{[a,b]}$, $n = 1,2,\ldots$ при каждом из которых краевая задача (3) однозначно разрешима и для последовательности соответствующих решений x_n выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_W = 0$.*

Литература

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории управления. М.: Наука, 1972.

КРИТЕРИЙ ОСТАНОВА В МЕТОДЕ ШТРАФОВ

Заботин Я.И., Фукин И.А. (г. Казань)
E-mail: Yaroslav.Zabotin@ksu.ru Igor.Fukin@ksu.ru

В докладе предлагается алгоритм с критерием останова, гарантирующим отыскание приближенного решения задачи выпуклого программирования с наперед заданной по функционалу точностью ε методом штрафов. Для этого целевая функция $f(x)$ минимизируется не на исходном множестве $D = \{x \in R_n : f_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m}\}$, а на $D' = \{x \in R_n : f_i(x) + \varepsilon' \leq 0, i = \overline{1,m}, \varepsilon' > 0\}$, то есть штрафная функция $V(x) = 0$ при $x \in D'$, $V(x) > 0$ при $x \notin D'$. В отличии от известного метода сдвига штрафов, здесь дается оценка величины ε', при которой условие $x(C) \in D$, где $x(C) = argmin\{f(x) + C \cdot V(x), C > 0\}$, является достаточным для $|f(x(C)) - f^*| \leq \varepsilon$, где $f^* = \min_{x \in D} f(x)$.

Теорема. [1] *Пусть функции $f_i(x)$ удовлетворяют на D условию Липшица с константой L_i, $f(x)$-с константой M, множество D' ρ-регулярно с параметром β. Тогда при $\overline{C} = \frac{ML^{(q-1)/q}}{\beta^q \varepsilon'^{q-1}}$, где $L = \sum_{i=1}^m L_i^q$, выполняется $x(\overline{C}) \in D$. Если, кроме того, $f_i(x)$ равномерно выпуклые на D с модулями выпуклости $\delta_i(t)$, $\varepsilon' \leq \min \delta_i(\varepsilon/M)$, то $|f(x(\overline{C})) - f^*| \leq \varepsilon$.*

На практике $\overline{C}$ вычисляется со значительным завышением, и включение $x(C) \in D$ достигается при $C < \overline{C}$. Постепенное увеличение параметра C до $\overline{C}$ предусматривает следующий

Алгоритм. Задается точность решения $\varepsilon > 0$. Выбирается $\varepsilon' \leq \varepsilon' \leq \min \delta_i(\varepsilon/M)$, $\overline{C} \geq \frac{ML^{(q-1)/q}}{\beta^q \varepsilon'^{q-1}}$, натуральное число N, $C_k = \overline{C} \frac{1}{p^{N-k}}$, $p > 1$. Полагаем $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Отыскиваем $x(C_k) = \text{arginf}\{f(x) + C \cdot V(x), x \in R_n\}$.
3. Если $x(C_k) \in D$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε - решением исходной задачи . Иначе k=k+1 и переходим к п.1.

При $k = N$ процесс гарантированно будет остановлен, так как $C_N = \overline{C}$.

Литература

1. Заботин Я.И., Фукин И.А. Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем., 2000. N 12. С. 49-54.

НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МЕТОДОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Задорожний В.Г. (Воронеж)
E-mail: zador@zador.vsu.ru

Рассматривается задача нахождения математического ожидания $Mx(t)$ решения задачи Коши

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \ \frac{dx(t_0)}{dt} = x_1,$$

где $t \in R, x : R \to R$, а $q : R \to R, f : R \to R$ – заданные функции. Начальные условия x_0, x_1 – независимые с ε случайные величины, $\varepsilon(t)$ – случайный процесс, заданный характеристическим функционалом $\varphi_\varepsilon(v(\cdot))$.

Задача сводится к нахожденю решения $Y(t, \xi(\cdot))$ следующей задачи

$$\frac{\partial^2 Y(y, \xi(\cdot))}{\partial t^2} - \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \frac{\partial Y(t, \xi(\cdot))}{\partial t} + q(t) Y(t, \xi(\cdot)) = f(t) \varphi_\varepsilon(i\xi(\cdot)),$$

$$Y(t_0, \xi(\cdot)) = M x_0 \varphi_\varepsilon(i\xi(\cdot)), \ \frac{\partial Y(t_0, \xi(\cdot))}{\partial t} = M x_1 \varphi_\varepsilon(i\xi(\cdot)),$$

где $M(x_0), M(x_1)$ – математические ожидания для x_0 и x_1 и $\delta/\delta\xi(t)$ – вариационная производная [1]. При этом $Mx(t) = Y(t, 0)$.

Пусть $\tau > 0$ – шаг по оси $t, t_m = t_0 + \tau m, \Delta_m \subset R$ – отрезок длины d, содержащий точку $t_m, \chi_m(s)$ – характеристическая функция отрезка Δ_m, т.е. $\chi_m(s) = 1$ при $s \in \Delta_m$ и $\chi_m(s) = 0$ при $s \notin \Delta_m, \alpha > 0, \xi_m^k(\cdot) = \alpha m \chi_k(\cdot), Y_m^k = Y(t_k, \xi_m^k(\cdot)), f^k = f(t_k), \varphi_{\varepsilon m}^k = \varphi_\varepsilon(i\xi_m^k(\cdot))$.

Получены явные дискретные уравнения для нахождения $M(x^k) = Y_0^k$

$$Y_m^{k+2} = (2 - \frac{\tau}{\alpha d}) Y_m^{k+1} + \frac{\tau}{\alpha d}[Y_{m+1}^{k+1} - Y_{m+1}^k] + [\frac{\tau}{\alpha d} - 1 - q^k \tau^2] Y_m^k + \tau^2 f^k \varphi_{\varepsilon m}.$$

Литература

1. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Воронеж, ВорГУ, 2000. - 368 с.

КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ОТВЕЧАЮЩИЙ ИМ КВАДРАТИЧНЫЙ ОПЕРАТОРНЫЙ ПУЧОК

Задорожный А. И. (Ростов-на-Дону)
simon@rnd.runnet.ru

В линейной постановке рассматриваются собственные длинноволновые колебания тяжелой несжимаемой вязкой жидкости с бесконечной электропроводимостью, находящейся в горизонтальном магнитном поле [1]. Плотность, вязкость, магнитная проницаемость слоев различны.

В безразмерных переменных для решений, пропорциональных $\exp(-\lambda t + ix)$, получена краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений для амплитуд горизонтальной скорости в слоях

$$\frac{1}{R_j} u_j''(z) + \left(\lambda + \frac{A_j}{\lambda}\right) u_j = -\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\delta_{ij}}{k} \int\limits_{-d}^{0} u_1(z)\, dz + \int\limits_{-1}^{-d} u_2(z)\, dz\right], \quad j = 1, 2$$

с граничными условиями

$$u_2(-1) = u_1'(0) = 0; \quad u_1(-d) = u_2(-d), \quad \frac{1}{R_1} u_1'(-d) = \frac{k}{R_2} u_2'(-d),$$

выражающими прилипание на границах раздела ($0 < d < 1$ — глубина верхнего слоя) и непрерывность касательных напряжений на них; R_1, R_2 — гидродинамические числа Рейнольдса, A_1, A_2 — число Альфвена, $k = \rho_2/\rho_1$ — отношение плотностей. Как видно, вхождение спектрального параметра λ типично для структуры типа самосопряженных квадратичных операторных пучков [2].

Доказывается теорема о диссипативности: $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ при $k \geq 1$. Устанавливается дискретность спектра, состоящего из поверхностной, внутренней и счетного набора альфвеновских мод. Формулируется достаточное условие апериодичности ($\mathrm{Im}\,\lambda = 0$), и условие рождения колебательных режимов, число которых конечно. Интересным представляется факт возможной стабилизации неустойчивой стратификации ($k < 1$) достаточно интенсивным магнитным полем. Выводится дисперсионное уравнение, которое анализируется численно и путем построения асимптотик.

1. Задорожный А. И., Грунтфест Р. А. Свободные колебания тонкого слоя жидкости конечной электропроводимости при воздействии внешнего магнитного поля // ПМТФ, 2000. Т. 41, № 6 (244).

2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТООПТИКИ ВИСМУТСОДЕРЖАЩИХ ФЕРРИТОВ-ГРАНАТОВ

Зенков А.В. (Екатеринбург)

zenkov@rtf.ustu.ru

Ферриты-гранаты (ФГ) $R_3Fe_5O_{12}$ широко применяются в микроэлектронике благодаря их высокой магнитооптической активности, которая ещё на порядок возрастает при наличии в ФГ примеси ионов висмута Bi^{3+}. Работа посвящена теоретическому анализу возникающих при этом эффектов и компьютерному моделированию их влияния на магнитооптику с учётом нижеуказанных управляющих параметров.

Рассмотрение роли примеси в рамках алгебры неприводимых тензорных операторов [1] показывает, что спин-орбитальное (с.о.) взаимодействие V_{so} для O_{2p}-оболочки, первоначально имевшее стандартный вид скалярного произведения орбитального $\mathbf{l}$ и спинового $\mathbf{s}$ моментов $V_{so}^{(0)} = \zeta_{2p}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ (ζ_{2p} – 1-электронная константа с.о. связи для O_{2p}-электронов), получает добавочные вклады [2] $V_{so}^{(1)} + V_{so}^{(2)}$, где $V_{so}^{(1)} = \Delta\zeta_{2p}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ – *изотропная* добавка к V_{so} за счёт примеси Bi_{6p}-функции (для неё величина ζ_{6p} на 2 порядка больше ζ_{2p}!); $\Delta V_{so}^{(2)} = \lambda_{ij} l_i s_j$ – *анизотропная тензорная* добавка к V_{so}. Итак, резко возрастает V_{so} на кислороде, а значит, и магнитооптическая активность комплексов FeO_6, FeO_4 – основных магнитооптических центров ФГ; меняются и *симметрийные* свойства V_{so}.

Нами проведено компьютерное моделирование влияния примеси Bi на циркулярную магнитооптику ФГ. Рассмотрены различные варианты стохастического пространственно неоднородного распределения Bi вследствие предпочтительного заполнения определённых позиций в элементарной ячейке ФГ, а также с учётом способа приготовления примесного кристалла. Проанализированы различные случаи взаимной ориентации света и кристалла. Наибольшие и наименьшие значения магнитооптической активности (при данных длине волны света и концентрации Bi) различаются на порядок, что позволяет дать практические рекомендации по целенаправленному приготовлению кристаллов с требуемыми свойствами.

Литература

[1] Варшалович Д.А. и др. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 440 с.

[2] Moskvin A.S., Zenkov A.V. // Solid State Communications. 1991. Vol. 80. P. 739-741.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Зимина Н.А., Пуляев В.Ф. (Краснодар)
e-mail du@math.kubsu.ru

Изучаются свойства нелинейных интегральных операторов

$$(\tilde{K}x)(t) = \int_0^t K(t,s,x(s))ds, \tag{1}$$

действующих в пространстве $BC[0;+\infty)$ – непрерывных и ограниченных на полуоси $[0,+\infty)$ функций с нормой

$$||x|| = \sup_{t\in[0;+\infty)} |x(t)|.$$

Известно [1], что для линейных интегральных операторов

$$(\tilde{Q}x)(t) = \int_0^t Q(t,s)x(s)ds$$

действие в пространстве $BC[0;+\infty)$ обеспечивает ограниченность и, следовательно, непрерывность оператора. Оказывается, это утверждение отчасти справедливо и для нелинейных операторов. А именно: действие оператора вида (1) в пространстве $BC[0;+\infty)$ обеспечивает его ограниченность на каждом шаре этого пространства.

Пусть функция $K(t,s,\xi)$ непрерывна по совокупности переменных. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если оператор $\tilde{K}$, определяемый формулой (1), переводит пространство $BC[0;+\infty)$ в себя, то он ограничен на каждом шаре этого пространства.*

Отсюда следует, что оператор $\tilde{K}$, определяемый формулой (1), будет действовать и в пространстве $L_\infty(0,+\infty)$ – существенно ограниченных на $(0,+\infty)$ функций с нормой

$$||x|| = \text{vraisup}|x(t)|.$$

Из этой теоремы вытекает ряд полезных утверждений. Сформулируем одно из них.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $\tilde{K}$ переводил пространство $BC[0;+\infty)$ в себя, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая возрастающая по τ функция $\Omega(t,s,\tau)$, что $|K(t,s,\xi)| \leq \Omega(t,s,|\xi|)$ и при любом $\tau \in [0,+\infty)$*

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^t \Omega(t,s,\tau)ds < \infty.$$

Литература

1. Цалюк З.Б. // Дифференц. уравнения. 1968. Т.4, №11. С. 1967 - 1979.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ НА ДВУХ КОНЦАХ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИЗ L_2[1]

Знаменская Л.Н. (Переславль-Залесский)
lnz@u-pereslavl.botik.ru

Обозначим через Q_T прямоугольник $Q_T = \{(x,t) : x \in [0,l], t \in [0,T]\}$. Пространство $H^{-1}[0,l]$ — есть сопряженное к подпространству функций из $W_2^1[0,l]$, которые обращаются в нуль на концах сегмента $[0,l]$. Будем говорить, что функция двух переменных $u(x,t)$ *принадлежит классу* $\widehat{L}_2(Q_T)$, если она принадлежит классу $L_2(Q_T)$, принадлежит классу $L_2[0,l]$ при любом t из сегмента $[0,T]$ и принадлежит классу $L_2[0,T]$ при любом x из сегмента $[0,l]$.

Задача граничного управления. Найти функцию $u(x,t) \in \widehat{L}_2$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad Q_T; \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

где $\varphi, \varphi_1 \in L_2[0,l]$, $\psi, \psi_1 \in H^{-1}[0,l]$.

Рассматривается случай $T = l$.

Обозначим $Q_l^1 = \{(x,t) \in Q_l : x > t, x > l-t\}$, $Q_l^2 = \{(x,t) \in Q_l : t < x < l-t\}$, $Q_l^3 = \{(x,t) \in Q_l : x < t, x < l-t\}$, $Q_l^4 = \{(x,t) \in Q_l : l-t < x < t\}$, а через $u_C(x,t)$ — функцию равную нулю в Q_l^2 и Q_l^4, а в Q_l^1 и Q_l^3 принимающую значения $-C$ и C соответственно.

Теорема. *Решение из $\widehat{L}_2(Q_l)$ задачи граничного управления неединственно в следующем смысле: если $u(x,t)$ — решение этой задачи, то решением задачи будет и функция $u(x,t) + u_C(x,t)$ для любой C.*

Решается задача нахождения граничных управлений $u(0,t) = \mu(t)$ и $u(l,t) = \nu(t)$ из класса L_2, переводящих струну из состояния (2) в состояние (3). Эти управления имеют вид при $0 \leq t \leq l$:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= 1/2[\varphi(t) + \varphi_1(l-t) + (\widehat{\psi}(t) - \widehat{\psi}_1(l-t))],\\
\nu(t) &= 1/2[\varphi(l-t) + \varphi_1(t) - (\widehat{\psi}(l-t) - \widehat{\psi}_1(t))].
\end{aligned}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 00-01-00731

здесь $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}_1$ — некоторые первообразные функций ψ и ψ_1 соответственно. Показано, что промежуток времени $T = l$ является наименьшим для решения задачи граничного управления с произвольными функциями (φ, ψ) и (φ_1, ψ_1).

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АГЛЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Зубова С.П. , Филатова С.А.

В докладе предлагается новый (без использования свойств операторного пучка) способ решения известного уравнения, позволяющий выявить точные ограничения на правую часть уравнения, при выполнении которых уравнение имеет решения; строятся решения в новом виде, не содержащем параметр.

Рассматривается уравнение

$$A\frac{dx}{dt} - Bx(t) = f(t),$$

где А - замкнутый линейный фредгольмовский оператор, действующий из банахова прстранства E_1 в банахово пространство E_2, с плотной в E_1 областью определения $D(A)$; $B \in L(E_1; E_2)$; $x(t) \in E_1$, $f(t) \in E_2$, $\forall t \in [0, \infty)$. Во всех научных работах на правую часть уравнения накладывались излишне жесткие требования,что можно доказать с помощью примеров.

Для простоты рассмотрим случай $\dim\ker A = \dim co\ker A = 1$.

Введем обозначения:

$$H = (I_2 - Q)\tilde{A}^{-1},$$

$$F_i(t) = \frac{dF_{i-1}(t)}{dt} + < Q(BH)^{i-1}f(t), \varphi >, i = 1, 2, ..., q,$$

$$F_0(t) = 0,$$

а коэффициенты a_i находятся из соответствующих уравнений см.[1]

Теорема . **Решение задачи**

$$A\frac{dx}{dt} - Bx(t) = f(t),$$

$$x(0) = x^0 \in E_1,$$

существует в том и только том случае, если $f(t)$ удовлетворяет условию

$$F_i(t) \in C^{q+1-i}[0, \infty), \ i = 1, 2, ..., q,$$

а x_i^0 условиям

$$x_i^0 = \sum_{k=1}^{q+1-i} a_{q+2-i-k} F_i(0).$$

Решение определяется формулами:

$$x(t) = x_M(t) + x_N(t),$$

[1]Работа выполнена при поддержке Фонда С.Г.Крейна. "Программа Молодые математики".

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{q+1-i} a_{q+2-i-k} F_i(t),$$

$$x_M(t) = \exp^{tR} x_M(0) + \int_0^t \exp^{(t-s)R} h(s) ds.$$

Литература

1. Труды математического факультета. - Воронеж, 1999. - 122с. - (Новая серия; N4(20)).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О НАБЕГАНИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГ

Зуев И.В., Семенистый В.В. (Таганрог)

sai@tsure.ru

Рассматриваются краевые задачи о распространении нелинейных гравитационных волн в ограниченной области свободной поверхности жидкости. Математическое описание состояния движущейся жидкости в случае произвольной глубины осуществляется системой уравнений гидродинамики [1] идеальной жидкости (уравнение Эйлера и уравнение состояния, которое в данном случае сводим к равенству нулю дивергенции вектора скорости). Граничными условиями являются: интеграл Бернулли на свободной поверхности, кинематические условия на свободной поверхности и на дне. Последние представляют собой полную производную уравнений границ и сводятся к требованию того, чтобы любая частица жидкости, попавшая на границу, оставалась на ней.

Нелинейные волны в мелководной зоне моделируются системой уравнений мелкой воды [2]. Это однородная система квазилинейных уравнений гиперболического типа. Коэффициенты системы не зависят явно от независимых переменных. Поэтому с помощью используемого в газовой динамике преобразования годографа система квазилинейных уравнений сводится к системе линейных уравнений.

В предположении, что функция, описывающая профиль дна, достаточно гладкая, построена конечно-разностная аппроксимация, базирующаяся на схемах, ориентируемых против потока [3]. Получена зависимость амплитуды волн и амплитуды скоростей движения частиц жидкости от изменений угла наклона дна, глубины бассейна на мелководье и формы начального возвышения свободной поверхности жидкости. В настоящее время выполняются численные эксперименты по моделированию процесса набегания волн на берег для реальных условий набережной г. Таганрога.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Ч. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

2. Овсянников Л. В. К обоснованию теории мелкой воды. Сб. "Динамика сплошной среды", вып. 15. Новосибирск, 1973. С. 104-125.

3. Самарский А. А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. 656с.

МЕТРИЧЕСКАЯ АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Иванов А.А. (Санкт-Петербург)
aaivanov@pdmi.ras.ru

Существуют различные системы аксиом описывающие (трехмерное) евклидово пространство. Каждая из них содержит некоторые исходные (неопределяемые) понятия и соответствующую систему аксиом (недоказываемых утверждений). Например аксиоматика Гильберта содержит понятия точки, прямой, плоскости, принадлежности, между, конгруэнтности и 20 аксиом, разбитых на пять групп. Естественно желание создать более простую аксиоматику, что и является здесь основной целью. Попутно мы получаем возможность рассматривать евклидово пространство, как метрическое пространство с некоторыми специальными свойствами. В качестве исходного понятия мы рассмотрим множества точек. На любом множестве точек можно рассматривать различные метрики, $d(x, y)$, получая соответствующие метрические пространства. Для любого метрического пространства (X, d) каждой паре A, B точек сопоставляется число $d(A, B)$, называемое *длиной* $|AB|$ *отрезка* $[AB]$ между этими точками. Каждой тройке $A, B.C$ точек можно сопоставить число $|ABC|$ (например по формуле Герона), называемое *площадью треугольника* $[ABC]$, вершинами которого являются эти точки. Аналогично вводится *объем* $|ABCD|$ *тетраэдра* $[ABCD]$. Теперь можно ввести *отрезки, треугольники, тетраэдры, прямые, плоскости, линейные множества, плоские множества*. Например, отрезок $[AB]$ есть множество точек M, для которых $|AM| + |MB| = |AB|$, треугольник $[ABC]$ есть множество точек M, для которых $|MBC| + |AMC| + |ABM| = |ABC|$. Прямую, проходящую через несовпадающие точки A, B, можно определить, как объединение всех отрезков, содержащих эти точки и так далее. Все эти определения имеют смысл для любого метрического пространства, но в общем случае мы получаем странную геометрию. Например отрезок может оказаться не линейным множеством, а стороны треугольника могут ему не принадлежать. Метрическое пространство будет евклидовым пространством, если выполняются 10 аксиом, являющихся простыми геометрическими утверждениями. Детальное изложение можно найти на сайте `http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2000`.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ “В СИЛУ” ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Иванов О.А. (Санкт-Петербург)
Oleg.Ivanov@pobox.spbu.ru

Пусть $f : M \times \mathbf{R} \to M$ — гладкий поток на многообразии M, $G : M \to \mathbf{R}$ — некоторая непрерывная функция. Всюду предполагается, что при всех $p \in M$ интегралы $l(p, \tau) = \int_0^\tau G(f(p, t))\, dt$ не ограничены сверху при $\tau \in \mathbf{R}$. Рассмотрим множества

$$M_\pm = \{p \in M \mid l(p, \tau) \to \pm\infty \text{ при } \tau \to \pm(\mp)\infty\}.$$

Лемма. Множество M_- (M_+) является максимальным аттрактором (репеллером) потока f. В частности, $M_+ \cup M_- \supset \Omega$, где Ω — неблуждающее множество этого потока.

Пусть $v : M \to \mathbf{R}$ — некоторая функция. Ее *производной* $\frac{dv}{d\tau}(p)$ *вдоль потока* f будем называть производную $\frac{d}{dt}\left(v(f(p,t))\right)_{|t=0}$.
Следствие. Существует функция $F \in C(M)$, постоянная на множествах $M_\pm$, производная которой $\frac{dF}{d\tau}$ вдоль данного потока положительна во всех точках $p \notin M_+ \cup M_-$.
Теорема. *Для всякого числа* $\lambda > 0$ и произвольной функции $\eta \in C(M)$ существует функция v, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{d\tau} + \lambda G v = \eta,$$

причем значения v на множествах $M_\pm$ определены однозначно. Кроме того, если число λ достаточно велико, то функция v — гладкая.

В качестве простого применения этой теоремы получаем существование гладкой однородной функции Ляпунова–Красовского для однородной системы в $\mathbf{R}^n$, не имеющей нетривиальных ограниченных решений.

Литература

1. Каневский, Рейзинь, *Дифф. уравн.*, 1973, вып. 2.
2. Ладис, *Дифф. уравн.*, 1972, вып. 5.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматривается линейный оператор в пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, $H_\pm = P_\pm H$, $P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm$, $P_+ + P_- = I$ с индефинитной метрикой $[x,y] = (Jx, y)$, $J = P_+ - P_-$, $x, y \in H$. Для произвольного линейного оператора T с $D_T \supset L$, где $L \neq \{0\}$ — линеал в пространстве Крейна, рассматривается число

$$\omega_+(T \mid L) = \sup_{x \in L,\, x \neq 0} \frac{[Tx, Tx]}{\| x \|^2},$$

которое может быть как конечным, так и бесконечным. Заметим, что говоря, что оператор T ограничен, мы не предполагаем выполненным условие $D_T = H$.

Теорема 1 *Если выполнено условие* $\omega_+(T \mid L) < +\infty$, *то ограниченность оператора* $(T \mid L)$ *равносильна ограниченности оператора* $(P_- T \mid L)$. *При этом справедлива оценка*

$$\| T \mid L \| \leq \sqrt{\omega_+(T \mid L) + 2 \cdot \| P_- T \mid L \|^2}.$$

Теорема 2 *Пусть выполнены условия: 1) оператор* $(P_+ T \mid L)^{-1}$ *существует и ограничен; 2)* $\omega_+(T \mid L) \cdot \| (P_+ T \mid L)^{-1} \|^2 < 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\| P_- T x \| \geq \sqrt{1 / \| (P_+ T \mid L)^{-1} \|^2 - \omega_+(T \mid L)} \cdot \| x \| \quad \forall x \in L,$$

следовательно, и оператор $(P_- T \mid L)^{-1}$ *существует и ограничен.*

Замечание 1 *Условие 2 теоремы 2 заведомо будут выполнено, если* $\omega_+(T \mid L) \leq 0$, *а это, в свою очередь, равносильно тому, что линеал* TL *является неположительным.*

Замечание 2 *Простой пример оператора* T, *заданного формулой* $T(e+\frac{1}{2}f) = \frac{\sqrt{3}}{2}e$ *в двумерном пространстве Крейна* H, *где* $H_+ =$ л.о.$\{e\}$, $H_- =$ л.о.$\{f\}$, $\| e \| = \| f \| = 1$ *и* $e \perp f$, *показывает, что уже в случае равенства в условии 2 теорема 2 перестает быть верной.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОПЕРАТОРОВ ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)
E-mail: kas@pedinst.lipetsk.su

Изучаются асимптотические производные операторов Гаммерштейна с частными интегралами в квазибанаховых идеальных пространствах (КБИП). Примерами КБИП являются пространства L^p $(0 < p \leq \infty)$, пространства L^{p_1,p_2} $(0 < p_1, p_2 \leq \infty)$ со смешанными квазинормами, банаховы идеальные пространства.

Пусть T и S — компактные множества в конечномерных пространствах с лебеговой мерой, X, Y, Z — КБИП с носителем $D = T \times S$, а Y/X — пространство мультипликаторов, состоящее из классов эквивалентных и измеримых на D функций u, для которых $ux \in Y$ для любого $x \in X$.

Напомним, что оператор $G : X \to Z$ называется асимптотически дифференцируемым, если существует непрерывный линейный оператор $H : X \to Z$ такой, что $\lim_{\|x\| \to \infty} \|Gx - Hx\|_Z / \|x\| = 0$, а оператор H называется его асимптотической производной.

Пусть $(Fx)(t,s) = f(t,s,x(t,s))$,

$$(Kx)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau +$$

$$\int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\int_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$A = KF$ — оператор Гаммерштейна с частными интегралами, а $A'(\infty)$ — его асимптотическая производная Фреше (если она существует). Предполагается, что заданная на $D \times (-\infty, \infty)$ функция $f(t,s,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, c, l, m, n — заданные измеримые на D, $D \times T$, $D \times S$, $D \times D$ соответственно функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема. *Пусть оператор* $F : X \to Y$, *оператор* $K : Y \to Z$ *и существует предел по мере* $\lim_{u \to \infty} f(t,s,u)/u = g(t,s)$, *где* $g \in Y/X$. *Если для некоторой функции* $b \in Y/X$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $a_\varepsilon \in Y$ *такая, что* $|f(t,s,u) - g(t,s)u| \leq a_\varepsilon(t,s) + \varepsilon b(t,s)|u|$, *то оператор* $A : X \to Z$, *асимптотически дифференцируем и*

$$(A'(\infty)x)(t,s) = c(t,s)g(t,s)x(t,s) + \int_T l(t,s,\tau)g(\tau,s)x(\tau,s)d\tau +$$

$$\int_S m(t,s,\sigma)g(t,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\int_D n(t,s,\tau,\sigma)g(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С., Барышева И.В. (Липецк)

E-mail: kas@pedinst.lipetsk.su

Построение алгоритмов численного решения уравнения

$$x(t,s) = \int_0^1 l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^1 m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$$

$$+ \int\int_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \equiv (Kx)(t,s) + f(t,s),$$

где $D = [0,1] \times [0,1]$, $t,\tau,s,\sigma \in [0,1]$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега, приводит к изучению условий непрерывности оператора K и вопросов его аппроксимации. В данной заметке эти вопросы рассматриваются для оператора K, действующего в пространстве X функций $x(t,s)$, непрерывных на D вместе с производными по t до p-го порядка включительно. X — банахово пространство относительно нормы $\|x\| = \max_{(t,s)} \sum_{i=0}^{p} |x_t^{(i)}(t,s)|$. Отметим, что свойства оператора K в различных классах функциональных пространств и его аппроксимации изучались в [1].

Пусть $\tilde{K}$ — оператор K с ядрами $\tilde{l}$, $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ вместо ядер l, m, n, а $\alpha = 0,5$.

Теорема. *Если функции $l_t^{(i)}(t,s,\tau)$, $m_t^{(i)}(t,s,\sigma)$ и $n_t^{(i)}(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных, $|l_t^{(i)}(t,s,\tau)| \le A < \infty$, $|m_t^{(i)}(t,s,\sigma)| \le B < \infty$, $|n_t^{(i)}(t,s,\tau,\sigma)| \le C < \infty$ $(i = 0,1,\ldots)$ и*

$$\tilde{l}(t,s,\tau) = \sum_{i=0}^{r} l_t^{(i)}(\alpha,s,\tau)(t-\alpha)^i/i!, \quad \tilde{m}(t,s,\sigma) = \sum_{i=0}^{r} m_t^{(i)}(\alpha,s,\sigma)(t-\alpha)^i/i!,$$

$$\tilde{n}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{i=0}^{r} n_t^{(i)}(\alpha,s,\tau,\sigma)(t-\alpha)^i/i!,$$

где $r \ge p$, то операторы K и $\tilde{K}$ действуют в X, причем

$$\|K - \tilde{K}\| \le (A+C)\sum_{j=0}^{p} \frac{2^{j-r}}{(r+1-j)!} + B\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{2^{j-r-k}}{(r+1-j+k)!}.$$

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

ОБ ОПЕРАТОРАХ ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Калитвин А.С. (Липецк), Рудометкина И.П. (Мичуринск)
E-mail: kas@pedinst.lipetsk.su

Пусть $(Fx)(t,s) = f(t,s,x(t,s))$ — оператор суперпозиции и

$$(Kx)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau +$$

$$\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\int_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

— линейный оператор с частными интегралами; здесь $t,\tau \in [a,b]$, $s,\sigma \in [c,d]$, $D = [a,b] \times [c,d]$, c, l, m, n — заданные измеримые на D, $D \times T$, $D \times S$, $D \times D$ соответственно функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем рассматривать оператор Гаммерштейна с частными интегралами $A = KF$ в пространстве $C^1(D)$ непрерывно дифференцируемых функций. Его свойства обычно получаются комбинированием свойств операторов F и K. Оператор $F : C^1(D) \to C^1(D)$ и непрерывен, если функция $f(t,s,u)$ имеет непрерывные частные производные на $D \times (-\infty, +\infty)$, а оператор K действует в $C^1(D)$ и непрерывен, если $c \in C^1(D)$, функции l, m, n непрерывны в целом и интегрально ограничены, а их частные производные по t и s непрерывны в целом и равномерно суммируемы.

Напомним, что измеримая на $D \times \Omega$, где Ω — одно из множеств: $[a,b]$, $[c,d]$, D, функция $g(t,s,\omega)$ непрерывна в целом, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$ $\int_\Omega |g(t_1,s_1,\omega) - g(t_2,s_2,\omega)|d\omega < \varepsilon$; интегрально ограничена, если $\int_\Omega |g(t,s,\omega)|d\omega \le G < \infty$, где G — некоторая постоянная; равномерно суммируема, если $|g(t,s,\omega)| \le \varphi(\omega)$ и $\int_\Omega \varphi(\omega)d\omega < \infty$.

Теорема. *Пусть функция $f(t,s,u)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка на $D \times (-\infty, +\infty)$, функция $c \in C^1(D)$, функции l, m, n непрерывны в целом и интегрально ограничены, а их частные производные первого порядка по t и s непрерывны в целом и равномерно суммируемы. Тогда оператор A действует в $C^1(D)$, непрерывен и ограничен.*

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C([a,\infty) \times [c,d])$

Калитвин А.С., Фролова Е.В. (Липецк)
E-mail: lsn@lipetsk.ru

В заметке рассматриваются условия непрерывности действия оператора $K = C + L + M + N$ в пространстве $C(D)$ непрерывных и ограниченных на

$D = [a, \infty) \times [c, d]$ функций; здесь

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s),\ (Nx)(t,s) = \int_a^\infty \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$
$$(Lx)(t,s) = \int_a^\infty l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$t, \tau \in [a, \infty)$, $s, \sigma \in [c, d]$, c, l, m, n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Свойства оператора K в $C(D)$ сильно отличаются от свойств операторов с частными интегралами в $C(\Delta) = C([a, b] \times [c, d])$. Действительно, пусть K и K_1 — операторы

$$(Kx)(t,s) = \int_a^\infty x(\tau,s)d\tau \text{ и } (K_1x)(t,s) = \int_a^b x(\tau,s)d\tau.$$

Тогда оператор K не действует в $C(D)$, а $K_1 : C(\Delta) \to C(\Delta)$.

Теорема 1. *Если оператор K действует в пространстве $C(D)$, то он непрерывен.*

Теорема 1 вытекает из результатов работы [1]. В [2] установлены критерии действия операторов с частными интегралами в $C(\Delta)$. Критерии действия оператора K в $C(D)$ неизвестны. Приведем достаточные условия действия оператора K в $C(D)$.

Пусть $\Omega \in \{[a, \infty), [c, d], D\}$ и $\omega \in \{\tau, \sigma, (\tau, \sigma)\}$. Измеримая на $D \times \Omega$ функция $u(t, s, \omega)$ называется непрерывной в целом, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $||u(t_1, s_1, \cdot) - u(t_2, s_2, \cdot)||_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $||u(t, s, \cdot)||_{L^1(\Omega)} \le U < \infty$.

Теорема 2. *Пусть $c \in C(D)$, а $l(t, s, \tau)$, $m(t, s, \sigma)$, $n(t, s, \tau, \sigma)$ — непрерывные в целом и интегрально ограниченные ядра. Тогда оператор K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Литература

1. Калитвин А.С. Теорема о замкнутом графике в теории операторов с частными интегралами // Операторы с частными интегралами 2. Липецк: ЛГПИ, 1997. С. 3–7.

2. Appell J., Frolova E.V., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial integral operators on $C([a, b] \times [c, d])$//Integr. equ. oper. theory. 27 (1997), 125–140.

К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Капленко Э.Ф. (Воронеж)

Одной из важнейших задач преподавания геометрии в школе является формирование у учащихся пространственного воображения и пространственных представлений, чему в значительной степени способствует овладение умениями и навыками изображения на проекционном чертеже фигур, расположенных в пространстве. Чтобы иметь возможность формировать у учащихся такие умения, учитель сам должен обладать достаточным для этого уровнем знаний по методам изображений, что, естественно, закладывается в вузе.

Для построения на проекционном чертеже изображений фигур, расположенных в пространстве, ключевыми являются понятия внутреннего и внешнего проецирований, которые, в частности, индуцируют на плоскости проекций при определённых дополнительных условиях родственное преобразование или гомологию, позволяющие более осознанно решать многие задачи теории изображений. Так, изображение призмы или цилиндра в заданной внешней проекции определяет на чертеже задание внутреннего параллельного проецирования, а изображение пирамиды или конуса — задание на нем внутреннего центрального проецирования; применение же свойств родственного преобразования или гомологии даёт осмысление построений плоских сечений этих фигур.

Поскольку наибольшую наглядность чертежи приобретают в том случае, когда они выполнены во внешней параллельной проекции, то важную роль при этом играет анализ оригинала и обнаружение его аффинных свойств.

Научиться и научить правильно выполнять изображения пространственных фигур можно, лишь постепенно осваивая правила построения изображений их плоских фрагментов. Необходимость формирования таких умений как у будущего учителя, так индуктивно и у учащихся вполне очевидна, поскольку без таких умений невозможно научить решать стереометрические задачи.

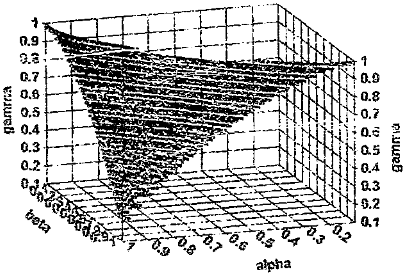
На кафедре алгебры и геометрии Воронежского госпедуниверситета разработана определённая система поэтапного обучения студентов математических специальностей, в процессе которого они овладевают умениями и навыками правильного выполнения проекционных чертежей, начиная с чертежей плоских фигур и кончая чертежами сложных комбинаций пространственных фигур. Это, безусловно, базовые знания для преподавания геометрии в старших классах средней школы.

О КРИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Катрахов В.В., Самофалов А.В., Харченко Ю.Н.
(Владивосток)
sav_andrew@mail.ru

Хорошо известно какую роль играют критические точки статистических систем механики и физики для качественного описания их поведения. На квадратной решетке в модели с двумя параметрами (отвечающими за взаимодействие по горизонтала и вертикали) эти точки образуют известную кривую Крамерса-Ванье.

Обнаружено, что одной трехпараметрической модели соответствует поверхность, полученная путем численных расчетов и имеющую следующий вид:



Эта поверхность с высокой степени точности (в долях процента уже при 15 узлах решетки по одному направлению) совпадает с поверхностью, задаваемую уравнением:

$$(\alpha^2 - \alpha^{-2})(\beta^2 - \beta^{-2}) + (\gamma^2 - \gamma^{-2})(\beta^2 - \beta^{-2}) + (\alpha^2 - \alpha^{-2})(\gamma^2 - \gamma^{-2}) = 4.$$

Таким образом, указанная поверхность является аналогом кривой Крамерса-Ванье, где $\ln\alpha$, $\ln\beta$, $\ln\gamma$ — коэффициенты взаимодействия по трем направлениям.

Результат получен путем разрабатываемого авторами аналитического и численного метода исследования спектрального радиуса трансфер-матриц и апроксимируемых ими сингулярных интегральных операторов.

В настоящее время изучаются аналогичные вопросы для четырехмерной модели квантовой механики.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ[1]

Квитко А.Н. (Санкт-Петербург)

Пусть объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0,1]$, $f \in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n)$.

Предположим дополнительно, что частные производные второго порядка от правых частей системы (1) по всем компонентам x, u, t ограничены.

З а д а ч а. Найти функции $(x(t), u(t)) \in C[0,1)$, удовлетворяющие системе (1) так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{2}$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x = a(t) + x_1, \quad u = b(t) + u_1^1, \tag{3}$$

где x_1, u_1^1 — некоторые фиксированные вектора.

В работе предложен алгоритм построения искомых функций, который реализуется посредством решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и нахождению решения задачи Коши для нелинейной системы специального вида. Сформулирован критерий выбора конечных состояний, гарантирующий реализацию алгоритма.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект №01-01-00319.

ИСЧИСЛЕНИЕ БУДУЩИХ И ГРАФЫ

Ключанцев М.И. (Воронеж)

E-mail: pmemm@vgta.vrn.ru

Исчисление будущих [1] – это операционное (символическое) исчисление внутреннего анализа операторов. Операторы будущего и прошедшего p_i, r_i, порождаются (и определяются) оператором A и его временными формами. Основные свойства операторов p_i и r_i приведены в [1].

Временное представление оператора A в данные моменты всех времён называется мгновенной структурой оператора.

Теорема 1. *Оператору A данной структуры соответствует равенство (тождество относительно времён t_i) $detQ = I$ с матрицей Q, элементами которой являются операторы p_i, r_i и их скобки $(p_i + r_i)$.*

Теорема 2. *Оператору A данной структуры соответствует дерево G с корнем I и вершинами p_i, r_i.*

Граф G–"бифуркант", орграф: для каждой его вершины x имеем $\Gamma x = 0$ или 2 (Γ–отображение). Между множеством висячих вершин дерева G и множеством временных форм в представлении оператора A устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Теорема 3. *Оператору A данной структуры соответствует матрица смежностей $C = \|c_{ij}\|$ и матрица инциденций $D = \|d_{ij}\|$ графа G.*

Матрицы Q, C, D и информация, что G–"бифуркант", позволяют восстановить временное представления оператора A (и сам оператор A в случае явного задания операторов p_i, r_i).

Обобщение теоремы 2. на взвешенный граф (дерево) G, беря, например, в качестве весов вершин p_i, r_i соответственно нормы в $DtR(A)$ операторов $A_{\dots p \dots}$, $A_{\dots r \dots}$, а в качестве ребёрных весов — энергию (работу, стоимость) переходов от i-го времени к i+1, позволяет ввести *внутреннюю метрику* оператора.

Литература

1. Ключанцев М.И. Исчисление будущих // Понтрягиновские чтения-XI. Тез. докл., Воронеж, 2000. С.83.

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНОМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Кокурин М.Ю., Карабанова О.В.(г. Йошкар- Ола)
kokurin@marsu.ru

Рассматривается линейное операторное уравнение $Ax = f, x \in X$. Здесь $A \in L(X)$ — линейный вполне непрерывный оператор, X — комплексное банахово пространтво.Пусть вместо точного оператора A и правой части f известны их приближения $A_h \in L(X)$ и $f_\delta \in X$ такие, что $\|A_h - A\|_{L(X)} \le h$, $\|f_\delta - f\|_X \le \delta$. Зафиксируем семейства конечномерных подпространств $\{N_l\}$ и $\{M_m\}$ из X. Обозначим через I единичный оператор, через P_l, Q_m — проекторы на подпространство N_l, M_m, соответственно, такие, что $\sup\limits_l \|P_l\|_{L(X)} < \infty$, $\sup\limits_m \|Q_m\|_{L(X)} < \infty$. Предполагается, что $\lim\limits_{l\to\infty} \|(I - P_l)x\|_X = \lim\limits_{m\to\infty} \|(I - Q_m)x\|_X = 0, \forall x \in X$. В силу полной непрерывности оператора A существуют такие последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$, что $\lim\limits_{l\to\infty} \eta_l = \lim\limits_{m\to\infty} \omega_m = 0$, $\|A(I - P_l)\|_{L(X)} \le \eta_l$, $\|(I - Q_m)A\|_{L(X)} \le \omega_m$. Исследуется группа методов аппроксимации решения x^* исходного уравнения

$$x_\alpha{}^{ml} = (I - \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m A_h P_l)\xi + \Theta(Q_m A_h P_l, \alpha) Q_m f_\delta. \qquad (1)$$

Здесь $\alpha \in (0, \alpha_0]$ элемент $\xi \in X$ — начальное приближение к искомому решению x^*; $\Theta(\lambda, \alpha)$, $(\lambda \in C, \alpha \in (0, \alpha_0])$ — семейство порождающих функций. Сходимость метода (1) исследуется при условии истокопредставимости начальной невязки $x^* - \xi = A^p v + w$; $v, w \in X$, $p > 0$, $\|w\|_X \le \Delta$. При выполнении ряда нежестких условий на функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ справедлива

Теорема 2. *Пусть параметр регуляризации α согласован с погрешностями h, δ, так что $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $\lim\limits_{h,\delta\to 0} \alpha = \lim\limits_{h,\delta\to 0, l\to\infty} \alpha^{-1}(h + \delta + \eta_l) = 0$. Тогда соотношение (1) определяют регуляризующий алгоритм для исходной задачи и имеет место оценка*

$$\|x_\alpha^{ml} - x^*\| \le C\left(\frac{h + \delta + \eta_l}{\alpha} + \|v\|_X(\alpha^p + h + \eta_l + \omega_m + \Delta)\right),$$

где константа $C > 0$ не зависит от α, h, δ, l, m.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кокурин М.Ю., Ключев В.В. (Йошкар-Ола)
kokurin@marsu.ru

Рассматривается уравнение $Au = f$, где оператор $A \in L(X)$ действует в банаховом пространстве X; $f \in R(A)$. Непрерывность обратного оператора

A^{-1} не предполагается, что делает исходную задачу некорректной. Исследуется явный итерационный метод ее решения в отсутствии погрешностей

$$u_0 = \xi \in X, \quad u_{n+1} = u_n - \mu_0(Au_n - f), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $\mu_0 > 0$. Пусть $Au^* = f$. Предполагается, что для некоторых $\varphi_0 \in (0, \pi), C_1 > 0$ выполняется включение

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\arg\lambda| \leq \varphi_0\} \tag{2}$$

и оценка

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C_1}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \backslash K(\varphi_0). \tag{3}$$

Здесь $\sigma(A)$ – спектр, $R(\lambda, A)$ – резольвента оператора A. Известно [1], что при $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$ и $0 < \mu_0 < \|A\|^{-1} \min\{1, \sqrt{2\cos 2\varphi_0}\}$ истокообразное представление начальной невязки $u^* - \xi \in R(A^p)(p > 0)$, достаточно для выполнения степенной оценки скорости сходимости итераций (1): $\|u_n - u^*\| \leq C_2 n^{-p}$. В работе анонсируется обратное утверждение. Установлено, что при $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$ и $0 < \mu_0 < \|A\|^{-1} \min\{3/4, \sqrt{2\cos 2\varphi_0}\}$ упомянутое представление близко к необходимому в том смысле, что из выписанной оценки следует включение $u^* - \xi \in R(A^{p-\varepsilon})$ для любого $\varepsilon \in (0, p)$. Аналогичными свойствами обладает и неявная итерационная схема $u_0 = \xi, \quad (A + \mu_0 I)u_{n+1} = f - \mu_0 u_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$ если в (2), (3) величины $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$ и $\mu_0 > 0$.

Литература

1. Кокурин М.Ю. Условие истокопредставимости и оценки скорости сходимости методов регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве. I. // Известия вузов. Математика.–2001.(в печати)

ИТЕРАЦИОНЫЙ МЕТОД ГРАДИЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кокурин М. Ю., Козлов А. И. (Йошкар — Ола)

E-mail: kokurin@marsu.ru

Рассматривается операторное уравнение $F(x) = 0$, где $F: H_1 \to H_2$ — нелинейный трижды дифференцируемый по Гато оператор, H_1, H_2 — гильбертовы пространства. В тех случаях, когда разрешимость уравнения не гарантируется, аналогом его решения естественно считать квазирешение, т. е. точку x^*, доставляющую минимум на H_1 функционалу невязки $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$. В этой связи ставится экстремальная задача $\min\limits_{x \in H_1} \varphi(x)$, которая в отсутствии условий, обеспечивающих непрерывную обратимость производной $F'(x)$, либо оператора $F'^*(x)F'(x)$ в окрестности квазирешения x^*, является некорректной. Считаем, что вместо точного оператора $F(x)$ доступно лишь его приближение $\tilde{F}(x)$, обладающее в окрестности точки x^* первыми тремя производными Гато и удовлетворяющее неравенствам

$$\|\tilde{F}(x) - F(x)\| \leq \delta, \quad \|\tilde{F}'(x) - F'(x)\| \leq \delta, \quad \|\tilde{F}''(x) - F''(x)\| \leq \delta,$$

где δ – известный уровень погрешности в задании $F(x)$.

В настоящей работе применительно к задаче отыскания квазирешения исходного уравнения исследуется итерационный процесс

$$x_0 \in H_1, \quad x_{n+1} = P_M(x_n - \xi - \gamma \tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}(x_n)) + \xi, \tag{1}$$

где P_M есть оператор проектирования из H_1 на выбранное конечномерное подпространство $M \subset H_1$; $\xi \in H_1$ — параметр метода, позволяющий управлять его сходимостью.

Устанавливается, что если начальное приближение x_0 достаточно близко к x^*, то итерационные точки x_n при $n \to \infty$ стабилизируются в окрестности квазирешения x^*, радиус которой пропорционален уровню погрешностей в исходных данных. В случае $F(x^*) = 0$ сходимость аналогичного (1) класса итерационных процессов исследовалась ранее в [1].

Литература

1. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа с проектированием на фиксированное подпространство для решения нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ.–2000.– Т.40, N10.–С. 1447 – 1450.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА С ПРОЕКТИРОВАНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. (Йошкар-Ола)
kokurin@marsu.ru

Рассматривается операторное уравнение $F(x) = 0, x \in H_1$, где $F : H_1 \to H_2$ – нелинейный оператор; H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Предполагается, что F дважды дифференцируем по Гато. Пусть x^* – некоторое решение данного уравнения и вместо точного оператора F доступно лишь его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$, где $\tilde{F}$ дважды дифференцируем по Гато и $\|\tilde{F}(x^*)\| \le \delta$. От операторов $F'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$ не требуется ограниченная обратимость в окрестности решения x^*. В работе в предположении $x^* \in Q$, где Q – выпуклое замкнутое подмножество H_1, исследуется класс итерационных методов решения исходного уравнения: $x_0 \in H_1$, $x_{n+1} = P_Q[\xi - \Theta(\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n), \alpha_n)\tilde{F}'^*(x_n)(\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi))]$, где $\xi \in H_1$ – управляющий параметр; $\alpha_n > 0$ – параметр регуляризации. Комплекснозначная функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ при любом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ $(\alpha_0 > 0)$ аналитична по λ в окрестности отрезка $[0, N_1^2]$. Через P_Q обозначается проектор из H_1 на множество Q. В частном случае $Q = H_1$ сходимость метода исследовалась ранее в [1,2]. Считаем, что функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ и последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ удовлетворяют следующим основным условиям: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$; $0 < \alpha_{n+1} \le \alpha_n$; $\sup\limits_n \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty$, $\sup\limits_{\lambda \in [0,N_1^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \le \frac{C}{\sqrt{\alpha}}$; $\sup\limits_{\lambda \in [0,N_1^2]} |1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha)|\lambda^p \le g(p)\alpha^p \; \forall \alpha \in (0, \alpha_0]$. При выполнении ряда нежестких дополнительных условий на $\Theta(\lambda, \alpha)$ справедлива

Теорема . *Пусть* $x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v + w$, $v \in H_1, \|w\| \le \Delta, p \ge 1/2$; $\|x_0 - x^*\| \le l\alpha_0^p$ *и* $\|v\| \le d$. *Тогда для всех номеров* $n \le N(\delta, \Delta)$, *где* $N(\delta, \Delta) = \max\left\{n = 0, 1, \ldots : \frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}\alpha_{n+1}^p} \le d_0; \quad \frac{g(0)\Delta}{\alpha_{n+1}^p} \le d_0\right\}$, $(d_0 > 0)$ *имеет* *место оценка* $\|x_n - x^*\| \le l\alpha_n^p \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, *так что* $\lim\limits_{\delta,\Delta\to 0} \|x_{N(\delta,\Delta)} - x^*\| = 0$.

Литература

1. А.Б. Бакушинский. Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности//Фунд. и прикл. матем. 1997.- Т.3.- N3.- С. 685-692.

2. М.Ю. Кокурин, Н.А. Юсупова. Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности// ЖВМ и МФ. 2000.- Т.40.- N7.- С. 986-996.

О ПРИМЕНЕНИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Колмановский В.Б., Косарева Н.П. (Москва)

kosareva@mail.ru

Разностные уравнения Вольтерра используются в некоторых численных методах решений дифференциальных и интегральных уравнений. Скалярные уравнения Вольтерра типа свертки используются в теории восстановления. В данных приложениях уравнений Вольтерра основным интересом служат асимптотические свойства решений, в частности, их устойчивость по отношению к возмущениям начального положения.

Изучение устойчивости решений уравнений Вольтерра может быть осуществлено различными методами, в частности, можно использовать метод преобразований Лапласа или прямой метод Ляпунова.

Однако, полученные с помощью этих общих методов условия устойчивости используют предположение о сходимости ряда из норм коэффициентов матрицы, входящей в правую часть уравнения. При этом данное предположение для ряда асимптотически устойчивых уравнений Вольтерра может не выполняться.

В докладе будут рассмотрены многомерные разностные уравнения Вольтерра. С помощью второго метода Ляпунова будут получены условия устойчивости без предположения о суммируемости рядов из норм коэффициентов уравнений, а сформулированные в терминах знакоопределенности матрицы коэффициентов и их разностей.

В основе полученных условий лежит процедура построения функционалов Ляпунова предложенная в [1].

Литература

1. Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the Theory and Applications of Functional Diffrential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

О СВОЙСТВАХ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Конашенко А.В. (Смоленск)
lanc_s@rambler.ru

На произвольном конечном интервале G действительной оси рассмотрим возмущенный квадратичный пучок дифференциальных операторов следующего вида: $Lu = u'' + (2\gamma a + p(x))u' + (\gamma^2 b + q(x))u$, где a, b – некоторые комплексные постоянные, γ - спектральный параметр, а $p(x) \in W_1^1(G)$, $q(x) \in L_1(G)$ – некоторые функции, играющие роль "возмущений".

Корневые функции пучка будем понимать в обобщенном (по В.А.Ильину) смысле, т. е. без учета краевых условий, а лишь как решение определенного вида уравнения.

Теорема 1. Пусть А: Выполнено условие Карлемана для последовательностей $\{i\gamma_n a\}$ и $\{\gamma_n c\}$, то есть $\exists c_1, c_2 > 0$ такие, что для $\forall n \in N$ выполнены неравенства $\left|Im(i\gamma_n a)\right| \le c_1$, $\left|Im(\gamma_n c)\right| \le c_2$;

Б: Последовательность $\{\gamma_n\}$ не имеет конечных точек сгущения;

В: Ранг собственных функций равномерно ограничен.

Тогда найдется такое число $p_0 > 0$, что при любых $p(x)$, таких, что $\|p\|_{L_2(G)} < p_0$, для корневых функций рассматриваемого квадратичного пучка дифференциальных операторов справедливы оценки:

$$\|u_{n,s}\|_{L_2(G)} \le const\|u_{n,s}\|_{L_2(K)}, \qquad \|u'_{n,s}\|_{L_2(G)} \le const|\gamma_n|\|u_{n,s}\|_{L_2(K)},$$

$$\|u_{n,s-1}\|_{L_2(G)} \le const\|u_{n,s}\|_{L_2(K)}, \qquad \|u_{n,s}\|_{L_2(K)} \le const\|u_{n,s}\|_{L_2(K_1)}.$$

Компакт K_1 внутренний к компакту K, а тот в свою очередь внутренний к интервалу G. Все компакты положительной меры и константы в оценках зависят от мер рассматриваемых компактов.

Теорема 2. При выполнении условий А, Б и В теоремы 1, найдется такое число $p_0 > 0$, что при любых $p(x)$, таких, что $\|p\|_{L_2(G)} < p_0$, для бесселевости системы $\{u_n/\|u_n\|\}$ в $L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение условия Г: $\exists c_3 > 0$ такое, что для любого $\gamma \in C$ выполнено соотношение

$$\sum_{|\gamma_n - \gamma| \le 1} 1 \le c_3.$$

Литература

1. Конашенко А.В. Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 6. с. 1 – 3.
2. Конашенко А.В. Дисс. канд. физ. - мат. наук. СГПУ Смоленск - 2000.

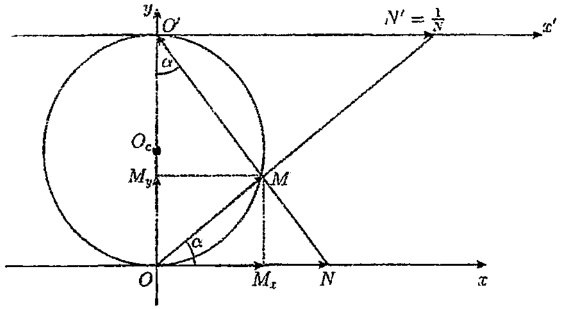
О НЕКОТОРЫХ ПОСТРОЕНИЯХ ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙНИ

Костин Д.В. ученик 11 класса "А" УВК №2

В школьном курсе тригонометрии определение тригонометрических функций $\sin x, \cos x$, tg x, ctg x, sec x, cosec x дается с помощью единичного круга радиуса единица с центром в начале декартовых координат XOY.

Здесь приводится несколько другие представления этих функций, которые можно рассматривать и как их определение и как метод построения графиков.

Для этого в декартовой системе координат XOY построим окружность единичного диаметра с центром в точке O_c таким образом, чтобы ось OX была касательной к этой окружности в точке O и OO' — диаметр.



Пусть OM хорда окружности, выходящяя из O под углом α к оси OX. Тогда справедливо равенство

$$\vec{OM} = \sin\alpha \qquad (1)$$

так как $\triangle\ OMO'$ - прямоугольный, а $O'O \perp OX$, и следовательно, $\alpha = \angle\ OO'M$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Отсюда $|OM| = |OO'| \cdot \sin(\angle\ OO'M)$. Учитывая, что $|OO'| = 1$, получаем (1)

Таким образом, в качестве $\sin\alpha$ можно взять длину хорды окружности единичного диаметра, выходящей из точки O под углом α к оси OX.

Из равенства (1) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\cos\alpha = \vec{MO'},\ tg\ \alpha = \vec{ON},\ ctg\ \alpha = \vec{O'N'},\\ \sec\alpha = \vec{O'N},\ cosec\ \alpha = \vec{ON'}\end{gathered} \qquad (2)$$

Кроме того, если OM_x и OM_y - проекции вектора $\vec{OM}$ на оси OX и OY соответственно, то

$$\sin^2\alpha = |\vec{OM_y}|;\ \cos^2\alpha = |\vec{O'M_y}| \qquad (2)$$

$$\sin 2\alpha = 2\vec{OM_x};\ \cos 2\alpha = \vec{O'M_y} - \vec{OM_y} \qquad (3)$$

Таким образом, приведенные равенства позволяют давать геометрическую интерпритацию и строить не только графики указанных функций. как в классическом случае, но и некоторых их степеней, как $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$.

С помощью приведенного тригонометрического круга можно возводить в квадраты и извлекать квадратные корни из длинн заданных отрезков по следующему правилу:

1. Если задан отрезок длины a, причем $0 < a < 1$, то откладывая a по оси OO' и затем, проведя прямую, параллельную оси OX до пересечения с окружностью в точке M, получим отрезок $OM = \sqrt{a}$.

2. Если $a > 1$, то, отложив a по оси OX, построим $\frac{1}{a}$ на прямой $O'X'$ и затем получим $\frac{1}{\sqrt{a}}$ по приведенному выше правилу и, снова строя обратную величину, получим $\sqrt{a}$.

ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА ВЕЩЕСТВЕННЫМ МЕТОДОМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ[1]

Кравишвили Е.Д. (Воронеж)

vio@func.vsu.ru

Как известно, пространства Орлича является интерполяционным пространством между пространствами Лебега L_1, L_∞. В данной работе рассматривается описание пространства-параметра вещественного метода для пространства Орлича между этими пространствами. Данная задача представляет интерес в связи со структурой интерполяционных орбит в парах пространств L_p.

Без ограничения общности будем рассматривать соответствующую дискретную задачу.

Через l_p $(1 \le p < \infty)$ будем как обычно обозначать пространство последовательностей $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, для которых $\|\xi\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Через $l_p(t_k^{-1})$ обозначаем пространство последовательностей $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, для которых $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (t_n^{-1}|\xi_n|)^p < \infty$ с естественной нормой.

Хорошо известно, что пространство $X = l_{1/\theta}(2^{-n\theta})$, соответствующее степенной функции, само для себя является параметром вещественного метода, т.е. $l_{1/\theta}(2^{-n\theta})$ равно $(l_\infty, l_1(2^{-n}))^K_X$.

В.И. Овчинников высказал гипотезу, что подобное равенство справедливо для любой невырожденной интерполяционной функции φ, т.е. пространства Орлича $X = \varphi(l_\infty, l_1(t_n^{-1}))$ совпадает с $(l_\infty, l_1(t_n^{-1}))^K_X$, где последовательность t_n – это последовательность Янсона (см.[1]) для функции $\varphi(1,t)$.

Доказано, что равенство

$$X = \varphi(l_\infty, l_1(t_n^{-1})) = (l_\infty, l_1(t_n^{-1}))^K_X \tag{1}$$

действительно имеет место для широкого класса функций, в частности для квазистепенных и "похожих" на них. В общем же случае гипотеза не подтвердилась. Построен пример невырожденной интерполяционной функции, для которой равенства (1) нет. Соответствующая функция $\varphi(1,t)$ вообще говоря слабо растет по t, но содержит большие участки квазистепенного характера.

Литература

[1] Janson S. Minimal and maximal method of interpolation // J. Functional Analysis. 1981. V.44.P.50-73.

[1]Работа поддержана фондом С.Г. Крейна, программа "Молодые математики".

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Красносельский А.М., Рачинский Д.И.[1] **(Москва)**

amk@iitp.ru, rach@iitp.ru

Предлагаются простые условия существования нестационарных периодических решений у автономных систем управления. Условия используют обычные линейные двусторонние секторные оценки нелинейностей и линейную асимптотику нелинейностей в нуле и на бесконечности. Предельные границы секторных оценок определяются линейным звеном.

Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(x) \tag{1}$$

динамики одноконтурной системы, состоящей из линейного интегрирующего звена с дробно рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной функциональной обратной связи $f(x)$. Здесь $L(p)$ и $M(p)$ — взаимно простые вещественные многочлены степеней ℓ и m, $\ell > m$. Скалярная функция $f(x)$ считается непрерывной. Решения уравнения (1) понимаются в обычном в теории управлении смысле как решения эквивалентной системы $z' = Az + B\,f(x)$, $x = Cz$, $z \in \mathrm{R}^\ell$.

Предполагается, что $f(0) = 0$, т.е. нуль — это положение равновесия системы. Если верна секторная оценка $|f(x)| \leq k|x|$, многочлен $L(p)$ не имеет мнимых корней и сектор достаточно узкий:

$$k < \inf_{w\in\mathrm{R}} |L(wi)/M(wi)|,$$

то у уравнения (1) нет нетривиальных (отличных от нулевого) периодических решений. Мы предполагаем, что у многочлена $L(p)$ есть пара мнимых сопряженных корней. Тогда при выполнении асимптотических условий на знак нелинейности в нуле и на бесконечности нетривиальные периодические решения существуют, если число k достаточно мало.

Функцию $f(x)$ назовем дифференцируемой на бесконечности, если существует предел $f'(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)/x$.

Теорема. *Пусть многочлены $L(wi)$ и $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ имеют пару общих вещественных корней $\pm w_0$ ($w_0 > 0$) одной и той же нечетной кратности, пусть числа $w_0 n$ при целых $n \neq \pm 1$ не являются корнями многочлена $L(wi)$. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности, причем $f'(0)f'(\infty) < 0$. Тогда существует такое число $k > 0$, что из оценки $|f(x)| \leq k|x|$ ($x \in \mathrm{R}$) вытекает существование нетривиального цикла у уравнения (1).*

В условиях этой теоремы можно указать оценки периода цикла, они определяются линейным звеном и секторной оценкой.

---

[1]Авторы поддержаны грантами РФФИ №№ 01-01-00146, 00-01-00571 и 00-15-96116.

ОБОБЩЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ СУПЕРМАТРИЦ

Кривовяз Е.В. (Липецк)

Изучаются g-обратимые матрицы над супералгебрами.

Пусть А — ассоциативная Z_2 - градуированная алгебра (супералгебра) с единицей I, то есть $A = A^0 \oplus A^1$ (прямая сумма подмодулей) и $A^i \cdot A^j \subset A^{i \oplus j}$; $i, j \in Z_2$; $I \in A^0$. Любой элемент $a \in A$ (за исключением нуля) может быть единственным образом представлен в виде $a = a^0 + a^1 \in A$; $a^0 \in A^0$, $a^1 \in A^1$, a^0 — четный элемент, a^1 — нечетный элемент. Суперматричная структура — это матричная структура с приписанной каждой строке и каждому столбцу четностью. Стандартная суперматричная структура записывается в блочном 2×2 виде $M = (P_{ij})$, где P_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — матричные структуры, согласованные с делением строк и столбцов на четные и нечетные. Если суперматричная структура состоит из p четных и q нечетных строк и m четных и n нечетных столбцов, то размер этой структуры равен $(p|q) \times (m|n)$.

Матрицей с элементами из супералгебры А называется множество $\{X_{ij} | X_{ij} \in A\}$, соответствующее клеткам суперматричной структуры М. Матрица B размера $(1|1) \times (1|1)$ с элементами из супералгебры А называется g - обратимой над А, если существует матрица $G = \{g_{ij} | g_{ij} \in A\}$ размера $(1|1) \times (1|1)$ такая, что $BGB = B$. Матрица G называется g - обратной к В и обозначается через B^-.

Нахождение матрицы G сводится к решению матричного уравнения $BXB = B$ над супералгебрами, где $B = (b_{ij})$ $(b_{11} = b^0$, $b_{12} = b^1$, $b_{21} = b^1$, $b_{22} = b^0)$, и $X = (x_{ij})$ $(x_{11} = x^0$, $x_{12} = x^1$, $x_{21} = x^1$, $x_{22} = x^0)$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если в матрице В с элементами из супералгебры А элемент $b^0 \in A^0$ обратим, то ее можно представить в виде произведения двух треугольных матриц следующим образом: $B = L \cdot R$, где $L = (l_{ij})$ $(l_{11} = 1, l_{12} = 0, l_{21} = b^1(b^0)^{-1}, l_{22} = 1)$, $R = (r_{ij})$ $(r_{11} = b^0, r_{12} = b^1, r_{21} = 0, r_{22} = b^0 - b^1(b^0)^{-1}b^1)$.

2. Уравнение $BXB = B$ в предположении о g - обратимости В совместно над А тогда и только тогда, когда $B \cdot (R^{st})^{st} \cdot Q \cdot (L^{st})^{st} \cdot B \cdot (L^{st})^{st} \cdot (R^{st})^{st} \cdot Q \cdot B = B$, где $(R^{st})^{st} = (\tilde{r}_{ij})$ $(\tilde{r}_{11} = b^0, \tilde{r}_{12} = -b^1, \tilde{r}_{21} = 0, \tilde{r}_{22} = b^0 - b^1(b^0)^{-1}b^1)$, $(L^{st})^{st} = (\tilde{l}_{ij})$ $(\tilde{l}_{11} = 1, \tilde{l}_{12} = 0, \tilde{l}_{21} = -b^1(b^0)^{-1}, \tilde{l}_{22} = 1)$, а $Q = ((b^0)^{-1})^2 \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

При этом общим решением является множество матриц $X = (R^{st})^{st} \cdot Q \cdot (L^{st})^{st} \cdot B \cdot (L^{st})^{st} \cdot (R^{st})^{st} \cdot Q + Y - (R^{st})^{st} \cdot Q \cdot (L^{st})^{st} \cdot Y \cdot (L^{st})^{st} \cdot (R^{st})^{st} \cdot Q$, где Y — произвольная матрица порядка $(1|1) \times (1|1)$ с элементами из А.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кузенков О.А., Рябова Е.А. (Нижний Новгород)
kuz@vmk.unn.ac.ru, helen@sandy.ru

В настоящей работе исследуется задача Коши для полулинейной гиперболической системы при $t \geq 0$

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m} a_{is}(x,t) \frac{\partial z_i}{\partial x_s} = b_i(x,t) z_i - z_i f(z), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$z_i(x,0) = z_i^0(x), \; x \in \Omega = \{(x_1, \dots, x_m) : 0 \le x_s \le L_s, \; s = \overline{1,m}\}. \qquad (2)$$

Здесь точки (x,t) принадлежат области определенности G решения задачи (1), (2); $z_i^0(x) \in C_1(\Omega)$, $a_{is}(x,t)$, $b_i(x,t) \in C_1(G)$, $f(z) \in C_1(R^n)$.

Известно [1], [2] что при этих условиях существует единственное непрерывно дифференцируемое неотрицательное решение задачи (1), (2) в подобласти G_{t_0} области G, в которой решение полулинейной системы остается ограниченным. Обозначим через $X^i(t) = X^i(x_1^0, \dots, x_k^0, t^0, t)$ решение задачи $\frac{dx_s^i}{dt} = a_{is}(X^i(t), t), \quad x_s^i|_{t=t^0} = x_s^0, \quad s = \overline{1,k}.$

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ является положительно однородной порядка k, т.е. для любой неотрицательной константы λ справедливо равенство $f(\lambda z) = \lambda^k f(z)$ при фиксированном $k > 0$. Тогда решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$z_i(X^i(t),t) = \xi_i(X^i(t),t)/p(t), \; i = \overline{1,n}, \;\; p(t) = \Big(\int_0^t k f(\xi(X(\tau),\tau))\, d\tau + 1\Big)^{1/k},$$

где $\xi(X(t),t) = (\xi_1(X^1(t),t), \dots, \xi_n(X^n(t),t))$ – решение задачи

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m} a_{is}(x,t)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} = b_i(x,t)\xi_i, \;\; \xi_i(x,0) = z_i^0(x), \;\; x \in \Omega, \;\; i = \overline{1,n}.$$

Пусть существует единственное неограниченно продолжаемое решение задачи (1), (2).

Теорема 2. Если среднее значение $< b_1 >= \max\limits_{i=\overline{1,n}} < b_i >$, $< b_i >= \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T b_i(X^i(t),t)\,dt$, $i = \overline{1,n}$, тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} z_i(X^i(t),t) = 0$ для всех $i = \overline{2,n}$.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Кузнецов В.П. (Самара)

Рассматриваются механические системы, описываемые уравнениями вида

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{d^k x(t-\tau)}{dt^k} + \xi(t) = 0, \qquad (1)$$

где a_k, b_k – постоянные коэффициенты, τ - постоянное положительное отклонение аргумента; $\xi(t)$ - неизвестное управление. Начальные условия задаются в виде

$$x^{(k)}(\theta) = \begin{cases} 0; \ -\tau \le \theta < 0, \\ 1; \ \theta = 0; \text{ где } k = 0, 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Получено выражение для интегральной квадратичной оценки $I = \int\limits_0^\infty x^2(t)dt$ в случае если управление имеет вид

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k \frac{d^k x(t)}{dt^k},$$

при этом корни соответствующего квазиполинома

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \lambda^k e^{-\lambda\tau} \qquad (2)$$

(здесь $c_k = a_k + p_k$, $d_k = b_k + q_k$), предполагаются простыми и отличными от нуля.

Представляя (2) как

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda^{2R}) + \Delta_1(\lambda^{2R-1}) + e^{-\lambda\tau}\left(\Delta_2(\lambda^{2R}) + \Delta_2(\lambda^{2R-1})\right)$$

(в $\Delta_1(\lambda^{2R})$ и $\Delta_2(\lambda^{2R})$ входят соответствующие слагаемые из (2) с четными степенями, а в $\Delta_1(\lambda^{2R-1})$ и $\Delta_2(\lambda^{2R-1})$ - с нечетными), показано, что оценка I имеет вид

$$I = \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k ch(\tau z_k) + Q_k sh(\tau z_k)}{2z_k \prod\limits_{i=1}^{n}(z_k^2 - z_i^2)\left(\Delta_2^2(z_k^{2R}) - \Delta_2^2(z_k^{2R-1}) + Q_k ch(\tau z_k) + P_k sh(\tau z_k)\right)}, \qquad (3)$$

где

$$P_k = \Delta_1(z_k^{2R-1})\Delta_2(z_k^{2R}) - \Delta_1(z_k^{2R})\Delta_2(z_k^{2R-1}),$$
$$Q_k = \Delta_1(z_k^{2R})\Delta_2(z_k^{2R}) - \Delta_1(z_k^{2R-1})\Delta_2(z_k^{2R-1}),$$

а z_k - корни уравнения

$$\Delta_1^2(z^{2R}) - \Delta_1^2(z^{2R-1}) + \Delta_2^2(z^{2R-1}) - \Delta_2^2(z^{2R}) = 0.$$

Выражение (3) позволяет построить метод оптимизации параметров p_k и q_k управления $\xi(t)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость решения уравнения (1) и минимум интегральной квадратичной оценки I. Разработанный метод позволяет определить оптимальное значение коэффициента передачи для автоматической системы регулирования температуры дизелей тепловозов ТГМ 8; ЧМЭ 2;ЧМЭ 3.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Курбыко И.Ф. (Владимир)

E-mail: sleviz-m2@vpti.vladimir.su

Изучается задача Коши для эволюционных уравнений, содержащих псевдодифференциальные операторы (ПДО) с переменными коэффициентами, действующими в одном пространстве функций $\Phi(H)$ на бесконечномерном гильбертовом пространстве H. Частным случаем таких операторов являются ПДО с постоянными коэффициентами, дествующими в более узком пространстве Z бесконечномерных преобразований Фурье финитных гладких мер [1].

Здесь $H = H_1 \oplus H_2$ - прямая сумма гильбертовых пространств H_1 и H_2; $\Phi(H)$ - векторное пространство всех комплекснозначных непрерывных функций $f(z)$ на H таких, что для $z = x \oplus y \in H$ и любом фиксированном $x \in H_1$ функция $f_x(y) = f(x \oplus y) \in Z$, то есть является преобразованием Фурье $F[m]$ некоторой финитной гладкой меры $m \in M$ [1]. Через $\Delta^{nj} : \Phi(H) \longrightarrow \Phi(H)$ обозначаются ПДО с символами $b_j(y) = (y, y)^{nj}$ такие, что

$$\Delta^{nj} f(x \oplus y) = F\left[(y,y)^{nj} F^{-1}[f_x]\right](y) ,$$

$nj \geq 0$, $j = 1, 2, ..., m$; $(\dot{,})$ - скалярное произведение в H; в частности, если $nj = 2K$, $K \in N$, тогда Δ^{nj} - бесконечномерный итерированный оператор Лапласа. Предполагается, что функции $Q_j(x) \geq 0$ для всех $x \in H_1$ и $j = 1, 2, ..., m$.

Теорема 1. Решение $f : [0; +\infty) \longrightarrow \Phi(H)$ задачи Коши для эволюционного уравнения

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \Delta^{nj} f(t) + g ,$$

$f(0) = f_0$ существует и единственно для всех g, $f_0 \in \Phi(H)$.

Пусть Δ - оператор Лапласа с символом $b(y) = -(y, y)$; функция $V(x) = iQ(x)$; $i = \sqrt{-1}$; $Q(x) \geq 0$ для всех $x \in H_1$.

Теорема 2. Задача Коши для эволюционного уравнения (типа Шредингера)

$$f'(t) = i\Delta f(t) + V(x) f(t) ,$$

$f(0) = f_0$ однозначно разрешима в пространстве $\Phi(H)$.

Литература

1. Курбыко И.Ф. О задаче Коши для однородного уравнения с бесконечномерными псевдодифференциальным оператором. Тр. межд. научн. конф. Нелинейный функциональный анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Воронеж, 2000, с.129-130.

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

Курдюмов В. П. (Саратов)

Рассматривается задача нахождения множества функций $u(t)$ таких, что для решения задачи

$$\dot{x}(t) = A\dot{x}(t-\sigma) + Cx(t) + Bu(t); \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\sigma, 0], \quad x(0) = x_0$$

при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^m$, A, C, B – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывная функция порядка n, σ и ε – положительные числа, норма берется в R^n.

Предполагаем выполненными условия: C – гурвицева матрица; $\rho < 0$ и таково, что при всех $t \geq 0$ $\|e^{Ct}\| \leq Ne^{\rho t}$, N – постоянная; $\alpha = \rho + p < 0$, $p = (1-q)^{-1}N\|C\|\|A\|e^{-\rho\sigma}$; $q = \|A\|\|e^{-C\sigma}\| < 1$; $l = 1 - \|A\|e^{-\alpha\sigma} > 0$. Обозначим $K = N(1 + p^{-1}M\|A\|e^{-\alpha\sigma})$, $M = (1-q)^{-1}N\|C\|$, $R = 1 - (\alpha l)^{-1}K\|C\|$, $u_0 = \sup\limits_{t\geq 0}\|u(t)\|$, $u_1 = \sup\limits_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}\|u(\tau)\|\,d\tau$, $u_2 = \sup\limits_{t\geq 0}\left(\int\limits_t^{t+1}\|u(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{1/2}$.

Теорема. *Если* $\|x_0\| \leq (2R)^{-1}\varepsilon$, $\max\limits_{\tau\in[-\sigma,0]}\|\varphi(\tau)\| \leq -(4K\|A\|)^{-1}\alpha e^{\alpha\sigma}l\varepsilon$, *и выполнено одно из неравенств:*

$$u_0 \leq -(4K\|B\|)^{-1}\alpha l\varepsilon,$$

$$u_1 \leq (4K\|B\|)^{-1}e^{\alpha}(1-e^{\alpha})l\varepsilon,$$

$$u_2 \leq (4K\|B\|)^{-1}(1-e^{-2\alpha})^{-1/2}(2\alpha)^{1/2}(1-e^{\alpha})l\varepsilon,$$

то при всех $t \geq 0$ справедлива оценка (1).

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ[1]

Курина Г.А., Талтынова Н.М.(Воронеж)

E-mail:kurina@kma.vsu.ru

Из условий оптимальности управления для дискретной задачи минимизации квадратичного функционала на траекториях линейной системы возникает система вида

$$x_{i+1} = C_i x_i + S_i y_{i+1},$$
$$y_i = -W_i x_i + C_i^* y_{i+1}, i = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

[1]Работа поддержана РФФИ (грант N 99-01-00968) и Фондом С.Г.Крейна.

с краевыми условиями

$$x_0 = x^0, y_N = -Vx_N. \qquad (2)$$

Здесь $x_i, y_i \in H$, H - гильбертово пространство, N и $x^0 \in H$ фиксированы, звездочка при обозначении оператора означает сопряженный оператор; $C_i, S_i, W_i, V \in L(H), S_i, W_i, V$ - самосопряженные неотрицательные операторы.

Теорема. Задача (1), (2) однозначно разрешима.

Для доказательства вводится оператор A, действующий в пространстве $H^{2(N+1)}$, значение которого на элементе $(x_0, x_1, ..., x_N, y_0, y_1, ..., y_N)^T$ определяется левой частью эквивалентной (1), (2) системы уравнений:

$$-x_0 = -x^0,$$

$$C_i x_i - x_{i+1} + S_i y_{i+1} = 0,$$
$$W_i x_i + y_i - C_i^* y_{i+1} = 0, i = \overline{0, N-1},$$
$$Vx_N + y_N = 0.$$

Несложно установить, что оператор A имеет блочное представление вида

$$\begin{pmatrix} C & S \\ W & -C^* \end{pmatrix},$$

где $S, W \in L(H^{N+1})$ - самосопряженные неотрицательные операторы, а оператор C в силу теоремы Банаха имеет ограниченный обратный. При этих условиях оператор A имеет ограниченный обратный (см. [1]), что и доказывает теорему.

Литература

1. Курина Г.А. Обратимость неотрицательно гамильтоновых операторов в гильбертовом пространстве, приложение к двухточечным краевым задачам.// Дифференціальні та інтегральні рівняння. Тези доповідеі Міжнародної конференції. Одеський державний університет ім.І.І. Мечникова. Одеса. 2000. С.162-163.

ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА ОТНОСИТЕЛЬНО РИСКОВ

Лабскер Л.Г. (Москва)

1. Пусть в игре с природой игрок A располагает $m(\geq 1)$ стратегиями A_1, ..., A_m, а природа П может случайным образом находиться в одном из n ($\geq$) своих состояний $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, вероятности которых неизвестны. Пусть r_{ij} — риск игрока A при стратегии A_i и состоянии природы Π_j. Задача игрока A состоит в выборе оптимальной стратегии, используя информацию, предоставляемую матрицей рисков $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$. В [1] автором был предложен так называемый обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, по которому понятие оптимальной стратегии определялось на основании выигрышей игрока A. Цель настоящего сообщения — распространить основные

идеи оптимальности стратегий, рассмотренных в [1], на оптимальность относительно рисков.

2. Элементы каждой строки матрицы R перестявим в невозрастающем порядке, обозначив элементы полученной матрицы через d_{ij}, а саму матрицу $(d_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ — через $\mathbf{D}$. Пусть числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют условиям $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Числа $\lambda_p = \lambda_1 + \dots + \lambda_{[n/2]}$ и $\lambda_o = \lambda_{[n/2]+1} + \dots + \lambda_n$ назовем показателями соответственно *пессимизма* и *оптимизма* игрока A при выборе им оптимальной стратегии. *Показателем неэффективности стратегии* A_i назовем число $R_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 d_{i1} + \dots + \lambda_n d_{in}$, $i = 1, \dots, m$. *Обобщенным критерием пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков с коэффициентами* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, назовем критерий, по которому оптимальной считается стратегия A_k с минимальным показателем неэффективности, т.е. $R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \min\{R_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : 1 \leq i \leq m\}$.

3. Коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются игроком A субъективно так, чтобы показатель пессимизма λ_p был больше показателя оптимизма λ_o, если ситуация оценивается им как опасная, и наоборот в противном случае. Можно предложить и некоторый формализованный метод выбора этих коэффициентов, а именно, $\lambda_j = d_j d^{-1}$, $j = 1, \dots, n$, в опасной ситуации, и $\lambda_j = d_{n-j+1} d^{-1}$, $j = 1, \dots, n$ в ситуации безопасной, где d_j — сумма рисков j-го столбца матрицы $\mathbf{D}$, а d — сумма всех рисков матрицы $\mathbf{D}$.

4. Предложенный критерий обобщает критерий Сэвиджа, критерии Байеса, Лапласа и Гурвица относительно рисков и миниминный критерий.

Литература

1. Лабскер Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Сб. науч. тр. "Качество информационных услуг", Вып. III. — Тамбов, ТГТУ, 2000, с. 34–43.

О ЧЕТЫРЕХ АСПЕКТАХ ТРАКТОВКИ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Ларин С.В. (Красноярск)

E-mail pak@mail.kts.ru

Во взгляде на числа можно выделить следующие четыре аспекта: аксиоматическое определение, знаковое изображение, геометрическую интерпретацию и, наконец, указание причин появления и области применения рассматриваемых чисел.

Современная математика определяет числа аксиоматически. Например, систему действительных чисел можно определить как непрерывное упорядоченное поле, а всякий его элемент назвать действительным числом.

Число, появляясь в аксиоматическом определении в виде безликого "элемента основного множества системы", требует своего знакового изображения. Например, среди знаковых изображений рациональных чисел можно отметить периодические десятичные дроби, конечные цепные дроби, периодические 10-адические (или p-адические при простом p) числа. Рассматривая вместе с периодическими еще и непериодические десятичные дроби, или пополняя конечные цепные дроби бесконечными, мы приходим к знаковому изображению всех действительных чисел. Пополняя же периодические 10-адические

(p-адические) числа непериодическими, мы получаем кольцо 10-адических (соответственно поле p-адических) чисел, которое уже принципиально отличается от поля действительных чисел.

Кроме знакового изображения числа имеют геометрическую интерпретацию. Так, изображение действительных чисел на числовой прямой позволяет не только наглядно продемонстрировать аксиомы непрерывности, но и операции сложения и умножения, а также их свойства.

Наконец, в методическом отношении немаловажно указание причин появления тех или иных чисел, области их применения.

В связи с затронутой тематикой следует подчеркнуть роль и значение курса "Числовые системы", который читается на старших курсах педагогических университетов и институтов. В докладе предполагается изложить авторскую концепцию соответствующего учебного пособия.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ 5-МЕРНЫХ АЛГЕБР[1]

Лобода А.В., Ходарев А.С. (Воронеж)

E-mail: lobvgasa.voronezh.su

В [1] описаны все аффинно-однородные поверхности в $\mathbf{C}^3$ вида

$$Imz_3 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \alpha(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + \sum_{k\geq 3} F_k(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), 0 < \alpha \neq 1/2, \qquad (1)$$

имеющие более, чем 5-мерные группы автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 1 *Пусть M - однородная вещественая гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$, имеющая в точности 5-мерную группу Ли аффинных автоморфизмов и уравнение (1). Тогда соответствующая алгебра Ли имеет одно из двух матричных представлений ($p_1, p_2 \in \mathbf{C}, q \in \mathbf{R}$ - координаты в алгебре):*

$$\}_1 = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2\alpha} - 2)tp_1 - \frac{t}{2\alpha}\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}p_2 & \frac{1}{\alpha}p_1 & 0 & p_1 \\ (-2p_1 - \frac{1}{\alpha}\overline{p}_1) & \frac{1}{\alpha}p_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & \frac{1}{\alpha}(p_2 + \overline{p}_2) & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $t^2(2\alpha - 1) = 4$ *или*

$$\}_2 = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{1}{\alpha}(p_1 + t\overline{p}_2) & 0 & p_1 \\ (-2p_1 - \frac{1}{\alpha}\overline{p}_1) + (2 - \frac{1}{\alpha})tp_2 & B_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & C_3 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$\textit{где} \quad t^2(2\alpha - 1) = 1, \quad A_1 = -(2 + \frac{1}{\alpha})tp_1 - \frac{2t}{\alpha}\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}(2p_2 + \overline{p}_2),$$

$$B_2 = (2 - \frac{2}{\alpha})tp_1 - \frac{1}{\alpha}t\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}p_2 + \frac{2}{\alpha}\overline{p}_2,$$

[1] Работа поддержана программой "Университеты России - 2000" (проект 04-01-41) и РФФИ (проект 01-01-00594).

$$C_3 = \frac{3}{\alpha}(-t(p_1+\overline{p}_1)+(p_2+\overline{p}_2)).$$

ТЕОРЕМА 2 *Явное уравнение однородной поверхности (1) с алгеброй (2) имеет вид*

$$v = (|z_1|^2-|z_2|^2)^{\mu}|z_1+z_2|^{2\nu}, \quad \mu<0, \quad \nu=(1-\mu). \tag{4}$$

Литература

[1] Лобода А.В. Бугаева Ж.А., Ходарев А.С. Тезисы докл. Школы-семинара по геометрии и анализу. Абрау-Дюрсо, 2000. с. 131-133.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯДКОВ

Ломовцев Ф.Е. (Минск, Беларусь)
lomov@mmf.bsu.unibel.by

В ограниченной области $G=]0,T[\times\Omega, \Omega\subset\mathbf{R}^n$, переменных t и $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с достаточно гладкой боковой поверхностью $\Gamma=[0,T[\times S$ рассматриваются уравнения

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{r=0}^{p(t)}a_{k,r}(t)(-\Delta)^r u+b_{k,0}(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{r=0}^{[p(t)/2]}b_{k,1,r}(t)(-\Delta)^r u\right)=f, \tag{1}$$

где $a_{k,r}$ — $\max\{2m-2,2\}$ раз и $b_{k,0}, b_{k,1,r}$ — $2m-2k$ раз кусочно непрерывно дифференцируемые функции $t\in[0,T[$ с конечным числом точек негладкости и разрывов первого рода, $a_{k,p(t)}>0$ и $p\geq 0$ — целочисленная невозрастающая функция $t\in[0,T[$ с конечным числом точек разрывов; с граничными и начальными условиями.

$$\Delta^i u(t,x)|_\Gamma=0, \Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\ldots+\partial^2/\partial x_n^2, 0\leq i\leq p(t)-1, \tag{2}$$

$$\partial^j u(0,x)/\partial t^j=\varphi_j(x), x\in\Omega, 0\leq j\leq 2m-1, m=1,2,\ldots. \tag{3}$$

Теорема. *Для каждых $f\in L_2(G)$ и $\varphi_j\in\tilde{W}_{2,\Delta(0)}^{mp(0)(2m-1-j)}(\Omega), 0\leq j\leq 2m-1$, смешанные задачи (1)-(3) имеют единственное сильное решение $u\in C^{(2m-1)}([0,T],L_2(\Omega))\bigcap E^m$, удовлетворяющее неравенствам $|||u(t,x)|||_m\leq c_0(m)\langle||\mathcal{F}(t,x)||\rangle_m$,*
$c_0(m)>0, \mathcal{F}(t,x)=\{f(t,x),\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{2m-1}(x)\}, m=1,2,\ldots$.

Здесь банаховы пространства E^m — пополнения множеств всех функций из пространств Соболева-Слободецкого $W_2^{2m,2mp(0)}(G)$, удовлетворяющих условиям (2), по нормам $|||u(t,x)|||_m=$

$$=\left\{\sup_{0<t<T}\sum_{j=0}^{2m-1}\left\|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right\|^2_{(2m-1-j)(t),\Omega}\right\}^{1/2}, \text{ где}$$

$$||v||^2_{(2m-1-j)(t),\Omega}=\sum_{i=0}^{mp(t)-[(p(t)+1)/2](j+1)}\int_\Omega|\Delta^i v|^2dx+$$

$$+\sum_{i=0}^{mp(t)-[(p(t)+2)/2](j+1)} \int_\Omega |\nabla\Delta^i v|^2 dx,$$

∇ — оператор набла, $\nabla^2 = \Delta$ и $[\cdot]$ — целая часть числа. Гильбертовы пространства $F^m = L_2(G) \times \tilde{W}^{p(0)(2m-1)}_{2,\Delta(0)}(\Omega) \times \ldots \times L_2(\Omega)$ — множества всех функций $\mathcal{F}(t,x)$ с эрмитовыми нормами $\langle\|\mathcal{F}(t,x)\|\rangle_m = \{\int_0^T\int_\Omega |f(t,x)|^2 dxdt + \sum_{j=0}^{2m-1} \|\varphi_j(x)\|^2_{(2m-1-j)(0),\Omega}\}^{1/2}$, где гильбертовы пространства $\tilde{W}^{p(0)(2m-1-j)}_{2,\Delta(0)}(\Omega), 0 \le j \le 2m-2,$ — пополнения множеств всех функций из пространств Соболева $W_2^{2mp(0)}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2) при $t = 0$, по эрмитовым нормам $\|\cdot\|_{(2m-1-j)(0),\Omega}$.

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ

Максаев А.С. (Москва)
macsaev@mail.ru

Рассматривается следующая система функционально-дифференциальных уравнений с запаздываниями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(t-\tau_1)\,[a_1\,y(t) - b_1 - \nu_{11}\,x_1(t) - \nu_{12}\,x_2(t-\tau_2)], \\ \dot{x}_2 = x_2(t-\tau_2)\,[a_2\,y(t) - b_2 - \nu_{22}\,x_2(t) - \nu_{21}\,x_1(t-\tau_1)], \\ \dot{y} = q - [a_1\,x_1(t-\tau_1) + a_2\,x_2(t-\tau_2) + d]\,y(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [0,\infty)$. Начальные условия имеют вид

$$x_1(t) = \varphi_1(t),\ t \in [-\tau_1, 0],\ \ x_2(t) = \varphi_2(t),\ t \in [-\tau_2, 0],\ \ y(0) = y_0. \tag{1'}$$

В качестве искомых параметров выступают объемы производственных фондов хозяйствующих субъектов и объем обобщенного ресурса. В основание модели были положены известные в эволюционной биологии уравнения Лотка-Вольтерра.

Автором ранее были определены и исследованы на устойчивость все стационарные режимы системы (1)-(1′), изучены свойства ее неотрицательных решений. В настоящей работе продолжается изучение свойств решений системы (1)-(1′).

Определены условия на параметр q, при которых решения системы (1)-(1′) остаются положительными (теорема существования положительных решений).

Определены условия на параметр q, при которых одна из компонент решения системы (1)-(1′) осциллирует вокруг нуля (теорема существования осциллирующих решений).

Имеет место также следующий результат: любое почти периодическое решение системы (1)-(1′) обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^* = \text{const}$;

2) $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одновременно осциллируют вокруг нуля;

3)
$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+T} x_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2\ ,$$

где T – период.

К ВОПРОСУ О КОРРЕКЦИИ ЗНАКА УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДОБАВОК

Максимов В.П. (Пермь)

vpm@prognoz.ru

Рассматривается функционально-дифференциальная система управления

$$\mathcal{L}x = Bu + f \tag{1}$$

с линейными ограниченными операторами $\mathcal{L} : D^n \to L^n, B : L_2^r \to L^n$. Здесь L^n - банахово пространство суммируемых функций $z : [0,T] \to R^n$, D^n - банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$, L_2^r – гильбертово пространство управлений $u : [0,T] \to R^r$, суммируемых с квадратом, $(u_1, u_2) = \int_0^T u_1(s)^\top u_2(s)\,ds$ ($.^\top$ – символ транспонирования).Пусть $\ell : D^n \to R^n$ – линейный ограниченный вектор-функционал.Требуется найти управление u , при котором траектория системы (1) с начальным условием

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

доставляет заданное значение β целевому вектор-функционалу ℓ:

$$\ell x = \beta. \tag{3}$$

Обозначим через $C(t,s)$ матрицу Коши [1] оператора $\mathcal{L}$. Пусть, далее $\ell x = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds$, где $\Psi = (\ell e_1, ..., \ell e_n)$, e_i – i-й столбец единичной $n \times n$-матрицы, элементы $n \times n$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном. Обозначим

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau)C'_\tau(\tau, s)\,d\tau.$$

В случае $detM \neq 0$, $M = \int_0^T [B^*\Theta](s)[B^*\Theta](s)^\top\,ds$, управление $u^*(t) = [B^*\Theta](t)^\top M^{-1}[\beta - \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds]$ решает задачу (1)-(3) и имеет минимальную норму среди всех управлений, решающих эту задачу. В ряде прикладных задач реализуемыми оказываются только неотрицательные управления u. Коррекция знака управления u^* возможна с помощью аддитивных добавок v, принадлежащих ортогональному дополнению линейной оболочки столбцов матрицы $[B^*\Theta]^\top$.

В докладе предлагаются конструкции и алгоритмы коррекции знака управления u^* с целью построения неотрицательного управления $u = u^* + v$, решающего задачу управления (1)-(3).

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2000, 300 с.

ОБ УСТОЙЧИВОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Мастерков Ю.В., Родина Л.И. (Ижевск)

imi@wing.uni.udm.ru

Рассматривается система

$$\dot{x} = f_0(x,t) + uf_1(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t) \in \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}$, $u \in [-1,1]$. Предполагается, что $f_0(0,t)=0$, $f_1(0,t) \neq 0$ для всех $t \in \mathrm{R}$ и функции $f_0(x,t)$, $f_1(x,t)$ являются аналитическими в R^3.

Кроме того, предполагается, что $\operatorname{rank}(b(t), A(t)b(t) - \dot{b}(t)) \equiv 1$ для всех $t \in \mathrm{R}$, где $A(t) = \partial f_0(x,t)/\partial x\Big|_{x=0}$, $b(t) = f_1(0,t) \neq 0$, т.е. рассматривается случай, когда не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению.

Определение 1. Система (1) называется *устойчиво локально управляемой на отрезке* $[t_0,t_1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для каждой точки $x_0 \in O_\delta^2$ найдется такое измеримое управление $u : [t_0,t_1] \to [-1,1]$, что соответствующее ему решение $x(t,u(\cdot))$ системы (1) удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$ и $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0,t_1]$.

Через $x_+(t,\tau)$, $x_-(t,\tau)$ обозначим решения системы (1), отвечающие управлениям $u \equiv 1$, $u \equiv -1$ соответственно и удовлетворяющие условию $x_+(\tau,\tau) = x_-(\tau,\tau) = 0$; а через $\gamma_+(\tau)$ и $\gamma_-(\tau)$ соответственно обозначим траектории данных решений в R^3. Обозначим $M_+ \doteq \bigcup_{\tau\in\mathrm{R}} \gamma_+(\tau)$, $M_- \doteq \bigcup_{\tau\in\mathrm{R}} \gamma_-(\tau)$. Точку $\tau \in (0t)$ назовем *точкой ветвления*, если через эту точку проходит хотя бы одна кривая пересечения M_+ и M_-, отличная от оси $(0t)$.

Лемма 1. *Для любого отрезка $[t_0,t_1]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что в цилиндрической окрестности $V_\varepsilon \doteq O_\varepsilon^2 \times (t_0-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$ множества M_+ и M_- являются гладкими двумерными многообразиями.*

Теорема 1. *Если найдется интервал $I = (\tau_0,\tau_1) \subset (t_0,t_1)$ такой, что функция $t \to S_+(t,\tau) \doteq \det\Big(f_1(x_+(t,\tau),t), \partial x_+(t,\tau)/\partial\tau\Big)$ меняет знак в каждой точке $t = \tau \in I$, то система (1) устойчиво локально управляема на отрезке $[t_0,t_1]$.*

Теорема 2. *Если во всех точках $t = \tau \in (t_0,t_1)$ функция $t \to S_+(t,\tau)$ не меняет знак и на (t_0,t_1) нет точек ветвления, или если $S_+(t,\tau) \equiv 0$ при $t \in [t_0,t_1]$, то система (1) не является устойчиво локально управляемой на отрезке $[t_0,t_1]$.*

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Матакаев А.И. (Черкесск)

Вопросу осциллируемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с коэффициентами, сохраняющими постоянный знак на положительной полуоси, посвящено большое число работ в отличии, когда коэффициенты — непрерывные функции. Заметим, что впервые такие уравнения изучали Кигурадзе И.Т. и Каменев И.В. В предлагаемой работе рассматривается уравнение такого типа с отклоняющимся аргументом $h(t)$, обладающим свойством $h(h(t)) = h(t)$. Например, функция $h(t) = |t-\alpha|^{\lambda}$, где $\alpha \geq 0$, $\lambda \geq 1$, $t \neq \alpha$ обладает таким свойством.

Рассмотрим уравнение

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)f[x(h(t))] = 0, \tag{1}$$

где а) $a(t), b(t) \in C(0,+\infty)$, $f(z) \in C(-\infty,+\infty) \cap C^1(-\infty,0) \cap C^1(0,+\infty)$.

$\operatorname{sgn} f(z) = \operatorname{sgn} z, f'(z) \geq k > 0$ при всех $z \neq 0, t > h(t) \to +\infty, h'(t) > 0$;

в) $\int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{dz}{f(z)} < +\infty$, $\int\limits_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{dz}{f(z)} < +\infty$, $0 < \varepsilon = const$.

Теорема 1. Пусть 1) $ta(h(t)) \cdot h'(t) \leq 1$ для любого большого $t \in (0,+\infty)$; 2) $\int\limits_{t^*}^{+\infty} ta^2[h(t)]h'^2(t)dt < +\infty$; 3) $\int\limits_{t^*}^{+\infty} tb[h(t)]h'^2(t)dt = +\infty$. Тогда все решения уравнения (1) осциллируют.

Теорема 2. Если 1) выполнено условие 3) теоремы 1;
2) $\int\limits^{\infty} \frac{[1-ta(h(t)h'(t))]^2}{t} dt < +\infty$, то верно утверждение теоремы 1.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Минюк С.А., Наумович Е.А. (Республика Беларусь, Гродно)

Пусть ненаблюдаемый вектор $x(t)$ - решение стохастической системы

$$\begin{gathered} dx(t) = \left(A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + \int\limits_0^h R_1(t,\tau)x(t-\tau)d\tau \right) dt + \\ + f(t)dt + \sigma_1(t)d\xi_1(t), t \in [0,T], \end{gathered} \tag{1}$$

$$x(s) = \varphi(s), s \in [-h,0), x(0) = x_0, \tag{2}$$

а доступный наблюдению на $[0,T]$ вектор $y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered} dy(t) = \left(C_1(t)x(t) + C_2(t)x(t-h) + \int\limits_0^h R_2(t,\tau)x(t-\tau)d\tau \right) dt + \\ + \sigma_2(t)d\xi_2(t), \end{gathered} \tag{3}$$

где $T > h$ -произвольный фиксированный момент времени, $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$; соответствующих размерностей матрицы A, A_1, R_1, σ_1, C_1, C_2, R_2, σ_2 и вектор f заданны и имеют кусочно-непрерывные элементы, причем $N_2(t) = \sigma_2(t)\sigma_2'(t) > 0$ (т.е. матрица $N_2(t)$ -положительно определена) для любого $t \in [0, T]$. Считаем, что $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ - стандартные винеровские процессы произвольных размерностей, $\dot{\varphi}(s)$ -случайный процесс типа белого шума с заданной матрицей интенсивностей $D_H(s)$, x_0 - гауссовский случайный вектор, параметры распределения вероятностей которого неизвестны. Считаем что все случайные величины $\xi_1(t), \xi_2(t), \dot{\varphi}(s), x_0$ взаимно независимы.

Необходимо построить наилучшую в среднеквадратичном смысле оценку вектора $x(T)$ по результатам наблюдений процесса (3) на отрезке $[0, T]$. Оптимальная оценка $m(T)$ является линейным функционалом от результатов наблюдений, т. е. $m(T) = \int\limits_0^T u'(t)dy(t)$, причем матрица $u'(t)$ размера $n \times m$ (ядро оценки) подлежит определению из условия минимума по u выражения $I = M\|x(T) - m(T)\|^2$, где M - символ математического ожидания.

Задача I. Требуется определить матрицу $u(t)$ из условия

$$I = M\|x(T) - m(T)\|^2 \to \min_{n}. \qquad (4)$$

Предложен алгоритм решения задачи I.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОДНОГО ИЗ РАЗДЕЛОВ КУРСА ИНФОРМАТИКИ

Мхитарян Л.А., Поляков А.Е. (Воронеж)[1]

pppolandr@mail.ru

В настоящее время, стали широко развиваться компьютерные обучающие системы по различным курсам, в том числе и по курсу информатики. Однако все они ни как не затрагивают, один из наиболее сложных для понимания разделов курса информатики "Динамические структуры данных". Основная сложность состоит в том, как наилучшим образом представить все основные динамические структуры, такие как стеки, очереди, деревья и т.д. Поэтому при разработке программного основной упор делался на наглядность предоставляемой информации о динамических структурах данных, и здесь наиболее удобным средством явилась "Теория графов". А следовательно и представление динамических структур данных стало удобным в виде связных графов.

Программное обеспечение содержит в себе интерпретатор языка Паскаль и модуль предназначенный для визуального построения графов отображающих структуры данных. В связи с этим любые программы использующие динамические структуры данных, могут быть выполнены в пошаговом режиме. При этом на экране можно будет наблюдать то, как строятся и изменяются динамические структуры данных.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Центрально-Черноземного представительства корпорации "Парус" и деканата факультета прикладной математики и механики.

Кроме этого, программное обеспечение предусматривает систему проверки знаний учащихся. Она представлена в виде автоматической тестирующей системы(АТС) и организована по следующей схеме. Учащемуся предоставляется задание по созданию программы с использованием динамических структур данных, которое выполняется и просматривается им в рамках интерпретатора. Затем выполненная на языке Паскаль программа передается АТС, где выполненное задание проверяется и за него выставляется оценка(по количеству правильно пройденных тестов).

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОПЕРАТОРА СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Насонов С.Н. (Липецк)

nasonov@mail.ru

Пусть $\varphi_i, \psi_i : [0;1] \to [0;1]$, $i = 1,2$, функции класса $\Phi[1,2]$, $D = [0;1]\times[0;1]$, $H(\varphi_i, \psi_i) = \{h \in C(D) : |h(t,s)-h(\tau,\sigma)| \le a(\varphi_i(|t-\tau|)+\psi_i(|s-\sigma|))\}$, где $t, \tau, s, \sigma \in [0,1]$, $a = \mathrm{const}$, зависящая от h. $H(\varphi_i, \psi_i)$ — банахово пространство с нормой $\|h\|_{H(\varphi_i,\psi_i)} = \|h\|_C + \sup\limits_{(t,s)\ne(\tau,\sigma)} \frac{|h(t,s)-h(\tau,\sigma)|}{\varphi_i(|t-\tau|)+\psi_i(|s-\sigma|)}$. Для оператора суперпозиции $(Fx)(t,s) = f(t,s,x(t,s))$ рассматриваются условия дифференцируемости этого оператора по Фреше.

Теорема 1. Пусть оператор F действует из $H(\varphi_1, \psi_1)$ в $H(\varphi_2, \psi_2)$. F дифференцируем в точке $x_0 \in H(\varphi_1, \psi_1)$ тогда и только тогда, когда существует предел $a(t,s) = \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{u}(f(t,s,x_0(t,s)+u) - f(t,s,x_0(t,s))$ и $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что при $r \le \delta$ и $|u|, |v| < r$

$$|f(t,s,x_0(t,s)+u) - f(t,s,x_0(t,s)) - a(t,s)u - f(\tau,\sigma,x_0(\tau,\sigma)+v)+$$
$$+f(\tau,\sigma,x_0(\tau,\sigma)) + a(\tau,\sigma)v| \le \varepsilon(\varphi_2(|t-\tau|) + \psi_2(|s-\sigma|)+$$
$$+\varphi_2(\varphi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - \psi_1(|s-\sigma|))) + \psi_2(\psi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - \varphi_i(|t-\tau|)))).$$

В этом случае производная имеет вид $F'(x_0)h(t,s) = a(t,s)h(t,s)$.

Теорема 2. Пусть оператор суперпозиции F дифференцируем и его производная $F'(x_0)$ равномерно ограничена в точке x_0. Тогда функция f линейна относительно u, т.е. $f(t,s,u) = a(t,s) + b(t,s)u$.

Теорема 3. Пусть оператор суперпозиции F действует из $H(\varphi, \psi)$ в $H(\varphi', \psi')$. F асимптотически линеен тогда и только тогда, если существует предел $a_\infty(t,s) = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{u} f(t,s,u)$ для непрерывной функции $f(t,s,u)$ и $\forall\varepsilon > 0\exists\omega > 0$, что

$$|f(t,s,u) - a_\infty(t,s)u - f(\tau,\sigma,v) + a_\infty(\tau,\sigma)v| \le$$
$$\le \varepsilon(\varphi_2(|t-\tau|) + \psi_2(|s-\sigma|) + \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - psi_1(|s-\sigma|)))+$$
$$+\psi_2(\psi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - \varphi_1(|t-\tau|)))),$$

для $r \geq \omega$ и $|u|, |v| \leq r$. В этом случае асимптотическая производная имеет вид: $F'(\infty)h(t,s) = a_\infty(t,s)h(t,s)$.

Литература

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980.

2. Appell J., Zabrejko P.P. Nonlinear superposition operators. Cambridge University Press. 1990.

ПОСТРОЕНИЕ НЕНУЛЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелюхин С.А. (Рязань)

E-mail dma@ttc.ryazan.ru

Рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

где $x \in E^n$, E^s—s-мерное вещественное векторное пространство, $A(t)$—действительная $n \times n$ ω-периодическая по t матрица, $f(x,t,\varepsilon)$—n-мерная ω-периодическая по t вектор-функция, непрерывная по своим аргументам, $\varepsilon \in U(\varepsilon_0) = \{\varepsilon \in E^m, \|\varepsilon\| \leq \varepsilon_0\}$. Предполагается, что при всех значениях параметра выполняется $f(0,t,\varepsilon) \equiv 0$. Ставится задача—построить ненулевое ω-периодическое решение $x(t,\varepsilon) \in V(\rho) = \{x \in E^n, \|x\| \leq \rho\}$ в окрестности нулевого решения, не пользуясь фундаментальной матрицей линейной однородной системы. Метод основан на построении ненулевых ω-периодических функций, которые являются приближениями к искомому ненулевому ω-периодическому решению системы (1).

Для построения искомого ненулевого ω-периодического решения $x(t,\varepsilon)$ используется следующая схема

$$x_k(t,\varepsilon) = \alpha_k + \int_0^t (A(\tau)x_{k-1}(\tau,\varepsilon) + f(x_{k-1}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))\,d\tau, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2}$$

где $x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$, $x_1(t,\varepsilon) = \alpha_1$—константа, которая находится из условия ω-периодичности вектор-функции $x_2(t,\varepsilon)$.

Для нахождения вектора α_1 в случае, если матрица $B = \int_0^\omega A(t)dt$–неособенная получено уравнение

$$\alpha_1 = -B^{-1}\int_0^\omega f(\alpha_1,t,\varepsilon)dt. \tag{3}$$

Доказаны теоремы о существовании ненулевых решений $\alpha_1 = \alpha_1(\varepsilon)$ уравнения (3). При доказательстве используются принципы неподвижной точки и разбиение основного пространства E^n на инвариантные подпространства

Аналогично, считая $x_{k-1}(t,\varepsilon) \in V(\rho)$—известной ω-периодической вектор-функцией, строятся $x_k(t,\varepsilon)$ по схеме (2), где из условия ω-периодичности вектор-функции $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ для нахождения вектора α_k получается уравнение вида

$$\alpha_k = -B^{-1}\int_0^\omega A(t)dt\int_0^t [A(\tau)x_{k-1}(\tau,\varepsilon)+f(x_{k-1}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]\,d\tau -$$

$$-B^{-1}\int_0^\omega f(\alpha_k+\int_0^t [A(\tau)x_{k-1}(\tau,\varepsilon)+f(x_{k-1}(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon])d\tau,t,\varepsilon))dt. \quad (4)$$

Пусть при $t\in[0,\omega]: a = max\|A(t)\|, b=\|B^{-1}\|$, L—постоянная Липшица для функции $f(x,t,\varepsilon)$ на множестве $V(\rho)\times U(\varepsilon_0)\times R$, $c=(\frac{ab\omega^2}{2}(a+L)+ab\omega+bL\omega)/(1-bL\omega)$, $d=ab\omega^2(a+L)/2(1-bL\omega)$,

$$c+d<1 \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема. При выполнении условия (5) система (1) имеет ненулевое ω- периодическое решение $x(t,\varepsilon)\in V(\rho)$, которое может быть построено по итерационной схеме (2), где вектор α_1 является ненулевым решением уравнения (3), а при $k>2$ вектор α_k находится из уравнения (4) на основании принципа сжимающих отображений.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Нестеров М.В. (Самара)

nesterov@ssu.samara.ru

Рассматривается модель динамики изотермического реактора идеального перемешивания для модельной реакции окисления вещества с простыми молекулами. В безразмерных переменных система имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dt}=b_1-x_1-\alpha[\omega_1+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_1],$$

$$\frac{dx_2}{dt}=b_2-x_2-\alpha[\omega_2+\omega_4+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_2], \quad (1)$$

$$\varepsilon\frac{dy_1}{dt}=2\omega_1-\omega_3-\omega_4,\quad \varepsilon\frac{dy_2}{dt}=\omega_2-\omega_3,$$

где $\omega_1=\chi_1x_1(1-y_1-y_2)^2-\mu\chi_{-1}y_1^2$, $\omega_2=\chi_2x_2(1-y_1-y_2)-\mu\chi_{-2}y_2$, $\omega_3=y_1y_2$, $\omega_4=\mu\chi_4y_1x_2$, ε, μ — независимые малые параметры, причем $\varepsilon\ll\mu$. Параметр α рассматривается как управляющее воздействие. Цель данного воздействия — построение инвариантного множества медленных режимов со сменой устойчивости.

Медленная поверхность для системы (1) в интересующей нас области состоит из двух листов. В ε-окрестности медленной поверхности расположены устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия. Для данной системы проверяется выполнение достаточных условий существования интегрального многообразия медленных движений со сменой устойчивости, т.е.

составленного из устойчивого и неустойчивого листов, разделенных линией срыва. Устойчиво-неустойчивое интегральное многообразие и функция $\alpha = \alpha^*(y_2, \mu, \varepsilon)$, при которой происходит склейка этих листов интегрального многообразия во всех точках линии срыва одновременно, найдены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕГЛАДКИМ ПОЛУЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Новоженов М.М., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
E-mail: m_sumin@mm.unn.ac.ru

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным временем и поточечным фазовым ограничением

$$I_0(\pi) \to \min, \quad I_1(\pi) \in \mathcal{M}, \quad \pi \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

где $\pi \equiv (u, v)$ - пара управлений, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V$ п.в. на $\Omega\}$, $U \subset R^m$, $V \subset R^1$ - компакты, $\mathcal{M} \subset C(X)$ - множество всех неотрицательных функций на компакте $X \subset [0, T]$,

$$I_0(\pi) \equiv \int_\Omega F(x, z[\pi](x,T), v(x))\, dx,$$

$I_1 : \mathcal{D} \to C(X)$ - оператор, задаваемый равенством

$$I_1(\pi)(t) \equiv \int_\Omega G(x, t, z[\pi](x,t))\, dx, \quad t \in X,$$

$z[\pi] \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ - соответствующее тройке π решение краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x,t) z_{x_j} + a(x, z, u(x,t)) = 0,$$

$$z(x, 0) = v(x), \ x \in \Omega, \ \ z(x,t) = 0, \ (x,t) \in S_T.$$

Интегранты F, G, а также функция a, задающая "правую часть" полулинейного уравнения, в отличие от традиционных "гладких" постановок подобного рода задач, являются лишь липшицевыми по фазовой компоненте z. При некоторых естественных для теории оптимального управления условиях на исходные данные задачи (1) рассматриваются следующие вопросы: 1) необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина; 2) достаточные условия оптимальности; 3) условия нормальности задачи (1); 4) условия существования оптимальной пары управлений. Для доказательства поточечного по параметрам u, v принципа максимума используется идея работы [1]. Сопряженное уравнение принципа максимума записывается в терминах обобщенных градиентов Ф.Кларка.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 98-01-00793.

Литература

1. Сумин М.И. О минимизирующих последовательностях в задачах оптимального управления при ограниченных фазовых координатах // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. №10. С.1719-1731.

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Огарков В.Б. (Воронеж)

Рассматривается задача линейной термоупругости изотропной среды. Система уравнений в перемещениях имеет следующий вид:

$$\mu\nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial x}\{(\lambda+\mu)e - (3\lambda+2\mu)\alpha T\} = 0 \qquad (1)$$

$$\mu\nabla^2 \nu + \frac{\partial}{\partial y}\{(\lambda+\mu)e - (3\lambda+2\mu)\alpha T\} = 0 \qquad (2)$$

$$\mu\nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial z}\{(\lambda+\mu)e - (3\lambda+2\mu)\alpha T\} = 0 \qquad (3)$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, α — заданный коэффициент теплопроводности. Система уравнений (1)-(3) может быть приведена к следующему виду:

$$\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nabla^2\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \nabla^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right) - \nabla^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6)$$

Соотношения (4)-(6) не содержат в явном виде ни тепловой функции T, ни реологических констант λ, μ и α, что важно при численном моделировании. Эти соотношения могут быть обобщены на задачи термовязкоупругости, а также на связанные задачи термоупругости, термоползучести и общий случай анизотропной среды.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Огарков В.Б., Чернышёв А.Н., Аксёнов А. (Воронеж)

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \chi^2\frac{\varphi}{r^2} = 0 \qquad (1)$$

Здесь φ — потенциал напряжений в задаче Ламе для ортотропного упругого цилиндра. Изучено четыре основных случая нагружения цилиндра и зависимости решения уравнения (1) от физического параметра λ.

В случае нагружения полого цилиндра только внутренним давлением показано, что увеличение значений коэффициента анизотропии λ приводит к увеличению максимального тангенциального напряжения, которое превосходит радиальное.

При воздействии внешнего давления увеличение коэффициента анизотропии λ приводит к уменьшению максимальных значений тангенциального напряжения.

Для сплошного ортотропного цилиндра при воздействии внешнего давления рост значений коэффициента анизотропии приводит к увеличению радиальных перемещений во всех точках цилиндра.

В случае воздействия на ортотропную полость внутреннего давления увеличение коэффициента анизотропии приводит к увеличению значений напряжений. Результаты оформлены в виде таблиц и графиков для древесины дуба.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Ойнас И.Л., Яшина О.В. (Краснодар)

E-mail:ioinas@mail.ru

Рассматривается линейное разностное уравнение Вольтерра

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k + f_n (n = 0, 1, ...) \tag{1}$$

и соответствующее ему возмущенное уравнение

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} y_k + f_n, 0 \leq n \leq N,$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} a_{nk} y_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_{nk}(y_k + g(k, y_k)) + f_n, n \geq N + 1. \tag{2}$$

Если $\{r_{nk}\}$ - резольвента ядра $\{a_{nk}\}$, т.е.

$$r_{nk} = a_{nk} + \sum_{l=k}^{n} r_{nl} a_{lk} (0 \leq k \leq n),$$

то решение $\{y_n\}$ уравнения (2) при $n \geq N+1$ будет удовлетворять и уравнению вида

$$y_n = x_n + \sum_{k=N+1}^{n} r_{nk} g(k, y_k), \tag{3}$$

где $\{x_n\}$-решение (1). При $p, q \in (1, \infty)$, таких, что $p + q = pq$, справедлива следующая

Теорема. Пусть $\sup\limits_{n \geq 0} \sum\limits_{k=0}^{n} |r_{nk}|^p < \infty$. Пусть далее $|g(k, u)| \leq w(k, |u|)$, где

$k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, u \in R$, а функция w такова, что $w(n,t) \leq w(n,s)$, где $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, t \geq 0, s \geq o$ и $t \leq s$. Предположим, что при $s \geq 0$ $\sum_{k=0}^{\infty} w^q(k,s) < \infty$. Тогда, если $\{x_n\}$ – решение (1), ограниченное константой $m > 0$, то найдется $\gamma > 0$ и такое $N \geq 0$, что каждое решение (3), определенное при $n \geq N+1$, будет ограничено константой $m + \gamma$.

ТЕНЗОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Павлов Ю.С. (Воронеж)

Взаимодействие любой сложной системы S и окружающей ее среды C является слабоформализованным. Рассмотрение его в абстрактном топологическом пространстве X любой размерности $dim\, X = M > 3$ удобно выполнять поэтапно. При этом считается, что

1) X – система малоразмерных последовательно вложенных подпространств $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ с $dim\, \mathcal{X}_i = m_i \leq 3$, $i = 0,1,\ldots$, имеющая при $m_i = const = m$ глубину вложения $K = M/m$,

2) исходный этап процесса — описание взаимодействия в декартовом пространстве $R^3 = \mathcal{X}_0$.

В самом общем случае взаимодействие S и C внутри R^3 носит энерго(сигнально)-информационно-материальный характер. Это естественным образом определяет векторное пространство взаимодействия L^3, вложенное в R^3, и одноименный ортонормированный функциональный базис $\{Э(c); И; М\}$, задающий внутри R^3 соответствующую евклидову координатную систему.

Взаимодействие S и C создает внутри L^3 обобщенную силу $\mathbf{F}$. Составляющие векторы последней при $K = 2$ образуют в совокупности несимметричный компаунд-тензор взаимодействия 2-го ранга $\mathbf{F}$. При $K \geq 3$ он является мультикомпаунд-тензором 2-го ранга.

Все компоненты $\mathbf{F}$ имеют конкретную физическую интерпретацию, определяемую характером S. Это исключает возможность диагонализации $\mathbf{F}$ с помощью формальных ортогональных преобразований.

Декомпозиция компонент $\mathbf{F}$ выполняется детализацией исходного базиса $\{Э(c); И; М\}$ координатной системы внутри $\mathcal{X}_0 \in X$. Практически это означает развитие описания взаимодействия S и C при переходах $\mathcal{X}_i \to \mathcal{X}_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,(k-1)$, внутри X. На последнем (K-м) этапе декомпозиции все компоненты $\mathbf{F}$ становятся скалярами. Количественное определение их обеспечивается физическим и последующим математическим моделированиями, которые строго формализуют взаимодействие S и c.

После этого $\mathbf{F}$ представляется совокупностью обычных тензоров 2-го ранга, позволяющих получать численные решения задачи.

Реакция S на $\mathbf{F}$ описывается полевым тензором напряжений $\mathbf{P}$. Отсюда получаем строгую импликацию $\mathbf{F} \to \mathbf{P}$, из которой следует правомерность соотношения $\mathbf{P} = b\mathbf{F}$, $b \neq const$, где b — скалярный коэффициент, отражающий общий характер и исход взаимодействия S и C:

— при $b \geq 1$ система S гарантированно противостоит воздействиям со стороны C, а величина b определяет запас прочности S,

— при $0 < b < 1$ воздействие C постепенно деформирует и затем, возможно, частично разрушает S, а величина b определяет скорость деформации S, нарастающую при $b \to 0$ и убывающую при $b \to 1$,

— при $b = 0$ взаимодействие с C полностью разрушает S.

Нелинейное соотношение $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}$ является тензорным представлением обобщения А.А. Ильюшиным известного [1] закона Гука.

Литература.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. 203 с.: ил.

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО КОНТИНУУМА

Пеньков В.Б. (Липецк), Пеньков В.В. (Тула)

svetl@stu.lipetsk.su

Пусть граница разбита на два класса: $\partial V = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$.

Основная смешанная задача. *Требуется восстановить механическое поле в области V по заданным на границе S_p поверхностным усилиям* $\mathbf{p}$ *и на границе S_u - перемещениям* $\mathbf{u}$.

Граничные условия приводят к паре двойственных интегральных уравнений относительно поверхностных усилий p_j и перемещений u_j:

$$p_j(t) = \int\limits_{S_u} K(t,\tau) p_j(\tau) ds(\tau) + p_{0j}(t), \quad (j = 1,2,3), \quad t \in S_u,$$

$$u_j(t) = \int\limits_{S_p} K(\tau,t) u_j(\tau) ds(\tau) + u_{0j}(t), \quad (j = 1,2,3), \quad t \in S_p,$$

$$K(t,\tau) = \sum_k p_j^k(t) u_j^k(\tau). \tag{1}$$

Теорема. *Система линейных алгебраических уравнений*

$$(\mathrm{M} + i\Pi)\, c = (E - i\mathrm{B})\, \psi + \left(iE - \mathrm{A}^T\right) \chi \tag{2}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее интегральным уравнениям.

Обозначено (верхний индекс отвечает граничному состоянию):

$$\mathrm{M} = [\mu_{mr}]_{N\times N}, \quad \Pi = [\pi_{mr}]_{N\times N}, \quad \mu_{mr} = \sum_k \alpha_{kr}\alpha_{km}, \quad \pi_{mr} = \sum_k \beta_{rk}\beta_{mk},$$

$$\mathrm{A} = [\alpha_{ij}]_{N\times N}, \quad \mathrm{B} = [\beta_{ij}]_{N\times N}, \quad c = \{c_j\}_N, \quad \psi = \{\psi_j\}_N, \quad \chi = \{\chi_j\}_N.$$

$$\chi_k = \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{u}^k \right\rangle_{S_p}, \quad \psi_k = \left\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{u} \right\rangle_{S_u}, \quad \alpha_{ij} = \left\langle \mathbf{p}^j, \mathbf{u}^i \right\rangle_{S_u}, \quad \beta_{ij} = \left\langle \mathbf{p}^j, \mathbf{u}^i \right\rangle_{S_p}.$$

Для компьютерной реализации более удобна система уравнений

$$\left(\mathrm{M}^2 + \Pi^2\right) c = (\mathrm{M} - \Pi\mathrm{B})\, \psi + \left(\Pi - \mathrm{M}\mathrm{A}^T\right) \chi, \tag{3}$$

которая имеет действительный тип.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ИПК
Плетнева О.К. (Воронеж)

Последнее время многие учреждения, занимающиеся послевузовским образованием, в том числе и ИПК, стали задумываться об оценке результативности своей деятельности не только в процессе организации курсовой подготовки, т.е. диагностируя слушателей на начало и окончание курса, но и после нее. Эти проблемы волнуют и Воронежский областной институт повышения квалификации работников образования (ВОИПКРО).

Для эффективной организации работы по повышению квалификации работников образования необходимо адекватно оценивать состояние педагогических кадров региона, их профессионализм. Кроме этого, целесообразно проследить уровень квалификации работника по возвращении его на свое рабочее место. Оценить то, что дала ему курсовая переподготовка непосредственно для его деятельности, и выяснить, как долго он может обходиться без повышения квалификации, демонстрируя достаточно высокий уровень профессионализма. Поэтому целесообразно формировать постоянно обновляющийся банк данных, содержащий сведения о стаже, образовании, квалификационной категории, сроках и месте прохождении курсовой переподготовки учителями-предметниками. Если добавить к этому информацию об обеспеченности методической литературой, о среднем уровне обученности учащихся отдельных классов, школ и районов, о работе школьных и районных методических объединений и т.п., то в результате можно составить четкую и ясную картину состояния педагогических кадров области. Тем самым появляется возможность регулировать географию организации курсовой деятельности, определять содержание курса, учитывая затруднения и потребности конкретных специалистов конкретного района. Все это позволит повысить эффективность работы ВОИПКРО и сделать курсы повышения квалификации действительно востребованными и полезными для работников образования.

О ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА BV НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ
Покорная И.Ю. (Воронеж)

Пусть Γ — конечный связный геометрический граф в R^n и $\overline{\Gamma}$ — его относительное замыкание, т.е. $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$. Пусть на Γ задана некая аддитивная функция множества F (слово аддитивная мы далее опускаем), имеющая ограниченное изменение (ограниченную вариацию) в естественном смысле. Если μ — неотрицательная на Γ другая функция множества, то F мы называем μ — абсолютно непрерывной, если для любого μ-измеримого множества $E \subset \Gamma$ равенство нулю его μ-меры влечет равенство нулю и $F(E)$. Для μ-абсолютно непрерывной на Γ функции F существует μ-суммируемая функция $f : \Gamma \to R$ такая, что $F(E) = \int\limits_E f d\mu$ для любого μ-измеримого подмножества $E \subset \Gamma$. Здесь $f(x)$ — функция точки, заданная на Γ, аналогичная производной Радона-Никодима. Ее естественно обозначать в виде $f(x) = \frac{dF}{d\mu(x)}$.

Пусть $C_{\overline{\Gamma}}$ — пространство непрерывных на $\overline{\Gamma}$ функций и $C^*_{\overline{\Gamma}}$ — совокупность линейных на $C_{\overline{\Gamma}}$ ограниченных функционалов. Для любой функции ограниченной вариации на Γ выражение $l(u) = \int\limits_{\Gamma} u d\mu$ определяет элемент из $C^*_{\overline{\Gamma}}$. Верно и обратное утверждение, аналогичное теореме Рисса.

Теорема. *Для любого линейного непрерывного на $C_{\overline{\Gamma}}$ функционала $l(\cdot)$ существует (и единственна) функция множества μ ограниченной вариацией на Γ, для которой $l(u) = \int\limits_{\overline{\Gamma}} u d\mu$ $(u \in C_{\overline{\Gamma}})$*

Здесь μ определена на естественно вводимой σ-алгебре борелевских подмножеств.

Аддитивная функция множества μ, заданная на Γ и имеющая ограниченное изменение, порождает аналогичную функцию на каждом ребре, задавая и меры внутренних вершин. На каждом ребре тем самым задается обычная (т.е. поточечно определяемая) функция из соответствующего BV. Верно и обратное: любую функцию из $BV(\Gamma)$ можно сложить из мер, заданных на ребрах и набора точечных мер в вершинах. Приведенные свойства важны при постановке и анализе обобщенного уравнения вида $-(pu')' + Q'u = F'$ на Γ, когда обобщенные производные переплетаются с производными по Радону-Никодиму, дополняя друг друга.

О СИЛЬНО-СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ[1]

Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. (Воронеж)

Пусть Γ — связный открытый геометрический граф из R^n. Обозначим через $\sum_{\Gamma}$ — совокупность (σ-алгебру) всех борелевских подмножеств из $\overline{\Gamma}$. Распространяя на Γ интеграл Стильтьеса, называем обобщенной производной от функции множества $\mu : \sum_{\Gamma} \to R$ функционал $\int\limits_{\Gamma} \varphi d\mu$ по $\varphi \in C^*(\overline{\Gamma})$. Для любой непрерывной на $\overline{\Gamma}$ функции $u(x)$ соответствующая ей функция множества μ_u (обозначаемая так же через u) определяется, как $\mu_u(E) = \sum\limits_{x \in \partial E} u(x)$, где ∂E — относительная (в $\overline{\Gamma}$) граница E. Эта функция наверняка определена, если $u(x)$ абсолютно непрерывна на Γ, или более общо, имеет ограниченную вариацию.

Пусть $p(x)$ — существенно положительная ($\inf p > 0$) внутри каждого ребра функция. Произведение pu' (при $u \in C(\overline{\Gamma})$, как обобщенная функция, т.е. как непрерывный на $C(\overline{\Gamma})$ линейный функционал, определено, лишь если pdu есть дифференциал Стильтьеса на Γ, т.е. если функция множества $\int\limits_{E} pdu$ $(E \subset \sum_{\Gamma})$ имеет ограниченную вариацию. Сужение этой функции на $[\gamma]$ (здесь $[\gamma]$ — замыкание ребра γ) приводит разговор к скалярному интегралу Римана-Стильтьеса,откуда следует вывод о непрерывности на каждом ребре

[1]Результаты получены благодаря поддержке грантов Госкомвуза РФ N 97-0-1.8-100, № E00-1.0-154 в области фундаментального естествознания (Конкурсный центр СПб ун-та) и N 11 в области математики (Конкурсный центр Новосибирского ун-та)

γ функции $p(x)u'(x)$ и о независимости $g(E) = \int\limits_E pdu$ от значений p в каждой из вершин Γ. Нам удобно считать эти значения нулевыми — тогда $\int\limits_E pdu = -\int\limits_E udp$ для любого $E \in \sum_\Gamma$.

Аналогичным образом под $(pu')'$ мы понимаем функционал из $C(\overline{\Gamma})$, порождаемый дифференциалом Стильтьеса $d(pu')$. В каждой из вершин a графа Γ этот дифференциал реализуется в виде $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma(a)} p_\gamma(a+0)u'_\gamma(a+0)$, где $\Gamma(a)$ — набор всех прилегающих к a ребер, p_γ и u_γ — сужения p и u на γ при ориентации "от a".

Считая пространством основных функций $C(\overline{\Gamma})$, мы под обобщенным уравнением (в классе непрерывных решений)

$$-(pu')' + Q'u - \lambda M'u = F'$$

на Γ понимаем тем самым равенство соответствующих дифференциалов Стильтьеса $-d(pu') + udQ - \lambda udM = dF$ или, что тоже, равенство функций множества

$$-(pu')(E) + \int\limits_E udQ - \lambda \int\limits_E udM = F(E) \quad (E \subset \sum\Gamma).$$

В каждой из внутренних вершин имеем отсюда
$-\sum p_\gamma(a+0)u'_\gamma(a+0) + u(a)\sum Q_\gamma(a+0) - \lambda u(a)\sum M_\gamma(a+0) = \sum F_\gamma(a+0)$.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ДЕРЕВЕ[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokr@niimm.spb.su

Геометрический граф без циклов Γ содержит ребра $\gamma_i, i = 1,..,m$; внутренние вершины $a_j \in J(\Gamma)$, $j = 1,..,J$; и граничные вершины $b \in \partial\Gamma$. Множество ребер, примыкающих к вершине a_j обозначим K_j. На ребрах γ_i заданы функции $p_i(x) > 0$, $q_i(x) > 0$, и для сужений u_i на γ_i функции $u(x)$, $x \in \Gamma$ заданы уравнения

$$-(p_i u_i')' + q_i u_i = 0.$$

На граничных вершинах заданы краевые условия $u'(b) = 0, b \in \partial\Gamma$, а на внутренних вершинах - условия непрерывности $u(x)$ и условия

$$\sum_{i\in K_j} p_i(a_j)u'(a_j) = f_j,$$

где $f_j = f_{0j} + f_{1j}u(a_j)$. При $F = 0$ $u(x) = 0$.

Используем векторные обозначения: $U = (u(a_1), ..., u(a_J))$;

[1]Работа поддержана РФФИ проект 99-01-00699.

$F = (f_1, ..., f_J)$; $F_0 = (f_{01}, ..., f_{0J})$; $F_1 = diag\,(f_{11}, ..., f_{1J})$. Эту краевую задачу запишем в виде $Lu = F$. Известно, что для этой задачи существует функция Грина и, следовательно, обратный оператор L^{-1}; $u(x) = L^{-1}F$, $x \in \Gamma$. Сужение L^{-1} на множество $J(\Gamma)$ - неособая матрица G с элементами G_{jk}, $k = 1, .., J$. Для вектора U получаем вспомогательную систему линейных уравнений $U = GF_0 + GF_1U$, откуда $U = (E - GF_1)^{-1}\,GF_0$. Следовательно, решение краевой задачи имеет вид:

$$u(x) = L^{-1}F_0 + L^{-1}F_1(E - GF_1)^{-1}GF_0, \ \ x \in \Gamma.$$

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ЧАНДРАСЕКАРА

Политюков В.П.

Исследование излучения, распространяющегося в реальных объектах (в газовых средах, в земной атмосфере, и т.д.), изучение процессов многократного рассеяния света в разряженной среде межзвездного газа, задачи интерпретации спектров небесных тел, приводят к исследованию уравнений переноса лучистой энергии. В работе рассматривается задача Коши для нелинейной модели Чандрасекара

$$\frac{\partial r}{\partial z}(z,\mu,\mu') = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\cdot r(z,\mu,\mu') + \frac{c(z)}{2}\cdot\left\{\frac{1}{\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^1 r(z,\xi,\mu')d\xi + \int\limits_0^1 \frac{r(z,\mu,\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta} r(z,\mu,\zeta) r(z,\xi,\mu')d\xi d\zeta \right\}, \quad (1)$$

$$z > 0, \qquad (\mu,\mu') \in (0,1]^2,$$

$$r(0,\mu,\mu') = r_0(\mu,\mu'), \quad (\mu,\mu') \in (0,1]^2, \quad (2)$$

здесь $c(z)$, $r_0(\mu,\mu')$ — известные неотрицательные функции, функция $c(z)$ имеет смысл вероятности выживания кванта: $0 \le c(z) \le 1$.

Для задачи (1),(2) в работе [1] доказана теорема существования глобального решения при условиях $\sup\limits_{z\in(0,\infty)} c(z) < 1$, $r_0(\mu,\mu') = 0$. Пусть $c_0 = \sup\limits_{z\in(0,\infty)} c(z)$. В настоящей работе доказана глобальная разрешимость и найдена верхняя функция для решения задачи (1),(2). Для функции рассеяния по Чандрасекару $\mu \cdot r(z,\mu,\mu') = S(z,\mu,\mu')$ на основе общих теорем [2] теорем получена следующая поточечная глобальная по z оценка

$$S(z,\mu,\mu') \le \frac{c_0}{2}\cdot\frac{\mu'\cdot\mu}{(\mu+\mu')}\cdot\varphi(\mu)\cdot\varphi(\mu'), \quad (\mu,\mu') \in (0,1]^2, \quad 0 < c_0 \le 1 \quad (3)$$

где $\varphi(\mu)$, — точное решение интегрального уравнения Чандрасекара

$$\ln\left(\varphi(\mu)\right) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 - c_0\cdot\frac{\operatorname{arctg}(u)}{u}\right)\cdot\frac{\mu}{1+\mu^2\cdot u^2}du \quad \mu \in (0,1] \quad (4)$$

при условии $\mu \cdot r_0(\mu,\mu') \leq \frac{1}{2}\frac{\mu'\cdot\mu}{(\mu+\mu')} \cdot \varphi(\mu)\cdot\varphi(\mu')$, $(\mu,\mu') \in (0,1]^2$.

Литература

1. S.L. Hollis, C.T. Kelley. Vector Algorithm for equations Arising in Radiative Transfer Through Inhomogeneous Media. // Transport Theory and Statistikal Physics, 1986. V. 15. P. 33-48.

2. В.П.Политюков. Решение некоторых нелинейных уравнений в банаховых пространствах с конусом и приложения. // ДАН СССР, 1980,т.250, № 4, с.818-822.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ТРЕМЯ СВЯЗАННЫМИ КОНТУРАМИ

Попов А.В. (Воронеж)

Изучается автогенератор электрических колебаний на трех связанных контурах Ван-дер-Поля. Математическая модель, полученная Непринцевым В.И., представляет собой систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений с кубической нелинейностью.

$$x_1' = x_2, x_3' = x_4, x_5' = x_6, x_2' = -x_1 + K_{2,2}x_2 - x_3 + \varepsilon F_{2,1}(1 + \overline{S}_2 x_1 - \overline{S}_3 x_1^2))x_2,$$

$$x_4' = K_{4,1}x_1 + K_{4,2}x_2 + K_{4,3}x_3 + K_{4,4}x_4 + K_{4,5}x_5 + \varepsilon F_{4,1}(1+\overline{S}_2 x_1 - \overline{S}_3 x_1^2))x_2, \quad (1)$$

$$x_6' = K_{6,2}x_2 + K_{6,3}x_3 + K_{6,4}x_4 + K_{6,5}x_5 + K_{6,6}x_6 + \varepsilon F_{6,1}(1 + \overline{S}_2 x_1 - \overline{S}_3 x_1^2))x_2,$$

где вещественные постоянные коэффициенты $K_{ij}, F_{ij}, \overline{S}_2, \overline{S}_3$ выражаются через значения физических параметров элементов схемы.

Путем аналитических преобразований, выполненных на ЭВМ с использованием пакета программ Maple, с помощью замены переменных система (1) приводится к стандартному виду [1] и получается соответствующая ей усредненная система дифференциальных уравнений [2] для амплитуд колебаний. Причем особые точки усредненной системы уравнений имеют вид:

$$1. C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, 2. C_1 = 0, C_2 = 0, C_3^2 = \frac{4}{\overline{S}_3},$$

$$3. C_1 = 0, C_2^2 = \frac{4}{\overline{S}_3}, C_3 = 0, 4. C_1^2 = \frac{4}{\overline{S}_3}, C_2 = 0, C_3 = 0,$$

$$5. C_1 = 0, C_2^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3}, C_3^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3}, 6. C_1^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3}, C_2 = 0, C_3^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3},$$

$$7. C_1^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3}, C_2^2 = \frac{4}{3\overline{S}_3}, C_3 = 0, 8. C_1^2 = \frac{4}{5\overline{S}_3}, C_2^2 = \frac{4}{5\overline{S}_3}, C_3^2 = \frac{4}{5\overline{S}_3}.$$

Найдены достаточные условия асимптотической устойчивости особых точек усредненной системы уравнений. Причем получен следующий результат [2]. При заданных параметрах автогенератора не могут быть одновременно устойчивы особые точки, которым соответствуют в первом приближении одночастотные или трехчастотные колебания в автогенераторе и особые точки, которым соответствуют в первом приближении двухчастотные колебания в автогенераторе.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.,1974.

2. Задорожний В.Г. Попов А.В. Усреднение уравнений колебаний напряжения в автогенераторе с тремя связанными контурами. // Известия РАЕН серия МММИУ, 2000, Т.4, №3.-с.69-80.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Потапов Д.К. (Челябинск)

dpotapov@csu.ru

Рассматриваются основные краевые задачи для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывной ограниченной нелинейностью, мультипликативно зависящей от параметра. При любом значении параметра ноль является решением соответствующей задачи. Собственными значениями задачи называют те значения параметров, для которых соответствующая проблема имеет ненулевое решение. Изучается структура множества собственных значений. Ищутся условия, при выполнении которых существует полуось собственных значений.

В [1] с помощью вариационного метода, разработанного применительно к уравнениям с разрывными нелинейностями В.Н.Павленко, доказаны теоремы о существовании луча положительных собственных значений основных краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Доказывается существование полуоси собственных значений задачи и наличие для каждого такого значения собственной функции, которая является полуправильным решением задачи. При этом ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями может быть ненулевым (так называемые резонансные краевые задачи). Кроме того получена теорема о структуре спектра эллиптических краевых задач с разрывными монотонными нелинейностями [2].

Автор благодарен профессору В.Н.Павленко за постановку задачи.

Литература

1. Павленко В.Н., Потапов Д.К. О существовании луча положительных собственных значений для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения - XI: Сборник трудов Воронежской весенней матем. школы, посвящ. 60-летнему юбилею Ю.В.Покорного. Часть II. – Воронеж: ВГУ, 2000. - С. 96–102.

2. Павленко В.Н., Потапов Д.К. О структуре спектра эллиптических краевых задач с разрывными монотонными нелинейностями // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. – С. 95–96.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НА ГРАФЕ

Провоторов В.В., Провоторова Е.Н.(Воронеж)

Изложим здесь некоторые сведения, дополняющие широко известную теорию интегральных уравнений на отрезке. Новым объектом исследования являются интегральные уравнения на графе. Как и в классическом случае будем разделять такие уравнения на уравнения Фредгольма и Вольтерра, оставляя общепринятую терминалогию. Под графом Г понимаем связное множество, представляющее собой объединение конечного числа ориентированых отрезков (ребра графа). Точное определение графа можно найти в работах Ю.В.Покорного, О.М.Пенкина, А.В.Боровских и др. авторов. Интеграл по графу понимается как сумма интегралов по всем ребрам графа.

1. Уравнения Фредгольма. Пусть на "прямоугольнике" $\Gamma \times \Gamma$ задана функция $K(x,s)$, имеющая конечный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} K^2(x,s)dxds \tag{1}$$

Уравнением Фредгольма на графе Г назовем уравнение вида

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{\Gamma} \mathrm{K}(\mathrm{x},s)\varphi(s)ds + f(x), \quad x \in \Gamma \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — искомая, $f(x)$ — заданая функции на Г.

Конечность интеграла (1) гарантирует полную непрерывность соответствующего оператора. Единообразие записи интегрального уравнения на графе и на отрезке влечет за собой и полную аналогию алгоритмов и суждений: имеют место теоремы, объединенные в альтернативу Фредгольма; при достаточно малом параметре λ уравнение (2) однозначно разрешимо для любой функции $f(x)$ из $L^2(\Gamma)$; решение $\varphi(x)$ имеет вид интеграла с ядром, являющимся резольвентой ядра $\mathrm{K}(x,s)$, в представлении которой — повторные ядра; резольвента является мероморфной функцией параметра λ.

2. Уравнение Вольтерра. Рассматривается простейший случай, когда граф Г является графом-пучком. Определяя подграф $\Gamma(x)$ (аналог отрезку $[a,x]$ с переменным правым концом), получим уравнение Вольтерра, если в (2) заменить область интегрирования Г на $\Gamma(x)$. Стандартными рассуждениями показывается однозначная разрешимость уравнения для любых функций $f(x)$ из $L^2(\Gamma)$.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Псху А.В. (г.Нальчик)
pskhu@apori.ru

Для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y) + \lambda D_{0y}^{\beta}u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < \beta < \alpha \le 1, \tag{1}$$

где D_{0t}^{ν} – оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка ν [1, с.13], в области $D = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$, $0 < a, b \leq \infty$ исследована краевая задача

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x,y) = \varphi(y), \quad \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u(x,y) = \psi(x), \tag{2}$$

где φ, ψ, f - заданные функции. Решение ищется в классе функций для которых $x^{1-\alpha}y^{1-\beta}u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$. Для задачи (1), (2) доказано сущеcтвоание и единственность решения, и получено его явное представление.

Используя это представление исследуется уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = f(x,y). \tag{3}$$

Получены решения и построены функции Грина первой, второй и смешанных краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка (3) ($0 < \alpha \leq 1$) и для дробного волнового уравнения ($1 < \alpha < 2$) [2].

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Литература

1. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. - Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. -299 с.

2. Псху А.В. Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. -Нальчик: Сообщения Научно-исследовательского прикладной института математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2001. -43 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Пугач Е.И. (г. Минск)

pugach@mmf.bsu.unibel.by

Известно, что однородная C^* – алгебра допускает описание в терминах сечения некоторого соответствующего алгебраического расслоения [1, 2]. Естественным образом возникает вопрос о том, в каких случаях банахова алгебра может быть локально и глобально описана в терминах вектор-функций.

Пусть A - банахова алгебра и A_0 – ее центр. Будем считать, что все неприводимые представления алгебры A имеют одинаковую размерность n. Через $P^n(A)$ обозначим множество классов эквивалентных неприводимых представлений размерности n в полную матричную алгебру $C^{n\times n}$.

При фиксированном $t \in P^n(A)$ получаем, что $a_0(t)$ перестановочен со всеми $a(t)$, где $a_0 \in A_0$ и $a \in A$. Следовательно, $a_0(t)$ соответствует диагональная матрица. Когда t пробегает $P^n(A)$, возникает функция $\varphi(t)E$, т.е. элементам центра соответствует некоторая алгебра функций (преобразование Гельфанда центра).

Пусть $U \subset P^n(A)$. Рассмотрим подалгебру B, $A_0 \subset B \subset A$, такую что локально B содержит $C^{n\times n}$, т.е. $z \in B$, $z \in C^{n\times n}$, если $z(t) = M_n^z \; \forall t \in U$. Имеет место следующая

Теорема. Пусть B - подалгебра банаховой алгебры A, порожденная центром A_0 и алгеброй $C^{n\times n}$. Тогда $B(U)$ изоморфно $\hat{Z}(U) \otimes C^{n\times n}$, где $\hat{Z}$ – преобразование Гельфанда центра.

В работе приводятся примеры банаховых алгебр с конечномерными неприводимыми представлениями [3].

Отметим, что элементам центра могут соответствовать функции разной природы при представлении не в полную матричную алгебру.

Литература

1)Fell J.M.G. The structure of algebras of operator fields// Acta Math.-1961, №3 - 4. P.133 - 280.

2) Васильев Н.Б. C^* – алгебры с конечномерными неприводимыми представлениями// Успехи мат. наук. - 1966-Т.31, вып.1 -С.136-154.

3) Antonevich A., Krupnik N. On trivial and non-trivial n-homogeneous C^* -algebras// Integr. Equ. Oper. Theory - 38 (2000) - P.172-189.

ОБ ОБРАТИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Пуляев В.Ф., Савчиц Е.Ю. (Краснодар)

e-mail du@math.kubsu.ru

Исследуются свойства операторов вида $I - \widetilde{P}$, где $\widetilde{P}$-линейный, локально компактный, непрерывный относительно локальной сходимости ω-периодический оператор, действующий в $BC^n(R^1)$-пространстве непрерывных и ограниченных на R^1 комплекснозначных вектор-функций, $||x|| = \sup\limits_t ||x(t)||_{C^n}$. Показано, что каждый такой оператор может быть представлен в виде

$$\widetilde{P}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (d_s P(t,s))x(s), \tag{1}$$

где $P(t,s) = \{p_{ij}(t,s)\}$-комплекснозначная $n \times n$-матрица, имеющая при каждом t из R^1 ограниченную на R^1 вариацию и удовлетворяющая условиям:

1) $\lim\limits_{h\to 0} \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} [p_{ij}(t+h,s) - p_{ij}(t,s)] = 0$, $t \in R^1$, $i,j = 1,2,...,n$,

2) $\sup\limits_t \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} p_{ij}(t,s) < \infty$, $i,j = 1,2,...,n$,

3) $P(t+\omega, s+\omega) = P(t,s)$.

Для оператора $\widetilde{P}$ определим функцию $P(\xi)$, принимающую значения в $\mathcal{L}(C^n[0,\omega], C^n[0,\omega])$, полагая $P(\xi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \xi^m \int\limits_0^{\omega} (d_s P(t, s - m\omega))x(s)$, $\xi \in S^1 = \left\{\xi \in C^1 : |\xi| = 1\right\}$. Обозначим через $\rho(P)$ множество собственных чисел функции $P(\xi)$, то есть множество таких $\xi \in S^1$, для которых оператор $I - \widetilde{P}(\xi)$ необратим.

Через X будем обозначать пространство $BC^n(R^1)$ или одно из следующих его подпространств: $BC^n_u(R^1)$, $AP^n(R^1)$ - пространства равномерно непрерывных, соответственно, почти периодических по Бору функций; $P^n(\omega) = \{x : x(t+\omega) = x(t)\}$, $C^n_0(R^1) = \left\{x : \lim\limits_{|t|\to\infty} x(t) = 0\right\}$, $aAP^n(R^1) = C^n_0(R^1) \oplus aAP^n(R^1)$, $aP^n(\omega) = C^n_0(R^1) \oplus P^n(\omega)$.

Все перечисленные пространства инвариантны относительно операторов (1). Всюду ниже $X \neq P^n(\omega)$.

Теорема 1. *Пусть множество собственных чисел $\rho(P)$ функции $P(\xi)$ не пусто и не более чем счетно. Тогда образ оператора $I - \widetilde{P}$ не замкнут ни в одном из пространств X .*

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $I - \widetilde{P}$ был обратим в X необходимо и достаточно, чтобы $\rho(P) = \emptyset$.*

Теорема 3. *Если оператор $I - \widetilde{P}$ n-нормален в одном из пространств X, то он обратим во всех пространствах X.*

Литература

1. Пуляев В.Ф. Ограниченные и почти периодические решения линейных интегральных уравнений. I-II. // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25, №10. С. 1787 - 1798. (Дифференц. уравнения. 1990. Т.26, №8. С. 1423-1432.)

О ДОПУСТИМОСТИ ПАРЫ ПРОСТРАНСТВ АСИМПТОТИЧЕСКИ ω-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО МЕРЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г. (Краснодар)
sokol@math.kubsu.ru

В работе изучаются условия допустимости пары пространств асимптотически ω-периодических по мере функций для линейного интегрального оператора

$$\left(\widetilde{K}x\right)(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds,$$

где ядро $K(t,s)$ определено всюду в области $-\infty < s \leq t < \infty$, и удовлетворяет условиям:

1. $K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s)$ $-\infty < s \leq t < \infty$;
2. При любом $t > 0$ матрица $K(t,s)$ суммируема по s на $[0,t]$ и

$$\lim_{h\to 0+}\left[\int_0^t \|K(t+h,s) - K(t,s)\|\,ds + \int_t^{t+h} \|K(t+h,s)\|\,ds\right] = 0.$$

Определение 1. *Непрерывная и ограниченная на $[0,\infty)$ функция $x(t)$ имеет нулевой предел по мере Лебега μ при $t \to \infty$, если для любого числа $\delta > 0$ выполняется условие:*

$$\mu\{t \geq T : \|x(t)\|_{R^n} \geq \delta\} \longrightarrow 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Используем для этого предела обозначение $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) \stackrel{\mu}{=} 0$, а для пространства таких функций — $\widetilde{C}_0$.

Определение 2. *Непрерывная на $[0,\infty)$ функция $x(t)$ называется асимптотически ω - периодической по мере, если $x(t) = z(t) + y(t)$, где $z(t+\omega) = z(t)$, $y(t) \in \breve{\mathbf{C}}_0$.*

Пространство всех таких функций обозначим через $\widetilde{\mathbf{AP}}_\omega$.

Теорема. *Для допустимости пары $\left(\widetilde{\mathbf{AP}}_\omega, \widetilde{\mathbf{AP}}_\omega\right)$ относительно оператора $\widetilde{K}$ необходимо, чтобы*

$$1)\ \sup_{t\geq 0}\int_0^t \|K(t,s)\|\,ds < \infty,$$

$$2)\ \text{функции } \varphi_k(t) = \int_{-\infty}^{0} K(t,s)\exp\left(i\frac{2k\pi}{\omega}s\right)ds \qquad k = 0,1,\ldots,\ i = \sqrt{-1} \text{ не-}$$

прерывны на $[0,\infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_k(t) \overset{\mu}{=} 0$,

$$3)\ \lim_{t\to\infty}\int_0^\omega K(t,s)s\,ds \overset{\mu}{=} 0.$$

Обратно, если выполнены указанные условия, и:

4) для любого замкнутого множества $F \subset [0,\infty)$ конечной меры и любого $\delta > 0$ существует такое T_0, зависящее от F и δ, что

$$\mu\left\{t \geq T_0 : \int_{F\cap[T_0,t]} \|K(t,s)\|\,ds \geq \delta\right\} < \infty,$$

то пара $\left(\widetilde{\mathbf{AP}}_\omega, \widetilde{\mathbf{AP}}_\omega\right)$ допустима для оператора $\widetilde{K}$.

Показано так же, что допустимость пары $\left(\widetilde{\mathbf{AP}}_\omega, \widetilde{\mathbf{AP}}_\omega\right)$ для оператора $\widetilde{K}$ влечет за собой допустимость для этого же оператора и пары $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_0, \widetilde{\mathbf{C}}_0\right)$.

Литература

1. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. X, №6. С. 1103 - 1110.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Раецкая Е.В (Воронеж)

В данной работе рассматривается задача в банаховом пространстве E:

$$\begin{cases} A\frac{dx(t,\epsilon)}{dt} = (B+\epsilon C)x(t,\epsilon) \\ x(0,\epsilon) = x^0 \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке фонда Крейна С.Г.

где оператор A является замкнутым, линейным с плотной в E областью определения. Операторы B и C линейные, ограниченные, действующие из E в E, ϵ– малый параметр ($\epsilon > 0$) и $t \in [0; \infty)$.

Предполагается, что оператор A имеет число 0 нормальным собственным числом и одномерное ядро.

Известно, что необходимым и достаточным условием существования некоторого подпространства M_1, в котором существует и единственно решение задачи (1), является существование оператора $(A + \mu(B + \epsilon C))^{-1}$ при достаточно малых $\mu \in (0, \mu_0)$. В работе находятся условия существования этого оператора.

Для исследования поведения решения $x = x(t, \epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ находится уравнение ветвления исходного уравнения и по нему строится диаграмма Ньютона.

Находится связь между видом диаграммы Ньютона и длинами B жордановых и $(B + \epsilon C)$ жордановых цепочек оператора A.

Доказывается, что условие равенства их длин является необходимым и достаточным условием стремления решения исходного уравнения к решению предельного уравнения.

Получен вид решения в случае, когда длина B жордановой цепочки больше длины $(B + \epsilon C)$ жордановой цепочки оператора A и установлено, что в этом случае поведение решения зависит от свойств некоторого оператора K.

Литература

1. С.П. Зубова, В.П. Трофимов. О голоморфных решениях дифференциального уравнения с операторным коэффициентом при производной, зависящим от параметра. //Дифференциальные уравнения". 1985 г.Том XX1,N2,с.328-330.

2. Раецкая Е.В. О методах решения одного дифференциального уравнения в банаховом пространстве.//В сборнике" Материалы юбилейной научной конференции молодых ученых, посвященной 70-летию образования ВГЛТА".Воронеж, 2000 г.,с.71-78.

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Ратыни А.К. (Иваново)

E-mail:ratyni@icti.ivanovo.su

Приводится обобщение результатов [1] о разрешимости задачи:

$$Lu = f(x)\ (x \in D),\ u(x) - u(\sigma x) = \psi(x)\ (x \in S), \qquad (A)$$

где D – ограниченная область R^n с границей S, L – эллиптический в $\bar{D} = D \cup S$ оператор второго порядка, σ – однозначное отображение $\bar{D}$ в $\bar{D}$.

В [1] изучался случай, когда $\omega \equiv \sigma S \cap S \neq \emptyset$ и $\sigma\omega \subseteq \omega$. Здесь же задача (A) рассматривается в предположении, что не пусто порождаемое σ на S поглощающее множество

$$\Omega \equiv \{x \in S : \sigma^k x \in S,\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

Сформулируем основное утверждение, используя для функциональных пространств обозначения [1].

Теорема. *Пусть выполнены условия (L) и (B) из [1] с заменой в условии (B) ω на Ω. Пусть существуют функция $v(x)$ и положительные числа a, ν, δ, d_1, d_2, такие, что:*

$v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$; $a < 1$;

$d_1 \rho^{\mu\gamma/2}(x, \Omega) \le v(x) \le d_2 \rho^{\mu\gamma/2}(x, \Omega)$, $x \in S$;

$v(\sigma x) \le v(x)$, $x \in S \setminus \Omega_\delta$; $v(\sigma x) \le a v(x)$, $x \in \Omega_\delta$;

$v(x) > 0$ и $(Lv)(x) \le -1$, $x \in D$ (здесь $\rho(x, \Omega)$-расстояние от x до Ω, $\Omega_\delta \equiv \{x \in S : \rho(x, \Omega) < \delta\}$).

Тогда при $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ множество решений из $C^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$ задачи (A) *эквивалентно множеству решений из $C^\mu(\Omega)$ уравнения*

$$\eta(x) - \eta(\sigma x) = \psi(x), \ (x \in \Omega).$$

Литература

1. Ратыни А.К. //Известия вузов.Математика.-2000.-N 4.-с.36-40.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Рачинский Д.И. [1] **(Москва)**

rach@iitp.ru

Решения систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями Ишлинского, Прейсаха, их векторными аналогами и др., как правило, рассматриваются в произведении фазового пространства R^N системы и бесконечномерного пространства Ω состояний нелинейности. При изучении различных периодических задач оказалось возможным использование пространства R^k значений выходов нелинейности вместо Ω. Переход к пространству R^k основан на построении оператора, сопоставляющего каждому периодическому входу $u(t)$ гистерезисной нелинейности единственный периодический выход $x(t)$ с заданным средним значением $\bar{x}$. Такой переход приводит к уравнениям со скалярным или векторным параметром (роль параметра играет величина $\bar{x}$) и позволяет изучить естественные континуумы решений периодических задач. Приведем один результат, близкий по формулировке к теоремам о бифуркации Хопфа для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$z' = F(z, x(t)), \qquad z \in \mathrm{R}^N. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — выход гистерезисной нелинейности Прейсаха, входом которой служит проекция $u(t) = (e, z(t))$ вектор-функции $z(t)$ на единичный вектор $e \in \mathrm{R}^N$. Функции $u(t)$ и $x(t)$ скалярны.

Пусть равенство $F(z, x) = 0$ определяет гладкую кривую $\{z_*(s), x_*(s)\}$ в пространстве R^{N+1}, состоящую из положений равновесия системы (1). Функция $F(z, x)$ предполагается гладкой. Пусть при $s = s_0$ спектр матрицы $A(s) = F'_z(z_*(s), x_*(s))$ содержит пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$

[1] Автор поддержан грантами РФФИ №№ 01-01-00146, 00-01-00571 и 00-15-96116.

$(w_0 > 0)$ и не содержит точек $iw_0 n$ при целых $n \neq \pm 1$. Из соображений непрерывности у матрицы $A(s)$ есть единственная пара близких к $\pm iw_0$ собственных значений $\sigma(s) \pm iw(s)$ при s близких к s_0.

Теорема. *Пусть $\sigma'(s_0) \neq 0$. Тогда у системы (1) в малой окрестности положения равновесия $\{z_*(s_0), x_*(s_0)\}$ есть однопараметрический континуум циклов $\{z_r(t), x_r(t)\}$ с периодами T_r, где $0 < r < r_0$. Эти циклы различны при различных r. При $r \to 0$ верны соотношения*

$$\|z_r(t) - z_*(s_0)\|_C \to 0, \quad \|x_r(t) - x_*(s_0)\|_C \to 0, \quad T_r \to 2\pi/w_0.$$

Теорема верна при стандартных предположениях о нелинейности Прейсаха. В условиях теоремы можно указать асимптотику циклов и их периодов, исследовать их зависимость от параметра и пр.

СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ С ЗАДАЧЕЙ РАССЕЯНИЯ

Редькина Т.В. (Ставрополь)

Операторное уравнение Лакса $L_t = [L, A]$, с операторами L, A, выбранными так, что оно определяет некоторое дифференциальное уравнение с частными производными и эквивалентно системе

$$\begin{cases} L\psi = \lambda\psi, \\ \psi_t = A\psi. \end{cases} \tag{1}$$

В общем случае операторы $L = \partial_x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(u, u_x, \ldots)\partial_x^{n-i}$, $A = \partial_x^m + \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(u, u_x, \ldots)\partial_x^{m-i}$ зависят от функции $u(x,t)$ и ее производных, определенных следующей асимптотикой:

$$u(x,t) \to 0, \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \tag{2}$$

Система (1) позволяет применять к таким уравнениям метод обратной задачи рассеяния, который заключается в возможности восстановления потенциальной функции $u(x,t)$, зная ее асимптотическое поведение и собственные вектор-функции ψ на $\pm\infty$ оператора L задачи (1).

С такой асимптотикой уравнение на собственные значения системы (1) перейдет к виду:

$$(\partial_x^n - \lambda)\psi = 0, \quad \text{при } x \to \pm\infty. \tag{3}$$

Теорема. Интегральное уравнение

$$\psi(x) = \mu \int\limits_0^{1-\alpha_i(1-x)} \psi(\tau)d\tau, \quad (\text{где } \alpha_i \text{ — корень уравнения } \alpha^n = 1) \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению на собственные значения (3), при n — четном и α_i, являющимся, дополнительно, корнем уравнения $\alpha^{n/2} = 1$, описывает задачу для дискретного спектра $\mu^n = \lambda$, а при условии, что α_i — не является корнем уравнения $\alpha^{n/2} = 1$, задача рассеяния рассматривается для непрерывного спектра $\mu^n = -\lambda$, $\lambda > 0$; при n — нечетном $\mu^n = \lambda$, $\lambda > 0$.

Доказательство проводится непосредственным дифференцированием левой и правой части равенства (4)

$$\partial_x^n \psi(x) = \mu^n \alpha_i^{\frac{n(n+1)}{2}} \psi \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \alpha_i^k + \alpha_i^n x \right).$$

Выражение соответственно упрощается: при $n = 2l$, $\alpha_i^{\frac{n(n-1)}{2}} = \alpha_i^l = = \begin{cases} -1, & \text{если } \alpha_i \text{ не является корнем уравнения } \alpha^{n/2} = 1, \\ 1, & \text{если } \alpha_i \text{ является корнем уравнения } \alpha^{n/2} = 1, \end{cases}$ при $n = 2l + 1$, $\alpha_i^{\frac{n(n-1)}{2}} = \alpha_i^{(2l+1)(l+1)} = 1$. Сумма $1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \alpha_i^k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \alpha_i^k + \alpha_i^n = 0$.

ОЦЕНКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА[1]

Рекубратский С. (Москва)

sergei.rekubratsky@mtu-net.ru

Рассматривается уравнение:

$$y^{(n)} = (-1)^n x^\lambda |y|^k \mathrm{sign} y, \tag{1}$$

где $n \geq 2, \lambda > 0, k > 1$.

Приводятся оценки нетривиальных решений уравнения (1), определенных на бесконечности и удовлетворяющих условиям:

$$(-1)^i y^{(i)}(x) \geq 0, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Теорема. *Любое решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), определенное на $(0, +\infty)$ и непродолжаемое за этот интервал, допускает оценки*

$$C_1 x^{-\alpha} \leq y(x) \leq C_2 x^{-\alpha}, \tag{3}$$

где $\alpha = \frac{\lambda+n}{k-1}$, а C_1 и C_2 — некоторые положительные константы, зависящие только от n, λ, k.

При доказательстве используется следующая лемма (см. [1]). Лемма. *Пусть непрерывная, не обращающаяся в 0 функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству $|p(x)| \geq p_0 x^{-r}$, где $r > 0$, $p_0 = const > 0$. Тогда любое положительное решение $y(x)$ уравнения*

$$y^{(n)} + p(x)|y|^k \mathrm{sign} y = 0,$$

[1]Работа выполнена в рамках научной программы 015 Министерства образования РФ "Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России", код проекта /НИР 015.04.01.22

, *определенное на* $(0, +\infty)$, *удовлетворяет неравенству*

$$y(x) \leq C_{n,k} p_0^{-\frac{1}{k-1}} x^{-\frac{n-r}{k-1}}.$$

В частности, если $r < n$, *то* $y(x) \to 0$, *при* $x \to \infty$

Также используется следующее интегральное представление решений уравнения (1):

$$y(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{t^\lambda |y(t)|^k (t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

Литература

1. Асташова И.В. О качественных свойствах решений типа Эмдена–Фаулера. УМН. 1996, т.51, вып.5, с.185.
2. V.A. Kozlov. On Knezer Solution of Higher Order Ordinary Differential Equation. - Preprint. Department of Mathematics Linköping University S-581 83 Linköping, Swiden.

О НЕКОТОРЫХ ОРБИТАХ СОБСТВЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Романовский Ю.Я. (Минск)

В "Эрлангенской программе" [4] Ф.Клейн впервые высказал мысль о том, что геометрические теории можно получать, взяв некоторое множество X и задав на нем действие некоторой группы G. Изучение геометрии в данном случае сводится к изучению инвариантных подмножеств и их инвариантных свойств, сохраняющихся при данном действии.

В данной работе дается геометрическая интерпритация некоторых орбит G-пространства: $X = \left\{ x = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} | A, B, C \in Mat(2, \mathbf{C}) \right\}$ на котором действует собственная группа Пуанкаре [1] $G = He(2) * SL(2, \mathbf{C})$, где $He(2)$ - векторное пространство эрмитовых матриц второго порядка, а $SL(2, \mathbf{C})$ — группа комплексных матриц второго порядка с определителем равным 1. При этом группа G может быть представлена в следующем матричном виде:

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} \Phi(a) & 0 \\ z \cdot \Phi(a) & a \end{pmatrix} | z \in He(2), a \in SL(2, \mathbf{C}) \right\}, \text{ где}$$

$$\Phi : SL(2, \mathbf{C}) \to SL(2, \mathbf{C}), a \to (\overline{a}^T)^{-1};$$

Теорема. *Орбитой матрицы* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, *где* $C = \left(\overline{A}^T\right)^{-1}$, $B \cdot \overline{A}^{-1} \in He(2)$ *изоморфна: 1) ориентированному пространству Лоренца тогда и только тогда, когда* $A = E_2$; *2) пространству пар ортогональных фигур* (K_1, L_1) *в ориентированном пространстве Лоренца, где* K_1 *— двумерная евклидова плоскость,* L_1 *- множество пространственноподобных отрицательно ориентированных векторов, двумерной плоскости индекса 1, трансверсальных к* K_1, *тогда и только тогда, когда матрица* A *имеет собственные значения* $\lambda_1 = 1$ *и* $\lambda_2 = -1$; *3) пространству пар ортогональных фигур*

(K_2, L_2) *в ориентированном пространстве Лоренца, где* K_2 — *пространственноподобная положительно ориентированная прямая,* L_2 — *множество времениподобных векторов гиперплоскости индекса 1, направленных в будущее, трансверсально к* K_2, *тогда и только тогда, когда для матрицы* $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *матрица* $A\varepsilon_1$ — *косоэрмитова и* $\det(A) = 1$; *4) пространству пар трансфенсальных фигур* (K_3, L_3) *в ориентированном пространстве Лоренца, где* K_3 — *евклидова гиперплоскость,* L_3 — *времениподобная прямая, тогда и только тогда, когда матрица* A *может быть представлена в виде* $D \cdot \overline{D}$, *где* $D \in SL(2, \mathbf{C})$.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.: Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, – М.: Наука,1969. – 424.

2. Ведерников В.И., Ведерников С.В. Геометрия однородных пространств, порождённая морфизмами G-пространств // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – 1987. – Т.19. – с.155-185.

3. Ведерников С.В. Специальные морфизмы G-пространств // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – 1975. – Т.7. – с.49-68.

4. Klein F. Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen // Math. Ann. – 1893. – s. 43-72.

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА РАСЧЕТА УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ ПО КАФЕДРАМ[1]

Ромащенко А.Г. (Воронеж)

При расчете штатного расписания кафедры высшего учебного заведения, а также при формировании индивидуальных учебных поручений сотрудникам, за основу берется общий объем учебных поручений сотрудников кафедры, который, в свою очередь, рассчитывается на основе учебного плана специальности. Учебный план определяет плановые объемы учебных поручений по семестрам для каждой дисциплины (чтение лекций, проведение практических и лабораторных работ, руководство курсовыми и дипломными работами, проведение консультаций, прием зачетов и экзаменов). Выдержка из учебного плана специальности, включающая дисциплины кафедры, служит исходной информацией для расчета общей учебной нагрузки кафедры. Она представляет собой таблицу, в каждой ячейке которой хранится следующая информация: название дисциплины, недельный объем занятий (лекционных и практических по отдельности) и форма отчетности (зачет, экзамен).

Вторая часть информации, необходимая для расчета учебной нагрузки кафедры, поступает из деканата. Она содержит сведения о количестве потоков (для расчета лекционной нагрузки), групп (для расчета объема практических занятий), подгрупп (для расчета часов лабораторных занятий), количества студентов в группах (для расчета количества часов, необходимых для проведения экзамена и зачета).

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке деканата факультета прикладной математики и механики.

Все эти сведения заносятся в таблицу и после преобразований получают сводную таблицу учебных поручений кафедры.

Для расчета учебной нагрузки по кафедрам составлена информационная система, реализованная в среде визуального программирования Delphi4, с использованием СУБД Paradox 7.0 . Программа, реализует необходимые расчеты для составления сводной таблицы учебных поручений. Она работает в режиме диалога, предоставляет пользователю удобный интерфейс для создания расписания учебной нагрузки и исправления уже существующей, позволяет получить сводную таблицу учебных поручений кафедры в формате MS Excel и вывод её на печать.

АДАПЬАЦИЯ ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ К СПЕЦИФИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ В ВОРОНЕЖСКОМ УВК № 2

Рубанова Н.П., Петраченкова Ж.В. (Воронеж)

Происходящие кардинальные изменения в социально-экономическом устройстве России затрагивают и школу, которая в изменяющихся условиях так же вынуждена меняться, чтобы быть способной удовлетворять новым требованиям со стороны общества и государства, как в ближайшее время, так и в отдаленной перспективе.

Структура Воронежского учебно-воспитательного комплекса №"2 (ВУВК №2), включающая:

– школу раннего обучения с 4-х и 7-и лет;

– естественно-математическую школу (5 - 9 классы);

– общеобразовательную школу (5 - 9 классы);

– лицей (10 - 11 классы);

– школу одаренных детей,

позволяет предоставить необходимые условия каждому ребенку для развития природных задатков, полной реализации индивидуальных способностей, но в то же время требует изменений программ и методик для каждого подразделения.

Рассмотрим сквозную программу по математике. В ее основе лежит общегосударственная базовая общеобразовательная программа, которая на каждом этапе обогащена как по "вертикали", так и по "горизонтали".

В 3-м классе расширяются темы: "Задачи на движение", "Уравнения", "Решение логических задач", что позволяет в 5-м классе успешно решать подобные задачи повышенной сложности. Курс "Математика" завершается в 6-м классе в декабре, освободившийся резерв времени используется для решения арифметических задач повышенной сложности, преобразованию алгебраических выражений и пропедевтическому изучению первых тем геометрии.

В 7 -8 классах серьезно расширяются темы: "Модуль числа", "Уравнения с параметрами", "Решение уравнений методом введения новой переменной", что в перспективе позволяет при наличии 6 часов математики в неделю выйти на изучение отдельных тем углубленного курса математики.

В 10 -11 классах программа адаптируется конкретно к профилю класса, например, в экономическом классе это базовые знания по математике в решении задач экономического содержания.

ОБ n-КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ n-ГО ПОРЯДКА[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

Rykhlov@cpk.sgu.ru

Рассмотрим пучок $L(y)$ обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка, порожденный дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами на отрезке $[0,1]$

$$l(y,\lambda) = y^{(n)}(x) + \lambda p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda^{n-1} p_{n-1} y'(x) + \lambda^n p_n(x) y(x),$$

где $p_j \in \mathbf{C}$, и краевыми условиями

$$U_\nu(y) := y^{(k_\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \quad U_n(y) := y^{(k_n)}(1) = 0,$$

где k_j — целые положительные числа, такие, что $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1} \le n-1$, $0 \le k_n \le n-1$. Обозначим $k_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$.

Предположим, что корни ω_j, $j = \overline{1,n}$ характеристического многочлена $\omega^n + p_1\omega^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$. Система $y_j(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, при $\lambda \ne 0$ является фундаментальной системой решения уравнения $l(y,\lambda) = 0$.

Обозначим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \Delta(\lambda) = 0\}$, где $\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(y_k)\right)_{\nu,k=1}^n$ – характеристический определитель. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть ненулевые собственные значения пучка $L(\lambda)$. Предположим, что отличные от нуля корни уравнения $\Delta(\lambda)$ простые и образуют счетное множество.

Обозначим через $g(x,\lambda)$ функцию, которая получается из Δ/λ^{k_0} в результате замены последней строки на $(y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda))$. Очевидно,

$$g(x,\lambda) = a_1 e^{\lambda\omega_1 x} + a_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \ldots + a_n e^{\lambda\omega_n x},$$

где $a_j \in \mathbf{C}$ и являются вполне конкретными числами, определяемыми параметрами пучка $L(\lambda)$. Система функций $Y = \{g(x,\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\setminus\{0\}\}$ есть система собственных функций пучка $L(\lambda)$, соответствующая ненулевым собственным значениям. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Система Y не является n-кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет бесконечный дефект относительно n-кратной полноты в этом пространстве.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

ОБ УСРЕДНЕНИИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ [1]

Рычаго М.Е. (Владимир)
E-mail **rychago@vgpu.vladimir.ru**

Пусть μ – неотрицательная, периодическая, борелевская мера на $\mathbf{R}^N$, $\int\limits_{\square} d\mu = 1$, где $\square = [0;1)^N$. Для постановки задачи усреднения введем меру μ_ε равенством $\mu_\varepsilon(A) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}A)$ для любого борелевского множества $A \subset \mathbf{R}^N$, $\varepsilon^{-1}A = \{\varepsilon^{-1}x, x \in A\}$. Пусть Ω - ограниченная липшицева область в $\mathbf{R}^N$. Рассмотрим нелинейное эллиптическое уравнение

$$- div(a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon)) + |u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon = f \quad \text{на} \quad \Omega\ , \tag{1}$$

дополненное краевым условием Дирихле: $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь $f(x) \in C(\bar{\Omega}), p > 1$, $a(x,\xi)$ – периодическая, μ-измеримая по $x \in \Omega$ и сильно монотонная по $\xi \in \mathbf{R}^N$ для μ-п.в. $x \in \Omega$ функция с подходящими условиями роста по $\xi \in \mathbf{R}^N$.

Введем пространство X_ε как замыкание множества пар $\{(u, \nabla u),\ u \in C_0^\infty(\Omega)\}$ в произведении $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon) \times L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$. Вектор $z = \nabla u$ назовем градиентом функции u. а совокупность всех первых компонент u – соболевским пространством $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ может иметь много градиентов, но это не является препятствием для определения решения задачи (1), понимаемого в смысле интегрального тождества. Существование и единственность решения задачи (1) следует из общей теории монотонных операторов.

В работе устанавливаются основные свойства сходимости решения исходной задачи к решению u^0 усредненной задачи, связанной уже с мерой Лебега:

$$u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad -\mathrm{div}\Big(a_0(\nabla u^0)\Big) + |u^0|^{p-2}u^0 = f, \tag{2}$$

где $a_0(\xi)$ – усредненный оператор, определенный с помощью вспомогательной периодической задачи на ячейке периодичности. Мы применяем технику усреднения, разработанную В.В.Жиковым, опираясь при этом на одно свойство меры μ, именно, *свойство p-связности*, которое означает, что $u \equiv const$ μ-п.в., как только $\exists u_n \in C_{per}^\infty(\square) : \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\square} |u_n - u|^p d\mu = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\square} |\nabla u_n|^p d\mu = 0$.

Теорема усреднения. *Пусть мера μ является p-связной, u^ε – решение исходной задачи* (1), *u^0 - решение усредненной задачи* (2). *Тогда*

(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \varphi d\mu_\varepsilon = \int\limits_{\Omega} a_0(\nabla u^0) \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^N$;

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \varphi u^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int\limits_{\Omega} \varphi u^0\ dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$;

(iii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} |u^\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int\limits_{\Omega} |u^0|^p dx$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №99-01-00072).

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К.Б., Идрисов Р.Г. (Стерлитамак)
sspi@soros.bashedu.ru

Рассмотрим систему

$$LU \equiv K(y)U_{xx} + U_{yy} + A(x,y)U_x + B(x,y)U_y + C(x,y)U = 0, \qquad (1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$ – заданные числовые функции, $C(x,y) = (C_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,n}$ – квадратная матрица, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $n \geq 2$, в области D, ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(a_1, 0)$ и $A_2(a_2, 0)$, $a_1 < a_2$, характеристиками A_1C_1, C_1E, EC_2, C_2A_2 системы (1) при $y < 0$, где $E(e, 0)$, $a_1 < e < a_2$, $C_1(\frac{a_1+e}{2}, y_{c_1})$, $y_{c_1} < 0$ и $C_2(\frac{a_2+e}{2}, y_{c_2})$, $y_{c_2} < 0$. Обозначим через $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0 \wedge x < e\}$ и $D_2 = D \cap \{y < 0 \wedge x > e\}$.

Для системы (1) в области D рассмотрим задачу Геллерстедта (задачу G).

Задача G. Найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям: $U(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_+ \cup D_1 \cup D_2)$; $LU(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in D_+ \cup D_1 \cup D_2$; $U(x,y) = \Phi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\Gamma}$; $U(x,y) = \Psi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{A_1C_1} \cup \overline{A_2C_2}$, где Φ, Ψ – заданные достаточно гладкие вектор – функции, причем $\Phi(A_1) = \Psi(A_1)$ и $\Phi(A_2) = \Psi(A_2)$.

На основании принципа максимума [1,2] альтернирующим методом типа Шварца доказывается однозначная обобщенная разрешимость задачи Геллерстедта для системы (1), когда $K(y) = \mathrm{sgn} y \cdot |y|^m$, $m = const \geq 0$, без каких либо ограничений геометрического характера на эллиптическую границу области, за исключением случаев касания к оси $y = 0$ и осцилляции.

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Экстремальные свойства модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа. // Докл. АН СССР. – 1990. – Т.310. – №1. – С.33-36.

2. *Идрисов Р.Г.* О задаче Геллерстедта для одной системы уравнений смешанного типа / Труды междунар. конф. "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы". ИМ УНЦ РАН, Уфа, 2000. С. 100-104.

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. (г. Стерлитамак)
sspi@soros.bashedu.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \mathrm{sgn}\, y \cdot u_{yy} + \frac{2q}{x}u_x + \lambda u = 0, \qquad (1)$$

при $\lambda \in C$, $q < 0$, в области D, ограниченной в полуплоскости $y < 0$ характеристиками AC $(x + y = 0)$ и BC $(x - y = 1)$ уравнения (1); в полуплоскости $y > 0$ отрезком AK оси y, $K = (0, 1)$ и четвертью единичной окружности $\Gamma_0 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Обозначим $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Для уравнения (1) поставим спектральную задачу Трикоми (задачу T_λ): найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им решения $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+), \quad u\Big|_{\overline{AC \cup AK \cup \Gamma_0}} = 0.$$

В работе [1] было доказано, что при $q < 0$ любое комплексное число $\lambda \neq 0$ является собственным значением задачи Дарбу для уравнения (1) с данными $u = 0$ на AC и $u_y = 0$ на AB. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$u(x, y) = [\lambda(x^2 - y^2)]^{-q/2} J_{-q}(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}), \quad \lambda \in C. \tag{2}$$

Для построения системы собственных значений и собственных функций задачи T_λ воспользуемся системой (2). Для этого в области эллиптичности D_+ найдем решение задачи Дирихле для уравнения (1) с нулевыми граничными данными на $\overline{AK \cup \Gamma_0}$ и условием, принесенным из гиперболической части

$$u(x, 0) = (\sqrt{\lambda} x)^{-q} J_{-q}(\sqrt{\lambda} x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Теорема. *Собственными значениями задачи T_λ являются корни λ_n уравнения $J_{-q}(\sqrt{\lambda}) = 0$, а соответстующие собственные функции определяются по формуле*

$$u_n(x, y) = \begin{cases} [\lambda_n(x^2 - y^2)]^{-q/2} J_{-q}(\sqrt{\lambda_n(x^2 - y^2)}), & (x, y) \in D_-, \\ (\sqrt{\lambda_n})^{-q} (x)^{1-2q} (\sqrt{x^2 + y^2})^{q-1} J_{-q}(\sqrt{\lambda_n(x^2 + y^2)}), & (x, y) \in D_+. \end{cases}$$

Литература

1. Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений // Известия вузов. Математика, № 5, 2001.

ОБ ИНДЕКСЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. (Москва)

E-mail: antonsavin@mtu-net.ru, sternine@mtu-net.ru

Классическая теория краевых задач имеет дело с эллиптическими операторами, символы которых удовлетворяют условию Атьи–Ботта [1]. Это достаточно ограничительное условие можно обойти различными способами. Например, можно рассматривать краевые задачи в соболевских *подпространствах* [2]. Альтернативный подход, который и обсуждается в данном докладе, состоит в том, чтобы рассматривать нелокальные краевые условия. Ниже следует описание таких задач.

Пусть M — $\mathbf{Z}_n$-многообразие, т.е. многообразие, край которого представляет собой дизъюнктную сумму n экземпляров некоторого замкнутого многообразия X

$$\partial M \simeq X_1 \sqcup X_2 ... \sqcup X_n, \quad X_i \simeq X. \tag{1}$$

Фиксируя диффеоморфизмы в (1), получаем изоморфизм пространств $C^\infty(\partial M) \simeq C^\infty(X, \mathbf{C}^n)$. Аналогичный изоморфизм получается для пространств функций в некоторой окрестности края. При этом, псевдодифференциальный оператор D в окрестности края переходит в диагональный матричный оператор на многообразии с краем X и для него рассматриваются классические краевые задачи (D, B) с граничными операторами B на многообразии X. Отметим, что с точки зрения первоначального оператора данная задача является *нелокальной*. Через $\mathrm{Ell}(M, n)$ обозначим группу Гротендика гомотопических классов эллиптических краевых задач.

Для задачи (D, B) определены обычные разностные конструкции

$$\chi_1(D) \in K_c(T^*M), \quad \chi_2(D, B) \in K_c(T^*((-1, 0] \times X)) \tag{2}$$

Атьи–Зингера и Атьи–Ботта, соответственно. Для определения разностной конструкции нелокальной краевой задачи необходимо "склеить" эти два элемента и соответствующие K-группы. Это построение удобно проводить в рамках в K-теории C^*-алгебр.

Именно, обозначим через $\mathcal{A}_M$ следующую подалгебру в алгебре функций на дизъюнктном объединении соответствующих пространств

$$\mathcal{A}_M = \left\{ \begin{array}{c} (u, v) \in C_0(T^*((-1, 0] \times X), \mathrm{Mat}(n, n)) \oplus C_0(T^*M) : \\ u|_{t=0} = \mathrm{diag}\left(v|_{X_1}, ... v|_{X_n}\right) \end{array} \right\}$$

(здесь $t \in (-1, 0]$ — координата на полуинтервале, и на первом пространстве функции принимают значения в алгебре $\mathrm{Mat}(n, n)$) матриц порядка n. В этой ситуации пара элементов (2) определяет разностный элемент

$$\chi(D, B) \in K_0(\mathcal{A}_M).$$

Теорема 1 *Имеет место формула индекса*

$$\mathrm{ind}(D, B) = f_! \chi(D, B),$$

где отображение прямого образа

$$f_! : K_0(\mathcal{A}_M) \longrightarrow K_0\left(\mathcal{A}_{\mathbf{R}^{2N}_n}\right) \simeq \mathbf{Z}$$

индуцировано вложением $f : M \to \mathbf{R}^{2N}_n$ многообразия M в пространство $\mathbf{R}^{2N}$ с вырезанными n непересекающимися шарами.

Рассмотренный класс задач с нелокальными условиями позволяет также вычислить индекс спектральных задач Атьи–Патоди–Зингера на $\mathbf{Z}_n$-многообразиях (теорема Мельроуза–Фрида [3]).

Литература

1. M.F. Atiyah and R. Bott. The index problem for manifolds with boundary. In Bombay Colloquium on Differential Analysis, 1964, pages 175–186, Oxford. Oxford University Press.

2. Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов, Б.-В. Шульце. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений. Матем. сб., **189**, н. 10, 1998, 145-160.

3. D. Freed and R. Melrose. A mod k index theorem. Invent. Math., **107**, No. 2, 1992, 283-299.

ПАССИВНОСТЬ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Семенова М.М. (Самара)

Рассматривается линейная сингулярно возмущенная пассивная система

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u \\ \varepsilon\dot{x_2} &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u, \\ y &= C_1 x_1 \end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, u \in R^m, y \in R^p$, матрицы A_{ij}, B_i, C_1; $i, j = 1,2$- постоянные матрицы соответствующих размерностей; и функция расхода

$$w(u,y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u,$$

где Q, S, R- постоянные матрицы соответствующих размерностей, причем Q, R - симметричные.

Алгебраические критерии диссипативности системы относительно квадратичной функции расхода в нелинейном случае рассмотрены в работе [1]. Этот подход переносится на линейные системы с малым параметром.

Литература

1. Полушин И.Г., Фрадков Л.А., Хилл Д.Д. Пассивность и пассификация нелинейных систем. Автоматика и телемеханика,2000,No 3, с. 3-36.

2. Устойчивость адаптивных систем. М.:"Мир", 1989.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Сербина Л.И. (Нальчик)

niipma@yahoo.com

При определенной схематизации кинетическая переменная $u = u(x, y)$ процесса переноса во фрактальной среде, расположенной на евклидовой плоскости точек (x, y) является решением уравнения Лаврентьева-Бицадзе [1].

$$sign\, y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, -a < y < \beta\}$, где $\beta > 0$ - прямоугольная смешанная область, соответствующая уравнению (1): гиперболическая часть $\Omega^- = \{(x,y) : 0 < x < a, -a < y < 0\}$ совпадает с квадратом; $\Omega^+ = \{(x,y) : 0 < x < a,\ 0 < y < \beta\}$ - эллиптическая часть области.

Для уравнения (1) рассматривается качественно новая задача с нелокальным условием типа условия Самарского [2].

Задача 1. Найти регулярное в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}^+) \cup C'(\Omega)$, которое удовлетворяет условиям

$$u(a, y) = \Phi_a(y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

$$u(x, -\alpha) = h_1(x), \quad u(x, \beta) = h_2(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^a u(x, y) dx = \mu, \quad -\alpha < y < \beta,$$

где $\Phi_a(y)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

В области Ω доказаны единственность и существование решения $u(x, y)$ задачи 1.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик.

Литература

1. Полубаринова-Кочина, Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. С. 414.

2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. С. 304.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Синицын В.В. (Москва)

falconer@mail.ru

Работа посвящена поиску оптимальных режимов в математической модели описывающей динамику распределения ресурсов в процессе роста колонии микроорганизмов. Критерием оптимальности является максимизация биомассы клеток в заданный момент времени.

Задача оптимального управления, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega_1 u(t) \varphi(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = \omega_2 (1 - u(t)) \varphi(x_1(t), x_2(t)), \\ x_1(0) = x_{10} > 0, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ x_1(T), x_2(T) - \text{свободны}, \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \\ \varphi(x_1, x_2) \to \max\limits_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2),$$
$$\omega_1, \omega_2 > 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 1,$$
$$t \in [0, T].$$

Здесь $T > 0$ - заданный фиксированный момент времени, $u(\cdot)$ - кусочно-непрерывная функция со значениями из компакта $U = [0, 1]$. Таким образом, необходимо решить задачу оптимального управления типа Майера с терминальным функционалом. Для задачи (1) справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *В задаче (1) существует оптимальное управление в классе измеримых функций.*

Теорема 2. *В задаче (1) оптимальное управление реализуется кусочно-непрерывной функцией, имеющей следующий вид:*

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} \begin{cases} 0, & t \le T^*, \\ \omega_2, & t > T^*, \end{cases} & x_{10} > x_{20}, \\ \begin{cases} 1, & t \le T^*, \\ \omega_2, & t > T^*, \end{cases} & x_{10} \le x_{20}. \end{cases}$$

Или в форме обратной связи.

$$u_{opt}(x_1(t), x_2(t)) = \begin{cases} 0, & x_1(t) > x_2(t), \\ \omega_2, & x_1(t) = x_2(t), \\ 1, & x_1(t) < x_2(t), \end{cases}$$

где $T^* = \max\left\{\frac{1}{\omega_1}\ln\frac{x_{20}}{x_{10}}, \frac{1}{\omega_2}\ln\frac{x_{10}}{x_{20}}\right\}$.

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Слугин С.Н., Кротов Н.В. (Нижний Новгород)

slughin@vmk.unn.ac.ru

Частично упорядоченные B-пространства X, Y с изотонными нормами: если $\pm x \le z$, то $\|x\| \le \|z\|$. Нелинейная операция F отображает X в Y. Уравнение $F(x) = 0$ допускает применение сходящегося модифицированного метода касательных: $\Gamma(z_{n-1} - z_n) = F(z_{n-1})$. Введены последовательности линейных подпространств $X_{n-1} \subset X_n \subset X$, $Y_{n-1} \subset Y_n \subset Y$; линейных обратимых операторов $\Gamma_n(X_n) = Y_n$; номеров $m(n-1) \le m(n)$; элементов $y_n \in Y_{m(n)}$. Линейные уравнения метода касательных заменяются на каждом шагу процесса на уравнения

$$\Gamma_{m(n)}(x_{n-1} - x_n) = y_n.$$

Устанавливаются условия, достаточные для существования и единственности решения x^* уравнения $F(x) = 0$ и для существования таких $m(n)$ и y_n, что $\|x_n - x^*\| \le \alpha_n \to 0$. В частности, требуется плотность объединения $\bigcup\limits_n Y_n$ в B-пространстве Y и сходимость норм (в B-пространствах $X_n \to X$ линейных ограниченных операторов): $\|\Gamma_n - \Gamma\| \to 0$. Данный комбинированный метод применен к поиску приближенного решения задачи Коши:

$$x''_{st} = f(s, t, x, p, q) \quad (p = x'_s,\ q = x'_t),$$

$x(s, 0) = \varphi(s)$, $x(0, t) = \psi(t)$, $(\varphi(0) = \psi(0))$, $p(s, 0) = \varphi_1(s)$, $q(0, t) = \psi_1(t)$. Требования к функциям f, φ, ψ, φ_1, ψ_1 – обычные.

На множестве функций, удовлетворяющих однородным условиям Коши, выбирается линейный дифференциальный оператор вида $x''_{st} - ap - bq - cx$, где переменные коэффициенты a, b, c аппроксимируют в достаточно большой области первые частные производные функции f по p, q, x и удовлетворяют такому соотношению, что соответствующее линейное уравнение допускает каскадное интегрирование. Полученное линейное интегральное уравнение приближенно заменяется на линейную алгебраическую систему порядка $m(n)$ с треугольной матрицей. Устанавливаются достаточные условия сходимости метода к обобщенному решению исходной задачи.

Аналогично применяется метод и в том случае, когда условия Коши заданы на графике строго убывающей функции.

Кроме того, метод можно применять к некоторым классам краевых и начально-краевых задач для квазилинейных уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Стернин Б.Ю. (Москва)

E-mail: sternine@mtu-net.ru

В докладе дается обзор недавних результатов по эллиптической теории, полученных автором совместно с В.Е. Назайкинским, А.Ю.Савиным и Б.-В. Шульце.

1. ПДО на многообразиях с особенностями. Множество псевдодифференциальных операторов (ПДО) на многообразиях с особенностями строятся как естественные расширения структурных колец дифференциальных операторов, определяющих данную особенность. Интересным (и весьма неожиданным) фактом при этом является то, что множество ПДО, отвечающие каспидальным особенностям образуют алгебру (относительно композиции операторов), в то время как ПДО, отвечающие коническим особенностям, алгебры не образуют! Таким образом, конический случай в теории уравнений на многообразиях с особенностями является исключительным. Объяснение этого удивительного феномена, имеющего место уже для рациональных символов, может быть получено, например, с помощью некоммутативного анализа (теории функций некоммутирующих операторов Маслова).

2. Хирургия и относительный индекс. Разнообразные теоремы об относительном индексе типа теорем Громова–Лаусона, Аграновича–Дынина, Телемана и др. могут рассматриваться как частные случаи *общего принципа локальности*, справедливого для эллиптических операторов в *пространствах с перешейком*, т.е. в некоторых специальных гильбертовых модулях. Применение этого общего принципа позволяет получить новые теоремы об индексе для ПДО и ИОФ (интегральных операторов Фурье) на многообразиях с особенностями.

3. Эллиптические операторы в подпространствах. Хорошо известно, что для некоторых эллиптических операторов не существует корректных (фредгольмовых) краевых задач. Действительно, корректность краевой задачи для эллиптического оператора эквивалентна эллиптичности некоторого ПДО на крае многообразия. Более точный анализ показывает, что соответствующий оператор на крае действует в *подпространствах* соболевских пространств, которые определяются псевдодифференциальными проекторами. Это наблюдение позволяет расширить понятие краевой задачи, рассматривая теорию краевых задач в которых правые части также находятся в подпространствах. Тогда для произвольного оператора можно указать корректную краевую задачу. В эллиптической теории в подпространствах индекс оператора не определяется его главным символом. Формула индекса является суммой инварианта Атьи–Зингера и некоторого гомотопического инварианта подпространств, в которых оператор действует. Интересно отметить, что в типичных ситуациях гомотопический инвариант подпространства совпадает с η-инвариантом Атьи–Патоди–Зингера.

4. Нелокальные краевые задачи. Имеется также альтернативный метод расширения класса краевых задач при помощи *нелокальных граничных условий*. Задачи с такими краевыми условиями можно ставить на многообразиях, край которых представляет собой конечнолистное накрытие. Простейшим примером нелокальных краевых задач являются задачи для оператора с постоянными коэффициентами на конечном цилиндре с условиями периодичности. В этом случае введение нелокальных условий позволяет ставить корректную задачу даже для операторов, не имеющих корректных классических задач. Для общих нелокальных краевых задач построен аналог разностной конструкции Атьи–Зингера, что позволяет вычислить индекс таких задач.

5. Вычисление η-инварианта. Дробная часть спектрального η-инварианта Атьи–Патоди–Зингера эллиптического самосопряженного оператора является гомотопическим инвариантом в классе дифференциальных операторов, при условии, что четность порядка оператора противоположна четности размерности многообразия. В этой ситуации η-инвариант является двоично-рациональным числом, а его удвоенная дробная часть вычисляется в топологических терминах как спаривание (определяемое двойственностью Пуанкаре в K-теории) главного символа оператора с ориентирующим пучком многообразия. В качестве приложения, решена проблема П. Гилки о нахождении геометрического оператора второго порядка с нетривиальной дробной частью η-инварианта.

О СХОДИМОСТИ МОНОТОННЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Стеценко В.Я., Павлова М.Н.

В данной работе рассматривается ускорение итерационного процесса для монотонных нелинейных операторов.

Теорема 1. Пусть в уравнении $x = F(x)$ оператор $F(x)$ монотонно возрастает, непрерывен и вполне непрерывен. Пусть существует два элемента u_0, ν_0, $u_0 \leq \nu_0$ (по конусу K, причем конус K — нормальный) и такие, что $u_0 \leq F(u_0)$, $\nu_0 \geq F(\nu_0)$. Тогда уравнение $x = F(x)$ имеет по крайней мере одно решение $x = x^*$, причем $u_0 \leq x^* \leq \nu_0$ и к x^* сходится метод последовательных приближений $x_{m+1} = F(x_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ при любых $x_0 \in \langle u_0, \nu_0 \rangle$.

Дадим оценку скорости сходимости метода итерации для нелинейных уравнений.

Теорема 2. Рассмотрим уравнение вида $x = F(x)$, где оператор $F(x)$ — монотонно возрастает и удовлетворяет условию Липшица. Пусть выполняется условие теоремы 1, причем

$$u_{k+1} = F(u_k), \ \nu_{k+1} = F(\nu_k)$$

$$u^*_{k+1} = \frac{1}{1+p_{k+1}}(u_{k+1} + p_{k+1}\nu_{k+1}) \le x^* \le$$

$$\le \frac{1}{1+q_{k+1}}(\nu_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1}) = \nu^*_{k+1}$$

Тогда $\|\nu^*_{k+1} - u^*_{k+1}\| \le q_L \left|\frac{\chi-1}{\chi+1}\right| \|\nu_k - u_k\|$, где q_L — константа Липшица, χ — константа фокусирования.

Доказательство. Рассмотрим норму разности

$$\|\nu^*_{k+1} - u^*_{k+1}\| = \left|\frac{1 - p_{k+1}q_{k+1}}{(1+p_{k+1})(1+q_{k+1})}\right| \|F(\nu_k) - F(u_k)\| \le$$

$$\le \left|\frac{1 - p_{k+1}q_{k+1}}{(1+p_{k+1})(1+q_{k+1})}\right| q_L \|\nu_k - u_k\|$$

Оценим $\frac{1-p_{k+1}q_{k+1}}{(1+p_{k+1})(1+q_{k+1})}$. На основании [2] данное выражение меньше либо равно $\frac{\chi-1}{\chi+1}$. Тогда $\|\nu^*_{k+1} - u^*_{k+1}\| \le q_L \left|\frac{\chi-1}{\chi+1}\right| \|\nu_k - u_k\|$. Теорема доказана.

При условии $q_L \left|\frac{\chi-1}{\chi+1}\right| \le 1$ итерационный процесс будет сходиться. Следовательно константа Липшица $q_L < \left|\frac{\chi+1}{\chi-1}\right|$.

Литература

1. Я. Стеценко. Об В.одном методе ускорения сходимости итерационных процессов. Докл. АН СССР, 1968, 178, № 5, 1021-1024.

2. М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. Позитивные линейные системы. - М.: Наука, 1985, 256 с.

ТРЕТЬЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Строева Л.Н. (Воронеж)

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка в частных производ- ных со случайными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $t \in T \subset R$, $x \in R$, $u : T \times R \to R$ - неизвестная функция, $\varepsilon : T \to R$, $f : T \times R \to R$ - случайные процессы, независимые со случайным процессом $u_0 : R \to R$. Предполагается, что ε, f заданы характеристическим функционалом [1] L_1 - пространство суммируемых функций.

Теорема. *Пусть $v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times R)$ и существуют вариационные производные*

$$\frac{\delta\varphi(v,w)}{\delta v(t)}, \frac{\delta\varphi(v,w)}{\delta w(t,x)}, \frac{\delta^2\varphi(v,w)}{\delta w(s_j,x_j)\delta w(s_i,x_i)},$$

$$\frac{\delta^3\varphi(v,w)}{\delta v(t)\delta w(s_j,x_j)\delta w(s_i,x_i)}, i,j=1,2,3; i \neq j,$$

$$\frac{\delta^4\varphi(v,w)}{\delta v(t)\delta w(s,x)\delta w(s_2,x_2)\delta w(s_3,x_3)},$$

тогда обобщенная третья моментная функция, симметричная по переменным (t,x_1), (t_2,x_2) и (t_3,x_3), решения задачи (1)-(2) находится по формуле

$$M(u(t,x_1)u(t_2,x_2)u(t_3,x_3)) =$$

$$M(u_0(x_1)u_0(x_2)u_0(x_3)) *^{1,2,3} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[G_{t_0t}(\xi_1)\times$$

$$\times G_{t_0t_2}(\xi_2)G_{t_0t_3}(\xi_3)\varphi(0,0)]]]-$$

$$-iM(u_0(x_1)u_0(x_2)) *^{1,2} \int_{t_0}^{t_3} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_3}[G_{t_0t}(\xi_1)\times$$

$$\times G_{t_0t_2}(\xi_2)G_{s_3t_3}(\xi_3)\frac{\delta\varphi(0,0)}{\delta w(s_3,x_3)}]]]]ds_3-$$

$$-iM(u_0(x_1)u_0(x_3)) *^{1,3} \int_{t_0}^{t_2} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_2}[G_{t_0t}(\xi_1)\times$$

$$\times G_{t_0t_3}(\xi_3)G_{s_2t_2}(\xi_2)\frac{\delta\varphi(0,0)}{\delta w(s_2,x_2)}]]]]ds_2-$$

$$-iM(u_0(x_2)u_0(x_3)) *^{2,3} \int_{t_0}^{t} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_1}[G_{t_0t_2}(\xi_2)\times$$

$$\times G_{t_0t_3}(\xi_3)G_{s_1t}(\xi_1)\frac{\delta\varphi(0,0)}{\delta w(s_1,x_1)}]]]]ds_1-$$

$$-Mu_0(x_1) *^1 \int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_3} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_2}[F_{x_3}[G_{t_0t}(\xi_1)\times$$

$$\times G_{s_2t_2}(\xi_2)G_{s_3t_3}(\xi_3)\frac{\delta^2\varphi(0,0)}{\delta w(s_2,x_2)\delta w(s_3,x_3)}]]]]]ds_2ds_3-$$

$$-Mu_0(x_2) *^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_3} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_1}[F_{x_3}[G_{t_0t_2}(\xi_2)\times$$

$$\times G_{s_1t}(\xi_1)G_{s_3t_3}(\xi_3)\frac{\delta^2\varphi(0,0)}{\delta w(s_1,x_1)\delta w(s_3,x_3)}]]]]]ds_1ds_3-$$

$$-Mu_0(x_3) *^3 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_2} F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_3}[F_{x_1}[F_{x_2}[G_{t_0t_2}(\xi_2)\times$$

$$\times G_{s_1t}(\xi_1)G_{s_2t_2}(\xi_2)\frac{\delta^2\varphi(0,0)}{\delta w(s_1,x_1)\delta w(s_2,x_2)}]]]]]ds_1ds_2+$$

$$+i\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_3} F_{\xi_1}^{-1}[F_{\xi_2}^{-1}[F_{\xi_3}^{-1}[F_{x_1}[F_{x_2}[F_{x_3}[G_{s_1t}(\xi_1)G_{s_2t_2}(\xi_2)G_{s_3t_3}(\xi_3)$$

$$\frac{\delta^3\varphi(0,0)}{\delta w(s_1,x_1)\delta w(s_2,x_2)\delta w(s_3,x_3)}]]]]]]ds_1ds_2ds_3.$$

Литература

1. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Воронеж, 2000.-368с.

ЛОКАЛЬНАЯ ε - СТАБИЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Стрыгин В.В., Поляков А.Е. (Воронеж)

pppolandr@mail.ru

Как хорошо известно, релейные управления широко используются на практике, благодаря своей простоте и эффективности. Однако их применение осложнено тем обстоятельством, что имеющиеся в них исполнительные и измерительные устройства работают с запаздыванием, что приводит к возникновению автоколебаний.Но последнее не является препятствием при решении многих конкретных задач управления.

Рассмотрим следующую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + Bu,$$

где B-матрица (n x m) коэффициентов усиления, $u \in R^m$ - управление. Предполагается, что пара $\{A, b\}$ управляема, т.е. матрица $\{B, AB, ..., A^{n-1}B\}$ имеет полный ранг n. Пусть Q множество пар гладких отображений S, F таких, что $S : R^n \to R^k, F : R^k \to R^m$, $S = (S_1, S_2, ..., S_k)^T$, тогда обратные связи $u(x)$ будем искать в виде

$$u = F(signS_1(x(t-1)), ..., signS_k(x(t-1))).$$

Определение. Будем говорить, что нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

ε - стабилизируемо, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$, целое $k > 0$ и пара $(S, F) \in Q$, такие что для любых начальных условий $\varphi(t)$: $||\varphi(0)|| < \delta$, для соответствующего решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + BF(signS_1(x(t-1)), ..., signS_k(x(t-1))),$$

$$x(t) = \varphi(t) \quad (-1 \leq t \leq 0),$$

справедливо неравенство

$$||x(t)|| < \varepsilon \quad (\forall t \in [0, \infty)).$$

Теорема 1. Пусть $B = I$ и матрица $A = f_x(0)$ имеет две группы простых собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l \in (0, L), L = \ln(2)$ и $\mu_j^+ = \alpha_j + i\beta_j, \mu_j^- =$

$\alpha_j - i\beta_j \quad (j = 1, 2, ..., \nu)\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in (0, M)$, $M = \max_{0 \le t \le \frac{\pi}{4}} \{\frac{1}{2} t \cos(t + \frac{\pi}{4})\}$, а остальные собственные значения имеют отрицательные реальные части. Тогда нулевое решение соответствующей системы ε - стабилизируемо.

Теорема 2. Пусть $1 \le m < n$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $(b_j \in R^n)$, для любого $j = 1, 2, ..., m$ векторы $b_j, Ab_j, ..., A^{n_j - 1} b_j$ линейно независимы, а $A^{n_j} b_j$ линейно выражается через $b_j, Ab_j, ..., A^{n_j - 1} b_j$. Пусть $E_j = Span\{b_j, Ab_j, ..., A^{n_j - 1} b_j\}$. И пусть $\varphi_j(\lambda) = \lambda^{n_j} + \alpha_{1j}\lambda^{n_j - 1} + ... + \alpha_{n_j}$ - характеристический многочлен оператора $A_j = A|_{E_j}$ такой, что он имеет одно положительное собственное значение $\lambda_j \in (0, \ln 2)$, а остальные собственные значения имеют отрицательную реальную часть. Тогда нулевое решение соответствующей системы ε - стабилизируемо.

Следует отметить, что все теоремы конструктивные и предоставляют алгоритм для построения управления.

Литература

1. Уткин В.И., Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления, М. "Наука",1981.

2. Фридман Л.М., Фридман Э.М., Шустин Е.И. Установившиеся режимы в автономных уравнениях с разрывом и запаздыванием. Дифференциальные уравнения.-1993,29.N 8.С. 1340-1346.

УСТОЙЧИВОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Сумин В.И., Чернов А.В. (Нижний Новгород)

E-mail v_sumin@mm.unn.ac.ru

При выводе необходимых условий оптимальности требование существования **глобального решения** (СГР) управляемой краевой задачи часто включают в определение допустимых управлений, см., напр., [1]. Вместе с тем, как указано в [1], с.45, его проверка "представляет наибольшую трудность во всякой оптимальной задаче". Поэтому интересны разнообразные условия устойчивости (по возмущению входных параметров) свойства СГР. Рассмотрим управляемую задачу Коши, родственную задачам [1]:

$$\begin{cases} x_t^{(i)\prime} + \beta^{(i)}(t, s, u^{(i)}(t)) \cdot x_s^{(i)\prime} = g^{(i)}(t, s, x), & i = \overline{1, m}, \\ x(0, s) = w(s), & s \in [a, b], \end{cases} \tag{1}$$

где функции $\beta^{(i)}(t, s, p) : [0, T] \times \mathbf{R} \times U_i \to \mathbf{R}$, $\beta_s^{(i)\prime}(t, s, p)$; $g^{(i)}(t, s, p) : [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ измеримы по t, непрерывны по $\{s, p\}$, ограничены на ограниченных множествах, $w(.)$ липшицева, $g^{(i)}$ локально липшицевы по s, p; $u \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{u \in L_\infty^m[0, T] \mid u(t) \in U_1 \times \ldots \times U_m\}$, $U_i = [u_1^{(i)}, u_2^{(i)}]$; $\beta^{(1)}(t, s, p_1) < \ldots < \beta^{(m)}(t, s, p_m)$, $p_i \in U_i$, $i = \overline{1, m}$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00979.

Пусть $\{(t,s) \mid s = y_u^{(i)}(t;\tau)\}$ – i-я характеристика (1), проходящая через точку $(0,\tau)$, $\tau \in [a,b]$; $\mathcal{D}_0$ – множество тех $u \in \mathcal{D}$, для которых: $y_u^{(i)}(\cdot;\tau) \in AC[0,T]$ $\forall \tau \in [a,b]$, $i = \overline{1,m}$, и $y_u^{(m)}(t;a) < y_u^{(1)}(t;b)$ $\forall t \in [0,T]$. Для $u \in \mathcal{D}_0$ множество

$$\Pi_u = \{(t,s) \mid y_u^{(m)}(t;a) \le s \le y_u^{(1)}(t;b), \quad t \in [0,T]\} -$$

область определенности (1). Решение (1) понимаем как решение в смысле п.в. вдоль почти каждой характеристики в Π_u. Пусть Ω - множество тех $u \in \mathcal{D}_0$, для каждого из которых существует единственное на Π_u решение x_u. Для $u \in \Omega$, $v \in \mathcal{D}$ положим

$$R(u,v) = \max_{s\in[a,b]} \int_0^T \sum_{i=1}^m \mid \beta^{(i)}(t, y_u^{(i)}(t;s), v^{(i)}(t)) - \beta^{(i)}(t, y_u^{(i)}(t;s), u^{(i)}(t)) \mid dt.$$

Теорема. $\forall u \in \Omega$ $\exists \varepsilon, C > 0$: если $v \in \mathcal{D}$, $R(u,v) < \varepsilon$, то $v \in \Omega$, $\|x_v - x_u\|_{L_\infty^m(\Pi_u \cap \Pi_v)} \le C \cdot R(u,v)$, и $x_v(t,s)$ непрерывно по s.

Литература

1. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука. 1975. - 480 с.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЦИРКУЛЯЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЯ ГЕЛЕНДЖИКСКОЙ БУХТЫ

Сухинов А.И., Цирулик Д.В. (Таганрог)
sai@tsure.ru, tsdmi@tgn.ru

В докладе рассматриваются вопросы прогнозирования экологического состояния Геленджикской бухты на основе результатов моделирования циркуляции вод.

Построенная модель описывается системой уравнений, состоящей из уравнений Навье-Стокса для горизонтальных компонент скоростей, уравнения несжимаемости и уравнения свободной поверхности. На свободной поверхности и на дне ставятся граничные условия Чези. На боковых границах задано условие прилипания.

Задача решается на основе экономичного метода расщепления по физическим процессам (перенос вдоль траекторий потоков, диффузия и адаптация полей течений). Уравнения переноса аппроксимированы явными схемами с производными ориентированными против потока. Для решения неявных аппроксимаций уравнений, описывающих диффузию, используется схема переменных направлений. Наибольшие сложности возникают при решении уравнения свободной поверхности. Здесь использован попеременно-треугольный метод. На заключительном этапе находится вертикальная компонента скорости, удовлетворяющая уравнению несжимаемости.

Результаты численного моделирования четырех существующих типов циркуляции в Геленджикской бухте качественно согласуются с реально наблюдаемыми картинами течений. На основании анализа результатов моделирования предложен прогноз экологического состояния Геленджикской бухты: в докладе показана возможность возникновения застойных, невентилируемых зон, разработаны качественные требования к строительству экологически безопасных гидротехнических сооружений, проведен сравнительный анализ экологической обстановки в зависимости от времени года.

Результаты моделирования показали, что для типичных ветров движение водной среды имеет пространственную структуру: горизонтальные компоненты вектора скорости зависят от вертикальной координаты и ряде случев меняют направления в зависимости от глубины.

ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Теняев В.В. (Рязань)

E-mail TenyaevVV@yandex.ru

Многочисленные процессы, основанные на передаче объектов какой-либо природы (например, информации), сопровождаются запаздыванием. Это запаздывание может быть обусловлено различными причинами - ограниченностью скорости распространения взаимодействия, наличием инерционности некоторых элементов и так далее. Системы с запаздыванием расмотрены в работах Мышкиса А.Д. [1], Рубаника В.П. [2], Гребенщикова Б.Г. [3] и других авторов.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, линейно зависящим от времени

$$\dot{x}(t) = A(t,\lambda)x(t) + B(t,\lambda)T_\mu x(t) + f(t, x(t), T_\mu x(t), \lambda), \tag{1}$$

где $x(t)$ - n-мерный вектор, λ - m-мерный вектор, $A(t,\lambda), B(t,\lambda)$ - непрерывные матрицы, $f(t,x,y,\lambda)$ - непрерывная n-мерная вектор-функция, μ - n-мерный вектор запаздывания, T_μ - оператор линейного сдвига. Ставится задача отыскания ненулевого решения краевой двухточечной задачи вида $x(0) = x(\omega)$. Для решения системы дифференциальных уравнений (1) найдена оценка $||x(\omega)|| \leq C||x_0||$, где x_0 - начальное значение решения, $C \geq 1$ - постоянное число. Далее, в предположении, что матрица $A(t,\lambda)$ имеет вид $A(t,\lambda) = A_1(t) + A_2(t,\lambda)$, где $A_2(t,\lambda)$ имеет порядок по λ не ниже первого, а вектор-функция $f(t,x,y,\lambda)$ представима в виде:

$$f(t,x,y,\lambda) = F_1(t,x,y,\lambda)x + F_2(t,x,y,\lambda)y, \tag{2}$$

где $F_1(t,x,y,\lambda)$ и $F_2(t,x,y,\lambda)$ - непрерывные матрицы, обозначая $H_1(t,x,y,\lambda) = A_2(t,\lambda) + F_1(t,x,y,\lambda)$ и $H_2(t,x,y,\lambda) = B(t,\lambda) + F_2(t,x,y,\lambda)$, доказана теорема о представлении решений системы (1) в виде $x(t) = (X(t,0) + \Phi(t,\mu,x_0,\lambda))x_0$, где $X(t,s)$ - фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A_1(t)x$, матрица $\Phi(t,\mu,x_0,\lambda)$ стремится к нулю, если $||x_0||$ и $||\lambda||$ стремятся к нулю одновременно.

Для системы (1) найдены достаточные условия существования ненулевого решения краевой двухточечной задачи. В доказательстве основной теоремы построен нелинейный оператор, для которого найдена неподвижная точка.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

2. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.

3. Гребенщиков Б.Г. О почти периодических решениях одной нестационарной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1999. Т.40. N3. С. 531-537.

УРОКИ-ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ В НАЧАЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Титоренко С.А. (Воронеж)

Многие проблемы средней школы в известной мере снимаются при переносе в бучении центра тяжести с памяти на мышление. В умственном развитии школьников психологи выделяют особые сенситивные периоды, когда они наиболее восприимчивы к внешним воздействиям. Один из таких периодов - младший подростковый возраст.

Гармоничному развитию мышления школьников 5-6 классов (различных его видов и качеств) может способствовать изучение начального курса геометрии. Наглядность геометрии, ее практическая значимость формируют высокую мотивацию учения и обучения. Этому способствует реализация принципа деятельного перехода, т.е. ориентация учащихся не только на усвоение знаний, но и на приобретение учебно-познавательных сил и творческого мышления школьников. В соответствии с указанным принципом и установкой на разнообразие форм деятельности в начальном курсе геометрии следует шире использовать геометрические построения и конструирование, экспериментирование с геометрическими фигурами, их преобразования, лабораторные работы и др.

Урок-лабораторная работа может проводиться в соответствии со следующим планом:

1. Вступительная беседа. Постановка проблемы исследования.
2. Инструктаж.
3. Выполнение учащимися лабораторной работы.
4. Обсуждение и обобщение полученных в ходе выполнения лабораторной работы результатов. Выводы.
5. Подведение итогов урока.

Весьма эффективно использование на таких уроках компьютера как техники. При изучении геометрического материала компьютер имеет ряд преимуществ перед другими общеизвестными средствами:

- Образное отображение информации;
- Динамический характер иллюстраций;
- Неоднократная повторяемость и управляемость действий;
- Индивидуальный подход в обучении;
- Применение не только репродуктивных, но и проблемных методов обучения и др.

В условиях компьютерного обучения урок - лабораторная работа может проводиться на базе кабинета информатики. При этом могут использоваться и иллюстративные и исследовательские и тренажерные функции компьютера. В содержание лабораторных работ целесообразно включать задание на построение геометрических фигур, их исследование, экспериментирование с геометрическими объектами, а также задание для контроля и самоконтроля.

Целью самостоятельной изобразительной работы учащихся должно быть не только овладение основными инструментами построения геометрических фигур, но и осознание основных свойств этих фигур. Целью экспериментально-исследовательской работы - выявление и осознание входит выполнение заданий основных свойств, признаков, взаимосвязи геометрических фигур и их элементов.

Ниже приводится примерная тематика компьютерных лабораторных работ по начальному курсу геометрии (5-6 классы).

1. Простейшие геометрические фигуры и их свойства.
2. Ломаная.
3. Многоугольник.
4. Окружность и круг.
5. Треугольник. Признак равенства треугольника.
6. Четырехугольник.
7. Осевая симметрия.
8. Центральная симметрия.

Литература

1. Геометрия в движении - 7. (Компьютерная рабочая тетрадь по началам планиметрии). - С -Пб ,1994. - 66 с.

2. Гузеев В.В. Обучение математике в 6 классе (с компьютерной поддержкой). Книга для учителя. - М., 1991. - 80 с.

3. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. - М., 1992. - 208 с.

УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ СИСТЕМАМИ

Ткач Л.И. (Тамбов)

Пусть Y - банахово пространство, $U \subset Y$, $\overline{U}$ - замыкание множества U, $\mathrm{co}\, U$ - выпуклая оболочка множества U, $\overline{\mathrm{co}}\, U = \overline{\mathrm{co}\, U}$, $\mathrm{ext}\, U$ - множество крайних точек множества U, $\overline{\mathrm{ext}}\, U = \mathrm{ext}\, \overline{U}$, $\Omega(Y)$ - множество всех непустых, ограниченных,замкнутых, выпуклых подмножеств пространства Y, R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$, $\mathrm{comp}[R^n]$ - множество всех непустых компактов пространства R^n. $L^n[a,b]$, $C^n[a,b]$, $D^n[a,b]$ - пространства суммируемых, непрерывных, абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to R^n$ с обычными нормами.

Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$(Lx)(t) = F(t, x, u(t)), \quad lx \in \varphi(x), \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t, x), \tag{2}$$

где линейный непрерывный оператор $L : D^n[a,b] \to L^n[a,b]$ фредгольмов, $l : D^n[a,b] \to L^n[a,b]$ линейный непрерывный вектор-функционал, отображения $F : [a,b] \times C^n[a,b] \times R^n \to R^n$ и $U : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$

удовлетворяют условиям Каратеодори, $\varphi : C^n[a,b] \to \Omega(R^n)$ многозначный вектор-функционал.

Под траекторией систем (1), (2) понимаем такую абсолютно непрерывную функцию $x : [a,b] \to R^n$, для которой существует измеримое управление $u : [a,b] \to R^n$, при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющее включению $u(t) \in U(t,x)$, что $x(\cdot)$ является решением задачи (1).

Далее, определим отображение $K : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$ равенством

$$K(t,x) = \{z \in U(t,x) : F(t,x,z) \in \overline{\mathrm{ext}}(\overline{\mathrm{co}}F(t,x,U(t,x)))\}.$$

Рассмотрим управляемую систему (1) с ограничением

$$u(t) \in K(t,x). \tag{3}$$

Пусть H, H_{ext} - множества траекторий управляемых систем (1), (2) и (1), (3). В докладе на основе результатов [1] обсуждается вопрос об условиях, при которых справедливо равенство

$$\overline{H} = \overline{H_{\mathrm{ext}}},$$

где $\overline{H}, \overline{H_{\mathrm{ext}}}$ - замыкания множеств H, H_{ext} в пространстве $C^n[a,b]$.

Литература

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т.189 №6. С.3-32.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

Травкин Р.М. (Липецк)

travkin@lipetsk.ru

Пусть A — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей над полем P, M^+ — мультипликативная абелева группа, $M = \{M^+ \cup 0\}$, $\mu : A \to M$ — гомоморфизм мультипликативных моноидов. Назовем $\mu(a)$ **модулем элемента** $a \in A$. Введем обозначения: $A^+ = \{x \in A | \mu(x) \neq 0\}$, $S = \{x \in A | \mu(x) = 1\}$. Скажем, что функция $\mu : A \to M$ определяет **нормальный модуль**, если существует гомоморфизм мультипликативных моноидов $Arg : A^+ \to S$, такой, что для любого $a \in A^+$ при некотором $p \in P$ выполнено $Arg(a) = pa$, причем $p = 1$ при $a \in S$. Значение $Arg(a)$ будем называть **аргументом элемента** a. *Модуль μ является нормальным тогда и только тогда, когда M^+ является мультипликативной подгруппой, а M — мультипликативным подмоноидом основного поля $P \subset A$, причем на M функция модуля представляет собой тождественное отображение.* Нормальность μ дает возможность ввести на A мультипликативные (псевдополярные) координаты, разлагая A^+ в прямую сумму: $A^+ = M^+ \oplus S$ ($\forall a \in A^+$ $a = \mu(a) \cdot Arg(a)$).

Пусть $P = R$ (поле действительных чисел), $M^+ \subset R \setminus 0$ — мультипликативная группа положительных чисел, $\mu(a) = \sqrt[n]{|\det a|}$, где $\det a$ — определитель линейного эндоморфизма алгебры A, задаваемого умножением на элемент a, n — размерность A. Определяемый таким образом модуль назовем стандартным и будем обозначать μ_s. Стандартный модуль обобщает конструкции квазикомплексной тригонометрии в алгебрах двойных, дуальных и комплексных чисел на случай n-мерной ассоциативной и коммутативной алгебры. *Стандартный модуль является нормальным и обладает следующими свойствами:*

а) единичная окружность S относительно μ_s образует группу (**группу углов**)*;*

б) существует $(n-1)$-мерное подпространство I алгебры A (гиперплоскость "мнимых" чисел) и аддитивно-мультипликативный гомоморфизм $\exp : A \to A^+$, *осуществляющий локальный диффеоморфизм I на образ G* (**главный сектор группы углов**)

в) (параметризация G) Группа G разлагается в прямую сумму $G = T^k \oplus R^{n-k-1}$, где R^{n-k-1} — евклидово пространство, а T^k — k-мерный тор.

г) Множество связных компонент группы углов совпадает со множеством факторклассов группы S/G.

ОБ ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Тюрин В.М. (Липецк)
E-mail: slb@stu.lipetsk.ru

Пусть X и Y — гильбертовы пространства, $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ скалярные произведения в X и соответственно в Y. Пространство $X \subset Y$ как линейное многообразие. Топология в X, порожденная нормой $\|\cdot\|_1$, сильнее соответствующей топологии в Y. Предполагается, что существует линейное многообразие $E \subset X$ плотное в X и Y, а также X плотно в Y.

Пусть $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Линейный ограниченный оператор $A_* : X \to Y$ назовем формально сопряженным (двойственным) к оператору $A : X \to Y$, если $(Ax, y)_2 = (x, A_* y)_2$, где либо $x \in E$, либо $y \in E$ (коротко: A_* есть двойственный оператор к A).

В приложениях двойственный оператор A_* часто гораздо проще найти чем сопряженный оператор A^*, при этом в исследованиях можно заменить A^* на A_*.

Рассмотрим линейный оператор $A : D(A, Y) \to Y$ с областью определения $D(A, Y) = X$ и сопряженный к нему оператор $A^* : D(A^*, Y) \to Y$. Допустим, что существует непрерывно обратимый, оператор $B : X \to Y$ такой, что область определения $D(B^*, Y)$ сопряженного оператора $B^* : D(B^*, Y) \to Y$ содержит $D(A^*, Y)$ в широком смысле. Двойственный оператор $B_* : X \to Y$ непрерывно обратим. Условия этого абзаца выражают условия регулярности оператора A.

Теорема. При сделанных предположениях для индекса фредгольмова оператора $A : X \to Y$ справедлива формула

$$\operatorname{ind}(A : X \to Y) = \dim \ker(A : X \to Y) - \dim \ker(A_* : X \to Y).$$

Полученный результат применяется при анализе конкретных операторов в некоторых функциональных пространствах.

ОБ ОДНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНСОТИ В ПРОБЛЕМЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Ускова Н.Б.

Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ – линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H. Пусть λ_1 — простое изолированное собственное значение оператора A, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $A^* f_1 = \overline{\lambda}_1 f_1$ и P_1 —проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_1\}$, $P_1 x = (x, e_1) f_1$, $x \in H$, $P_2 = I - P_1$ и $H_2 = \operatorname{Ran} P_2$.

Возмутим оператор A подчиненным ему оператором $B : D(A) \subset H \to H$ и предположим, что норма оператора B мала в пространстве операторов, подчиненных A. Пусть $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{e}_1$ — собственное значение и собственный вектор возмущенного оператора $A - B$. Тогда справедлива

Теорема. *Собственный вектор $\widetilde{e}_1$ и собственное значение $\widetilde{\lambda}_1$ могут быть получены как предел итерационного процесса:*

$\widetilde{e}_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{e}_1^{(n)}$, $\widetilde{\lambda}_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\lambda}_1^{(n)}$

$y^{(n)} = B_{22} S y^{(n-1)} - B_{11} S y^{(n-1)} - (B_{12} S y^{(n-1)}, f_1) S y^{(n-1)} + B_{21} e_1$, $n = 1, 2, \ldots$

$y^{(0)} = 0$,

$\widetilde{e}_1^{(n)} = e_1 + S y^{(n)}$,

$\widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (B_{12} S y^{(n)}, f_1)$,

$S y^{(n)} = \left((A - \lambda_1 I)|_{H_2}\right)^{-1} y^{(n-1)}$.

Приводимая итерационная последовательность получена на основе метода подобных операторов [1]. Кроме того, проводится сравнение с предложенными для решения этой задачи итерационными процессами Найера М.Т. [2], Мокейчева [3] и методом ложных возмущений Гавурина М.К. [4].

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.

2. Nair M.T. On Spectral Properties of Perturbed Operators // Proc. Amer. Mathem. Soc. – 1995. № 123. P. 1845-1851.

3. Мокейчев В.С. Собственные значения и собственные элементы линейных операторов /Казан. ун-т. – Казань, 1984. – 6с. Деп. в ВИНИТИ 07.05.84, №2898-84

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Минск: Высшая школа, 1972. 584с.

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРОВ

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Пусть Q – метризуемый компакт, X - банахово пространство, $M(Q, X)$ – пространство функций f, $f : Q \to X$, $\|f\| = \sup\limits_{q\in Q} \|f(q)\| < +\infty$, $C_{w^*}(Q, X^*) \subset$

$M(Q,X^*)$ – подпространство w^*-непрерывных функций, $C(Q,X^*) \subset C_{w^*}(Q,X^*)$ – подпространство непрерывных функций. Если L – подпространство в X, A – ограниченное множество в X, то $r_L(A)$ - относительный чебышевский радиус множества A. Для $t \in Q$ полагаем $V_n(t) = \left\{q \in Q : \rho(q,t) < \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1,2,\ldots$ и если $f \in M(Q,X)$, то $r_n(t,f) = r_L(f(V_n(t)))$, $r_L(t,f) = \inf\limits_n r_n(t,f)$. Пусть $d(f,C(Q,L)) = \inf\limits_{h \in C(Q,L)} \|f-h\|$.

Предложение. *Если $f \in M(Q,X)$, то $d(f,C(Q,L)) = \sup\limits_{t \in Q} r_L(t,f)$.*

Пусть Q_0 - множество изолированных точек Q, $P_L x = \{z \in L : \|x-z\| = \inf\limits_{y \in L} \|x-y\|\}$.

Теорема. *Пусть X сепарабельно, E - подпространство в X^*, $Z = C(Q,E)$ - подпространство существования в $C_{w^*}(Q,X^*)$, тогда:*
1) если Q_0 бесконечно, то $P_Z f$ бесконечномерно $\forall\ f \in C_{w^*}(Q,X^*)\backslash Z$,
2) если Q_0 конечно или пусто, то $\forall\ f \in C_{w^*}(Q,X^*)$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ f_0 : \|f-f_0\| < \varepsilon$, $P_Z f_0$ бесконечномерно.

Известно ([1, стр.528,теорема 1]), что существует изометрия пространства $L(X,C(Q))$ линейных ограниченных операторов $T : X \to C(Q)$ на пространство $C_{w^*}(Q,X^*)$, переводящая пространство $K(X,C(Q))$ компактных операторов на $C(Q,X^*)$. Следовательно, полученные результаты применимы, в частности, к довольно широкому классу подпространств существования $C(Q,Y^\perp) \subseteq C_{w^*}(Q,C^*(Q_1))$ изометричных пространствам компактных операторов $K(C(Q_1)/Y,\ C(Q))$ (см. [2]).

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.1 – М. Изд-во ин. лит., 1962.

2. Mach J. On the proximinality of compact operators with range in $C(S)$. Proc. Amer. Math. Soc. V.72, № 1 (1978), p. 99–105.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ДОВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ КЛАССАХ

Уфимцева Л.И. (Самара)

Повышение качества образования, возможность дальнейшего его успешного продолжения на последующих ступенях, профессиональная ориентация учащихся вот ряд проблем, решаемых в системе "школа-вуз". В настоящее время перед большинством вузов стоит проблема конкурентности с другими высшими заведениями. Это заставляет искать новые направления в довузовской подготовке учащихся и профориентационной работе. Такая проблема стоит и перед Самарской государственной экономической академией. В связи с этим в Самаре открыт Самарский экономический лицей, в ряде школ г. Самары и Самарской области открыты экономические классы. Договора, заключенные с этими школами обеспечивают взаимодействие средней школы и СГЭА на основе преемственности в обучении в первую очередь тем предметам, по которым проходят вступительные экзамены и ряду предметам, которые входят в программу обучения в СГЭА. Прежде всего это относится к обучению математики. В экономические классы учащиеся поступают после окончания 7 или 9 классов. Поэтому на первых этапах обучение математике направлено на ликвидацию пробелов в обязательных результатах, затем оно направлено на углубленное изучение математики, развитие у учащихся математических способностей.

Современная экономика требует использования математических методов. Поэтому при обучении математики в экономических классах учитывается их профессиональная ориентация.

Совместно с кафедрой высшей математики на основе школьной разработана программа по математике,в которой усилена практическая направленность обучения. К большинству тем программы конструируется экономическая модель. Так при изучении тем алгебраические дроби, прогрессии включены вопросы вычисления процента ставок в банке, определение начальных вкладов, исчисление налогов, в теме функция - функции спроса и предложений, производная функции, наибольшее и наименьшее значение функции - средние и предельные издержки, предельные характеристики, оптимальные размеры производства, нахождение оптимального выпуска продукции при заданных бюджетных ограничениях и при минимальных бюджетных затратах при заданном выпуске и др.

По окончании обучения в экономических классах СГЭА проводится единый экзамен по математике. При составлении вариантов единых вступительных экзаменов учитывается профессинальная направленность специальности , на которую поступают абитуриенты. Опыт показывает, что большинство выпускники экономических классов поступают и успешно учатся в СГЭА.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ СВОЙСТВ ВЕРНЫХ ЧИСЛОВЫХ РАВЕНСТВ

Федорова Л.Б. (Воронеж)

Умение учащихся составлять, а также решать уравнения является необходимым условием для возможности применения данного инструмента в других дисциплинах. При выполнении преобразований числовых выражений и решения простейших уравнений в начальной школе происходит обобщение знаний о числах и свойствах арифметических действий. Уравнения, с которыми встречаются младшие школьники, решаются ими, исходя из зависимости между компонентами и результатами действий. В 5-ом классе продолжается знакомство учащихся с уравнениями, в процессе решения которых используются тождественные преобразования. В пособии [2] дается определение уравнения как равенства, содержащего переменную. Определяется, что значит решить уравнение. Отрабатывается понятие "верное числовое равенство". В 6-ом классе учащимся предлагаются уже усложненные линейные уравнения, содержащие неизвестную в обеих частях равенства. Основной упор делается на тождественные преобразования с отработкой свойств действий над числами. В пособии [3] соообщаются два утверждения, что корни уравнения не изменяются если:

1) умножить обе части уравнения на одно и тоже число;

2) прибавить или вычесть одно и тоже число из левой и правой части уравнения.

Они закрепляются путем решения уравнений без обоснования, что приводит к ошибкам при их решении.

В 7-ом классе в пособии [4] вводятся понятие равносильности и два свойства уравнений, которые принимаются без доказательства. Поспешное введение словосочетания "Перенести слагаемое из одной части в другую" приводит к тому, что ученик, механически применяя этот перенос, теряет не только знаки, но и допускает более грубые ошибки.

Практика показывает, что именно эта тема является наиболее слабым звеном при изучении способов решения уравнений. В результате анализа учебно-методической литературы был найден удачный подход к решению уравнений учащимися 6-7 классов, описанный в пособии [1]. Школьникам сообщаются свойства верных числовых равенств и их практическое применение при решении уравнений.

Двухгодичный опыт преподавания по этой методике показал, что учащиеся, обосновывая свои действия, контролируют изменение знаков при переносе из одной части уравнения в другую. Более свободно и осмысленно они освобождаются от дробных коэффициентов при решении уравнений. Также возникает и естественная потребность в проверке корня. Формируется культура оформления и обоснования ответа. Навыки теоретического подхода к решению уравнений на начальном этапе обучения является пропедевтикой изучения с 8-го класса теории равносильности уравнений.

Литература

[1] В.А. Гончаров "Начальная алгебра" Педагогическая библиотека учителя. Изд. АПН РСФСР, М., 1960

[2] Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд "Математика- 5" М.: Изд. "Русское слово", 1998

[3] Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд "Математика- 6" М.: Просвещение, 1994

[4] Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова "Алгебра- 7" М.: Просвещение, 1997

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Феоктистов В. В. (Москва)

Разработанный метод [1] — метод непрерывных групп для расчета преобразований координат и функций — позволяет свести уравнения движения жидкости и газа к уравнениям переменного типа. Они обобщают ряд уравнений для ранее известных задач, построенных на основе дифференциальных уравнений переменного типа (уравнение Трикоми; Кортевега - де Фриза и другие). Здесь устанавливаются две области, из которых в одной используются уравнения эллиптического типа, а в другой, например, гиперболического типа. Весьма продуктивным оказался метод, базирующийся на уравнениях со сменой направления параболичности в теории нестационарных пограничных слоёв.

В уравнении работы [1] (модельное уравнение которого имеет вид:

$$u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t(t-x)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}xu=0)$$

наличие при производной по t коэффициента, который может менять знак, приводит к развитию неустойчивости, к появлению механизмов заострения и усиления волновых структур. Особенность этого уравнения заключается в том, что наряду с классическими краевыми условиями, необходимо формировать условия на подвижной границе и условия согласования решений на линии вырождения уравнения. В соответствии с этим для дифференциального уравнения получена приближенная система

$$x^{-s}\frac{dY}{dx}=A(x)Y, \quad y\geq 1.$$

$A(x)$ - матричная функция , голоморфная для $x>x_0$, обладает асимптотическим разложением по степеням x^{-1}, когда $x\to\infty$ в S, S- сектор с вершиной в начале координат. Тогда в каждом, достаточно узком, подсекторе S система дифференциальных уравнений имеет матричное решение вида:

$$Y(x)=\exp G(x)\cdot x^Q\cdot \hat{Y}(x),$$

$G(x)$ - диагональная матрица, диагональные элементы которой являются полиномами от x, Q - постоянная матрица, $\hat{Y}(x)$ - имеет асимптотическое разложение по степеням x^{-1}. Полученная асимптотика решения задачи Коши в иррегулярной особой точке дает принципиальную возможность построить во многих случаях асимптотическое разложение решения краевой задачи с другими дополнительными условиями и доказать теоремы существования для этих задач.

Литература

1. Феоктистов В.В., Феоктистов П. В. Инвариантные решения нестационарных пограничных слоёв и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия "Машиностроение", 1997, № 1. – с. 14 - 22.

О ВТОРОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

В [1] отмечается, чем обусловлена необходимость изучения понятия предела в средней общеобразовательной школе. Здесь предлагается, как ввести в школьный курс математики второй замечательный предел, не используя при этом бином Ньютона, который не входит в нынешнюю школьную программу по математике. Это позволит разнообразить круг задач на пределы за счёт примеров на раскрытие неопределённости типа 1^∞.

Стандартное доказательство второго замечательного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

([2, с. 77-78]) состоит из следующих этапов:

1) с помощью бинома Ньютона показывается, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает;

2) устанавливается, что эта последовательность ограничена сверху;

3) применяется теорема Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности.

При обосновании 1), 2) можно использовать [3, с.84-85]: возрастание x_n показывается с помощью классического неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: для любых $a_i > 0$, $1 \le i \le n$, среди которых имеется хотя бы два различных,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i; \tag{1}$$

в силу(1)

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left[\frac{1}{n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n + 1\right)\right]^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1};$$

ограниченность x_n показывается так: последовательность $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает:

$$y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left[\frac{1}{n+1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot n + 1\right)\right]^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = y_{n+1};$$

тогда при $n \neq 1$ $x_n y_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1 \Rightarrow x_n < \frac{1}{y_n} < \frac{1}{y_2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$

Естественно, что при таком подходе учащиеся должны быть знакомы с неравенством (1) при $n > 2$. Простое доказательство неравенства (1), доступное старшеклассникам, можно позаимствовать из [4, с.49-50].

Теорему Вейерштрасса можно привести без доказательства, как это делается, например, в [5, с. 195].

Литература

1. Фомин В.И. О внутренних потребностях школьной математики в изучении понятия предела: Тез. докл. Воронеж. зимн. матем. школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы", 27 января - 4 февраля 2001г. Воронеж, 2001. – С. 268.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. – М.: Наука, 1970. – 608 с.

3. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие. – М.: Наука, 1990. - 608с.

4. Кутасов А.Д. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1982, - 608 с.

5. Гусак Г.М., Капуцкая Д.А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие. - Мн.: Высш. шк., 1989. – 495 с.

О ПОНЯТИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

В школьных учебниках геометрия определяется как наука о свойствах геометрических фигур ([1, с.3]), однако при этом отсутствует понятие геометрической фигуры (приводятся лишь примеры геометрических фигур). А ведь все понятия геометрии, как и любой другой науки, кроме исходных (неопределяемых) понятий, должны быть определены, в частности, должно быть определено понятие геометрической фигуры. Если не замыкаться в кругу геометрических объектов, изучаемых в школьном курсе геометрии, и исходить из того, что "Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира" ([2, с.559]), то, чтобы отразить неисчерпаемое богатство и разнообразие пространственных форм окружающего нас мира, общее определение геометрической фигуры можно сформулировать в виде:

геометрическая фигура :: = *любое множество точек пространства*, в частности, все неопределяемые геометрические объекты, а именно, точки, прямые и плоскости, являются геометрическими фигурами; все определяемые геометрические объекты являются геометрическими фигурами.

При таком определении геометрической фигуры учащимся будет легче понимать, что "Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура" ([1, с.3]), а учителя смогут разнообразить конкретные примеры различных преобразований геометрических фигур и, тем самым, доступнее изложить эту трудную тему школьной геометрии.

Литература

1. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1992.

2. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т.3. - М.: Советская энциклопедия, 1982.

О НИЖНИХ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть $C_N^{n\times n}$ — множество нормальных матриц $A = (a_{ij})$ порядка n над полем комплексных чисел C; $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A; $c = \sqrt{2} - 1$;

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad 1 \le i \le n; \quad T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad 1 \le j \le n.$$

Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in C_N^{n\times n}$

$$\rho(A) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1-c^2}{1-c^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} |S_{i_k}|,$$

$$\rho(A) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1-c^2}{1-c^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} |T_{j_k}|,$$

где $\{i_k\}_{k=1}^n$, $\{j_k\}_{k=1}^n$ — такие перестановки индексов $1, 2, \ldots, n$, что $|S_{i_1}| \geq |S_{i_2}| \geq \ldots \geq |S_{i_n}|$, $|T_{j_1}| \geq |T_{j_2}| \geq \ldots \geq |T_{j_n}|$;

$$\rho(A) \geq \left(\frac{1-c^2}{1-c^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} |a_{i j_k}|,$$

$$\rho(A) \geq \left(\frac{1-c^2}{1-c^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} |a_{i_k j}|,$$

где $\{i_k\}_{k=1}^n$, $\{j_k\}_{k=1}^n$ — такие перестановки индексов $1, 2, \ldots, n$, что $|a_{ij_1}| \geq |a_{ij_2}| \geq \ldots \geq |a_{ij_n}|$, $|a_{i_1 j}| \geq |a_{i_2 j}| \geq \ldots \geq |a_{i_n j}|$.

Указанные оценки получены с помощью результатов работы [1].

Литература

1. Фомин В.И. Об оптимальных вложениях гёльдерова и весовых пространств числовых последовательностей // Доклады Академии наук. 1998. Т.362. № 2. С.168-169.

О НЕКОТОРОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ МЫСОВСКИХ

Фонарёв А.А. (Москва)

Пусть X и Y – банаховы пространства, $L(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y (здесь и далее используются обозначения и терминология из [1]), F – отображение из открытого множества $D \subset X$ в Y.

Теорема. *Пусть отображение F дифференцируемо (по Фреше) на выпуклом множестве $D_0 \subset D$, производная $F'(x) \in L(X, Y)$ имеет правый обратный оператор $(F'(x))_r^{-1} \in L(Y, X)$ для каждого $x \in D_0$ и $\|F'(x) - F'(y)\| \leq L_0\|x - y\|$, $\|(F'(x))_r^{-1}\| \leq \gamma$ для всех $x, y \in D_0$. Если точка $x_0 \in D_0$ такова, что $\|(F'(x_0))_r^{-1} F x_0\| \leq \eta$, $\alpha = \gamma L_0 \eta / 2 < 1$ и $S \equiv \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r_0\} \subset D_0$, где $r_0 = \eta \sum_{j \geq 0} \alpha^{2^j - 1}$, то итерации*

$$x_{i+1} = x_i - (F'(x_i))_r^{-1} F x_i \ \ (i = 0, 1, \ldots)$$

лежат в S и сходятся к решению x^* уравнения $Fx = 0$ $(x \in S)$. При этом,

$$\|x_i - x^*\| \leq \varepsilon_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 \ \ (i = 1, 2, \ldots),$$

где $\varepsilon_i = (\alpha/\eta) \sum_{j \geq 0} (\alpha^{2^i})^{2^j - 1} \leq \alpha / [\eta(1 - \alpha^{2^i})]$.

Теорема является аналогом теоремы Мысовских о методе Ньютона с правыми обратными операторами к производным вместо обратных операторов и доказывается так же, как теорема 12.4.6 в [2]. Теорема имеет обобщение, с использованием которого доказывается теорема в [3].

Замечание. *Имеются аналоги теорем 12.3.4, 12.6.1, 12.6.2 и 12.6.4 в [2] с правыми обратными операторами к производным вместо обратных операторов.*

Литература

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 560 с.

3. Фонарёв А. А. О решении уравнений с отображениями, имеющими ненулевое ядро производной // Обратные и некорректно поставленные задачи (тезисы докладов конференции). – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2000. – С.75.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ СХОДИМОСТИ

квадратичной скоростью сходимости[1]

Хабаров Н.В. (Москва) *nkhabarov@supermail.ru*

Задачи быстродействия в заданную точку фазового пространства при определенных ограничениях на правую часть динамической системы и область управления, удобно свести к поиску момента захватывания этой точки параметрическим семейством множеств. Настоящая работа посвящена исследованию вопросов, связанных с разработкой эффективных численных методов решения таких задач. Проведен также ряд численных экспериментов, подтверждающих полученные теоретические результаты.

Постановка задачи. Рассматривается семейство выпуклых компактных множеств $M(t)$, непрерывно зависящих от скалярного параметра t, и точка $y : y \notin M(t_0)$, $t_0 > 0$. Необходимо найти $t_* = \min\{t \mid y \in M(t), t > t_0\}$. При этом предполагается выполнение следующих условий:

(1) $c(M(t_0), \psi) > 0, \forall \psi \in S_1$, где S_1 – единичная сфера в R^n с центром в нуле;

(2) $\dfrac{\partial}{\partial t} c(M(t), \psi) > 0$, $\forall \psi \in S_1$, $\forall t \geq t_0$, то есть множества $M(t)$ монотонно зависят от параметра t; (3) $\dfrac{\partial^2}{\partial \psi^2} c(M(t), \psi)$ – непрерывна в $R^n \setminus \{0\}$, $\forall t \geq t_0$;

(4) $\operatorname{rg} \dfrac{\partial^2}{\partial \psi^2} c(M(t), \psi) = n - 1$, $\forall \psi \in S_1$, $\forall t \geq t_0$, где $c(M(t), \psi) = \max\limits_{m \in M(t)} (m, \psi)$.

Численный метод. Введем функции: $\pi(t) = \operatorname*{argmin}\limits_{m \in M(t)} \|m - y\|$ и $\xi(p)$: $c(M(\xi(p)), p) = (y, p)$. Здесь $\pi(t)$ является оператором проектирования фиксированной точки на множество. Итерационный процесс определяется следующей системой соотношений:

$$p_0 = y - \pi(t_0),\ t_{k+1} = \xi(p_k),\ p_{k+1} = y - \pi(t_{k+1}), k = 0, \ldots .$$

Критерием окончания процесса является условие $\|p_{k+1}\| \leq \varepsilon$.

Теорема 1. В предположении существования решения рассматриваемой задачи, описанный численный метод сходится для любых семейств множеств, удовлетворяющих условиям (1) – (4), причем $\|p_k\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

[1]Работа поддержана программой поддержки научных школ "Моделирование и управление в многомерных динамических системах" N 961596116.

Обозначим $t_* = \lim\limits_{k\to+\infty} t_k$ и $p_* : \frac{\partial}{\partial\psi}c(M(t_*),p_*) = y$.

Теорема 2. Пусть решение рассматриваемой задачи существует и в дополнение к условиям (1) - (4) выполнено:

(5) Функция $\frac{\partial^3}{\partial\psi^2\partial t}c(M(t),\psi)$ непрерывна в точке (t_*,p_*);

(6) Функция $\frac{\partial^3}{\partial\psi^3}c(M(t),\psi)$ непрерывна в точке (t_*,p_*);

Тогда существует такая константа $C \geq 0$, что для всех k справедливо неравенство

$$\|p_{k+1}\| \leq C\|p_k\|^2.$$

О МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИКОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

Хайлов Е.Н. (Москва)

khailov@cs.msu.su

Рассмотрим билинейную систему со скалярным управлением :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+u(t)B)x(t),\ x(0)=x_0,\ x_0\neq 0, \\ 0\leq u(t)\leq\beta,\ t\in[0,T],\ T>0,\ \beta>0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь A, B - матрицы порядка $n\times n$, $AB\neq BA$, $x(\cdot)\in \mathrm{R}^n$.

Обозначим через $[C,D] = CD - DC$, где C, D - матрицы порядка $n\times n$. Тогда определим матрицы :

$$[B,A]_0 = B;\ [B,A]_1 = [B,A];\ [B,A]_{k+1} = [[B,A]_k,A],\ k\geq 1.$$

Пусть $p(\mu) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu^k$, $m = n^2-n+1$ есть характеристический многочлен матрицы $(E\otimes A - A\otimes E)$, деленный на μ^{n-1}. Здесь E - единичная матрица, а $C\otimes D$ - кронекерово произведение матриц C, D.

Считаем выполненными следующие предположения.

Условие 1. Имеют место равенства $[[B,A]_k,B]=0$, $k=\overline{0,n^2-1}$.

Условие 2. Ранг матрицы, составленной из векторов $[B,A]_kx_0$, $k=\overline{0,n^2-n}$, равен n.

Условие 3. Многочлен $p(\mu)$ имеет лишь вещественные корни.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Каждой точке x множества достижимости системы (1) отвечает кусочно-постоянное управление $u(t)$, $t\in[0,T]$, принимающее значения $\{0;\beta\}$ и имеющее не более $2(n^2-n)$ переключений.

Замечание. Свойства границы множества достижимости системы (1) ранее обсуждались в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-01-00682 и 00-15-96086) и программы "Университеты России - Фундаментальные исследования" (проект 5143).

Литература

1. Е.Н. Хайлов. О границе множества достижимости однородной билинейной системы с квазикоммутирующими матрицами. Материалы научного

семинара "Прямые и Обратные Задачи Оптимального Управления". Московская обл., Планерное. 2001. С.31-32.

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Хачев М. М. (Нальчик)

niipma@yahoo.com

Методом разделения переменных доказано, что функция вида

$$G(x,y;s,t) = \frac{\sqrt{yt}}{\pi(2+m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{\frac{1}{2+m}}(\overline{\beta})}{I_{\frac{1}{2+m}}(\overline{\beta})} I_{\frac{1}{2+m}}(\overline{y}) I_{\frac{1}{2+m}}(\overline{t}) e^{i\lambda(s-x)}\, d\lambda -$$

$$-\frac{\sqrt{yt}}{\pi(2+m)} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\frac{1}{2+m}}(\overline{y}) K_{\frac{1}{2+m}}(\overline{t}) e^{i\lambda(s-x)}\, d\lambda,$$

где $\overline{y} = \frac{2|\lambda|}{2+m} y^{\frac{2+m}{2}}$, $\overline{t} = \frac{2|\lambda|}{2+m} t^{\frac{2+m}{2}}$, $\overline{\beta} = \frac{2|\lambda|}{2+m} \beta^{\frac{2+m}{2}}$, $I_{\pm\nu}(z)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода [1], $K_\nu(z)$ – функция Макдональда [1] является функцией Грина первой краевой задачи: *Найти решение* $u \equiv u(x,y)$ *уравнения* $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ *в области* $D = \{(x,y): -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \beta\}$ *со следующими свойствами:*

1) $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$;

2) $u(x,0) = \varphi_1(x)$, $u(x,\beta) = \varphi_2(x)$, $-\infty < x < +\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,y) = 0$ *равномерно относительно* $y \in [0,\beta]$, *причем* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi_i(x) = 0, \quad i = 1,2.$

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик.

Литература

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

ОСОБЫЕ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ ИНВОЛЮТИВНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Хлюстов К. В. (Москва)

khlustov@cs.isa.ac.ru

В работе исследуется структура оптимального синтеза для линейных по управлению задач следующего вида.

$$\begin{cases} T \longrightarrow \inf \\ \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} u^i \varphi_i(x) \\ x(0) = a, x(T) = b \in W_{1\ldots n}. \end{cases}$$

Здесь $x \in R^n, u \in U = \{u \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} u^i = 1, u^i \geq 0\}: \varphi_i(x), i = 1, \ldots, n$ - гладкие векторные поля в R^n. Предполагается, что распределения, порождаемые всеми возможными наборами векторов из множества $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ интегрируемы в некоторой окрестности O многообразия $W_{1\ldots n}$, которое является для данной задачи главной магистралью. Данные результаты являются обобщением результатов [1] Зеликиной Л. Ф. на более широкий класс задач, полученным посредством применения метода дифференциальных форм, предложенного Зеликиным М. И. в работах [2-3]. Для приведённой выше задачи получено полное описание структуры оптимального синтеза в окрестности O многообразия $W_{1\ldots n}$. В частности, поведение оптимальных траекторий можно описать следующим образом. Особые траектории образуют стратифицированное многообразие. Оптимальные траектории, выходящие из точек, не принадлежащих особому многообразию, попадают на него. При движении по многообразию траектории переходят со стратов большей размерности на страты меньшей, до тех пор, пока не попадают на одномерное многообразие $W_{1\ldots n}$, движение по которому осуществляется вплоть до конечной точки.

Литература

1. Зеликина Л. Ф. "Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления", Вероятностные проблемы управления в экономике, стр. 33-114, (1977)

2. Zelikin M. I. "On the singular arcs", Problems of Control and Information Theory, 14(2), PP. 75-88, (1985)

3. Зеликин М. И. "Минимизация интегралов от дифференциальных форм", ДАН СССР, т.278, N 5, стр. 1057-1059, (1984)

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Хромов А. П., Корнев В. В. (Саратов)

Пусть A - интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\, dt + \alpha \int_0^{x} A(x,t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t при $0 \leq t \leq x \leq 1$ и $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)|_{t=x} = \delta_{n-1,j}$ $(j = 0, \ldots, n)$, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера, α - произвольное число, такое, что $\alpha^2 \neq 1$.

При $\alpha = 0$ результаты содержатся в работах [1], [2].

Теорема. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место соотношение* $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|d_1|}(f+g,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|d_2|}(f-g,x) \right| = 0,$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k, для которых $(2k\pi)^n < r$; $g(x) = f(1-x)$; $d_1 = \alpha + 1$, $d_2 = \alpha - 1$.

Следствие 1. *Если почти всюду $f(x) = f(1-x)$, или почти всюду $f(x) = -f(1-x)$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{\delta\le x\le 1-\delta} \left| S_r(f,x) - \sigma_{r|d_i|}(f,x) \right| = 0$, где $i = 1$ в первом случае и $i = 2$ во втором случае.*

Следствие 2. *Если тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in C[0,1]$ сходится равномерно на замкнутом множестве $e \subset (0,1)$, симметричном относительно $x = 1/2$, то ее ряд Фурье по с.п.ф. сходится равномерно на e.*

Литература

1. Хромов А.П. *Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования* // "Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа". Сб. статей, посв. 70-летию П.Л.Ульянова. - М.: Изд-во АФЦ, 1999. - С.255-266.

2. Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости спектральных разложений для интегральных операторов с переменным пределом интегрирования* // Тез. докл. междунар. конф. "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках". - Воронеж, 20-27 янв. 2000. - С.118

О ПОЧТИ ЕВКЛИДОВЫХ СЕЧЕНИЯХ

Царьков И.Г. (Москва)

tsarkov@mech.math.msu.su

Хорошо известна теорема Дворецкого о том, что в любом бесконечномерном нормированом пространстве существуют почти евклидовы подпространства произвольной конечной размерности. В этой работе изучается аналогичная задача, где вместо нормы на линейном пространстве расматривается, вобще говоря, невыпуклый и несиметричный функционал.

Через (X,f) будем обозначать пару: X- линейное действительное пространство, $f : X \to \mathbf{R}_+$- однородный функционал, принимающий положительные значения на $X\setminus\{0\}$. Через $\omega(f,\delta)$ обозначим величину $\sup\{|f(x) - f(y)| \mid x,y \in X : f(x-y) \le \delta, f(x) \le 1, f(y) \le 1\}$.

Теорема. *Пусть $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая функция, что $\lim_{\delta\to 0}\varphi(\delta) = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbf{N}$ такое, что для любой пары (X,f), удовлетворяющей условиям: $\dim X \ge N$, $\omega(f,\delta) \le \varphi(\delta)$, существует подпространство $L \subset X$: $\dim L = n$ и евклидова норма $\|\cdot\|$ на нем такие, что для всех $x \in L$ верно неравенство: $(1-\varepsilon)\|x\| \le f(x) \le (1+\varepsilon)\|x\|$.*

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ФАБЕРА ДЛЯ БИЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Цвиль М. М. (Ростов-на-Дону)

vpm@jeo.ru

Пусть остов σ бицилиндрических областей $D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$ образуют спрямляемые жордановы кривые L_k, $k = 1, 2$; D_k^{+} — ограниченная, D_k^{-} — неограниченная области с границей L_k в плоскости C^1; $w_k = \varphi_k(z_k)$ — функция, конформно и однолистно отображающая область D_k^{-} на область $U_k^{-} = \{w_k \in C^1 : |w_k| > 1\}$ так, что $\varphi_k(\infty) = \infty$ и $\lim\limits_{z_k \to \infty} \varphi_k(z_k)/z_k > 0$; $z_k = \psi_k(w_k)$ — функция, обратная к $\varphi_k(z_k)$;

$$U^{\pm\pm} = \{(w_1, w_2) \in C^2 : |w_1| \gtrless 1;\ |w_2| \gtrless 1\};$$

$$(\psi * f)(w_1, w_2) = f(\psi_1(w_1); \psi_2(w_2));$$

$g(z_1, z_2)$ — весовая функция, аналитическая в D^{--} и $g(\infty, \infty) = g_{00} > 0$.

Пусть $g(z_1, z_2) \in E_2(D^{--})$; $\tau(t_1, t_2) \in H_2(U^{++})$.

Тогда можно рассматривать обобщенный оператор Фабера

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\sigma} \frac{(\varphi * \tau)(\zeta_1, \zeta_2) g(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_2)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \equiv F_0(\tau; z_1, z_2),\ (z_1, z_2) \in D^{++}.$$

Этот оператор преобразует каждую функцию $\tau(t_1, t_2) \in H_2(U^{++})$ в функцию, аналитическую в D^{++}. При этом всякий многочлен $Q_\Omega(t_1, t_2) = \sum\limits_{(k,\ell) \in \Omega} c_{k\ell} t_1^k t_2^\ell$, где Ω — некоторое подмножество целочисленной решетки Z_{++}^2, преобразуется в многочлен от двух переменных z_1, z_2 вида

$$\sum_{(k,\ell) \in \Omega} c_{k\ell} \Phi_{k\ell}(z_1, z_2),$$

где $\Phi_{k\ell}$ — обобщенные многочлены Фабера двух переменных (см. [1]).

Рассмотрены различные случаи поведения весовой функции на бесконечности. Полученные результаты обобщают свойства обобщенного оператора Фабера (см. [2]) на случай бицилиндрической области.

Литература

1. Цвиль М. М. Оценки и асимптотические формулы для обобщенных полиномов Фабера двух переменных // Матем. заметки, 1981. Т. 29, вып. 2. С. 201–209.

2. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984. 336 с.

О РЕЗОНАНСЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Чубурин Ю.П. (Ижевск)
e-mail lyu@otf.fti.udmurtia.su

Пусть $H(k) = -\Delta + V(x)$ - оператор Шредингера с ограниченным вещественным потенциалом $V(x)$, периодическим по всем переменным с периодом 1, рассматриваемый в $L^2((0,1)^3)$, где $k = (k_{\|}, k_3) \in [-\pi,\pi)^3$. Обозначим через $E_n(k), \psi_n(x,k), n = 1,2,...$ собственные значения и собственные функции $H(k)$. Пусть $H(k_{\|}) = -\Delta + V(x)$ действует в $L^2((0,1)^2 \times \mathbf{R})$, $E_0 \in \sigma(H(k_{\|}))$, тогда найдутся $E_{n(j,\alpha)}(k), j = 1,...,N, \alpha = 1,...,K_j$ такие, что $E_{n(j,\alpha)}(k_j) = E_0$, где $k_j = (k_{\|}, k_{3,j}) \in [-\pi,\pi)^3, K_j$ - кратность $E_{n(j,\alpha)}(k_j)$. Пусть $m(j,\alpha)$ — кратность нуля $E_{n(j,\alpha)}(k)$ по k_3 в точке k_j. Считаем, что $m(j,\alpha) \geq 2$ для $j = 1,...,N_0 (N_0 \leq N)$ и $\alpha = 1,...,K_j^{(0)} (K_j^{(0)} \leq K_j)$. Пусть E находится в малой окрестности E_0, $k_{3,j,\alpha}^{(1)}$ - корень уравнения $E_{n(j,\alpha)}(k) = E$ относительно k_3 с наименьшим значением аргумента, $m_0(j,\alpha)$ - число корней с неотрицательной мнимой частью. Для ядра G резольвенты оператора $H(k_{\|})$ имеет место равенство

$$G(x,y,k_{\|},E) =$$

$$i\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{\alpha=1}^{K_j^{(0)}}\Big(a_{j,\alpha}\frac{\psi_{n(j,\alpha)}(x,k_j)\overline{\psi_{n(j,\alpha)}(y,k_j)}}{(k_{3,j,\alpha}^{(1)} - k_{3,j})^{m(j,\alpha)-1}(m(j,\alpha)!)^{-1}\partial^{m(j,\alpha)}E_{n(j,\alpha)}(k_j)/\partial k_3^{m(j,\alpha)}} +$$

$$+ f_{n(j,\alpha)}(x,y,E)\cdot(k_{3,j,\alpha}^{(1)} - k_{3,j})^{-m(j,\alpha)+2}\Big), \tag{1}$$

где $| f_{n(j,\alpha)}(x,y,E) | \leq C(1 + | x_3 - y_3 |)$, а если $m(j,\alpha)$ одно и то же для всех $j \leq N_0$ и $\alpha \leq K_j^{(0)}$, то это - аналитические функции любого выбранного $k_{3,j_0,\alpha_0}^{(1)}$; здесь $a_{j,\alpha} = (1 - e^{-2\pi i m_0(j,\alpha)/m(j,\alpha)})(1 - e^{-2\pi i/m(j,\alpha)})^{-1} \times \prod_{\nu=1}^{m(j,\alpha)-1}(1 - e^{2\pi i\nu/m(j,\alpha)})^{-1}$.

Рассмотрим оператор $H_\epsilon(k) = H(k) + \epsilon W(x)$, где $| W(x) | \leq e^{-a|x_3|}, a > 0$ в $L^2((0,1)^2 \times \mathbf{R})$. Пусть $N_0 = K_j^{(0)} = 1$. Используя (1) можно доказать, что в окрестности E_0 для любого достаточно малого $\delta \in \mathbf{C}$ и для некоторого $\epsilon = \epsilon(\delta)$ существует уровень (резонанс или собственное значение; см. об этом в [1], там рассмотрен случай $m = 2$) E геометрической кратности 1, причем $\epsilon = A^{m-2}\delta^{m-1} + o(\delta^{m-1}), E = E_0 + (1/m!)\partial^m E_n(k_1)/\partial k_3^m \cdot A^m\delta^m + o(\delta^m)$, где $A = -ia_{1,1}m!\int_\Omega W(x) | \psi_n(x,k_1) |^2 dx/(\partial^m E_n(k_1)/\partial k_3^m), m = m(1,1), n = n(1,1)$.

Литература

1. Чубурин Ю.П. О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. Т.110. N 3. С.443-453.

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СТРУКТУРОЙ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Чурбанов Ю.Д. (Минск)

Римановы многообразия, снабженные структурой почти произведения, привлекают все большее внимание. Известна классификация А.Навейры [1] таких многообразий.

Пусть G/H — однородное риманово пространство с инвариантной римановой метрикой g, связностью Леви-Чевита ∇ и инвариантной структурой почти произведения P, которая согласована с метрикой, т.е. является изометрией. Пусть m — касательное пространство к G/H в точке $o = H$. Тогда $m = m_1 \oplus m_2$, где $m_i = \{X \in m | P_o(X) = (-1)^{i+1}X\}$, P_o — значение оператора P в точке o.

Теорема 1 *Каждое многообразие, обладающее структурой почти произведения P, допускает связность почти произведения такую, что тензор кручения T этой связности задается формулой $N = 4T$, где N — кручение структуры почти произведения.*

Следствие 1 *Многообразие со структурой почти произведения обладает связностью почти произведения без кручения тогда и только тогда, когда структура почти произведения интегрируема.*

Теорема 2 *Пусть G/H — однородное риманово пространство с инвариантной структурой почти произведения P, с оператором P_o на m. Следующие условия эквивалентны: а) $P_o[X,Y]_m = -[X,P_oY]_m$, $\forall X,Y \in m$; б) $[m_1,m_2]_m = 0$, $[m_i,m_i] \subset m_{3-i}$, $i = 1,2$; в) G/H — локально симметрично ($[m,m] \subset h$).*

Следствие 2 *Пусть G/H — однородное риманово Φ-пространство порядка $n = 4k$ или $n = 4k+1$, причем n не кратно 3. Тогда $m^\varphi \subset h$ равносильно локальной симметричности G/H.*

Следствие 3 *Пусть G/H — однородное риманово пространство с инвариантной структурой почти произведения P такой, что $P_o[X,Y]_m = -[X,P_oY]_m$ ($\forall X,Y \in m$.) Тогда оно принадлежит классу (TGF,TGF) [1].*

Литература

[1]. Naveira A.M. A classification of Riemannian almost-product manifolds // Rend. Mat. (7). 1983. V. 3. N. 3. P. 577-592.

РЕГУЛЯРНЫЙ КОНУС В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Энеева Лиана М. (г. Нальчик)
E-mail **niipma@yahoo.com**

Мы изучаем банаховы пространства, используя ту идею, что при задании порядка в банаховом пространстве строго регулярным конусом, порядок и норма согласованы наилучшим образом. Исследуется достижимое пространство, то есть регулярно упорядоченное банахово пространство, для любого элемента которого существует метрическая проекция на конус - элемент конуса на котором реализуется инфимум расстояния от элемента до конуса.

Пусть E - упорядоченное банахово пространство со строго регулярным, замкнутым конусом E_+.

Определение 1. *Конус E_+ называется строго регулярным, если выполняются следующие условия:*

1) для каждого $x, y \in E : \pm x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|$;

2) $\forall\, x \in E\ \exists y \in E_+ : \pm x \leq y,\ \|y\| = \|x\|$.

Примером нерешеточного строго регулярного конуса является в ℓ_3^3 конус $E_+ = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq \left(|x_2|^3 + |x_3|^3\right)^{1/3} \right\}$.

Множество всех метрических проекций элемента x на конусе E_+ обозначим $\mathcal{M}(x) = \{Px : \|Px - x\| = \inf\{\|a - x\| : a \in E_+\}\}$.

Определение 2. *Регулярно упорядоченное банахово пространство E будем называть достижимым, если $\forall x \in E\ \ \exists$ метрическая проекция Px элемента x на конус E_+, то есть, $Px \in E_+$ и*
$\|Px - x\| = \inf\{\|a - x\| : a \in E_+\}$.

Определение 3. *Достижимое пространство называется чебышевским, если для каждого x множество $\mathcal{M}(x)$ одноточечное.*

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть E – достижимое пространство, являющееся строго выпуклым на конусе E_+. Тогда E – чебышевское пространство.

Теорема 2. Всякое равномерно выпуклое на конусе E_+ регулярно упорядоченное банахово пространство (E, E_+) является чебышевским.

УРАВНЕНИЯ С РАВНОМЕРНО u_0-ВОГНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Яковлева А.И.

В докладе изучаются уравнения с так называемыми равномерно u_0-вогнутыми на конусном отрезке $\langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$ ($0 < \mu < \nu, u_0 > 0$ — фиксированный элемент из конуса) операторами $A(x)$. Для исследования таких уравнений используется одна специальная метрика $d(x, y)$, по отношению к которой равномерно u_0-вогнутый оператор $A(x)$ является оператором обобщенного сжатия.

Понятие обобщенного сжатия является более "слабым" по сравнению с понятием сжимающего отображения к оператору сжатия. Однако, для операторов обобщенного сжатия удается доказать аналог принципа сжатых отображений, в силу которого также операторы имеют в множестве K положительных элементов (в конусе) неподвижную точку. Устанавливается, что эта неподвижная точка является единственным положительным решением уравнения с равномерно u_0-вогнутым оператором, причем к этой точке сходится по метрике $d(x, y)$ метод последовательных приближений при любом начальном приближении $x_0 \in \langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$.

В докладе используются основные понятия и определения теории полуупорядоченных пространств и теории линейных и нелинейных положительных операторных уравнений (по поводу основных понятий см. [1,2]).

Приведем соответствующие определения.

Рассмотрим уравнение вида

$$x = A(x), \tag{1}$$

где $A(x)$ — оператор, действующий в банаховом пространстве E с конусом K положительный и монотонный относительно K. Пусть $u_0 > \theta$ — фиксированный элемент, следуя И.А. Бахтину.

Определение 1. *Оператор $A(x)$ будем называть равномерно u_0-вогнутым на множестве $\langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$ $(0 < \mu < \nu)$, если для каждого $x \in \langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$ найдутся такие α_1 и $\beta_1 > 0$, что*

$$\alpha_1 u_0 \leq A(x) \leq \beta_1 u_0 \tag{2}$$

для всех $t \in [a,b] \subset (0,1)$ выполняется неравенство

$$A(tx) \geq (1+\eta) \cdot t \cdot A(x), \tag{3}$$

где $\eta = \eta(a,b,\mu,\nu) > 0$.

Определение 2. *Элементы $x, y, \in K$ будем называть связными (принадлежащими одной компоненте связности конуса K), если существуют такие положительные λ и β, для которых выполняются неравенства*

$$x \leq \lambda y \quad \text{и} \quad y \leq \beta x \tag{4}$$

На каждой из компонент связности конуса K можно ввести следующий функционал: пусть λ_0; β_0 точные нижние грани чисел λ и β, удовлетворяющих неравенствам (4) (существование таких чисел обеспечено замкнутостью конуса K), очевидно при этом $x \leq \lambda_0 y$ и $y \leq \beta_0 x$; положим

$$d(x,y) = \ln\ \max(\lambda_0; \beta_0). \tag{5}$$

Лемма 1. *Функционал $d(x,y)$ является метрикой на каждой из компонент связности конуса K.*

Важным является ответ на вопрос в каких случаях каждая из компонент связности будет являться полным метрическим пространством по метрике $d(x,y)$.

Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть конус K нормален. Тогда каждая из компонент связности конуса K является полным метрическим пространством относительно метрики $d(x,y)$.*

В данной метрике $d(x,y)$ равномерно u_0-вогнутый оператор $A(x)$ удовлетворяет следующему условию обобщенного сжатия

$$d(A(x); A(y)) \leq d(x,y) - \Delta[d(x,y)] \tag{6}$$

для всех x, $y \in \langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$, где

$$\Delta[d(x,y)] = \ln\ \left[1 + \eta\left(\mu; \nu; \frac{\mu}{\nu}; e^{-d(x,y)}\right)\right] \tag{7}$$

В силу данного утверждения естественно применить для исследования уравнений с равномерно u_0-вогнутыми операторами следующий принцип неподвижной точки:

Теорема 3. *Пусть оператор $A(x)$ преобразует в себя полное метрическое пространство $R = \{E, d\}$ и удовлетворяет на R условию обобщенного сжатия*

$$d[A(x); A(y)] \leq d(x,y) - \Delta[d(x,y)]$$

$x, y \in R$, $\Delta(u)$ непрерывная положительная и монотонно возрастающая при $u > 0$ функция.

Тогда оператор $A(x)$ имеет на R единственную неподвижную точку x^*, к которой сходятся последовательные приближения

$$x_m = A(x_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

при любом начальном приближении $x_0 \in R$.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующая важная теорема И.А. Бахтина [1].

Теорема 4. *Пусть равномерно u_0-вогнутый на множестве $\langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$ оператор $A(x)$ преобразует это множество в себя. Тогда $A(x)$ имеет на этом множестве единственную неподвижную точку, к которой сходятся по метрике $d(x,y)$ последовательные приближения (8) при любом начальном приближении из $\langle \mu u_0; \nu u_0 \rangle$.*

Изложенные результаты допускают развитие на случай оператора действующего в пространстве с двумя конусами. В этом случае монотонность оператора может быть введена при помощи одного конуса а положительность — при помощи другого. В докладе указывается применение результатов к доказательству теорем существования у нелинейных интегральных уравнений и приводятся признаки равномерной u_0-вогнутости различных классов операторов. Докладчик выражает признательность В.Я. Стеценко за постановку задачи и советы.

Литература

1. Бахтин И.А. Исследование уравнений с положительными операторами: дисс. д-ра физ.-мат. наук. Ленинград, 1967. - 320 с.

2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962. - 396 с.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. - Наука, 1969. - 456 с.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПОДКЛЮЧЕНИЯ ВНЕШНИХ УСТРОЙСТВ К COM-ПОРТУ ПОСРЕДСТВОМ СДВИГОВОГО РЕГИСТРА[1]

Якубенко А.П. (Воронеж)

vsu6103h@stud.vsu.ru.ru

С внедрением компьютеров во все сферы человеческой деятельности возникла задача машинной обработки информации. Существует большое количество математических пакетов, возможности которых практически безграничны. Но для того, чтобы воспользоваться их возможности, данные измерений необходимо ввести в компьютер. Разумеется, многие современные приборы уже имеют интерфейс для подключения к персональному компьютеру, но все они дороги и не по карману Российским учебным заведениям. Вместе с тем, в нашей стране существует много хороших старых приборов, выдающих информацию, например, на цифровое табло. Вводить данные с приборов в

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Центрально-Черноземного представительства корпорации "Парус" и деканата факультета прикладной математики и механики.

компьютер на клавиатуре - достаточно нудное и долгое занятие. Если пакетов обработки информации существует достаточно много, то для каждого конкретного прибора необходима своя программа автоматизации считывания. Естественно, что программа должна обладать интерфейсом, понятным человеку, ранее не общавшимся с компьютером - иначе её могут просто не принять к использованию.

Ещё одна проблема - стандарт RS - 232 не очень хорош для двусторонней передачи - когда необходимо не только считывать информацию с прибора, но и управлять прибором. Напрашивающиеся решение - использовать параллельный порт. Но этот порт зачастую уже занят принтером.

Третья проблема - потоковая передача данных. Скорость работы различных микросхем контроллера и компьютера могут сильно различаться, поэтому передавать данные сплошным потоком рискованно - могут возникнуть ошибки. Необходимо каким - то образом синхронизировать работу порта и внешнего устройства.

Четвертая проблема - при повторном считывании информации, значение может отличаться, следовательно, нельзя считывать данные с прибора по частям (например, при считывании цифр одного числа поочередно может возникнуть ситуация, когда часть цифр будет от старого, а часть - от нового числа).

Решением многих из этих проблем является сдвиговый регистр - микросхема, запоминающая по сигналу с компьютера информацию с прибора, и затем, опять же под управлением программы побитно передающая данные в COM - порт.

Программа написана на языке Borland Pascal 7.0. Выбор обусловлен в основном тем, что для простого считывания информации совершенно не необходим "быстрый" компьютер с операционной системой Windows, которая предъявляет высокие аппаратные требования. Более того, использование старых дешевых компьютеров более предпочтительно в связи с небольшим риском выхода из строя контроллера и возможным повреждением компьютера.

Именной указатель

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета:
Шабров С.А., Ларин А. В., Шаталов С.С.
Центрально-Черноземное книжное издательство,
394053, г. Воронеж, ул. Лизюкова, 2.
Усл. п.л. 11. Бум. писчая. Печать трафаретная.
Тир. 300. Подписано к печати 13.04.2001.