

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ АДМИНИСТРАЦИИ  
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ  
ДУП «ТУРБОНАСОС» ФГУП «КБХА»



“МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЕСТЕСТВЕННЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ”  
(Воронеж, 20-27 января 2000 г.)

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Воронеж — 2000

**ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ АДМИНИСТРАЦИИ  
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ  
ДУП «ТУРБОНАСОС» ФГУП «КБХА»**



**“МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЕСТЕСТВЕННЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ”  
(Воронеж, 20-27 января 2000 г.)**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ**

**Воронеж — 2000**

“Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках”. Тезисы докладов. — Воронеж, ВГУ, 2000 — 244 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, сделанных на Воронежском зимнем симпозиуме. В работе конференции приняли участие ученые более чем из 50 городов России и ближнего зарубежья.

Тематика охватывает широкий спектр проблем математического моделирования в задачах экономики (детерминированные и стохастические модели), механики сплошных сред, информатики, технологии, социологии, образования. Представлены модели, описываемые в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, задач оптимального управления, теории игр, полуупорядоченных пространств и др.

**ОРГКОМИТЕТ:** В.А.Костин – председатель Оргкомитета, Ю.В.Покорный — зам.председателя Оргкомитета, И.И.Борисов, С.В. Емельянов, В.А.Ильин, С.К.Коровин, В.М.Иевлев, Е.И.Моисеев, Д.Д.Ивлев, Н.А.Бобылев, С.Г.Валюхов, П.П.Забрейко, Б.М.Даринский, Э.П.Домашевская, А.Д.Мышкис, В.И.Овчинников, А.И.Перов, Н.Х.Розов, Б.Н.Садовский, И.С.Суровцев.

Организационная группа: Ю.В.Покорный, В.А.Костин, С.Г.Валюхов, М.С.Мовшина, А.В.Боровских, В.В.Провоторов, Ф.В.Голованева, М.Ш.Бурлуцкая, С.А.Шабров.

**ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:** С.В. Емельянов, В.А.Ильин, В.А.Кондратьев, С.К.Коровин, В.А.Костин, В.М.Иевлев, Е.И.Моисеев, Д.Д.Ивлев, М.А.Артемов, Н.А.Бобылев, И.А.Бахтин, С.Г.Валюхов, А.А.Горский, Б.М.Даринский, И.А.Дободейч, Э.П.Домашевская, П.П.Забрейко, А.В.Мельников, А.Д.Мышкис, В.И.Овчинников, В.П.Орлов, А.И.Перов, Ю.В.Покорный, А.С.Потапов, Н.Х.Розов, Ю.А.Савинков, Б.Н.Садовский, Ю.И.Сапронов, А.В.Соболев, А.Н.Спорыхин, И.С.Суровцев, В.В.Сысоев, Б.Н.Четверушкин, А.С.Шамаев, А.А.Шаманин.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований.



**Симпозиум посвящен памяти  
Марка Александровича Красносельского  
(1920-1997).**

## ОРГАНИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ БАЗ ДАННЫХ САПР В УСЛОВИЯХ INTERNET

АБДУЛЛАЕВА Р.А. (Баку)

INTERNET - технологии сегодня позволяют решать проблему полноты и достоверности БД САПР принципиально новым способом - путем создания виртуальных БД, обеспечивающих оперативную подкачку сведений непосредственно из WEB - страниц разработчиков, поставщиков и системных интеграторов. При этом процесс "мобилизации" знаний остается скрытым от пользователя и он решает свои прикладные задачи с ощущением полного погружений в WEB - среду задачи.

Наряду с решением проблемы полноты и достоверности виртуальный режим снимает многие проблемы сопровождения БД, хорошо известные специалистам.

Вместе с тем задача создания виртуальных БД весьма сложна и не имеет стандартных решений.

В докладе предлагается методика решения задачи, использующая концепцию модели предметной области.

Виртуальная БД реализуется путем специального структурирования модели предметной области САПР, которое позволяет "размещать" структурные элементы модели на внешних носителях INTERNET и вызывать в память АРМ проектировщика только те элементы, которые нужны для решения конкретной прикладной задачи.

В качестве нормативно - инструментальной базы метода используются:

- 1) средства computer science для представления и обработки знаний (семантические сети);
- 2) интеллектуальные схемы поиска ЕЯ-документов, развиваемые в области data mining (поиск по понятиям);
- 3) международный стандарт ISO 10303 STEP, устанавливающий порядок представления и обмена данных в распределенных САПР;
- 4) стандартные языки программирования INTERNET - приложений (HTML, JAVA).

Разработанная модель предметной области позволила использовать коммерческий инструментальный Retrieval - Ware (комп. EXCALBUR Technologies Corp.) для поиска ЕЯ-текстовой информации. Для работы с понятиями в системе поддерживается специальная семантическая сеть, объединяющая морфологически нормализованный словарь с перечнем смысловых значений его элементов, а также тезаурус, описывающий семантические связи между различными значениями слов из словаря с учетом типов и силы этих связей).

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СНЕЖНЫХ ЛАВИН

Абрахин С.И. , Илларионова М.А. (г. Владимир)

Данная работа посвящена моделированию снежных лавин. Модель может использоваться для оценки эффективности запланированных встречных мер в потенциально опасных областях обрушения лавин.

Сухая лавина состоит из мельчайших ледяных частиц, которые в свою очередь образуют два отличительных слоя: плотный слой потока с оптовым удельным весом до  $400 \text{ кг/м}^3$  и так называемый порошковый слой снега. В пределах плотного слоя импульс перемещается через контакты частиц при столкновениях. Частицы, перемещенные в поверхность плотного слоя, могут сохраняться в приостановленном состоянии за счет воздушных потоков, формируя тем самым порошковый слой снега.

Были рассмотрены основные принципы двухмерной гранулированной модели для плотного слоя, так как именно эта модель широко описывает динамику снежной лавины. Для нахождения скорости лавины и глубины потока численно решалась система из трех уравнений.

При решении системы были получены следующие результаты:

- график зависимости скорости лавины от пройденного пути;
- график зависимости скорости лавины от времени;
- график зависимости пройденного пути от времени;
- максимальное значение скорости лавины.

Также разработана программа, которая демонстрирует движение лавины по склонам гор с изменяющимся уклоном.

Литература:

статья "Моделирование снежных лавин" Австрия 1999 г.

В статье [1] описаны алгоритмы решения нелинейных краевых задач для ОДУ с гладкими правыми частями, реализующая их Программа, написанная для среды MAPLE, и некоторые примеры расчетов. Основанные на идее вариации параметров, алгоритмы ориентированы на возможности проведения аналитических вычислений в среде MAPLE. Например, формирование Программой системы уравнений в вариациях и выполнение ряда других операций производится в аналитической форме средствами среды. Прямое применение этих результатов в краевых задачах принципа максимума Понтрягина при управлениях разрывного типа может оказаться невозможным без определенной подготовки ("регуляризация", сглаживания) решаемой задачи управления. Сглаживание негладкой области управления  $U$ , т.е. построение ее гладкой выпуклой аппроксимации  $U_\mu$ , предполагает конструктивное описание опорной функции сглаженного множества  $U_\mu$ . Для множеств  $U$ , представленных в виде алгебраической суммы, выпуклой оболочки объединения множеств с известной гладкой выпуклой аппроксимацией, последняя задача решается легко. Труднее работать с множествами  $U$ , заданными в форме пересечения нескольких множеств или в виде геометрической разности. Пример сглаживания лунки дан ниже.

**Пример 1.** Задача быстрогодействия с областью управления  $U$  в форме лунки:  
 $\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + u_2, x_i(0) = a_i, x_i(T) = 0, i = 1, 2, u = (u_1, u_2) \in U = \bigcap S_{\sqrt{2}}((\pm 1, 0))$ ,  
 $\alpha = 0.25, \beta = 1.5, a_1 = 4, a_2 = 1$ . Сглаженная выпуклая лунка  $U_\mu$  описывается опорной функцией  $c(U_\mu, \psi) = (\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} - \sqrt{q_1^2})|_{q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}), q_2 = \psi_2}$ , где  $\mu > 0$  — малый параметр сглаживания. Поиск решения сведен к нелинейной краевой задаче принципа максимума Понтрягина сглаженной задачи, в безразмерном времени, из пяти уравнений  $\dot{x}_1 = T(x_2 + c_{\psi_1}(U_\mu, \psi)), \dot{x}_2 = T(-\beta x_1 - \alpha x_2 + c_{\psi_2}(U_\mu, \psi)), \dot{\psi} = -TA^* \psi, \dot{T} = 0, x_i(0) = a_i, x_i(1) = 0, i = 1, 2, \psi_1(1)^2 + \psi_2(1)^2 = 1$ . Решение краевой задачи при малых  $\mu$  дает приближения к оптимальному процессу. На рис. 1 показаны графики управлений  $u_1(t), u_2(t), \mu = 10^{-6}$ , на рис. 2 — графики  $u_1(t)$  для трех значений  $\mu = 1, 10^{-1}, 10^{-6}$ . Вычисления выполнены с помощью упомянутой выше Программы.

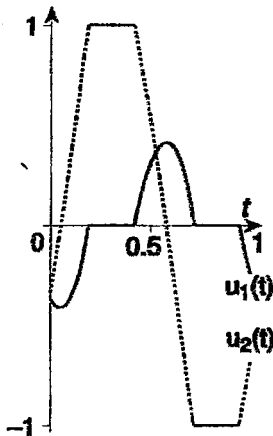


Рис. 1.

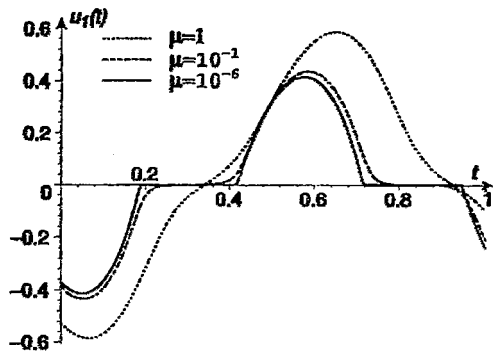


Рис. 2.

**Пример 2.** Задача быстрогодействия:  $\dot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u, x \in R^m, u \in U \subset R^m, \alpha, \beta \in R^{m \times m}, x(0) = a_0, \dot{x}(0) = b_0, x(T) = a_1, \dot{x}(T) = b_1, T \rightarrow \min$ . При  $m = 2$  область управления  $U$  — лунка, при  $m = 3$  — тело, полученное вращением лунки вокруг ее вертикальной оси. Применяется описанная выше схема. Краевая задача принципа максимума содержит  $4m + 1$  уравнений. Область управления конструктивно сглаживается до телесного выпуклого компакта в пространстве  $R^{2m}$ .

1. S.N.Avakumov, Yu.N.Kiselev. Boundary value problem for ordinary differential equations with applications to control. Proceedings of National Taurida Vernadskii University. Sympheropol. 1999.

<sup>1</sup>Работа поддержана УРФИ-43,5199, РФФИ-01051.

## Особенности построения курса математики на основе теории учебной деятельности

Многолетнее исследование в области теории и практики системы развивающего образования (РО) Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова привели к созданию принципиально нового курса начальной математики, открыв подходы к конструированию курса математики как для основной, так и для средней школы.

Характерной особенностью этого курса является построение его как *системы теоретических понятий*, формирующих у ребёнка новый тип знаний, называемых теоретическими, в которых раскрывается процесс происхождения этих знаний, когда мысль ребёнка движется от общего к частному, что приводит к развитию и формированию теоретического типа мышления, к которому относится и математическое мышление.

Включение в деятельность ребёнка математических понятий, в частности, понятия действительного числа, как модели кратного отношения величин, является важнейшим условием формирования у учеников механизмов, позволяющих им ставить перед собой очередные задачи и находить средства и способы их решения. Многообразие частных проявлений отношений между величинами (исходной "клеточке") позволяет ученикам открывать новые виды чисел в зависимости от того, каковы условия решения учебно-практической задачи на измерение величин. В процессе решения таких задач, выстроенных в жёстко заданной последовательности, определяющей логику построения курса математики, интенсивно формируются такие важнейшие учебные действия, как *анализ* свойств объекта, с которым действует учащийся, и *моделирование*, позволяющее зафиксировать выделенные свойства "в чистом виде" и соотнести с ним способ действия. Без овладения ребёнком этих основных действий немислимо развитие *действий контроля* и содержательной *оценки*, характеризующих результативность присвоения учебной деятельности.

Развитию математического мышления, которое является мышлением теоретического типа, способствует особый способ обобщения – теоретический, когда учащийся обобщает способ решения на основе анализа решения одной задачи (обобщение "с места"). Это значит, что подбор такой *одной задачи* (это и есть учебно-практическая задача) дело непростое (примеры разных задач в курсе математики, претендующих на статус учебно-практических будут приведены в полном тексте).

Так или иначе, продуктом решения учебно-практической задачи является конструирование и присвоение общего *способа* решения всех задач данного класса, т. е. класса частных задач.



Однако более значимым представляется другой продукт – *метод* (способ поиска способа) установления зависимости между исследуемыми объектами. Так, например, рефлексия метода, положенного в основу конструирования таблиц сложения и умножения в начальной школе и исследование зависимости между компонентами действия, даёт возможность конкретизировать этот метод при изучении бинома Ньютона, в частности, при построении треугольника Паскаля.

Средством, фиксирующим и удерживающим всеобщее отношение (как всеобщий метод), найденное и выделенное в процессе *преобразования* условий учебной (учебно-практической) задачи, является учебная *модель*, содержание которой фиксирует *внутренние* характеристики объекта, не наблюдаемые непосредственно. Учебная модель, по выражению В. В. Давыдова, выступая как продукт мыслительного анализа, сама становится особым средством мышления человека. Процесс становления и развития разных типов моделей от предметных к знаковым, от линейных к пространственным, от материализованных к мыслительным в начальном курсе математики (1-6 классы) является необходимым условием овладения учащимися методом математического моделирования, который позволяет не только сводить исследование явлений внешнего мира к математическим задачам, но и позволяет проектировать собственное продвижение школьника в изучении математики. Он учится учесть самого себя.

Все высказанные в тезисах соображения иллюстрируются на примерах изучения конкретных математических понятий (число, степень, системы координат, функция и др).

## АКТУАРНЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ НАКОПЛЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ АКСИОМАМИ

Б.В. Алексеев, Д.В. Афанасьева (г.Чебоксары)

В данной работе рассматривается задача нахождения резерва чистой премии при произвольной схеме премиальных платежей. Считаем, что страховая компания вкладывает все полученные премии в некоторый инвестиционный проект, заданный функцией накопления общего вида

$$A = A(C, t_0, t), \quad (1)$$

где  $C$  - первоначальный капитал,  $t_0$  - дата вложения первоначального капитала,  $t$  - дата изъятия капитала. Мы предполагаем, что функция накопления (1) удовлетворяет аксиомам рациональности и состоятельности:

$$1.A(C, t, t) = C, 2.A(A(C, t_0, t_1), t_1, t_2) = A(C, t_0, t_2) \quad (2)$$

Рассмотрим человека в возрасте  $(x)$  с остаточным временем жизни  $T(x)$ , которое является случайной величиной с функцией распределения  $G_x(t)$ .

В дискретном случае поток задается премиями  $p_i$ , выплачиваемыми в моменты времени  $t_i$ , где  $i \geq 1$ . Пожизненный поток платежей состоит из  $n$  премий, где  $n = \max\{i : t_i \leq x + T(x)\}$ . Нами показано, что значение потока платежей на начальный момент времени  $t_0$  и его мат. ожидание с учетом функции накопления (1) имеют вид

$$V_n(t_0) = \dot{A}(A_n, t_n, t_0), \text{ где } A_n = A(A_{n-1}, t_{n-1}, t_n) + C_n \text{ и } A_1 = C_1, \quad (3)$$

$$E[V_n(t_0)] = \sum_{i=1}^{+\infty} A(A_i, t_i, t_0) \cdot (G_x(t_i) - G_x(t_{i+1})). \quad (4)$$

Непрерывный поток платежей задан на промежутке  $[t_0, T(x)]$  интенсивностью потока платежей  $\rho(t)$ . Нами доказано, что функция накопления вида (1) и значение потока платежей  $V(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$A'(t) = f(A(t), t), \text{ где } f(A, t) = A'_3(A, t, t), A(t_0) = C \quad (5)$$

$$V'(t) = f(V(t), t) + \rho(t), V(t_0) = A_0, \quad (6)$$

где  $A_0$  - сумма на момент времени  $t_0$ . Дисконтированное значение всего потока платежей на момент времени  $t_0$  равно  $A(V(T), T, t_0)$ . Среднее значение определяется формулой

$$E[A(V(T), T, t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} A(V(t), t, t_0) dG_x(t), \quad (7)$$

Таким образом, предложенный подход позволяет оценить резерв чистой премии, инвестированной в модель вида (1), который необходим для покрытия актуарной ответственности, возникающей при заданном потоке премиальных платежей.

## ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ И ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Андреева Е.А. (Тверь)

Задача об оптимальном использовании и восстановления природных ресурсов может быть формализована следующим образом. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T e^{-\delta t} f_0^l(x) u dt + \Phi(x(T))$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g^l(x)u, \quad x(0) = a \in R^n, \\ \int_0^T g_{n+1}^l(x) u dt &\leq B, \quad 0 \leq u(t) \leq u_0^l, \quad l = 1, 2, \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  локально оптимальный процесс, тогда оптимальное управление  $\bar{u}(t)$  определяется знаком функции переключения  $\psi^l(t)$ ,  $l = 1, 2$ :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_0^l, & \psi^l(t) > 0, \\ 0, & \psi^l(t) < 0, \end{cases}$$

а сопряженная вектор-функция  $p(t)$  является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \psi^l}{\partial x} u - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T p(t), \quad p(T) = 0, \quad \text{если } x_3(T) < B.$$

В точке  $\tau$  выполнено условие скачка

$$\begin{aligned} p(\tau - 0) &= p(\tau + 0) + \left\{ \sum_{i=1}^3 (u^+ g_i^2 - u^- g_i^1) p_i(\tau + 0) + e^{-\delta \tau} (u^- f_0^1 - u^+ f_0^2) \right\} \times \\ &\times \left[ \frac{dS}{dt}(\tau, x(\tau)) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}(\tau, x(\tau)), \end{aligned}$$

где

$$\psi^l(t, x, p) = -\lambda_0 e^{-\delta t} f_0^l(x) + \sum_{i=1}^3 p_i g_i^l(x),$$

Рассматривается приложение к задаче об оптимизации процесса рыбной ловли.

## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ РЫБНОЙ ЛОВЛИ

Андреева Е. А., Ждид М. А. (Тверь)

Рассматривается задача оптимизации уровня отлова популяции рыбы, состоящей из  $n$  возрастных классов. Модель учитывает смертность популяции  $\mu_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , время  $T_k$  перехода особи из  $k$  в  $k + 1$  класс. Объем выловленной рыбы в  $k$ -ом классе в момент времени  $t_i$  равен  $\alpha_k x_k^i u^i$ , где  $x_k^i$  — биомасса популяции, параметр  $\alpha_k$  характеризует размер рыболовецкой сети,  $p_k$  — стоимость рыбы. Управление  $u^i$ ,  $i = \overline{0, q-1}$  выбирается из условия максимизации прибыли и сохранения популяции рыбы.

Дискретная задача оптимального управления имеет следующий вид. Требуется найти максимум функции

$$I([u]) = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=1}^n (\alpha_k p_k x_k^i - 1) u^i e^{-\delta i} + (c, x^q)$$

при ограничениях

$$x_1^{i+1} = f^i(x^i) - \mu_1 x_1^i - \frac{x_1^i}{T_1} - \alpha_1 x_1^i u^i, \quad i = \overline{0, q-1},$$

$$x_2^{i+1} = \frac{x_1^i}{T_1} - \mu_2 x_2^i - \frac{x_2^i}{T_2} - \alpha_2 x_2^i u^i, \quad i = \overline{0, q-1},$$

...

$$x_{n-1}^{i+1} = \frac{x_{n-2}^i}{T_{n-2}} - \mu_{n-1} x_{n-1}^i - \frac{x_{n-1}^i}{T_{n-1}} - \alpha_{n-1} x_{n-1}^i u^i, \quad i = \overline{0, q-1},$$

$$x_n^{i+1} = \frac{x_{n-1}^i}{T_{n-1}} - \mu_n x_n^i - \frac{x_n^i}{T_n} - \alpha_n x_n^i u^i, \quad i = \overline{0, q-1},$$

где функция прироста популяции выбирается в виде

$$f^i(x^i) = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k^i \left( 1 - \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k x_k^i}{M} \right).$$

Задача решена при заданном начальном состоянии и двух типах ограничений на управление

а)  $0 \leq u^i \leq b$ ,  $i = \overline{0, q-1}$ ,

б)  $\sum_{i=1}^{q-1} u^i \leq B$ ,  $u^i \geq 0$ ,  $i = \overline{0, q-1}$ .

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анисимов А.И., Десятирикова Е.Н. (Воронеж)

В настоящей работе предлагается технология моделирования сложных систем целевого действия с принятием решений на основе объектно-ориентированного подхода к информационным системам с базами данных. Объектно-ориентированный подход, трактуемый в литературе достаточно широко как один из подходов к формализованному представлению знаний, развит в данной работе в направлении построения адекватной модели предметной области и практической реализации в информационной семантической системе, в полной мере удовлетворяющей требованиям открытости и масштабируемости. Разработана методология построения и имитации локальных моделей схем, содержащих четыре уровня описания сложной системы: технологической, технической, организационный и финансово-экономический.

Формализация процесса управления проведена способом модельной семантики, что обеспечивает максимальный уровень абстракции модели управляемой системы, позволяет учесть как влияние субъективного фактора в процессе принятия решений, так и случайные возмущения системы. При этом функция принятия решения соответствует семантическому преобразованию семантической информации и описана на языке исчисления математической логики, а процесс управления в целом - на языке исчисления операторных формул.

В свою очередь, формализация семантической информации решена на основе объектно-ориентированного подхода, являющегося непосредственным развитием реляционного представления знаний, как более низкого концептуального уровня абстракции. В рамках объектно-ориентированного системного анализа предметной области построена концептуальная модель предметной области в виде совокупности (множества) взаимосвязанных и обладающих поведением объектов (атомарных или структурированных). Оригинальная типизация объектов (на основании логической модели данных) позволила использовать фундаментальный принцип, имеющий важнейшее значение при построении систем, основанных на знаниях, - принцип разделения и обеспечения относительной независимости *базы знаний* (знаний, описывающих предметную область) и *метазнаний* (основа на которой реализуется механизм формализованной манипуляции знаниями о предметной области).

Такой подход позволил разработать методiku интегрирования систем с базами данных в единую интеллектуальную информационную систему и максимально задействовать в процессе управления современные компьютерные технологии.

# КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВОЙ, ГАРМОНИЧЕСКОЙ В $R^n$ ФУНКЦИИ, ОБРАЩАЮЩЕЙСЯ В НУЛЬ НА КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ КОНУСОВ

Астахов А.Т. (Воронеж)

В работе дано полное решение задачи: при каких  $\alpha_j$  существует ненулевая, гармоническая в  $R^n$  ( $n \geq 3$ ) функция, равная нулю на конечном числе конусов  $K_{\alpha_j} = \{(x_1, x') \in R^n : \|x'\| = \alpha_j x_1\}$ ? Эта задача была сформулирована в обзоре [1, с.494] (для случая  $n = 3$ ).

**Теорема.** Для существования ненулевой, гармонической в  $R^n$  ( $n \geq 3$ ) функции, равной нулю на конусах  $K_{\alpha_j}$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен Гегенбауэра из последовательности

$$P_{\kappa-i}^{\beta+i}(\cos \vartheta_1), \quad \beta = \frac{(n-2)}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, \kappa.$$

$$\kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{tg}(\vartheta_1) = \alpha, \quad j \leq \kappa - i.$$

для которого  $(1 + \alpha_j^2)^{-1/2}$  ( $1 \leq j \leq \kappa - i$ ), являются нулями.

Пусть  $K_{\alpha_j} = \{(x_1, x') \in R^n : \|x'\| = \alpha_j x_1\}$  — конусы в  $R^n$  с вершиной в начале координат и раствором  $\alpha_j$ .

Из теоремы следует

**Следствие.** Если гармоническая в  $R^n$  функция  $u(x)$  равна нулю на счетном числе конусов  $K_{\alpha_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_i \neq \alpha_m$  когда  $i \neq m$ , то  $u(x) \equiv 0$ .

Автор благодарен доктору физ.-матем. наук В.З. Мешкову за внимание к работе.

## Литература

1. Barth K. F., Brannan D. A. and Hayman W. K. Research problems in complex analysis // Bull. Lond. Math. Soc. — 1984. — V.16, №5. — P.490–516.
2. Астахов А.Т. Гармонические функции, обращающиеся в нуль на конусах: критерий существования // Сиб.математич.журн. — 1999. — Т.40, №6. — С.1223–1225.

## КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГРЕВА КОНСТРУКЦИЙ

И.Ф.Астахова , А.Н.Журбин (Воронеж)

В работе рассматривается комплекс моделей предметной области, состоящий из математической модели расчета прогрева конструкций и концептуальной (реляционной) модели базы данных, необходимых для реализации этих моделей на ЭВМ. Концептуальная модель представлена с помощью *диаграмм взаимосвязей между объектами (Entity Relationship Diagram) - ERD*. Объект (*Entity*) - это некоторый элемент (*сущность*) применительно к конкретной предметной области. Данная модель базы данных состоит из сущностей: *Material, Build, Profile, Constr, Cr\_Pt, Source, Cr\_Mt* и взаимосвязей между этими объектами с числовыми атрибутами. Эти числовые данные предназначены для определения входных данных при инициализации вычислительного ядра комплекса.

Две таблицы *\_Profile* и *\_Constr* в этой базе данных предназначены для хранения числовых характеристик и графических представлений стандартных конструкций используемых в строительстве. Графические призваны служить максимальной визуализации информации и облегчения работы пользователя. Таблица *\_Profile* содержит данные по стандартным металлическим профилям, а таблица *\_Constr* - данные по перекрытиям.

Для совместной реализации математической модели и модели баз данных разработан алгоритм, реализованный в среде визуального программирования DELPHI с базой данных, созданной с помощью SQL. Программный комплекс состоит из модулей, объединенных в одном проекте. Один из модулей реализует многооконный интерфейс пользователя, состоящий из набора диалогов и позволяющий запускать часть программного продукта или весь и выбирать необходимые данные из баз данных.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕКУЧЕСТИ И РАЗРУШЕНИЯ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

Багмутов В.П., Богданов Е.П. (Волгоград )

Целью работы является изучение коллективного взаимодействия зерен и моделирование различных пороговых состояний, определяемых видом и структурой материала, а также условиями испытаний. Для этого разработан комплекс аналитических и численных моделей поликристаллического материала, позволяющий на основе разных гипотез определить напряженно-деформированное состояние зерен. Для материалов с кубическим типом кристаллической решётки изучались компоненты тензора микронапряжений в осях, совпадающих с осями главных макронапряжений, нормальных микронапряжений на плоскостях спайности и касательных напряжений в системах скольжения. Для них получены закономерности изменения моментов первого и второго порядков от вида напряжённого состояния. Для нормальной микронеоднородной среды разработаны два статистических критерия текучести, базирующиеся на различных видах пороговых состояний, предшествующих течению, которые позволили описать различное деформационное поведение ОЦК и ГЦК металлов в широком интервале температур. Разработаны два статистических критерия разрушения, базирующихся на различных процессах микроразрушения и формирования макротрещины, зависящих от уровня локальной прочностной анизотропии.

Для различных процессов текучести и разрушения получены теоретические зависимости изменения интенсивности деформации при разрушении от параметра Лоде и отношения шарового тензора к интенсивности напряжений, что позволило объяснить ряд известных «аномальных» эффектов, полученных экспериментально.



## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МАССОПЕРЕНОСА В СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМЫ МИТТАГА-ЛЕФФЛЕРА И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Баклушини М.Б., Жураев Г.У. (г. Ташкент)**

В общем случае нестационарные процессы массопереноса в многослойных системах описываются математическими моделями сложной структуры, как правило, решаются с применением численных методов. Однако, в зависимости от конкретной области исследования, можно применять ту или иную математическую модель, вполне отражающую физику явлений, происходящих в слоистых пористых средах, и для таких моделей получить достаточно простые приближенно-аналитические решения. Такие расчеты были произведены в задачах миграции и загрязнения, при прогнозе гидрохимического режима почвогрунтов и грунтовых вод, при орошении, промывках, осушении земель и т.д. Вследствие интенсивного развития сельского хозяйства, в частности хлопководства, промышленности, а также бурного роста городов экологическая ситуация в Узбекистане требует глобальной оценки в области мониторинга окружающей среды. В целом в Узбекистане наметилась необходимость научного обеспечения улучшения экологической обстановки и рационального использования природных ресурсов. Достаточно обратить внимание на то, что при регулировании потока влаги на поверхности земли можно добиться значительной экономии водных ресурсов в республике, что непосредственно связано с динамикой мелиоративного водопотребления. Такие решения нашли применение при решении обратных задач математической физики, когда необходимо было определить физические параметры, входящие в математическую модель. Это осуществлялось путем сопоставления данных эксперимента с решением математической модели приближенной к условию проведения полевых исследований в многослойных системах.

Показано, что при моделировании процесса массопереноса в ограниченных областях, содержащих многослойные пористые среды, получение приближенно-аналитического решения значительно упрощается, если использовать теорему Миттага-Леффлера о представлении мероморфных функций в виде сумм главных частей в сочетании с методом конечных элементов после применения подходящего интегрального преобразования по соответствующим координатам.

## ТЕОРЕМА О СВЯЗИ МЕТОДОВ КОМПЛЕКСНОЙ И МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Бекмаганбетов К.А. (Караганда)

В работе Е.Д.Нурсултанова [1] был введен метод многопараметрической интерполяции  $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ ,  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , являющийся обобщением вещественного метода Ж.Л.Лионса и Я.Петрса [2].

Нами исследуется связь данного метода с методом комплексной интерполяции, а именно справедлива следующая теорема.

**Теорема 1** а) Если  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ ,  $1 \leq \vec{q} \leq \infty$  и  $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$ , то

$$(\bar{A}_{[\theta_0]}, \bar{A}_{[\theta_1]})_{\eta\vec{q}} = \bar{A}_{\theta\vec{q}}.$$

б) Если  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ ,  $1 \leq \vec{q}_0, \vec{q}_1 \leq \infty$  и  $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$ ,  $1/\vec{q} = (1 - \eta)/\vec{q}_0 + \eta/\vec{q}_1$ , то

$$(\bar{A}_{\theta_0\vec{q}_0}, \bar{A}_{\theta_1\vec{q}_1})_{[\eta]} = \bar{A}_{\theta\vec{q}}.$$

**Замечание 1** Данная теорема является обобщением теоремы о связи методов вещественной и комплексной интерполяции Г.Е.Караджова [3].

## Литература

- [1] Нурсултанов Е.Д. Многопараметрический интерполяционный функтор и пространства Лоренца  $L_{p\vec{q}}$ ,  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ // Функциональный анализ и его приложения, т. 31, symbol242 2, 1997, с. 79–82.
- [2] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [3] Караджов Г.Е. Об интерполяционном методе средних для квазинормированных пространств// Българска Академия на науките, Известия на математически институт, т. 15, 1974, с. 191–207.

## НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ.

Белоножко Д.Ф., Григорьев.А.И., Кузьмичев Ю.Б. (Ярославль)

В конце прошлого века Рэлей построил линейную модель развития неустойчивости сильно заряженной капли. Различные обобщения этого исследования постепенно превратились в самостоятельное научное направление, имеющее важное прикладное и академическое значение. Теоретические исследования обсуждаемой неустойчивости Рэрея длительное время ограничивались линейными моделями, и лишь недавно появились работы, принимающие во внимание нелинейный характер явления. В связи со сказанным, предложено решение задачи Рэрея в квадратичном приближении по малой амплитуде начального отклонения формы капли от сферической. Задача решена методом прямого разложения по малому параметру уравнений электро-гидродинамики идеальной проводящей жидкости и соответствующих им граничных условий. Построенная модель позволяет оценить характерное время развития неустойчивости, тогда как линейные модели для этой цели не годятся. В частности, в проведенном анализе выяснилось, что капелька воды миллиметрового размера, несущая критический в смысле устойчивости заряд, существует как целое, в течении порядка десятка секунд, и только после этого распадается. Такой большой интервал времени легко фиксируется в эксперименте, и сам эффект может быть зарегистрирован. В экспериментах по проверке критерия Рэрея и исследованию закономерностей распада сильно заряженной капли, экспериментаторы работали с каплями на порядок меньшего размера, и в силу инерционности системы с электростатическим подвесом капли и ее свободным испарением на указанную задержку во времени не обратили внимания. Кроме предсказания конкретных физических эффектов, развитая математическая модель важна, как естественная основа для дальнейшего обобщения линейной задачи.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИЙ  
Беляева Н.П. (г.Переславль-Залесский) Дмитриев М.Г.  
(г.Москва)

Рассматриваются начальные задачи с параметром вида

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \quad t \in [0, 1],$$

$$y(0, \epsilon) = y^0, \quad z(0, \epsilon) = z^0$$

и краевые задачи с параметром вида

$$\epsilon \frac{dz_1}{dt} = F_1(z, y, t), \quad \epsilon \frac{dz_2}{dt} = F_2(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \quad t \in [0, 1],$$

$$y(0, \epsilon) = y^0, \quad z_1(0, \epsilon) = z_1^0, \quad z_2(1, \epsilon) = z_2^0,$$

где  $z_1, F_1$  -  $k$ -мерные,  $z_2, F_2$  -  $(M - k)$ -мерные,  $y, f$  -  $n$ -мерные вектор-функции,  $z$  - вектор-функция размерности  $M$ , составленная из векторов  $z_1, z_2, F$  - вектор-функция размерности  $M$ , составленная из векторов  $F_1, F_2$ , параметр  $\epsilon \in [0, \infty)$ .

Предлагаются модификации Паде - аппроксимаций начальных и краевых задач с параметром, позволяющие получить приближенные аналитические представления для параметрического семейства решений во всей области изменения параметра. Паде - аппроксимация приближенных решений строится на основе двух асимптотик - при малых и при больших значениях параметра и является своеобразным "мостом" между асимптотиками. В качестве предельных асимптотик использовалась асимптотика метода погранфункций Васильевой А.Б. при  $\epsilon \rightarrow 0$  [1] и регулярная асимптотика при  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Для указанных двух классов начальных и краевых задач доказываются теоремы, гарантирующие построение Паде - аппроксимаций при условиях, достаточных для построения асимптотик при  $\epsilon \rightarrow 0$  [1]. Вычислительные эксперименты показали [2], что Паде - аппроксимации существенно расширяют области применения асимптотических разложений.

#### Литература

1. Васильева А.Б, Бутузов В.Ф.. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.
2. Н.П. Беляева, М.Г. Дмитриев. Сравнение асимптотик решения начальной задачи с параметром на основе Паде - аппроксимации, В кн.: "Программные системы", М.: Наука, 1999, с.66-71.

Линия уравнений и неравенств – одна из основных содержательных линий курса элементарной математики. Уравнения и неравенства и их системы решаются в школе на протяжении всего курса математики (5-11 кл.). По мере изучения новых видов функций учащиеся знакомятся с соответствующими видами уравнений и неравенств. И наиболее трудным для них является логическое обоснование методов решения, о чем свидетельствуют результаты выпускных экзаменов за курс алгебры и начал анализа, а также вступительных экзаменов в вузы. Чаще всего школьники не видят необходимости таких обоснований. Решая уравнение (неравенство) учащиеся охотнее всего пытаются использовать метод равносильных преобразований. Но о какой степени обоснованности решений можно говорить, если в действующих школьных учебниках по алгебре нет практически теории равносильности, если не считать самого определения равносильных уравнений и двух свойств, приведенных в пособиях основной школы. Ученик обоснованно не может решить даже линейное уравнение вида  $2(x-3)+6x-8=x$  (1). Обычно он решает так:  $2x-6+6x-8=x$  (2);  $2x+6x-x=8+6$  (3);  $7x=14$  (4);  $x=2$  (5). А потом нередко еще делает проверку перед написанием ответа. Равносильность пар уравнений (2) и (3); (4) и (5) по известным свойствам доказывается. Но почему равносильны следующие пары уравнений: (1) и (2); (3) и (4); (1) и (5)? А на каком основании авторы пособия [3] утверждают, что уравнение

$\sqrt{x-2} = x-8$  равносильно системе  $\begin{cases} x-2 = (x-8)^2, \\ x-8 > 0. \end{cases}$  Почему в школьных пособиях

по математике нет теории равносильности уравнений (неравенств) и их систем? Начнем с понятия равносильности. Наиболее распространено такое определение: "Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней." [2]

Уязвимость этого определения в том, что не указано, а на каком множестве  $M$  эти уравнения равносильны? В одном из полных курсов элементарной математики [1] равносильность уравнений (систем) вводится над некоторым числовым полем. Приводятся теоремы равносильности, но все они имеют очень много ограничений, что затрудняет их применение. Поэтому для учащихся средних школ они вряд ли доступны.

На наш взгляд представляется естественным в определении равносильности уравнений (неравенств, систем уравнений, систем неравенств) в качестве множества  $M$ , над которым мы будем рассматривать равносильность (эквивалентность) уравнений, брать пересечение их областей определения.

**Определение.** Два уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  (1) с областью определения  $M_1$  и  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$  (2) с областью определения  $M_2$  называются равносильными над множеством  $M$ , где  $M = M_1 \cap M_2$ , если множество всех решений уравнения (1) во множестве  $M$  и множество всех решений уравнения (2) в том же множестве  $M$  совпадают".

Разработанная нами теория равносильности уравнений (неравенств) и их систем при таком определении вполне доступна для учащихся и удобна в применении. Приведем некоторые из теорем.

Теорема 1. Если в одной или обеих частях уравнения произвести тождественные преобразования, то полученное уравнение равносильно данному.

Теорема 2. Если к обеим частям уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  прибавить одно и то же выражение  $c(x)$ , то полученное уравнение  $f_1(x) + c(x) = f_2(x) + c(x)$  равносильно данному.

Теорема 3. Два уравнения, равносильные третьему, равносильны между собой.

В выше приведенном решении линейного уравнения переход от (1) ко (2), от (3) к (4) обеспечивает теорема 1, а уравнение (1) равносильно (5) по теореме 3.

#### Литература

1. С.И.Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры. – М.Просвещение, 1965.
2. В.А.Гусев, А.Г.Мордкович. Математика. Справочные материалы. – Москва: Просвещение, 1988.
3. Алгебра и начала анализа, 10-11 (под редакцией А.Н.Колмогорова). – :Просвещение, 1990.
4. М.И.Башмаков. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 кл. средней школы. –М.Просвещение, 1993.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ БАЗИСАМИ

Е. И. Бережной(Ярославль)

Дифференциальным базисом  $B(t)$  в точке  $t \in R^n$  называется семейство содержащих  $t$  ограниченных измеримых множеств положительной меры таких, что найдется по крайней мере одна последовательность  $\{B_k \in B(t)\}$ , удовлетворяющая условию  $\text{diam} B_k \rightarrow 0$ . Дифференциальным базисом в  $R^n$  называется объединение указанных семейств  $B = \{UB(t) : t \in R^n\}$ .

Одна из основных задач теории дифференцирования интегралов имеет вид: пусть  $X, Y$  два различных в каком-нибудь смысле пространства. Можно ли эти два пространства различить с помощью дифференциальных базисов, т.е. существует ли дифференциальный базис, который дифференцирует все интегралы от функций из  $X$ , но не найдется функция из  $Y$ , интеграл от которой данный базис не дифференцирует. Эта проблема еще далека от своего окончательного решения. Недавно нами предложен новый способ построения дифференциальных базисов. Базисы, построенные этим способом, позволяют различать два симметричных пространства с различным поведением фундаментальных функций в нуле и даже позволяют различать пространства Лоренца и Марцинкевича или пространства Лебега и Марцинкевича, у которых фундаментальные функции одинаковы. Наряду с задачей различения пары пространств можно рассматривать задачу различения пространства  $X$  и набора пространств  $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  с помощью одного дифференциального базиса. В настоящем докладе будут обсуждаться последние достижения по проблеме различения пар и наборов симметричных пространств.

Базисы, используемые для решения задач различения, достаточно сложны по конструкции. С другой стороны, базисы из прямоугольников в  $R^2$  легко описываются. Хорошо известны следующие факты: базис из квадратов дифференцирует  $L^1$ , базис из прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, дифференцирует  $L^1(\text{Log} L)$ , а базис из прямоугольников с произвольно ориентированными сторонами не дифференцирует даже  $L^\infty$ . Вторая часть доклада будет посвящена обсуждению вопроса о том, какие симметричные пространства могут дифференцировать базисы, построенные из прямоугольников со специальными свойствами.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00355).

## ОБОБЩЕНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ ЛЮБОГО ЧИСЛА ВИДОВ

Бирюк Н.Д., Епифанцев Ю.Ф., Ковалева Т.А., Сливкин А.И. (г. Воронеж)

Многие экологические процессы развиваются очень медленно (на протяжении многих десятилетий), поэтому прямой экспериментальный подход к их изучению невозможен, тогда как математические модели могут его заменить. Методологически оправданным представляется построение простейших моделей, включающих, как в известной модели Вольтерра, наименьшее число видов:

$$dx_1/dt = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 \quad dx_2/dt = \gamma_2 x_1 x_2 - \varepsilon_2 x_2,$$

где  $x_1, x_2$  - численность зайцев и волков в популяциях соответственно;  $\varepsilon_1$  - коэффициент прироста зайцев;  $\gamma_1$  - коэффициент убыли численности зайцев;  $dx_1/dt$  - изменение численности зайцев в единицу времени;  $dx_2/dt$  - изменение численности волков в единицу времени;  $\gamma_2$  - коэффициент прироста численности волков;  $\varepsilon_2$  - коэффициент естественной убыли волков.

Эта задача была многократно рассмотрена для ограниченной части пространства (остров) при наличии неограниченных пищевых ресурсов для зайцев. Поэтому скорость прироста и естественной убыли зайцев, пропорциональны их количеству. Скорость прироста волков представлена первым членом второго уравнения, естественная убыль численности волков описывается вторым членом того же уравнения. Обобщим эту задачу для случая, когда запасы капусты сравнимы с потребностями зайцев (для 3-х видов). Тогда вместо предыдущих уравнений будем иметь:

$$dx_1/dt = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 \quad dx_2/dt = \gamma_2 x_1 x_2 - \varepsilon_2 x_2 - \gamma_3 x_2 x_3 \quad dx_3/dt = \gamma_4 x_2 x_3 - \varepsilon_3 x_3,$$

где  $x_1$  - масса капусты;  $x_2$  - численность зайцев;  $x_3$  - численность волков;  $\varepsilon_1, \gamma_2, \gamma_4$  - коэффициенты прироста массы капусты, зайцев, волков соответственно;  $\gamma_1, \gamma_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - коэффициенты убыли массы капусты, зайцев, волков соответственно. Последняя система уравнений, может быть обобщена для  $n$  видов:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 \\ dx_n/dt &= \gamma_{2n-2} x_{n-1} x_n - \varepsilon_n x_n - \gamma_{2n-1} x_n x_{n+1} \\ dx_n/dt &= \gamma_{2n-2} x_{n-1} x_n - \varepsilon_n x_n. \end{aligned}$$

В векторном виде это уравнение можно представить компактно:

$$d/dt \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

Таким образом, используя это уравнение можно представить более наглядно картину процессов, происходящих в реальных экосистемах и получить информацию об их устойчивости по отношению к возмущающим факторам.



# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАВЕНСТВА НУЛЮ ИНДЕКСА ОСОБОЙ ТОЧКИ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Близняков Н.М. (Воронеж)

Пусть  $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m x^m$  — ряд и  $\Gamma$  — его многогранник Ньютона. Многогранник  $\Gamma$  называется удобным, если он пересекает все координатные оси.

Пусть

$$F = (F_1, \dots, F_n) \quad (1)$$

— аналитическое векторное поле в  $\mathbb{R}^n$  с особой точкой  $0$  и удобными многогранниками Ньютона  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  компонент поля. Пусть  $\Delta$  — некоторая  $k$ -мерная грань,  $1 \leq k \leq n-1$ , многогранника  $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$  и  $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \dots + \alpha_n^{(\Delta)} y_n = d^{(\Delta)}$  — уравнение некоторой гиперплоскости  $H^{(\Delta)}$ , опорной к многограннику  $\Gamma$  и такой, что  $\Gamma \cap H^{(\Delta)} = \Delta$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $\alpha_1^{(\Delta)}, \dots, \alpha_n^{(\Delta)}, d \in \mathbb{Z}$  и  $\text{НОД}(\alpha_1^{(\Delta)}, \dots, \alpha_n^{(\Delta)}) = 1$ . Пусть  $H_j^{(\Delta)}$  — гиперплоскость, параллельная грани  $\Delta$  и опорная к многограннику  $\Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Обозначим  $F_{i,\Delta}$  — многочлен, получающийся из функции  $F_i$  сужением носителя  $\text{supp } F_i$  на множество  $H_i^{(\Delta)} \cap \Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $\alpha_{k\Delta}^{(\Delta)}$  — некоторое нечетное число из чисел  $\alpha_1^{(\Delta)}, \dots, \alpha_n^{(\Delta)}$ . Обозначим  $P_{i,\Delta} = F_{i,\Delta}(x_1, \dots, x_{k\Delta-1}, 1, x_{k\Delta+1}, \dots, x_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Векторное поле (1) назовем  $\mathbb{R}$ -невырожденным в нуле, если для всякой грани  $\Delta$  размерности  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-2$  многогранника  $\Gamma$  система уравнений

$$P_{1,\Delta} = \dots = P_{n-1,\Delta} = 0 \quad (2)$$

не имеет решений в  $(\mathbb{R} \setminus 0)^{n-1}$ , и для всякой  $(n-1)$ -мерной грани  $\Delta$  многогранника  $\Gamma$  множество решений в  $(\mathbb{R} \setminus 0)^{n-1}$  системы (2) конечно, а система уравнений  $P_{1,\Delta} = \dots = P_{n-1,\Delta} = P_{n,\Delta} = 0$  не имеет решений в  $(\mathbb{R} \setminus 0)^{n-1}$ .

**Теорема.** Если векторное поле (1)  $\mathbb{R}$ -невырождено в нуле и диаграмма Ньютона ряда  $\prod_{i=1}^n F_i$  не содержит точек целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^n$ , все координаты которых нечетны, то  $0$  — изолированная особая точка поля (1) и  $\text{ind}(F, 0) = 0$ .

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 99-01-00390) и программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект N 3673).

**Литература.** [1] Bliznyakov N.M. Cauchy Indices and the Index of a Singular Point of a Vector Field // Lecture Notes in Mathematics. - v.1214, 1986. - P.1-20.

## О МНОЖЕСТВАХ НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ КРАТНОГО РЯДА ФУРЬЕ

И. Л. Бнонанский (Москва)

В случае  $N = 1$  в 1919 г. Х.Хан и в 1921 г. В.Серпинский доказали: если дано множество  $\mathcal{A}$  типа  $F_{ab}$ , то существует ряд из непрерывных функций  $\sum_k f_k(t), t \in [a, b], a, b \in \mathbb{R}^1$ , частные суммы которого равномерно ограничены, а сам ряд сходится к нулю на  $\mathcal{A}$  и ограниченно расходится вне  $\mathcal{A}$ . Если же множество  $\mathcal{A}$  имеет тип  $F_0$ , то оно является множеством сходимости некоторого ряда из непрерывных функций, причем этот ряд неограниченно расходится вне  $\mathcal{A}$ . Заметим, что множество сходимости указанного ряда не обязательно — множество сходимости к нулю. В 1918 г. А.Райхман построил для заданного замкнутого множества  $\mathcal{A} \subset T^1 = [0, 2\pi]$  пример тригонометрического ряда, который сходится к нулю на  $\mathcal{A}$  и неограниченно расходится на  $\mathcal{B} = T^1 \setminus \mathcal{A}$ . В 1926 г., когда был построен пример А.Н.Колмогорова (пример функции  $f \in L_1(T^1)$ , ряд Фурье которой неограниченно расходится в каждой точке  $T^1$ ), указанный результат А.Райхмана стало возможным перенести и на ряды Фурье. Далее, при решении задачи по описанию множества  $\mathcal{A}$  — множества сходимости (в каждой точке) функциональных рядов, тригонометрических рядов, рядов Фурье — при условии расходимости ряда в каждой точке дополнения, (т.е. в каждой точке множества  $\mathcal{B}$ ) от требования сходимости к нулю фактически "отказались", (см., например, работы Ф.Пердота, Г.Пираиана 1949 г., С.В.Стечкина 1951 г.). Наконец, в 1955 г. К.Целлер доказал следующий результат

**Теорема А.** Для любого множества  $\mathcal{A} \subset T^1$  типа  $F_0$  существует функция из  $L_1$ , ряд Фурье которой сходится в каждой точке  $\mathcal{A}$  и неограниченно расходится в каждой точке множества  $\mathcal{B} = C\mathcal{A}$  — типа  $G_b$ .

**Замечание.** Отметим, что и в работах после 1955 г. (относящихся к рассматриваемой задаче) сходимости к нулю уже "не возникает" см., например, работы 1971 г. Т.Кернера, 1974 г. В.В.Вуздалина, 1976 г. М.А.Лузяной, 1980 г.С.Ю.Лукашенко и др.

Таким образом, указанный результат К.Целлера является усилением результата Х.Хана — В.Серпинского на случай рядов Фурье, когда множество  $\mathcal{B}$  имеет тип  $G_b$  и когда не требуется сходимости к нулю на  $\mathcal{A} = C\mathcal{B}$  (как в более ранних работах других авторов). Заметим, что нельзя перенести на случай рядов Фурье результат Х.Хана — В.Серпинского, если требовать сходимости к нулю на  $\mathcal{A}$ , т.е. неверно, что для любого множества  $\mathcal{B}$  типа  $G_b$  существует ряд Фурье функции из  $L_1$ , расходящийся в каждой точке множества  $\mathcal{B}$  и сходящийся к нулю на его дополнении, даже если мера такого множества больше нуля (например, если в качестве  $\mathcal{B}$  взять множество типа  $G_b$ , имеющее изолированные точки). Что касается случая  $N \geq 2$ , то, кроме достоящего тривиальных обобщений одномерного случая, результатов в этом направлении фактически не было. В этой связи отметим, что, мы также исследовали задачу по описанию множеств расходимости почти всюду (п.в.) кратных рядов Фурье ( $N \geq 1$ ) функций, равных нулю на заданном множестве. Результатами этих исследований была посвящена серия работ, где, в частности, были получены окончательные результаты для  $N = 1$ . Например, нами и была доказана

**Теорема В.** Для любого измеримого множества  $\mathcal{A} \subset T^1, 0 < \mu\mathcal{A} < 2\pi$  существует суммируемая функция, равная нулю на  $\mathcal{A}$ , одномерный ряд Фурье которой сходится к нулю п.в. на  $\mathcal{A}$  и неограниченно расходится п.в. на  $\mathcal{B} = C\mathcal{A}$ .

Заметим, что для  $N > 1$  даже последняя задача (о сходимости п.в.) существенно усложняется, вследствие появления, например, геометрической характеристики множества.

В настоящей работе мы формулируем следующий результат, касающийся задачи об описании множеств неограниченной расходимости в каждой точке кратных рядов Фурье.

**Теорема 1.** Для любого непустого открытого множества  $\mathcal{B} \subset T^N = [0, 2\pi]^N, N \geq 1$  можно построить функцию из  $L_1(T^N)$ , равную нулю на множестве  $\mathcal{A} = T^N \setminus \mathcal{B}$ , и такую, что кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции неограниченно расходится (в случае суммирования по квадратам) в каждой точке множества

$$E(\overline{\mathcal{B}}) = \bigcup_{j=1}^N (pr_{(j)}\overline{\mathcal{B}}) \times T^{N-1},$$

и сходится (в случае суммирования по прямоугольникам) к нулю в каждой точке множества  $T^N \setminus E(\overline{\mathcal{B}})$ . Здесь  $\overline{\mathcal{B}}$  — замыкание множества  $\mathcal{B}$ ,  $pr_{(j)}\overline{\mathcal{B}}$  — ортогональная проекция множества  $\overline{\mathcal{B}}$  на ось  $Ox_j, j = 1, \dots, N$ .

Более того, мы можем доказать, что кратный тригонометрический ряд Фурье любой функция из  $L_1(T^N)$ , равной нулю на множестве  $\mathcal{A}$  сходится (в случае суммирования по прямоугольникам) в каждой точке множества  $T^N \setminus E(\overline{\mathcal{B}})$ , если  $E(\overline{\mathcal{B}}) \neq T^N$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00355).

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННО-ОБРАТНЫХ  
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**  
Блюмян С.Л. (Липецк)

В математическом моделировании, при решении нелинейных задач о наименьших квадратах со специальной структурой, возникает проблема дифференцирования псевдо-обратных к векторным и матричным функциям [1]. Ниже представлен общий подход к подобному классу задач. Следует подчеркнуть, что речь идет не об обобщении правила "производная обратной функции", в простейшем случае функции одного переменного  $y = f(x)$  сводящегося к соотношению  $(f^{-1}(y))' = 1/(f(x))'$ , вытекающему из определения  $f^{-1}(f(x)) = x$  и цепного правила дифференцирования сложной функции, а об обобщении правила "производная минус первой степени функции", сводящегося к соотношению  $([f(x)]^{-1})' = -[f(x)]^{-2} \cdot (f(x))'$ , вытекающему из определения  $[f(x)]^{-1} = 1/f(x)$  или  $[f(x)]^{-1} \cdot f(x) = 1$  и правила дифференцирования произведения функций; таково, например, известное правило дифференцирования обратной матрицы  $([A(x)]^{-1})' = -[A(x)]^{-1} \cdot (A(x))' \cdot [A(x)]^{-1}$ ; значение такого представления состоит в том, что часто намного проще найти  $(A(x))'$  и  $[A(x)]^{-1}$ , а затем выразить через них  $([A(x)]^{-1})'$  (косвенный подход), чем непосредственно искать  $([A(x)]^{-1})'$ , дифференцируя  $[A(x)]^{-1}$  (прямой подход). Это тем более верно для обобщенно-обратных, хотя в общем случае косвенный подход не всегда дает результат, а если дает, то не всегда единственный.

Пусть в алгебраической структуре  $\mathbf{A}$  определены операция сложения  $a + b$ , умножения  $a \cdot b$  и дифференцирования  $d$  ( $d(a+b) = d(a) + d(b)$ ,  $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$ ), причем верны все последующие соотношения (таковы, например, дифференциальные кольца). Элемент  $a \in \mathbf{A}$  регулярен, если существует  $[a]^- \in \mathbf{A}$  - обобщенно-обратный к  $a$  - такой, что  $a \cdot [a]^- \cdot a = a$ . При прямом подходе сначала находится  $[a]^-$ , а затем  $d([a]^-)_d$  (здесь индекс  $d$  - direct). При косвенном подходе из  $d(a \cdot [a]^- \cdot a) = d(a)$ , или  $d(a) \cdot [a]^- \cdot a + a \cdot d([a]^-) \cdot a + a \cdot [a]^- \cdot d(a) = d(a)$ ,  $d([a]^-)_i$ ; (здесь индекс  $i$  - indirect) ищется как решение уравнения

$$a \cdot d([a]^-)_i \cdot a = d(a) - d(a) \cdot [a]^- \cdot a - a \cdot [a]^- \cdot d(a).$$

Критерий его разрешимости

$$a \cdot [a]^- \cdot (d(a) - d(a) \cdot [a]^- \cdot a - a \cdot [a]^- \cdot d(a)) \cdot [a]^- \cdot a = d(a) - d(a) \cdot [a]^- \cdot a - a \cdot [a]^- \cdot d(a)$$

сводятся к

$$d(a) - d(a) \cdot [a]^- \cdot a - a \cdot [a]^- \cdot d(a) + a \cdot [a]^- \cdot d(a) \cdot [a]^- \cdot a = 0$$

или, при наличии в  $\mathbf{A}$  единицы  $e$ , к

$$(e - a \cdot [a]^-) \cdot d(a) \cdot (e - [a]^- \cdot a) = 0,$$

а решение записывается в виде

$$d([a]^-)_i = [a]^- \cdot (d(a) - d(a) \cdot [a]^- \cdot a - a \cdot [a]^- \cdot d(a)) \cdot [a]^- + c - [a]^- \cdot a \cdot c \cdot a \cdot [a]^- =$$

$$[a]^- \cdot d(a) \cdot [a]^- - [a]^- \cdot d(a) \cdot [a]^- \cdot a \cdot [a]^- - [a]^- \cdot a \cdot [a]^- \cdot d(a) \cdot [a]^- + c - [a]^- \cdot a \cdot c \cdot a \cdot [a]^-$$

$[a]^-$ , с произволен (ср., например, [2]). Если  $[a]^-$  рефлексивен,  $[a]^- \cdot a \cdot [a]^- = [a]^-$ , то  $d([a]^-)_i = -[a]^- \cdot d(a) \cdot [a]^- + c - [a]^- \cdot a \cdot c \cdot a \cdot [a]^-$ . Если  $a$  обратим, то  $[a]^- = [a]^{-1}$  и единственный  $d([a]^{-1})_i = -[a]^{-1} \cdot d(a) \cdot [a]^{-1}$  совпадает с  $d([a]^{-1})_d$ . В общем случае  $d([a]^-)_d$  находится среди  $d([a]^-)_i$ ; и может быть

выделен надлежащим выбором  $c$ . Например, для  $a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) & a_2(x) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , псевдо-обратный  $[a]^+ = a^T / (a_1^2 + a_2^2)$ ,  $[a]^+ \cdot a = 1$ ; прямой подход дает единственную производную

$$\begin{aligned}
([a]^+)'_d &= [-(a_1^2 \cdot a_1' + a_1 \cdot a_2 \cdot a_2') + (a_1' \cdot a_2^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_2') \\
&\quad - (a_1 \cdot a_1' \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_2') + (a_1^2 \cdot a_2' - a_1 \cdot a_1' \cdot a_2)] / (a_1^2 + a_2^2)^2, \\
&\text{тогда как при косвенном подходе получаем множество} \\
([a]^+)'_i &= -[a]^+ \cdot (a)' \cdot [a]^+ + c \cdot (I - a \cdot [a]^+) = \\
&= - \begin{bmatrix} a_1^2 \cdot a_1' + a_1 \cdot a_2 \cdot a_2' & a_1 \cdot a_1' \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_2' \end{bmatrix} / (a_1^2 + a_2^2)^2 + \\
&\quad \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 \cdot a_2 \\ -a_1 \cdot a_2 & a_1^2 \end{bmatrix} / (a_1^2 + a_2^2), \\
&\text{из которого } ([a]^+)'_d \text{ выделяется выбором } c = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' \end{bmatrix} / (a_1^2 + a_2^2).
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Golub G., Pereyra V. The differentiation of pseudo-inverse and non-linear least squares problems whose variables separate // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. V. 10. P. 413-432.
2. Blyumin S., Milovidov S. Investigation and solution of matrix equations over associative rings // *Comp. Maths Math. Phys.* 1994. V. 34. P. 133-142.

## Синтез брэгговских рефлекторов для электронных ускорителей с квазиоптическим вводом излучения

Я.Л.Богомолов, М.И.Петелин, А.Д.Юнаковский (Н Новгород)<sup>1</sup>

Один из возможных вариантов ускоряющей структуры с квазиоптическим вводом макроволновой энергии представляет собой периодический набор металлических дисков, облучаемый сходящимся квазицилиндрическим потоком [1].

В докладе предложен метод синтеза профиля приосевой части дисков, образующих резонатор с достаточно высокой добротностью, а также нерегулярных междисковых волноводных каналов, позволяющих согласовать ускоряющую структуру с падающим волновым потоком. Найдена пороговая величина нерегулярности, обеспечивающая противофазный сдвиг между соседними каналами.

Проведено не только исследование теоретической возможности оптимизации параметров резонаторов для получения максимального однородного продольного электрического поля на оси проектируемого коллайдера, но и с учетом определенных технических ограничений предлагаются рецепты построения нерегулярностей волноводных секций, обеспечивающих формирование требуемого поля.

Исследование согласования области резонатора с узкими каналами проведено методом точечных источников для граничных интегральных уравнений [2].

## Список литературы

- [1] *M.I. Petelin, G. Caryotakis, A.A. Tolkachev, S.V. Kuzikov, G.K. Postoenko, M.L. Tai, A.D. Yunakovsky* Quasi-Optical Components for MMW Fed Radars and Particle Accelerators, Pajaro Dunas, California, 1998.
- [2] *Я.Л.Богомолов, М.И.Петелин, А.Д.Юнаковский*. Метод расчета электродинамических систем типа ускоряющей секции суперколлайдеров. 3-ий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), Новосибирск, Издательство Института Математики 1998 г. часть II, стр 7.

## ОБ ОДНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Боева И.В. (Владивосток)

Введем на интервале  $(0, \infty)$  сингулярный оператор

$$\begin{aligned} B_{\nu, \mu} &= \operatorname{sh}^{-2\nu}(\varphi) D_{\varphi} (\operatorname{sh}^{2\nu}(\varphi) D_{\varphi}) - \frac{\mu(\mu + 2\nu - 1)}{\operatorname{sh}^2(\varphi)} = \\ &= D_{\varphi}^2 + 2\nu \operatorname{cth}(\varphi) D_{\varphi} - \frac{\mu(\mu + 2\nu - 1)}{\operatorname{sh}^2(\varphi)}, \end{aligned}$$

где параметры  $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $D_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  и одномерный оператор преобразования  $S_{\nu, \mu}^{\nu+\mu}$  определяется при  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  по формуле  $S_{\nu, \mu}^{\nu+\mu} = A^{-1} I_{-1}^{\nu+\mu} A \operatorname{sh}^{-\mu}$ . Для краткости через  $\operatorname{sh}^{-\mu}$  обозначен оператор умножения на функцию  $\operatorname{sh}^{-\mu}(\varphi)$ . Оператор  $I_{-1}^{\nu+\mu}$  - лиувиллевский оператор, действующий на множестве  $\overset{\circ}{C}_{\{1\}}^{\infty}(1, \infty)$ , бесконечно дифференцируемых на  $(1, \infty)$  равных нулю в окрестности  $\infty$  функций, по формуле вида:

$$I_{-1}^{\nu+\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu + \mu)} \int_t^{\infty} (\tau - t)^{\mu + \nu + \mu - 1} f(\tau) d\tau, \quad \Re \mu > 0,$$

где  $\Gamma$  - гамма-функция Эйлера.

С помощью некоторых сплетающих формул доказывается справедливость основной в теории операторов преобразования теоремы.

**Теорема.** При  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  справедлива формула

$$S_{\nu, \mu}^{\nu+\mu} B_{\nu, \mu} f = (D^2 - \nu^2) S_{\nu, \mu}^{\nu+\mu} f,$$

где  $f \in \overset{\circ}{C}_{\{0\}}^{\infty}(0, \infty)$ .

К ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА  
Бойко В.К., Мишук С.А., Цехан О.Б (Беларусь, Гродно)

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in H^- = [-h, 0],$$

где  $A, B, C$  — постоянные  $n \times n$ -матрицы,  $\phi(t)$  — абсолютно непрерывная на  $H^-$  функция.

Пусть  $x(t, \phi), t \geq 0$ , — решение системы (1), порожденное начальной функцией  $\phi(t), t \in H^-$ .

**Определение.** Начальная функция  $\phi(t) \in D^n[-h, 0]$  называется обратимой, если решение  $x(t, \phi)$  можно единственным образом продолжить в силу системы (1) на отрезок  $[-2h, -h]$ .

В зависимости от свойств матричного пучка  $B + \lambda C$  вводятся различные понятия обратимости системы (1).

На системы нейтрального типа нельзя автоматически перенести понятие обратимости, предложенное в [1,2], так как для нее соответствующий оператор сдвига  $S(t)$  при  $t \geq h$  в общем случае не является вполне непрерывным.

Описаны множества начальных функций, для которых система (1) обладает тем или иным свойством обратимости.

Так, например, если матричный пучок  $B + \lambda C$  регулярен, то множество достаточно гладких обратимых начальных функций  $\phi(t), t \in H^-$ , определяется условием

$$\phi(-h) = \sum_{i=1}^{\nu} p^i [\phi^{(i)}(0) - \phi^{(i-1)}(0)],$$

где  $\nu, \nu \leq n$ , — натуральное число,  $Q, P$  — некоторые матрицы, вид которых определяется матричными параметрами системы (1).

Литература

1. Метельский А.В.// Доклады АН БССР. 1987. Т. 31, N 5. С. 393–396.
2. Метельский А.В.// Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, N 8. С. 1302–1311.

## О НЕРЕАЛИЗОВАННЫХ ДИДАКТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР В ШКОЛЕ

Т.Е.Бондаренко (г. Воронеж)

Изучение иррациональных выражений, уравнений и неравенств позволяет обсуждать с учащимися ряд вопросов, остающихся вне рамок традиционного рассмотрения темы.

Обучая тождественным преобразованиям корней, можно воспитывать у школьников понимание того, что процесс и результат производимых действий зависит от множества из области значений переменных, на котором мы работаем. Так, упрощая выражение  $A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}$ , получаем существенно разные ответы:  $-1$  при  $a \geq 0, b > 0$  и  $1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}$  при  $a \leq 0, b < 0$ .

При решении иррациональных уравнений возникают богатые возможности обсуждения вопросов равносильности. Так, при возведении уравнения в четную степень, при умножении обеих его частей на сопряженное выражение, возможно получение посторонних корней. Особый интерес вызывает появление посторонних корней при решении уравнения вида  $\sqrt[3]{f_1(x)} + \sqrt[3]{f_2(x)} = f_3(x)$ .

Вместе с тем, при решении иррациональных уравнений возможна и потеря корней. Так, при  $x \leq -2$  уравнение  $\sqrt{2x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt{x^2 - 15x + 14}$  приводимо к виду  $\sqrt{-2x} + \sqrt{-x-2} = \sqrt{14-x}$ . Корень  $x = -4$  полученного уравнения зачастую теряется.

Оперирование с корнями приводит к необходимости рассматривать выражения и уравнения со знаком модуля.

Таким образом, изучение иррациональных структур позволяет устанавливать взаимосвязи с различными разделами школьного курса математики. Реализация этих возможностей способствует систематизации и углублению подготовки учащихся.



**О ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ КЛЮЧЕВЫХ  
ФУНКЦИЙ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧАХ  
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Борзаков А.Ю., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

Вопрос о том, что дает интегрируемость уравнения экстремалей в сочетании со схемами конечномерных редукций функционалов, естественно наводит на мысль о возможности явных представлений ключевых функций. Эта возможность была реализована в [1],[2] для функционалов энергии эйлера и кирхгофа стержней (или, что эквивалентно, в задаче о петлеобразных траекториях лагранжева волчка). В [2] был описан также некоторый общий поход к задаче построения явных представлений для ключевых параметров Морса-Ботта и соответствующих им ключевых функций в классе интегрируемых 2-точечных краевых задач с выпуклыми нелинейностями. Подробно был изучен случай, в котором параметр нагрузки принадлежит интервалу между первым и вторым критическими значениями (случай одного ключевого параметра). Доклад посвящен описанию топологических свойств функционала энергии  $V(x, \lambda) = \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \cos x \right) ds$  на конфигурационном пространстве  $E = \{x(t) \in C^2([0, 1]) : x(0) = x(1)\}$  эйлера стержня с параметром нагрузки  $\lambda$ , принадлежащим интервалу между вторым и третьим критическими значениями. Явные выражения ключевых параметров Морса-Ботта через константы интегрирования дает явные формулы для маргинального отображения  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$  и ключевой функции  $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$ , что в итоге приводит к возможности компьютерной визуализации поведения  $V$ .

ЛИТЕРАТУРА: [1] Levchenko O.N., Saponov Yu.I. Morse-Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rod. // Methods and Applications of Global Analysis. Voronezh University Press. 1993. P.95-100.

[2] Сапронов Ю.И., Левченко О.Н. Явное представление конечномерных редукций в интегрируемых вариационных задачах. // Topological methods in nonlinear analysis. 1997. Gdan'sk. С.129-143.

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ МОДЕЛЕЙ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА"

Борздыко В.И. (Республика Таджикистан, г. Душанбе)

Рассмотрим модель "хищник-жертва", описываемую системой функционально-дифференциальных уравнений с непрерывным запаздыванием

$$x' = a(t)x - c_1(t)xy - b(t)x^2 + f(t) \quad (1)$$

$$y' = -e(t)y + c_2(t) \int_0^{\infty} x(t-h) d\alpha_1(h) \int_0^{\infty} y(t-h) d\alpha_2(h) + g(t),$$

где  $d\alpha_i(h) \geq 0$ ,  $\int_0^{\infty} d\alpha_i(h) = 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Коэффициенты системы (1) являются функциями времени  $t$ , что соответствует случаю нестационарной среды. Система (1) является обобщением известной модели Вангерски и Каннингэма.

**Теорема.** Пусть все коэффициенты системы (1) являются непрерывными  $\omega$ -периодическими функциями. Пусть  $a(t) > 0$ ,  $e(t) > 0$ ,  $b(t) > 0$ ,  $c_1(t) > c_2(t) > 0$ ,  $f(t) \geq 0$ ,  $g(t) \geq 0$ , ( $t \in [0, \omega]$ ). Тогда система (1) имеет по крайней мере одно нетривиальное, неотрицательное,  $\omega$ -периодическое решение  $x_1(t) \geq 0$ ,  $x_2(t) \geq 0$ , ( $t \in [0, \omega]$ ). При этом, если  $f(t) \not\equiv 0$ ,  $g(t) \not\equiv 0$ , то  $x_1(t) > 0$ ,  $x_2(t) > 0$ , ( $t \in [0, \omega]$ ).

Аналогичный результат имеет место и для обобщенной модели Мея [1]:

$$x'(t) = a(t)x(t) - c_1(t)x(t)y(t) - b(t)x(t)x[t - \tau_1(t)] + f(t)$$

$$y'(t) = -e(t)y(t) + c_2(t)x(t)y[t - \tau_2(t)] + g(t),$$

где  $\tau_1(t) \geq 0$ ,  $\tau_2(t) \geq 0$  непрерывные  $\omega$ -периодические функции.

Доказательство теоремы по своей методике близко к методу, приведенному в [2]. В основе этого метода лежит идея "альтернативного принципа" М.А. Красносельского.

## Литература

1. May R.M. // Princeton Univ. Press, Princeton, N J, 1974.
2. Борздыко В.И. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, " 10, с. 1671-1678.
3. Красносельский М.А. // Докл. АН СССР, 1963, Т. 152, " 4, с. 801-804.

**СВЯЗЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА УРАВНЕНИЯ  
РИККАТИ С УРАВНЕНИЯМИ ТОДЫ.  
А.А. Бормисов, Ф.Х. Мукминов (Стерлитамак).**

Пусть  $G = \oplus_{i \in Z} G_i$  —  $Z$ -градуированная алгебра Ли и  $a \in G_1$  — постоянный элемент. Рассматривается уравнение

$$U_{xy} = [[U, a], U_x] \quad (1)$$

на функцию  $U(x, y) \in G_{-1}$ . В координатах уравнение (1) записывается в виде системы

$$u_{xy}^i = C_{jk}^i u^j u_x^k, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

В работе [1] доказано, что алгебра  $G = \oplus_{i \in Z} G_i$  и элемент  $a \in G_1$  порождают систему (2) существуют при любом наборе констант  $C_{jk}^i$ .

Заметим, что уравнение (1) есть условие совместности следующей пары уравнений

$$\Psi_y = (a + [U, a])\Psi, \quad (3)$$

$$\Psi_x = U_x \Psi. \quad (4)$$

Пусть  $b \in G_{-1}$  — постоянный элемент и  $U(x, y)$  — решение уравнения (1), такое что  $U_x(x, y)$  принадлежит при всех  $x, y$  орбите элемента  $b$  относительно действия группы Ли алгебры Ли  $G_0$ . Тогда существует функция  $R(x, y)$  принимающая значение в группе Ли алгебры Ли  $G_0$ , удовлетворяющая соотношениям

$$R_y = [U, a]R, \quad R^{-1}U_x R = b, \quad R^{-1}R_x \in \text{Im}(\text{ad } b) \cap G_0. \quad (5)$$

При этом  $f = R_x R^{-1}$  — функция переменных  $U_x, U_{xx}$ .

Подставим  $\Psi$  в виде  $\Psi = R\tilde{\Psi}$  в уравнения (3), (4) выразив затем  $\tilde{\Psi}_x$  и  $\tilde{\Psi}_y$ . С учетом соотношений (5) будем иметь

$$\tilde{\Psi}_x = \left(\frac{1}{\lambda}b - R^{-1}R_x\right)\tilde{\Psi},$$

$$\tilde{\Psi}_y = \lambda R^{-1}aR\tilde{\Psi},$$

Последние уравнения, как известно, образуют представление нулевой кривизны для неабелевого уравнения Тоды.

Литература

1. А.А. Бормисов, Е.С. Гудкова, Ф.Х. Мукминов, Об интегрируемости гиперболических систем уравнений типа Риккати. Теор. Мат. Физ. т.113(2), 1997, с. 261-275.

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И СУБСТРУКТУРЫ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА В СИСТЕМЕ ПОДЛОЖКА - ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛЕНКА

Бугаков А.В., Гапонов А.А. (Воронеж)

Одним из перспективных методов анализа структуры границ раздела в кристаллических материалах является машинное моделирование, позволяющее определить энергию границы, релаксированную атомную структуру и субструктуру. В работе [1] изложена методика расчета и приведены результаты моделирования межфазных границ для металлических систем в широком интервале размерного и ориентационного несоответствия. Проведенное сравнение с экспериментальными результатами показало корректность используемой методики расчета.

Целью настоящей работы является развитие этой методики для анализа системы связанных между собой границ. Простейшим примером такой системы является тройной стык границ зерен или стык границы двух зерен растущей пленки с межфазными границами подложка - каждое зерно.

Была разработана методика моделирования для расчета границ между тремя кристаллами, обеспечивающая расчет энергии границ раздела и релаксированной атомной структуры и возможность анализа атомной структуры как межфазной, так и межзеренных границ.

Особенностью зернограницной структуры поликристаллической пленки, полученной при ориентированной кристаллизации на подложке, является определенный набор возможных ориентаций границ зерен, определяемый реализацией ориентационных соотношений на границе подложка-пленка. В качестве примера выбрана система Ni - (001) Au. При напылении Ni на поверхность (001)Au реализуется ориентационное соотношение

$$(110), <111> \text{ Ni} \parallel (001), <100> \text{ Au},$$

соответствующее кристаллизации пленки в четырех эквивалентных позициях. При этом в Ni возникают границы зерен следующих разориентаций: 19,5°, 90° и двойниковая (70,5°).

Проведен расчет энергии и релаксированной атомной структуры границ зерен указанных ориентаций и межфазных границ для различных ориентаций плоскости границ зерен. Определены оптимальные азимутальные и плоскостные ориентации границ зерен.

Проведен анализ релаксированной атомной структуры и дислокационной структуры границ раздела, показано поведение дислокационной субструктуры на стыке границ.

## Литература:

1. Бугаков А.В. Энергия, релаксированная атомная структура и субструктура межфазных границ в пленочных металлических структурах. Дис. На соис. уч. степ. док. физ.-мат. наук. - Воронеж, 1996. с. 294.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ КОМПОЗИЦИЙ

Бугаков А.В., Чижирыкин А.А. (Воронеж)

Свойства многослойных тонкопленочных композиций определяются как типом закладываемых в композицию материалов, так структурой и субструктурой получаемой системы: ориентацией, размером зерен в случае поликристаллических слоев, взаимной разориентацией зерен и фаз и соответствующей им атомной структурой и субструктурой границ. В свою очередь структурные и субструктурные характеристики пленок в многослойной композиции (МК) определяются механизмом роста, несоответствием параметров кристаллических решеток и поверхностных энергий компонентов, энергией межфазных границ, толщиной слоев, параметрами процесса роста.

В основе прогнозирования структуры многослойной композиции лежит энергетический критерий: ориентационным соотношениям должны отвечать локальные минимумы на ориентационной и размерной зависимостях энергии межфазных границ. На основе этого критерия были получены зависимости минимальной энергии  $E_{\min}$  от отношения параметров кристаллических решеток материалов, образующих МК. Эти зависимости представлены восемью таблицами, каждая из которых соответствует одному из возможных сочетаний плоскостных ориентаций, например, пленки ГЦК(110) на пленке ОЦК(001), пленки ОЦК(110) на ГЦК(111) и т.д. Эти 8 таблиц сгруппированы в три группы в зависимости от типов кристаллических решеток, образующих многослойную композицию металлов, и последовательности роста одного металла на другом: ГЦК-ГЦК, ГЦК-ОЦК, ОЦК-ГЦК. Первое поле в этих таблицах содержит значения отношения параметров кристаллических решеток ( $\alpha$ ) по возрастанию в диапазоне 0,7-1,44. Кроме этого каждой ориентации слоев соответствуют по два поля: первое содержит значения  $E_{\min}$ , второе - значения углов разориентации  $\theta$ . На основе этих табличных зависимостей и происходит определение ориентационных соотношений.

Процесс определения ориентационных соотношений МК, состоящей из двух компонентов А и В, был алгоритмизирован и программно реализован в рамках модуля проектирования структуры тонкопленочной композиции информационной системы. Ориентационные соотношения определяются послойно, сначала для роста пленки В на пленке А, затем пленки А на пленке В и т.д. до тех пор, пока не станет ясно эволюция структуры с увеличением числа слоев, чтобы можно было спрогнозировать структуру пленки в  $n$ -ом слое. Обычно для этого хватает 4-5 слоев, но при необходимости их число можно увеличить. С помощью вспомогательной таблицы ориентации и углы разориентации для каждого слоя преобразуются в привычные для пользователя ориентационные соотношения. Результатом работы является список ориентационных соотношений, ожидаемых при образовании МК.

## О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Вулгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А. (Тамбов)

Пусть  $\mathbb{R}^n$  - пространство  $n$ -мерных вектор-столбцов с нормой  $|\cdot|$ ;  $\text{compr}[\mathbb{R}^n]$  - множество всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$ ;  $B[u, r]$  - замкнутый шар пространства  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $u$  и радиусом  $r > 0$ ;  $B[u, 0] \equiv \{u\}$ . Пусть  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Обозначим  $\overline{V}$  замыкание множества  $V$ ,  $\text{co}V$  выпуклую оболочку множества  $V$ ;  $V^\epsilon \equiv \bigcup_{u \in V} B[u, \epsilon]$ , если

$\epsilon \geq 0$ ;  $\|V\| = \sup\{|u| : u \in V\}$ . Обозначим  $C^n[a, b]$  - пространство непрерывных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$ .

Обозначим через  $K([a, b] \times [0, \infty))$  множество всех функций  $\eta : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , обладающих следующими свойствами: при каждом  $\delta \in [0, \infty)$  функция  $\eta(\cdot, \delta)$  измерима; для каждого  $\delta \in [0, \infty)$  существует такая суммируемая функция  $m_\delta : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ , что при почти всех  $t \in [a, b]$  и всех  $\tau \in [0, \delta]$  выполняется неравенство  $\eta(t, \tau) \leq m_\delta(t)$ ; при почти всех  $t \in [a, b]$  справедливы равенства  $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \eta(t, \delta) = 0$  и  $\eta(t, 0) = 0$ .

Пусть  $\tilde{K}([a, b] \times [0, \infty)) \subset K([a, b] \times [0, \infty))$  - множество всех функций  $\eta : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , обладающих свойством: для любого  $\delta \geq 0$  найдется число  $\beta_\delta \geq 0$ , что при почти всех  $t \in [a, b]$  и всех  $\tau \in [0, \delta]$  выполняется неравенство  $\eta(t, \tau) \leq \beta_\delta$ .

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

где отображение  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$  удовлетворяет условиям Каратеодори.

Под решением включения (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющую включению (1) при почти всех  $t \in [a, b]$ .

Пусть  $\eta_0(\cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times [0, \infty))$ ,  $\eta(\cdot, \cdot) \in K([a, b] \times [0, \infty))$ . Для любого  $\delta > 0$  рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in (F(t, B[x(t), \eta_0(t, \delta)])) \eta(t, \delta), \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Пусть  $V$  - ограниченное замкнутое множество пространства  $C^n[a, b]$ . Обозначим через  $H(V)$ ,  $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$  множества решений дифференциальных включений (1) и (2), соответственно, принадлежащих множеству  $V$ .

В докладе обсуждаются необходимые и достаточные условия выполнения равенства

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)},$$

для любых функций  $\eta_0(\cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times [0, \infty))$  и  $\eta(\cdot, \cdot) \in K([a, b] \times [0, \infty))$ , где  $\overline{H(V)}$ ,  $\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$  - замыкания в пространстве  $C^n[a, b]$  множеств  $H(V)$ ,  $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$ , соответственно, и  $V^\delta$  - замкнутая в пространстве  $C^n[a, b]$   $\delta$ -окрестность множества  $V$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А. К вопросу устойчивости дифференциальных включений // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 1999. Т. 4. Вып. 4. С. 461-470.

## ОБ УНИВЕРСИТЕТСКОМ КУРСЕ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Булинская Е.В. (Москва)

Изменения, произошедшие в экономике России, создали потребность в специалистах по страхованию и менеджменту финансовых рисков, иными словами, в актуариях.

В феврале 1993 года на механико-математическом факультете МГУ была введена новая специализация – прикладная математика, экономический профиль, а затем и специализация – актуарно-финансовый аналитик.

На основе семилетнего опыта преподавания актуарной математики в МГУ и знакомства с постановкой актуарного образования во Франции и Великобритании автор изложит свои соображения по поводу того, каким должен быть университетский курс актуарной математики.

При этом, в частности, будут затронуты такие вопросы: что такое актуарий, основные этапы развития актуарной науки, какой уровень математической подготовки необходим для чтения современной актуарной литературы и ведения научных исследований в этой области, связь актуарной математики и других областей прикладной теории вероятностей, существующие программы трехсеместрового курса актуарной математики и др.

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ЗАПАСОВ

Булинская Е.В. (Москва)

Цель лекции – познакомить слушателей с современным состоянием математической теории запасов, основными методами исследований и перспективами ее развития.

Предлагаемый автором общий подход к описанию моделей теории запасов оказывается полезным как для их классификации, так и для выявления сходства с моделями, возникающими в актуарной и финансовой математике, теории массового обслуживания, теории надежности, математической биологии и других областях прикладной теории вероятностей.

Математическая теория запасов возникла менее 50 лет назад благодаря работам Эрроу, Харриса, Маршака, Дворецкого, Кифера и Вольфовица. В нашей стране первыми математическими работами в области теории запасов были работы автора.

В лекции будут рассмотрены основные этапы развития теории запасов и используемые подходы. Особое внимание будет уделено необходимости учета случайных возмущений детерминированных моделей и созданной автором теории устойчивости случайно возмущенных систем с синхронизацией поставок и потребления. Будут также затронуты такие вопросы как нахождение асимптотически оптимальных политик в условиях неизвестного распределения спроса, а также анализ асимптотического поведения моделей с дискретным временем на основе диффузионных приближений.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ГЛУБИНЫ ПОИСКА КРАТНОГО ДЕФЕКТА НА ЗАДАННОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК КОНТРОЛЯ ПРИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ.

Бушуева М.Е. (Нижний Новгород)

Одним из эффективных методов обеспечения контролепригодности является определение множества диагностических параметров, позволяющих сократить затраты времени на обслуживание и восстановление объекта. В качестве количественного показателя контролепригодности предлагается использовать коэффициент глубины поиска дефекта, который определяется из выражения

$$K_{\text{гн}}(Z) = F_n(Z) / S_n.$$

где  $F_n(Z)$  - число однозначно выявляемых дефектов кратности от 1 до  $n$  на множестве  $Z$  точек контроля,  $S_n$  - общее число возможных дефектов.

При построении математической модели задачи могут использоваться несколько критериев оптимальности, в частности, предлагается решение задачи, где в качестве критериев оптимальности используются  $K_{\text{гн}}(Z)$  и стоимость реализации дополнительных точек контроля, необходимых для обнаружения дефектов.

Для решения данной задачи был использован метод свертывания векторного критерия, с помощью которого была построена скалярная функция  $F$ , являющаяся обобщенным критерием оптимальности. При нахождении  $\max F$ , определяем множество дополнительных точек контроля при котором будет существовать оптимальное соотношение  $K_{\text{гн}}(Z)$  и стоимости реализации точек контроля множества  $Z$ .

**РАЗВИТИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ  
ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО И КИНЕТИЧЕСКОГО  
ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**  
Г.П.Быстрай (г.Екатеринбург)

На примере решения макроскопической динамической модельной задачи нелинейного течения в гладком цилиндрическом канале для пульсирующей средней скорости показана возможность последовательного введения в теоретический анализ развитой турбулентности идей и методов теории катастроф, теории неравновесных фазовых переходов и теории бифуркаций. Для данной задачи найдено преобразование, позволяющее переходить от гидродинамического описания устойчивого ламинарного течения в рамках уравнений Навье–Стокса к динамическому для макроскопических характеристик нелинейного течения, включая переход к турбулентному течению. Данный подход позволяет найти структурно-устойчивый гидродинамический потенциал  $F^*$ , в котором могут возникать вырожденные особые точки (точки неравновесных фазовых переходов) как следствие варьирования управляющих параметров, и перейти к кинетическому описанию для функции распределения  $g^*$ . Обсуждаются основные механизмы неустойчивости изотермических течений.

Для стационарных течений произведено масштабирование гидродинамических характеристик относительно их значений в критической точке перехода к турбулентному течению и исследовано их поведение как отражение геометрических особенностей порога катастрофы сборки. На этой основе сформулирован количественный принцип соответственных состояний в динамике нелинейных течений. В рамках бифуркационного анализа выявлено три режима нелинейного течения при числах Рейнольдса  $R \geq R_c$ : неустойчивый ламинарный, устойчивый и неустойчивый турбулентный режимы. Определен вид сепаратрисы, который не изменяется при жестком переходе от неустойчивого ламинарного к устойчивому турбулентному режиму, и который задает критические индексы для гидродинамических характеристик, обеспечивая выполнимость соотношений теории Колмогорова, включая законы "2/3" и "5/3". В результате получены теоретические выражения для коэффициентов сопротивления для гладких (и шероховатых) труб, коаксиальных цилиндров, плоскости, некоторых нормальных и ламинизированных крыловых профилей, сферы, диска, вращающегося диска, которые не только качественно, но и количественно описывают экспериментальные результаты в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Для их определения необходимо знание закона ламинарного устойчивого течения и критического значения  $R_c$ .

Укажем следующие аналитические показатели турбулентного течения для различной геометрии и шероховатости поверхностей: зависимость между разностью давления (силой или моментом сопротивления) и средней скоростью течения; коэффициенты турбулентной вязкости; инварианты, связывающие продольные и поперечные пульсации; индикатрисы пульсаций; длина пути перемешивания; коэффициенты турбулентной диффузии и подвижности (поперечные и продольные); тензор турбулентных напряжений; критерий гладкости поверхности; функции распределения: средние, среднеквадратичные и наиболее вероятные скорости пульсаций; спектральные характеристики пульсаций.

**МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В  
БЕЗГРАНИЧНОМ ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ ПРИ  
ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ**  
Г.П.Быстрой, С.И.Студенок, Е.М.Нагорняк (г.Екатеринбург)

Известно, что безразмерный момент сопротивления для вращающегося в безграничном объеме жидкости (несжимаемого газа) тонкого диска при ламинарном течении равен [1]:

$$C_M = 4M/\rho\omega^2\tau_0^5 = 3.87/R^{\frac{1}{2}}, R = \tau_0^2\omega/\nu; \quad (1)$$

здесь  $\tau_0$  - радиус диска,  $\omega$  - угловая частота вращения,  $M$  - полный момент сопротивления,  $R$  - число Рейнольдса;  $\nu, \rho$  - кинематическая вязкость и плотность жидкости соответственно. Течение жидкости возле диска является трехмерным  $(r, \varphi, z)$ , жидкость вдали от него принимается покоящейся.

При построении нелинейной модели турбулентного течения предполагалось, что для нее имеют место пульсации приведенной скорости  $V_0^* = \omega^*$  (так как  $V_0 = \tau_0\omega$ ), т.е. частоты вращения  $\omega^* = \omega/\omega_c$  при фиксированном вращающем моменте  $M^* = M/M_c$ . Показано, что в окружном направлении  $\varphi$  пульсации могут быть описаны ДУ:

$$d\eta/dt = -\nabla F^*, F^*(\eta, a^*, b^*) = \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{2}a^*\eta^2 + b^*\eta. \quad (2)$$

В стационарной задаче  $\eta_T^3 + a^*\eta_T + b^* = 0$ ; здесь  $\eta_T = 2(\omega^* - \omega_k^*)$  - стационарное значение параметра порядка;  $a^* = -3(\omega_k^{*2} - 1)$ ,  $b^* = -(C_{MT}^*\omega_k^{*2} - C_{MT}^c\omega_-^{*2})$  - управляющие параметры катастрофы сборки (2). Масштабы  $M_c, \omega_c, C_{MT}^c, V_0^c$  соответствуют значениям гидродинамических переменных в критической точке перехода от ламинарного течения к турбулентному. Стационарное значение  $\omega_k^*$  является аналитической функцией чисел  $R^* = R/R_c$ :  $\omega_k^* = (\omega_+^* + \omega_-^*)/2 = (1/4R^{*1/2})(\sqrt{1 + 24R^*} - 1)$ , где  $\omega_-^* = \omega_k^* - \omega_0^*$ ,  $\omega_+^* = \omega_k^* + \omega_0^*$ ;  $\omega_0^* = (\sqrt{3}/2)(\omega_k^{*2} - 1)^{1/2}$ ,  $\omega_r^* = (2/\sqrt{3})\omega_0^*\omega_-^*$  - окружные и радиальные стационарные пульсации приведенных частот (и соответствующих скоростей). В критической точке  $\eta_T = a^* = b^* = 0, R^* = 1, \omega_0^* = \omega_r^* = \omega_z^* = 0, \omega_k^* = 1$ .

В работе показано, что для стационарного турбулентного режима течения приведенный момент сопротивления в предположении  $\omega_z^* \equiv \omega_r^*$  (z - направление оси вращения) равен:

$$C_{MT}^* = \frac{C_{MT}}{C_{MT}^c} = \frac{1}{R^{*1/2}} \left( \frac{\omega_k^*}{\omega_-^*} \right)^2 + \frac{2(\omega_k^{*2} - 1)^{3/2}}{\omega_k^{*2}}, (C_{MT}^c \equiv C_{MT}^c). \quad (3)$$

Результаты расчета по (3) показали, что после прохождения критической точки ( $R_c = 3 \cdot 10^5$ ) величина  $C_{MT}$  начинает резко возрастать с ростом  $R$ , достигает максимума при  $R \sim 7 \cdot 10^5$ , а затем нелинейно уменьшается, выходя на асимптотический предел  $C_{MT}^*(\infty) = \sqrt{2}/3$  при  $(R \rightarrow \infty)$ , что не только качественно, но и количественно описывает экспериментальные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ГИДРОЦИКЛОНЕ

Валюхов С.Г., Вервейко Н.Д., Минин Л.А., Ярославцев С.В. (Воронеж)

Гидроциклон представляет собой цилиндрической формы сосуд радиуса  $R$  с коническим основанием, двумя выходами на оси симметрии и входом жидкости по касательной к цилиндрической части. При подаче на входе суспензии, последняя начинает сепарироваться за счет больших инерциальных радиальных сил инерции. В результате сепарации фракций в центре гидроциклона оказывается легкая фракция, вытекающая вверх, а на периферии, на стенке цилиндрической и конической частей, оказывается тяжелая фракция, стекающая вниз.

При наличии в гидроциклоне воздушного столба радиуса  $r_c$  и осесимметричного течения, можно пренебречь слагаемым  $v_r/t$  в уравнении неразрывности и свести его к уравнению неразрывности плоского течения в меридиональной плоскости. Это позволяет пространственное течение представить в виде суперпозиции двух ортогональных течений — вихревого течения в кольцевом зазоре на плоскости, ортогональной оси симметрии, и плоского течения в угле раствора  $\alpha$  в меридиональной плоскости. При малых  $\alpha \sim 0,1$ , возможно сращивание двух меридиональных течений — в слое шириной  $R - r_c$  и течения в угле раствора  $\alpha$ .

Использование комплексных потенциалов течения в двух плоскостях и последующее векторное сложение потенциалов позволило построить линии тока течения, поле скоростей и распределение давления с учетом сил инерции.

Линии тока точно совпадают с твердыми границами течения (внешними границами гидроциклона) и приближенно описывают границу воздушного столба. Поле скоростей течения таково, что наибольшим вектором на периферии течения является окружная скорость, а на свободной границе воздушного столба наибольшим вектором является вертикальная скорость течения, что достаточно точно соответствует реальной картине течения. По предложенному полю скоростей было построено распределение давления в жидкости, которое позволило рассчитать давление жидкости на стенки гидроциклона.

Использование гармонических полиномов, зависящих от  $(r, z)$  позволило описать осесимметричное течение в конической области и уточнить приближенное описание течения как геометрической суммы двух плоских течений.

## ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОЛЕ ГИДРОЦИКЛОНА

Валюхов С.Г., Вербейко Н.Д., Смотров О.А., Ярославцев С.В.

Сепарирование твердых частиц по их геометрическим размерам в гидродинамическом поле гидроциклона происходит в инерциальном поле сил, пропорциональных объему частицы, за счет различия сил вязкого сопротивления Стокса, пропорциональных площади поперечного сечения частиц. При расчете конструктивных характеристик гидроциклона, обеспечивающих отделение крупных частиц в «нижний продукт» и мелких частиц в «верхний продукт», важно знать закон движения и траектории отдельных частиц в суспензии, заполняющей сам гидроциклон.

Достаточно продуктивной, с одной стороны — простой, а с другой стороны — учитывающей все основные характерные параметры процесса гидро-сепарирования является гипотеза, включающая следующие предположения: 1) в гидроциклоне движется идеальная жидкость; 2) отдельные частицы не взаимодействуют друг с другом; 3) движение частицы не влияет на течение жидкости.

В таких предположениях построена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений движения твердых частиц в жидкости с учетом: движения присоединенной массы жидкости; силы вязкого сопротивления Стокса, пропорциональной скорости относительного движения частицы в жидкости; силы тяжести; выталкивающей силы. Анализ безразмерных комплексов, отвечающих за величину соответствующих сил, показал, что сила тяжести и выталкивающая сила имеют значения на несколько порядков ( $10^{-4}$  —  $10^{-5}$ ) меньше остальных и могут не учитываться в расчетах.

Траектория твердой частицы в горизонтальной плоскости представляет собой медленно разворачивающуюся спираль, причем с увеличением радиуса шаг спирали уменьшается. В вертикальной плоскости конической части гидроциклона траектория твердой частицы представляет собой алгебраическую кривую высокого порядка, так что с увеличением глубины у радиус траектории частицы меняется очень мало ( $10^{-2}$ -у —  $10^{-3}$ -у). Предложенная математическая модель движения твердой частицы в гидроциклоне позволяет рассчитать траекторию граничной частицы и определить диаметр нижнего отверстия для вывода твердых частиц с размером больше заданного.

[1] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

[2] Коул Дж. Метод возмущение в прикладной математике. М.: Мир, 1972.

Локальный анализ шестеренчатых зацеплений  
Валюхов С.Г., Костин В.А., Семёнов С.М.

Пусть плоская механическая система (в чисто кинетическом смысле) представляет собой две подвижные плоскости, лежащих в третьей неподвижной плоскости. Первая подвижная плоскость может вращаться вокруг неподвижного центра  $O_1$ , вторая вокруг неподвижного центра  $O_2$ . Вращения синхронизированы так, что отношение узлов поворотов константа. Таким образом, степень свободы одна. При этом обязательно найдутся окружность с центром в  $O_1$  на первой подвижной плоскости и окружность на второй с центром в  $O_2$  такие, что они будут катиться без проскальзывания в некоторой неподвижной точке  $O$  (точке качения), находящейся на прямой, соединяющей  $O_1$  и  $O_2$ . Пусть на первой плоскости находится кривая  $\Gamma_1$ , на второй кривая  $\Gamma_2$  и в любой момент эти кривые касаются друг друга в какой-нибудь точке (точки скольжения). Говорят, что тогда  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  находятся в шестеренчатом зацеплении.

Известно необходимое условие шестеренчатого зацепления: общая касательная к  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в точке скольжения ортогональна прямой, соединяющей точку качения с точкой скольжения.

Пусть кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ограничивают шестеренчатые профили. При проектировании шестеренчатых профилей важно соблюсти условие неврезания профилей, друг в друга, то есть чтобы они ни в какой момент не имели общих внутренних точек.

Было выведено необходимое и достаточное условие неврезания в локальном аспекте. В терминах траектории точки скольжения оно звучит так: нормаль к ней должна пересекать прямую  $O_1O_2$  между точками  $O_1$  и  $O_2$ .

Проблемы неоднозначности решения расчета технологических программ для пятикоординатных фрезерных станков с ЧПУ  
Валюхов С.Г., Семёнов С.М.

Обычно расчет траектории фрезы начинается в той же системе координат, в какой задана форма изделия. Будем считать, что она декартова, положение фрезы задается тремя координатами конца фрезы и тремя координатами единичного вектора оси фрезы (универсальные координаты). Число степеней свободы фрезы равно пяти. На последнем этапе расчета требуется задание движения фрезы в пяти станочных координатах.

Возникает задача перехода от универсальных координат к станочным и наоборот. Решение второй задачи дается однозначным гладким отображением, которое имеет точки вырождения матрицы Якоби. Это затрудняет решение первой задачи, особенно тогда, когда требуется для гладкой кривой в универсальных координатах найти соответствующую кривую в станочных координатах, тоже гладкую. В точках вырождения возможно ветвление решения этой задачи.

Есть примеры таких гладких кривых в универсальных координатах, для которых нет гладкого прообраза в станочных координатах. Теоретически выйти из этого затруднения можно вставкой в станочную траекторию таких участков, на которых фреза неподвижна в универсальных координатах, хотя станочные меняются. Но на практике получить при этом хорошую поверхность невозможно. Остается такие ситуации не проектировать.

В окончательном варианте программа для станка - это последовательность положений фрезы в станочных координатах. От одного положения к другому станочные координаты меняются по линейному закону. При этом универсальные координаты совсем не обязательно меняются линейно. Был разработан принцип выбора узлов линейной интерполяции на кривой в станочных координатах, так чтобы при заданной точности изготовления иметь этих узлов поменьше (в предположении, кривая в станочных координатах уже есть).

На основе этого принципа был предложен критерий оптимальности при решении задачи о приближении кривой в универсальных координатах такой кривой, которой соответствует ломаная в станочных координатах. Эта задача полностью не решена, но предложены пути ее решения.

УДК 621.225

**ИНЖЕНЕРНАЯ МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ВИНТОВЫХ  
НЕГЕРМЕТИЧНЫХ НАСОСОВ**

**Валюхов С.Г., Ярославцев С.В., Дедов С.А. (Воронеж)**

Одной из перспективных разработок, осуществляемых в настоящее время в ДП «Турбонасос», является создание многофазных насосных станций (МНС) для нефтегазовой промышленности. Как показывает мировая практика, использование в МНС негерметичных винтовых насосов зарекомендовало себя с положительной стороны. В связи с этим актуальность расчета винтовых насосов возрастает.

Разработана методика математического моделирования стационарных гидродинамических процессов в проточной части винтовых негерметичных насосов. На основе анализа геометрических параметров насосов прототипов предложены рекомендации по выбору формы профиля двухвинтовых негерметичных насосов. Продемонстрированы некоторые особенности расчета усилий в двухвинтовых насосах. Рассмотрен поверочный гидравлический расчет двухвинтового негерметичного насоса для однофазной среды. Программа расчета реализована в среде MATHCAD.

Методика позволяет получить рабочие характеристики насоса, предназначенные для анализа результатов автономно-доводочных испытаний и параметров системы (гидравлической сети), составной частью которой является насос.

Настоящая методика применена для расчета разрабатываемого в КБХА многофазного винтового насоса для МНС500.



**НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
МНОГОФАЗНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ В ГИДРОЦИКЛОНАХ**

**Валухов С.Г., Ярославцев С.В., Ходус В.В. (Воронеж)**

Одним из наиболее перспективных направлений работы ДП “Турбонасос” является создание гидроциклонов, используемых при обогащении руд цветных и черных металлов для классификации измельченных рудных материалов по крупности в водной среде.

Разработана методика поверочного расчета гидроциклонов. Научная новизна работы заключается в том, что для расчета коэффициентов расхода закрученного потока жидкости из сливного отверстия используются положения теории центробежных форсунок жидкостных ракетных двигателей, а распределение давлений суспензии в радиальном направлении рассчитывается как результат действия центробежных сил.

Наряду с этим используются дополнительные эмпирические соотношения, полученные статистической обработкой параметров действующих гидроциклонов. Программа расчета реализована в среде MATHCAD 6.0 PLUS.

Настоящая методика позволяет получить все параметры гидроциклона, включая диаметр воздушного столба, расходы жидкой и твердой фазы в слив (верхнее отверстие) и в пески (нижнее отверстие). Кроме того, определяется гранулометрический состав твердой фазы.

Методика применена при расчете изготавливаемых в КБХА систем разделения суспензий руд для АО “Норильский комбинат” и может быть использована для расчета гидроциклонов, предназначенных для разделения измельченных материалов по крупности.

**МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССООБМЕНА  
В МАСЛОВОЗДУШНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТАХ**  
Валюхов С.Г., Ярославцев С.В., Ходус В.В., Васильева И.Е. (Воронеж)

Одной из наиболее перспективных разработок, осуществляемых в настоящее время в ДП “Турбонасос”, является создание энергоустановок и многофазных насосных станций. В связи с этим возрастает актуальность расчета масловоздушных теплообменных аппаратов (ТОА), предназначенных для охлаждения масла в станциях смазки этих систем и обеспечивающих требуемый ресурс их работы.

Разработана методика поверочного теплового расчета масловоздушных ТОА на стационарных режимах. Научная новизна работы заключается в создании математической модели процессов теплообмена в масловоздушных ТОА, которая учитывает зависимость вязкости масла от температуры, а также асимметрию полей температур и скоростей, возникающую при отключении части вентиляторов для регулирования температуры масла на выходе. Программа расчета реализована в среде MATHCAD 6.0 PLUS.

Настоящая методика позволяет получить необходимые параметры теплообмена и сделать вывод относительно допустимости использования ТОА в маслосистеме данной установки, а также выбрать схему регулирования подачи масла и воздуха и провести общий расчет маслосистемы разрабатываемой установки. Даются рекомендации относительно конструктивной доработки ТОА с целью улучшения теплообмена.

Методика применена для расчета изготавливаемых в КБХА и покупных ТОА, которые используются для маслосистем энергоустановки ЭУ1 и многофазной насосной станции МНС500.

## ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДОВ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Ванько В.И., Платонова И.А. (Москва)

Рост электропотребления в последние десятилетия привел к необходимости сооружения линий электропередачи сверхвысоких напряжений (ЛЭП СВН). На этих линиях каждая из токопроводящих фаз монтируется в виде пучка проводов, положения которых в пространстве фиксируются при помощи плоских стержневых конструкций, называемых распорками. В шарнирные соединения элементов распорок могут быть включены вязкоупругие элементы, демпфирующие колебания проводов пучка на участках проводов между распорками.

Описанная выше механическая система провода-распорки называется расщепленной фазой (р.ф.).

Обсуждаются различные виды колебаний р.ф. в целом и составляющих ее проводов и формулируются условия возможности моделирования р.ф. тяжелой вязкоупругой нитью, работающей на растяжение и кручение. Исследуются движения р.ф. в зависимости от ее конфигурации [1].

Выводятся условия аэродинамической ( $a/d$ ) неустойчивости (по Ляпунову) системы плохобтекаемых профилей и строится методика вычисления  $a/d$  характеристик р.ф. [2]. Изучаются колебания типа пляски (галопирование) р.ф. различных конфигураций. В качестве примера рассмотрены движения проводов «компактной» ЛЭП Новосокольники-Псков [3].

Решается задача об оптимальной (в смысле достижения максимума диссипативной способности системы провода-распорки) расстановке вязкоупругих распорок в пролете р.ф. ЛЭП. Полученные решения сравниваются с вариантами расстановки, рекомендуемыми некоторыми зарубежными фирмами [4].

### Литература

1. Ванько В.И. Колебания расщепленной фазы проводов ЛЭП // Изв. ВУЗ. Энергетика. 1991. № 2. С. 11-17.
2. Ванько В.И., Соловьева Е.В., Феоктистов В.В. Аэродинамические характеристики расщепленных проводов для воздушных ЛЭП // Изв. РАН. Энергетика. 1994. № 4 С. 104-111.
3. Ванько В.И., Платонова И.А. Сравнительный анализ свободных колебаний расщепленных фаз компактной ЛЭП // Энергетика. Изв. ВУЗ и энергетических объединений СНГ. 1998. № 5. С. 27-33.
4. Ванько В.И., Галкин С.В., Зайцев А.А. Об оптимальной расстановке распорок-гасителей в пролете расщепленной фазы ЛЭП // Изв. РАН. Энергетика. 1996. № 5. С. 89-97.

**О ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ВО МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ВЫПУКЛЕННОГО  
ВКЛЮЧЕНИЯ**

Васильев В.В. (Тамбов)

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – пространство  $n$  – мерных вектор – столбцов с нормой  $|\cdot|$ . Обозначим  $C^n[a, b]$  ( $L^n[a, b]$ ) – пространство непрерывных (суммируемых) вектор – функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Будем говорить, что множество  $\Psi \subset L^n[a, b]$  выпукло по переклочению, если для любых  $x, y \in \Psi$  и любого измеримого множества  $e \subset [a, b]$  выполняется включение  $\chi(e)x + \chi([a, b] \setminus e)y \in \Psi$  где  $\chi(\cdot)$  – характеристическая функция. Пусть  $\Pi[L^n[a, b]]$  множество непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых по переклочению подмножеств пространства  $L^n[a, b]$ .

Пусть отображение  $\Phi : C^n[a, b] \times L^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$  непрерывно и вольтеррово; отображения  $T : C^1[a, b] \times L^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ ,  $T_1 : C^1[a, b] \times L^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ , вольтерровы и изотонны по каждому аргументу; оператор  $Z : C^n[a, b] \rightarrow C^1[a, b]$  определен равенством  $(Zx)(t) = |x(t)|$  (для суммируемых функций оператор  $Z$  определяется аналогично); оператор  $G : L^n[a, b] \rightarrow L^n[a, b]$  определен равенством

$$(Gx)(t) = \begin{cases} x(g(t)), & \text{если } g(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } g(t) < a, \end{cases}$$

где функция  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  монотонно возрастает и обладает свойством:  $\sup_{e \subset [a, b], \mu(e) > 0} \frac{\mu(g^{-1}(e))}{\mu(e)}$

$< \infty$  ( $\mu$  – мера Лебега,  $g^{-1}(e)$  – прообраз измеримого множества  $e$ ) и существует такое число  $\tau \in (0, b - a)$ , что для любого  $t \in [a, b]$   $g(t) \leq t - \tau$ ;

Будем говорить, что отображение  $T$  обладает свойством  $A$ , если задача  $\dot{x} = T(x, G\dot{x})$ ,  $x(a) = |x_0|$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  имеет верхнее решение.

Будем говорить, что отображение  $\Phi : C^n[a, b] \times L^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$  обладает свойством  $B$ , если

1) для всех  $(x, y) \in C^n[a, b] \times L^n[a, b]$  и любого измеримого  $M \subset [a, b]$  выполняется неравенство  $\|\Phi(x, y)\|_{L^1(M)} \leq \|T(Zx, Zy)\|_{L^1(M)}$ , где отображение  $T$  обладает свойством  $A$

2) из того, что  $x_i \rightarrow x$  в  $C^n[a, b]$  при  $i \rightarrow \infty$ , а  $y_i \rightarrow y$  слабо в  $L^n[a, b]$  при  $i \rightarrow \infty$ , вытекает  $h_{L^1[a, b]}^+(\Phi(x_i, y_i), \Phi(x, y)) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ .

Будем говорить, что отображение  $\Phi$  обладает свойством  $C$ , если для всех  $x_1, x_2 \in C^n[a, b]$ ,  $y_1, y_2 \in L^n[a, b]$  и для любого измеримого  $M \subset [a, b]$  выполняется неравенство  $h_{L^1(M)}(\Phi(x_1, y_1), \Phi(x_2, y_2)) \leq \|T_1(Z(x_1 - x_2), Z(y_1 - y_2))\|_{L^1(M)}$ , задача  $\dot{x} = T_1(x, G\dot{x})$ ,  $x(a) = 0$  имеет единственное нулевое решение.

Рассмотрим задачи

$$\dot{x} \in \Phi(x, G\dot{x}), \quad x(a) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}}\Phi(x, G\dot{x}), \quad x(a) = x_0, \tag{2}$$

где  $\overline{\text{co}}$  – замкнутая выпуклая оболочка множества. Пусть  $H$ ,  $H_{co}$  – множества решений задач (1), (2), соответственно.

**Теорема.** Пусть отображение  $\Phi$  обладает свойствами  $B$  и  $C$ . Тогда  $\overline{H} = H_{co}$ , где  $\overline{H}$  замыкание множества  $H$  в пространстве  $C^n[a, b]$ .

# О ПРИЛОЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕТОДЕ РЕШЕТА

Вахитова Е.В. (г. Стерлитамак)

Рассмотрим задачу о почти простых числах, являющихся значениями неприводимого полинома  $\Phi(p)$  от простого аргумента  $p$  из последовательности  $kp+l$ , где  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $0 < l < k$ ,  $(k, l) = 1$ , то есть об оценке почти простых чисел в последовательности  $A$ :

$$A = \{ \Phi(p) \mid p \text{ — простое, } p \leq x, p \equiv l \pmod{k} \},$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq x$ ,  $(\Phi(l), k) = 1$ .

Ранее автором задача была решена методом [3]. Результаты можно улучшить, если применить метод работы [4]. При этом в методе решета применяются интегро-разностные уравнения для функций решета, которые впервые были введены в работе [1]. О свойствах таких функций можно узнать также из работы [2]. Дифференцируя возникающее уравнение, получим, что функции решета удовлетворяют дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом с некоторыми начальными условиями, которое удастся решить для всех необходимых случаев и тем самым получить асимптотическую оценку для числа почти простых чисел в последовательности  $A$ .

## Литература

1. Бухштаб А.А. Асимптотическая оценка одной общей теоретико-числовой функции. Матем. сб., 1937, 2(44), 6, 1239-1246.
2. Halberstam H., Richert H.-E. Sieve methods. London: Acad. Press, 1974, 364 P.
3. Laborde M. Buchstabs sifting weights. Mathematika, 1979, 26, 250-257.
4. Вахитова Е.В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Математические заметки, 1999, т. 66, вып. 1, 38-49.

# ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ СО СТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ

Виноградова Г.А. (Воронеж)

Пусть  $V$  — некоторая область в  $R^n$ . Если  $x \in R^n$ , то через  $r, \omega$  обозначим полярные координаты, т.е.  $r = |x|$ ,  $\omega = x/r$ .

Пусть  $L_p(R^n, d\mu)$  — пространство, состоящее из функций  $f(x)$ , измеримых на  $R^n \setminus 0$  и таких, что  $\|f\|_p = (\int |f|^p \frac{dx}{r} d\omega)^{1/p} < \infty$ .

Пусть  $\lambda$  — вещественное число,  $k$  — неотрицательное целое число и  $1 \leq p < \infty$ . Обозначим через  $W_{p,\lambda}^k$  весовое соболевское пространство, состоящее из функций  $u \in L_p(R^n, d\mu)$  таких, что их обобщенные производные

$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u \in L_p(R^n, d\mu)$ , если  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq k$ , причем

$$\|u\|_{p,\lambda}^k = \left( \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |r^{|\alpha|-\lambda} D^\alpha u|^p \frac{dr}{r} d\omega \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть  $Q(D)$  — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами порядка  $m$ . Через  $\Lambda(Q)$  обозначим множество, которое в случае  $m \geq n$  состоит из всех целых чисел, а в случае  $m < n$  состоит из целых чисел, принадлежащих множеству  $(-\infty, m-n] \cup [0, \infty)$ .

Справедливо следующее утверждение, доказанное в [1].

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $\lambda \in \Lambda(Q)$ ,  $m \leq k$ ,  $1 < p < \infty$ , тогда оператор  $Q(D)$  является топологическим изоморфизмом пространства  $W_{p,\lambda}^k$  на  $W_{p,\lambda-m}^{k-m}$ .

## Литература

1. Виноградова Г.А. Теорема об изоморфизме весовых пространств. // Вестник факультета прикладной математики и механики. Воронеж: ВГУ. — 1997. — Вып. 1. — с. 31-35.

# ДИЛАТОННЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

## Воронцова Е.Г. (Тверь)

Рассматривается дилатонная гравитационная модель имеющая действие следующего вида [1]:

$$S = \int \sqrt{|g|} e^{-2\phi(x)} [R + 4(\nabla\phi)^2 + L] d^{n+1}x.$$

Здесь  $\phi(x)$  – скалярное поле (поле дилатонов) на  $n + 1$ -мерном ( $D = n + 1$ ) псевдоримановом многообразии с координатами  $x^\mu$ , с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ ,  $g = \det |g_{\mu\nu}|$ ,  $R$  – скалярная кривизна,  $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ .

С помощью варьирования действия выводятся уравнения эволюции гравитационных и дилатонных полей данной модели [2]. Для полученной системы уравнений найдены центрально-симметричные стационарные решения для многообразий произвольной размерности.

В литературе последнего времени подробно изучена лишь  $1 + 1$ -мерная (струнная) модель [3]. Анализ  $2 + 1$ -мерного решения показывает, что в этом случае особенности типа черных дыр отсутствуют. Для многообразий произвольной размерности  $n + 1$  решение получено в параметрическом виде. Полученные решения имеют достаточно сложный вид, поэтому более подробно рассмотрен случай  $n = 3$ . Для исследования данных решений, в частности, используется численный анализ. Решения рассматриваются на четырёх интервалах на которые разбивают числовую ось особые точки введённой параметризации и точка 0. В случае  $n = 3$  возникает широкий набор решений с особенностями различных типов, поэтому свойства данных решений исследуются с помощью моделирования движения пробных частиц в гравитационном поле.

### Литература

1. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. Effective Field Theory From Quantized Strings // Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316–320.
2. Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. О космологических решениях в многомерной дилатонной гравитации // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1999. С. 202–206.
3. Gibbons C.W., Perry M.J. // Int. Mod. Phys. 1992. D1. P. 335.

**ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО  
УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ГУРСА-ДАРБУ С ПОТОЧЕЧНЫМИ  
ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВА<sup>1</sup>**

Гаврилов В.С., Сумин М.И. (Нижегород)

Рассматривается задача оптимального управления

$$I_0(u) \rightarrow \inf, \quad I_1(u) \in M, \quad u \in \mathcal{D}, \quad (1)$$

где

$$I_0(u) \equiv \int_{\Pi} F(x, y, z[u](x, y), z_x[u](x, y), z_y[u](x, y), u(x, y)) dx dy +$$

$$\sum_{j=1}^l G_j(z[u](x^j, y^j)), \quad I_1(u)(x, y) \equiv H(x, y, z[u](x, y)), \quad (x^j, y^j) \in \Pi,$$

$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_{\infty}(\Pi) : u(x, y) \in U \text{ п.в. на } \Pi\}$ ,  $U \subset R^m$  - компакт,  $\Pi \equiv [0, a] \times [0, b]$ ,  $M$  - множество неположительных на  $\Pi$  функций,  $z[u](x, y)$ ,  $(x, y) \in \Pi$ , - абсолютно непрерывное решение нелинейной системы Гурса-Дарбу ( $z \in R^n$ )

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y, u(x, y)), \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z(0, y) = \psi(y).$$

Задача (1) с исходными данными, удовлетворяющими традиционным для теории оптимального управления условиям, рассматривается в двух вариантах: а)  $M \subset C_n(\Pi)$ ; б)  $M \subset L_{2,n}(\Pi)$ . В случае а) устанавливается, что любое оптимальное управление в задаче (1) с необходимостью удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, который может быть выражен в двух формах: в одном случае мера Радона, участвующая в формулировке принципа максимума, "входит" в соотношение максимума, в другом - в сопряженное уравнение. Подробно обсуждается взаимосвязь этих двух форм необходимых условий. В случае б), в котором целевое множество  $M$  рассматривается как множество в пространстве суммируемых с квадратом функций, на конкретных примерах показывается, что оптимальное управление может не удовлетворять принципу максимума. В докладе обсуждается также взаимосвязь двух указанных принципов максимума, соответствующих ситуациям а) и б). В заключение обсуждаются условия регулярности и нормальности получаемых принципов максимума, а также условия их трансформации в достаточные условия оптимальности. Приводятся различные конкретные примеры, иллюстрирующие обсуждаемые результаты.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 98-01-00793.

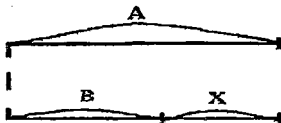


**Особенности в обучении решению задач по системе развивающего обучения Эльконина-Давыдова в начальной школе**  
**Гаврилова В.В. (Воронеж)**

Работа над задачей в системе развивающего обучения Эльконина-Давыдова существенно отличается от работы в традиционной школе.

Начиная с 1 класса, схемы и формулы, а потом и уравнения становятся для детей эффективными средствами решения текстовых задач. Например, дается задача: "В одной команде было  $A$  детей, а в другой —  $B$  детей. Когда во II команду пришли несколько девочек, детей в каждой команде стало поровну. Сколько девочек пришло во II команду?"

Дети составляют схему:



а затем уравнение  $A=B+x$  и решают его  $x=A-B$ .

Учитель может предложить детям составить другие уравнения по данной схеме ( $A-x=B$ ), а потом составить текст по вновь составленному уравнению.

На уроках математики часто даются задания вида: "Составь по данной схеме задачу". Дети видят, что можно составить множество задач, а решаются они одинаково. Схема помогает наглядно видеть, что известно, а что надо найти. Часто бывает и такие задачи, где дается несколько текстов задач и одна схема, а дети должны определить к какой задаче относится эта схема.

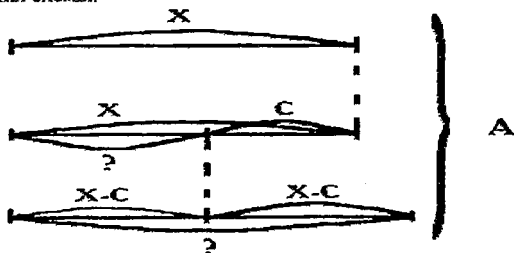
Много времени уделяется составлению задач самими детьми для своих товарищей. Детям нравятся такие задания. Они с увлечением выполняют их.

Составление схем к задачам способствует предупреждению ошибок при их решении и успешному составлению формулы или уравнения.

Так, решая задачу типа:

"С трех участков собрали  $A$  центнеров зерна. Со второго участка собрали на  $C$  центнеров зерна меньше, чем с первого, а с третьего — в 2 раза больше, чем со второго участка. Сколько центнеров зерна собрали с каждого участка?"

После составления схемы:



дети видят из каких частей состоит вся величина  $A$ :

$$A=X+X-C+(X-C)2.$$

На каждом уроке ребенок анализирует, осмысливает каждое свое действие. Ребята не боятся браться за любое задание. Они ищут разные способы решения. Постепенно дети учатся находить выход из любой ситуации. Это значит, что дети учатся решать любую проблему самостоятельно.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЫНУЖДЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОРОТКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н.С. Гинзбург, А.С. Сергеев (Н. Новгород)

Данная работа посвящена математическому моделированию процессов свержизлучения электронных сгустков в свободном пространстве с применением как численных, так и аналитических методов. Взаимодействие ленточного потока электронов-осцилляторов с электромагнитным полем описывается с помощью нестационарных нелинейных уравнений движения электронов и параболического уравнения для комплексной амплитуды излучаемой волны [1].

Решение линеаризованной системы уравнений, соответствующей начальной стадии процесса, основано на применении преобразования Лапласа. В результате использования метода перевала при обращении этого преобразования получено асимптотическое выражение для амплитуды излучаемого поля.

Численное моделирование нелинейной стадии взаимодействия проводилось с помощью алгоритма, основанного на интегральном представлении для амплитуды поля и приближенном решении вдоль характеристик методом Ни-стрема системы дифференциальных уравнений, описывающих движение электронов.

## Список литературы

- [1] *G.R.M. Robb, N.S. Ginzburg, A.D.R. Phelps and A.S. Sergeev Phys. Rev. Let. 77, 1492(1996)*

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА**

Глазатов С.Н. (Новосибирск)

В области  $Q = D \times (0, T)$ , где  $D \subset R^n$  - ограниченная область с гладкой границей  $\gamma$ , а  $n \leq 2$  рассматривается уравнение

$$Au \equiv k(u)u_t - \Delta_x u + \mu u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $k(s)$  - гладкая, возможно знакопеременная функция, а  $\mu > 0$  - постоянная.

Поставим следующую краевую задачу: найти в  $Q$  решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{\gamma \times (0, T)} = 0, \quad (3)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\gamma \times (0, T)} = 0. \quad (3')$$

Удается доказать, что при определенных условиях на правую часть  $f(x, t)$ , а именно при условиях ее гладкости,  $t$  - периодичности производных  $D_t^j f$  ( $j = 0, 1, 2$ ) и малости некоторой соболевской нормы  $f(x, t)$ , существует гладкое решение задачи (1) - (3) (задачи (1) - (3')). При некоторых дополнительных условиях это решение единственно.

Если заменить условие (2) условием

$$u|_{t=0} = u|_{t=T} = 0, \quad (4)$$

то в случае  $k(0) = 0$  и при дополнительном к вышеупомянутым условиям требовании  $f|_{t=0} = f|_{t=T} = 0$  можно доказать разрешимость задачи (1), (4), (3) (задачи (1), (4), (3')) в классе гладких функций.

Также получены результаты о разрешимости неклассических краевых задач для линейных параболических уравнений с переменным направлением времени.

Задачи на построение.  
В.О.Глазунова (Воронеж)

Обычно задачи на построение вызывают у учащихся затруднения. Это объясняется небольшим количеством часов, выделяемых на эту тему, а так же узким кругом задач.

Вниманию предлагаются несколько задач на построение отрезков, заданных формулой. Они могут быть рекомендованы для классов с углубленным изучением математики.

Решение этих задач основано на построении отрезка, являющегося средней геометрической величиной между двумя данными отрезками, построении пропорциональных отрезков на основании теоремы Фалеса, на построении прямоугольного треугольника по двум сторонам, углу и стороне.

1. Даны четыре отрезка длиной  $a, b, c, d$ . С помощью циркуля и линейки построить отрезок  $x = \sqrt{3ab} + 2cd$

Выполнив очевидное преобразование, получим  $x = \sqrt{(\sqrt{3ab})^2 + (\sqrt{2cd})^2}$ . Таким образом, отрезок  $x$  является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами равными  $\sqrt{3ab}$  и  $\sqrt{2cd}$  соответственно. В свою очередь первый катет является средним геометрическим между отрезками длиной  $3a$  и  $b$ , второй -  $2c$  и  $d$ .

2. Даны отрезки длиной  $a$  и  $b$ . С помощью циркуля и линейки построить отрезок  $x = (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^4$ .

Выполним преобразование:

$$x = a + b + 4\sqrt[4]{a^3b} + 6\sqrt{ab} + 4\sqrt[4]{ab^3} = a + b + 6\sqrt{ab} + 4\sqrt{a\sqrt{ab}} + 4\sqrt{b\sqrt{ab}}$$

Из полученного выражения следует очевидность требуемого построения. Четвертое и пятое слагаемые представляют собой средние геометрические величины между  $a$  и  $\sqrt{ab}$ , и  $b$  и  $\sqrt{ab}$  соответственно.

3. Даны два отрезка длины 1 и длины  $a$ . С помощью циркуля и линейки

построить отрезок длиной  $x = \frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}$  ( $a > 3$ )

Выполним следующее преобразование:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1*(a-3)}} = \frac{\sqrt{1*(a+3)}}{\sqrt{(a+\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}}$$

4. Даны отрезки длиной  $a$  и  $b$ . С помощью циркуля и линейки построить отрезок по формуле  $x = \frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3}$

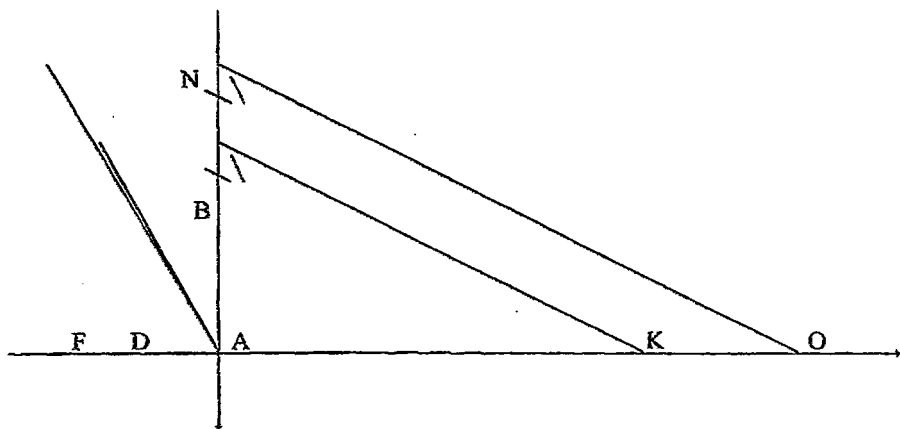
Преобразуем данное выражение к виду

$$\frac{\sqrt{x(a+b)}}{\sqrt{(a-\frac{b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{\sqrt{(a+\frac{b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{2}})^2}}{\sqrt{(a-\frac{b}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}b}{2})^2}}$$

5. Дан отрезок длиной  $\sqrt{7}$ . С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной 1.

Возьмем произвольный отрезок  $c$ , обозначив его длину  $c = k+1$ , где 1 - искомый единичный отрезок.

На произвольной прямой от точки  $A$  отложим два отрезка:  $OA$  длиной  $7c$  и  $AF$  длиной  $c$ .  $AN = \sqrt{7}c = c\sqrt{7}$  по построению. От точки  $A$  вверх на прямой  $AN$  отложим  $AB = \sqrt{7}$  (данный отрезок). Проведем  $BD \parallel FN$  и  $BK \parallel ON$ .  $\triangle PNF \sim \triangle KBD$ , следовательно  $\frac{AB}{AD} = \frac{AN}{AF}$  или  $\frac{\sqrt{7}}{AD} = \frac{c\sqrt{7}}{c}$ , т.е.  $AD = 1$  т.е.  $AD$  - искомый единичный отрезок. (см. рис.)



Глушко В.П., Смирнова Е.В. (Воронеж)  
ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ "MATHEMATICA 3.0".

В докладе рассматривается задача линейного программирования:  $C(\lambda)X - \min; AX = B, X \geq 0$  в том случае, когда коэффициенты линейной формы  $C(\lambda)X$  - зависят от вещественного параметра  $\lambda$ , вообще говоря, нелинейным образом. Требуется найти все оптимальные планы (базисы) задачи, соответствующие различным значениям параметра  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$  (в частности, возможно  $\lambda_0 = -\infty, \lambda_1 = +\infty$ ). Алгоритм решения поставленной задачи в случае линейной зависимости  $C(\lambda)$  от параметра  $\lambda$  изложен, например, в [1]. Вместе с тем современная компьютерная система "Mathematica 3.0" ([2]) содержит программу решения задачи линейного программирования лишь в случае, когда  $C$  - фиксированный вектор (вектор с фиксированными числовыми компонентами). Это тем более удивительно, что в целом система "Mathematica 3.0" нацелена на решение самых различных задач в символьном виде. Однако система программ в "Mathematica 3.0" настолько глубоко проработана, что позволяет создать алгоритм решения поставленной задачи параметрического программирования при любой гладкой зависимости  $C(\lambda)$  от параметра  $\lambda$ . В частности, в качестве элементов вектора  $C(\lambda)$  могут выступать произвольные многочлены по  $\lambda$  с вещественными коэффициентами. Проведенные расчеты показали полную пригодность построенного алгоритма на ряде конкретных примеров. Графические возможности системы "Mathematica 3.0" позволяют проконтролировать и иллюстрировать полученные результаты с помощью соответствующих графиков и чертежей.

### Литература

[1] Гасс С., Линейное программирование (методы и приложения). Физматгиз, М:1961 . 303 с.

[2] Дьяконов В.П., Системы символьной математики и - М:СК Пресс, 1998. 328с.

## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Н.И. Головки, В.В. Катрахов, Н.А. Кучер (Владивосток)

Основным объектом исследования являются однолинейные системы массового обслуживания (СМО) с конечным и бесконечным накопителем, которые достаточно адекватно описывают функционирование компьютерных сетей связи. Предполагается, что входной поток заявок распределен по экспоненциальному закону и имеет скачкообразную интенсивность. При этом основное внимание уделяется анализу стационарных характеристик числа заявок и анализу характеристик незавершенной работы.

В случае экспоненциального закона распределения времени обслуживания для СМО с конечным накопителем предлагается матричный метод расчета стационарного распределения числа заявок, для СМО с бесконечным накопителем предлагается метод производящих функций. В первом случае задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений и обращению матрицы диагональной структуры. Во втором случае бесконечная система разностно-интегральных уравнений относительно вероятностных характеристик СМО сводится к одному интегральному уравнению типа Фредгольма относительно одной из характеристик, через которую выражаются математическое ожидание и дисперсия числа заявок.

Для понимания функционирования СМО с бесконечным накопителем чрезвычайно важны характеристики незавершенной работы. В случае произвольного закона распределения времени обслуживания относительно стационарной характеристики незавершенной работы получено уравнение типа Такача, которое решается с применением преобразований Лапласа-Стилтьеса. Через преобразования Лапласа-Стилтьеса удалось выразить моменты незавершенной работы.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Н.И. Головки, В.В. Катрахов (Владивосток)

В сообщении предполагается обсудить содержание монографии [1]. Анализ систем массового обслуживания (СМО) с изменяющимися во времени параметрами является сложной математической задачей. К сожалению, достаточно универсальных методов (как приближённых, так и численных), применяемых к расчёту и моделированию характеристик СМО, пока не существует, поэтому есть необходимость в разработке таких методов хотя бы для определённых классов систем массового обслуживания.

В данной работе исследуются системы массового обслуживания различной структуры по количеству обслуживающих приборов и емкости накопителя с дважды стохастическим пуассоновским входным потоком заявок, интенсивность которого принимает значения на конечном интервале, и является либо диффузионным, либо скачкообразным процессом. Для диффузионной интенсивности предполагаются определенные условия на диффузионный процесс в граничных точках. Анализируются стационарные характеристики таких СМО и условия существования стационарного режима. Разработанная методика предлагается для анализа широкого класса нестационарных марковских СМО с детерминировано изменяющейся интенсивностью входного потока.

В силу специфики потока сообщений на узлах локальных и глобальных компьютерных сетей, системы обслуживания со скачкообразной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании узлов локальных вычислительных сетей, системы обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании узлов глобальных компьютерных сетей типа ИНТЕРНЕТ.

1. Н.И. Головки, В.В. Катрахов. Анализ систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде. Владивосток. Изд-во ДВГАЭУ, 1999. - 227 с.



# РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ ПРИ ДИФFUЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДНОГО ПОТОКА

Н.И. Головки, В.В. Катрахов (Владивосток)

Работа выполнена в области теории массового обслуживания. В работе рассматриваются новые модели для описания функционирования узлов информационных сетей. Применение указанных моделей приводит к появлению нового класса интегро-дифференциальных уравнений, которые являются еще недостаточно изученными в литературе. Предлагаются методики решения данных уравнений. В последнее время, в связи с ростом и усложнением информационных систем, большой интерес вызывают СМО с ДС ПП заявок с диффузионной интенсивностью.

Рассматриваются СМО типа  $M/M/1$  с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором, экспоненциальным обслуживанием с постоянным параметром, дважды стохастическим (ДС) входным пуассоновским потоком заявок. Предполагается, что интенсивность  $\lambda(t)$  ДС потока представляет собой диффузионный случайный процесс с упругими границами. Модель такой СМО может быть применена при анализе сложных узлов сети ИНТЕРНЕТ.

Относительно стационарного совместного распределения незавершенной работы и интенсивности входного потока в работе получена краевая задача, состоящая из интегро-дифференциального уравнения типа Такача [1] и краевых условий. Применяются методы операционного исчисления для нахождения в явном виде стационарных характеристик незавершенной работы в СМО, таких как математическое ожидание и дисперсия незавершенной работы.

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ.- М.: Машиностроение, 1979. - 432 с.

# КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ПРИЗНАКИ КРИТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Гончаров С.И. (Воронеж)

В пространстве  $\mathbb{C}^n$  рассмотрим дискретную систему

$$x(t+1) = Mx(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $M$  - действующий в  $\mathbb{C}^n$  линейный оператор (его матрицу также обозначим буквой  $M$ ), а  $x(t) = M^t x(0)$  - значение решения разностного уравнения в дискретный момент времени  $t$ .

Предположим, что среди точек спектра матрицы  $M$  есть критические (то есть модуль которых равен единице) и нам известна а priori информация о собственных векторах, соответствующих этим точкам (они называются критическими собственными векторами). На основании метода допустимых возмущений, предложенного профессором Перовым А.И. [1], и свойств ортогональной проекции в унитарном пространстве [2, с.214] имеет место

**Т е о р е м а.** Пусть  $M$  - квадратная  $n \times n$ -матрица (1),  $X$  - прямоугольная  $n \times p$ -матрица, столбцами которой являются известные правые критические собственные векторы  $x_1, \dots, x_p$ , матрицы  $M$ ,  $Y$  - прямоугольная  $q \times n$ -матрица, строками которой являются известные левые критические собственные векторы  $y_1, \dots, y_q$ , матрицы  $M$ , и при этом выполнено условие квазиортогональности  $YX = 0$ . Пусть  $m_i^c$  - столбцы матрицы  $M$ . Пусть  $\Gamma(x_1, \dots, x_p)$  и  $\Gamma(y_1, \dots, y_q)$  - определители матриц Грэма, составленные соответственно из столбцов матрицы  $X$  и строк матрицы  $Y$ . Пусть  $\tilde{M}$  - матрица, столбцами которой являются векторы

$$\tilde{m}_i^c = \begin{pmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_p) & x_1 & \dots & x_p \\ (m_i^c, x_1) & \dots & (m_i^c, x_p) & m_i^c \end{pmatrix} / \Gamma(x_1, \dots, x_p), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

Пусть  $\tilde{m}_i^c$  ( $i = 1, \dots, n$ ) - строки матрицы  $\tilde{M}$ . Тогда имеет место оценка для нормы фактор-оператора  $(M|_{\ker Y})/|_{\text{im } X}$  в метрике, порожденной стандартным скалярным произведением,

$$|(M|_{\ker Y})/|_{\text{im } X}| \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \Gamma(y_1, \dots, y_q) & (y_1, \tilde{m}_i^c) & \dots & (y_q, \tilde{m}_i^c) \\ (\tilde{m}_i^c, y_1) & \dots & (\tilde{m}_i^c, y_q) & (\tilde{m}_i^c, \tilde{m}_i^c) \end{vmatrix}}{\Gamma(y_1, \dots, y_q)}}}. \quad (3)$$

Поясним, что здесь  $\ker Y$  - образ матрицы  $Y$  - подпространство, являющееся пересечением ядер линейных функционалов  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) - строк матрицы  $Y$ , а  $\text{im } X$  - образ матрицы  $X$  - подпространство, натянутое на столбцы матрицы  $X$ . Если правая часть неравенства (3) меньше единицы, то оператор  $M$  устойчив. С помощью локализационной теоремы Э.Шмидта [3, с.349] нами получен аналогичный результат для непрерывных систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Перов А.И. *Об устойчивости в критических случаях*. В материалах конференции по функциональному анализу и математической физике, посвященной 80-летию Крейна Селима Григорьевича, Воронеж, 1997, Воронежский государственный университет, с. 60-64.
2. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука, 1988, 548 с.
3. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения*. Москва, Наука, 1968, 504 с.

# ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМЫ ФАКТОР-ОПЕРАТОРА В ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВЕ С МЕТРИКОЙ $\phi$ ИЛИ 1

Гончаров С.И. (Воронеж)

Пусть в вещественном пространстве  $R^n$  норма вектора  $x$  определяется как

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (1)$$

или

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (2)$$

Нормы (1) и (2) являются крайними случаями так называемых гельдеровых норм, когда единичный шар в пространстве  $R^n$  представляет собой выпуклый многогранник [1].

Пусть  $M$  - линейный оператор в  $R^n$ , для которого известны его вещественные правые  $x_1, \dots, x_p$  и левые  $y_1, \dots, y_q$  ( $p + q < n$ ) критические собственные векторы (т.е. отвечающие собственным значениям с равным единиче модулем). Пусть  $X$  и  $Y$  - прямоугольные  $n \times p$  - и  $q \times n$  - матрицы, составленные соответственно из столбцов и строк матрицы оператора  $M$ ,  $\text{im } X$  - образ матрицы  $X$  (подпространство, натянутое на столбцы матрицы  $X$ ) и  $\text{ker } Y$  - ядро матрицы  $Y$  (подпространство, являющееся пересечением ядер линейных функционалов  $y_i$  ( $1 \leq i \leq q$ )) - строк матрицы  $Y$ ), и притом выполнено условие ортогональности  $YX = 0$ , откуда  $\text{im } X \subset \text{ker } Y$  [1]. Пусть все миноры  $q$ -го порядка матрицы  $Y$  отличны от нуля. Тогда при всех отмеченных предположениях имеют место следующие результаты.

**Т е о р е м а 1.** Для нормы фактор-оператора  $M/\text{im } X$  в фактор-пространстве  $\text{ker } Y/\text{im } X$  с метрикой (1) имеет место равенство

$$\|(M/\text{ker } Y)/\text{im } X\|_0 = \max_x \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \|Mx - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\|_0, \quad (3)$$

где максимум берется по всем  $x$ :

$$\begin{cases} y_i x = 0, 1 \leq i \leq q; n - q \text{ компонент } x \text{ по модулю равны единице;} \\ \|x\|_0 = 1; \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \|x - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\|_0 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

**Т е о р е м а 2.** Для нормы фактор-оператора  $M/\text{im } X$  в фактор-пространстве  $\text{ker } Y/\text{im } X$  с метрикой (2) имеет место равенство

$$\|(M/\text{ker } Y)/\text{im } X\|_1 = \max_x \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \|Mx - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\|_1, \quad (5)$$

где максимум берется по всем  $x$ :

$$\begin{cases} y_i x = 0, 1 \leq i \leq q; q + 1 \text{ компонент } x \text{ отличны от нуля;} \\ \|x\|_1 = 1; \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \|x - \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\|_1 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Следует отметить, что формулы (3) и (5) не обязательно имеют место только лишь для критического случая, они более универсальны. Случай, когда  $p = 0$  (т.е. матрица  $X$  отсутствует), подробно изложен в работе [2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ*. Москва, Наука, 1969, 476 с.
2. Перов А.И., Гончаров С.И. *О вычислении нормы и логарифмической нормы линейного оператора на подпространстве*. Известия РАЕН, серия МММУ, 1998, т.2, №2, с.58-96.

## Оценка уровня восстановления организма спортсмена после критических нагрузок с использованием методов линейного программирования

Г.А.Гончарова, Е.В.Паксютова,  
Моренченко С.В, Гончаров О.В. (Саратов)

В современной спортивной медицине существенным является вопрос о восстановлении полных функциональных возможностей организма спортсмена после критических нагрузок (физических и психологических), а так же определения максимально допустимых нагрузок для каждого индивидуума в зависимости от конкретных данных (вида спорта, условий тренировок, и т. д).

На первом этапе работы проводилось статистическое исследование функциональных возможностей организма спортсменов (игровые виды спорта) непосредственно после соревнований и отборочных сборов. Затем прослеживалась динамика восстановления формы. В зависимости от индивидуальных особенностей индивидуума в обычном режиме полное восстановление достигалось через 2 – 4 недели.

На основе полученных данных строилась математическая модель процесса восстановления, где минимизировалась функция цели, являющаяся линейной комбинацией факторов, определяющих процесс восстановления мышечной активности и психологической устойчивости. Учитываемые факторы возможно подразделить на три основные группы: типы физических нагрузок и их интенсивность, режим питания, психологическая релаксация.

При перенапряжении в организме происходит истощение энергетического материала клеток, прежде всего АТФ. Но утомление в целостном организме наступает прежде всего в центральной нервной системе, что и требует особого внимания к снятию стрессовых нагрузок, однако в функции цели со своим весовым коэффициентом учитываются местные и гуморальные факторы.

В восстановительный период накладываются ограничения на все виды нагрузки, ориентированной на развитие выносливости. Изменяется частота тренировки различных групп мышц, изменяется цель упражнений. Так как дефицит АТФ стимулирует увеличение белковой массы митохондрий и по принципу обратной связи ведет к увеличению выработки АТФ во время деятельности и в восстановительный период, то это ведет к повышению тренированности к данному виду нагрузки.

Режим питания спортсменов подчинен восстановлению водно-солевого, а так же углеводного и белкового баланса.

Каждому фактору, влияющему на процесс восстановления при построении математической модели присвоен свой весовой коэффициент на основе тестирующих проб. Построена система неравенств – ограничений, накладываемых на учитываемые параметры. Решение минимаксной задачи позволяет получить важный практический результат.

По построенной модели даны практические рекомендации для тренеров, работающих с командами СГТУ с учетом индивидуальных особенностей игроков. В среднем, восстановительный период возможно сократить на 25 % относительно исходного.

## ТРАЕКТОРИИ – УТКИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Горелов Г. Н. (Самара)

Рассматривается нелинейная сингулярно возмущенная параболическая система

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \eta(1 - \eta)e^{\frac{\theta}{1+\beta\theta}} + \frac{1}{\delta} D_{\xi} \theta, \\ \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= \varepsilon \eta(1 - \eta)e^{\frac{\theta}{1+\beta\theta}} + \frac{1}{\rho} D_{\xi} \eta,\end{aligned}$$

где

$$D_{\xi}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{n}{\eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}, \quad n = 0, 1, 2,$$

граничные условия

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \theta|_{\xi=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0$$

и начальные условия

$$\theta|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0.$$

Данная задача является математической моделью задачи теплового взрыва в случае автокаталитической реакции горения с учетом теплопередачи диффузии по объему реакционного сосуда. В данной системе параметр  $\delta$  является критерием Франк-Каменецкого. В зависимости от его величины реакция имеет либо взрывной характер, либо протекает медленно. Значение параметра  $\delta$ , отделяющее медленные режимы от взрывных, называется критическим. Задача нахождения этого значения является основной математической задачей в теории теплового взрыва.

С помощью метода интегральных многообразий критическое значение  $\delta$  отыскивается в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$\delta = \delta_0(1 + \delta_1 \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

при этом критические режимы моделируются траекториями – утками. Для  $n = 0, 1, 2$  получены соответствующие значения  $\delta_0$  и  $\delta_1$ .

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Городецкий Ю.И. (г.Н.Новгород)

Рассматриваются различные аспекты использования проекционных методов в исследовании многомерных дискретных и распределенных колебательных систем [1].

Сообщается об использовании метода Бубнова-Галеркина для получения модальных уравнений по исходной системе дифференциальных уравнений в частных производных и формирования функций чувствительности спектра собственных частот по отношению к параметрам консервативной части системы. Анализируются полученные выражения функций чувствительности резонансных амплитуд колебаний в предположении малости внешних и внутренних диссипативных сил, действующих на консервативную систему. Предлагается методика поиска чувствительных и нечувствительных параметров и их использования для анализа и синтеза распределенных колебательных систем.

Далее рассматривается класс линейных распределенных систем с обратными связями, в которых возможно самовозбуждение колебаний. Излагается методика поиска с помощью метода Л-разбиения потенциально-неустойчивых форм колебаний путем оценки на отдельных модах колебаний бифуркационных значений параметров, при которых возникают автоколебания. При этом предлагается такая форма представления характеристического квазиполинома, при которой исключается возможность возникновения  $N_\omega$  предельного множества уникарсальных кривых и областей  $D(\infty)$ .

В последнем разделе проводится исследование квазилинейных распределенных систем с запаздыванием. Излагается процедура сведения исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием к модальному квазилинейному дифференциальному уравнению без запаздывания, решения которых в асимптотическом смысле близки.

## Литература

1. Городецкий Ю.И. и др. Автоматизированный поиск чувствительных параметров сложных механических систем // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всесоюз. межвуз. сборник. Горький, ГГУ. 1989. С. 65-71.

## ГРАФ-СХЕМЫ КАК СРЕДСТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Горяев Ю.А. (Стерлитамак)

В современной педагогике формирование и развитие творческого мышления учащихся в процессе обучения математике является составной частью процесса видения объектов изучения. Видение объекта связано с представлением обучаемого не только о внешнем, но и его внутреннем строении, о взаимосвязи его составляющих. Школьная математическая задача, в частности геометрическая, как сложная система несет на себе множество отношений: уяснение задачи, построение чертежей, планирование путей решения, привлечение и отбор необходимого теоретического материала, оформление записи решения, которые на основе обобщения можно назвать поиском решения. Научив учащихся умению видеть ход решения одной задачи, можно научить их видеть взаимосвязь между различными понятиями всего курса, и научить пониманию важности этой взаимосвязи. Активное живое созерцание - исходный этап познания пространственных форм и количественных отношений, начальное отправное звено для перехода к понятийному мышлению: это - вход в математические теории, предверие к теоретическому мышлению. Наглядность обеспечивает переход к абстрактному мышлению. Наглядное представление о системе учебного материала дают специальные граф-схемы.

Суть данного метода заключается в том, что логические переходы от одного суждения к другому, то есть силлогизмы, изображаются с помощью стрелок, показывающих связь между основанием и заключением силлогизма, а сами основания и заключения обрамляются какой-либо фигурой и такая графическая иллюстрация хода решения помогает учащимся четко просматривать и наглядно изобразить весь процесс решения, все цепочки логических следований-умозаключений из которых, собственно, и состоит доказательство теорем или решение задач. При этом учащиеся не только зрительно воспринимают тот материал, который изучается, но и на наглядном уровне вспоминают необходимый теоретический материал из ранее пройденного. Метод граф-схем - наглядно-иллюстративный метод решения разнообразных геометрических задач, с помощью схематического изображения силлогизмов-умозаключений, из которых, собственно и состоит доказательство, способствующий умению учащихся видеть процесс решения, развитию их воображения логического мышления. В отличие от традиционного словесно-символического способа решения задачи, при котором каждый шаг решения записывается символически и поясняется словесной записью, предлагаемый схематично-ячеечный способ, представляет собой краткую и емкую запись доказательства теорем или решения задач, в которую закладывается вся информация о данной задаче, в зашифрованном, закодированном виде.

Использование граф-схем делает процесс решения задачи динамичным, зрелищным. Перед глазами учащихся разворачивается весь ход решения задачи и доказательства теоремы со всеми взаимно переплетенными логическими переходами от одного суждения к другому. Образно говоря, ведется

строительство решения по кирпичикам схем, свидетелями и полноправными участниками которого являются учащиеся. Такая схематичная форма решения задачи или доказательства теоремы позволяет анализировать ход решения, облечь его в словесную оболочку, то есть по полученной или по заданной схеме восстановить и рассказать весь ход решения, с подробным описанием примененных аксиом, теорем, определений, а также сделать проверку решения. Применение графических иллюстраций решения задачи и доказательства теорем, наличие при этом некоторого творческого поиска делает изучаемый материал ярче, доступнее и проще для восприятия и воспроизведения. Граф-схема доказательства теоремы позволяет зрителю выявить логические отношения между частями доказательства, последовательность этапов рассуждения, которые образуют цепь соответственно тому, как разворачивается речевое мышление во времени. При составлении граф-схемы происходит двусторонний перевод информации (слово ? схема ? слово). Сформулировав одновременно с прямой теоремой обратную к ней, учащиеся могут самостоятельно провести ее доказательство и оформить его в виде граф-схемы.

П.М. Эрдишев пишет, что граф-схема позволяет увидеть детали доказательства, которые остаются в тени при ограничении лишь словесным доказательством. Граф-схемы рассуждений позволяют ученику увидеть как бы атомарное строение рассуждения; это важно, коль скоро мы ставим целью в своем анализе добраться до ее исходных составных элементов, кирпичиков живой человеческой мысли.

А.А. Столяр отмечает, что символическая запись теорем позволяет наглядно представить доказательства в виде графоподобных структурных схем. Эти схемы, раскрывая идею и логику доказательства, являются одновременно кратким конспектом, составленным на общепонятном языке. Вершинами графа доказательства служат предложения, участвующие в нем, а стрелки указывают, что из чего следует.



## О ЗАМЫКАНИИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Григоренко А.А. (Тамбов)

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – пространство  $n$ -мерных вектор-столбцов с нормой  $|\cdot|$ . Пусть  $C^n[a, b](L^n[a, b])$  – пространство непрерывных (суммируемых) вектор-функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$  ( $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)| ds$ ). Пусть  $\text{comp}[C^n[a, b]]$  – множество всех непустых компактов пространства  $C^n[a, b]$ .

Пусть  $\Phi \subset L^n[a, b]$ . Будем говорить, что множество  $\Phi$  выпукло по переключению (разложимо), если для любых  $x, y \in \Phi$  и любого измеримого множества  $e \subset [a, b]$  справедливо включение  $\chi(e)x + \chi([a, b] \setminus e)y \in \Phi$ , где  $\chi(\cdot)$  – характеристическая функция множества. Обозначим через  $\Pi[L^n[a, b]]$  множество всех непустых, замкнутых, выпуклых по переключению подмножеств из  $L^n[a, b]$ .

Рассмотрим в пространстве  $C^n[a, b]$  включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \quad (1)$$

где многозначные операторы  $\Psi : C^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[C^n[a, b]]$ ,  $\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$  непрерывны по Хаусдорфу,  $V : L^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b]$  – линейный непрерывный интегральный оператор.

Под решением включения (1) будем понимать такой элемент  $x \in C^n[a, b]$ , для которого справедливо включение (1). Таким образом, для любого решения  $x$  включения (1) найдутся такие элементы  $v \in \Psi(x)$  и  $z \in \Phi(x)$ , что справедливо равенство  $x = v + Vz$ .

Рассмотрим в пространстве  $C^n[a, b]$  включение

$$x \in \Psi(x) + V(\overline{\text{co}}\Psi(x)), \quad (2)$$

где  $\overline{\text{co}}(\cdot)$  – выпуклая, замкнутая оболочка множества.

Пусть  $H, H_{\text{co}}$  – множества решений включения (1), (2), соответственно.

В докладе обсуждаются условия, при которых выполняется равенство  $\overline{H} = H_{\text{co}}$ , где  $\overline{H}$  – замыкание множества  $H$  в пространстве  $C^n[a, b]$ .

Отметим, что в работе [1] получены условия равенства  $\overline{H} = H_{\text{co}}$  в случае, когда отображение  $\Psi$  имеет выпуклые компактные значения в пространстве  $C^n[a, b]$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189. №6. С. 3-32.

**О существования полных пространственно подобной  
поверхностей в искривленном лоренцевом многообразии <sup>1</sup>**

©Е.Г.Григорьева (Волгоград)

Искривленным лоренцевым произведением  $\mathcal{H}$  с искривляющими функциями  $\sigma(t)$ ,  $\delta(r)$  называется многообразие с лоренцевой метрикой

$$ds^2 = -\delta(r)dt^2 + \sigma(t)(dr^2 + \alpha^2(r)d\theta^2),$$

где  $r \in (0, +\infty)$ ,  $d\theta$  – элемент длины некоторого  $(n-1)$ - мерного компактного многообразия  $S$  класса  $C^1$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\delta(r)$ ,  $\sigma(t)$  – положительные гладкие функции.

"Идеальной" границей искривленного лоренцева произведения  $\mathcal{H}$  назовем совокупность "лучей" вида

$$\theta = \theta_0, r = r(s), t = t(s), 0 < s < +\infty,$$

удовлетворяющих условию

$$\lambda \int_0^{t(s)} \frac{dy}{\sqrt{\sigma(y)}} = \mu \int_0^{r(s)} \frac{dy}{\sqrt{\delta(y)}},$$

где  $\lambda, \mu \geq 0$  – некоторые числа.

Всякий такой луч определяет точку на "идеальной" границе пространства  $\mathcal{H}$ . В случае пространства Минковского эти уравнения задают обычные прямые лучи.

Функция  $\varphi(\theta)$  называется следом поверхности  $M$  на "идеальной" границе пространства  $\mathcal{H}$ , если для любого  $\theta \in S$  выполнено

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{f(r,\theta)} \frac{ds}{\sqrt{\sigma(s)}} \left( \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{\delta(s)}} \right)^{-1} \right] = \varphi(\theta).$$

Будем дополнительно предполагать, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{\sqrt{1+r^2}} \frac{ds}{\sqrt{\sigma(s)}} \left( \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{\delta(s)}} \right)^{-1} \right] = 1.$$

**Теорема.** Для существования липшицевой пространственно подобной поверхности, заданной графиком функции  $t = f(r, \theta)$ , имеющей липшицеву функцию  $\varphi(\theta)$  в качестве следа на "идеальной" границе пространства  $\mathcal{H}$ , необходимо и достаточно выполнение условия для любого компакта  $K \subset N$

$$\text{ess sup}_{(\theta, \theta) \in K \subset N} \left( \varphi^2(\theta) + \frac{\delta(r)}{\alpha^2(r)} \left( \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{\delta(s)}} \right)^2 |\nabla \varphi|^2 \right) \leq 1.$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS Ref.No:10170.

## STABLE STOCHASTIC LINEAR DISCRETE REGULATOR SYSTEM

A. E. Gurianov (Saint Petersburg)

It is considered the following linear stochastic control ordinary differential equations system feedbackly looped by the linear discrete regulator

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t_{k-1}), t \in [t_{k-1}, t_k), t_{k-1} < t_k, k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

where  $t_0 \in (-\infty, \infty)$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $t_k = t_{k-1} + h_k$ , and the discrete regulator steps  $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$  are the positive random variables so that  $\sup_{k=1,2,\dots} h_k < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} h_k = \infty$ , the initial random value vector  $x_0 \in R^n$ ,  $x(t_0) = x_0$ , the stochastic continuous vector function  $x(t) \in R^n$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  designate  $n \times n$ -matrices, whose elements are measurable integrable by  $t \in R^1$  stochastic processes and whose operator norms are with probability 1 integrally bounded by a nonnegative random variable  $K$  while  $t \in R^1$ . Herein a validity of an equality, an inequality or an inclusion with respect to random variables is regarded as an almost sure validity certainly.

Let us denote by  $X(t, s)$  the Cauchy matrix (matriciant) of the corresponding to (1) homogeneous equations system  $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ . At last let us assign the auxiliary matrices  $P_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , by means of the equality

$$P_k = E + h_k \int_0^1 \{X(t_k, t_{k-1} + sh_k)(A(t_{k-1} + sh_k) + B(t_{k-1} + sh_k))\} ds,$$

where  $E$  is the determinate  $n \times n$  - matrix unit.

**Theorem 1** For the almost sure stability (in the sense of A. M. Lyapunov) of the equations system (1) null solution ( $x(t) \equiv 0$ ) to be it is necessary and sufficient to be almost surely so that  $\sup_{k=1,2,\dots} |\prod_{j=0}^{k-1} P_{k-j}| < \infty$ .

**Theorem 2** For the almost sure global asymptotical stability (in the sense of A. M. Lyapunov) of the equations system (1) null solution to be it is necessary and sufficient to be almost surely so that  $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{k-1} P_{k-j} = 0$ .

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДНЫХ СТРУКТУР НА БАЗЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Губенков А. А. (Саратов)

Одним из перспективных методов математического моделирования физических процессов и структур в твердых телах является вариационный метод, базирующийся на билинейных функционалах, стационарное значение которых может быть сделано равным любому искомому параметру исходной задачи путем выбора сопряженной задачи.

Физические процессы в твердотельном акустическом устройстве конечного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , в достаточно общем случае могут быть описаны уравнениями линейной теории упругости так [1, 2]:

$$\nabla \cdot T = jk\rho v, \quad \nabla_s v = jks:T \quad (1)$$

где  $T$  - вектор, составленный из компонент тензора напряжений,  $v$  - вектор поля скоростей;  $\rho$  - плотность среды,  $s$  - тензор упругой податливости;  $s:T = \sum s_{ij}T_j$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla_s$  - символические операторы [1, 2]. Представим поверхность  $S$  как  $S = S_1 + S_2 + S_3$  и пусть на  $S_1$ :  $v = g$ , на  $S_2$ :  $T = G$  и на  $S_3$ :  $v = f + w:T$ . При такой постановке задачи отыскание полевых величин  $v$  и  $T$ , согласно предложенному в [2] вариационному принципу, можно свести к нахождению функций  $v$  и  $T$ , доставляющих стационарное значение функционалу

$$I(v, T) = \int_V [(\nabla \cdot T - jk\rho v) \bar{v}^* + (\nabla_s v - jks:T) \bar{T}^*] dV - \int_{S_1} [(v - g) \bar{T}^* + \bar{g}^* T] ndS - \\ - \int_{S_2} [\bar{v}^* (T - G) + v \bar{G}^*] ndS - \int_{S_3} [(v - f - w:T) \bar{T}^* + \bar{f}^* T] ndS \quad (2)$$

где знак  $(\bar{\cdot})$  над функциями означает их принадлежность к задаче сопряженной в смысле Лагранжа [3], а знак  $(\cdot)$  над функциями означает комплексное сопряжение. При этом выбором сопряженной задачи (т. е. подбором функций  $\bar{g}^*$ ,  $\bar{G}^*$ ,  $\bar{f}^*$ ) стационарное значение функционала может быть сделано равным практически любому параметру исходной структуры (собственной частоте, элементам матрицы рассеяния и т. д.) либо искомому решению задачи (1) (полям  $v$  и  $T$ ).

Так, например, билинейный функционал для нахождения собственных частот может быть получен из (2) при  $S_2 = S_3 = 0$  и  $g = \bar{g}^* = 0$  по методу работы [2]

$$\omega = j \left( \int_V (\nabla \cdot T \cdot \bar{v}^* + \nabla_s v \cdot \bar{T}^*) dV - \int_S v \cdot \bar{T}^* ndS \right) / \left( \int_V (\bar{v}^* \rho v + \bar{T}^* s:T) dV \right)$$

Другие функционалы для моделирования упомянутых параметров акустических твердотельных структур также легко получаются по методу работы [2].

## Литература

1. Auld A. B. Application of microwave concept to the theory of acoustic fields and waves in solids //IEEE Trans. Microwave Theory Techn.-1969.- V. MTT-17, 111.- P. 800-811.
2. Губенков А. Н., Кириченко В. Ф., Куликов Э. Л., Павлов С. П. Вариационный принцип для задач анализа пьезоэлектрических устройств с акустоэлектрическим взаимодействием //Акустический журнал - 1978.- Т. 24, 2.- С. 192-202.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: «Наука», 1969.

# АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРНЫХ СТРУКТУР С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКАМИ

Губенков А. Н. (Саратов)

Анализ и синтез сложных твердотельных структур с пьезоэлектриками удобно проводить с помощью вариационных методов. Для анализа и расчета реальных параметров устройств более эффективным в вычислительном плане является использование билинейных функционалов, стационарное значение которых может быть сделано равным любому искомому характеристическому параметру задачи [1]. Для решения задач синтеза удобней использовать квадратичные функционалы типа «невязки».

В качестве примера рассмотрим решение задач анализа и синтеза акустического двухслойного пьезоэлектрического резонатора (рис. 1) по собственным частотам. Физические процессы в пьезоэлектрическом устройстве можно описать системой уравнений Максвелла, уравнений теории упругости, записанными в векторном виде и уравнениями пьезоэффекта [1]. Функционал для нахождения собственных частот такого устройства будет иметь вид:

$$w = \int_V \frac{\left( (\nabla \cdot T) \cdot \bar{v} + (\nabla_s v) \cdot \bar{T} + (\nabla \times E) \cdot \bar{H} + (\nabla \times H) \cdot \bar{E} \right) dv - \int_S (E \times \bar{H}) \cdot n ds - \int_S (v \cdot \bar{T}) \cdot n ds}{\int_V \left( (\mu \cdot H) \cdot \bar{H} - (\rho v) \cdot \bar{v} - (d \cdot E) \cdot \bar{T} - (s : T) \cdot \bar{T} - (\epsilon \cdot E) \cdot \bar{E} - (d : T) \cdot \bar{E} \right) dv} \quad (1)$$

где горизонтальная черта над вектором обозначает комплексное сопряжение, а знак (\*) - принадлежность вектор-функций к сопряженной задаче. Здесь E и H - векторы напряженности электрического и магнитного полей, T - вектор, составленный из компонент тензоров напряжений [1], v - вектор поля скоростей, ε и μ - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, s - тензор податливости, d - тензор пьезомодулей, ρ - плотность среды, ω - частота, ∇\*, ∇<sub>s</sub> - символические операторы [1]. Ниже на рис. 2 представлен результат минимизации этого функционала.

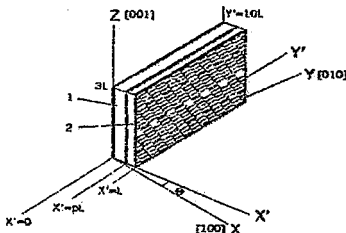


Рис. 1. Пьезоэлектрический двухслойный резонатор:  
1 - первый слой пьезоэлектрика ZnS;  
2 - второй слой пьезоэлектрика Bi<sub>12</sub>GeO<sub>20</sub>.

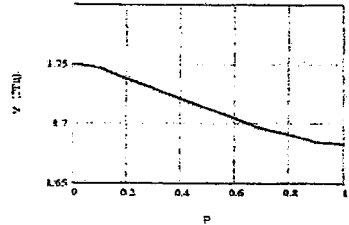


Рис. 2. Зависимость собственной частоты резонатора от отношения толщин слоев пьезоэлектриков

Синтез структуры (рис. 1) с заданным значением ω<sub>0</sub> проводится на базе квадратичного функционала вида:  $\mathcal{J} = \|\omega_0 - \omega\|^2$ , где в качестве ω выступает билинейный функционал (1).

### Литература

1. Губенков А. Н. и др. Вариационный метод расчета пьезоэлектрических устройств // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 9. с. 1883-1892.

## О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ НАПРАВЛЕННОГО ВЫБОРА СТРУКТУРЫ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Е.Л. ГУСЕВ (г. Якутск)

Исследуются задачи эффективного управления характеристиками волновых полей на основе направленного выбора структуры неоднородной среды. На основе явления интерференции преломленных и отраженных волн на энергетические характеристики волновых полей существенное влияние будет оказывать структура неоднородной среды. Меняя структуру неоднородной среды можно в широких пределах управлять энергетическими характеристиками волновых процессов различной физической природы (электромагнитных, акустических, температурных, упругих). При этом центральной проблемой является проблема создания неоднородных структур, реализующих предельные возможности по управлению энергетическими характеристиками волновых процессов различной физической природы. На основе конструктивного анализа необходимых условий оптимальности, связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров, установлено, что структуры, реализующие предельные возможности, обладают рядом уникальных свойств. В частности, установлено существование свойства внутренней симметрии в оптимальных структурах. Знание данных свойств позволяет эффективно исследовать предельные возможности неоднородных структур по управлению энергетикой волновых процессов различной физической природы.

### Литература

1. Е.Л. Гусев. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука 1993. — 262 с.
2. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН, 1996, т. 346, № 3, с. 324-326.
3. Гусев Е.Л. Об априорном сужении допустимого набора материалов в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН, 1996, т. 349, № 3, с. 329-331

## "Алгоритмический подход в обучении математике."

Данкова И. Н.(г. Воронеж).

Согласно требованиям к математической подготовке учащихся в результате изучения курса математики в 5 - 6 классов ученики должны уверенно выполнять арифметические действия над натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями, производить округление чисел. В течение учебного года рекомендуется последовательно (в соответствии с тематическим планированием учебного материала 5 – 6 классов) закреплять и отрабатывать умение осознанно применять алгоритмы письменных вычислений, вырабатывать навык правильного и быстрого их выполнения, применения рациональных приёмов вычислений с использованием свойств арифметических действий. Поэтапное формирование умственных действий тесно связано с соответствующими алгоритмами, это обеспечивает более глубокое мышление учащихся, повышает интерес к учению.

Математика полна алгоритмов для решения задач различных классов. И вполне понятно, что в зависимости от уровня развития класса, степени трудности решаемых задач учитель выбирает: дать алгоритм готовым к использованию или же создать проблемную ситуацию, организовать поиск решения задачи, а затем разработку алгоритма.

Отмечу, что при решении задач роль алгоритмов состоит в том, чтобы обеспечить методическую стройность последовательности в решении. В самом тексте решения ничего не должно быть сказано про алгоритм, которым пользовались. Это как раз и составляет основную методику применения алгоритмов при решении задач. Алгоритм должен быть, главным образом образом решением, а не шаблоном. Необходимо приучать учащихся к самостоятельному составлению алгоритмов, с последующим анализом составленных алгоритмов и выбором из них лучшего.

Алгоритмы в математике излагаются в развёрнутом или свёрнутом виде (словесная формула, правило-формула, правило-тождество и т. д.). Чаще всего – в свёрнутом. В таком случае успех работы будет обеспечен. Если совместными усилиями учащихся под руководством учителя разработает развёрнутый алгоритм решаемой задачи.

Например. Алгоритм решения задач на составление уравнений.

1. Прочитай внимательно условие задачи.
2. Сделай геометрический чертёж или рисунок.
3. Обозначь неизвестную через  $X$ .
4. Пользуясь условием задачи, вырази остальные элементы через  $X$  и другие известные в задаче.
5. Составь уравнение, используя данные в задаче и зависимость между ними.
6. Реши уравнение.
7. Проверь решение
8. Запиши ответ.

# АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ВУЛКАНИЗАЦИИ

А.П. Денисов, Ю.Ю. Громов

(Тамбовский государственный технический университет)

Задача построения оптимального управления процессом вулканизации крупногабаритных шин [3] основой своей являет формулу Тиле [1, 2] для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

с начальным условием  $x(0) = a$  (функция  $f(t, x)$  предполагается достаточно гладкой).

Решение начальной задачи для уравнения (1) представляется в виде ряда и порождает цепную дробь

$$x(t_n) = \frac{w_0}{1 - \frac{w_1 h}{1 - \frac{w_2 h}{1 - \frac{w_3 h}{1 - \dots}}}} \quad (2)$$

где коэффициенты  $w_i$  определяются в соответствии с алгоритмом Тиле [2],  $h, t_n$  - шаг и узлы алгоритмической сетки.

Использование указанного алгоритма и полученного решения (2) осуществляется применением к задаче вулканизации [3] метода Фурье.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хиджян А.Я. Цепные дроби. - Физматгиз, 1971. - 112 с.
2. Березин И.С., Жадков Н.П. Методы вычислений. - М.: Гостехиздат, Т.2, 1962. - 640 с.
3. Ю.Ю. Громов, А.П. Денисов, В.В. Провоторов, Ю.В. Покорный. Задача оптимального управления процессом вулканизации крупногабаритных шин. // «Современные методы информатизации...» Тезисы докл., Воронеж, 1999. 127 с.



# НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ НАЛИЧИЯ И ОТСУТСТВИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Денисов В.С., Примакова С. И. (Витебск)

Для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \psi(y) + \varphi(x) \prod_{i=1}^{2k+1} (x - a_i); \quad \dot{y} = b \prod_{i=0}^{2k} (x - a_i), \quad (1)$$

где  $b < 0$  и  $a_{-1} < a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{2k} < a_{2k+1}$ , найдем достаточные условия отсутствия в некоторой вертикальной полосе фазовой плоскости или во всей фазовой плоскости предельных циклов, охватывающих все особые точки  $(a_i; 0), i = \overline{0, 2k}$ . Получены также достаточные условия существования по крайней мере одного устойчивого предельного цикла, окружающего все конечные особые точки системы (1). Сформулируем некоторые результаты.

Обозначим  $m = \max_{i=1, \overline{k}} \{G(a_{2i-1})\}$ ,  $G(x) = -bx^2 \left( \frac{x^{2k}}{2k+2} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}}{2k+1} x^{2k-1} + \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{2k-1} a_{2k}}{2k} x^{2k-2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k}}{2} \right)$ .

**Теорема 1.** Если выполнены условия:

A.  $\psi(y)$  - нечетная, возрастающая функция и  $\psi(y) \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow \infty$ ;

B.  $G(a_{-1}) \geq G(a_{2k+1}) > m_1$ ;

C.  $\varphi(x) \leq 0$  при  $\forall x \in (a_{-1}; a_{2k+1})$  и равенство нулю возможно лишь в изолированных точках, то система (1) в полосе  $\bar{a} \leq x \leq a_{2k+1}$ , где  $a_{-1} < \bar{a} < 0$  и

$G(\bar{a}) = G(a_{2k+1})$ , не имеет предельных циклов, окружающих особые точки  $(a_i; 0), i = \overline{0, 2k}$ . Неравенство в условии C можно заменить на противоположное.

**Теорема 2.** Если выполнены условия A, B, C и следующее:

$\exists l_1 > a_{2k+1}, \exists l_2 < a_{-1}$  такие, что  $\varphi(x) < 0$  при  $x > l_1$  и  $\varphi(x) > 0$  при  $x < l_2$ ,

то система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, окружающий все конечные особые точки системы (1).

Аналогичные результаты получены и для систем более общего вида чем (1).

О ПОРЯДКЕ РОСТА ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ  
ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ. ТЕОРЕМА  
ШНОЛЯ.

Денисов С.А. (Москва) <sup>1</sup>

УДК 517.984.52

В работе рассматривается оператор Штурма-Лиувилля

$$l(u) = -u'' + q(x)u$$

на полуоси с условиями Дирихле или Неймана в точке 0:  $u(0) = 0$ ,  $(D)$ ,  
 $u'(0) = 0$ ,  $(N)$ . Введем в рассмотрение спектральную меру  $\rho(\lambda)$  задачи и обобщенные собственные функции  $\varphi(x, \lambda)$ , которые удовлетворяют уравнению  $l(\varphi) = \lambda\varphi$  и соответствующим условиям в нуле (например,  $\varphi_D(0, \lambda) = 0$ ,  $\varphi'_D(0, \lambda) = 1$  для задачи Дирихле). Основной задачей является получение оценок порядка роста по  $x$  на бесконечности функций  $\varphi(x, \lambda)$ . В 1954 г. И.Э.Шноль доказал следующую теорему

Теорема 1. (И.Э.Шноль) Если  $q(x)$ -интегрируема на любом компакте из  $R^+$  и при  $x > 0$  выполнено неравенство  $q(x) > q_0$ , то для любого  $\epsilon > 0$  и для почти всех значений  $\lambda$  по спектральной мере  $\rho(\lambda)$  найдется константа  $C_\epsilon(\lambda)$  такая, что при  $x > 0$  будет выполнена оценка

$$|\varphi(x, \lambda)| < C_\epsilon(\lambda)|x|^{1/2+\epsilon}. \quad (1)$$

В настоящей работе показано, что показатель роста в (1) зависит от поведения потенциала на бесконечности. Ключевую роль при этом играет скорость убывания потенциала. В частности, доказана следующая теорема

Теорема 2. Если  $q(x) \in L_p(R^+)$ ,  $1 < p < \infty$  и  $q(x) \notin L_1(R^+)$ , то справедлива Теорема 1 с показателем степени роста:  $\frac{1}{2p} + \epsilon$ , где  $p'$  - сопряженное к  $p$ .

В случае, когда  $q(x) \in L_1(R^+)$ , все обобщенные собственные функции, отвечающие  $\lambda > 0$ , будут ограничены.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ 96-15-96097

# СИНГУЛЯРНЫЙ СПЕКТР И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПОТЕНЦИАЛА ВОЗМУЩЕНИЯ.

Денисов С.А. (Москва) <sup>1</sup>

УДК 517.984.52

В работе рассмотрена достаточно общая задача спектрального анализа самосопряженных операторов. А именно, при каких условиях на возмущение спектр возмущенного оператора останется абсолютно непрерывным на некотором отрезке, если для исходного оператора он был абсолютно непрерывным? В частности, для операторов Шредингера получены результаты, связывающие поведение преобразования Фурье потенциала на некотором множестве с отсутствием сингулярной компоненты на соответствующем интервале спектра.

Например, для оператора Штурма-Лиувилля на полуоси  $l(u) = -u'' + qu$  доказана следующая теорема

Теорема. Если потенциал  $q(x) \in L_2(\mathbb{R}^+)$  и его косинус преобразование  $\hat{q}(k) \in W_2^{1/2+\varepsilon}(a, b)$ ,  $a > 0$ , тогда спектр любого самосопряженного расширения, отвечающего  $l(u)$ , является чисто транзитным абсолютно непрерывным на интервале  $(a^2/4, b^2/4)$ .

Аналогичные результаты получены для многомерного случая.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ 96-15-96097

Придумай сам!  
Е.И. Деревягина (Воронеж)

В настоящее время система развивающего обучения (РО) по системе Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова входит в массовую школу.

Принципиальное отличие системы РО от традиционной в том, что она позволяет ввести ребенка в современную науку с первых дней пребывания в школе. Ликвидируется концентрическая форма обучения. Выстраиваются единые курсы по основным учебным предметам, при этом наиболее общие понятия предшествуют частным. Усвоение научного содержания предусматривает совместное коллективное творчество.

В соответствии с программой РО по системе Д.Б. Эльконина- В.В. Давыдова составлены учебники по математике Э.И. Александровой для I-V классов.

Особо хочется отметить, что работа по этим учебникам позволяет сформировать навык самостоятельного составления задач у детей младшего школьного возраста.

Наряду с традиционными «реши», «найди», автор своему ученику дает задание:

«Придумай для соседа по парте свою задачу»,

«Составь текст задачи по заданной схеме»,

«Как научить других выполнять такие задания?»

«Какие ошибки можно допустить при выполнении этого задания?»

«Как ты считаешь, зачем автор предложил такое задание?»

«Что интересного ты обнаружил в этом задании?»

Дети 7-11 лет постоянно придумывают свои примеры и задачи (прямые и обратные), понимают, что такое лишние данные в задаче и что по одной схеме можно решить разные задачи, отвечают на многочисленные «почему?», пытаются друг другу объяснить то или иное решение.

Атмосфера творческого поиска царит на уроке, у ребенка формируется творческое мышление, возникает устойчивый интерес к познанию.

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ  
ФУНКЦИЙ В МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ А.М.САМОЙЛЕНКО**

Дикарева Л.Ю. (Воронеж)

В теории приближения периодических функций [1,2] установлены неравенства

$$\|x\|_{\alpha} \leq c(\omega, p, \alpha, \beta) \|x^{(p)}\|_{\beta}, \quad (1)$$

где  $x(t)$  удовлетворяет условиям  $x^{(j)}(0) = x^{(j)}(\omega) = 0, j = \overline{0, p-1}$  и  $x^{(p)}(t)$  принадлежит  $L_{\beta}$ . Здесь  $L_{\alpha}$  – банахово пространство измеримых функций, в котором норма  $\|x\|_{\alpha}$  при  $\alpha = 0$  есть существенный максимум, а при  $0 < \alpha \leq 1$  соответствующий интеграл. Как было указано в [3], неравенства подобного типа могут быть использованы при приближенном отыскании периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений.

В докладе рассматривается численно-аналитический метод А.М. Самойленко [4]. Изложение метода последовательных приближений будет основано на систематическом использовании, наряду с равномерной нормой, нормы в пространстве функций, суммируемых в квадрате, и неравенств для дифференцируемых функций с неулучшаемыми константами (1).

Из семейства неравенств (1) будут использоваться два неравенства: если  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, p = 1$ , то имеет место неравенство В.А.Стеклова

$$\|x\|_{1/2} \leq \frac{\omega}{\pi} \|\dot{x}\|_{1/2}; \quad (2)$$

если  $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, p = 1$ , то имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)| \leq \frac{\sqrt{\omega}}{2} \|\dot{x}\|_{1/2}. \quad (3)$$

Заметим, что полученная в результате оценки погрешности практически совпадает с оценкой, полученной А.М.Самойленко, за исключением оценок для приближений порядка  $m \leq 3$ , которые удалось уточнить.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Перов А.И., Тананика А.А. Об одном обобщении неравенства Виргильера. Дифференциальные уравнения, 1986, 22, №6, с. 1074-1076.
2. Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж, изд-во ВГУ, 1981, 196 с.
3. Перов А.И., Дикарева Л.Ю. Применение неравенств для периодических функций в некоторых задачах теории нелинейных колебаний. Н. Новгород, тезисы V меж. конф. "Нелинейные колебания механических систем", 1999, с. 178-179.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, Вища школа, 1976, 180 с.

## ОПЕРАТОР МОНОДРОМИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю.Ф. Долгий (Екатеринбург)

Линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последствием описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d_s \eta(t, s) x(t+s), t \in \mathbf{R}^+ = [0, +\infty), \quad (1)$$

где  $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n, r > 0$ . Матричная функция  $\eta$  локально измерима по Лебегу на множестве  $\mathbf{R}^+ \times [-r, 0]$  и  $\eta(\cdot, 0) = 0$ . Для почти всех  $t \in \mathbf{R}^+$  существует конечная вариация  $v(t) = \text{Var}_{[-r, 0]} \eta(t, \cdot)$ . Функция  $v$  является локально интегрируемой функцией на  $\mathbf{R}^+$ . Матричная функция  $\eta$  является  $\omega$ -периодической функцией первого аргумента,  $\omega > 0$ . Устойчивость решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последствием можно описать в терминах спектра оператора монодромии  $U$ , определяемого формулой  $U\varphi = x_\omega(\cdot, \varphi)$ . Это — линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве  $C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$ . Попытаемся расширить пространство  $C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$  по непрерывности на специальное гильбертово пространство  $\mathbf{H} = \mathbf{H}([-r, 0], \mathbf{E}^n)$  со скалярным произведением  $(\varphi, \psi) = \varphi^T(0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 \varphi^T(s)\varphi(s)ds$ .

**Теорема 1.** Если  $\omega \geq 2r$  и для любого числа  $0 < t \leq \omega$  производная функции  $\int_0^t \eta(z, s-z)dz$  по аргументу  $s$  ограничена в существенном на отрезке  $[-r, 0]$ , то оператор  $U$  можно продолжить по непрерывности на пространство  $\mathbf{H}$ .

При выполнении условий теоремы 1 оператор  $U$  является оператором Гильберта-Шмидта.

**Теорема 2.** Если  $\omega \geq 2r$  и для любого числа  $0 < t \leq \omega$  вторая производная функции  $\int_0^t \eta(z, s-z)dz$  по аргументу  $s$  ограничена в существенном на отрезке  $[-r, 0]$ , то оператор  $U$  является ядерным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N.99-01-00145.

1. Долгий Ю.Ф. Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последствием // Известия Уральского университета. 1998. N.10. С.35-43.

## Радость общения

### П. М. Дорошенко-Ярушок (Нижнедевицк)

Обучение и воспитание ребенка в начальной школе создает фундамент всей системы образования, т.к. младший школьный возраст является решающим в дальнейшем развитии личности.

В процессе обучения (математике или физике) мы чаще всего связываем мышление с решением задач, предполагающих точный ответ. Однако сам ответ и его форма нередко значат для ученика и учителя больше, чем способ его получения, чем логические рассуждения на пути к нему, что фактически обесценивает мыслительный процесс. Гораздо реже детям предоставляется возможность задуматься над тем, как может быть получен тот или иной результат, как самому придумать такую же задачу, как научить других придумывать и решать те или иные задачи, всегда ли может быть получен однозначный ответ.

В традиционной школе детей фактически приводят к мысли, что главное на уроке - правильные ответы, а основной их источник - учителя или учебники. Однако, в демократической школе, как и в демократической стране, многие проблемы не имеют однозначных решений.

Развитая память еще не есть образованность, точная информация еще не есть знания. Определенность и механическое зазубривание, запоминание - враги живой мысли, они убивают творчество и сводят на нет оригинальность мышления. Откройте учебники математики Э.И. Александровой и вы увидите альтернативу традиционному механическому зазубриванию, например, таблиц сложения и умножения, и многому другому.

Конечно, ребенку и в традиционной школе приятно осознавать, что он отвечает правильно, но, если точность ответа основана лишь на механическом запоминании, это не приносит истинной радости познания. Мы лишь тогда испытываем настоящее удовлетворение, когда наша работа является результатом самостоятельных рассуждений, собственного мнения и принятия соответствующего решения. Реализация такого подхода к обучению, при котором ребенок живет с ощущением пусть маленького, но личного успеха, испытывая при этом и уверенность в себе, составляет суть курса математики, разработанного Э.И. Александровой в соответствии с программой развивающего обучения Эльконина-Давыдова.

Как мало радостей сейчас у наших детей и у нас. Так давайте же доставим друг другу радость общения, радость взаимопонимания, радость открытия!

Дубовский П.Б. (Москва)  
**О КОРРЕКТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
 УРАВНЕНИЙ С НЕФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ЯДРАМИ**

Рассматриваются уравнения

$$u(x) = \int \Omega K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

с нефредгольмовыми ядрами

$$\int \Omega \int \Omega |K(x, y)|^2 dx dy = \infty.$$

Вводится понятие квазифункционала и квазифункционального сопряженного уравнения, на основании чего выделяются пространства решений уравнения (1), естественные для данного уравнения. Доказаны теоремы существования и единственности решения в этих пространствах и показано, что выход за пределы естественных пространств влечет за собой неединственность решения. Результаты применяются к некоторым важным уравнениям математической физики с получением новых результатов по теории этих уравнений. С помощью метода квазифункционалов разработан и продемонстрирован метод построения точных решений как уравнения (1), так и его частного случая - задачи Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int \Omega K(x, y)u(y, t)dy, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

для которого также формулируется и доказывается теорема существования и единственности решения.

[1] Дубовский П.Б. "Аналитическое решение уравнения дробления методами теории сопряженных уравнений," Дифференц. ур-ния, принято к печати.

E-mail: dubovski@inm.gas.ru



**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ  
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Евстафьева В.В. (Санкт-Петербург)

В данной работе рассматривается  $n$ -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \\ \sigma = (C, Y). \end{cases} \quad (1)$$

где матрица  $A$  и векторы  $B, C, K$  - вещественные и постоянные, вектор  $Y$  описывает состояние системы.

Нелинейность системы описывается функционалом  $F(\sigma)$ , который определен для  $t > 0$  на классе непрерывных функций и задается следующим образом:  $F(\sigma) = m_2$ , при  $\sigma > l_1$  и  $F(\sigma) = m_1$ , при  $\sigma < l_2$ , где  $m_1, m_2, l_1, l_2$  - вещественные числа, причем  $m_1 < m_2, l_1 < l_2$ .

В качестве модели внешнего воздействия на систему рассмотрена непрерывная,  $T$ -периодическая функция.

Решения системы (1) - из класса непрерывных периодических функций, причем такие решения, которым в фазовом пространстве соответствует фазовая траектория, составленная из кусков траекторий в силу разных правых частей системы (1). Склейка кусков траекторий по непрерывности происходит в точках, лежащих на гиперплоскостях вида  $\sigma = l_i$ , где  $i = 1, 2$ , в дальнейшем такие точки мы называем точками переключения.

При изучении пространства параметров системы вида (1) исследовалась система трансцендентных алгебраических уравнений относительно двух моментов времени и двух точек переключения. Эта система была построена из необходимых условий существования  $T_B$  - периодических режимов исходной системы, где период  $T_B = kT$ , либо  $T_B = T/k$ , где  $k = 1, 2, \dots$

В результате получены достаточные условия на параметры системы вида (1), при выполнении которых в системе возникают периодические колебательные решения, причём с заданным периодом, и предложен способ построения в пространстве параметров областей качественно различного динамического поведения системы.

Предлагаемый метод позволяет на конечном промежутке времени определять конфигурацию решения с двумя точками переключения в фазовом пространстве.

[1]. Зубов В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах.-Л.: Судпромгиз, 1962.

[2]. Покровский А.В. Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах//Авт, 1986, № 4, с.16-23.

[3]. Kamachkin A.M., Evstafyeva V.V. Calculation of closed trajectory of nonautonomous hysteresis control systems// Proceedings of third international workshop: Beam Dynamics and Optimization, St.Petersburg, 1997, p.152-155.

vica@apmath.spbu.ru

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АТОМНОГО СТРОЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕКОЛ Fe-M (M: C, B, P)

Евтеев А. В., Косилов А. Т., Левченко Е. В. (Воронеж)

К наиболее экспериментально изученным аморфным металлическим материалам, по-видимому, относятся легко стеклующиеся в области эвтектических составов сплавы железа с бором и фосфором. В то же время известно, что в системе Fe-C аморфизация в лабораторных условиях затруднена. Так быстрозакаленный сплав  $Fe_{82}C_{18}$  (состав которого близок к эвтектическому), полученный методом спиннингования, имеет микрокристаллическую структуру, содержащую  $\gamma$ -Fe и  $Fe_3C$  без каких-либо следов аморфной фазы. Пока в литературе нет физически разумного объяснения подобным фактам. Отметим также, что аморфные сплавы Fe-B, Fe-P при кристаллизации образуют смесь фаз со структурой  $\alpha$ -Fe и  $Fe_3B$  ( $Fe_3P$ ). Основными структурными элементами фаз  $\alpha$ -Fe и  $\gamma$ -Fe являются октаэдр и тетраэдр, а композиционным мотивом кристаллических решеток фаз  $Fe_3C$ ,  $Fe_3B$  и  $Fe_3P$  является тригональная призма с атомом металлоида внутри.

В настоящей работе методом компьютерного моделирования выявлены индивидуальные особенности реализации структуры локального атомного упорядочения металлических стекол Fe-M (M: C, B, P). Показано, что атомы углерода "предпочитают" занимать позиции внедрения атомных конфигураций на основе искаженного октаэдра и тригональной призмы, а атомы бора - на основе искаженной антипризмы Архимеда. Атомы фосфора могут занимать как позиции внедрения, так и позиции замещения, ближайшее упорядочение вокруг них преимущественно является икосаэдрическим. Эти результаты позволили сформулировать простой структурный критерий стеклообразования в двухкомпонентных системах переходный металл-металлоид: наличие одинакового локального композиционного порядка как в кристаллическом так и в аморфном состоянии понижает склонность указанных систем к стеклованию (Fe-C); и наоборот - различие локального композиционного порядка - повышает их склонность к стеклованию (Fe-B, Fe-P).

# МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ АМОРФНОГО ЖЕЛЕЗА

Евтеев А. В., Косилов А. Т., Миленин А. В. (Воронеж)

Методом молекулярной динамики (МД) в приближении эмпирического парного потенциала Пака-Доямы смоделирован изохорический нагрев аморфного железа со средней скоростью  $\sim 6,6 \cdot 10^{11}$  К/с. В области температур 1100÷1180 К наблюдалась ОЦК-кристаллизация модельной системы.

Аморфное состояние получали "мгновенной" закалкой (методом статической релаксации) предварительно построившей МД модели расплава железа, увеличив ее плотность до значения  $7800 \text{ кг/м}^3$  (плотность выбирали в соответствии с данными для  $\alpha$ -Fe с учетом поправки  $\sim 1\%$  на аморфизацию). Далее система методом МД подвергалась изохронному отжигу, периодическая процедура которого сводилась к ступенчатому повышению температуры на 20 К, поддержанию этой температуры в системе на протяжении  $1000 \cdot \Delta t$  и последующему отжигу в адиабатических условиях в течении  $19000 \cdot \Delta t$  (где  $\Delta t = 1,523 \cdot 10^{-15}$  с - временной шаг интегрирования уравнений движения).

Временные зависимости давления и потенциальной энергии между  $1100000 \cdot \Delta t$  и  $1160000 \cdot \Delta t$  претерпевают скачок характерный для фазового перехода первого рода. Положение пиков парной функции радиального распределения атомов, а также статистико-геометрический анализ на основе многогранников Вороного (МВ), в том числе расчет угловых корреляционных функций, описывающих распределение углов между парами ближайших соседей и центром многогранника, свидетельствует о том, что образовалась кристаллическая фаза с ОЦК-решеткой. Напомним, что отдельный МВ можно описать совокупностью чисел  $n_q$ , равных числу граней, имеющих  $q$ -сторон ( $n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \dots$ ). При кристаллизации доля атомов, координация вокруг которых характеризуется МВ (0-6-0-8) (ячейка Вигнера-Зейтца ОЦК-решетки), увеличивается более чем в 100 раз и достигает величины  $\sim 90\%$ .

## О преподавании математики

Егорова Д.П. (г.Волгоград)

Еще Аристотель указывал, что человек по природе своей стремится к знанию, но стремление к *доказательности* необходимо внедрить в него. И в этом состоит одна из важнейших задач преподавания математики. На первом плане стоит вопрос *“как”* преподавать и только на втором плане *“что”*. Учащимся надо дать строгий дедуктивный систематический курс и заботиться о том, чтобы они почувствовали его систематичность. Следует добиться того, чтобы учащиеся понимали, что позволило сказать русскому геометру Татаринову:” Кроме Математики ни одно из человеческих познаний не возведено в степень науки”

Вопрос о том *“как”* преподавать математику актуален в настоящее время не меньше, чем сорок лет назад. Сократив до критического минимума курс геометрии, выбросив тригонометрию как отдельный предмет изучения, почти не решая логически арифметические задачи, а скорее переходя к стандартному тупому составлению уравнений, мы пришли к тому, что ученики не умеют ничего доказывать, не умеют думать и *выбирать* лучшее решение, размышляя над решением, которое получено, а главное совершенно не умеют *исследовать*. Задачи с параметрами вызывают панический страх не только у учеников, но и учителей, поскольку они требуют творческого подхода.

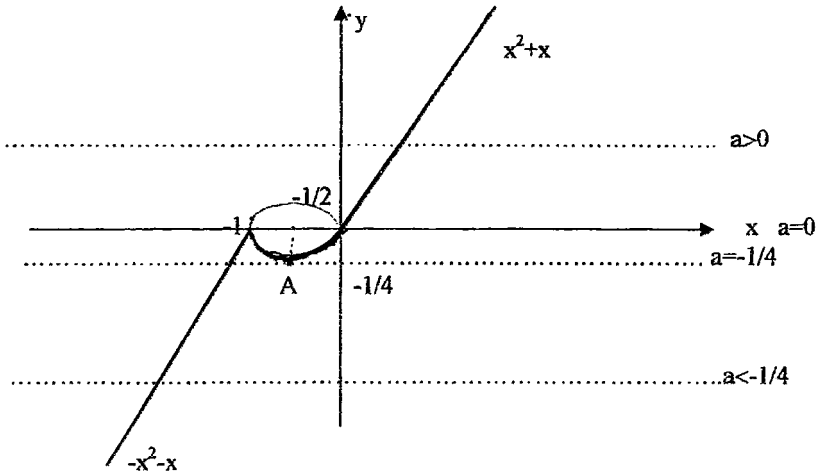
Решить неравенство:  $x |x + 1| \geq a$

Решение. Решим неравенство, используя геометрические соображения.

Обозначим левую часть неравенства через  $y_1$

$$y_1 = x |x + 1| = \begin{cases} x^2 + x, & \text{если } x + 1 \geq 0 \quad (\text{или } x \geq -1) \\ -x^2 - x, & \text{если } x + 1 < 0 \quad (x < -1) \end{cases}$$

Правую часть обозначим через  $y_2 = a$ . Ясно, что при различных значениях  $a$  получаем семейство прямых параллельных оси  $OX$ , т.е. подвижный график. Построим неподвижный график  $y_1$ , состоящий из двух частей:  $x^2 + x$  и  $-x^2 - x$ , и выбираем те значения  $x$ , для которых ордината неподвижного графика выше ординаты подвижного графика, т.е. выполняется искомое неравенство.



Вершина параболы  $A(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$

Очевидно, что при  $a < -\frac{1}{4}$  и  $a > 0$  графики пересекаются в одной точке, причем  $-x^2 - x = a$  в первом случае и  $x^2 + x = a$  во втором.

Следовательно, при  $a \in (-\infty; -\frac{1}{4})$  имеем  $x \in (-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ ,

а поскольку неравенство нестрогое, то правые концы включаем. Аналогично,

если  $a > 0$ , то  $x \in (\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}; +\infty)$ , если  $a = 0$ , то  $x \in \{-1\} \cup [0; +\infty)$

Наконец, при  $-1/4 < a < 0$  имеем три точки пересечения и

$$x \in \left( \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \right) \cup \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}; +\infty \right).$$

Решение данного примера аналитическим методом занимает 4 страницы печатного текста в книге В.К.Егеров, А.Г.Мордкович, 100 × 4 задач, Linka Press, Москва 1993, с. 59-63.

## КОМБИНАТОРИКА – ОДИН ИЗ ОСНОВНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ, РАЗВИВАЮЩИХ ЛОГИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И СООБРАЗИТЕЛЬНОСТЬ.

Егорова Д.П., Чесноков О.К. (Волгоград)

В работе Н.Васильева, А.Спивака «Посчитаем вероятность» («Квант» №4, 1997) отмечается, что в большинстве стран мира элементы теории вероятности и статистики изучаются в средней школе и считаются даже более важным математическим предметом ( из-за многочисленных применений в физике, биологии, экономике...). Ясно, что основой курса теории вероятности является комбинаторика. Бином Ньютона необходим для осознанного усвоения многих вопросов в других разделах курса математики.

Основываясь на многолетнем опыте чтения курса «Основные алгебраические структуры», предлагаем следующий план изложения:

- 1) понятие множества, способы задания множеств, равенство мощностей множеств и различие между этими равенствами;
  - 2) булевы операции над множествами, законы алгебры множеств, булева алгебра;
  - 3) декартово произведение множеств ( соответствие как произвольное подмножество декартового произведения);
  - 4) понятие функции как однозначного соответствия, существование обратной функции;
  - 5) определение алгебраических операций и бинарных отношений как отображений множеств;
  - 6) вывод основных формул комбинаторики на основании существования взаимно-однозначного соответствия между подмножествами данного множества из  $n$  элементов и кортежами длины  $n$ , состоящими из нулей и единиц;
  - 7) свойства сочетаний, треугольник Паскаля.
- Для прочного усвоения требуется не менее шести лекций и, соответственно, семь-восемь практических занятий.

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНАЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ  
 НЕСОВМЕСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ  
 Ерохин В.И. (Ворисоглебск)

Рассматриваются методы коррекции  $(m \times n)$  матрицы коэффициентов несовместных линейных моделей вида  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$  (1) и  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ ,  $b \neq 0$  (2). Для модели (1) и однорангового преобразования

$$A + (b - Ay) \cdot y^+ = A + H, \quad (3)$$

где  $y \neq 0$ ,  $y^+ = (y^T y)^{-1} y^T$ , значок "+" означает псевдообращение, обосновываются следующие утверждения:

**Теорема 1.** Величина  $\|H\|$  может быть сделана сколь угодно малой тогда и только тогда, когда либо  $m < n$ , либо  $m \geq n$ , но  $\text{rank } A < n$ . При этом вектор  $y$  среди всех решений системы  $\tilde{A}x = b$  (4) имеет минимальную евклидову норму.

**Теорема 2.**  $0 < \inf_y \|H\| = \mu_{\min(A^T(I - bb^+)A)}^{\frac{1}{2}}$  (5) тогда и только тогда, когда выполняются условия  $m \geq n$ ,  $\text{rank } A = n$ . При этом, если выполнено условие  $b^T A y^+ \neq 0$  (6), оценка (5) достигается на конечном векторе

$$y = \frac{b^T b}{b^T A y^+},$$

являющимся единственным решением системы (4). Если же условие (6) не выполняется,  $\forall y \Rightarrow \|H(y)\| > \inf_y \|H\|$  и  $\|H(y)\| \rightarrow \inf_y \|H\|$  при  $y = \alpha \cdot y^*$ ,  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . В приведенных выше формулах  $y^*$  - единичный собственный вектор матрицы  $A^T(I - bb^+)A$ , соответствующий ее минимальному собственному числу  $\mu_{\min(A^T(I - bb^+)A)}$ ,  $b^+ = (b^T b)^{-1} b^T$  - вектор, псевдообратный вектору  $b$ .

Для модели (2) предложены алгоритмические методы оценивания величины  $\inf_y \|H\|$  и построения самой матрицы  $H$ . В основе рассматриваемых методов лежит задача минимизации квадратичной формы  $x^T A^T(I - bb^+)Ax$  на единичной сфере при дополнительном условии  $x \geq 0$ .

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ  
ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ  
ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ

Ефремов И.И. (Саратов)

Пусть на отрезке  $[0, 1]$  задан квазидифференциальный (к.д.) оператор  $L$ , определяемый к.д. выражением

$$D_n y \equiv y^{[n]},$$

где

$$D_k y \equiv y^{[k]} := i \frac{d}{dx} y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} y^{[j]}, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \quad D_0 y \equiv y^{[0]} := y,$$

при этом  $p_{kj} \in L_1[0, 1]$ , и  $n$  линейно независимыми нормированными краевыми условиями

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения

$$Ly = \lambda r(x)y,$$

где  $r(x)$  есть ступенчатая весовая функция, такая, что  $r \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r(x) \neq 0$ . На коэффициенты линейных форм  $U_\nu(y)$  и ступеньки весовой функции  $r(x)$  накладываются некоторые условия, называемые условиями регулярности. Пусть  $D_L = \{y : y^{[k]} \text{ абсолютно непрерывны для } k = 0, \dots, n-1, y^{[n]} \in L_1[0, 1], U_\nu(y) = 0, \nu = 1, \dots, n\}$ . В этом случае для четного  $n$  имеет место следующая теорема

**Теорема.** Если  $L$  есть к.д. оператор, определяемый регулярными краевыми условиями, то существует подпоследовательность натуральных чисел  $l_m$  такая, для любой функции  $f \in D_L$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_{l_m}\|_{C[0,1]} = 0,$$

где  $S_{l_m}(f)$  есть  $l_m$ -ая частичная сумма ряда Фурье функции  $f$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ , которые занумерованы в порядке возрастания модулей собственных значений.



**ОПЕРАТОР ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ  
КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

Т.В. Жуковская, Е.С. Жуковский (Тамбов)

Если функция  $g$  не удовлетворяет "условию независимости" [1], то оператор внутренней суперпозиции  $(Sy)(t) = \begin{cases} g(t)y(g(t)), & \text{если } g(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } g(t) \notin [a, b], \end{cases}$  не действует в пространствах, элементами которых являются классы эквивалентности измеримых функций (например, в пространстве  $L_p[a, b]$ ). В пространстве  $C[a, b]$  непрерывных на  $[a, b]$  функций оператор внутренней суперпозиции также не действует, функция  $(Sy)(\cdot)$  терпит разрывы в тех точках, в которых  $g(\cdot) = a$  меняет знак. Мы предлагаем рассматривать оператор  $S$  в пространстве кусочно-непрерывных функций.

Будем предполагать, что функция  $g$  непрерывна и при всех  $t \in [a, b]$  выполнено  $g(t) \leq t$ . Обозначим  $\Omega = \{t \in [a, b] | g(t) = t\}$ ,

$$T_0^R = \{t_0^R | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_0^R | < \varepsilon \Rightarrow (g(t) - a)(t - t_0^R) \geq 0, \exists s \in (t_0^R - \varepsilon, t_0^R) g(s) - a < 0\},$$

$$T_0^L = \{t_0^L | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_0^L | < \varepsilon \Rightarrow (g(t) - a)(t - t_0^L) \leq 0, \exists s \in (t_0^L, t_0^L + \varepsilon) g(s) - a < 0\}.$$

Зададим последовательности множеств  $\{T_i^R\}, \{T_i^L\}$  рекуррентными формулами

$$T_{i+1}^R = \left( \bigcup_{\forall t_i^R \in T_i^R} \{t_{i+1}^R | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_{i+1}^R | < \varepsilon \Rightarrow (g(t) - t_i^R)(t - t_{i+1}^R) \geq 0, \right.$$

$$\left. \exists s \in (t_{i-1}^R - \varepsilon, t_{i+1}^R) g(s) - t_i^R < 0 \right) \cup \left( \bigcup_{\forall t_i^L \in T_i^L} \{t_{i+1}^R | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_{i+1}^R | < \varepsilon \right.$$

$$\left. \Rightarrow (g(t) - t_i^L)(t - t_{i+1}^R) \leq 0, \exists s \in (t_{i-1}^L - \varepsilon, t_{i+1}^R) g(s) - t_i^L < 0 \right\},$$

$$T_{i+1}^L = \left( \bigcup_{\forall t_i^L \in T_i^L} \{t_{i+1}^L | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_{i+1}^L | < \varepsilon \Rightarrow (g(t) - t_i^L)(t - t_{i+1}^L) \leq 0, \right.$$

$$\left. \exists s \in (t_{i-1}^L, t_{i+1}^L + \varepsilon) g(s) - t_i^L < 0 \right) \cup \left( \bigcup_{\forall t_i^R \in T_i^R} \{t_{i+1}^L | \exists \varepsilon > 0 \forall t | t - t_{i+1}^L | < \varepsilon \right.$$

$$\left. \Rightarrow (g(t) - t_i^R)(t - t_{i+1}^L) \geq 0, \exists s \in (t_{i-1}^R, t_{i+1}^L + \varepsilon) g(s) - t_i^R < 0 \right\},$$

$T^L = \bigcup_i T_i^L, T^R = \bigcup_i T_i^R, T = T^L \cup T^R$ . Заметим, что множество  $T$  не более чем счетно.

Пусть это множество конечно,  $|T| = n$ ,  $t_0$  - его наименьший элемент. Обозначим через  $SP$  пространство кусочно-постоянных функций  $y_{SP} : [a, b] \rightarrow R$ , возможно терпящих разрывы в точках множества  $T$ , равных нулю на  $[a, t_0]$ , непрерывных справа при  $t \in T^R$  и непрерывных слева при  $t \in T^L$ . Пространство  $SP$  изоморфно пространству  $R^n$ , его элементы  $y_{SP}$  можно задать набором  $Y$  значений скачков в точках множества  $T$ . Обозначим через  $B_n$  пространство функций  $y : [a, b] \rightarrow R$ , представимых в виде  $y = y_C + y_{SP}$ , где  $y_{SP} \in SP$ , а функция  $y_C$  непрерывна. Норму элемента  $y \in B_n$  зададим формулой  $\|y\|_{B_n} = \max\{\|y_C\|_C, \|Y\|_{R^n}\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $q \in B_n$ ,  $g \in C[a, b]$  и  $g(t) \leq t$  при всех  $t \in [a, b]$ . Тогда оператор  $S : B_n \rightarrow B_n$  линеен, непрерывен и вольтерров.

**Теорема 2.** Если  $\Omega = \emptyset$ , то оператор  $S$  является нильпотентным, если  $\Omega \neq \emptyset$ , то спектральный радиус  $\rho$  оператора  $S$  удовлетворяет неравенству  $\rho(S) \leq \max_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М.:ИЛ, 1962.-896 с.

## НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЕЙ

Завгородний М.Г., Трибунских О.А. (Воронеж)

В докладе обсуждаются непрерывные модели для транспортных и распределительных систем электро-, тепло-, водо- и газоснабжения городов и промышленных центров, систем отопления, вентиляции, кондиционирования, распределительных систем установок пожаротушения. Такие системы будем называть инженерными сетями. Предполагается, что в процессе их эксплуатации меняются характеристики как самой сети, так и передаваемого по ней продукта. По этому возникает необходимость рассмотрения именно непрерывных моделей. Сделано это со следующих позиций :

- инженерная сеть описана как связанная система, образованная набором однотипных одномерных элементов (участок трубы, канал воздуховода, коаксиальный кабель), и называется геометрическим графом;

- сеть рассматривается как система с распределенными параметрами. В качестве параметров выступают как характеристики самой сети, так и транспортируемого по ней продукта. Они описываются в виде функций, заданных на графе. Процессы, происходящие в системе, описываются дифференциальными уравнениями тоже заданными на графе;

- информацию мы можем получать только из концевых точек системы. Во внутренних точках (в местах соединения элементов системы) нам известны общие законы поведения, которые выражаются в виде условий равновесия и непрерывности переменных.

Математическая модель, построенная на основе вышеизложенных позиций, представляет из себя краевую задачу на геометрическом графе и состоит из трех компонентов: дифференциального уравнения, заданного на графе, условий согласования во внутренних вершинах, краевых условий в концевых вершинах.

Данный подход использовался при построении моделей для каналов испарительной насадки кондиционера (см. [1]) и для гидравлической системы (см. [2]). Алгоритмы для приближенного решения краевых задач на графах изложены в [3].

### ЛИТЕРАТУРА.

1. Трибунских О.А.// "Понтрягинские чтения - X": Тез. докл. конф.-Воронеж, ВГУ, 1999 - С.299.
2. Завгородний М.Г., Столяров В.Е., Трибунских О.А.//Матем. моделир.технол.систем. Вып.3: Сб.науч.тр.-Воронеж, ВГТА,1999 - С.101-102.
3. Завгородний М.Г., Трибунских О.А.// Рукопись деп. в ВИНТИ 04.06.98 1726-В98Б - 16 с.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РОСТА КОЛЕЦ МАРАНГОНИ В МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЯХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЭТАЛОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Игропуло В.С., Самонов В.Е. (Ставрополь)

Рассмотренная ранее [1] задача об использовании метода эталонных уравнений [2] для решения системы уравнений гидродинамики конкретизируется при исследовании роста колец Марангони [3, 4] в магнитных жидкостях.

Здесь в качестве исследуемой системы выбрана система уравнений, Навье-Стокса и неразрывности, описывающих движение магнитной жидкости, а в качестве моделирующей системы (эталонных уравнений) - система тех же уравнений, но описывающая рост колец Марангони в обычной жидкости. При этом решение системы эталонных уравнений известно [4].

Используя указанный метод, скорость движения магнитной жидкости в исследуемой системе выражается через скорость движения обычной жидкости в системе-модели. Заметим, что в отличие от [2], метод эталонных уравнений обобщается на решение уравнений в частных производных.

Исходя из физических соображений показана корректность используемого метода. Формулируются критерии применимости метода эталонных уравнений при решении гидродинамических задач.

Отметим, что физический анализ позволяет расширить круг задач, решаемых с использованием метода эталонных уравнений.

### Литература

1. Игропуло В.С., Самонов В.Е. // Понтрягинские чтения - X. Тезисы докладов. - Воронеж, ВГУ, 1999. - С. 115.
2. Дородницын А.А. // УМН, вып. 6, 1952. - С. 3-96.
3. Игропуло В.С., Самонов В.Е. // Современные проблемы механики и прикладной математики: Тезисы докладов школы. - Воронеж, ВГУ, 1998. - С. 130.
4. Игропуло В.С., Самонов В.Е. // Вестник СГУ.- вып. 20, 1999.- С.118-130.

**ОПЕРАТОР ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ**  
**Калитвин А.С. (Липецк)**

Пусть  $T$  и  $S$  — компактные множества в конечномерных пространствах,  $D = T \times S$ ,  $X = X(D)$ ,  $Y = Y(D)$  и  $Z = Z(D)$  — квазибанаховы идеальные пространства (КВИП) с носителем  $D$ . Свойства КВИП подробно изложены в [1]. Примерами КВИП являются пространства  $L^p$  ( $0 < p \leq \infty$ ), пространства  $L^{p_1, p_2}$  ( $0 < p_1, p_2 \leq \infty$ ) со смешанными квазинормами, банаховы идеальные пространства. КВИП называется почти совершенным (правильным), если его квазинорма порядково полунепрерывна (порядково непрерывна). Аналогично [2], назовём  $X$   $\delta$ -пространством, если существует последовательность натуральных чисел  $\sigma_n$  такая, что для заданной последовательности  $(x_n)$  из единичного шара  $X(\theta, 1)$  с непересекающимися носителями существуют функции  $x_{n,j}$  ( $j = 1, \dots, \sigma_n, n = 1, 2, \dots$ ) со свойствами:  $x_{n,j} \cdot x_{n,k} = 0$  ( $j \neq k$ ),  $x_n = x_{n,1} + \dots + x_{n,\sigma_n}$  и для каждой последовательности  $(j) = (j_1, j_2, \dots)$  натуральных чисел  $1 \leq j_n \leq \sigma_n$  функция  $x(j) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n,j_n} \in X(\theta, 1)$ .  $L^p, L^{p_1, p_2}$  — почти совершенные КВИП, а при  $0 < p, p_1, p_2 < \infty$  — правильные  $\delta$ -пространства.

Пусть  $c, l, m, n$  — заданные и измеримые на  $D, D \times T, D \times S, D \times D$  соответственно функции, а  $f$  — заданная суперпозиционно-измеримая на  $D \times (-\infty, \infty)$  функция. Через  $K$  и  $F$  обозначим операторы

$$(Kx)(t, s) = c(t, s)x(t, s) + \int_T l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau + \int_S m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + \\ + \iint_{T \times S} n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma$$

и  $(Fx)(t, s) = f(t, s, x(t, s))$ .

Напомним, что оператор называется абсолютно ограниченным, если он переводит ограниченные множества в абсолютно ограниченные.

**Теорема.** Если оператор  $F : G \subset X \rightarrow Z$ , а оператор  $K$  действует из  $Z$  в  $Y$ , то оператор  $KF$  Гаммерштейна с частными интегралами действует из  $G$  в  $Y$ , причём  $KF$  : локально ограничен на внутренности  $G$ , если  $G$  имеет внутренние точки и  $Z$  — почти совершенное КВИП; ограничен на каждом шаре во внутренности  $G$ , если  $X$  —  $\delta$ -пространство, а  $Z$  — почти совершенное КВИП; абсолютно ограничен на  $G$ , если на  $G$  абсолютно ограничен  $F$  или, если  $Y$  — правильное КВИП, абсолютно ограничен оператор  $K$  и  $F$  ограничен на  $G$ ; непрерывен на  $G$ , если  $F$  непрерывен на  $G$ .

**Литература**

1. Поволоцкий А.И., Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. Ленинград, 1991.
2. Appell J., Zabrejko P.P. Nonlinear superposition operators. Cambridge, 1990.

**ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ЧАСТНЫМИ  
ИНТЕГРАЛАМИ**

Калитвин А.С., Фролова Е.В. (Липецк)

Хорошо известна роль интегральных операторов типа потенциала в краевых задачах математической физики, в теории пространств дифференцируемых функций и в других вопросах. К операторам типа потенциала с частными интегралами приводятся начально - краевые задачи для уравнения гравитационно - гироскопических волн в приближении Буссинеска [1]. В отличие от интегральных уравнений второго рода с операторами типа потенциала, уравнения второго рода типа потенциала с частными интегралами вообще говоря не являются фредгольмовыми.

В заметке рассматриваются свойства оператора  $K = L + M + N$ , где

$$(Lx)(t, s) = \int_a^b \frac{l(t, s, \tau)}{|t - \tau|^\alpha} x(\tau, s) d\tau, \quad (Mx)(t, s) = \int_c^d \frac{m(t, s, \sigma)}{|s - \sigma|^\beta} x(t, \sigma) d\sigma,$$

$$(Nx)(t, s) = \int_a^b \int_c^d \frac{n(t, s, \tau, \sigma)}{((t - \tau)^2 + (s - \sigma)^2)^{\gamma/2}} x(\tau, \sigma) d\sigma d\tau,$$

$l(t, s, \tau)$ ,  $m(t, s, \sigma)$ ,  $n(t, s, \tau, \sigma)$  — непрерывные функции,  $0 < \alpha, \beta < 1$ ,  $0 < \gamma < 2$ .

Отметим, что ядра операторов  $L$ ,  $M$ ,  $N$  непрерывны в целом и интегрально ограничены. Отсюда и [2] вытекает

**Теорема 1.** *Оператор  $K$  действует в  $C([a, b] \times [c, d]) = C$  и непрерывен.*

Пусть  $L = E + F$  и  $M = G + H$ , где  $F$ ,  $H$ ,  $E$ ,  $G$  — операторы  $L$  и  $M$  с ядрами  $f(t, s, \tau) = \sum_{i=1}^p f_i(t, s) a_i(\tau)$ ,  $h(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^q h_j(t, s) b_j(\sigma)$ ,  $e = l(t, s, \tau)/|t - \tau|^\alpha - f$ ,  $g = m(t, s, \sigma)/|s - \sigma|^\beta - h$  соответственно,  $\|E\|$ ,  $\|G\| < \varepsilon < 1$ ,  $f_i$ ,  $a_i$  ( $i = 1, \dots, p$ );  $h_j$ ,  $b_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ) — непрерывные функции, а системы функций  $\{a_i | i = 1, \dots, p\}$  и  $\{b_j | j = 1, \dots, q\}$  ортонормированы. Имеет место [3]

**Теорема 2.** *Оператор  $I - K$  фредгольмов в  $C$  точно тогда, когда фредгольмовы операторы  $I - L$  и  $I - M$ , что эквивалентно условию  $D_1(s) \cdot D_2(t) \neq 0$ , где  $D_1(s)$  и  $D_2(t)$  — определители  $D_1(s) = (\delta_{ik} - \mu_{ik}(s))$ ,  $D_2(t) = (\delta_{jl} - \nu_{jl}(t))$ , ( $i, k = 1, \dots, p$ ), ( $j, l = 1, \dots, q$ ),  $\mu_{ik}(s) = \int_a^b a_i(\tau)(f_k(\tau, s) + \int_a^b r_1(\tau, s, u) f_k(u, s) du) d\tau$ ,  $\nu_{jl}(t) = \int_c^d b_j(\sigma)(h_l(t, \sigma) + \int_c^d r_2(t, \sigma, v) h_l(t, v) dv) d\sigma$ , а  $r_1$ ,  $r_2$  — резольвентные ядра операторов  $E$  и  $G$  соответственно.*

**Литература**

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Лишние задачи нестационарных внутренних волн. М., 1990.
2. Калитвин А.С., Янкевич Е.В. Операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. // Вестник Чел. гос. ун - та, сер. мат., мех., 1994, №1. С. 61-67.
3. Фролова Е.В. О фредгольмовости уравнений с частными интегралами и ядрами типа потенциала в пространстве непрерывных функций. Липецк, 1998. Деп. в ВИНТИ, №2575 - В 98.

**Применение геометрического метода к анализу  
пространственного механизма высокого класса вида  
ВСС<sub>П</sub>СС<sub>П</sub>ВВ.**

**Канлыбаев О. (Алматы, Республика Казахстан)**

Для решения задачи кинематического анализа пространственного механизма высокого класса рассматривается кинематическая схема механизма в виде замкнутого векторного контура, удовлетворяющего вполне определенным условиям, в том числе и так называемому условию Замкнутости, которое выражается в виде уравнения замкнутости, представляющего собой равенство нулю геометрической суммы векторов контура [1]. Наряду с этим, для кинематического анализа механизма воспользуемся основными положениями из аналитической геометрии: свойством суммы квадратов величин направляющих косинусов векторов, соотношением, связывающим величину косинуса угла между направлениями двух векторов с их направляющими косинусами, свойством перпендикуляра к направлениям двух векторов. Используя указанные соотношения составляются расчетные уравнения для определения положений пространственных векторных контуров, к которым приводится схема рассматриваемого пространственного механизма высокого класса вида ВСС<sub>П</sub>СС<sub>П</sub>ВВ. Заданными являются угол поворота входного звена, длины всех звеньев и стойки механизма. Определяются проекции орта векторов звеньев, скорости и ускорения рассматриваемого механизма. В проведенном кинематическом анализе механизма, рассмотрены случаи, когда положения осей подвижной системы координат относительно неподвижной определяется в зависимости от характера вращения входного звена. Решением полученных уравнений определены положения механизма по заданной функции движения входного звена. Определение скоростей и ускорений движения звеньев механизма методом замкнутого векторного контура приводится путем дифференцирования по параметру времени полученных уравнений положений пространственного механизма высокого класса вида ВСС<sub>П</sub>СС<sub>П</sub>ВВ.

[1] Зиновьев В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. - М.: Гостехиздат, 1952. -432 с.

**Об оценке вторых собственных значений краевой задачи на графе  
Карелина И.Г., Покорный Ю.В.(Воронеж)**

Моделирование колебательных процессов в сложных системах типа упругих сеток, систем волноводов, систем акустических труб приводит к изучению краевой задачи

$$Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i (a+0)u'_i(a+0) = 0 \quad (a \in J(\Gamma)) \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} \quad (2)$$

на связанном геометрическом графе  $\Gamma \subset R^n$ . Здесь используются обозначения из [1], согласно которым  $J(\Gamma)$  - множество внутренних вершин,  $m$  - количество ребер графа,  $R(\Gamma)$  - объединение ребер  $\Gamma$ . Функции  $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot)$  предполагаются равномерно непрерывными на  $R(\Gamma)$ ,  $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Если  $\Gamma$  является деревом, то интегральный оператор, обращающий краевую задачу  $Lu = f$  при условиях (2), оказывается псевдофокусирующим, что позволяет оценить "зазор" между ведущим собственным значением и другими ее собственными значениями.

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  - дерево. Пусть  $\lambda_0$  - положительное собственное значение задачи (1), (2).

Тогда любое, отличное от  $\lambda_0$ , собственное значение задачи (1), (2) удовлетворяет неравенству

$$\lambda^2 \geq \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha^2 - \beta} \lambda_0^2,$$

$$\text{где } \alpha = \max_{x \in \Gamma} \int_{R(\Gamma)} G(x, s) ds, \quad \beta = \max_{x \in \Gamma} \int_{R(\Gamma)} \int_{R(\Gamma)} G(x, s) G(s, \tau) ds d\tau,$$

$G(x, s)$  - функция Грина оператора  $L$  при краевых условиях (2),  $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i$ .

Аналогичная оценка собственных значений краевой задачи на отрезке была установлена в [2].

### Литература

1. Покорный Ю.В., Карелина И.Г. О функции Грина задачи Дирихле на графе// Докл.АН СССР.-1991.-Т.318, N 3.-С.542-544.
2. Покорный Ю.В. Оценка вторых собственных значений для некоторых классов положительных операторов//Мат. заметки.-1971.-Т.9, N 1.-С.27-33.

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Качалов Ж.В., Потапов В.Н., Цуканова Л.П. (Воронеж)

Исследуется несущая способность пологой сферической оболочки, шарнирно опертой по краю и нагруженной равномерным давлением. В качестве условия пластичности используется критерий текучести максимального приведенного напряжения. Точная гиперповерхность текучести в четырехмерном пространстве результирующих усилий и изгибающих моментов применяется в параметрическом виде. Входящие в уравнения граней гиперповерхности текучести параметры представляют собой отношения скоростей деформаций и кривизн срединной поверхности оболочки.

При выбранных геометрических параметрах оболочки пластическое состояние в ней соответствует двум граням гиперповерхности текучести. Распределение скоростей перемещений срединной поверхности оболочки определяется из ассоциированного закона течения; затем параметры, выраженные через скорости перемещений подставляются в параметрические уравнения граней гиперповерхности текучести. Уравнения равновесия интегрируются с использованием параметрических зависимостей для усилий и моментов, граничных условий и условий непрерывности.

В итоге получены: одно трансцендентное уравнение для определения радиуса раздела пластических состояний; выражения в явном виде для предельной нагрузки, усилий, изгибающих моментов и скоростей перемещений. Границы применимости полученного решения определены путем численной реализации определяющих уравнений на ЭВМ и проверки неравенств для граней гиперповерхности текучести. Результаты численной реализации отражены в графиках.



## ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ТРУБОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

Квасов И.С., Сазонова С.А., Столяров В.Е. (Воронеж)

При синтезе информационных систем диагностики технического состояния любых объектов управления обычно применяется дифференциация параметров, связываемых математическими моделями на быстро и медленно меняющиеся данные для возможности декомпозиции их функций на совокупность автономных задач: оценивание и идентификацию соответственно. Реализовать этот принцип для трубопроводных сетей (ТС) не удастся, что обусловлено следующими обстоятельствами.

Принадлежность ТС к классу восстанавливаемых систем допускает их функционирование в режимах частичного отказа, связанного с утечками. Утечку можно считать особой категорией потребителей, которая характеризуется местоположением (координатой), величиной и фактом существования. Величину утечки невозможно однозначно причислить к медленно, либо быстро меняющимся параметрам режима, поскольку они могут быть естественного (утечки) и искусственного (несанкционированные отборы) характера. Естественные утечки можно считать константами, а для несанкционированных отборов свойственна стохастичность как и для обычного потребителя.

Координата утечки уже представляет собой не параметрическую, а структурную информацию о системе, наличие которой в задаче оценивания постулируется. Неопределенность с этой точки зрения автоматически исключает возможность корректного решения.

Наконец сведения о моменте возникновения или факте существования утечек являются логическими и в принципе не могут быть согласованы со структурой модели. Их вероятностный смысл очевиден, а если это так, то вопрос их определения относится к задачам математической статистики.

Таким образом проблема учета утечек является комплексной задачей, получившей название диагностики. Эта проблема имеет самостоятельное значение, но в силу объективного существования понятия координаты утечек, являющегося структурной информацией, декомпозиционный принцип для ТС невозможен по причине топологической неопределенности.

На физическом уровне эту неопределенность можно интерпретировать как некорректность учета взаимодействия моделируемого объекта с окружающей средой, имеющую очевидную энергетическую природу. И поскольку модели потокораспределения являются неотъемлемой частью любого метода решения задачи оценивания, их применимость ставится под сомнение из-за энергетического обоснования структуры самих моделей на основе вариационных принципов.

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Кильматов Т.Р. (Владивосток)

Сложность и многообразие современных экономических процессов затрудняют при анализе применение классических экономико-математических методов, основанных на составлении аналитических соотношений. Приходится одновременно учитывать экономические, политические, социальные, экологические факторы, связь между которыми часто просто "гуманитарная".

Один из подходов для решения подобных проблем - компьютерная имитация изучаемого процесса, построенная на основе методов системной динамики и Монте-Карло. Наиболее эффективно преподавать эти методы на конкретных примерах.

Демонстрируется компьютерная имитационная модель вывоза биоресурсов за рубеж. Специфика процесса в том, что лов биоресурсов происходит за пределами таможенного пространства. Поэтому реальный объем вывоза много больше официально зарегистрированного (данные ГОСКОМСТАТА РФ). Входные параметры модели: размер официальной квоты на вылов, цены единицы ресурса в стране-экспортере и в стране-импортере, качество работы контролирующих органов - таможни, пограничников и рыбной инспекции. Качество определяется вероятностью этих служб официально зарегистрировать улов. Также известна величина штрафа в случае нарушения границы. Логические связи модели строятся методами системной динамики. Реализация модели - методом Монте-Карло. На выходе модели следующие параметры: легальный и теневой доходы, фактический объем вылова ресурсов, величина экологического ущерба.

Модель преследует учебные и исследовательские цели. Приводятся сценарии развития событий при различных внешних условиях. Это позволяет не только научить анализировать экономические процессы, но также показать практическое применение компьютеров для решения конкретных экономических задач.

Если поставить цель - минимизировать экологический ущерб для планеты в целом в результате добычи биоресурсов за пределами таможенных границ, то возможно придется создавать единый международный центр для регистрации потоков проходящих морских ресурсов через порты.

## ОДНА МОДЕЛЬ ДЕНЕЖНОГО ОБОРОТА

Кинаш О.М. (Львов, Украина)

Финансовый рынок рассматривается с точки зрения моделей экономического обмена. Основное внимание уделяется изучению условий равновесия. При этом под равновесием понимается такое состояние, для которого функция полезности системы достигает максимума. Гипотезы, на основе которых построена связь между элементами системы, приводят к функции полезности типа энтропии физической системы. Наряду с использованием аналогов с физическими системами, в исследованиях широко используются теоретико-вероятностные методы.

Полученные математические модели могут быть использованы, в частности, при составлении и прогнозировании бюджетов разных уровней.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ  
ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН**

Кириченко А.В. (г. Саратов)

Исследуемая система уравнений имеет такой вид

$$\begin{aligned} & (c_1 - c_2 \Delta) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + (c_3 - c_4 \Delta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + D \Delta^2 (\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2) - L(w_1, w_3 + g_2) = \\ & = g_1(x, y, t); \quad -b_1 \Delta \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) - b_2 \Delta \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + D \Delta^2 (\alpha_3 w_2 - \alpha_2 w_1) - b_3 \Delta w_2 = 0; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Delta^2 w_3 = -b_4 L(w_1, w_1);$$

$$w_i|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad w_j|_{\Gamma_{\varepsilon_1}} = \varphi_{1j}, \quad \frac{\partial w_j}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\varepsilon_1}} = \varphi_{2j}, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (2)$$

где  $w_i(x_1, x_2, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  – искомые функции;  $(x_1, x_2, t) \in \Omega \times (t_0, T)$ ,  $T > 0$ ;

$(x_1, x_2) \in \Omega \subset R^2$ ;  $\Omega$  – область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ ;

$\Gamma = \partial\Omega \times [t_0, T]$ ;  $c_1, c_3 \geq 0$ ;  $D, c_2, c_4 > 0$ ,  $b_k > 0, k = \overline{1, 4}$ ;  $\forall u, v \in R$

выполняется условие

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 \leq \alpha_1 u^2 - 2\alpha_2 uv + \alpha_3 v^2 \leq \lambda_3 u^2 + \lambda_4 v^2, \quad \lambda_k > 0, k = \overline{1, 4};$$

$g_1(x_1, x_2, t)$ ,  $g_2(x_1, x_2)$  – заданные функции.

**Теорема.** Если  $\text{ess sup} \|g\|_0 < \infty$ ,  $\varphi_{1j} \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\varphi_{2j} \in H_0^1(\Omega)$ ,  $j = \overline{1, 2}$ ,  $g_2 \in H^4(\Omega)$ , то 1) существует единственное решение  $\{w_1, w_2, w_3\}$  задачи

$$(1), (2), \quad w_i \in L^\infty(t_0, T; H_0^2(\Omega)); \quad \frac{\partial w_j}{\partial t} \in L^\infty(t_0, T; H_0^1(\Omega)), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 2};$$

2) решение задачи (1), (2) может быть найдено методом Бубнова-Галеркина; 3) диссипативная система, определяемая уравнениями (1), имеет не пустое множество  $\omega$  – предельных точек при  $c_2, c_4 \geq 0$ .

Обозначение функциональных пространств соответствует обозначениям из монографии Лионса Ж.-Л. “Некоторые методы решения

О КОНЕЧНОМЕРНОСТИ АТТРАКТОРА ДЛЯ ДИССИПАТИВНОЙ  
СИСТЕМЫ В УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Кириченко В.Ф. (г. Саратов)

Диссипативная система определяется такими уравнениями

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2 \Delta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (a_3 - a_4 \Delta) \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( -\frac{4x_3^3}{3h^2} \right) \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} \right] dx_3 - \\ & - L(w, F) = g(x_1, x_2, t); \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2} \right) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} - \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \sigma_{i3} \right] dx_3 = 0, (1 \rightarrow 2); \\ & \frac{1}{Eh} \Delta^2 F = -\frac{1}{2} L(w, w); \end{aligned}$$

(1)

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = F|_{\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \gamma_1|_{\Gamma} = \gamma_2|_{\Gamma} = 0; w|_{t=t_0} = \Phi_1, \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \Phi_2; \quad (2)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left( \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2} \right) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} - \frac{4x_3^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \right) + \nu \left( \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2} \right) \frac{\partial \gamma_{3-i}}{\partial x_{3-i}} - \frac{4x_3^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_{3-i}^2} \right) \right]$$

$$\sigma_{i3} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \left( \gamma_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right), \quad i=1,2; \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}; \quad a_2, a_4 > 0; a_1, a_3 \geq 0;$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2} \right) \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) - \frac{4x_3^3}{3h^2} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right], \quad E > 0, h > 0,$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega_1, (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1 \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad \Omega_1 \subset R^2 - \text{ограниченная область с}$$

достаточно гладкой границей  $\partial\Omega_1$ ;  $\Gamma = \partial\Omega_1 \times [t_0, T], T > 0$ ;

$(x_1, x_2, t) \in \Omega_1 \times (t_0, T)$ ;  $w(x_1, x_2, t)$ ,  $F(x_1, x_2, t)$ ,  $\gamma_i(x_1, x_2, t)$ ,  $i=1,2$  - искомые, а  $g(x_1, x_2, t)$  - заданная функция.

**Теорема** Предположим, что  $\text{ess sup} \|g_i\|_{\Omega_1} < \infty$ ,  $\Phi_1 \in H_0^2(\Omega_1)$ ,  $\Phi_2 \in H_0^1(\Omega_1)$ ,

тогда: 1) существует единственное решение  $\{w, F, \gamma_1, \gamma_2\}$  задачи (1), (2), при

этом  $F, w \in L^2(t_0, T; H_0^2(\Omega_1))$ ;  $\gamma_i, \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega_1))$ ,  $i=1,2$ ;

2) в автономном и периодическом случаях система (1), (2) имеет компактный максимальный аттрактор конечной хаусдорфовой размерности. 109

# ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Киселев В.В. (Челябинск)

В работе рассматривается дифференциальная игра :

$$\dot{z} = -\frac{(p-t)}{1+y}u + v, \dot{y} = -a \|u\|.$$

Здесь фазовый вектор  $z \in R^n (n = 2, 3)$ ,  $p$  — фиксированный момент окончания игры.

Первый игрок выбирает управление  $u$ , стесненное ограничением  $\|u\| \leq \mu$  и  $y(t) \geq 0$ , при этом величина  $y(t)$  характеризует запас оставшихся ресурсов первого игрока.

Второй игрок выбирает управление  $v$ , стесненное ограничением  $\|v\| \leq \beta$ .

Цель первого игрока заключается в том, чтобы добиться выполнения неравенства  $\|z(p)\| < \varepsilon$ . Цель второго игрока противоположна.

К такой постановке приводит задача о встрече в заданный момент времени точки переменного состава с точкой, обладающей простым движением.

Для начального состояния  $t_0 < p, z(t_0), y(t_0) \geq 0$  получены условия возможности окончания данной дифференциальной игры. Для каждого случая построены соответствующие управления игроков.

Написана программа моделирующая поведение игроков при заданных пользователем начальных условиях.

## Литература

1. Айзекс Р., Дифференциальные игры, Москва, Мир, 1967
2. Ухоботов В.И., Нелинейная одностипная игра со смешанными ограничениями. Проблемы Теоретической Кибернетики: тез. докл. XI Всесоюзной конференции ч.1(1), 1990, с.109.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И., Позиционные дифференциальные игры. Москва, Наука, 1974.

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ключанцев М.И. (Воронеж)

Эволюционное моделирование — это нахождение, исследование временных форм и построение внутреннего анализа рассматриваемой системы.

1) Ограничения на систему: i) система  $A$  состоит из иерархических структур (уровней)  $i = 0, \dots, N$ ; ii) система допускает расщепление на каждом иерархическом уровне на две части (деление на пары) — "i-ые сечения"; iii) входные и выходные события каждой части любой пары принадлежат одному и тому же допустимому множеству событий, т.е.  $f(x, i) \in DtR(A)$   $i = 0, 1, \dots, N$ ; iii) иерархические структуры (все или некоторые) допускают разбиения на подструктуры, также удовлетворяющие свойствам i) — iii).

2) Основные постулаты [1]: i) любая система (оператор  $A$ ) имеет собственную структуру (строение); ii) структура порождает собственное время  $t$ ; iii) время  $t$  определяет временные формы и пространство-время системы.

3) Построение пространства-времени [1]: i) с помощью времени и временных форм строится минимальное пространство-время  $DtR(A)$ ; ii) минимальное пространство-время расширяется до максимально возможного  $DtR(A)$  так, чтобы все вводимые во внутреннем анализе операторы были бы отображениями из  $DtR(A)$  в  $DtR(A)$ .

4) Построение эволюционных моделей: i) рассматривая систему в момент  $i$  собственного времени, получаем эволюционную модель первого порядка системы  $A = Ap(i+1)Ar(i)$ ; ii) иерархические подструктуры иерархически упорядочиваются, затем вводятся времена времён соответствующих рангов [2], которые в свою очередь определяют временные формы высших порядков  $f(x, t, t_1, \dots, t_k, \dots)$ ; iii) выбираем  $i$ -ые "прошедшие" подуровни  $i'_1 = 0, 1, \dots, N'_1$  и  $(i+1)$ -ые "будущие" подуровни  $i_1 = 0, 1, \dots, N$ , и в зависимости от выбранных подуровней строим одну из следующих эволюционных моделей второго порядка

$$A = App(i+1, i'_1+1)Apr(i+1, i'_1)Ar(t), \quad A = Ap(i+1)Arp(i, i_1+1)Ar(i, i'),$$

$$A = App(i+1, i'_1+1)Apr(i+1, i')Arp(i, i_1+1)Arr(i, i_1);$$

iiii) повторяя эти рассуждения, получаем эволюционные модели 3-го, 4-го и т.д. порядков.

### Литература

1. Ключанцев М.И. Временные формы оператора. Анализ операторов // Труды Международной конференции, посвященной 75-летию член-корр. РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. Москва, 1998, Т. 2. С. 90-94. 2. Ключанцев М.И. Временные формы операторов дискретной структуры. Времена времён // "Понтригинские чтения-X" на Воронежской весенней математической школе. Воронеж, 1999. С. 129.

Пусть  $\mathbf{R}_1^{n+1}$  – пространство-время Минковского, то есть  $(n+1)$ -мерное, вещественное линейное пространство с метрикой сигнатуры  $(1, n)$ . Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Тогда для любого  $\chi = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_1^{n+1}$  полагаем

$$|\chi|^2 = -t^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Максимальными поверхностями в пространстве Минковского называются поверхности с нулевой средней кривизной. Происхождение данного термина связано с тем, что в пространстве Минковского естественно ставится задача на максимум площади, а не на ее минимум, как в евклидовом пространстве. Соответствующее уравнение максимальных поверхностей имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f|}} \right) = 0. \quad (1)$$

К.Экером в [1] было доказано, что если решение  $t = f(x)$  уравнения (1) имеет особенность в точке 0, то с точностью до лоренцева преобразования график решения является поверхностью вращения. Нам удалось показать, что в случае поверхностей коразмерности выше 1 это не так.

**Теорема.** *Поверхность, заданная погружением*

$$\begin{aligned} t &= \tau, \\ x_1 &= \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \sinh 2\tau, \\ x_2 &= \frac{1}{4} \sin 2\varphi \sinh 2\tau, \\ x_3 &= \sin \varphi \sinh \tau, \end{aligned}$$

*является полной, максимальной поверхностью, не лежащей ни в каком подпространстве.*

Построение примера основано на полученном ранее автором представлении максимальных трубчатых поверхностей с особенностями в пространстве Минковского в виде рядов по степеням  $t$  с вещественно аналитическими коэффициентами [2].

## Литература

- [1] Ecker K. Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity. Manuscr. Math. 1986. V. 56. С. 375-397.
- [2] Клячин В. Об асимптотических свойствах максимальных трубок и лент в окрестности изолированной особенности в пространстве Минковского. (Напр. в журнал)

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS Ref.No:10170.



СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ  
УРАВНЕНИЯ ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ В  
ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО  
Клячин А.А. (Волгоград)

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) = nH(x), \quad (1)$$

где  $H(x)$  - непрерывная функция, определенная в ограниченной области  $\Omega$ . Уравнение (1) описывает функции, графики которых имеют среднюю кривизну  $H(x)$ . Пусть  $a \in \Omega$  и  $S_r(a)$  -  $(n-1)$ -мерная сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $a$ . Определим величину

$$\mu_f(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r(a)} \frac{\langle \nabla f, n \rangle}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}},$$

где  $n$  - единичный вектор внешней нормали к  $S_r(a)$ . Не сложно показать, что данный предел существует.

Пусть  $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^N \{a_i\}$  - фиксированный набор точек  $a_i \in \Omega$ . Зададим непрерывную функцию  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и постоянную  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ . Рассматривается задача о существовании в области  $\Omega \setminus \mathcal{A}$  решения  $t = f(x)$  уравнения (1), для которого

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \mu_f(a_i) = \mu_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

В естественных предположениях относительно  $\varphi$  указывается постоянная  $M_n = M_n(\varphi, \mathcal{A})$  такая, что поставленная задача однозначно разрешима при  $|\mu| < M_n$ . Доказано, что всегда  $M_2 = \infty$ , а для  $M_n$  при  $n > 2$  получены оценки снизу.

Отметим, что случай нулевой средней кривизны был ранее рассмотрен в работе [1].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS Ref. No.:10170.

#### Литература

1. Клячин А.А., Миклюков В.М. Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского. // Математ. сб., 1993. Т.184, N 9, С.103-124.

## СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛН В ГОФРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДАХ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Ковалев Н.Ф., Фильченко С.Е., Юваковский А.Д. (Н.Новгород)

С целью описания гибридных волн в гофрированных волноводах, частично заполненных диэлектрической средой, введена система четырех одномерных интегральных уравнений относительно 4-х функций источников, расположенных на ограничивающих поверхностях волновода и диэлектрика. Путем выбора компонентов функций Герца и типов поверхностных источников (в частности фиктивных) можно получить корректную систему, включающую уравнения типа Фредгольма второго рода, приспособленную для численных расчетов без дополнительных регуляризирующих операций. Область применения предложенной системы можно распространить и на случай ребристых поверхностей (как металлических, так и диэлектрических) методом перехода к новым переменным с якобианом, явно учитывающим особенности полей на ребрах. В случаях регулярного волновода с гофрированным диэлектриком или гофрированного волновода с цилиндрической диэлектрической втулкой система 4-х уравнений сводится к системе 2-х интегральных уравнений того же типа. При этом диэлектрик может быть анизотропным и даже обладать пространственной дисперсией.

Полученные системы интегральных уравнений решаются методом Галлеркина с базисом из тригонометрических функций, допускающим применение БПФ. При вычислении ядер интегральных уравнений использовалась процедура улучшения сходимости рядов путем явного выделения их особенностей.

Время расчета по созданным программам одной точки дисперсионной кривой, а также потока мощности, переносимой волной, потерь в стенках и электрического поля на них не превышает нескольких секунд на РС Pentium-100.

В докладе представлены результаты исследования распространения двух основных гибридных волн в осесимметричном гофрированном волноводе для первой и второй полос прозрачности. Рассмотрено явление возникновения и исчезновения полос загираания при изменении глубины гофрировки. Обсуждаются проблема потерь в стенках гофрированного волновода и метод вычисления предельной мощности, канализируемой такими волноведущими системами.

## МОДЕЛИ СИСТЕМ ЦОС С УПРАВЛЯЕМОЙ АРХИТЕКТУРОЙ

Коваль А.С. (Воронеж)

Модель вычислительных систем общего назначения, основы которой разработаны фон-Нейманом, подразумевает последовательное выполнение команд из конечного predetermined множества команд процессора, что не вполне подходит для большинства задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) из-за больших затрат на декодирование и выборку команд в многократно повторяющихся циклах, необходимости в большой системе команд. Одна из первых ЭВМ с репрограммируемой архитектурой была разработана Шафнером [1]. Можно отметить следующие возможности для модернизации обычной организации вычислений: смена последовательного потока команд на управление данными, при заранее записанном в программируемой логической интегральной схеме (ПЛИС) алгоритме; разбиение алгоритма на фрагменты, выполняющиеся на АЛУ с репрограммируемой под данный фрагмент системой команд; изменение топологии распределенной вычислительной системы, состоящей из множества связанных АЛУ для конкретного алгоритма.

В качестве переменных модели выбраны: число и времена выполнения фрагментов алгоритма  $N$  и  $T_i$ , в общем случае исполняемых с перекрытием по времени; время перезагрузки конфигурации ПЛИС  $T_r$ ; полное время выполнения задачи  $T_0$ , число вычислительных элементов  $N_{ALU}$ . Требуется определить вариант с минимальным  $T_0$ , при ограничении на  $N_{ALU}$ . Имитационные модели реализованы в виде  $N$ -схем (временные сети Петри) и позволяют выбрать среди нескольких возможных оптимальный вариант выполнения алгоритмов вычисления БПФ и КИХ-фильтрации на реконфигурируемых ПЛИС.

### Литература

1. Mario R. Schaffner. Processing by Data and Program Blocks. IEEE Transactions on Computers, 27(11):1015-1028, November 1978.

## О МЕТОДАХ ПЕРЕВОДА ЧИСЕЛ ИЗ СОК В ПСС

Копыткова Л.Б. (г. Ставрополь)

В системе остаточных классов (СОК) целое неотрицательное число  $A$  представляется в виде набора остатков от деления представляемого числа на выбранные основания (модули) системы  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , т.е.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \text{ где } \alpha_i = A - [A/p_i]p_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Один из методов восстановления числа опирается на Китайскую теорему об остатках и носит название метода ортогональных базисов. Другой метод определения величины числа связан с переводом числа из СОК в полиадическую систему счисления. Его преимущества перед методом ортогональных базисов в том, что все вычисления выполняются в модулярной арифметике, причем в отдельных каналах, соответствующих модулям, правда, не параллельно.

Достаточно эффективными методами перевода чисел из СОК в ПСС являются интервальные методы. Благодаря одной из интервальных характеристик (номер интервала), опираясь на теорему Эйлера, и была получена формула нахождения наименьшего неотрицательного вычета  $A_i$  числа  $A$  по составному модулю  $P = \prod_{k=1}^{i+1} p_k$ :

$$A_i = \prod_{j=1}^i p_j \left| \delta_i (\alpha_{i+1} - A_{i-1}) \right|_{P_{i+1}}^* + A_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

где  $\delta_i = \left( \prod_{j=1}^i p_j - p_{i+1} \right) \left|_{P_{i+1}}^{*(p_{i+1}-1)} \right|^*$ ;  $\varphi(p_{i+1})$  - функция Эйлера.

В качестве улучшения результата предлагается проводить восстановление числа поэтапно: на первом этапе найти представление числа  $A$  по модулям  $p_{1,2} = p_1 \cdot p_2$ ,  $p_{3,4} = p_3 \cdot p_4$ , ...; на втором этапе - по модулям  $p_{1,4} = p_{1,2} \cdot p_{3,4}$ ,  $p_{5,8} = p_{5,6} \cdot p_{7,8}$ , ...; и т.д., пока не будет восстановлено число  $A$ . Таким образом, возникает возможность конвейерной обработки информации.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАССОПЕРЕНОСА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТНО МОДИФИЦИРОВАННУЮ МЕМБРАНУ

Е.И.Коржов (Воронеж)

В целях создания зарядо селективных мембран используются различные способы модификации поверхности серийно выпускаемых ионообменных мембран. Одним из них является осаждение на поверхности мембраны слоя полиэлектролита, знак заряда которого противоположен заряду ионогенных групп матрицы мембраны [1].

Обсуждаются вопросы построения математических моделей для теоретических исследований процессов электропереноса в системах подобного типа. Основная идея предлагаемого подхода заключается в получении выражения для миграционной составляющей потока ионов. Напряженность электрического поля в описанной системе может быть представлена в виде суммы «внешней» и «внутренней» составляющих. Первая из них соответствует напряженности электрического поля, создаваемого внешней э.д.с. Вторая представляет собой напряженность электрического поля, образованного осажденным из раствора поверхностным электрическим зарядом. Толщина этого слоя составляет всего несколько молекулярных радиусов. Поэтому можно считать, что имеется обычная мембрана, на поверхности которой находится бесконечно тонкий слой электрического заряда с заданной плотностью  $\rho_s^*$ . Равномерно заряженная поверхность индуцирует электрическое поле, вектор напряженности которого ортогонален этой поверхности и имеет противоположные направления по разные ее стороны.

Поскольку эти вектора электрической напряженности коллинеарны, суммарное электрическое поле потенциально. В этом случае плотность потока ионов  $i$ -го сорта в областях  $\Omega_k$  ( $k=1,2,3$ ) может быть представлена в обобщенной форме закона Нернста-Планка-Эйнштейна [2]

$$\vec{N}_i^k = -D_i^k \left\{ \text{grad} C_i^k + \frac{z_i e}{kT} \left[ C_i^k \left( \text{grad} \varphi^k \pm \frac{\rho_{ws}^k}{\varepsilon_0} \vec{n}^k \right) \right] \right\} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

В рассматриваемой трехслойной области на межфазных поверхностях формулируются два альтернативных типа граничных условий – традиционное условие непрерывности концентраций, электрического потенциала и плотности потока ионов, а также условие локального термодинамического равновесия, выражающееся в равенстве потоков и электрохимических потенциалов. В качестве дополнительного граничного условия формулируется уравнение, соответствующее условию равенства скачка напряженности электрического поля плотности поверхностного электрического заряда.

### Литература

1. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. Перенос ионов в мембранах. – М.: Наука, 1996. – 392 с.
2. Probstein R.F. Physicochemical Hydrodynamics: An Introduction. – New York: Wiley, 1994. – 406 p.

О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ  
РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
С ПЕРЕМЕННЫМ ПОРЯДКОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Корнев В.В., Хромов А.П.(Саратов)

Пусть  $A$  — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $A(x, t)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема по  $x$  и один раз по  $t$  при  $0 \leq t \leq x \leq 1$  и

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t)|_{t=x} = \delta_{n-1, j} \quad (j = 0, \dots, n)$$

( $\delta_{n-1, j}$  — символ Кронекера).

**Теорема.** Для любой  $f(x) \in L[0, 1]$  имеет место:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 < \delta \leq x \leq 1 - \delta} |S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)| = 0,$$

где  $S_r(f, x)$  — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) для тех характеристических чисел, для которых  $|\lambda_k| < r^n$ ,  $\sigma_r(f, x)$  — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров  $k$ , для которых  $k\pi < r$ .

Для  $n = 1$  этот результат установлен в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 97-01-00566

### Литература

1. Хромов А.П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // "Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа". Сборник статей, посвященный семидесятилетию П.Л.Ульянова, М: Изд-во АФЦ, 1999. С.255-266.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
НЕСКОЛЬКИХ ЭТНОСОВ  
Коробицын В.В. (Омск)

Модель этногенеза строится исходя из теории Гумилева [1]. Согласно этой теории существует уровень организации общества между биологическим и социальным, который он назвал этническим. Это уровень подсознательного разделения всех людей на своих и чужих. Разделение происходит по ощущению комплементарности и по стереотипу поведения. Члены одного этноса никогда не признают своим члена другого этноса. Большинство военных конфликтов происходит в следствии противостояния двух враждующих этноса. Перемирие двух этносов обычно является недолгим и после некоторого перерыва возобновляются военные действия.

Движущей силой в этносе является пассионарная энергия. Плотностью пассионарной энергии будем называть величину отношения пассионарной энергии к площади территории, которую занимает этнос, то есть это количество пассионарной энергии на единицу площади ландшафта.

Для создания модели выделяем четыре основных закона изменения плотности пассионарной энергии: *производство, потребление, рассеивание, перемещение*. Придав этим законам математический вид, получаем интегральное уравнение, описывающее модель. После дифференцирования этого уравнения получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_i} \left[ \varepsilon_i \Delta u_i + (\nabla \varepsilon_i + \nabla \varphi_i) \nabla u_i + \left( \Delta \varphi_i + \beta_i - \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} u_j - \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right) u_i \right].$$

С данной моделью было проведено компьютерное моделирование на основе пакета МЕР [3]. Модель исследовалась на карте ландшафтов европейского континента. В моделировании участвовали три этноса: западный, славянский и мусульманский. Результаты моделирования показали разделение территорий между этими этносами.

**Литература**

1. Гумилев Л.Н. *Этногенез и биосфера Земли*. – М., 1994.
2. Гун А.К. *Глобальная этносоциология*. – Омск: ОмГУ, 1997.
3. Коробицын В.В., Гун А.К. *Программное обеспечение МЕР для моделирования эволюционных и социальных процессов // Вестник Омского университета*. 1999. № 2. С. 23-25.

## ОБ УПРАВЛЕНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАССЫ

В. С. Королев (г. Санкт-Петербург)

Рассматривается движение в однородном или в центральном поле для механической системы, состоящей из основного тела (носителя) и других тел (или материальных частиц), относительно системы координат, которая определяется неподвижной точкой (или центром масс) и главными осями эллипсоида инерции носителя, при допустимом взаимном расположении тел в начальный момент времени и возможных относительных перемещениях отдельных частиц системы, которые определяют переменное распределение массы всей системы.

В случае общей постановки задачи определения движения механической системы, которая рассматривается как одно тело с переменным распределением массы необходимо учитывать движение центра масс и изменение параметров тензора инерции в выбранной системе координат, что приводит к сложной системе обыкновенных дифференциальных уравнений движения [1] и численным методам ее исследования.

Для различных моделей движения системы, соответствующих вращательному движению тела в известных интегрируемых случаях: 1) Эйлера, когда относительное перемещение частиц происходит симметрично при неизменном положении их центра масс, 2) Лагранжа, когда их центр масс остается на главной оси вращения носителя, 3) Ковалевской, когда центр масс остается в плоскости, ортогональной оси динамической симметрии тела, удастся получить более простые уравнения движения системы с переменным распределением массы, которые можно исследовать как численными, так и аналитическими методами.

Учитывается разделение движения системы на вращательное движение тела носителя вокруг неподвижной точки (или центра масс) под действием внешних для системы и внутренних (определяемых движением частиц) моментов сил, а также на относительное и переносное движение выделенных частиц, с учетом управляющих сил и моментов, реализующих это движение. Это позволяет упростить задачу и получить уравнения более удобные для исследования.

Рассматриваются различные модели относительного перемещения частиц, позволяющие управлять вращательным движением носителя оптимально относительно демпфирования заданной функции или стабилизировать заданную ориентацию в пространстве.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00706).

### Л и т е р а т у р а :

1. Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л., изд. ЛГУ, 1969, 240 с.

Controlled motion of rotated body with variable distribution of mass.  
V. S. Korolev ( St.-Petersburg)

It is an investigation for equations of the controlled motion of rotated body with relative displaced some bodies in mechanics system.



Педагогическая концепция, под которой я работаю уже не один год, - «нестандартные формы обучения». Сама по себе эта идея не нова, но с годами своей актуальности не теряет. Действительно, обычно математику учатся видеть строгой, официальной, последовательной наукой, состоящей из рассуждений, выводов, формул, законов, следствий. В результате чего у отдельных учеников вырабатывается ряд комплексов к себе по отношению к данному предмету: «Мне этого не понять. Мне с этим не справиться». И как следствие - недостаточные знания, отсутствие интереса и даже безразличия к данной области образования. Чтобы этого не случилось, учитель должен разрушить догматические представления о математике, представить ее как что-то знакомое, то, что детям понятно и привычно. И тут для всех нас открывается широкое поле деятельности: это и стихи, и рисунки, и кроссворды, и различные занимательные задачи и рассказы. Действительно, это все позволяет учителю сделать урок более живым, интересным, снять нервное напряжение у учащихся, усталость, восстановить их внимание и работоспособность. Умело использованные учителем юмор, поэтические строки, картинки способствуют лучшему контакту с классом, вызывают у ребят расположение и доверие, а нередко содействуют нравственному воспитанию учащихся. И в то же время позволяют задействовать различные виды памяти, активизировать мыслительные процессы.

Итак, коснемся некоторых из этих приемов. Преподавание математики в стихах. В отдельных случаях я излагаю новый материал в стихотворной форме. Действительно, давайте посмотрим. Стихи сопровождают нас с первых дней жизни, они постоянно с нами. Это наши колыбельные песни - стихи, напевные матерями, первые рассказы о Тане, которая громко плачет из-за мячика, о мишке косолапом, идущем по лесу и собирающем шишки. Вообще стихи в детстве ассоциируются с каким-то праздником - Новый год, 8 марта, детские утренники - и все это остается в подсознании, вызывая лишь положительные эмоции. Таким образом, в этом случае поэтический метод изложения материала очень эффективен. Давайте немного его проанализируем. То, что он вызывает положительные эмоции у школьников, это уже понятно, пусть это и происходит на подсознательном уровне. Следующее, сама необычность формы изложения, что в свою очередь привлекает внимание ребят к учителю. Кроме того, стихи лишний раз показывают детям, что математика не такой уж и сухой предмет, раз его можно положить на рифму. Помоему единственной рекомендацией к этому методу является то, что им не стоит злоупотреблять, нельзя слишком часто давать уроки в стихах, иначе это потеряет свою необычность, и детям уже будет не интересно. Все стихи к своим урокам я пишу сам, стараясь в более доступной и понятной форме преподнести учебный материал.

Еще один вид нетрадиционных приемов в образовании - это кроссворды. Их может составлять как сам учитель, так и ученики. Когда кроссворд составлен детьми, это более эффективно. Ну, во-первых для самих ребят-составителей. Им приходится вспоминать формулировки, искать определение того или иного слова. Думать о том, как расположить термины. Все это способствует не только тому, что они лишний раз повторяют тот или иной раздел математики, но и также развитию их творческих способностей и эстетических качеств. С другой стороны, это вызывает и у других детей желание сделать что-то подобное, особенно если на уроке назвать его автора - мальчика или девочку-, которые им хорошо знакомы. Удобнее всего пользоваться кроссвордами на уроках, где повторяется или закрепляется изученная тема.

Все эти формы удобно чередовать друг с другом, а в отдельных случаях можно комбинировать. Тогда урок превратится для учеников не в «обязаловку», которую нужно отсидеть от звонка до звонка, а в интересный творческий процесс, где ребенку отводится роль не ученика, а наблюдателя, исследователя, ученого. В этом случае подчеркивается его значимость, что в свою очередь воспитывает в детях ответственность и внимательность, желание ничего не пропустить из сказанного учителем, чтобы можно было правильно и точно сделать нужный вывод или заключение. В целом такой подход к обучению себя полностью оправдывает и является очень эффективным в общеобразовательных школах.

## КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

КОТОВ П.А.

Самой развивающейся теорией современного научного мировоззрения является математическая теория устойчивости, значение и характер которой заставляет систематизировать сложившиеся в прошлом подходы с настоящими потребностями теоретических и практических задач детерминированных систем. Дополнительному рассмотрению подверглись смысловые характеристики принципов, критерии, аксиоматическая система устойчивости. Автором настоящей работы рассматривались и дополнялись математические вопросы, задачи устойчивости непрерывных линейризованных детерминированных систем. В частности, самостоятельно разработан и сформирован принцип абсолютной устойчивости "в целом ( $-\infty < t < +\infty$ )" / Зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Доклад автора Анализ устойчивости детерминированных динамических систем. К вопросу исследования движения в пространстве выборочных функций // Тезисы докладов 28 января - 4 февраля 1997 - Воронеж, 98 с.

В особенных случаях наличия кратных характеристических нулевых чисел и корней характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью дополнительному авторскому рассмотрению и уточнению был подвергнут известный алгебраический критерий устойчивости непрерывных систем. Необходимым признаны учет резонансных явлений (внутренних, внешних), спектр собственных частот (статических, динамических, наличия мгновенного перераспределения) и содержательный аспект мгновенной устойчивости системы в корректных задачах.

Предлагается термин устойчивости в авторской формулировке как свойство системы занимать и сохранять (отклоняясь) в рассматриваемом интервале выработки одно равновесие, сопротивляться резонансу при наличии спектра собственных частот, лобных (в т.ч. деформирующихся) начальных условиях и возможных воздействиях.

В математической постановке принимается устойчивость 122 дифференциального уравнения, структурные части которого самостоятельны и представимы в аналитическом виде

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОГО  
МЕТОДА В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИИ  
КРАСНОЖЕНОВ Г. Г. (Тверь)

В работе [1] был предложен оригинальный подход к решению оптимизационных задач в геометрии. Его суть заключается в более формализованном, по сравнению с традиционным, геометрическим, способе решения. Использование понятия опорной функции и функции ширины выпуклой фигуры позволило автору получить аналитическое решение.

Решена задача, в которой требуется минимизировать функционал

$$J(x, u) = -L(F) = - \int_0^{\pi} x_1(t) dt$$

при динамических ограничениях  $x'_1 = x_2$ ,  $x'_2 + x_1 = u$ ,  $t \in [0, \pi]$ , фазовых ограничениях  $\Delta \leq x_1 \leq D$ ,  $t \in [0, \pi]$ , ограничениях на функцию управления  $u(t) \geq 0$ , почти всюду при  $t \in [0, \pi]$ , граничных условиях  $x_1(0) = x_1(\pi) = \Delta$  и промежуточных ограничениях  $x_1(\tau_i) \leq a_i$ ,  $\Delta < a_i < G$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Следствием решенной задачи является то, что для любой плоской выпуклой фигуры  $F$ , удовлетворяющей заданным ограничениям на ширину при условии, что  $i = 1$ , для периметра фигуры справедливо неравенство

$$L(F) \leq 4\sqrt{D^2 - a^2} + 4\sqrt{D^2 - \Delta^2} + \\ + D \left( \pi - 2\arccos\left(\frac{\Delta}{D}\right) - 2\arccos\left(\frac{a}{D}\right) \right).$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andreewa J. A., Klötzler R. *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsaufgaben.* Teil I, II, ZAMM, (64), 1984.
2. Sholander M. *On certain minimum problems in the theory of convex curves.* Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1952). P. 139-173.

## Обеспечение достоверности результатов расчета, использующего дифференциальные уравнения

Красноперова Д.Г., Петров Ю.П.  
(г.Санкт-Петербург)

Необходимым условием достоверности результатов расчетов, использующих дифференциальные уравнения, является непрерывная зависимость решений от параметров, поскольку на практике коэффициенты и параметры уравнений известны почти всегда только приближенно, а при отсутствии непрерывной зависимости сколь угодно малые неточности могут полностью исказить результаты расчета.

Однако теорема о непрерывной зависимости решений от параметра доказана лишь для систем в нормальной форме Коши. В докладе приводятся примеры систем уравнений не в нормальной форме, в решениях которых отсутствует непрерывная зависимость от параметров.

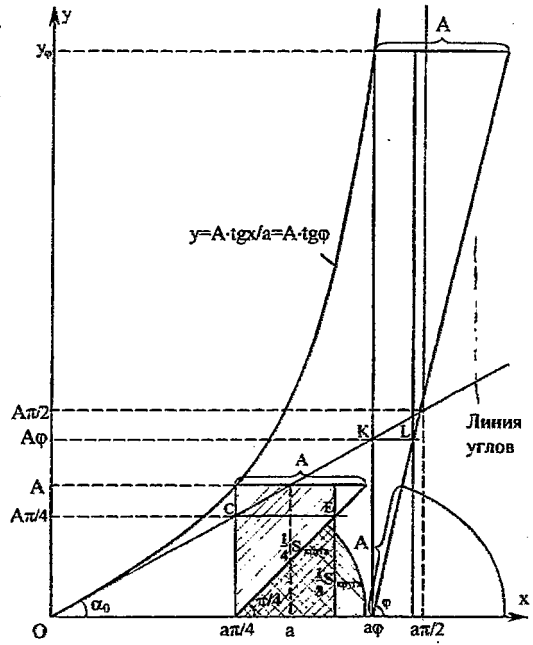
Хотя почти любую систему дифференциальных уравнений можно путем эквивалентных преобразований привести к нормальной форме с сохранением решений, но свойство непрерывной зависимости решений от параметра при этих преобразованиях может появляться или исчезать.

Эквивалентные (в классическом смысле) преобразования сохраняют (по определению) неизменными решения уравнений, но не всегда оставляют неизменными такие свойства решений как непрерывная зависимость от параметра или отсутствие подобной зависимости.

Крутов А.В. (Воронеж)  
**КВАДРАТУРЫ И ПОСТРОЕНИЯ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ**

Известно, что неразрешимые "чистым" построением задачи *квадратуры круга, трисекции угла и удвоения куба* иногда удается разрешить при менее жестких условиях построения, таких как использование линейки "со вставкой" и пр. Так, задача о трисекции угла решалась с помощью конхоиды Никомеда и, как и задача о квадратуре круга, – с помощью квадратрис. Здесь представлено решение этих задач с помощью *тангенсоиды*. Касательную тангенсоиды  $y = A \operatorname{tg} x/a = A \operatorname{tg} \varphi$  в начале координат назовем *линией углов*.

Пусть  $K$  есть точка на этой линии, абсцисса которой совпадает с абсциссой  $a\varphi$  выбранной точки тангенсоиды. Тогда удвоенная площадь кругового сектора радиуса  $A$  и угла  $\varphi$  равна площади прямоугольника высотой  $A \operatorname{tg} \varphi = y_\varphi$  и шириной  $KL$ :  $S_{\text{пр}} = y_\varphi \cdot KL = A \operatorname{tg} \varphi \cdot A\varphi \operatorname{ctg} \varphi = 2S_{\text{кр}}$ . При  $\varphi = \pi/4$  площадь сектора составляет восьмую часть площади круга:  $S_{\text{пр}} = A \cdot CE = 2S_{\text{кр}} = S_{\text{кр}}/4$ . Для деления на любое число  $n$  равных частей (*энсекция*) угла в  $\varphi$  радиан, с вершиной в выбранной точке  $a\varphi$  на оси абсцисс и отложенного от этой оси, разделим отрезок  $a\varphi$  (или любой из отрезков  $A\varphi$ ,  $\sqrt{A^2 + a^2}\varphi$  на соответствующих прямых) на  $n$  равных частей. Для полученных точек деления на оси абсцисс строим указанным на рисунке способом углы с вершиной в этих точках, одной из сторон которых будет ось абсцисс. Затем из вершины данного угла  $\varphi$  проводим лучи параллельно сторонам полученных углов, которые разделят угол  $\varphi$  на  $n$  равных частей. Задачу об *удвоении куба* представляется интересным свести к построению ребра  $a$  куба как полуоси равнобочной гиперболы  $y = (a^2/2)/x$ , когда заданным ребром удваиваемого куба является абсцисса точки пересечения этой гиперболы с параболой  $y = x^2/a$ . Тогда задача соотносится с законами небесной механики, при этом гиперболу можно считать замкнутой траекторией, две ветви которой смыкаются в бесконечности.



считая замкнутой траекторией, две ветви которой смыкаются в бесконечности.

## ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛИ К ТАНГЕНСОИДЕ

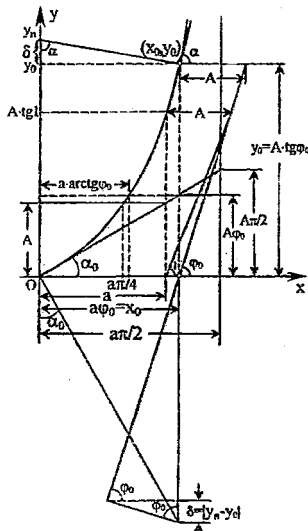
Пусть нормаль тангенсоиды  $y=A \cdot \operatorname{tg} \varphi = A \cdot \operatorname{tg}(x/a)$  в произвольной ее точке  $(x_0, y_0)$  пересекает ось ординат в точке  $(0; y_n)$ . Найдем положение этой точки. Вычислим разность  $y_n - y_0$ , равную по абсолютной величине длине  $\delta$  соответствующего отрезка на оси ординат

$$\begin{aligned} y_n - y_0 &= a \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha = a \varphi_0 (a \cdot \cos^2 \varphi_0) / A = \\ &= (a/A) \cdot a \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi_0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что отношение  $a/A$  есть по величине котангенс угла  $\alpha_0$  наклона касательной тангенсоиды  $y=A \cdot \operatorname{tg}(x/a)$  к оси абсцисс в начале координат. Этот же угол составляет нормаль тангенсоиды в начале координат с осью ординат. Тогда величина  $(a/A) \cdot a \varphi_0 = a \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha_0$  есть длина проекции отрезка этой нормали, заключенного между осью ординат и вертикальной прямой, содержащей данную точку  $(x_0, y_0)$  тангенсоиды, на эту вертикальную прямую. Величина  $(a/A) \cdot a \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0$  есть проекция полученного вертикального отрезка-проекции на направление, составляющее с вертикалью угол  $\varphi_0$ . И, наконец, искомая величина  $y_n - y_0 = (a/A) \cdot a \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi_0$  есть очередная проекция полученной проекции на то направление, проецированием из которого она была получена сама, т. е. снова на вертикаль. Построение угловой величины  $\varphi_0$ , соответствующей линейным координатам точки  $(x_0, y_0) = (a \varphi_0, A \cdot \operatorname{tg} \varphi_0)$  тангенсоиды, осуществляется так, как показано на рисунке, т. е. аналогично тому, как это делается с помощью линии тангенсов. Частоту  $1/a$  или ( $n$ ) "амплитуду"  $A$  можно принять за единицу.

С учетом кинематического способа построения нормали к синусоиде, изложенного в [1, 2], этим исчерпывается вопрос о построении нормали к графикам основных тригонометрических функций, включая обратные, так как эти графики, конгруэнтны соответственно синусоиде и тангенсоиде. Данные построения могут быть полезны, в частности, в гармоническом анализе, при разработке численных методов и т. д.

Литература. 1. Крутов А.В. О некоторых способах описания движения и их взаимосвязи/Воронеж. ун-т. – Воронеж, 1984. – 13 с. – Деп. в ВИНТИ 21.03.84, № 1550 – В84. 2. Крутов А.В. Свойства и приложения функции. Изд-е 3-е, дополненное. – Воронеж: ВГУ, 1999. – 67 с.



## Алгоритмический метод решения простейших уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

Кудренко Н. Г. (Воронежский Кадетский Корпус)

В действующих школьных учебниках нет темы «Уравнения с модулем». Возникла необходимость разработать эту тему, учитывая различный уровень обучаемости учеников.

Алгоритмический метод решения позволяет ученику:

1. Выделять из множества задач уравнения и неравенства определенного типа;
2. Применять для решения четкие указания;
3. Сводить более сложные уравнения и неравенства к простейшим.

Были выделены следующие типы уравнений:

1.  $|f(x)| = g(x)$
2.  $|f(x)| = |g(x)|$
3.  $f(x) = g(x)$
4.  $|f(x)| + |g(x)| = v(x)$

К каждому разработан алгоритм решения.  
Такая же работа проделана для неравенств.

1.  $|f(x)| \geq g(x)$
2.  $|f(x)| \leq g(x)$
3.  $|f(x)| \geq |g(x)|$

Аналогичные алгоритмы разработаны для построения графиков функций, содержащих знак модуля.

Этот метод можно использовать, начиная с младших классов, постепенно усложняя уравнения, или изучать эту тему в 10 классе.

Три года работы показали положительные результаты.

К ВОПРОСУ О ЗАВИСИМОСТИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
 ОТ ПАРАМЕТРОВ, ВХОДЯЩИХ В УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ  
 Кулаев Р. Ч., Кулаев Б. Ч. (Карачаевск)

На связном открытом геометрическом графе  $\Gamma \subset R^n$  рассматривается задача на собственные значения (см. [1])

$$-(pu')' + qu = \lambda u, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

В каждой внутренней вершине  $a$  графа  $\Gamma$  решения задачи (1) удовлетворяют условиям непрерывности и условию гладкости

$$\sum_i \alpha_i(a) u_i'(a) = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha_i(a)$  - приписываемый каждой внутренней вершине  $a$  набор положительных чисел, а через  $u_i'(a)$  обозначена односторонняя производная функции  $u(\cdot)$  вдоль ребра  $\gamma_i$ .

Предположения об уравнении (1): функции  $p(\cdot), q(\cdot)$  равномерно непрерывны на замыкании каждого ребра  $\bar{\gamma}_i$ , причем  $q(\cdot) \geq 0$ ,  $\inf p(\cdot) > 0$  и  $p(\cdot)$  равномерно дифференцируема на  $\gamma_i$ .

Рассматривается вопрос о зависимости собственных значений задачи (1), (2) от параметров  $\alpha_i(a)$ , входящих в условия (2).

Пусть  $\alpha^{(n)} = \{\alpha_i^{(n)}(a_j)\}$ ,  $(n=1, 2, \dots)$  - последовательность фиксированных наборов положительных чисел. Обозначим через  $\sigma_n$  спектр задачи (1), (2), в которой  $\alpha_i(a_j) = \alpha_i^{(n)}(a_j)$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha^{(n)} \rightarrow \alpha^{(0)}$ . Тогда для каждого  $\lambda_0 \in \sigma_0$  найдется такая последовательность  $\lambda_n \in \sigma_n$ , что  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Если  $\alpha^{(n)} \rightarrow \alpha^{(0)}$ , то ненулевые точки сгущения любой последовательности  $\lambda_n \in \sigma_n$  принадлежат  $\sigma_0$ .

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для задачи на графе. // Диф ур-я 1989. Т. 25. № 7. С. 1141-1150.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

*Курганский С.И., Дубровский О.И., Лихачев Е.Р.,*

*Максимова Е.И., Задорожный В.В. (Воронеж)*

Исследование процессов взаимодействия квантов электромагнитного излучения с электронами, находящимися в связанных состояниях – одна из важнейших задач физики твердого тела. В результате такого рода взаимодействия испускаются фотоэлектроны и вторичные фотоны, изучение спектра которых дает необходимую информацию об электронной структуре вещества.

В настоящей работе представлены методики расчета фотоэлектронных и рентгеновских эмиссионных спектров тонких кристаллических пленок. Для расчета фотоэлектронных спектров кристаллических пленок разработана методика, основанная на аппроксимации, учитывающей только однократное рассеяние в конечном состоянии. При этом интенсивность тока фотоэлектронов вычисляется как сумма локальных парциальных плотностей электронных состояний  $n_{sl}$  с весами, определяемыми сечениями фотоионизации  $\sigma_{sl}$

$$I(E+h\nu) \sim \sum_{s,l} \sigma_{sl}(E;h\nu) \cdot n_{sl}(E). \quad (1)$$

Расчет рентгеновских эмиссионных спектров проводился в одноэлектронном и дипольном приближениях. Интенсивность рентгеновского эмиссионного излучения в данном приближении определяется выражением:

$$I(E) = E^3 \int M^2 \cdot \delta(E - E_c + E_k) dk, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по двумерной зоне Бриллюэна. Сечения фотоионизации  $\sigma_{sl}$  в (1) и матричный элемент вероятности рентгеновского перехода  $M^2$  в (2) вычисляются на основе результатов зонного расчета, проводимого нами пленочным методом линеаризованных присоединенных плоских волн.

Описанные методики расчета реализованы на ЭВМ. Разработанный комплекс программ для IBM-совместимого компьютера позволяет вычислять электронную структуру и спектральные характеристики тонких пленок с произвольной кристаллической структурой.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫНУЖДЕННОГО РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ЗАРЯДОВ В ПОЛЕ ТЕМ-ЛОВУШКИ В ОТСУТСТВИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Курин А.Ф. (Воронеж)

Если снять сделанное в [1,2] ограничение на амплитуду колебаний частиц и, следовательно, на амплитуду высокочастотного электрического поля, а также допустить, что время пролета частиц через область неоднородного поля соизмеримо с периодом колебаний поля (малый угол пролета), то появляется возможность резонансного взаимодействия зарядов с высокочастотным полем. Физически резонанс обусловлен близостью частоты поля и частоты осциллирующей частицы в магнитном поле высокочастотного поля. Существование резонансных режимов следует уже из анализа корней характеристического уравнения линеаризованной по своим переменным (координатам и проекциям скорости) системы уравнений движения частицы в модели, рассмотренной в [3,4].

Используется векторное релятивистское уравнение движения в электромагнитном циркулярно поляризованном стоячем поле. Причем в качестве порождающего уравнения в методе усреднения используется релятивистское нелинейное уравнение, совпадающее с уравнением маятника. Хорошо известно [5] приближенное решение этого уравнения с высокой точностью при больших углах отклонения маятника от положения равновесия. Векторное релятивистское уравнение преобразуется к системе уравнений для переменных Ван-дер-Поля, то есть для амплитуд и фаз колебаний частиц с двумя степенями свободы.

Описанный подход, в частности, позволил в настоящей работе проанализировать энергообмен и траектории релятивистских частиц при резонансе в отсутствие магнитостатического поля. Показано, что в ансамбле осцилляторов возможна фазовая грушировка неизохронных частиц и их вынужденное излучение при взаимодействии О-типа с электронным КПД  $\sim 40\%$ . При этом частицы, совершая ограниченные колебания в направлении распространения волн, образующих стоячее поле, дрейфуют в поперечном направлении. Вычисляется скорость дрейфа.

1. Гапонов А.В., Миллер М.А. // ЖЭТФ. 1958. Т.34. N1. С.242-243.
2. Миллер М.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т.1. N3. С.110-123.
3. Курин А.Ф., Курин Е.А. // ЖТФ. 1993. Т.63. N7. С.55-63.
4. Курин А.Ф. // ЖТФ. 1994. Т.64. N8. С.14-23.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука. 1974. 504с.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ  
В НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ.**

Курсина И. С. (Врянск)

Пусть  $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ . Обозначим  $S = S(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$  - кольцо на комплексной плоскости,  $H(S)$  - множество аналитических в кольце функций. Для  $f \in H(S)$  характеристикой Неванлинны (см. [1]) называется величина  $T(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$  ( $R_1 < r < R_2$ ). Отметим, что факторизация аналитических в кольце  $S$  функций, для которых величина  $T(f, r)$  ограничена, построена В. А. Зморевичем в работе [2], а для классов  $N(\omega)$  - Г. У. Матевосяном в [3].

При  $0 < p < +\infty$ ,  $-1 < \alpha < +\infty$ ,  $-1 < \beta < +\infty$  введем следующий класс функций:

$$N_{\alpha, \beta}^p = \left\{ f \in H(S) : \int_{R_1}^{R_2} (r - R_1)^\alpha (R_2 - r)^\beta T^p(f, r) dr < +\infty \right\}.$$

Положим  $r_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$ . Обозначим  $Z(\beta)$  - множество нулей функции  $\xi$ ,  $Z_{(R_1, r_0)}(f) = S(R_1, r_0) \cap Z(f)$ ,  $Z_{(r_0, R_2)}(f) = S(r_0, R_2) \cap Z(f)$ , для  $k=1, 2, \dots$   $z_k \in Z_{(R_1, r_0)}(f)$ ,  $w_k \in Z_{(r_0, R_2)}(f)$ .

**Теорема.** Пусть  $0 < p < +\infty$ ,  $-1 < \alpha < +\infty$ ,  $-1 < \beta < +\infty$ . Класс  $N_{\alpha, \beta}^p$  совпадает с классом функций  $\xi$ , допускающих представление

$$f(z) = c_m z^m \pi_{j_1} \left( \frac{R_1}{z}, \frac{R_1}{z_k} \right) \pi_{j_2} \left( \frac{z}{R_2}, \frac{w_k}{R_2} \right) \exp \left\{ h_1 \left( \frac{R_1}{z} \right) + h_2 \left( \frac{z}{R_2} \right) \right\}, z \in S.$$

где  $c_m$  - произвольная постоянная,  $m$  - неотрицательное целое число, функции  $h_j \in S$  ( $j=1, 2$ ) и удовлетворяют условиям

$$\int_{R_1}^{R_2} (r - R_1)^\alpha \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_1 \left( \frac{R_1}{r e^{i\varphi}} \right) \right| d\varphi \right)^p dr < +\infty, \quad \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - r)^\beta \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_2 \left( \frac{r e^{i\varphi}}{R_2} \right) \right| d\varphi \right)^p dr < +\infty,$$

$\pi_{j_j}$  ( $j=1, 2$ ) - произведения Джрбашяна (см. [4]),  $\{z_k\}_1^\infty$ ,  $\{w_k\}_1^\infty$  - произвольные последовательности из  $S$ , для которых выполнено соответственно:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(p+\alpha+1)}} < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k^p}{2^{k(p+\beta+1)}} < +\infty, \quad (1)$$

$$\text{где } n_k = \left\{ \text{card } z_k : R_1 < |z_k| < R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2^k} \right\}, \quad v_k = \left\{ \text{card } w_k : r_0 < |w_k| < R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2^k} \right\}.$$

При этом, если выполнены условия (1), то произведения  $\pi_{j_1}$  и  $\pi_{j_2}$  соответственно равномерно сходятся внутри  $S$  и принадлежат классу  $N_{\alpha, \beta}^p$ .

При  $0 < p < +\infty$  во множестве  $N_{\alpha, \beta}^p$  можно ввести метрику, относительно которой  $N_{\alpha, \beta}^p$  является топологической алгеброй. Установленное параметрическое представление позволяет описать все замкнутые идеалы алгебры  $N_{\alpha, \beta}^p$ , которое предполагается привести в докладе.

**Замечание.** Аналогичные утверждения справедливы и для более общих весовых классов функций. В случае единичного круга соответствующие результаты получены Ф. А. Шамоляном в работах [5], [6] и автором в [7].

**Литература.**

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. - М., ГИТТЛ, 1941.
2. В. А. Зморевич. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце. - Мат. сборник, 32 (74), 1953, 633-652.
3. Г. У. Матевосян. Анализ классов  $N(\omega)$  в случае кругового кольца. - Мат. заметки, т.21, №2, 1977, 173-182.
4. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций. - Сообщ. ин-та мат. и мех. АН Арм.ССР, 1948, т.3, №1, 3-40.
5. Ф. А. Шамолян. Параметрическое представление и описание корневых множества весовых классов голоморфных в круге функций. - Сибирский мат. журнал, т. 40, №6, 1999, 1422-1440.
6. Ф. А. Шамолян. Описание замкнутых идеалов в алгебрах Неванлинны - Джрбашяна и характеристика слабоциклических элементов алгебры  $N^*$ . - Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13, №6, 1988, 575-587.
7. И. С. Курсина. Описание замкнутых идеалов в некоторых весовых алгебрах аналитических в круге функций. - Дел. в ВИНТИ, 30.03.1998, №919-В98.

**ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА**

Кучкарова А.Н. (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$LV \equiv V_{xx} + \operatorname{sgn} y V_{yy} + V_{zz} = 0,$$

в области  $T = D \times (0, \pi)$ , где  $D$  - область плоскости  $R_{xy}^2$ , ограниченная при  $y > 0$  частью окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , с концами в точках  $A_1(-1, 0)$  и  $A_2(1, 0)$  и при  $y < 0$  характеристиками  $A_1 C_1(x + y = -1)$ ,  $C_1 O(x - y = 0)$ ,  $O C_2(x + y = 0)$ ,  $C_2 A_2(x - y = 1)$ , где  $C_1(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ,  $O(0; 0)$ ,  $C_2(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ .

Обозначим  $S = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z \in [0, \pi]\}$ ,  $T_0 = T \cap \{y > 0\}$ ,  $T_1 = T \cap \{x < 0 \wedge y < 0\}$ ,  $T_2 = T \cap \{x > 0 \wedge y < 0\}$ .

**Задача Геллерстедта.** Найдти функцию  $V(x, y, z)$ , удовлетворяющую условиям:  $V(x, y, z) \in C(\bar{T}) \cap C^1(T) \cap C^2(T_0 \cup T_1 \cup T_2)$ ,  $LV(x, y, z) \equiv 0$ ,  $(x, y, z) \in T_0 \cup T_1 \cup T_2$ ,  $V(x, y, z)|_S = W(r, \varphi, z)|_{r=1} = f(\varphi, z)$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $z \in [0, \pi]$ ,  $V(x, y, z)|_{y=x} = 0$ ,  $x \in [-1/2, 0]$ ,  $z \in [0, \pi]$ ,  $V(x, y, z)|_{y=-x} = 0$ ,  $x \in [0, 1/2]$ ,  $z \in [0, \pi]$ ,  $V(x, y, z)|_{z=0} = V(x, y, z)|_{z=\pi} = 0$ , где  $f$  - заданная достаточно гладкая функция.

**Теорема.** Если функция  $f(\varphi, z)$  по переменной  $\varphi$  удовлетворяет на отрезке  $[0, \pi]$  условию Гельдера с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , а по переменной  $z$  на отрезке  $[0, \pi]$  условию Гельдера с показателем  $\beta \in (0, 1]$ ,  $f(\varphi, 0) = f(\varphi, \pi) = 0$ ,  $f(0, z) = f(\pi, z) = 0$ , то существует решение задачи Геллерстедта и оно имеет вид  $W(r, \varphi, z) =$

$$= \begin{cases} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin \left[ (k-1/2)\varphi + \frac{\pi}{4} \right] \frac{I_{k-1/2}(nr)}{I_{k-1/2}(n)}, & (r, \varphi, z) \in T_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_{nk} \sin nz f_n \left( \frac{x-y}{x+y} \right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{I_{k-1/2}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-1/2}(n)}, & (x, y, z) \in T_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz f_n \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{I_{k-1/2}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-1/2}(n)}, & (x, y, z) \in T_2. \end{cases}$$

где  $f_{nk}$  находятя из разложения функции  $F_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, z) \sin nz dz$  в ряд по системе  $\{\sin(k-1/2)\varphi + \pi/4\}_{k=1}^{\infty}$  [1]. При этом функция  $V(x, y, z) \in C^{\infty}(T)$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мойсеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. - 1992. - т.28, № 1. - с.110-121.

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ  
ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  $n$ -ГО ПОРЯДКА

Кудев А.Б. (г. Воронеж)

Рассматривается дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + f(x) + \varphi(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = 0,$$

где функции  $f(x)$ ,  $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  непрерывны по совокупности переменных, а функция  $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(t, X)$   $\omega$ -периодична по  $t$ . Мы будем также предполагать, что

$$k_1 < \frac{f(x)}{x} < k_2 \quad (|x| > R, \quad k_1, k_2 > 0) \quad \text{и} \quad \lim_{\|X\| \rightarrow \infty} \frac{\sup_t \varphi(t, X)}{\|X\|} = 0.$$

Для установления вынужденных  $\omega$ -периодических колебаний используется метод направляющих функций, предложенный и разработанный М.А.Красносельским и его учениками. Для соответствующей системы строятся правильные направляющие функции вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности", которые гарантируют существование  $\omega$ -периодических решений исходного дифференциального уравнения при выполнении следующих условий:

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

С помощью принципа родственности полученные результаты распространяется на аналогичное уравнение  $n$ -го порядка с запаздывающим аргументом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975. - 512 с.

2. Кудев А.Б. Достаточный признак существования правильной направляющей функции для одного класса систем дифференциальных уравнений // Прикл. методы функц. анализа. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985. - С. 100-110.

3. Кудев А.Б. О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений четвертого порядка. - Воронеж, 1983 - 37 с. - Рукопись представлена Воронеж. инженерно-строительным институтом. Деп. в ВИНИТИ 13 апреля 1983 г., № 1965-83.

4. Кудев А.Б. Метод направляющих функций в задаче о периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений пятого порядка. // Современные методы нелинейного анализа. - Воронеж, тезисы доклада конференции, 1995. - С. 61-62.

Лазарев К.П., Гареева Т.М. (Воронеж)  
 РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С D-РЕГУЛЯРНЫМ НАБОРОМ  
 ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть  $J$  - промежуток на вещественной оси и  $L$  - оператор

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x, \quad (1)$$

неосциллирующий на  $J$ .

Под  $T_n$ -пространством на  $J$  понимается любое  $n$ -мерное подпространство  $E_n \subset C(J)$ , у которого некоторый базис является  $T$ -системой на  $J$  ( $C(J)$ -пространство непрерывных ограниченных на  $J$  функций).

**Определение 1.**[1] Набор функционалов  $\{l_i\}_1^n$  из  $C^*(J)$  называется  $T$ -регулярным на  $J$ , если для каждого  $T_n$ -пространства  $E_n$  на  $J$  и любой  $x(\cdot) \in E_n$  из равенств  $l_i(x) = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) следует, что  $x(t) \equiv 0$  на  $J$ .

**Определение 2.**[1] Набор  $\{l_i\}_1^n$  функционалов из  $C^*(J)$  назовем  $D$ -регулярным на  $J$ , если любой его поднабор  $\{l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}\}$  является  $T$ -регулярным набором.

В настоящей работе исследуется разрешимость краевой задачи с  $D$ -регулярным набором функционалов.

Обозначим через  $M$  множество натуральных чисел промежутка  $[1, n]$ . Пусть  $M$  представлено в виде объединения  $M = M_1 \cup M_2$ , где  $M_1$  и  $M_2$  - непустые, непересекающиеся подмножества из  $M$ . Обозначим через  $k$  множество элементов в  $M_1$ .

**Теорема.** Пусть  $\{l_i\}_1^n$  -  $D$ -регулярный на  $J$  набор функционалов. Пусть дифференциальный оператор  $L$  вида (1) представлен в виде произведения  $Lx = A_{n-k}(B_k x)$ , где  $A_{n-k}$  и  $B_k$  - неосциллирующие на  $J$  операторы порядка  $n-k$  и  $k$  соответственно. Тогда краевая задача

$$Lx = f$$

$$l_i(x) = 0 \quad (i \in M_1)$$

$$l_i(B_k x) = 0 \quad (i \in M_2)$$

однозначно разрешима при любой  $f \in L_1(J)$ .

1.Покорный Ю.В., Лазарев К.П., Гареева Т.М. О нелокальных краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений // Диф.уравнения, 1989. Т.25, №8. С.1321-1332.

## Расширенная модель "Золотого сечения"

Легошин Г.М., Чесноков Б.П., Горшков В.Н.,  
Г.А.Гончарова ( г.Саратов)

Золотое сечение было известно еще во времена строительства гигантских пирамид в Древнем Египте, а затем – в Древней Греции и на Руси ( использовалось при строительстве храмов).

Чем же оно привлекало человека? Дело в том, что золотое сечение (ЗС), как показали многочисленные наблюдения различных природных явлений и специальные исследования ( искусство, естествознание, наука и техника ), относится в общем плане к уникальному количественному соотношению ( пропорции) частей системы, представляемой как единое целое. При этом система по ЗС разделяется на две неравные части ( по длине, массе, энергии...), оцениваемые, например, "золотыми числами":  $1,618$  и  $-0,618$ . Их сумма равна  $\{ +1\}$ , а произведение –  $\{-1\}$ , т.е.они обладают свойством аддитивности и мультипликативности. При этом  $1/1,618 = 0,618$ , а  $1/0,618 = 1,618$  и  $0,618 \times 1,618 = 1$ !

Любую систему можно разделить на части согласно принципу золотого сечения (ПЗС). Нами установлено, что термодинамическую макросистему (газ) можно также оценить согласно ПЗС положительным  $K_1 > 0$ , и отрицательным  $K_2 < 0$  показателями адиабаты. Оказалось, что и мегасистему – Метагалактику ( Вселенную как единое целое ) по аналогии можно качественно описать ЗС при различных ( предельных) состояниях ее эволюции: наша вещественная вселенная  $BC^n$  и "лучевая" Вселенная Циолковского -  $BC^4 [ 1 ]$ .

В силу диалектического единства  $BC^4$  эволюционно "переходит" в  $BC^n$  циклично через космический фазовый переход (скачок по диалектической дефиниции) [ 2 ].

Состояние вселенской материи удалось определить только расширив ЗС согласно открытому в 1998 г. Л- полиному, названному альтернативно также универсальным (суперсимметричным) золотым сечением в виде функции  $L(x) = f(x^m \dots)$ , где  $m$  - степень Л-полинома ( $m = 2 \dots \infty$ ),  $x$  – характеристика анализируемой системы, например  $x = K$  – показатель адиабаты в термодинамической макросистеме (газ) и т.п.

Таким образом, открытое "расширенное" золотое сечение позволяет "разделить" любой объект на диалектически связанные части, что может найти применение не только в космологии и науке в целом, но и в технике: для расчетов, например, мостов с большими длинами пролетов, авиационных и автотракторных элементов технических объектов, корпусов ракет и т.д.

### Литература.

1. Легошин Г.М. Термодинамика. Гармония. Вселенная. ( монография). Саратов: ВВКИУ РВ, 1998.
2. Гасилин В.Н. Теория диалектики. Саратов (Казань): ПАГС, 1999.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В БИОТКАНИ ПРИ УМЕРЕННОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СВЧ-ГИПЕРТЕРМИИ

Листров Е.А., Ръжкова Н.А. (Воронеж), Шуринов Ю.А. (Москва)

В экспериментах [1] при умеренных значениях SAR графики  $T(t)$  переходных периодов аналогичны графикам колебаний маятника в среде с сопротивлением.

В докладе предлагается затухающие колебания температуры при постоянных SAR моделировать не одним уравнением Пэна [1,2],

$$\rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = -W_e \cdot (T - T_a) + \rho \cdot SAR,$$

а системой двух уравнений вида

$$(1) \quad \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = -c_b \cdot Q_e + \rho \cdot SAR$$

$$m \cdot \frac{d^2 Q_e}{dt^2} + b \cdot \frac{dQ_e}{dt} + c_b \cdot Q_e = \rho \cdot SAR \quad (2)$$

Показано, что из (1) и (2)

$$Q_e = \frac{\rho}{c_b} \cdot SAR + Q_i, \quad Q_i = -\frac{\rho \cdot c}{c_b} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

$$m \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b \cdot \frac{d\theta}{dt} + c_b \cdot \theta = 0,$$

где  $\theta = T - T_\infty$ ,  $m$ ,  $b$  - определенные постоянные, определяемые экспериментально.

## Литература

1. Roemer R.B., Oleson J.R., Certas T.C. // Am. J. Phys. 1985. Vol. 249 (18). P. R 153- R158.
2. Шульман З.П., Хусид Б.М., Файн И. В. // ИФЖ. 1995. Т. 68. №3. С. 430.



Лобанова О.А.  
О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ В ОГРАНИЧЕННОМ ФАЗОВОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = P(f(t, x), T(Q, x)) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in Q, \quad (2)$$

где  $Q \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклое замкнутое множество,  $T(Q, x)$  – касательный конус к  $Q$  в точке  $x$  ([1], с.109),  $P(f(t, x), T(Q, x))$  – проекция вектора  $f(t, x)$  на  $T(Q, x)$ .

Выражение  $f(t, x)$  определено на множестве  $[t_0, +\infty) \times Q$ , непрерывно по переменной  $t$  при любом фиксированном  $x$  и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$  с константой  $L$ .

Решением задачи (1),(2) назовем функцию  $x(t)$ , определенную на  $[t_0, +\infty)$ , локально абсолютно непрерывную, удовлетворяющую начальному условию (2) и почти всюду уравнению (1).

Рассмотрим также задачу для приближенного уравнения

$$\dot{y} = f(t, z) - M(y - z), \quad y(t_0) = x_0, \quad (3)$$

где  $z = P(y, Q)$  – проекция  $y$  на  $Q$ ,  $M > 0$ .

Доказано следующее утверждение:

*При выполнении перечисленных условий и  $t \leq T$  справедлива оценка:  $\|y - x\| \leq \frac{1}{\sqrt{LM}}(e^{2L(T-t_0)} - 1)^{\frac{1}{2}}$ .*

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. - М.: Наука, 1983, 271 с.

E-mail: mfkfa222@main.vsu.ru

**О СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ  
В НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ  
ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ.<sup>1</sup>**

А. П. Лукавий. (Брянск)

Пусть  $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$  – единичный полидиск в  $n$ -мерном комплексном пространстве  $C^n$ . Через  $h(x)$  обозначим вектор-функцию  $h(x) = (h_1(x_1), \dots, h_n(x_n))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где  $h_j(x)$  – монотонно растущая функция на  $(0, +\infty)$ .  $H(D^n)$  – множество голоморфных в  $D^n$  функций. Пусть  $A_h^p(D^n)$  следующее пространство голоморфных функций

$$A_h^p(D^n) = \left\{ f \in H(D^n) : \|f\|_{A_h^p} = \left( \int_{D^n} |f(z)|^p \exp \left( -h \left( \frac{1}{1-|z|} \right) \right) dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где

$$\exp \left( -h \left( \frac{1}{1-|z|} \right) \right) = \exp \left( -h \left( \frac{1}{1-|z_1|} \right) \right) \cdot \dots \cdot \exp \left( -h \left( \frac{1}{1-|z_n|} \right) \right).$$

Основным результатом является следующая

**Теорема.** Если при некотором  $\delta$

1.  $f \in A_h^{p+\delta}(D^n)$ ,  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D^n$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_j(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'_j(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h''_j(x) = +\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h''(x)}{h'(x)} = A$ ,  $1 < A < \infty$ ;  
в случае  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h''(x)}{h'(x)} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h''(x)}{h'(x)^2} = 0$ ;

то  $f$  слабо обратима в  $A_h^p(D^n)$ .

**Замечание 1.** При  $n = 1$  и при более жестких условиях на  $f$ , но в областях Каратеодори, сформулированная теорема установлена Л. Хедбергом в [1].

**Замечание 2.** Из результатов работы [3] следует, что при  $\delta = 0$  сформулированная теорема не имеет места.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1]. L. I. Hedberg., Weight mean approximation in Caratheodory regions. - Math. Scand., 1968, v. 23, N1, p. 113-122.

[2]. Н. К. Никольский., Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. СХХ, Ленинград, "Наука", 1974.

[3]. Ф. А. Шамоля., О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций., Изв. РАН серия Математика, т. 60, N5, 1996, стр. 191-213.

e-mail: tcopr@bgni.bitnrcnit.bryansk.su

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МО РФ (грант N97-0-1.6-110)

Ляхов Л.Н., Легеня Т.В.  
ТЕОРЕМА ТИПА ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА ДЛЯ АБСОЛЮТНО  
СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

В теории тригонометрических рядов большую роль играют теоремы об абсолютно сходящихся рядах. Известны несколько видов рядов Фурье по функциям Бесселя.

Через  $j_\nu$  будем обозначать нормированные функции Бесселя, которые связаны с обычными (первого рода) функциями Бесселя  $J_\nu$  равенством  $j_\nu(x) = \frac{C(\nu)}{x^\nu} J_\nu(x)$ .

Здесь мы приведем результаты исследований абсолютно сходящихся рядов Фурье-Бесселя следующего вида:

$$f(x) \sim \sum f_k j_{\gamma+\frac{1}{2}}(a_k x),$$

где числа  $a_k$  — корни функции Бесселя:  $j_{\gamma+\frac{1}{2}}(a_k) = 0$ , а коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$f_k = \frac{2}{[j_{\gamma+\frac{1}{2}}(a_k)]^2} \int_0^1 f(x) j_{\gamma+\frac{1}{2}}(a_k x) x^\gamma dx,$$

Отметим следующее свойство: пусть  $f(x)$  четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда  $|f_k| \leq A(\sup |f| + \sup |B_\gamma f|)$ , где  $B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ .

Имеет место следующий аналог теоремы Винера о распространении локальных свойств абсолютно сходящихся рядов Фурье.

**Теорема 1.** Если каждую точку  $x_0 \in [0, 1]$  можно окружить окрестностью  $\delta(x_0)$  в которой  $f(x) = g_{x_0}(x)$ , где  $g_{x_0}$  — функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье-Бесселя, то ряд Фурье-Бесселя функции  $f(x)$  сходится абсолютно.

Используя этот результат получено следующее утверждение типа теоремы Винера.

**Теорема 2** Если ряд Фурье-Бесселя функции  $f(x)$  сходится абсолютно и  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , то ряд Фурье-Бесселя функции  $\frac{1}{f(x)}$  также сходится абсолютно.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЛЕВЫХ ПОТОКОВ.

Макаров Е.А., Обгадзе Т.А. (г. Владимир)

Для математического описания селевых потоков применяются два подхода: а) модели считающие тело волны селя материальной точкой (получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие динамику центра массы волны селя, достоинство: сравнительная простота разрешающих уравнений.); б) модели, считающиеся с внутренней структурой селевой массы (здесь используют различные модели двухфазных сред, рассматривая либо отдельные системы уравнений, учитывая взаимовлияние фаз дополнительными членами в правых частях уравнений динамики, либо двухфазный поток, как однофазный с определенными свойствами).

Рассматривая модели для каждой компонент смеси, получаем очень громоздкую систему нелинейных дифференциальных уравнений. В случае осредненных уравнений теряются преимущества физической подробности. Поэтому мы рассматриваем тело волны селя как двухкомпонентную смесь: грязь-вода (основной поток селя) и вода-камень (диффундирует в основном потоке).

Для составления математической модели используем частичное осреднение селевой массы по формулам Т.Г.Войнич-Сяноженцкого. Усредняются компоненты тензоров напряжений и плотности компонент смеси. Для частички селевой массы рассматриваем уравнения динамики в форме Коши. Для компоненты грязь-вода используем реологическое уравнение Рейнера-Ривлина, а для компоненты вода-камень – уравнение Сэвиджа. К полученной системе уравнений добавляется уравнение диффузии для гранулированной компоненты Сэвиджа. Полученный подход позволяет объединить положительные черты подходов А и Б. В работе рассмотрены задачи обтекания тел сложной формы.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В СИСТЕМЕ ТИПА ЛОРЕНЦА

Максимов В.И., Цепелев И.А. (Екатеринбург)

Обсуждаются вопросы динамического восстановления неизвестных переменных характеристик для уравнения типа Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy - r + f(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

где  $\sigma$  — число Прандтля,  $r$  — число Рэля и  $f$  — входное воздействие. Эти уравнения довольно интенсивно исследуются в последние годы в рамках теории хаотических систем [1].

Основное внимание в сообщении уделяется двум задачам. Задаче моделирования координат  $x$  и  $y$  по измерениям (с ошибкой) в достаточно частые моменты времени координаты  $z$ . А также задаче восстановления неизвестного разрывного входного воздействия  $f(t)$ . Для решения этих задач указываются два алгоритма, которые основаны на методах теории управления по принципу обратной связи, некорректных задач и нелинейного анализа. Эти алгоритмы ориентированы на работу в реальном времени и могут быть реализованы на компьютерах, в том числе на персональных. Устанавливаются оценки скорости сходимости алгоритмов. Приводится просчитанный на персональном компьютере модельный пример.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №98-01-00046) и INTAS-РФФИ (проект №97-1914).

### Литература

A.L.Fradkov, A.Yu.Pogromsky, Introduction to control of oscillations and chaos, World Scientific, Singapore, Series A, Vol. 35, 1998.

# ОЦЕНКИ И РАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ $R_+^n$ ПРИ СЛАБОМ ВЫРОЖДЕНИИ

О.П.Малютина (Воронеж)

В докладе рассматривается эллиптическое уравнение

$$L_0(\partial_x)u = \frac{\partial}{\partial x_n} \left( a_{nn} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_k} + \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + L'(\partial_x)u = f(x), \quad (1)$$

где коэффициент  $a_{nn} = \alpha^2(x_n) > 0$  при  $0 < x_n < \infty$  и  $\alpha(x_n) \rightarrow 0$  при  $x_n \rightarrow +0$  и  $\alpha(x_n) \rightarrow \infty$  при  $x_n \rightarrow \infty$ . Оператор  $L'(\partial_x)$  содержит лишь первые производные по  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  и в определенном смысле подчинен главной части оператора  $L_0(\partial_x)$ . Заметим, что в силу условия эллиптичности  $L_0$  коэффициенты  $a_{nk}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  имеют порядок  $\alpha(x_n)$ :  $a_{nk} \sim \alpha(x_n)$  при  $x_n \rightarrow +0$  и  $x_n \rightarrow \infty$ . Рассматривается тот случай, когда весовая функция  $\alpha(x_n)$  удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \frac{ds}{d(s)} < \infty. \quad (2)$$

Поскольку  $\alpha(x_n) \rightarrow 0$  при  $x_n \rightarrow +0$  и интеграл (2) сходится, то рассматривается случай соответствует слабому вырождению  $\alpha(x_n)$  при  $x_n \rightarrow +0$  и сильному стремлению  $\alpha(x_n)$  к бесконечности при  $x_n \rightarrow +\infty$ . Например,  $\alpha(x_n) = x_n^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$  при  $0 \leq x_n \leq 1$  и  $\alpha(x_n) \geq \epsilon x_n^{1+\sigma}$ ,  $\delta > 0$  при  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Условие (2) позволяет поставить для уравнения (1) граничную задачу

$$u|_{x_n=+0} = 0, \quad u|_{x_n=+\infty} = 0. \quad (3)$$

Доказывается нетеровость задачи (1), (3) в специальном образом подобранных весовых пространствах Соболева. Ранее задача, аналогичная задаче (1), (3) рассматривалась нами в [1]. Случай сильного вырождения при  $x_n \rightarrow +0$  изучался В.П.Глушко [2].

## Литература

[1] Малютина О.П. Об одной эллиптической задаче с вырождением в полупространстве // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ, Воронеж, 1999. - С.110-113.

[2] Глушко В.П. Оценки в  $L_2$  и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Труды ММО, 1970. - Т.23. - С.113-178.

УТОЧНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ  
МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Марьянов А.В. (Екатеринбург)

Пусть  $M$  - выпуклое компактное тело из  $R^n$ ,  $F : M \rightarrow 2^M$  - выпуклозначное отображение. Исследуется вопрос о существовании неподвижной точки  $x^*$  отображения  $F$ , лежащей в относительной внутренней своего образа:  $x^* \in \text{relint}F(x^*)$ .

Простые примеры показывают, что в условиях теоремы Какутани подобной точки может не быть даже в том случае, когда все множества  $F(x)$  телесны. Тем не менее справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $F : M \rightarrow 2^M$  - непрерывное по Хаусдорфу выпуклозначное отображение с неодноточечными образами. Тогда найдется неподвижная точка  $x^*$  отображения  $F$ , обладающая следующими свойствами: 1)  $x^* \in \text{relint}F(x^*)$ ; 2) расстояние от  $x^*$  до относительной границы множества  $F(x^*)$  оценивается снизу величиной  $d$ , которая определяется по формуле

$$d = \begin{cases} \left( h \int_0^{\arctg \frac{h}{r}} \sin^{k-2} t dt \right) \left( \int_0^\pi \sin^{k-2} t dt \right)^{-1} & , k > 1, \\ \frac{r}{2} & , k = 1, \end{cases}$$

где  $r$  - чебышевский радиус множества  $F(x^*)$ ,  $h$  - относительная ширина  $F(x^*)$ ,  $k = \dim F(x^*)$ .

Что касается полунепрерывных снизу отображений, то здесь достаточно наложить только условие телесности образов.

**Теорема 2.** Пусть  $F : M \rightarrow 2^M$  - полунепрерывное снизу выпуклозначное отображение с телесными образами. Тогда существует неподвижная точка  $x^*$  со свойством  $x^* \in \text{int}F(x^*)$ .

С небольшими изменениями последняя теорема переносится на локально выпуклые пространства.

Хорошо известно, что если дополнительно предположить замкнутость образов, то существование неподвижной точки в теореме 2 легко следует из комбинации теорем Майкла и Брауэра; при этом условие телесности образов, естественно, можно опустить. Нетрудно также показать, что если в каждый образ  $F(x)$  можно вписать шар некоторого фиксированного радиуса, то существование неподвижной точки со свойством  $x^* \in \text{int}F(x^*)$  вытекает как из полунепрерывности сверху, так и снизу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 99-01-00460.

**ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКОГО РЕШАТЕЛЯ ДЛЯ  
СИСТЕМЫ ВЫБОРА СОСТАВА  
ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ ЛВС  
Матвеев М.Г., Свиридов А.С. (Воронеж)**

При выборе состава программно-технических комплексов локальных вычислительных сетей (ЛВС) необходимо использование экспертных методов выбора. При этом знания, полученные от экспертов, обычно, являются нечеткими. Нечеткий решатель обрабатывает эти знания и осуществляет вывод, приближенный к человеческим рассуждениям. Работа нечеткого решателя производится с продукциями, в левых и правых частях которых могут находиться нечеткие факты. Вывод производится по максимальной технологии в четыре этапа.

На первом этапе пользователь системы вводит искомые объекты. На втором этапе в соответствии со списком искомых объектов и имеющимися правилами осуществляется заполнение следующих элементов рабочей памяти решателя: сетевой структуры данных, отражающей зависимость объектов между собой, структуры для хранения фактов. На третьем этапе для входных объектов, которые не зависят от других объектов, системой задаются вопросы относительно их значений и функций принадлежности. Полученные входные факты заносятся в рабочую память решателя. Четвертый этап работы решателя - собственно логический вывод. Для каждого правила, связывающего значение входного объекта со значениями других объектов, производится вычисление минимума от функций принадлежности для входного факта и факта из правила. Результат помещается в структуру для хранения фактов. Для выбранного объекта ищется то значение, которое доставляет максимум полученному минимуму. Это значение и является результатом логического вывода. Аналогичные действия производятся для всех входных объектов. Полученные факты помещаются в рабочую память решателя как новые входные факты, и цикл вывода повторяется. При получении значений для искомых объектов производится процесс дефаззификации, то есть переход от нечеткого к точному значению. Эти точные значения и принимаются в качестве значений искомых объектов.



## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Махринова М.В.

Последние десятилетия характерны интенсивным внедрением информационных технологий в обучение общеобразовательным предметам. Однако, нет стройной единой теории использования информационных и коммуникационных технологий в обучении, недостаточно разработана педагогика информационных систем, компьютерно - программированное обеспечение учебного назначения разрабатывается без учета компьютерной дидактики. Это свидетельствует об актуальности исследования, проблемой которого является разработка теории и методики обучения общеобразовательным предметам в компьютерной среде, на основе сетевых технологий.

Особый интерес представляет определение роли и места компьютерных технологий в обучении геометрии, в связи с тем, что их использование способно повысить эффективность обучения за счет наглядного представления информации.

Наглядность, реализованная с помощью компьютера, обретает новые черты и возможности более активного влияния на процесс усвоения за счет, прежде всего, создания новой предметной "реальности", в которой обучаемый является активной стороной действия.

Использование компьютера позволяет формированию большинства образов представить в виде разворачивающегося во времени процесса, "от нуля" до готовой картинки, так что обучаемому дается возможность увидеть и технологию построения, и некоторые второстепенные детали, которые в готовом образе уже нельзя будет обнаружить.

## О ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ БЛОКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ЛИТОСФЕРЫ

Мельникова Л.А., Розенберг В.Л. (Екатеринбург)

Исследуется задача численного моделирования динамики системы литосферных блоков с целью воспроизведения закономерностей, обнаруженных в сейсмических потоках эмпирическим путем. Применяется подход к ее решению, основанный на блоковых моделях [1], в которых сейсоактивный регион представляется в виде системы абсолютно жестких блоков, движущихся под действием внешних сил, а землетрясение интерпретируется как сброс напряжения, достигшего некоторого критического значения. Поскольку блоковые модели (особенно сферическая модификация) требуют существенных вычислительных затрат, то распараллеливание счета на многопроцессорной машине является актуальным, т. к. делает возможным переход к изучению динамики системы тектонических плит с использованием реальных геофизических данных. В докладе анализируются результаты численного моделирования движения конкретной блоковой структуры, обсуждаются вопросы, связанные со спецификой построения параллельных программ, эффективностью алгоритмов и возможностью проведения вычислительных экспериментов на различных машинах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS-РФФИ (проект №97-1914) и РФФИ (грант №99-07-90441).

### Литература

1. Габриэлов А.М., Кейлис-Борок В.И., Левшина Т.А., Шапошников В.А. Блоковая модель динамики литосферы // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. Выч. сейсм. №19. М. Наука. 1986. С. 168-178.

## НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ НЕРВНОЙ АКТИВНОСТИ

Милованов А.В. (Воронежский госуниверситет),

Покровский А.Н. (Санкт-Петербургский университет)

Для описания моделей нервной активности в реальном масштабе времени применяются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной функцией, связанной с частотой нервных импульсов. В данной работе используется модифицированная система Ходжкина-Хаксли [1]:

$$\begin{aligned} Cdv/dt &= -g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) + s(V - V_K) - u - g_Kn^4(V - V_K) - g_L(V - V_L); \\ dm/dt &= \alpha_m(V) - \gamma_m(V)m; \quad dh/dt = \alpha_h(V) - \gamma_h(V)h; \quad dn/dt = \alpha_n(V) - \gamma_n(V)n; \end{aligned}$$

$C = 1$  мкФ/см<sup>2</sup> - емкость мембраны нервной клетки;  $Cdv/dt$  - емкостной ток;

$g_{Na} = 120$  мСм/см<sup>2</sup> - проводимость натриевых каналов;

$g_K = 36$  мСм/см<sup>2</sup> - проводимость калиевых каналов;

$g_L(V - V_L)$  - ток утечки;  $g_L = 0,3$  мСм/см<sup>2</sup>;

$V_{Na} = 115$  мВ - натриевый потенциал;  $V_K = -12$  мВ - калиевый потенциал;

$V_L = 10$  мВ.

Параметры  $m, h, n$  - параметры аппроксимации функции  $V(t)$ .

$\alpha_m(V) = 0,1(V-25)/(1-\exp(2,5-0,1V))$ ;  $\gamma_m = \alpha_m + \beta_m$ ;  $\beta_m = 4\exp(-V/18)$ ;

$\alpha_h(V) = 0,07\exp(-V/20)$ ;  $\gamma_h = \alpha_h + \beta_h$ ;  $\beta_h = 1/(1+\exp(3-0,1V))$ ;

$\alpha_n(V) = 0,01(V-10)/(1-\exp(1-0,1V))$ ;  $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ ;  $\beta_n = 0,125\exp(-V/80)$

Система решалась стандартным методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Вычислялись значения потенциалов  $V(t)$  на заданном интервале времени (100 - 300 мс). Для функции  $V(t)$  вычислялись периоды, амплитуда, частота, количество импульсов в зависимости от параметров  $s, u$ , которые играют роль ингибитора (торможение) и активатора (возбуждение) на заданном интервале времени. Осуществлялся поиск устойчивых периодических решений (стремление значения периода к определенному значению), т.е. численными методами определялся предельный цикл.

Определялась область  $D$  устойчивых колебаний для пар  $(s, u)$  и граница области. Построена зависимость частоты нервных импульсов от проводимости синаптической мембраны. Значения  $(s, u)$  брались следующие:  $s$  - от 0 до 0,03 с шагом 0,001;  $u$  - от 0 до 1,5 с шагом 0,05, т.е. всего 30x30 пар значений. Именно среди этих значений и проявляется предельный цикл для  $V(t)$ .

### Литература.

1. Покровский А.Н. Процессы управления в нервных клетках.

Изд-во Ленинградского университета. Ленинград, 1987.

# О НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мишок С.А. (Беларусь, Гродно)

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $x, x_0 \in D(A) \subset X$ ,  $u \in \Omega \subset U$ ;  $X, U$  — действительные банаховы пространства;  $A : X \rightarrow X$  — вещественный линейный оператор, причем  $\overline{D(A)} = X$  и выполняются все условия, наложенные на него в статье [2, с. 34 - 35],  $B : U \rightarrow X$  — вещественный линейный ограниченный оператор;  $\Omega$  — непустое ограниченное множество в  $U$ , причем  $\Omega \cap \ker B \neq \emptyset$ .

Функцию  $u(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , назовем допустимым управлением, если  $u(\cdot) \in L_2^{loc}([0, \infty), U)$  и  $u(t) \in \Omega$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

Считаем, что задача (1), (2) равномерно корректна, ее решение понимается в обобщенном смысле и дается формулой [1, с. 58 - 59]:

$$x(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-\tau)Bu(\tau) d\tau.$$

Будем изучать задачи локальной и глобальной нуль-управляемости системы (1) за свободное время в смысле определения 1 из статьи [2, с. 33].

Справедливы следующие теоремы, выражающие спектральные спектральные критерии нуль-управляемости.

**Теорема 1.** Для локальной нуль-управляемости системы (1) за свободное время необходимо и достаточно, чтобы не существовало вектора  $u$  оператора  $(-A^*)$ , отвечающего вещественному (комплексному) собственному значению  $\lambda$ , опорного (ортогонального) множеству  $B\Omega = \{Bu : u \in \Omega\}$ ;

**Теорема 2.** Система (1) глобально нуль-управляема за свободное время тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) оператор  $(-A^*)$  не имеет собственных значений  $\lambda$ , где  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ;

2) для остальных собственных значений оператора  $(-A^*)$  выполняются условия теоремы 1.

## Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. Мишок С.А. // ДАН РБ. 1996, 1. С. 32 - 36.

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Миронов В.В. (г. Рязань)

Полагаем, что координаты  $x=(x_1, \dots, x_n)^T$  в каждый момент времени  $t>t_0$  полностью определяют скорости их изменения в тот же момент времени:

$$\dot{x} = dx/dt = f(x, t), \quad x_0 = (x_1(t^0), \dots, x_n(t^0)). \quad (1)$$

Функция  $f$  принадлежит классу  $C_n^{n+1}$  -  $(n+1)$  раз дифференцируемых на области  $H = \{x: \|x\| < r, r \in R^+\}$  функций и  $f(x, t) = 0$  только при  $x = 0$  на области  $H$ . Обозначим  $(n-1)$ -ю кривизну решения  $x(t)$  уравнения (1) через  $v = v(x, t)$ , а через  $[\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}]$  и  $V(x) = [\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}] * x^{(n)}$  - векторное произведение и свертку надлежащих векторов.

ТЕОРЕМА 1. Верно  $v(x, t) = \frac{V(x) \cdot [\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-2)}]}{|\dot{x}| \cdot [\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^2}$ ,  $V(x) = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ .

Интервал  $T = [t^0, +\infty)$  разобьем на подынтервалы  $T = (\cup_i T_i^+) \cup (\cup_j T_j^-) \cup (\cup_k T_k^-)$ ,

где на каждом из  $T_i^+$  кривизна  $v > 0$ , на каждом из  $T_j^-$  кривизна  $v = 0$ , на каждом из  $T_k^-$  кривизна  $v < 0$ . Каждый из интервалов  $T_i^+$  вновь разобьем на подынтервалы  $T_i^+ = (\cup_p T_{ip}^{\leq}) \cup (\cup_r T_{ir}^{>})$ , где на каждом из  $T_{ip}^{\leq}$  производная  $\dot{v} \leq 0$ , на каждом из  $T_{ir}^{>}$  производная  $\dot{v} \geq 0$ . Аналогично, каждый из интервалов  $T_k^-$  разобьем на подынтервалы  $T_k^- = (\cup_v T_{kv}^{\geq}) \cup (\cup_w T_{kw}^{<})$ , где на каждом из  $T_{kv}^{\geq}$  производная  $\dot{v} \geq 0$ , на каждом из  $T_{kw}^{<}$  производная  $\dot{v} < 0$ . Пусть  $\tau$  - какой-то интервал,  $a(\tau)$  - левый,  $b(\tau)$  - правый концы, а  $d(\tau)$  - длина интервала  $\tau$ . Основнй результат содержит следующая

ТЕОРЕМА 2. Решение  $x(t)$  системы (1) устойчиво, если

$$\{d(T_\alpha^\beta) \cdot v(x, b(T_\alpha^\beta)) : (\beta) = (\overset{+}{<}), (\overset{+}{=}), (\overset{+}{>})\}$$

является бесконечно малой последовательностью.

## ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ С УЧЕТОМ НЕМОДЕЛИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Миронов В.В. (г. Рязань)

Движение объекта на отрезке времени  $[0, T]$  описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ , - заданные матрицы,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  - неизвестные возмущения, ограниченные по норме заданной функцией:

$$\|u(t)\| \leq \gamma(t). \quad (1)$$

В теории гарантирующего оценивания возмущения, удовлетворяющие условию (1), принято называть *немоделируемыми*.

Уравнение измерений имеет вид  $z(t) = H^T(t)x(t) + \rho(t)$ ,  $t \in [0, T_1]$ ,  $T_1 \leq T$ , где  $H(t) \in \mathbb{R}^m$  - заданная вектор-функция, а ошибки измерений ограничены по модулю заданной функцией  $|\rho(t)| \leq \sigma(t)$ .

Ставится задача об оценке параметра  $l = a^T q$ ,  $q = x(0)$ , где  $a \in \mathbb{R}^m$  - заданный вектор. Оценивание производится несмещенным линейным филь-

тром  $\Phi(t)$ :  $\hat{l} = \int_0^{T_1} \Phi(t)z(t)dt$ . Фильтр  $\Phi(t)$  и гарантированная ошибка оценки

определяется из решения минимаксной задачи:

$$\min_{\Phi(t)} \max_{\rho, u} |\hat{l} - l|. \quad (2)$$

Обычно задача (2) решается средствами континуального линейного программирования. Известно, что в таких решениях возрастание размерности задачи приводит к сложным проблемам (зацикливание, вырожденность).

В работе делается попытка к анализу и последующему устранению указанных недостатков.

# ПРОБЛЕМЫ ТЕХНОЛОГИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Миронов В.В. (г. Рязань)

Рассматривая студента высшей школы как единство профессионала и личности, мы впадаем в неустранимое диалектическое противоречие в вопросах технологий обучения и воспитания.

1. На стадии подготовки профессионала можно говорить о технологии обучения как системе методов обучения (конкретные методики) или как о науке об общих закономерностях обучения. В *Радиотехнической академии г. Рязани* - это система стандартных воздействий на студента: лекции, семинары, типовые расчеты, лабораторные работы и пр. Можно доказать строго следующие тезисы.

ТЕЗИС 1. Всякая технология обучения математике ориентирована на усреднение, массовое тиражирование. ТЕЗИС 2. Не существует технологий «производства» выдающихся специалистов-математиков.

Спаси положение здесь может разве что одна импровизация.

2. Совершенно неприемлем технологический подход при воспитании личности математика. Технологический подход к воспитанию основан на идеях Локка. В советское время он получил развитие в работах Макаренко и Сухомлинского. Реалиям современной жизни отвечают воззрения Руссо, Вольтера, Л. Толстого. Центральное звено их систем - уникальность личности и, как следствие, неповторимость воздействий на нее. ТЕЗИС 3. Не существует эффективных технологий воспитания личности.

3. Проблемы нынешней высшей школы ставят извечные русские вопросы: «Кто виноват?» и «Что делать?». Ответ на первый вопрос зависит от мировоззрения отвечающего и в то же время «мат. ожидание» ответов (= «общественное мнение» - не безынтересно). Ответ на второй вопрос дал еще Маркс: ... изменить !

## УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТЬЮ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Мионов В.В., Митрохин Ю.С. (г. Рязань)

Развивается новый подход к изучению скользящего режима на основе алгоритмической процедуры построения функции Ляпунова с использованием свойств функции кривизны интегральной кривой. Как следствие, строится такое управление системой, удовлетворительно описываемой дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с переменной структурой, которое позволяет сохранить ее устойчивость.

Пусть динамическая система описывается уравнением

$$x^{(n)} + (a_{0n} + a_m \bar{u}(\psi))x^{(n-1)} + a_{n-1,n} \bar{u}(\psi)x^{(n-2)} + \dots + a_{2,n} \bar{u}(\psi)\dot{x} + a_{1n}x = 0, \quad (1)$$

где  $x=x(t)$  - функция, зависящая от времени  $t>0$ ;  $a_{ij}$  - положительные действительные числа; аргумент  $\psi$  принимает значение  $E_\psi = \{-1, +1\}$ ; для функций управления  $u(-1)=0$ ,  $\bar{u}(-1)=1$ ,  $u(1)=1$ ,  $\bar{u}(1)=0$ .

Нетрудно видеть, что нулевое состояние покоя уравнения (1) не является асимптотически устойчивым в целом как при  $\psi = 1$ , так и при  $\psi = -1$ .

**ТЕОРЕМА.** Существует управление  $u^*(\psi(x))$ , обеспечивающее асимптотическую устойчивость в целом состояния покоя уравнения (1).

Отметим, что само оптимальное управление  $u^*(\psi(x))$  строится конструктивно.

В работе рассматривается ситуация по построению такого управления  $u(\psi(x))$ , которое обеспечивает устойчивость динамической системы, описываемой уравнением третьего порядка с переменной структурой, когда аргумент управления  $\psi$  принимает конечное или счетное число состояний  $E_\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots\}$  и при каждом  $\psi_i$  состояние покоя рассматриваемого уравнения в целом неустойчиво.



## ОБ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИТУАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ С ПРЕДЫСТОРИЕЙ

Миронов В.В., Ситчихин А.Н., Юсупова Н.И. (Уфа)

В докладе рассматриваются вопросы развития иерархических ситуационных моделей — класса дискретно-событийных моделей, предназначенного для использования в качестве “встроенной” базы знаний в системах ситуационного управления.

При проектировании ситуационных моделей разработчик нередко сталкивается с необходимостью учета предыстории смены ситуаций. Попытки решить эту задачу в рамках традиционного подхода, при котором в каждый момент времени сохраняется информация лишь о текущих ситуациях модели, приводят к неоправданному усложнению внешнего представления модели.

Для разрешения противоречия между простотой внешнего представления и возможностью формулировать предикаты, учитывающие предысторию смены ситуаций, во внутреннем представлении ситуационной модели предусмотрено сохранение информации о ситуациях, в которых находилась система в прошлом. Для каждого  $T$ -погружения во внутреннем представлении модели в процессе интерпретации строится массив  $T$ -состояний данной субмодели, хронологическая упорядоченность которого поддерживается с помощью предусмотренных  $T$ -меток.

Предложены средства записи  $T$ -предикатов ситуационной модели. Подход реляционного исчисления, состоящий в использовании связанных переменных кванторов, принимающих значения кортежей отношений, применен к  $T$ -предикатам, где использованы связанные переменные, принимающие значения  $T$ -состояний и их атрибутов. Это позволяет формулировать сложные условия, проверяемые  $T$ -предикатами.

Применение разработанного аппарата для описания процесса назначения и корректировки даты проведения мероприятия в организационной системе продемонстрировало способность достаточно просто преодолевать вышеупомянутые трудности путем использования  $T$ -предикатов и информации о  $T$ -состояниях внутреннего представления, не усложняя внешнее представление ситуационной модели.

## Литература

- [1] Иерархические модели процессов управления / Б. Г. Ильясов, В. В. Миронов, Н. И. Юсупова. Уфа, 1994.
- [2] Миронов В. В., Ситчихин А. Н. Иерархические ситуационные модели с предысторией // Управление в сложных системах. Уфа: УГАТУ, 1999. С. 115–138.

## О ПРОБЛЕМЕ УСРЕДНЕНИЯ СВОЙСТВ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Митюшов Е.А., Одишова Н.Ю., Берестова С.А. (г.Екатеринбург)

Одной из современных проблем физики твердого тела является количественное описание кристаллографической текстуры поликристаллических материалов и получение информации об анизотропии их физико-механических свойств по свойствам соответствующих кристаллитов и параметрам пространственного распределения. Традиционные методы моделирования структуры и расчета свойств основаны на весьма грубых допущениях о характере распределения напряжений и деформаций в элементах микроструктуры и сводятся к статистическому усреднению соответствующих тензорных величин.

В работе используется инвариантное представление упругих свойств материала как линейного симметричного преобразования шестимерного евклидова пространства тензоров второго ранга (напряжений-деформаций) самого на себя. Собственные элементы данного преобразования (собственные упругие состояния) образуют ортогональный базис, в котором векторы, задающие напряженные и деформационные состояния являются соосными, и обобщенный закон Гука записывается в виде скалярных зависимостей прямой пропорциональности. Установлены алгоритмы аналитического вычисления эффективных упругих характеристик. Единственное точное решение проблемы усреднения упругих свойств текстурированных поликристаллов [1] принадлежит классу решений, получаемых по данному методу.

1. Берестова С.А., Митюшов Е.А. Об одном точном решении проблемы определения эффективных модулей упругости микронеоднородных сред // Прикладная математика и механика. Т.63, вып. 3, 1999. С. 524- 527.

Митяков С.В. (Воронеж)  
 ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ  
 МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассмотрим систему уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_x & -\omega & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \omega & \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_x & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_x & g & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^2}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

где  $U(x, t) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}^T$  - искомая вектор-функция  $(x, t)$ ,  $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in R^3, t > 0$ . "Т" - знак транспонирования.

Для системы (1) ставится начальная задача вида

$$u_j|_{t=+0} = u_j^0(x), \quad j = \overline{1, 4}, \quad x \in R^3. \quad (2)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $u_j^0 \in H_{\sigma+6}, j = \overline{1, 4}$ ,  $T$  - любое положительное число и выполняется условие А. Тогда при  $0 < t < T$  существует решение задачи (1)-(2), задаваемое формулой (6), для которого справедливы оценки:

$$\sup_{0 < t < T} \|u_k(-, t)\|_{\sigma} \leq \sum_{1 \leq j \leq 4} C_j^k \|u_j^0(-)\|_{\sigma+6},$$

$$\|u_k(-, t) - u_k^0(-)\|_{\sigma} \leq t \tilde{C}_k^k(t) \|u_k^0(-)\|_{\sigma+6} + t \sum_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq 4}} \tilde{C}_j^k(t) \|u_j^0(-)\|_{\sigma+2}, \quad \forall t,$$

где  $C_j^k > 0, k = \overline{1, 5}, j = \overline{1, 4}$  есть константы, зависящие от  $T$ ,  $\tilde{C}_j^k(t), k, j = \overline{1, 4}$  - многочлены от  $t$  степени не выше первой с неотрицательными коэффициентами. Причем компоненты решения  $u_k(x, t), k = \overline{1, 4}$  определяются в указанном классе функций (17) единственным образом по начальным функциям  $u_k^0(x), k = \overline{1, 4}$ .

#### Литература

[1] Глушко А.В., Щербатых В.Е. Об одной начально-краевой задаче динамики стратифицированной жидкости // Докл. АН РФ.-1994.-Т.338, №5.-С.607-609.

## О СРЕДСТВАХ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Михайлов П.Н. (Стерлитамак)

Из всех этапов решения задач – поиск решения является основным, и, поэтому разработка эффективных способов обучения поиску решения задач является одной из главных задач методики.

В методической литературе, в основном, предлагается либо обучать применению приемов полезных при решении задач некоторого типа или класса, либо общим подходам к решению задач, в частности, применению эвристик, подобных известным эвристикам Д.Пойа. При этом основное внимание уделяется ответу на вопрос "Что нужно делать, чтобы найти решение задачи?", оставляя без внимания не менее существенный вопрос "С помощью чего?" или "С чем искать решение?".

Для того чтобы решить математическую задачу достаточно свести незнакомую (или нестандартную) задачу к знакомой. Поэтому при обучении решению задач одним из главных объектов изучения должны стать способы получения из задачи новых задач. Методика обучения решению задач должна, на наш взгляд, должна включать следующие разделы: Сущность задачи. Понятие решение задачи. Этапы решения задачи и их содержание. Стратегия решения задач. Способы получения из задачи новых задач. Сами способы, как правило, при поиске решений участвуют не по отдельности. Но применение какого-либо из них бывает определяющим основное направление решения. Поэтому для закрепления навыков их использования возникает необходимость, и мы это делаем, в специальном подборе задач, в которых наиболее четко выделяется один из способов. После того, как навыки по применению отдельных способов отработаны, можно приступить к применению различных комбинаций их. Программа практикума по решению задач составляется с учетом вышесказанного.

Для получения из задачи новой задачи необходимо всеми доступными способами расширять информацию об объектах, входящих в задачу. Поэтому способы получения из задачи новых задач соответствуют способам расширения информации.

Следует отметить, что этапы решения задач, стратегия решения и способы получения из задач новых являются для решающего ориентирами умственной деятельности соответственно первого, второго и третьего уровней. Благодаря чему процесс поиска решения задач во многих случаях, в конечном счете, сводится к перебору способов преобразования задачи.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ УСТОЕВ ДВУХ ПРОЛЁТНОГО МОСТА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ОС

Моисеев И.В., Макаров Е.А.  
(г. Владимир)

В работе рассматривается обтекание опор моста вязкой несжимаемой жидкостью.

В рамках трёхмерных уравнений Навье-Стокса ставится смешанная задача в липшицевой области  $\Omega$ .

Для решения поставленной задачи используется метод Петрова-Галёркина, где для учёта граничных условий применяется метод РО-функций Рвачёва-Обгадзе, а в качестве функций разложения используются регулярные источники Обгадзе-Габричидзе.

В работе рассчитываются поля скоростей и давлений при различных числах РЕ-Рейнольдса. Изучается изменение нагрузок на опоры моста при различных конфигурациях и различных уклонах русла.

**Моделирование критической нагрузки цилиндрической  
оболочки переменной толщины при  
комбинированном нагружении**

А.А Мочалин, П.А Мочалин (Саратов)

Рассматривается моделирование критической нагрузки цилиндрической оболочки переменной вдоль образующей толщины, нагруженной равномерным давлением  $q$  и сжимающими усилиями интенсивности  $\sigma$  на базе полубезмоментной теории оболочек В.З Власова при свободном опирании краев оболочки.

Исследуются два случая для оболочки с толщиной, изменяющейся по закону  $h = h_0 (1 + \alpha \xi)^{\alpha}$ ,  $\alpha$  – малый параметр.

1. Рассматривается сравнительно небольшой диапазон изменения осевой сжимающей нагрузки, т. е. предполагается, что потеря устойчивости происходит в основном за счет нагружения внешним давлением и рассматриваются формы потери устойчивости, отвечающие превалирующему влиянию внешнего давления, когда волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном направлении.
2. Рассматривается сравнительно небольшой диапазон изменения внешнего давления, т.е. предполагается, что потеря устойчивости происходит в основном за счет нагружения осевыми сжимающими усилиями, когда волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном направлении.

В обоих случаях решение уравнения проведено методом малого параметра и получены формулы, удобные для практического применения.

**Библиографический список**

1. Мочалин А.А. Устойчивость полубезмоментной цилиндрической оболочки переменной толщины. Известия вузов "Машиностроение", № 11, 1975.
2. Мочалин А.А. Устойчивость полубезмоментной цилиндрической оболочки переменной толщины при равномерном сжатии. Известия вузов "Машиностроение", № 7 - 9, 1992.

**О ЗАКОРЕГУЛЯРНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА  
ГРАФЕ**

Мустафокулов Р. (Душанбе)

Пусть  $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$ ,  $\gamma_i = (\xi_i, \xi_{i-1})$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и  $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i$ . Рассмотрим краевую задачу

$$(p(x)y'')'' = f(x) \quad (x \in \Gamma_0), \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(\xi_i - 0) = y(\xi_i + 0), \quad y''(\xi_i - 0) = y''(\xi_i + 0) \quad (i = \overline{1, m-1}), \\ ((py'')' - qy')(\xi_i - 0) - ((py'')' - qy')(\xi_i + 0) - \kappa(\xi_i)y(\xi_i) = 0 \quad (i = \overline{1, m-1}), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha(a)((py'')' - qy')(a+0) + y(a) = 0, \quad \beta(a)y''(a) - \delta(a)y'(a+0) = 0, \\ \alpha(b)((py'')' - qy')(b-0) - y(b) = 0, \quad \beta(b)y''(b) + \delta(b)y'(b-0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

возникающую, например, при описании малых упругих колебаний цепочки из  $m$  шарнирно сочлененных стержней.

В настоящем докладе обсуждается вопрос о знакорегулярности задачи (1)–(3). Напомним, что задача называется знакорегулярной, если для любой  $f(\cdot)$  и соответствующего решения  $x(\cdot)$  выполнено  $S(x) \leq S(f)$ , где  $S(u)$  – число перемен знака функции  $u(\cdot)$  на  $[a, b]$ . Свойство знакорегулярности задачи (1) – (3) является важным для наличия у соответствующей спектральной задачи спектра с осцилляционной структурой (все собственные значения вещественные, положительные и простые,  $k$ -я собственная функция имеет  $k$  нулей внутри  $[a, b]$ , нули  $k$ -ой и  $(k+1)$ -ой собственных функций перемежаются и т.д.).

**Теорема.** Пусть  $p(x) > 0$  при  $x \in \Gamma_0$  и  $q(\xi_i) + \kappa(\xi_i) > 0$  при всех  $i = \overline{1, m-1}$ . Пусть, далее, коэффициенты  $\alpha(\cdot)$ ,  $\beta(\cdot)$ ,  $\delta(\cdot)$  в краевых условиях (3) неотрицательны, причем  $\beta(\cdot) + \delta(\cdot) > 0$ . Тогда задача (1) – (3) является невырожденной и знакорегулярной.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ  
В ГЕНЕРАТОРЕ НА КАСКАДНО-СОЕДИНЕННЫХ  
РС-СТРУКТУРАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Непринцев В.И., Куликов А.А., Смольянов В.А. (Воронеж)

В работе исследуются автоколебания в генераторе на двух каскадно-соединенных РС-структурах с распределенными параметрами в цепи обратной связи усилителя на транзисторном каскаде [1]. Математическая модель рассматриваемого генератора может быть записана в виде следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}
 & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad s^2 v_t(y, t) = v_{yy}(y, t), \\
 & \quad \quad \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0, \\
 (*) \quad & u_x(1, t) = 0, \quad v_y(1, t) = 0, \\
 & u(1, t) - \alpha u_x(0, t) = v(0, t) - \beta v_y(0, t), \\
 & u(0, t) - \alpha u_x(0, t) = f(v(1, t) - \beta v_y(0, t)), \\
 & u(x, 0) = u_0(x), \quad v(y, 0) = v_0(y),
 \end{aligned}$$

где  $x, y$  — безразмерные пространственные координаты;  $t$  — безразмерное время;  $u(x, t)$  и  $v(y, t)$  — напряжения в РС-структурах;  $u_0$  и  $v_0$  — заданные функции,  $f$  — функция, аппроксимирующая нелинейную динамическую характеристику усилителя;  $s > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > 0$  — заданные постоянные. Предполагается, что  $f(z) = -k_0 z + k_1 z^2 + k_2 z^3$ , где  $k_0, k_1, k_2$  — заданные коэффициенты, причем  $k_0, k_2 > 0$ . Задача (\*) аппроксимировалась с помощью двуслойных неявных разностных схем второго порядка точности по временной переменной и второго и четвертого порядка точности по пространственным переменным. Для реализации используемых численных методов были разработаны комплексы программ, функционирующие под управлением операционных систем Windows 95 и OpenVMS. Проведенные численные эксперименты подтвердили существование устойчивого одночастотного режима колебаний в случае симметричной нелинейной характеристики усилителя (при  $k_1 = 0$ ) и двухчастотного режима при определенных значениях  $k_1 \neq 0$ .

Литература

1. Непринцев В.И., Корыстин Б.Л. Двухчастотные колебания в автогенераторе с распределенными параметрами // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 3, с. 446-448.



Нестеренко Р.В. (Воронеж)  
**О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ У  
 ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
 УРАВНЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

В работе изучается двумерная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x)$$

в конусе  $K \subset R^2$ , где  $\tau_x f(t, x)$  – проекция вектора  $f(t, x)$  на  $T(K, x)$  — касательный конус к  $K$  в точке  $x$  ([1], с. 109). Доказана

**Теорема.** Пусть  $f : R \times K \rightarrow R^2$  – непрерывная локально липшицева по  $x$  и  $\theta$ -периодическая по  $t$  функция. Пусть также функция  $f$  асимптотически линейна в конусе  $K$ , т.е.

$$f(t, x) = Ax + r(t, x),$$

где  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (R_\varepsilon > 0) \forall (x : \|x\| \geq R_\varepsilon) [\|r(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\|]$ . Пусть нелинейный оператор  $Bx = \tau_x Ax$  не имеет в  $K$  собственных векторов с неотрицательными собственными значениями. Тогда рассматриваемая система имеет хотя бы одно  $\theta$ -периодическое решение.

Доказательство основано на теории дифференциальных уравнений с максимальными монотонными операторами [2] и принципе неподвижной точки Боля–Брауэра. В условиях теоремы устанавливается наличие выпуклого замкнутого ограниченного непустого инвариантного множества у оператора сдвига по траекториям данной системы ([3], с. 11).

[1] Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

[2] Brezis H. Operaterus maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam-London-New York: Noth-Holland, 1973.

[3] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

## **РОЛЬ ПОВТОРЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.**

Новикова О.Н. (Лицей № 5, г. Воронеж)

В процессе учебных занятий в школе ученикам приходится усваивать множество разнообразных сведений, навыков и умений по различным учебным предметам. Без систематически проводимого повторения и без соответствующего закрепления этих сведений не может быть обеспечена прочность усвоения изучаемой в школе учебной программы. Вот почему включение в систему учебных занятий в школе элементов повторения и закрепления является совершенно необходимым. Очень важно правильно организовать повторение, то есть возвращение к уже пройденному материалу, преследуя две цели, а именно: окончательную доработку материала, его, так сказать отшлифовку, и вместе с тем его закрепление в памяти учащихся.

Выделю виды повторения, систематически используемые в своей работе.

1. Повторение, проводимое после изучения отдельных тем в различное время.

Данный вид повторения объединяется с закреплением и направлен на обобщение изученного, выделение главного.

2. Повторение, проводимое в течение всего учебного года. Отмечу две основные функции данного вида повторения: во-первых, предупредить забывание важного, с той или иной точки зрения материала; во-вторых, обеспечить потребности изучения нового материала.

Стоит отметить, что наиболее удачной формой организации такого повторения является система устных упражнений, которые выполняются фронтально со всем классом.

3. Повторение, проводимое в начале учебного года.

Необходимость организации обобщающего повторения в начале учебного года имеет ряд причин.

Во-первых, неизбежен произвольный процесс забывания, который приводит к утрате четкости, уменьшению объема знаний.

Во-вторых, возвращаясь к ранее изученному, обобщающее повторение в начале учебного года освежит, дополнит ранее полученные знания новыми сведениями, создаст условия для более прочного закрепления и углубления всей системы знаний.

В-третьих, повторение позволит скоординировать свои действия по ликвидации пробелов в знаниях учащихся.

#### 4. Повторение проводимое в конце учебного года.

Объем информации, которую перерабатывает ученик в школе, растет. Увеличивается нагрузка на память, а поскольку память и усвоение взаимосвязаны, то усвоение материала для некоторой части учащихся затрудняется. Поэтому обобщение и систематизация знаний является эффективным средством углубления, упорядочивания, понимания и запоминания знаний. Вообще организация заключительного повторения строится с учетом уровня математической подготовки учащихся, с учетом особенности класса.

Остановилось на особенности заключительного повторения планиметрии, которое строится на основе систематизации свойств основных геометрических фигур: треугольника, четырехугольника, многоугольника, окружности, круг.

Повторение проводится в три этапа:

I этап. Материал группируется вокруг треугольника. Повторение теорем, свойств, признаков различных треугольников, позволяет систематизировать умение логического поиска доказательных рассуждений.

II этап. Материал группируется вокруг многоугольников, включая и четырехугольники. Особенность данного этапа заключается в том, что влечет за собой неизбежность повторения еще раз различных свойств треугольников.

III этап. Повторение свойств окружности (круга) и ее элементов. На данном этапе подытоживается все богатство методов и приемов решения задач, демонстрируется эффективность совместного использования всех методов.

На этом этапе учитель вы ступает в роли консультанта и проводит индивидуальную работу с учениками. Здесь более эффективно проводить уроки одной задачи. Накопленные знания позволяют решать задачу разными способами. Это активизирует творческую, исследовательскую деятельность учеников.

Таким образом, на всех этапах организации процесса обучения математике, повторение играет важную роль. Никакой творческий опыт не может осуществляться без опоры на прежний опыт. Повторение учебного материала является одним из путей развития творческой активности учащихся. Систематическое повторение содействует значительному улучшению качества математической подготовки и является действенным средством борьбы с формализмом в знаниях учащихся.

## Мотивационная сфера учебной деятельности

Носач А.К., Пуханова Л.С. (Красноармейский филиал ДонГТУ)

*Голова ученика не сосуд, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь (Плутарх).*

Существующая организация учебного процесса высшей школы на базе пассивных информационных принципов обучения рассчитана на массовую подготовку “средних” специалистов. Поэтому возникает необходимость настойчивого поиска и применения в учебном процессе различных средств, форм и способов мотивации обучения. Учебный процесс должен быть организован так, чтобы студент без принуждения стремился к систематическому, активному, самостоятельному пополнению знаний. При этом в процессе обучения студент должен испытать положительные эмоции. Мотивационную сферу учения можно охарактеризовать следующими основными компонентами:

- характером самой учебной деятельности, сформированностью её компонентов;
- смыслом учения студентов;
- характером мотивов учения;
- особенностями эмоций, сопровождающих процесс учения.

Соотношение этих компонентов проявляется в виде *интересов* студентов. Поэтому интерес выступает с одной стороны как важная характеристика личности, а с другой – как интегральное эмоционально-когнитивное отношение к учёбе. Очень важно сделать учебный предмет интересным, в частности высшую математику, потому что это позволяет сделать его действенным, сформировать мотивы и цели учения [2]. Процесс формирования интересов происходит в процессе деятельности, структура которой (задачи, содержание, способы, мотивы) образует объективную основу развития познавательных интересов [3]. Исключительную важность интереса к деятельности как вида мотивации в развитии навыков знаний и интеллекта подчёркивает К.Изард [1]. “Он необходим для творчества”. К.Изард поясняет, что эмоции являются первичными и фундаментальными компонентами мотивации, существующими в сознании до “входных сигналов”, “информации” и “образной информации”. “Интерес-возбуждение” он характеризует как чувство *захваченности, любопытства*; индивид, испытывающий эту эмоцию, *желает исследовать, расширить опыт путём включения новой информации*. Эти положения – часть рассматриваемой им эмоционально-когнитивной модели, которая небезынтересна для современной дидактики.

Литература:

1. Изард К. Эмоции человека.-М., 1980.
2. ИФонтъев А. Деятельность. Сознание. Личность.-М., 1975.
3. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике.-М., 1971.

**О НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА  
ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ**  
Нурсултанов Е.Д. (Караганда)

Пусть  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  — вектора, такие что если  $0 < q_j < \infty$ , то  $0 < p_j < \infty$ , если же  $q_j = \infty$ , то  $0 < p_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — измеримая функция, заданная в  $[0, 2\pi]^n$ . Через  $f^*(t) = f^{*p_1 \dots p_n}(t_1, \dots, t_n)$  обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию  $f^*(t)$  будем называть невозрастающей перестановкой функции  $f$ . Пространство  $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0, 2\pi]^n$  определяется как множество функций для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0, 2\pi]^n} = \left( \int_0^{2\pi} \dots \left( \int_0^{2\pi} \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} f^*(t) \right|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

здесь выражение  $\left( \int_0^\infty (F(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$  при  $q = \infty$  понимается, как  $\sup_{t>0} F(t)$ ,  $f^* = f^{*p_1 \dots p_n}(t_1, \dots, t_n)$ .

**Теорема 1** Пусть  $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,

$$M_p = \begin{cases} \text{множество всех компактов из } Z & \text{при } p < 2 \\ \text{множество всех отрезков из } Z & \text{при } p = 2 \end{cases},$$

$M_{\mathbf{p}} = M_{p_1} \times \dots \times M_{p_n}$ . Если  $f \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0, 2\pi]^n$  и  $f \sim \sum_{k \in Z^n} a_k e^{ikx}$ , то верно неравенство

$$\left( \sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p_n-1} \left( \sum_{k_{n-1}=1}^{\infty} k_{n-1}^{p_{n-1}-1} \dots \left( \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-1} (\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(f, M_{\mathbf{p}}))^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}},$$

где

$$\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(f, M_{\mathbf{p}}) = \sup_{\substack{|e_j| \leq k_j \\ e_j \in M_{p_j}}} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{k \in e} a_k \right|.$$

## Об одном подходе к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

В.Б. Огарков (г. Воронеж)

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a_0 \frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_2 f = F(t) \quad (1)$$

Имеют место начальные условия:

$$f(0) = b_1; \quad \frac{df}{dt}(t=0) = b_2 \quad (2)$$

Решение уравнения (1) ищется в следующем виде:

$$f(t) = c_1(t)f_1(t) + c_2(t)f_2(t) \quad (3)$$

$$c_1'(t)f_1(t) + c_2'(t)f_2(t) = 0 \quad (4)$$

$$c_1'(t)f_1'(t) + c_2'(t)f_2'(t) = \frac{F(t)}{a_0} \quad (5)$$

Отметим, что главный определитель системы (4)-(5) может быть теоретически равен нулю.

Нами рассмотрено уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a \frac{df}{dt} + bf(t) = F(t) \quad (6)$$

Предыдущее уравнение приводится к виду:

$$\left( c + \frac{d}{dt} \right) \left( c + \frac{d}{dt} \right) f + df = F(t) \quad (7)$$

$$c = \frac{a}{2}; \quad d = b - c^2 \quad (8)$$

Здесь возможны 2 случая:  $d > 0$  и  $d < 0$ .

Введем в рассмотрение комплексную функцию в случае  $d > 0$ :

$$\Omega = F_2 - iF_1 = df - i \left[ cf + \frac{df}{dt} \right] \quad (9)$$

Уравнение (7) примет вид:

$$c\Omega_2 + \frac{d\Omega_2}{dt} - i\sqrt{d}\Omega_2 = -iF(t) \quad (10)$$

Это уравнение первого порядка, которое решается в квадратурах. Константа интегрирования ввиду соотношения (9) определяются отдельно, и нет необходимости решать систему алгебраических уравнений, что ускоряет расчет.

## Точное решение задачи о центрально-симметричном деформировании упруго - пластического шара.

В.Б. Огарков (г. Воронеж)

Рассматривается центрально-симметричное деформирование упруго - пластического шара. Статические и геометрические уравнения имеют вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon = \frac{u}{r} \quad (3)$$

Реологические соотношения выбираются в форме теории упруго - пластических деформаций Генки:

$$\sigma = k\theta, \quad \sigma = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\theta}{3}, \quad \theta = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta \quad (4)$$

$$S_r = \frac{l_r}{\psi}; \quad S_\theta = \frac{l_\theta}{\psi} \quad (5)$$

В теории упрочнения имеют место следующие соотношения:

$$\psi = 2\frac{\tau_1}{r}; \quad \tau_1 = \bar{\beta}\gamma_1^p \quad (6)$$

Для шара впервые получены соотношения:

$$S_r = \frac{l_r}{2\bar{\beta} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} p \right]^{p-1}}; \quad S_\theta = \frac{l_\theta}{2\bar{\beta} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} p \right]^{p-1}} \quad (7)$$

$$p = l_r - l_\theta = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \quad (8)$$

Для определения функции  $p$  выведено трансцендентное уравнение в явной форме, не содержащее производной от функций:

$$\frac{1}{2} \left[ 3kp - \frac{3A}{r^3} \right] = \frac{p}{2\bar{\beta} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} p \right]^{p-1}} \quad (9)$$

Здесь константа  $A$  определяется из граничных условий с учетом формулы (8).

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕНТИЛЯЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Г.Л. Окунева, В.Г. Шантала, В.В. Шантала  
(БелГТАСМ, Г.Белгород)

В рамках традиционного балансового подхода влияние всех факторов на эффективность систем воздушного отопления и вентиляции не может быть учтено. Это возможно лишь на основе более точных полевых моделей тепло-воздухообмена и распределения концентраций вредных примесей во внутрицеховом пространстве. В основу таких моделей могут быть положены уравнения Навье-Стокса в приближении Буссиньеса-Обербека, теплопереноса и конвективной диффузии дисперсных и газообразных примесей [1, 2]:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \nabla) \bar{U} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu_z \Delta \bar{U} - \beta T' \bar{g},$$

$$\operatorname{div} \bar{U} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{U} \nabla T = \frac{\lambda t}{\rho_0 C_p} \Delta T + \frac{G_z}{\rho_0 C_p},$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial t} + \nabla (C_d (\bar{U} + \bar{V}_s) - D_{tp} \nabla C_d) = G_d,$$

$$\frac{\partial C_g}{\partial t} + \nabla (C_g \bar{U} - D_{tp} \nabla C_g) = G_g.$$

Здесь  $\bar{U}, \bar{V}_s$  – скорости воздуха и осаждения частиц пыли;  $T, T'$  – температура воздуха и её отклонение от среднего значения;  $C_p, \beta$  – изобарическая теплоемкость и коэффициент сжимаемости воздуха;  $C_d, C_g$  – концентрация пыли и вредных газов;  $D_{tp}, D_{tg}$  – коэффициенты турбулентной диффузии частиц и газообразных примесей;  $G_z, G_d, G_g$  – плотности интенсивности источников выделения теплоты, пыли и вредных газов;  $\rho_0$  – плотность воздуха при усредненной температуре  $T_0$ , определенный уравнениями теплового и материального баланса.

После перехода к переменным «вихрь скорости – функция тока» и обезразмеривания система основных уравнений для стационарного решения дополняется обезразмерными граничными условиями для функции тока  $F$ , завихренности  $Z$ , температуры и концентрации примесей на непроницаемых поверхностях и в проточных и вытяжных проемах.

Сеточное решение системы для плоской расчетной области может быть найдено методом релаксации [3,4]. Многовариантные численные расчеты позволяют выбрать оптимальный вариант системы вентиляции.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ.

Олейников В. Е., Поляков Н. Н. (г. Липецк)

В современной микроэлектронике широко используются полупроводниковые материалы, обладающие анизотропией и неоднородностью электрофизических свойств. Для конструирования приборов на базе анизотропных и неоднородных структур является важным знание макроскопических моделей распределения потенциала и особенностей протекания электрического тока в данных средах. Для решения этой проблемы в нашей работе построены соответствующие математические модели. Теоретические расчеты сведены к краевым задачам математической физики.

В данной работе решён ряд задач о распределении потенциала и плотности тока в анизотропных и неоднородных полупроводниках при исследованиях их электропроводимости и коэффициента Холла. Решение данных задач осуществлялось с помощью универсального метода Фурье. На основании данных решений с помощью ЭВМ построены наглядные модели распределения потенциала и трубок тока в анизотропных и неоднородных полупроводниках, значительно упростившие физико-математический анализ решений.

На основе данных моделей в анизотропных полупроводниках установлен эффект концентрирования электрического тока вдоль определенных направлений. Анализ решения для неоднородных по глубине структур позволял установить закон усреднения коэффициента электропроводимости и коэффициента Холла

Решение данных краевых задач позволило предложить и разработать ряд методик измерения компонент тензора электропроводимости и коэффициента Холла полупроводников.

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО  
ТИПА С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ БЕЗ УСЛОВИЯ  
ЛАНДЕСМАНА-ЛАЗЕРА**

Павленко В.Н., Чиж Е.А. (Челябинск)

Рассматривается задача Дирихле

$$-\Delta u - \lambda_1 u + g(x, u) = h, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , где  $\lambda_1$  — наименьшее собственное значение оператора  $-\Delta$  с граничным условием (2), функция  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  суперпозиционно измерима и для почти всех  $x \in \Omega$  имеет разрывы только первого рода,

$$g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)],$$

$$g_-(x, u) = \underline{\lim}_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta), \quad g_+(x, u) = \overline{\lim}_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)$$

и  $g(x, u) \cdot u \leq 0$ . Функция  $h \in L^p(\Omega)$  ( $p > n$ ) и  $\int_{\Omega} h \cdot \varphi dx = 0$ ,  $\varphi$  — положительная собственная функция оператора  $-\Delta$ , соответствующая  $\lambda_1$ . Предполагается, что для почти всех  $x \in \Omega$   $|g(x, u)| \leq a(x)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , где  $a \in L^p(\Omega)$ .

Аппроксимирующая задача имеет вид

$$\begin{cases} -\Delta u - (\lambda_1 + \delta_n)u + g(x, u) = h_n, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где  $\|h_n - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon_n$ ,  $\delta_n = \sqrt{\varepsilon_n}$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow +0$ .

Обобщенным решением задачи (1)–(2) будем называть функцию  $u \in W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ , удовлетворяющую для почти всех  $x \in \Omega$  включению

$$\Delta u + \lambda_1 u + h \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

**Теорема 1.** Если  $\delta_n < \lambda_2 - \lambda_1$  ( $\lambda_2$  — второе собственное значение  $-\Delta$ ), то аппроксимирующая задача имеет по крайней мере одно обобщенное решение  $u_n$ , причем из последовательности  $(u_n)$  можно выделить сходящуюся в  $C^1(\bar{\Omega})$  подпоследовательность к некоторому обобщенному решению задачи (1)–(2). Если решение последней единственно, то  $(u_n)$  сходится к этому решению в  $C^1(\bar{\Omega})$ .

Работата поддържана грантом РФФИ № 97-01-00444.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

Павлов С.П., Перегудов А.Б. (г. Саратов)

Рассматривается задача максимизации геометрической крутильной жесткости стержня произвольного сечения с отверстием. Граница формы отверстия является переменной управления [1].

Обозначим  $\Gamma$  и  $\Gamma_s$  границы открытых множеств  $D$  и  $D_s$  соответственно,  $D_s \subset D \subset R^2$  и  $D_s^0 = D \setminus \bar{D}_s$ . Пусть  $F$  – набор  $\Gamma_s$ , который удовлетворяет следующим условиям:

а)  $\Gamma_s$  – неисчезающая, простая замкнутая кривая и имеет конечную длину;

б)  $\Gamma_s$  – может быть представлена в виде

$$\Gamma_s(t) = \begin{pmatrix} x_1^s(t) \\ x_2^s(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad \Gamma_s(a) = \Gamma_s(b);$$

в)  $\Gamma_s(t) \in C^r[a, b]$  и существует постоянная  $M > 0$ , такая, что  $\|\Gamma_s(t)\|_{C^r[a, b]} \leq M$  и  $(x_i^s(a))' = (x_i^s(b))'$ ,  $(x_i^s(a))'' = (x_i^s(b))''$ ,  $i = 1, 2$ ;

г) существует постоянная  $k > 0$ , такая что для любого  $\Gamma_s \in F$ ,

$$\inf_{\bar{x} \in \Gamma_s, \bar{y} \in \Gamma} \|\bar{x} - \bar{y}\|_{R^2} \geq k.$$

При таком определении  $F$  верны следующие результаты.

1.  $F$  – является компактным множеством с расстоянием

$$d(\Gamma_{s1} - \Gamma_{s2}) = \|\Gamma_{s1}(t) - \Gamma_{s2}(t)\|_{C^2[a, b]}.$$

2. Функционал  $J: \{\Gamma_s, u_s\} \rightarrow R$ , где

$$J(u_s) = \int_{D_s^0} |\nabla u_s|^2 dx \tag{1}$$

и  $\{\Gamma_s, u_s\} \in F \times H^1(D_s^0)$ , непрерывен. Заметим, что (1) напрямую связан с крутильной жесткостью стержня [2].

3. Задача  $J(u_s) = \inf_{\Gamma_s \in F} J(u_s)$  имеет по крайней мере одно решение.

### Литература

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел - М: Наука, - 1980.- 255с.
2. Куршин Л.М., Оноприенко П.Н. Определение форм двухсвязанных сечений максимальной крутильной жесткости // Прикладная математика и механика. - 1976.- Т.40, №6.- С.1078-1084.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ОГ ДЛЯ РАСЧЁТА ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НАД УЛИЧНЫМИ КАНЬОНАМИ

Пескова М. В., Обгадзе Т.А. (г. Владимир)

Течение в каньоне моделируется в приближении пограничного слоя над стенкой с квадратной выемкой. На дне выемки расположены источники тепла, которые создают восходящие потоки, взаимодействующие с основным течением. Цель работы – получить распределение температуры и поля скоростей при различных параметрах подобия, определяющих рассматриваемое физическое явление – числах  $Re, Pr$  и  $Gr$ .

Для численного моделирования течения использовались уравнения Навье-Стокса, упрощённые в рамках приближения Буссинеска. В качестве начального условия в расчётах принимался однородный невозмущённый поток. Предполагается, что числа Рейнольдса и Грасгофа, имеют в этой задаче значения, превышающие критические (соответствующие переходу к турбулентному режиму). Расчёт поля течения в стационарном случае производился вариационным методом Петрова-Галёркина. В качестве базисных функций были взяты регулярные источники ОГ – Обгадзе-Габричидзе. Выполнение части граничных условий обеспечивалось умножением искомых рядов разложения на соответствующие РО-функции.

Вследствие расчётов получено поле скоростей при различных значениях чисел подобия. Найдены критерии переноса загрязнения (выхлопных газов) основным ветровым потоком, что даёт возможность проектировать высотные здания в ветренных районах с учётом рассасывания загрязнений атмосферы.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ.

Пягарина А.А., Квасов Д.С.(г. Владимир).

Для описания динамики двухфазной среды существует несколько подходов. В одних случаях, записываются системы уравнений для каждой компоненты смеси, и взаимодействия фаз учитываются с помощью дополнительных членов для каждой компоненты среды. В других случаях, стараются представить двухфазный поток, как однородный с осредненными свойствами. Преимущество последнего подхода состоит в обзорности уравнений и сравнительной простоте решения практических задач. Будем считать, что среда состоит из двух фаз, причем известна начальная средняя концентрация одной из фаз, которая может меняться от точки к точке из-за диффузии, инерционных эффектов и времени.

Для смеси вводятся формулы осреднения Войнич-Сяноженцкого:

$$\rho = \nu\rho_v + (1-\nu)\rho_w, \quad \sigma_{ij} = \nu\sigma_{ij}^v + (1-\nu)\sigma_{ij}^w \quad (1)$$

где  $\rho_v, \rho_w$  - плотности первой и второй компонент,  $\sigma_{ij}^v, \sigma_{ij}^w$  - компоненты тензоров напряжений для первой и второй составляющей среды соответственно. Записываются также уравнения движения смеси в форме Коши (для единичного объема) и уравнение неразрывности относительно средней плотности смеси. Уравнение диффузии для компоненты смеси, имеющей концентрацию  $\nu$ , записывается в виде:

$$\frac{\dot{\nu}}{\rho_v \cdot \nu} + (\rho_v \cdot \nu \cdot \mathcal{G}_i)_{,i} = \rho_v D(\nu, \frac{k}{p}, \nu)_{,i} \quad (2)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии,  $KD$  - коэффициент бародиффузии,  $p$  - давление в смеси.

Для идентификации различных реологических свойств смеси надо выбрать соответствующие реологические законы для компонентов смеси. В работе рассматриваются модели течения смеси топливо - газ в трубопроводах дизеля. Рассчитываются поля скоростей и давлений.

## Нужно ли учиться учителю?

Плетнева О.К. (ВОИПКРО, г. Воронеж)

Чем выше ступень развития, на которой стоит общество, тем быстрее происходят в нем изменения во всех сферах, в том числе и в образовании. Разработка новых образовательных технологий, инновации в системе школьного образования, перемены социальной среды - все это обострило проблему постдипломного образования.

С одной стороны администрация образовательного учреждения заинтересована в высококвалифицированном специалисте, с другой стороны сам педагог большей частью стремится повысить свой профессиональный уровень. Как же совместить обе эти тенденции, не сведя все либо к жесткому контролю администрации, либо просто к самообразованию? Эту проблему и пытается решить Воронежский областной институт повышения квалификации работников образования, через диагностику и организацию курсовой подготовки для учителей. В частности, для учителей математики разработана целая система диагностических процедур, позволяющая организовать курсовую переподготовку в тех формах и с таким содержанием, чтобы наиболее полно удовлетворить потребности учителей и на должный уровень поднять их профессионализм. Поскольку, только непрерывный мониторинг качества образования с применением технологий специальных, постоянно обновляющихся квалиметрий и действенная своевременная помощь учителю позволит поднять профессионализм учительства воронежской области на высоту отвечающую требованиям времени.

**О неосцилляции дифференциально-разностного уравнения  
второго порядка на пространственной сети.**

Покорная И.Ю. (Воронеж)

Пусть  $\Gamma$  - пространственная сеть, именуемая далее геометрическим графом. На  $\Gamma$  рассматривается разностный аналог уравнения

$$-(pu')' + qu = 0, \quad \sum \alpha_a(a)u'(a+0) + q(a)u(a) = 0 \quad (1)$$

где суммирование производится по ребрам  $\Gamma$ , примыкающим к внутренней вершине  $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ . Первое из уравнений (1) задается на каждом ребре  $\Gamma$ . Для (1) ставятся краевые условия

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

Разностный аналог задачи (1), (2) рассматривается на сетке  $\Omega = \Omega(h)$ , включающей все внутренние и граничные вершины  $\Gamma$ . Максимальный шаг  $h$  сетки предполагается меньшим трети длины наименьшего из ребер.

*Определение 1.* Набор  $K$  точек из  $\Omega$  называется  $\Omega$  - каймой, если он является границей некоторого подграфа  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , т.е.  $\partial\Gamma_0 = K$ . При этом мы говорим, что  $K$  окаймляет точки из  $\Omega \cap \Gamma_0$ . Все точки из  $\Omega \cap \Gamma_0$  назовем лежащими внутри каймы.

Разностный аналог для первого уравнения (1) строится на каждом из ребер с помощью стандартных разностных отношений. Для второго уравнения из (1) разностный аналог строится с помощью ближайших к  $a$  (отличных от  $a$ ) точек из  $\Omega$ , окаймляющих  $a$ . При обсуждении решений разностного аналога уравнения (1) мы не предполагаем выполнения условия (2).

**Теорема 1.** Любое неотрицательное ( $\neq 0$ ) на  $\Omega$  решение разностного аналога (1) строго положительно на  $\Omega$ .

*Определение 2.* Пусть  $K \subset \Gamma$  - некоторая кайма на  $\Gamma$  и  $\Omega_0$  - множество всех точек из  $\Omega$ , окаймляемое  $K$ . Будем  $\Omega_0$  называть  $S_+$ - зоной функции  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $u(x) > 0$  на  $\Omega_0$  и  $u(x) \leq 0$  во всех точках из  $K$ .

**Теорема 2.** Если  $u$  и  $v$  - решения разностного аналога (1) и  $u$  сохраняет знак на некоторой  $S_+$  - зоне решения  $v$ , то  $u$  и  $v$  - коллинеарны на этой  $S_+$  - зоне.

## О некорректности традиций в простейшем волновом уравнении.

Ю.В. Покорный, А.В. Боровских, С.С. Шаталов (Воронеж)

$$\text{Волновое уравнение} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \ddot{u}, \quad (1)$$

являющееся, наряду с уравнением теплопроводности, одним из главных источников задачи Штурма-Лиувилля  $-(ku')' = \lambda \rho u, u(0) = u(l) = 0$ , (2) выводится в классических предположениях о достаточной гладкости коэффициентов  $k, \rho$ . Для уравнения с особенностями обычно прибегают к аппарату обобщенных функций, которые оказываются именно как функции "вещью в себе", что резко ограничивает возможности конкретного анализа уравнения. В ситуациях, когда такая "непознаваемость" решения оказывается неприемлемой - например, в случае кусочно-гладких коэффициентов, - проблему обходят, привлекая концепцию квазидифференциального уравнения.

Численно-аналитические эксперименты для случая кусочно-постоянных коэффициентов  $k$  и  $\rho$  с единственной точкой разрыва  $\xi$  обнаружили явное несоответствие визуально наблюдаемого прохождения импульса и "теоретического", получаемого из соображений симметрии. Проверка численного метода, а затем и самого уравнения (1) показала, что в нем присутствует серьезная недосказанность: отсутствует дополнительное условие  $(ku')|_{\xi+0} - (ku')|_{\xi-0} = (\rho(\xi+0) - \rho(\xi-0))\ddot{u}$  (3)

Внешне напоминая условие склейки (трансмиссии), оно оказалось на самом деле реализацией уравнения (1) в точке  $x = \xi$ . Явно присутствующий эффект "инерции точки" при отсутствии сосредоточенной массы - новый, ранее не обсуждавшийся тип особенности.

Необычная, на первый взгляд, ситуация с явной неполнотой стандартного толкования уравнения (1), исправлена введением исчерпывающей формулы  $\frac{d}{d\mu} \left( \rho(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \ddot{u}$ , (4)

где  $d\mu = m dx$  - дифференциал Стильтеса. Корректная запись уравнения

$$(2) \text{ имеет аналогичный вид} \quad -\frac{d}{d\mu} (\rho u') = \lambda u, \quad (5)$$

Отметим в заключение, что уравнения (4)-(5) остаются адекватными физической природе для любой возрастающей  $\mu(x)$ , однако их расшифровка в виде (3) в сингулярных точках корректна только при отсутствии там сосредоточенных масс. В противном случае уравнение (3) "расщепляется" и в уравнении (1) в точке  $\xi$  приравниваются уже не двух-, а трехзначные функции.

Работа выполнена при поддержке гранта Минвуза в области фундаментального естествознания (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100 и гранта Минвуза в области математики (КЦ Новосибирского ГУ) № \_\_\_\_\_



## О ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ

Покорный Ю.В., Скворцова Ж.Ю. (Воронеж)

Пусть  $\Gamma$ -конечная связная геометрическая сеть в  $D(\Gamma)$  — пространство непрерывных на  $\Gamma$  функций, абсолютно непрерывных на каждом ребре  $\Gamma$ . Исследуемый функционал

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} F(x, u(x), u'(x)) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \hat{F}(a, u(a)) \quad (1)$$

определяется функцией  $F(x, u, u')$ , заданной на  $R(\Gamma) \times R \times R$  и функцией  $\hat{F}(x, y)$ , заданной на  $J(\Gamma) \times R$ . Предполагается четность  $F$  по третьему аргументу и ориентированность  $\Gamma$ . Значения  $u(x)$  на  $\partial\Gamma$  фиксированы.

Схема Лагранжа для задачи  $\Phi(u) \rightarrow \min$  приводит к уравнению

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u'} = 0 \quad (2)$$

на каждом ребре  $\Gamma$  и к равенствам

$$- \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} F_{u'} \Big|_{\gamma_i(a)} + \hat{F}_u(a, u(a)) = 0 \quad (3)$$

в каждом внутреннем узле  $a \in J(\Gamma)$ . Здесь обозначено

$F_{u'} \Big|_{\gamma_i(a)} = (F_{u'})_i(a + 0, u(a), \frac{d}{d\gamma_i} u(a))$ , где  $(F_{u'})_i$  означает производную сужения  $F_i$  функции  $F$  на  $\gamma_i$ , а  $\frac{d}{d\gamma_i} u(a)$  — крайняя производная. Для случая квадратичных функционалов, известных в приложениях, (3) являются аналогами условий трансмиссии.

Схема Лежандра приводит к необходимым условиям минимума

$$F_{u'u'} \geq 0 \quad (4)$$

на каждом ребре, а во внутренних вершинах возникают еще условия

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma(a)} F_{u'u'} \Big|_{\gamma(a)} + \hat{F}_{uu'}(a, u(a)) \geq 0 \quad (a \in J(\Gamma)) \quad (5)$$

Построение достаточных условий усилением (4), (5) связано с неосциллиющей на  $\Gamma$  уравнения Якоби (относительно  $\varphi$ )

$$- (F_{uu} \varphi')' + \left( F_{uu} - \frac{d}{dx} F_{uu'} \right) \varphi = 0$$

с условиями во внутренних узлах

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma(a)} \left[ \left( F_{uu} \frac{d}{d\gamma} \varphi \right) (a) + F_{u'u'} \Big|_{\gamma(a)} \varphi(a) \right] + \hat{F}_{uu} \varphi(a) = 0$$

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ГЦК МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Попов Л.Е., Колунаева С.Н., Пуспешева С.И. (Томск)

В традициях физической кинетики построена математическая модель пластического поведения г.д.к. кристаллов. Математическая модель основана на двумерном описании элементарного кристаллографического скольжения (зоны сдвига). Описание возникновения и развития кристаллографического сдвига последовательно базируется на фундаментальных физических и топологических свойствах дефектов, осуществляющих пластический массоперенос. Благодаря двумерному рассмотрению движения дислокаций найдена простая геометрическая связь между изменением плотности дислокаций, концентрациями точечных дефектов и степенью деформации. Все параметры модели имеют ясный физический или геометрический смысл.

Математические модели кинетики пластичности, основная идея которых состоит в том, что скорость изменения концентрации деформационных дефектов определяется интенсивностью их генерации с деформацией и скоростью аннигиляции со временем, сводятся к системам дифференциальных уравнений баланса типа "рождение-гибель", составляющих основу многих математических моделей реальных процессов различной природы. Формулировка модели в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволила использовать в исследованиях аппарат теории динамических систем, методов качественного исследования дифференциальных уравнений и методов теории устойчивости. Проведен параметрический анализ, выявлены возможные стационарные состояния для различных деформирующих воздействий и условий деформирования, когда определяющую роль играют дефекты различного типа.

Исследовано влияние характеристик интенсивности деформирующего воздействия на эволюцию деформационной дефектной среды. Показана структурообразующая роль неустойчивых стационарных состояний. Исследование фазового и параметрического пространства моделей для различных типов материалов и различных наборов дефектов, определяющих процессы пластичности и порождаемых ими, выявило наличие стационарных движений различного типа.

## ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ АМОРФНОГО УГЛЕРОДА

Попова И.А., Саврасова Н.А., Домашевская Э.П.

(Воронеж)

В настоящее время особое внимание привлекают работы, описывающие структуру пленок аморфного углерода (а-С), основными свойствами которых являются большая твердость, высокое электросопротивление, прозрачность в инфракрасной и видимой областях света и хорошая химическая стойкость.

В процессе выполнения нами ряда предшествующих работ по моделированию структуры а-С возникло представление о фрактальном характере структуры. Однако только после статистического анализа пространственных моделей стало возможным приступить к расчету фрактальных характеристик.

Целью настоящей работы явилось проведение фрактального анализа структуры пленок а-С на основе Монте-Карло моделей их пространственной структуры.

Нами предложен способ расчета фрактальной размерности путем математического моделирования с использованием программы обработки электронных таблиц Microsoft Excel. Сущность предложенного метода, опирающегося на геометрический подход Виттена-Сандера, заключается в том, что полученная ранее пространственная структурная модель подвергается разбиению сферической сеткой на некие элементарные объемы и подсчитывается условная масса именно этих сферических объемов. Далее строится зависимость фрактальной размерности от условной массы и плотности атомов, вошедших в сферу.

Проведенный нами анализ структуры пленок а-С доказывает не только фрактальный характер структуры, но и определяет тип фрактала – объемный агрегат, составленный из цепочечных кластеров.

ОДНОМЕРНЫЙ АНАЛОГ МОДЕЛИ ГОЛЬДШТИКА  
Потапов Д.К. (Челябинск)

Рассматривается одномерный аналог математической модели отрывных течений несжимаемой жидкости Гольдштика [1]. Требуется найти  $\psi \in H^2(0,1)$ , удовлетворяющую для почти всех  $x \in [0,1]$  уравнению

$$\psi'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0 \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0 \end{cases}$$

и граничным условиям  $\psi(0) = 1, \psi(1) = 0, \omega > 0$ . Заменой  $u = \psi + x - 1$  исходная задача преобразуется к виду

$$u'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < x - 1 \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1 \end{cases}, \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

Для любого  $\omega > 0$  данная проблема имеет тривиальное решение, при  $0 < \omega < 8$  других решений нет. Если  $\omega \geq 8$ , то, кроме тривиального, задача имеет два решения

$$u_{\pm}(x) = \begin{cases} \frac{\omega}{2}(x - x_0 + \frac{2}{\omega})(x - 1) & , \text{ если } u < x - 1 \\ x(1 - \frac{1}{x_0}) & , \text{ если } u \geq x - 1 \end{cases},$$

где  $x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8}{\omega}}$ , которые при  $\omega = 8$  совпадают.

Рассмотрим недифференцируемый функционал  $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx - \omega \int_{\{x \in [0,1] | u(x) < x-1\}} (x-1-u(x)) dx$  на  $H_0^1$ , для которого (1) является уравнением Эйлера. В некоторой точке  $u_0$  он достигает инфимума на  $H_0^1$ , и такое  $u_0$  является решением задачи (1)-(2).

Непосредственным вычислением получаем

$$J(u_{\pm}) = \frac{1}{2x_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\omega^2 x_0^3 - \frac{1}{8}\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{8}\omega^2 x_0 - \frac{1}{24}\omega^2 \text{ и}$$

$$\|u_{\pm}\|_{H_0^1} = \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 8/\omega}} + \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega}{2} - 1 - \frac{1}{12}\omega^2 \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8/\omega}}{2} \right)^3}.$$

Анализируется поведение этих функций.

Автор благодарен профессору В.Н.Павленко за постановку задачи.

Литература

1. Гольдштик М.А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962, Т. 147, N 6, С.1310-1313.

## ОБ ОПЫТЕ РАБОТЫ СО СТУДЕНТАМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Примакова С.И., Денисов В.С. (Витебск)

Актуальность совершенствования качества базовой математической подготовки будущих специалистов в области экономики и управления растет вместе с ростом возможностей широкого применения в экономической науке и практике разнообразных математических методов исследований, планирования и управления. На пути реализации этой задачи имеется ряд трудностей. Они во многом связаны с тем, что, с одной стороны, учебные планы специальностей постоянно уплотняются, нередко в ущерб математическим дисциплинам. С другой стороны, лавинообразный рост интереса к экономическому образованию и расширению коммерческой деятельности вузов приводят к тому, что в уровнях подготовки абитуриентов-первокурсников разница столь велика, что изложение теоретического материала в должной абстрактной форме, требующей меньшего количества аудиторного времени, является малопродуктивным.

Поэтому в работе со студентами экономических специальностей, особенно в первом семестре, требуется большая гибкость как в реализации содержания программы курса (выбор ключевых разделов и тем, ориентация на многоступенчатость их изучения - повторение их на новом уровне в курсах экономико-математического моделирования и прогнозирования, перенесение части традиционно лекционного материала на практические занятия и в задания для самостоятельной работы и т.д.), так и в выборе технологий (проблемно-блочный подход к изложению разделов, постоянная корректировка теоретического и методологического уровня изложения, применение форм дифференцированного обучения (факультативы, НИРС, коллоквиумы, индивидуальные задания), использование технических средств для иллюстрации применения изучаемого математического аппарата).

Например, построение простейшей модели межотраслевого баланса на вводной лекции способствует более осознанному подходу к овладению технически громоздким аппаратом решения и исследования систем линейных уравнений. Графическое решение простейшей двумерной задачи оптимизации выпуска продукции, представленное в целях экономии времени на слайдах проектора и показанное в качестве примера использования сведений из аналитической геометрии, вызвало больший интерес, чем абстрактные примеры построения уравнений прямой на плоскости.

Поверив в реальную пользу математических методов, большинство студентов в дальнейшем с большей активностью относится и к математике в базовом курсе, и к прикладным математическим дисциплинам в процессе обучения на старших курсах.

## РАВНОМЕРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ВЫПУКЛОГО 3-МНОГОГРАННИКА

Пулатов А. К., Мамадолимов А. Р. (г. Ташкент.)

Рассматривается равномерная линейная деформация (РЛД) выпуклого 3- многогранника: все грани многогранника перемещаются по его внутренним нормалам с одинаковой скоростью до вырождения многогранника в точку. Такая деформация многогранника является скачкообразной, где скачок - это возникновение многогранника нового комбинаторного типа.

В настоящей работе описывается РЛД многогранника, при этом особое внимание уделяется изучению комбинаторного изменения многогранника при РЛД. Получены следующие результаты:

1. Оценивается число комбинаторно неэквивалентных многогранников, получаемых в результате РЛД от произвольного многогранника с  $n$  гранями.

2. Разработан алгоритм нахождения многогранников, получаемых в результате РЛД от произвольного многогранника с  $n$  гранями. Оценивается временная сложность алгоритма.

Для различных ограниченных деформаций были проведены исследования, близкие к вышеуказанным, в работах [1-2].

Изучение такой деформации многогранника представляет интерес еще потому, что она тесно связана с понятием скелета [3].

Так же следует отметить, что РЛД многогранника моделирует такие процессы, как растворение, горение однородных тел, имеющих форму выпуклого многогранника в идеальных условиях.

### Литература

1. Пулатов А. К., Хужаев Т. Х. О комбинаторной структуре и мощности классов деформируемых многогранников. - Вероятностные методы и кибернетика, Казань вып. 24, 1990.
2. Саматова Н. Ф., Пулатов А. К. Оценка меры комбинаторной изменчивости выпуклого многогранника при ограниченных деформациях. ТашГУ.- Ташкент, 1993. - 12с. -Рус. -Деп. В ГФНТИ, ГКНТ, РУз, 17. 02. 93, 1799 - Уз93.
3. Р. Дуда, П. Харг. Распознавание образов и анализ сцен. М. : Мир, 1976

**ОПТИМИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ,  
ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ  
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**  
Пустарнакова Ю.А. (Тверь)

Во многих моделях искусственных нейронных сетей важно учитывать запаздывание в передаче сигнала. Например, система распознавания речи, использует нейронные сети, в которых информация накапливается на интервале времени  $r$ . Такие модели могут быть описаны системой интегро-дифференциальных уравнений.

Задача оптимального управления для данных моделей состоит в минимизации функционала

$$J(\omega, u) = \int_{t_0}^{t_1} E(x(t), \omega(t), u(t)) dt + \Phi(x(t_0), x(t_1)) \quad (1)$$

с ограничениями

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left( \int_{t-r}^t \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\tau) x_j(\tau - \delta_j) d\tau \right) + \gamma_i u_i(t),$$

$i = 1, \dots, N,$

(2)

где  $x_0(t)$ ,  $x_{-1}(t)$ ,  $\omega_{i,-1}(t)$ ,  $\omega_{i0}(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — заданные функции на  $[t_0 - r, t_1]$ .

В работе рассматривается сеть из  $N$  нейронов, в которой каждый нейрон потенциально взаимодействует с каждым. Воздействие  $j$ -го нейрона на  $i$ -ый нейрон в момент времени  $t$  характеризуется весовой функцией  $\omega_{ij}(t)$ . На каждый нейрон оказывается внешнее воздействие  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Оптимальное решение находится градиентным методом. Исследуются различные структуры организации нейронной сети: модульная (локальные сети), иерархическая.

**Литература**

1. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., Наука, 1982.
2. Андреева Е.А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь, ТГУ, 1999.

УСЛОВИЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Ратнии А.К. (Иваново)

Хорошо известно, что краевая задача Бицадзе-Самарского

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \quad (x \in D), \quad (A)$$

$$Bu \equiv u(x) - u(bx) = \psi(x) \quad (x \in S)$$

Фредгольмова в традиционных пространствах, если  $bS \cap S = \emptyset$  (см., например, [1, 2]). В данной работе предлагается обобщение этого результата.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $D$  - ограниченная область  $R^n$ ;  $S = \partial D \subset C^2$ ;  $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar{D})$ ; в  $\bar{D}$  матрица  $(a_{ij})$  положительно определена,  $c \leq 0$ ;  $b$  - однозначное, непрерывное отображение  $S$  в  $\bar{D}$ . Пусть множество  $\Omega \equiv \{x \in S : b^k x \in S, k=1, 2, \dots\}$  пусто. Тогда для любых  $f \in C^\alpha(\bar{D})$ ,  $\psi \in C(S)$  задача (A) имеет единственное решение  $u \in C^{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$ .

Нетрудно видеть, что  $\Omega = \emptyset$ , если  $b^l S \cap S = \emptyset$  для некоторого натурального числа  $l$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и  $G$  - оператор, разрешающий задачу (A) с  $\psi \equiv 0$ . Существует такое линейное расширение  $\hat{G}$  этого оператора с  $C^\alpha(\bar{D})$  на  $L_p(D)$ ,  $p > n/2$ , что:  $\hat{G}$  - вполне непрерывный оператор из  $L_p(D)$  в  $C(\bar{D})$ ; для  $f \in L_p(D)$  функция  $\hat{u}(x) \equiv (\hat{G}f)(x)$  представима в виде  $\hat{u} = u_1 + u_2$ , где  $u_1 \in W_p^2(D)$ ,  $u_2 \in C^{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$  и  $\mathcal{L}\hat{u} = f$  почти всюду в  $D$ ,  $B\hat{u} = 0$  на  $S$ .

Литература

1. Скубачевский А.Л. // Матем. сб. 1983. Т. 121, № 2. С. 201-210.
2. Ратнии А.К. // Краевые задачи. Пермь: ПИИ. 1990. С. 127-130.



## Динамическая система с аттракторами

Построим динамическую систему, допускающую операторное представление:

$$L_t = L\bar{A} - AL, \quad (1)$$

где « $\bar{\phantom{x}}$ » означает комплексное сопряжение. Уравнение принадлежит типу операторных уравнений вида  $\dot{M} = P(M) + [M, A]$  [1] с  $P(M)$  - аналитическая функция с постоянными коэффициентами и  $M = L\bar{L}$ . Пусть уравнение (1) с операторами в виде матриц имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} L_{k,k+1} &= a_k, & L_{k,k-1} &= -1, \\ A_{k,k+2} &= y_k, & A_{k,k+4} &= x_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторное уравнение (1) эквивалентно системе алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$\dot{a}_k = a_k [(\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_{k-1})(C_2 - C_1(a_k + \bar{a}_{k+1} + \bar{a}_{k-1})) - C_1(\bar{a}_{k+1}a_{k+2} - \bar{a}_{k-1}a_{k-2})] \quad (3)$$

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})), \quad \text{где } C_1, C_2 - const, \quad (4)$$

Алгебраические уравнения (4) имеют следующие решения

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})),$  где  $C_1, C_2 - const$ . Дифференциальные уравнения (3) после подстановки принимают вид:

$$\dot{a}_k = a_k [(\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_{k-1})(C_2 - C_1(a_k + \bar{a}_{k+1} + \bar{a}_{k-1})) - C_1(\bar{a}_{k+1}a_{k+2} - \bar{a}_{k-1}a_{k-2})] \quad (5)$$

Построенная система, как это показано в [1] имеет аттрактор. Наличие аттракторов в системе обуславливает существование притягивающих и отталкивающих режимов, что является важным для применений.

Собственные числа матрицы  $L$  в силу уравнения (1) удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_k = \lambda_k (\alpha \lambda_k^2 + \beta), \quad (6)$$

следовательно  $\lambda_k = \sqrt{\frac{C_k \beta e^{2\beta t}}{1 - \alpha C_k \beta e^{2\beta t}}}$ . Уравнение (6) имеет три особые точки  $\lambda = \left\{ 0, \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \right\}$

причем  $\lambda = 0$  - будет отталкивающей, а  $\lambda = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$  - притягивающие особые точки. Уравнение

$$L_t = L\bar{A} - AL \quad \text{эквивалентно системе}$$

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})), \quad \text{где } C_1, C_2 - const,$$

$$\dot{a}_k = a_k [(\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_{k-1})(C_2 - C_1(a_k + \bar{a}_{k+1} + \bar{a}_{k-1})) - C_1(\bar{a}_{k+1}a_{k+2} - \bar{a}_{k-1}a_{k-2})].$$

При  $a \neq 0$  из трех последовательных величин

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})),$  где  $C_1, C_2 - const$ , одна равна нулю, поэтому на инвариантных подмногообразиях система (5) переходит к виду:

$$\dot{a}_k = a_k [(\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_{k-1})(C_2 - C_1(a_k + \bar{a}_{k+1} + \bar{a}_{k-1})) - C_1(\bar{a}_{k+1}a_{k+2} - \bar{a}_{k-1}a_{k-2})] \quad (\text{при}$$

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})),$  где  $C_1, C_2 - const$ ), или

$$\dot{a}_k = a_k [(\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_{k-1})(C_2 - C_1(a_k + \bar{a}_{k+1} + \bar{a}_{k-1})) - C_1(\bar{a}_{k+1}a_{k+2} - \bar{a}_{k-1}a_{k-2})] \quad (\text{при}$$

$$x_k = C_1 \bar{a}_{k+3} a_{k+2} \bar{a}_{k+1} a_k,$$

$y_k = a_k \bar{a}_{k+1} (C_2 - C_1(a_{k+2} + \bar{a}_{k+1} + a_k + \bar{a}_{k-1})),$  где  $C_1, C_2 - const$ ).

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И  
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРА  $\Delta_{B_{x_{n-1}}}$

Рогова Н.В. (Воронеж)

Задача о собственных значениях уравнения

$$\Delta_{B_{x_{n-1}}} u + \lambda u = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_{B_{x_{n-1}}} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\gamma}{x_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\bar{\Gamma}^+} - hu|_{\bar{\Gamma}^+} = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{\Gamma}^+$  - замыкание расположенного в полупространстве участка границы области  $\Omega^+$ ,  $\nu$  - внешняя нормаль, заключается в определении всех значений  $\lambda$ , при которых уравнение (1) при условии (2) имеет ненулевое решение.

В пространстве  $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$ , где  $\gamma$  - фиксированное положительное число рассмотрим следующие функционалы:

$$\Phi_\gamma(v) = \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 x_{n-1}^\gamma dx - \int_{\Gamma^+} hv^2 x_{n-1}^\gamma d\Gamma^+,$$

$$J_\gamma(v) = \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 x_{n-1}^\gamma dx, \quad H_\gamma(v) = \int_{\Omega^+} |v|^2 x_{n-1}^\gamma dx = \|v\|_{W_{2,\gamma}}^2.$$

**Теорема.** Существует функция  $u_1 \in W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$  такая, что  $H_\gamma(u_1) = 1$ ,  $\Phi_\gamma(u_1) = \lambda_1$ . Функция  $u_1$  имеет непрерывные производные любого порядка в  $\Omega^+$ , четные по соответствующей переменной, и удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{B_{x_{n-1}}} u_1 + \lambda_1 u_1 = 0.$$

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
БИОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
Розенберг В.Л. (Екатеринбург)

Исследуется система, описывающая динамику развития биологической популяции, численность которой зависит от размера составляющих ее особей [1]. В реальных ситуациях, как правило, затруднительно с достаточной степенью точности определить значения параметров системы из биологических принципов и экспериментальных данных. Поэтому актуальными становятся обратные задачи в различных формулировках, в которых по результатам неточных (а часто и неполных) измерений плотности популяции в дискретные (достаточно частые) моменты времени требуется восстановить тот или иной неизвестный параметр. Для решения таких задач используется подход, основанный на внутренней аппроксимации бесконечномерных пространств и теории позиционного управления с моделью [2]. Настоящая работа, продолжающая исследования [3], учитывает специфику рассматриваемой динамической системы. Предлагаемый алгоритм, строящийся в классе конечношаговых позиционных алгоритмов (с расчетом на возможность его компьютерной реализации), является устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений. Приводится численный пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №00-01-00222) и INTAS (проект №96-0816).

**Литература**

1. Banks H.T., Botsford L.W., Kappel F., and Wang C. Modeling and estimation in size structured population models // World Scientific. Singapore. Math. Ecology. 1988. P. 521–541.
2. Кряжковский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. №2. 1983. С. 51–60.
3. Kappel F., Kryazhinskiy A.V., and Maksimov V.I. The problems of dynamical estimation in size structured population models // Proc. of International Conference on Biomathematics. Turkey. 1999.

## Индивидуализация обучения: проблемы и поиски.

Рубанова Н.П. (ВУВК №2, г. Воронеж)

Специализированное обучение одаренных детей влечет за собой мероприятия, далеко выходящие за рамки простого расширения обычных предметных программ за счет включения в них тем и разделов, предназначенных для старшего возраста.

Учебно-воспитательный процесс должен дать возможность этим ученикам:

- эффективно использовать учебное время для повышения уровня своих знаний;
- достигать больших глубин в мыслительной и исследовательской деятельности;
- демонстрировать индивидуальные достижения в решении поставленных задач;
- создавать и апробировать на практике свой собственный метод исследования.

Поэтому, предлагая одаренному ученику индивидуальный план обучения, учитель должен заложить в него три составляющие:

- ускорение;
- углубление;
- включение принципиально нового содержания.

Уже несколько лет над этими проблемами работают учителя математики Воронежского учебно-воспитательного комплекса №2. Несколько слов о третьей составляющей - принципиально новом содержании для учащихся 7-8 классов.

С 1995 года наши ребята активно работают в рамках городского Интеллектуального марафона. Это познание новой математики в течение всего года на уроках и во внеурочное время. Годовой календарь включает в себя:

- Всероссийские заочные олимпиады (октябрь);
- I тур Соросовских олимпиад (октябрь - ноябрь);
- Всероссийские телекоммуникационные олимпиады (ноябрь - декабрь);
- I тур Интеллектуального марафона (районные олимпиады) (декабрь);
- II тур Интеллектуального марафона (творческая работа: разработка и защита) (февраль);
- III тур Интеллектуального марафона, заключительный «Парад знаний» (март);
- представление лучших работ учащихся 7-8 классов на научно-практической конференции школьников в ВГУ (апрель).

Эта большая работа проводится индивидуально, в малых группах в рамках школьного научного общества «Малой академии».

И нас, учителей радуют не только победы наших питомцев, а и их неустанная активность, стремление к самому процессу познания, удовольствие от получаемого умственного напряжения.

## Лирические отступления на уроках математики. Рубцова Г.Р. (МОК №2, г.Воронежа.)

Большую роль в преподавании математики играет целенаправленность и актуализация тематики, различные приемы и методы обучения, формирующие у учащихся способности самостоятельного мышления.

Считается, что все это тесно связано с изучением физики, химии, информатики. Связь математики с гуманитарными дисциплинами – историей, литературой, философией – практически не прослеживается. А ведь маленькие исторические справки, рифмуемые строчки правил, эпитафьи к уроку, анекдоты по теме, - все это не только помогает учащемуся, закомплексованному и напряженному на уроке, расслабиться, но дает возможность заострить его внимание на некоторых важных утверждениях и понятиях, которые почему-то память не желает сохранять в своих архивах. Интересно и занимательно можно построить урок благодаря именно таким маленьким, но ярким двухминутным украшениям. Возможны лирические отступления, экспромты, вызванные какой-то особенной ситуацией на уроке, теплой дружеской обстановкой или же эмоциональностью, увлеченностью учителя, наконец, его настроением. Но еще лучше, если эти “находки” учителя подготовлены заранее и умело вкраплены в ход урока.

В качестве примера можно привести следующие “формы и темы” лирических отступлений.

- I. Эпитафьи к урокам:
- II. “Играем в буриме”.
- III. Анекдоты (можно про “новых русских”).
- IV. Знакомство с древнегреческой философией. Философия Фалеса.
- V. Доказываем вместе с Евклидом. Осел и неравенство треугольника.
- VI. Числа Фибоначчи. А причем здесь кролики? и т. д.

Этот список можно продолжать, все, наверное, зависит от учителя, от его эрудиции, желания узнать новое и поделиться с учениками.

Как говорил писатель Ричард Бах: “Лучше всего учить тому, что больше всего хочешь узнать сам!”.

**ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЕ  
НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.**

И.А. Рудаков. (Брянск)

Рассматривается нелинейное одномерное волновое уравнение

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, t \in R, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in R \quad (2)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, t \in R. \quad (3)$$

Здесь функция  $p \in H^2(0, \pi)$  и удовлетворяет условию (Н1) работы [1], период  $T = \frac{a}{b}\pi$ ,  $a, b \in N$ . Функция  $g: R \rightarrow R$  непрерывна, неубывает и

$$|g(u)| \leq \gamma|u| + C \quad \forall u \in R, \quad (4)$$

где  $C$  - произвольная константа,  $0 < \gamma < \alpha$ , а константа  $\alpha$  определена в [1], стр. 2041. Пусть  $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$ .

Теорема. При выполнении перечисленных выше условий задача (1)-(3) имеет слабое решение  $u \in L^\infty(\Omega)$  для любой функции  $f \in L^\infty(\Omega)$ , удовлетворяющей условию (Н3) из работы [1] (стр. 2041).

Данная теорема является дальнейшим развитием результатов, полученных в [1]. Для нелинейного слагаемого  $g(u)$  не требуется выполнения "глобального на  $R^n$  условия Липшица (условие (1.4) в [1]).

При доказательстве теоремы применяется теория степени отображения (вращения векторного поля) (см. [2]) и метод монотонных операторов (см. [3], [4]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1]. V. Barby, N.H. Pavel. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with  $x$ -dependent coefficients// Trans. Amer. Math. Soc., 1997.- V 349.- N 5.- P. 2035-2048.

[2]. М.А. Красносельский, П.П. Забрейко// Геометрические методы нелинейного анализа,- 1975, Москва, "Наука".

[3]. A. Bahri, H. Brezis. Periodic solution of a nonlinear wave equation// Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1980.- V 85A.- P. 313-320.

[4]. Рудаков И.А. Нелинейные колебания струны// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1984.- N2, С. 9-13.

e-mail: tcopr@bgpi.bitmunit.bryansk.su

О дифференциальных свойствах гиперболического уравнения с особенностью.

Рыжков А.В.(Воронеж)

Пусть  $E_{n+1}^+$  - полупространство  $x_{n+1}$  точек  $x=(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x', x_{n+1})$  евклидова  $(n+1)$ -мерного пространства  $E_{n+1}$ . Пусть  $\Omega^+$  - произвольная граничная область, расположенная в  $E_{n+1}^+$  и прилегающая к гиперплоскости  $x_{n+1}=0$ . Через  $S_0$  обозначим часть границы области  $\Omega^+$ , лежащую на гиперплоскости  $x_{n+1}=0$ , а через  $S^+$  - часть границы, лежащую в полупространстве. Граница  $S^+$  образует с гиперплоскостью  $x_{n+1}=0$  прямой угол. В цилиндре  $Q^+ = \Omega^+ * [0, T]$  поставим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} + \frac{\nu}{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au + f, \quad \nu > 0 \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{S^+} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \Big|_{S^+} = 0. \quad (3)$$

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1) и свободный член  $f$  имеют неравные производные по  $t, x_1, \dots, x_{n+1}$  до порядка  $k-1$  ( $k \geq 3$ ) в цилиндре  $Q^+$ , а  $S^+$  - часть границы области  $\Omega^+$ , непрерывно дифференцируема  $k+1$  раз. Пусть

$$\frac{\partial^l f}{\partial t^l} \Big|_{t=0} = 0, \quad l=0,1,\dots,k-1.$$

Тогда обобщенное решение смешанной задачи (1)-(3) принадлежит пространству  $W_{2,\nu}^{(k)}(Q^+)$  и,

следовательно, является решением почти всюду. Если  $k = \left[ \frac{n+\nu+1}{2} \right] + 3$ , то и будет

классическим решением задачи.

Для решения задачи (1)-(3) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,\nu}^{(k)}(Q^+)} \leq c \|f\|_{W_{2,\nu}^{(k-1)}(Q^+)}.$$

Для доказательства теоремы используется метод конечных разностей.

Перечисленные функциональные пространства определены в работе [1].

Литература:

1. Киприянов И.А. «Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для новых классов». - труды МИАН СССР им. Стеклова, 1967, т.89, с.130-213.

ОБ ОДНОКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА  
Рыхлов В.С. (Саратов)

Рассмотрим в пространстве  $L_2[0, 1]$  пучок операторов  $L(\lambda)$

$$l(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$

$$U_\nu(y, \lambda) \equiv U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda x) := \\ (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где  $p_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbf{C}$ . Пусть  $\omega_1, \omega_2$  есть корни характеристического уравнения  $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$ . Предположим, что эти корни лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что  $\omega_2 < 0 < \omega_1$  и  $\omega_1 \leq |\omega_2|$ . Фундаментальная система решений уравнения  $l(y, \lambda) = 0$  есть  $y_1(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_1 x)$ ,  $y_2(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_2 x)$ . Обозначим  $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda$ ,  $w_{\nu j} := \exp(-\lambda \omega_j) U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda$ ,  $\nu, j = 1, 2$ , и  $V_j := [v_{1j}, v_{2j}]^T$ ,  $W_j := [w_{1j}, w_{2j}]^T$ ,  $j = 1, 2$ . Пусть  $\tau := |\omega_2|/\omega_1$ ,  $a_{sk} := \det[W_s, W_k]$ ,  $a_{\bar{s}k} := \det[V_s, W_k]$ ,  $a_{s\bar{k}} := \det[W_s, V_k]$ ,  $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det[V_s, V_k]$ ,  $b_0 := -a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}2}$ ,  $c_0 := -a_{\bar{1}2}/a_{\bar{1}2}$ ,  $d_0 := \ln_0 c_0$  (здесь  $\ln_0$  есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что  $\ln_0 1 = 0$ ),  $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbf{C} : \lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $Y := \{y(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)), \lambda \in \Lambda\}$ . Очевидно,  $\Lambda \setminus \{0\}$  есть множество всех ненулевых собственных значений пучка  $L(\lambda)$ , а множество  $Y \setminus \{y(x, 0)\}$  есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

При основных предположениях

$$a_{\bar{1}2} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}1} = a_{12} = 0$$

справедлива следующая теорема

**Теорема.** Если  $W_2 = 0$ ,  $a_{\bar{1}1} \neq 0$ , то система  $Y$  однократно полна в  $L_2[0, 1]$  тогда и только тогда, когда уравнение  $f + A_\tau f = 0$  имеет только тривиальное решение в  $L_2[0, 1]$ , где  $A_\tau \in L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$  и определяется формулой

$$(A_\tau f)(x) = \begin{cases} \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{1}{\bar{c}_0^s} f\left(\frac{s+1-x}{\tau}\right), & x \in [0, l+1-\tau], \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum_{s=0}^l \frac{1}{\bar{c}_0^s} f\left(\frac{s+1-x}{\tau}\right), & x \in (l+1-\tau, 1], \end{cases}$$

здесь  $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  таково, что  $\tau - 1 \leq l < \tau$ .



ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ПРОСТРАНСТВАМ ХАРДИ СОПРЯЖЕННЫХ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рябогин А.К. (Ставрополь)

Пусть  $U(x, y)$  гармоническая функция в  $R_+^{n+1}$ . Сопряженной к  $U(x, y)$  гармонической функцией называется вектор-функция  $V(x, y) = (V_1, \dots, V_n)$ , координаты которой суть гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана [1].

Вектор-функция  $F(x, y) = (U, V) = (U, V_1, \dots, V_n)$  называется гармоническим вектором.

$$\text{Мы будем использовать средние } M_p(y, F) = \left\{ \int_{R^n} |F(x, y)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p > 0.$$

Через  $U^+(x) = \sup\{U(x, y); y > 0\}$  обозначим "радиальную" максимальную функцию

$$U(x, y) \in H_p \Leftrightarrow U^+(x) \in L_p, \quad p > 0.$$

**Теорема.** Пусть  $0 < p < q$  и  $F(x, y) = (U, V_1, \dots, V_n)$  - гармонический вектор в  $R_+^{n+1}$ , удовлетворяющий условиям:

$$1) M_p(y+1, F) \leq C; \quad 2) M_p(y, D_{n+1}^k U) \leq C; \quad 3) |D_{n+1}^k U| \leq C$$

Тогда гармонический вектор и все его частные производные до  $k$ -того порядка включительно принадлежат пространствам  $H_r$  для них  $r \geq p$ .

Литература.

1. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функции. М.: Мир, 1973. с.342.
2. Fefferman С., Stein Е.М.  $H^p$  spaces of several variables // Act. Math. 1972. V. 129. '3-4. P.137-193.
3. Рябогин А.К. К характеристике граничного поведения сопряженных гармонических функций // Вестник СГУ. Ставрополь. 1996. Вып.7. С.25-32.

**К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА  
ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА**

К.Б. Сабятов, Р.Г. Идрисов (г. Стерлитамак)

Рассмотрим систему

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, \quad (1)$$

где  $yK(y) > 0$  при  $y \neq 0$ ,  $K(y)$ ,  $A(x,y)$ ,  $B(x,y)$  – заданные числовые функции,  $C(x,y) = (C_{ik})$ ,  $i, k = \overline{1, n}$  – квадратная матрица порядка  $n$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $n \geq 2$ , в области  $D$ , ограниченной простой кривой Жордана  $\Gamma$ , лежащей в полуплоскости  $y > 0$  с концами в точках  $A_1(a_1, 0)$  и  $A_2(a_2, 0)$ ,  $a_1 < a_2$ , характеристиками  $A_1C_1$ ,  $C_1E$ ,  $EA_2$ ,  $C_2A_2$  системы (1) при  $y < 0$ , где  $E(e, 0)$ ,  $a_1 < e < a_2$ ,  $C_1(\frac{a_1+e}{2}, y_{c1})$ ,  $y_{c1} < 0$  и  $C_2(\frac{a_2+e}{2}, y_{c2})$ ,  $y_{c2} < 0$ .

Обозначим через  $D_0 = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_1 = D \cap \{y < 0 \wedge x < e\}$  и  $D_2 = D \cap \{y < 0 \wedge x > e\}$ .

**Задача Геллерстедта.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:  $u(x, y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2)$ ;  $Lu(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2$ ;  $u(x, y) = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in \overline{\Gamma}$ ;  $u(x, y) = \psi_1(x, y)$ ,  $(x, y) \in A_1C_1 \cup A_2C_2$  где  $\varphi$ ,  $\psi_1$  и – заданные достаточно гладкие вектор-функции, причём  $\varphi(A_1) = \psi(A_1)$  и  $\varphi(A_2) = \psi(A_2)$ .

Будем предполагать, что коэффициенты системы (1) обладают следующей гладкостью  $A(x, y)$ ,  $B(x, y) \in C^1(\overline{D_0}) \wedge C(\overline{D_i}) \wedge C^1(\overline{D_i} \setminus EA_i)$ ,  $C_{jk}(x, y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C(\overline{D_i})$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ ,  $K(y) \in C[y_{\min}, 0) \wedge C^2[y_{\min}, 0) \wedge C[0, y_{\max}]$ , где  $y_{\max} = \max_{(x,y) \in \overline{D}} y$ ,  $y_{\min} = \min_{(x,y) \in \overline{D}} y$ .

**Лемма 1.** Пусть: 1) в области  $D_0$  коэффициенты системы (1) непрерывны и ограничены,  $C(x, y)$  – неположительно определенная матрица; 2)  $u(x, y) \in C^2(D_0)$ . Тогда модуль  $|u(x, y)|$  решения  $u(x, y)$  системы (1), отличного от постоянного, не может достигать локального максимума ни в одной точке области  $D_0$ .

**Лемма 2.** Пусть: 1) в области  $D_0$  коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям леммы 1; 2)  $u(x, y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C^1(D_0 \cup A_1E \cup EA_2) \wedge C^2(D_0)$ ; 3)  $\max_{D_0} |u(x, y)| = |u(Q)| > 0$ . Тогда, если  $Q = (x_0, 0)$ ,  $a_1 < x_0 < a_2$ ,  $x_0 \neq e$ , то

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \partial |u(x_0, y)| / \partial y < 0.$$

**Лемма 3.** Пусть: 1) выполнены условия 1) – 3) леммы 2; 2) функция  $|u(x, y)|$  имеет изолированный положительный максимум  $|u(Q)|$  в точке  $E$ ; 3) в малой окрестности точки  $E$ : а) функция  $K(y)u_x^2 + u_y^2$  суммируема; б)  $2(e, Le) - A_x - B_y \leq 0$ ,  $B(x, 0) \geq 0$ . Тогда в любой выколотой окрестности  $\dot{U} \subset A_1A_2$  точки  $E$  найдется точка  $Q_1 = (x_1, 0) \in \dot{U}$  такая, что

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \partial |u(x_1, y)| / \partial y < 0.$$

В областях  $D_1$  и  $D_2$  перейдем в характеристические координаты  $(\xi, \eta)$ , тогда система (1) примет вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + au_{\xi} + bu_{\eta} + cu = 0, \quad (2)$$

где

$$a(\xi, \eta) = \frac{1}{4K} \left( A + B\sqrt{-K} - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right), c(\xi, \eta) = \frac{C}{4K}, b(\xi, \eta) = \frac{1}{4K} \left( A - B\sqrt{-K} + \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right).$$

Область  $D_1$  отобразится в область  $\Delta_1$ , ограниченную отрезками  $A_1E(\eta = \xi)$ ,  $EA_1(\eta = e)$  и  $C_1A_1(\xi = a_1)$ , а область  $D_2$  отобразится в область  $\Delta_2$ , ограниченную отрезками  $EA_2(\eta = \xi)$ ,

$A_2 C_2(\eta = a_2)$  и  $C_2 E(\xi = e)$ . При этом за образами точек  $E, A_1, A_2, C_1$  и  $C_2$  оставлены те же обозначения преобразов.

Пусть  $\alpha = a\beta, \beta = \exp(\int b d\xi), \alpha^* = b\beta^*, \beta^* = \exp(\int a d\eta)$ . Функции  $a(\xi, \eta), b(\xi, \eta), c(\xi, \eta), a_2(\xi, \eta)$  непрерывны в  $\bar{\Delta}_1$ , кроме, быть может, отрезка  $A_1 E$  и удовлетворяют условию:

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_{a_1}^{\xi} \left( |\alpha_t| + \beta \sqrt{\sum_{i,k=1}^n c_{ik}^2} \right) dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \leq e. \quad (3)$$

Функции  $a(\xi, \eta), b(\xi, \eta), c(\xi, \eta), b_\eta(\xi, \eta)$  непрерывны в  $\bar{\Delta}_2$ , кроме, быть может, отрезка  $\bar{E} A_2$  и удовлетворяют условию:

$$\alpha^*(\xi, \eta) + \int_{\eta}^{a_2} \left( |\alpha_t^*| + \beta^* \sqrt{\sum_{i,k=1}^n c_{ik}^2} \right) dt < 0, \quad e \leq \xi < \eta < a_2. \quad (4)$$

**Определение 1.** Регулярным в  $\Delta_i, i = 1, 2$ , решением системы (2) назовем функцию  $u(\xi, \eta)$ , удовлетворяющую условиям:  $u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}_i) \wedge C^1(\Delta_i), u_{\xi\eta} \in C(\Delta_i); L_0 u(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta_i$ ; производная  $u_\eta (u_\xi)$  непрерывна на  $\bar{\Delta}_1 \setminus A_1 E (\bar{\Delta}_2 \setminus A_2 E)$ .

**Лемма 4.** Пусть: 1) коэффициенты системы (2) в областях  $\Delta_i, i = 1, 2$ , обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условиям (3) и (4); 2)  $u(\xi, \eta)$  - регулярное в  $\Delta_i$  решение системы (2), равное нулю на характеристике  $A_i C_i$ . Тогда максимум  $|u(\xi, \eta)|$  достигается только на отрезке  $A_i E \setminus A_i$ .

**Определение 2.** Регулярным в  $D$  решением системы (1) назовем функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям задачи Геллерстедта и, кроме того, производная  $u_\eta (u_\xi)$  непрерывна на множестве  $\bar{D}_1 \setminus A_1 E (\bar{D}_2 \setminus A_2 E)$ .

**Теорема.** Пусть: 1)  $C(x, y)$  - неположительно определенная матрица в  $D_0$ , 2) выполнено условие 3) леммы 3; 3) коэффициенты системы (1) в областях  $D_1$  и  $D_2$ , в характеристических координатах  $(\xi, \eta)$ , удовлетворяют, соответственно, условиям (3) и (4); 4)  $u(x, y)$  - регулярное в  $D$  решение системы (1), равное нулю на характеристиках  $A_1 C_1$  и  $A_2 C_2$ . Тогда максимум  $|u(x, y)|$  достигается только на кривой  $\Gamma$ .

Отсюда следует единственность решения задачи  $G$  для системы (1) без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую  $\Gamma$ .

Доказательство приведенных здесь утверждений проводится аналогично [1].

## Литература

1. Сабитов К.В. Экстремальные свойства модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. №1. С. 33-36.

**ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ  
ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА**

Сабитов К.Б., Карамова А.А. (Г. Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$LW \equiv \operatorname{sgn} x \cdot W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} + W_{zz} = 0,$$

в области  $G = D \times (0, \pi)$ , где  $D$  - область плоскости  $\mathbb{R}_{xy}^2$ , ограниченная при  $x, y > 0$  четвертью окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , с концами в точках  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ; при  $x > 0, y < 0$  и при  $x < 0, y > 0$  - характеристиками  $C_1 C_2$  ( $x + y = 0$ ),  $C_1 A$  ( $x - y = 1$ ),  $C_2 B$  ( $y - x = 1$ ). Обозначим через  $S$  часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 1, x, y > 0, z \in [0, \pi]$ ;  $G_0 = G \cap \{x, y > 0\}$ ;  $G_1 = G \cap \{x > 0, y < 0\}$ ;  $G_2 = G \cap \{x < 0, y > 0\}$ .

**Задача Трикоми.** Найти функцию  $W(x, y, z)$ , удовлетворяющую условиям:  $W(x, y, z) \in C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2)$ ;

$$LW(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2,$$

$$W(x, y, z) \Big|_S = V(r, \varphi, z) \Big|_{r=1} = F(\varphi, z), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad z \in [0, \pi],$$

$$W(x, -x, z) = 0, \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad z \in [0, \pi]; \quad W(x, y, 0) = W(x, y, \pi) = 0.$$

**Теорема.** Если функция  $F(\varphi, z)$  по переменной  $\varphi$  удовлетворяет на отрезке  $[0, \pi/2]$  условию Гельдера с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , а по переменной  $z$  на отрезке  $[0, \pi]$  условию Гельдера с показателем  $\beta \in (0, 1]$ ,  $F(\varphi, 0) = F(\varphi, \pi) = 0$ ,  $F(0, z) = F(\pi/2, z) = 0$ , то существует решение задачи  $T$  и оно задается формулами

$$W(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin \left[ (2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right] \frac{I_{2k-1}(nr)}{I_{2k-1}(n)}, & (x, y, z) \in G_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^{2k-1} \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2k-1}(n)}, & (x, y, z) \in G_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_{nk} \sin nz \left( \frac{y+x}{y-x} \right)^{2k-1} \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{y^2-x^2})}{I_{2k-1}(n)}, & (x, y, z) \in G_2, \end{cases}$$

где  $f_{nk}$  находятся из разложения функции  $P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi, z) \sin nz dz$  в ряд по системе синусов [1]. При этом функция  $W(x, y, z) \in C^\infty(G)$ .

1. Мойсеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. - 1992. - т.28, № 1. - с.110-121.

**ОБ УСЛОВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА**

Сабитов К.Б., Мугафаров М.Ф. (Стерлитамак)

Рассмотрим систему

$$L_i u \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iy} + A_i(x, y)u_{ix} + B_i(x, y)u_{iy} + \sum_{k=1}^n C_{ik}(x, y)u_k = 0, \quad (1)$$

где  $yK(y) > 0$  при  $y \neq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \geq 2$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  в области  $D \subset R^2$ , ограниченной кривой  $\Gamma$  из класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости  $y > 0$  с концами в точках  $A(0, 0)$  и  $B(l, 0)$ , и характеристиками  $AC$  и  $CB$  системы (1) при  $y < 0$ .

Пусть  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  – параметрические уравнения кривой  $\Gamma$ ,  $s$  – длина дуги кривой  $\Gamma$ , отсчитываемая от точки  $B$ ,  $S$  – длина кривой  $\Gamma$ ;  $\Gamma_0$  – “нормальная” кривая системы (1),  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ .

**Задача Трикоми.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$u(x, y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_+ \cup D_-)$ ;  $L_i u(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in D_+ \cup D_-$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $u(x(s), y(s)) = \Phi(s)$ ,  $0 \leq s \leq S$ ;  $u(x, y) = \Psi(x)$ ,  $(x, y) \in AC$ , где  $\Phi$  и  $\Psi$  – заданные достаточно гладкие вектор-функции,  $\Phi(S) = \Psi(0)$ .

Функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям задачи Трикоми, назовем регулярным решением задачи Трикоми для системы (1). Равномерный в  $\overline{D}$  предел последовательности регулярных решений задачи Трикоми назовем обобщенным решением задачи Трикоми для системы (1).

Предположим, что коэффициенты системы (1) обладают следующей гладкостью:

$K(y) \in C[y_{\min}, 0] \wedge C^2[y_{\min}, 0] \wedge C(0, y_{\max}] \wedge C^2(0, y_{\max}]$ ,  $A_i(x, y), B_i(x, y) \in C^1(\overline{D}_+) \wedge C^2(\overline{D}_-)$ ,  $C_{ik}(x, y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C(\overline{D}_-)$ , где  $y_{\max} = \max_{(x, y) \in \overline{D}} y$ ,  $y_{\min} =$

$\min_{(x, y) \in \overline{D}} y$

и удовлетворяют условиям теоремы о принципе экстремума [1].

**Теорема.** Пусть в области  $D$  при условии, когда кривая  $\Gamma$  оканчивается в точках  $A$  и  $B$  сколь угодно малыми дугами “нормальной” кривой, существует регулярное решение задачи  $T$  для системы (1). Тогда если функция  $\Phi(s)$  непрерывна на  $[0, S]$  и  $\Psi(x)$  – достаточно гладкая на  $AC$ ,  $\Psi(0) = \Phi(S) = \Phi(0) = 0$ , то существует единственное обобщенное решение  $u(x, y)$  задачи Трикоми с граничными данными  $u = \Phi$  на  $\Gamma$  и  $u = \Psi$  на  $AC$  при произвольном подходе кривой  $\Gamma$  к оси  $y = 0$ , за исключением случая, когда в достаточно малых окрестностях концов кривой  $\Gamma$  производная  $dx/ds$  меняет знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К.Б. Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, 4. С. 783-786.

## Имитационное моделирование в цифровой обработке сигналов с использованием объектно-ориентированного программирования на C++

Савинков А.Ю. (Воронеж)

Задача построения имитационных моделей систем цифровой обработки сигналов до настоящего времени не является полностью формализованной. Основная проблема состоит в необходимости разрешения противоречия между универсальностью пакетов имитационного моделирования и быстродействием программной модели. Громоздкие универсальные объекты, предоставляемые пакетами имитационного моделирования, в большинстве случаев не претендуют на оптимальность организации вычислений. В тоже время, отказ от использования готовых универсальных пакетов имитационного моделирования и переход к разработке специализированных симуляторов, нацеленных на конкретные задачи, позволяет достичь очень высокого быстродействия программной модели, особенно при использовании такого эффективного языка программирования как C++. Окончательно стандартизированный летом 1998 года, C++ предоставляет широкий выбор инструментов для поддержки численных методов. Большинство новых возможностей локализовано в библиотеке STL (Standard Template Library). Будучи дополненным эффективной библиотекой классов, ориентированных на моделирование цифровой обработки сигналов, C++ становится очень мощным инструментом для имитационного моделирования.

Класс языка C++ это совокупность данных и возможных действий над ними, вместе представляющие в программе абстракцию объекта предметной области исследования. При этом данные класса описывают состояние объекта, а действия, выражаемые функциями языка C++, описывают возможные переходы между состояниями под воздействием внешних факторов и хода времени. Важнейшим элементом парадигмы объектно-ориентированного программирования является наследование, т.е. построение новых классов на базе уже существующих. Наследование описывает построение сложной системы из ее подсистем, при этом устанавливается необходимос взаимодействие между подсистемами. Наследование в C++ позволяет легко учесть и такое взаимодействие компонентов сложной системы, при котором изменяется их поведение по отношению к поведению вне системы.

Классы библиотеки моделирования цифровой обработки сигналов должны обеспечить непосредственную поддержку основных абстракций предметной области, предоставляя базовые элементы для построения имитационной модели. Целесообразно организовать несколько уровней библиотек. Базовые библиотеки предоставляют набор базовых операций цифровой обработки сигналов, достаточно крупных, чтобы облегчить использование, но в тоже время достаточно универсальных, чтобы иметь широкое применение в различных системах. Хорошими кандидатами на размещение в базовой библиотеке являются такие объекты как цифровые фильтры, генераторы сигналов, кодеры и декодеры, различные преобразования, например FFT или FHT. Также базовая библиотека должна предоставлять основные средства анализа сигналов, представленные такими объектами как осциллограф или спектроанализатор. Использование этих объектов не должно требовать от пользователей выполнения специальных действий по организации графического вывода. Производные библиотеки содержат более крупные объекты, происходящие от объектов базовой библиотеки или инкапсулирующие их. Объекты производных библиотек представляют крупные абстракции, характерные для ограниченного класса систем. Примером такого объекта может быть передатчик, построенный в соответствии со стандартом конкретной системы связи.

Наличие специализированных библиотек моделирования цифровой обработки сигналов позволяет специалистам, проводящим моделирование, сосредоточиться непосредственно на решении задачи в терминах, принятых в их области знаний, а не на проблемах формализации модели и программирования. Эти специалисты теперь не обязаны быть экспертами в программировании для того, чтобы написать хороший симулятор. Наличие отлаженных модулей, реализующих достаточно крупные объекты исследуемой системы, резко снижают риск получения ошибочных результатов. В конечном итоге существенно сокращаются затраты времени и сил как на разработку программной модели, так и на последующее моделирование.

### Литература

1. Бьерн Страуструп. Язык программирования C++. Третье издание, Москва: BINOM, Санкт-Петербург: Невский Диалект, 1999.
2. Гради Буч. Объектно-ориентированный анализ и проектирование. Второе издание, Москва: BINOM, Санкт-Петербург: Невский Диалект, 1998.

**КОРРЕКТНОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ**  
**Савченко Г.Б. (Воронеж)**

Рассматривается задача

$$\frac{du}{dt} - A(-iD)u = f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u|_{t=a}, \quad (2)$$

где  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$  — заданная, а  $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$  — искомая вектор-функция, определенные в слое  $(0 \leq t \leq a, x \in \mathbb{R}^m)$ . Здесь  $A(-iD)$  — дифференциальный оператор по  $x$  с постоянными коэффициентами.

Корректность задачи в скалярном случае, когда  $x$  пробегает  $m$ -мерный тор, впервые была исследована А.А.Дезиным [1]. Обобщение этих результатов для характеристических матриц  $A(s)$  специального вида было проведено в [2]. Доказана теорема, позволяющая выделить классы  $L_2$ -корректных граничных задач.

Для систем общего вида уже при  $n = 2$  условие

$$\left\| \left( E - \exp(aA(s)) \right)^{-1} \right\| \leq C \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

не является достаточным для  $L_2$ -корректности. Корректность соответствующих задач доказана в дифференциальной  $L_2$ -норме.

### Литература

1. Дезин А.А. Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1967. Т. 31.1. С. 61–86.
2. Савченко Г.Б. О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. XIV. 11(1978). С. 2079–2082.

## МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В СПЕЦИАЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ

Салаватова С.С. (Стерлитамак)

Для управления и самоуправления процессом формирования специалиста, необходимо, чтобы и преподаватель, и студент имели модель будущей деятельности. Попытки изучения труда и личности приводят к созданию различного рода моделей специалиста: квалификационных характеристик, профессиограмм, профессиональных карт и т.п.

В своей опытно-экспериментальной работе мы используем профессиональную карту, выступающую как модель деятельности учителя математики. Используемая нами профессиональная карта представляет собой модифицированный вариант карты, составленной профессором Казанского педагогического университета Н.А. Половниковой. К восьми общепедагогическим функциям учителя: информационной, проектировочно-конструктивной, коммуникативной, организационной, развивающей, ориентационно-воспитательной, мобилизационной, гностической - мы добавили специальную (математическую) функцию. Каждая функция включает ряд умений, опирающихся на соответствующие знания. Так, специальная функция включает умения осуществлять логико-методический анализ конкретных разделов и тем школьного курса математики, а также понятий, аксиом и теорем, применять локальные технологии работы над математическими понятиями, теоремами, задачами, проводить все этапы математического моделирования, использовать основные методы математики для решения различных задач и др. Описанная профессиональная карта удобна в оперативном использовании, согласуется с исследованиями структуры профессионально-педагогической деятельности.

Обращение к профессиональной карте позволяет преподавателю четко ставить цели каждого занятия, как специальные, так и общепрофессиональные, а студенту - сознательно формировать необходимые для будущей работы умения, оценивать значение каждого предмета в достижении главной цели его пребывания в вузе: формирования способности к творческой деятельности учителя математики.

Разумеется, получение номенклатуры профессиональных и социальных черт личности учителя вовсе не достаточно для достижения целей педвуза, поскольку в этой номенклатуре не содержится "ключа" к формированию необходимых умений и качеств. В связи с этим, мы продолжили свои исследования в направлении создания процессуальной модели деятельности учителя математики. Процессуальная модель деятельности учителя математики содержит описания технологических компонентов деятельности учителя математики ( локальный, методический и дидактический уровни). Результаты констатирующего исследования по этому направлению будут доложены в выступлениях.



Нейронно-сетевой метод прогнозирования налоговых  
поступлений  
Секерин А.В. (Орел).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 99-02-00073а). Рассматривается задача краткосрочного прогнозирования налоговых поступлений в региональный (областной) бюджет на основе статистических данных по краткосрочным экономическим индикаторам, публикуемым в открытой печати. Искомая зависимость будущих налоговых поступлений от текущих значений индикаторов находится путем нейронно- сетевого анализа статистических данных. На основе статистических данных по Орловской области были собраны данные за пять лет по 210 краткосрочным (ежемесячным) экономическим индикаторам. Методами корреляционного анализа были отобраны 67 индикаторов, как наиболее влияющие на поступления по налогу на добавленную стоимость. Таблица данных по этим индикаторам использовалась для настройки нейронной сети (использовался нейронный симулятор BrainMaker Pro 3.11). Настроенная нейронная сеть была подвергнута тестированию на данных, не использовавшихся для ее обучения (около 10% данных). Результаты данного тестирования (имитация прогнозирования) показали среднюю ошибку прогнозирования 25%. Настроенная нейронная сеть использовалась для оценки эластичности влияния различных факторов на налоговые поступления. В частности установлено, что среди производственных показателей в Орловской области наибольший эффект по увеличению поступлений по НДС дают рост производства потребительских товаров, производства мясных продуктов, производства кирпича, а также увеличение объема грузовых перевозок железнодорожным транспортом.

Эти результаты позволяют сделать вывод о перспективности использования нейронно-сетевой технологии для прогнозирования доходной части областного бюджета. Предполагается в дальнейшем рассмотреть аналогичную задачу для прогнозирования поступлений по налогу на прибыль и по подоходному налогу с физических лиц.



## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА.

Семькина Н.А. (Тверь)

Требуется найти минимум функционала, определенного на отрезке  $[0, T]$ , где  $T$  - фиксировано, состоящего из интегрального и терминального слагаемых.

$$J(u) = \int_0^T [(a(t), x(t)) + \mu(u(t), u(t))] dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \inf$$

При динамических ограничениях, задаваемых системой квазилинейных неоднородных уравнений  $\dot{x}(t) = P(t)x + Q(t)u + \varepsilon K(x)$ , линейных фазовых ограничениях интегрального типа

$$B_1 \leq \int_0^T \rho(t)x(t) dt \leq B_2,$$

и ограничениях на управление  $u(t) \in U(t) \subset R^r$ , почти всюду  $t \in [0, T]$ . Предположим, что  $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t)$  является абсолютно непрерывной функцией на  $[0, T]$ , а функция управления  $u(t) = u_1(t), \dots, u_r(t)$  - кусочно-непрерывной. В данной задаче  $a(t)$  -  $n$ -мерный вектор,  $P(t)$  и  $Q(t)$  - матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times r$  соответственно,  $\rho(t)$  - матрица размера  $n \times s$ .  $B_i \subset R^s$ ,  $i = 1, 2$  - заданные вектора;  $\mu, \varepsilon$  - константы,  $K(x)$  -  $n$ -мерная вектор-функция.

Исходную задачу можно свести к трем краевым задачам принципа максимума Понтрягина.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= P(t)x + \frac{1}{2\mu} Q(t)Q^T(t)p_1(t) + \varepsilon K(x), \\ \dot{y}(t) &= \rho(t)x, \quad y(0) = 0, \\ \dot{p}_1(t) &= a(t) - P^T(t)p_1(t) - \rho^T(t)p_2(t) - \varepsilon p_1(t) \frac{\partial K}{\partial x}(x), \\ p_2(t) &= \text{const}, \quad p_1(0) = 0, \quad p_1(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x(T)}, \end{aligned}$$

которые отличаются только граничными условиями а)  $y(T) = B_1$ , б)  $y(T) = B_2$ , в)  $p_2(t) = 0$ .

Строится синтез оптимального управления на основе принципа Беллмана и формулируются достаточные условия оптимальности. Для решения задачи применяются следующие численные методы: метод штрафных функций, метод градиентного спуска и метод сопряженного градиента.

## ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ.

Сергеева Т.С. (Ставрополь)

Бесконечный аналог известной модели Леонтьева-Форда записывается в виде следующей системы интегральных неравенств:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &\geq \int_0^t K_1[t, s, x(s), y(s)] ds + f_1(t), \\ y(t) &\geq \int_0^t K_2[t, s, x(s), y(s)] ds - f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь  $K_1[t, s, u, v]$ ,  $K_2[t, s, u, v]$  – заданные для  $t, s \in [0; 1]$  и  $u \geq 0, v \geq 0$ , непрерывные по  $t, s, u, v$ , принимающие неотрицательные значения в области своего определения,  $f_i(t) \geq 0$  – заданные функции из  $L_2[0; 1]$ .

Предполагается, что функции  $K_i$  монотонно возрастают по  $u, v$  и что интегральные операторы в правой части (3.1) действуют из  $L_2[0; 1] \times L_2[0; 1]$  в  $L_2[0; 1]$ .

Будем считать, что существуют такие неотрицательные функции  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{y}(t)$  из  $L_2[0; 1]$ , которые удовлетворяют системе неравенств (3.1).

*Определение 3.1.* Множество неотрицательных функций  $x(t)$ ,  $y(t) \in L_2[0; 1]$ , удовлетворяющих системе неравенств (3.1), назовем множеством планов модели (3.1) и обозначим это множество функций через  $\Pi$ .

Приведем еще одно свойство решения обобщенной модели.

*Теорема 3.2.* Во всех точках  $\bar{t} \in [0; 1]$ , для которых в (3.1) второе неравенство выполняется со знаком строгого неравенства имеет место равенство:

$$y^*(\bar{t}) = 0.$$

## ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Солощенко М.Ю. (Стерлитамак)

Невозможно представить школьный курс математики без задач. В программе по математике для средней общеобразовательной школы, задачи рассматриваются и как цель и как средство обучения. Именно решение задач помогает осилить изучаемый теоретический материал, показывает применение того или иного теоретического положения. Важно, чтобы задачный материал наиболее полно учитывал особенности интеллектуального и мотивационно-потребностного развития обучаемых. Таким требованиям, по нашему мнению, удовлетворяют нестандартные (проблемные) задачи. При решении нестандартных задач развивается интуиция и вырабатывается умение использовать изученные приемы в новых, измененных ситуациях, разрабатывать новые приемы и способы.

Для того, чтобы научить школьников решать задачи (в том числе и нестандартные) учитель должен уметь сам решать их, т.к. никакие рекомендации и указания не помогут учителю в обучении решению задач, если он сам не умеет их решать. Поэтому на занятиях по практикуму решения математических задач мы уделяем внимание обучению студентов решению нестандартных задач.

Под нестандартной задачей, мы понимаем задачу, алгоритм которой учащимся неизвестен, т.е. учащиеся заранее не знают ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение. Для решения таких задач, обучаемые должны сами изобрести (составить) способ их решения. Работу над задачей лучше осуществлять в несколько этапов (за основу бралась схема исследования задачи применяемая в работе "Воспитание систематического мышления в процессе решения малых творческих задач" П.Я.Гальпериним и В.Л.Даниловой): - исследование задачи начинается с уточнения искомого: что оно такое, из каких частей состоит, какими свойствами они обладают и в каких отношениях находятся; обязательны ли эти отношения или возможны и другие, какие именно; - обращение к условию задачи с целью установить, что в них есть для получения искомого (с установленными его свойствами), чего не хватает и можно ли получить недостающее из того, что дано. Каждый студент, работая в паре, высказывал свою догадку, а может даже и способ решения. Затем студенты объединялись в четверки, где как раз и начиналось систематическое исследование задачи. Каждая пара студентов предлагала свои версии решения на совместное обсуждение. Любое предположение рассматривалось с разных точек зрения. В результате такой работы обучаемые находят решение задачи (проблемной ситуации), а также у них вырабатывается умение совместного коллегиального сотрудничества.

**Задачи в начальном курсе математики**  
В.М. Сорокина (г. Воронеж)

Чтобы ребенок любил математику, хотел заниматься, необходимо вызвать интерес к самому предмету. В этом помогут игровые и занимательные задания. Очень нравятся всем детям задачи со сказочным сюжетом. Сказочная форма позволяет нередко ввести ребят в мир математики, используя увлекательную ситуацию.

Задача. Во время наводнения рыбак Окунев снял с острова зайцев. Далее он спас еще некоторое количество зайцев, снимая их с пней. Интересно, что это число записывается теми же цифрами, что и число зайцев, спасенных с острова, но в обратном порядке. Число зайцев с острова больше, чем число зайцев, снятых с пней. Оба числа двузначные.

Мимо бревно суковатое плыло

Сидя и стоя, и лежа пластом,

Зайцев десяток спасалось на нем.

Окунев и этих зайцев взял с собой. Всего рыбак спас 43 зайца. Сколько зайцев спас Окунев с острова?

В мире рыночной экономики необходимо знакомить детей с первоначальными рыночными понятиями (обмен, товар, деньги, прибыль и др.). И здесь поможет математика. Чтобы показать, как увлекателен и интересен мир, связанный с экономикой, можно отправиться с детьми в путешествие по стране, названной Экономикой, начиная с древних времен и до наших дней. Все рыночные понятия вводить не формально, а в ходе решения коммерческих задач различного содержания. Необходимо уделять большое внимание логическим задачам на денежные расчеты, взвешивание, планирование своих действий в различных условиях и т.д. Например, такая задача.

Охотник Тигров добыл за сезон 48 шкурок белок. Каждые четыре шкуры он может обменять на 1 мешок пшеницы, каждые 2 шкуры — на 8 подков. Хватит ли ему добытых шкур для того, чтобы подковать 4 лошади и получить 3 мешка пшеницы?

Считаю, что уже с малых лет можно и нужно развивать у детей так называемое «рыночное мышление», и что так можно приобщить их к простейшим рыночным процессам. Думаю, что таким образом можно показать прикладную направленность изучаемого школьниками начального курса математики, его неразрывную связь с практической жизнью людей.

О. Староверов (ЦЭМИ РАН, Москва)

Преподавание экономических дисциплин математически подготовленным студентам (независимо от их возраста) обладает только математике присущей особенностью. Они (студенты) привыкли к аксиоматическому подходу в изложениях, который и следует использовать. Сейчас уже накоплено немало данных и описано много разделов, в которых уже есть, по сути, аксиоматика, хотя часто используется другая терминология: например, вместо понятия "аксиома" употребляют термин "предположение", "свойство" и т.д.

Дело в том, что в экономике, вообще, и в демографии, в частности, много явлений, которые на протяжении века, а иногда и более, остаются неизменными. Например, от Мальтуса пошло, что число новорожденных пропорционально периоду времени. В этом случае демографы называют их "законами природы", которые по сути свойства рассматриваемых процессов или явлений. Так в конце прошлого века Е. Равенштейн сформулировал 11 законов миграции, некоторые из которых можно принять за аксиомы для построения модели движения населения.

Модель позволяет находить и другие ее свойства, как известные, так и новое ранее не обнаруженные. Получая из аксиом уже известные свойства, скажем, миграции, математик ничего нового не говорит людям, изучающим миграцию, - он только убеждается в работоспособности модели и аксиом (предположений), ее определяющих, по отображению явления и его свойств. Поэтому математикам часто говорят, что они занимаются не делом, более того, им доверяют с трудом, когда из моделей извлекается что-либо новое, до сих пор не описанное. Специалисты, в отличие от студентов, должны в первую очередь каким-либо способом убедиться, что это действительно так, и лишь затем они будут использовать вновь полученное.

Подобная ситуация и в демографии, где вот уже полтора века употребляется метод передвижки возрастов, который получил математическую формулировку в виде модели только в период Второй Мировой Войны. Совершенно также обстоят дела и в отдельных вопросах социологии, например, при решении проблем рынка труда, зависящего от интересов как работников так и работодателей или задачи о распределении социальных пособий среди малоимущих. Например, считается, что передача благ от малоимущих к более состоятельным увеличивает бедность. Такое предположение вполне можно взять в качестве аксиомы.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Степанцов В.А. (Воронеж)

Возможности гибкой производственной системы (ГПС) по изменению номенклатуры выпускаемой продукции можно описать "коэффициентом гибкости"  $K_r$  системы, величина которого характеризует относительное количество времени, эффективно используемое в производственном процессе. В данном случае коэффициент гибкости представим в виде функциональной зависимости

$$K_r(T_{пл}) = 1 - \sum_i (T_{пп}^i / T_{пр}^i), \quad i = \overline{1, I(T_{пл})},$$

где  $T_{пл}$  - период планирования,  $T_{пп}^i$  - время на переналадку для выпуска деталей  $i$ -й номенклатуры,  $T_{пр}^i$  - время производственного процесса по выпуску деталей  $i$ -й номенклатуры  $I(T_{пл})$  - число изменений номенклатуры продукции за плановый период.

В этих условиях задача синтеза оптимальной структуры ГПС сводится к оптимизации  $K_r(T_{пл}) \rightarrow \max$ ,  $I(T_{пл}) \rightarrow \min$  при наличии ограничений на структурную организацию производственной системы и технологические особенности используемого оборудования. Диапазон изменений величины  $I(T_{пл})$  ограничивается заданной номенклатурой выпускаемых деталей, определяющей оптимальные классификационные разбиения деталей и групповые технологические процессы их выпуска. В свою очередь, величины  $T_{пп}^i$  и  $T_{пр}^i$  зависят как от номенклатуры сменяемых в производственном процессе деталей, так и от очередности запуска групп деталей в производство. Поэтому, максимизируя величину  $K_r(T_{пл})$  на всем интервале планирования, мы тем самым оптимизируем порядок запуска деталей и в целом структуру производственного процесса ГПС.



УСТОЙЧИВОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ  
УПРАВЛЯЕМОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
Сумин В.И., Чернов А.В. (Нижний Новгород)

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченное открытое связное множество переменных  $\hat{t} \equiv \{t_1, \dots, t_n\}$ ;  $t \equiv \{t_0, \hat{t}\} \in [0, T] \times Q \equiv \Pi$ ;  $S = (0, T] \times \partial Q$ ;  $T > 0$ . Рассмотрим краевую задачу для полулинейного гиперболического уравнения общего вида

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(t)x''_{i,t_j} + \sum_{i=0}^n a_i(t)x'_{t_i} = g(t, x(t), u(t)), & t \in \Pi; \\ x(0, \hat{t}) = \psi^{(1)}(\hat{t}), \hat{t} \in Q; x'_{t_0}(0, \hat{t}) = \psi^{(2)}(\hat{t}), \hat{t} \in Q; x|_S = 0, \end{cases}$$

где  $\psi \equiv \{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\} \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q) \times L_2(Q) \equiv \Psi$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset L_2^s(\Pi)$  – ограниченное множество;  $a_{00}(t) = 1$ ,  $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$  ( $i, j = \overline{0, n}$ ),  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \leq$

$d \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  ( $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ ),  $t \in \bar{\Pi}$ ;  $d < 0$ ; все  $a_{ij}(\cdot)$  (соотв. все  $a_i(\cdot)$ ) непрерывны в

$\bar{\Pi}$  и имеют ограниченные обобщенные производные до 2-го (соотв. до 1-го) порядка, причем производные 1-го порядка от  $a_{ij}(\cdot)$  непрерывны; функция  $g(t, y, u) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по  $t$  для всех  $\{y, u\}$  и непрерывно дифференцируема по  $y$  для всех  $u$  при п.в.  $t$ , при этом существует  $q \in [1, \frac{2(n+1)}{n-1})$  такое, что формулы  $G_u[y] \equiv g(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$ ,  $\hat{G}[y, u] \equiv g'_y(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$ , определяют оператор  $G_u : L_q(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$ ,  $\forall u \in \mathcal{D}$ , и ограниченный оператор

$\hat{G}[\cdot, \cdot] : L_q \times \mathcal{D} \rightarrow L_r$ ,  $q^{-1} + r^{-1} = 2^{-1}$ . Пусть  $\overset{\circ}{W}_2^{1,1}(\Pi)$  – замыкание в норме  $W_2^1(\Pi)$  класса гладких функций, исчезающих вблизи  $S$ ;  $\Omega$  – множество тех пар  $\{u, \psi\} \in \mathcal{D} \times \Psi$ , для каждой из которых задача (1) имеет единственное обобщенное в смысле  $\overset{\circ}{W}_2^{1,1}(\Pi)$  решение  $x[u, \psi]$  (ср. [1], гл.3).

**Теорема.**  $\forall \{u_0, \psi_0\} \in \Omega \exists$  числа  $\epsilon, C > 0$ : если  $\{u, \psi\} \in \mathcal{D} \times \Psi$  и

$$R(u, \psi) \equiv \|g(\cdot, x_0(\cdot), u(\cdot)) - g(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot))\|_{L_2(\Pi)} + \|\psi - \psi_0\|_{\Psi} < \epsilon,$$

то  $\{u, \psi\} \in \Omega$ , причем  $\|x[u, \psi](\cdot) - x[u_0, \psi_0](\cdot)\|_{L_q(\Pi)} < C \cdot R(u, \psi)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-01-00793.

#### Литература

1. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., 1953.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
АНАЛИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ НЕБЕСНОЙ  
МЕХАНИКИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.**

Тарушкин В.Т., Тарушкина Л.Т., Юрков А.В.

(С.Петербург)

Рассматривается использование систем DERIVE, DEDUCTIO и других для моделирования на ПЭВМ классических и современных задач небесной механики. Отмечается, что язык системы DERIVE позволяет лаконично, в форме близкой к традиционной решать различные аналитические задачи. Например, решение уравнения Кеплера  $y = x - e \sin x, e \in (0, 0.6]$  в виде ряда Лагранжа  $x = y + e \sin y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sin^n y$  запишется в виде двух строк:

$$1 : U(n) := \frac{e^n}{n!} \left[ \frac{d}{dy} \right]^{n-1} \sin^n y$$

$$2 : F(x) := y + e \sin y + \Phi_{n=2}^m U(n)$$

допуская простое графическое и численное моделирование для различных  $e, m$ . Плоская модель эллиптического движения девяти больших планет солнечной системы занимает на этом языке 18 строк и допускает на дисплее различные графические изображения как всех планет, так и их части. Однако в процессе эксплуатации обнаружено ряд недостатков системы DERIVE, что стимулирует развитие других систем. В системе DEDUCTIO формулируется подсистема DF - дифференциальное поле, различные расширения и модели которого используются для моделирования теоремы Коши из аналитической теории дифференциальных уравнений. Задачи рассматриваются как в детерминированном, так и в стохастическом варианте для современных задач небесной механики. Для этого рассматривается стохастический аналог ряда Тейлора, стохастический аналог теоремы Коши и другие вопросы теории дифференциальных уравнений.

## К ВОПРОСУ О МЕТОДИКЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРВЫХ ПОНЯТИЙ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

С.А.Титоренко (ВГПУ, г.Воронеж)

Как известно, понятие – это форма мышления, в которой отражены существенные (отличительные) свойства объектов изучения. [1, с.61].

В процессе формирования геометрических понятий необходимо учитывать особенность геометрии как науки и учебного предмета – в ней неразрывно связаны логика и воображение. Будучи наукой об идеальных, только мыслимых фигурах, она считается безусловно верной для реальных пространственных форм и отношений при предельном их уточнении.

С этим противоречием школьники сталкиваются уже при знакомстве с первыми геометрическими понятиями. Например, точка и прямая – основные понятия по аксиоматике А.В.Погорелова – хорошо известны учащимся из предшествующего опыта обучения и жизненной практики. Свойства этих геометрических фигур описываются аксиомами и от чертежа практически не зависят. Чертеж в тетради и на доске – это лишь “портрет” геометрической фигуры, а не она сама. Он похож на оригинал, но не более того. Действительно, даже крошечный прокол бумаги булавкой под микроскопом выглядит ровным отверстием, не похожим на точку в нашем представлении. Поэтому следует объяснить ученикам, какую роль в геометрии играет чертеж. Он помогает проводить логические рассуждения, обнаруживать новые свойства геометрических фигур, выделять существенные признаки понятий и т.д.

Выделение существенных признаков – важнейший этап в формировании геометрических понятий. Он, в свою очередь, предполагает широкое использование приема сопоставления (противопоставления), когда одни объекты преднамеренно сравниваются с другими с целью выявления их сходства и различия [2]. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что в геометрии сравнивают не только форму и размеры, но и взаимное расположение фигур. Наблюдение и сравнение геометрических объектов проводится по заранее подготовленным рисункам. Например, при изучении понятия “дополнительные полупрямые” учащимся предлагается сравнить расположение указанных на каждом из рисунков лучей и ответить на вопросы: на каком из рисунков лучи лежат на одной и той же прямой? На разных прямых? Какие из них имеют общую начальную точку? Какие из лучей совпадают?

Учитель сообщает учащимся, что полупрямые  $AB$  и  $AC$ , изображенные на рис. 1(в), называются дополнительными и формулирует с их помощью определение.

Постепенно роль учителя при выделении существенных признаков понятия снижается. Однако учитель продолжает формировать это умение и в дальнейшем, учитывая уровень его сформированности у учащихся, способ введения понятия и связь существенных признаков.

### Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Составители Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – Москва: Просвещение, 1985. – 336с.
2. Методические рекомендации по обучению математике в средней школе (методы и приемы). – Ленинград, 1990. –92с.

## ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

Глеуханова Н.Т. (г. Караганда)

Пусть  $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}_+^n$ . Определим следующие множества:  $\Gamma_m = \{r \in \mathbb{Z}^n : \prod_{j=1}^n \max(\tau_j, 1) \leq 2^m\}$ ,  $Y_k = \bigcup_{j=1}^n \{r \in \mathbb{Z}^n : \tau_j \leq 2^{k_j}\}$  называемые соответственно гиперболическим крестом и крестом. Соответствующие наилучшие приближения функции  $f$  в функциональном пространстве  $F$  определяются следующим образом:

$$E_{\Gamma_m}(f)_F = \inf_{\{c_r\}} \left\| f - \sum_{r \in \Gamma_m} c_r e^{2\pi r x} \right\|_F$$

$$E_{Y_k}(f)_F = \inf_{\{c_r\}} \left\| f - \sum_{r \in Y_k} c_r e^{2\pi r x} \right\|_F$$

Пусть  $W_{pq}^\alpha [0.1]^n$  пространство Соболева с доминирующей смешанной производной, определенное на базе анизотропного пространства Лоренца [1].

**Теорема 1** Пусть  $n \leq m, p < 2$ , тогда найдется квадратурная формула  $T_N(f) = \sum_{k=1}^N a_k f(t_k)$  с количеством узлов  $N = 2^{n-m+1}(m+2)^{n-1}$ , что

$$\sup_{\|f\|_{W_{p1}^{1/p} = 1}} \left| \int_{[0.1]^n} f(x) dx - T_N(f) \right| \leq c_{p,n,\alpha} \frac{m^{\frac{n-1}{p}}}{2^{m/p}} E_{\Gamma_{m-n}}(f)_{W_{p1}^{1/p}}.$$

**Теорема 2** Пусть  $n \leq m, p > 2$ , тогда найдется квадратурная формула  $T_N(f) = \sum_{k=1}^N a_k f(t_k)$  с количеством узлов  $N = 2^{n-m+1}(m+2)^{n-1}$ , что

$$\|J\|_{W_{p1}^{1/p} = 1} \left| \int_{[0.1]^n} f(x) dx - T_N(f) \right| \leq c_{p,n,\alpha} 2^{-m/p} \sum_{k_1 + \dots + k_n = m} E_{Y_k}(f)_{W_{p1}^{1/p}}.$$

[1] Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. App. - 1998. - N 2. - P. 243-275.

## О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА $\mathbb{R}^n$

Тюрин В.М. (Липецк)

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha,$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - мультииндекс,  $m$  - четное натуральное число,

$$x \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, D^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{d^{|\alpha|}}{dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n}}.$$

Основные предположения относительно оператора  $P$  состоят в следующем. Коэффициенты  $A_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow X$  являются функциями класса  $C^m$ ,  $X$  - унитарное пространство.

Пусть  $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$  - пространство Лебега ( $p \geq 1$ ),  $W^m(L^p)$  - пространство Соболева функций  $u \in L^p$ , у которых обобщенные производные  $D^\alpha u \in L^p$ . Пространства  $L^2$ ,  $W^m(L^2)$  наделены обычным образом структурой Гильбертова пространства. Оператор  $P$  в пространстве  $L^p$  имеет область определения  $D(P, L^p) = W^m(L^p)$ .

В спектральной теории эллиптические самосопряженные операторы занимают центральное место. Доклад посвящен изучению условий самосопряженности оператора  $P: D(P, L^2) \rightarrow L^2$  и некоторым другим вопросам. В частности, получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть оператор  $P: D(P, L^2) \rightarrow L^2$  симметричен, главная часть  $P_m$  оператора  $P$  представляет самосопряженный оператор в  $L^2$  с областью определения  $W^m(L^2)$ . Оператор  $P: D(P, L^2) \rightarrow L^2$  самосопряжен тогда и только тогда, когда оператор  $P$  равномерно эллиптивен на  $\mathbb{R}^n$ .

Обозначим  $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, X)$  пространство Степанова. Рассматривая оператор  $P$  одновременно в пространствах  $L^p$ ,  $M^p$ , приходим к замечательному факту.

**Теорема 2.**  $M^p$  - резольвента оператора  $P$  есть непрерывный оператор в  $L^p$ .

## О ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНДЕНШТРАУССА

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Многие вопросы наилучшего приближения в пространствах  $C(Q)$  достаточно подробно разработаны для случая, когда аппроксимирующее подпространство  $L$  либо конечномерно, либо  $\text{codim } L < +\infty$ . Если  $\dim L = \text{codim } L = +\infty$ , то для  $L$  в настоящее время нет даже достаточно эффективного для применения общего критерия подпространства существования. Естественно поэтому рассмотрение специальных классов подпространств.

**О п р е д е л е н и е.** Подпространство  $L \subset C(Q)$  назовем фактор-пространством Линденштраусса, если  $C(Q)/L$  есть пространство Линденштраусса.

Справедливо в частности

**Предложение 1.** Пусть  $Q$  — метризуемый компакт,  $\mu_n \in C^*(Q)$ ,  $\|\mu_n\| = 1$ ,  $L = \{f \in C(Q) : \mu_n(f) = 0, n = 1, 2, \dots\}$ . Тогда  $C(Q)/L$  изометрично пространству  $c_0$  тогда и только тогда, когда: 1) меры  $\mu_n$  дизъюнктивны, 2)  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} 0$ .

Отметим, что в [1] подпространства  $L \subset C(Q)$ , удовлетворяющие условиям предложения 1, применялись при исследовании операторов.

Для некоторых известных классов  $A$  пространств Линденштраусса получены необходимые и достаточные, достаточные, необходимые условия для того, чтобы фактор-пространство Линденштраусса  $L$ , для которого  $C(Q)/L \in A$ , было подпространством существования. Все утверждения являются следствиями соответствующих свойств мер аннулятора  $L^\perp$ .

**Теорема.** Существует метризуемый компакт  $Q$  и такое фактор-пространство Линденштраусса  $L \subset C(Q)$ , что аннулятор  $L^\perp$  несепарабелен и  $L^\perp$  не содержит функционалов, достигающих норму.

### Литература

1. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. М.: "Мир", 1970.

## О моделировании миграционных процессов. Фаталиев Н. К. (Махачкала).

При решении многих экономических задач необходимо учитывать социально-демографическую структуру населения и её динамику.

В этой связи возрастает роль исследований, связанных с изучением миграционных процессов.

В последнее время появились много интересных работ, посвящённых математическому описанию таких процессов. В докладе приводится краткий обзор некоторых из этих работ.

Распределение мигрантов по регионам вселения является основной характеристикой миграционного процесса. Значительная часть мигрантов населения обычно возвращается в прежний район проживания и становится коренным населением.

В работе рассматривается задача моделирования миграционного процесса с использованием марковских случайных процессов.

Исходным материалом для исследования является матрица  $P=(P_{ij}(t))$ , где  $P_{ij}(t)$  доля мигрантов, переходящих из района  $A_i$  в район  $A_j$  за время  $t$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), причём  $\sum_{j=1}^m P_{ij}(t)=1$  и  $P_{ii}(t)=0$ . С учётом коэффициента межрайонной миграции  $K_q(t)$  [1], поток мигрантов из одного района в другой определяется по формуле

$$n_{ij}(t) = K_q(t) P_{ij}(t) N_i(t),$$

где  $N_i(t)$  численность коренного населения  $i$ -го района.

В докладе приведены показатели миграции населения по данным миграционной службы Дагестана.

### Литература

1. Зуев Г. М., Сороко Е. А. Математическое описание миграционных процессов. Автоматика и телемеханика. *N7*, 1978.
2. Курман М. В. Актуальные вопросы демографии. "Статистика" 1976.

**НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА, МОДЕЛИРУЮЩИЕ ГАЗО-  
ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ**

Феоктистов В.В. (Москва)

Построение математических моделей прикладных задач в теории пограничного слоя приводит к нелинейным уравнениям переменного типа. К таким уравнениям относятся, в частности, уравнения со сменой направления параболичности. Наиболее известным источником уравнений переменного типа является газодинамика, к которым относятся нестационарные задачи пограничного слоя [1]. В работе [1] приведены нелинейные уравнения в частных производных, описывающие движение в динамическом и температурном пограничных слоях для задач формирования пограничного слоя, в которых постановка краевых задач для уравнений со знакопеременным коэффициентом при производной по  $\xi$  отличается от традиционной. Уравнение количества движения имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + 2(1-\beta)\xi(\xi - \frac{\partial f}{\partial \eta}) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + (1+s(2-\beta))f + 2(1-\beta)\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \gamma(1-\beta)\xi \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta - \beta(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + 2(1-\beta)\xi \gamma \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

Здесь  $u = \delta\phi/\delta y$ ,  $v = -\delta\phi/\delta x$ ,  $\phi(t, x, y) = x^s(t\xi/V^2)^{1/2}U(t, x)f(\xi, \eta)$ , для скорости во внешнем потоке  $U = u_\infty x^{m\eta}$ ,  $\xi = Ax/(Ut)$ ,  $\eta = Bx^{-s}y/(t\xi)^{1/2}$ ,  $A = (1-\beta/2)/(1-\beta)/(1-\gamma)$ ,  $B = A/[(2-\beta)v_0]^{1/2}$ .  $v_0$  - коэффициент кинематической вязкости,  $\beta = 2m/(m+1)$  - характеризует градиент давления,  $\gamma = n/(n+1)$  - параметр нестационарности потока,  $s$  - параметр осесимметричности ( $s=0$  - пл. течение). Краевые условия: - на поверхности тела ( $\eta = 0$ )  $f(\xi, 0) = 0$ ,  $\delta f(\xi, 0)/\delta \eta = 0$ ; - на внешней границе пограничного слоя ( $\eta = \infty$ )  $\delta f(\xi, \infty)/\delta \eta = 1$ . В силу того, что коэффициент при частной производной по  $\xi$  меняет знак, необходимо ставить краевые условия: при  $\xi = 0$ , ( $0 \leq \eta < \infty$ ),  $\delta f(0, \eta)/\delta \eta = \delta f_0(\eta)/\delta \eta$ ; при  $\xi = 1$ , ( $0 \leq \eta < \infty$ ),  $\delta f(1, \eta)/\delta \eta = \delta f_1(\eta)/\delta \eta$ ,  $f_1(\xi, \eta)$  - решение поставленной задачи для  $\xi \geq 1$ , с заданием начального распределения профиля скоростей  $\xi = \infty$ , ( $0 \leq \eta < \infty$ );  $\delta f(\infty, \eta)/\delta \eta = \delta f_t(\eta)/\delta \eta$ .

Методом асимптотических разложений решений получено распределение напряжения трения на поверхности тела для  $0 < \xi < 1$ ,  $\delta^2 f / \delta \eta^2 = \Omega(0) \{1 - \exp[-\lambda(1-\xi)/\xi/(1-\beta)]\} + \Omega(1) \exp[-\lambda(1-\xi)/\xi/(1-\beta)]$ .

$\lambda = 1.0164$ ,  $\Omega(0)$ ,  $\Omega(1)$  - напряжение трения при  $\xi=0$  и  $\xi=1$ .

1. Феоктистов В.В., Феоктистов П.В. Инвариантные решения нестационарных пограничных слоев и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана: Машиностроение. - 1997. - N 1. - С. 14-22.



## «Векторы в физике и математике в курсе средней школы»

Фёдорова Л.Б. (лицей №1, г.Воронеж)

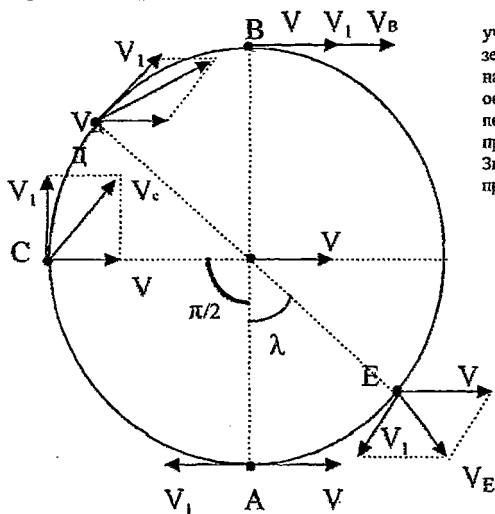
В настоящее время изучение темы «Векторы» на уроках математики проводится не в полном объеме, т.к. это не предусмотрено в соответствующих учебниках и тематическом планировании. Число практических занятий на данную тему весьма ограничено.

Однако вопросы сложения, вычитания векторов, разложения векторов на составляющие и их вычисление, проекции векторов на оси координат и перенос их в плоскости используются при изучении следующих тем по физике:

- «Равномерное прямолинейное движение»,
- «Сложение перемещений и скоростей»,
- «Движение тела, брошенного под углом к горизонту»,
- «Полное ускорение при неравномерном движении по окружности»,
- «Движение под действием нескольких сил».

При изучении математики в спецклассах предлагается «расширить» тему «Векторы», не увеличивая количество часов, включая в соответствии с планированием специально составленные практические занятия, посвященные отработке умений и навыков сложения, вычитания векторов с движением на плоскости, разложение векторов на составляющие и их вычисление. Для этой цели подобран и систематизирован ряд задач для решения на практических занятиях, в постановочной части которых некоторые физические процессы.

Примером может служить следующая задача: Велосипедист едет с постоянной скоростью  $V$  по прямолинейному участку дороги. Найти мгновенные скорости точек  $A, B, C, D, E$ , лежащие на ободе колеса и указанных на рисунке относительно земли.



При качении колеса по земле все его точки участвуют одновременно в двух движениях: вдоль земной поверхности с постоянной скоростью  $V$ , направлением которой все время горизонтально и вокруг оси с касательной скоростью  $V_1$ , величина которой постоянна, а направление меняется. При качении без проскальзывания скорости  $V$  и  $V_1$  равны по величине. Значение скоростей можно найти, складывая  $V$  и  $V_1$  по правилам сложения векторов.

$$V_A = V_1 - V = 0;$$

$$V_B = V_1 + V = 2V;$$

$$V_C = \sqrt{V_1^2 + V^2} = V\sqrt{2};$$

$$V_D = \sqrt{V_1^2 + V^2 + 2V_1V \cos \lambda} = 2V \cos \frac{\lambda}{2};$$

$$V_E = \sqrt{V_1^2 + V^2 - 2V_1V \cos \lambda} = 2V \sin \frac{\lambda}{2}$$

Таким образом, использование физики при изучении темы «Векторы» позволяет осуществить межпредметные связи и вооружить учащихся математическим инструментарием для решения физических задач.

## ЦЕНТР ИЛИ ФОКУС ?

Филер З.Е. (Кировоград, Украина)

Поставленная А. Пуанкаре (дек.1881) проблема центра и фокуса для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y + P_1(x, y), \quad \dot{y} = -x + P_2(x, y), \quad P_k(0,0) = dP_k(0,0) = 0$$

для однородных многочленов  $P_k(x, y)$  степени  $m \geq 2$  решена Н.Н.Гавриловым (1996, №9 ДАН Укр.). Им разработан «эффективный алгоритм» установления центра. Даже для простого случая  $m=2$  он требует громоздких выкладок. Нами показано, что для  $P_k = A_k x^2 + 2B_k xy + C_k y^2$  критерием центра являются равенства  $A_k + C_k = 0$ , когда  $P_k = A_k u(x, y) + B_k v(x, y)$ , а функции  $u = x^2 - y^2 - Rez^2$ ,  $v = 2xy = Imz^2$ ,  $z = x + iy$ . Для многочленов  $P(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$  центр будет лишь при  $3A + C = 0$ ,  $B + 3D = 0$ , когда  $P = Au - Dv$  и функции  $u = x^3 - 3xy^2 - Rez^3$ ,  $v = 3x^2y - y^3 - Imz^3$ . Для аналитических в окрестности точки покоя  $O(0,0)$  функций  $P_k$ , у которых  $dP_k(0,0) = 0$ , центр будет, если они представимы в виде  $Au(x, y) + Bv(x, y)$ , где  $u = Re f(z)$ ,  $v = Im f(z)$  и  $f(z)$  аналитична. Для этого  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  должны удовлетворять уравнению Лапласа. Условия центра  $\Delta P_k = 0$ ,  $k=1,2$  дополняются требованиями отсутствия у функций  $P_k(acost, -asint)$  постоянных составляющих и первых гармоник для малых начальных отклонений  $x(0) = a$ ,  $y(0) = 0$ . Причиной является представимость «справых частей» и решения в виде рядов Фурье. При малом  $a$  решение  $((x(t), y(t)))$  определяется первым приближением решения эквивалентного интегрального уравнения

$$Z(t) = ae^{-it} + \int_0^t P\left(\frac{1}{2}z(\tau) + z(\tau), \frac{1}{2}(\bar{z}(\tau) - z(\tau))\right) e^{i(\tau-t)} d\tau, \quad P = P_1 + iP_2.$$

(по  $2\pi$ -периодично при возможности представления

$$P_1(a \cos t, -a \sin t) = \sum_{m=2}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt).$$

## СОЛНЕЧНО-ЗЕМНЫЕ СВЯЗИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

З.Е. Филлер, А.Н. Батенко, Р.С. Шапоренко (Кировоград, Украина)

Анализируются работы А.Л. Чижевского по проблемам солнечной активности (СА), её влиянию на природу, человека и общество. Принимается планетарная гипотеза о причинах изменения СА. Магнитные торы у поверхности фотосферы «вморожены» в плазменную среду и деформируются в радиальном направлении под действием центробежных сил, вызванных сложным вращением Солнца вместе с планетами; торы движутся вдоль оси вращения под влиянием осевой составляющей ускорения Солнца относительно центра масс солнечной системы. Установлена корреляция чисел Вольфа  $W$  (характеристики количества и кучности пятен на видимой части диска) с ускорением Солнца относительно барицентра. Это позволяет прогнозировать среднегодовые значения  $W$ . Предлагается брать числа  $W$  со знаком, изменяющимся при переходе  $W$  через нуль. Это соответствует «обмену» торами при их переходе через экватор на этапе минимума СА. Ежедневные колебания СА, вызванные собственным вращением Солнца и приливными силами со стороны планет, имеют существенную детерминированную составляющую. При учёте влияния Венеры, Земли и Меркурия (в порядке степени влияния) и высших гармоник этого «внешнего» возбуждения (до 10-й гармоники) получено регрессионное уравнение, правильно отражающее фазы околосесячного цикла ежедневного измерения СА. Для 1999 г. принят период  $T$  вращения зон, в которых наблюдаются пятна, длительностью в 28 суток. Основной период влияния  $k$ -ой планеты  $T_k = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right)^{-1}$ , где  $T_k$  – период обращения этой планеты

вокруг Солнца (для Меркурия  $T_k=41$  сут., Венеры – почти 32 сут., Земли – немного больше 30). На этой основе неоднократно строились прогнозы СА (на октябрь-декабрь 1999 г, на январь-март 2000 г.). Как текущие значения чисел  $W$ , получаемые из Интернет по данным NASA, так и тенденция их изменения на ближайшие дни и недели, сообщались заинтересованным организациям и публиковались в газетах. Авторы ставят целью «солнечное воспитание» населения – приучить его к восприятию чисел  $W$  как характеристик «солнечной погоды», определяющей изменения погоды, настроения, здоровья, психики, отношений с окружающими; для «власть имущих» эта информация необходима при разработке тактики (для короткопериодических) и стратегии (для 11-летних циклов СА) управления. Показано, что сейчас наступает период максимума СА, когда возможны не только природные, но и социальные катаклизмы.

**О МАЛОМ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ ВОЗМУЩЕНИИ СИНГУЛЯРНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ  
ОПЕРАТОРОМ И ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ  
ОБЩЕГО ВИДА**

Фомян В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве  $E$  рассматривается уравнение

$$\varphi(t) x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (1)$$

где  $A$  - неограниченный линейный оператор,  $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ ,  $\overline{D(A)} = E$ ;  $\varphi(t) \in C((0, \infty); (0, \infty))$ ,  $\varphi(+0) = 0$ ;  $f(t) \in C([0, \infty); E)$ . Уравнение (1) стабилизируется малым положительным параметром  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  ( $\varepsilon_0 = \text{const}$ ):

$$\varphi(t+\varepsilon) x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad x_{\varepsilon,0} \in D(A). \quad (2)$$

Пусть  $A$  - производящий оператор полугруппы  $U(t)$  класса  $C_0$  и  $f(t) \in D(A)$ ,  $0 \leq t < \infty$ ;  $Af(t) \in C([0, \infty); E)$ . Тогда задача (2) имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,0} + \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) \frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)} ds. \quad (3)$$

При определенных условиях на массив  $W_\varepsilon = \{A, f(t), \varphi(t), x_{\varepsilon,0}\}$  входных данных задачи (2), обеспечивающих сходимость внеинтегрального члена в правой части (3) к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и сходимость несобственного интеграла

$$J(t) = \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{f(s)}{\varphi(s)} ds, \quad (4)$$

справедлив предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = J(t)$ ,  $0 < t < \infty$ . При условиях на

массив  $W_0 = \{A, f(t), \varphi(t)\}$  входных данных уравнения (1), обеспечивающих возможность дифференцирования несобственного интеграла (4) по параметру  $t$ , предельная функция  $J(t)$  является решением предельного ( $\varepsilon=0$ ) уравнения (1).

При  $f(t) \equiv f$ ,  $0 \leq t < \infty$ , решение (3) можно записать в виде

$$x_\varepsilon(t) = U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) x_{\varepsilon,0} + U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\right) A^{-1}f - A^{-1}f \quad (5)$$

и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)$ ,  $0 < t < \infty$ , где  $x_0(t) = -A^{-1}f$  - стационарное решение уравнения  $\varphi(t) x'(t) = Ax(t) + f$ ,  $0 < t < \infty$ .

Если  $A \in L(E)$ , то в формулах (3) - (5) выражение  $U(\cdot)$  нужно заменить на операторную экспоненту  $e^{A \cdot}$ .

## О ПОНЯТИИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

По известному определению ([1, с. 134])  $\triangle ABC$  подобен  $\triangle A_1B_1C_1$ , если 1)  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  и 2)  $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$ . Но

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1 \Leftrightarrow \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1. \quad (1)$$

В силу (1) понятие подобия треугольников можно ввести следующим образом: вначале доказать утверждение (1) (его можно назвать критерием пропорциональности сторон двух треугольников), затем сформулировать определение подобия треугольников в виде: два треугольника называются подобными, если их стороны пропорциональны, а затем назвать условие 1) свойством подобных треугольников. При таком определении третий признак подобия треугольников ([1, с. 138]) оказывается лишним, а при доказательстве первого и второго признаков подобия ([1, с. 137]) можно использовать ранее доказанный критерий (1). Кроме того, такое определение согласуется с общим определением подобия фигур ([2, с. 175]): две фигуры, (в частности, два треугольника) называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т.е. преобразованием, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (заметьте, что в этом определении ни о каких углах речи не ведется). В определении подобия треугольников из [1] условие 1) – это следствие свойства преобразования подобия сохранять углы между полупрямыми и это следствие можно не указывать в определении подобия треугольников. Ведь мы, например, не говорим, что параллелограммом называется четырехугольник, у которого 1') противоположные стороны равны, противоположные углы равны и 2') противоположные стороны попарно параллельны, а указываем в определении параллелограмма лишь условие 2'), ибо условие 1') следует из 2') и называется свойством параллелограмма.

### Литература

1. Геометрия. Учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. – 9-е изд. - М.: Просвещение, 1999. – 335 с.
2. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. – 3-е изд. - М.: Просвещение, 1992. – 383 с.

## О ПРИРОДЕ АКСИОМ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

В различных математических дисциплинах, изучаемых в вузах, например, в геометрии, теории вероятностей, функциональном анализе, широко используется аксиоматический метод получения математического знания. В связи с этим актуальна задача формирования у студентов правильного, научного понимания сущности математических аксиом, ибо они составляют основание любой аксиоматической теории и, тем самым, являются фундаментом любого математического знания, полученного аксиоматическим методом. Изучающим математику полезно понимать следующее.

1. Математические аксиомы отражают фундаментальные свойства и связи предметов и явлений действительного мира, поэтому математическое знание, полученное на их основе, дает более или менее верное представление о реальных процессах и объектах. Например, аксиомы теории вероятностей имеют естественное происхождение, так как исходными предпосылками для них являются свойства частот событий, установленные эмпирическим путем, поэтому результаты теории вероятностей и базирующейся на ней математической статистики находят многочисленные и разнообразные применения в естествознании и практике.

2. При выборе математических аксиом соблюдаются определенные логические требования, в которых заключен опыт адекватного отражения действительности: любая система аксиом обязательно должна быть непротиворечивой и желательно полной и независимой.

3. Аксиомы математики нельзя рассматривать как некие абсолютные истины, ибо а) они являются результатом идеализации при абстрагировании от предметов и явлений действительного мира, а при абстрагировании происходит огрубление действительности, отвлечение от ряда связей и отношений окружающего мира, б) любая система аксиом, будучи исторически конкретной и, следовательно, неполной и ограниченной, не может отобразить всего многообразия и содержания изучаемого реального процесса или объекта.

4. Критерием степени соответствия математических аксиом и, следовательно, математического знания, полученного на их основе, реальному миру является практика. Интерпретация аксиом и математического знания в естествознании и практической деятельности людей.

5. Возможны системы аксиом априорного характера, которые отражают определенную предметную область действительного мира, но эта область еще не попала в поле зрения естествознания, практики.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ И ПЛЁНКАХ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Фролов П. В., Поляков Н. Н. (г. Липецк)

В современной полупроводниковой электронике приходится иметь дело с токами, проходящими через контакты малой площади. В связи с этим большое внимание уделяется разработке различных методов, позволяющих контролировать характеристики получаемых контактов. Из-за сложности и многообразия физических явлений на контакте металл-полупроводник основные проблемы возникают при интерпретации результатов экспериментальных измерений. Необходимые для этого формулы можно получить, если теоретически рассчитать распределение потенциала и плотности тока в приконтактной области. Такой расчёт требует построения математической модели, учитывающей граничные условия для потенциала и плотности тока на контакте.

В нашей работе проведено математическое моделирование сопротивления растекания контакта металл-полупроводник для случаев полубесконечного монокристалла полупроводника и тонкого полупроводникового слоя на металлической подложке. Исследовано влияние граничных условий на величину сопротивления растекания и установлено, что применение граничных условий Неймана не вносит существенной погрешности и упрощает расчёты многих практически интересных случаев.

Кроме того, нами решена задача по расчёту распределения потенциала и плотности тока в тонком проводящем слое на изолирующей подложке. При этом поверхность токовых контактов предполагалась эквипотенциальной. Проведено компьютерное моделирование эквипотенциалей и линий тока в полупроводниковых монокристаллах и плёнках. Результаты проверены экспериментально на образцах арсенида галлия.

**ОБ УРОВНЯХ ВОЗМУЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО  
ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА**

Ханова Т.Г., Чубурия Ю.П. (Ижевск)

Предположим, что  $V(x), W(x)$  - вещественные ограниченные функции, причем функция  $V(x)$  - периодическая с периодом 1 по всем переменным,  $W(x)$  - периодическая по переменным  $x_1, x_2$  с периодом 1, сохраняющая знак и экспоненциально убывающая при  $|x_3| \rightarrow \infty$ . Пусть  $E_n(k), \psi_n(x), n = 1, 2, \dots$  - собственные значения и отвечающие им собственные функции оператора  $H_\lambda(k) = -\Delta + V(x)$  в  $L^2((0, 1)^3)$ , определенного на блоховских по всем переменным функциям, здесь  $k$  - квазимпульс. Пусть  $E_0 = E_{n_0}(k_0)$  - граница зоны оператора  $H_0(k_{||}) = -\Delta + V(x)$  в  $L^2(\Omega)$ , где  $k_0 = (k_{||}, k_3^{(0)})$ ,  $k_{||}$  - плоский квазимпульс,  $\Omega = (0, 1)^2 \times \mathbb{R}$ . Предполагаем, что функция  $E_{n_0}(k_0)$  четна по  $k_3 - k_3^{(0)}$  и  $\partial^2 E_{n_0}(k_0) / \partial k_3^2 \neq 0$ . Уравнение, описывающее как собственные значения, так и виртуальные уровни оператора  $H(k_{||}) = H_0(k_{||}) + W(x)$  имеет вид

$$\phi(x) = - \int_{\Omega} \sqrt{W(x)} G(x, y, k) \sqrt{W(x)} \phi(y) dy, \quad (1)$$

где  $k_3$  - один из двух корней уравнения  $E_{n_0}(k) = E$ , а  $G$  - функция Грина оператора  $H_0(k_{||})$ ; она имеет полюс первого порядка по переменной  $k_3$  в точке  $k_3^{(0)}$ . Пусть  $A$  - оператор с ядром, являющимся правильной частью функции  $\sqrt{W}G\sqrt{W}$  в точке  $k_0$ ;  $\lambda_n, \phi_n, n = 1, 2, \dots$  - его собственные значения и соответствующие им собственные функции.

Необходимое условие прохождения уровня (т.е. значения  $E = E(k_{||})$ , для которого существует ненулевое решение уравнения(1)) через границу зоны имеет вид (предполагая, что  $\lambda_n \neq -1$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\sqrt{W}\psi_{n_0}, \phi_n)|^2}{1 + \lambda_n} = 0.$$

Если  $0 < \lambda_{n_0} < \lambda_{n_0'} (\lambda_{n_0} < \lambda_{n_0'} < 0)$  - соседние собственные значения оператора  $A$ , то, при выполнении некоторых условий, существует единственное число  $\mu_0 \in (-1/\lambda_{n_0}, -1/\lambda_{n_0'})$  такое, что у оператора  $H_\mu(k_{||}) = H_0(k_{||}) + \mu W(x)$  уровень проходит через точку  $k_0$ .

Получено условие аналитичности уровня оператора  $H_\mu(k_{||})$  по  $\mu$ ; при этом собственное значение, возрастая, "отражается" от  $E_0$  и далее, превращаясь в виртуальный уровень и оставаясь вещественным, убывает ( $E$  при этом находится уже на втором листе).

Полученные результаты можно переформулировать для "возмущенной ступеньки"  $V_0 \theta(x_3) + W(x)$ , где  $V_0 = \text{const}$ ,  $\theta$  - функция Хевисайда.



## ДИНАМИКА ТЕХНОГЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ФАКТОРА С ПРИРОДОЙ

Харбин Н.Н. (г. Якутск, Республика Саха (Якутия), ИФТПС)

Вступая в XXI век, человечество на первый план выдвигает проблему взаимосвязей человека и природы в свете природно-техногенной безопасности. В связи с этим большой интерес представляет создание, такой математической модели, которая описывала бы динамику взаимодействия человека с природой. Поскольку трудность поставленной задачи заключается в сложности и уникальности обоих объектов изучения, такая задача кажется неразрешимой. Однако при самых общих предположениях эта задача сводится к задачам математической экологии. За основу предлагаемой модели была взята модель Мак-Артура для конкретного биологического случая.

Модель представлена двумя уравнениями:

$$dx/dt = x(k_1 - k_2x - k_3y + k_4xy)$$

$$dy/dt = -y(k_5 - k_6y + y^2 - k_7x + x^2 + k_8xy),$$

где  $x$  — плотность человеческого фактора;  $y$  — плотность природных факторов.

Анализ системы показал, что при наиболее реальных предположениях имеет место предельный цикл, изображающий устойчивые колебания системы, что и происходит на данном этапе в реальной жизни.

Данная модель носит во многом качественный характер, но она позволяет отследить основные закономерности взаимодействия человека с природой и наметить пути поиска оптимального существования человечества в системе биосфера. Таким образом, предложенная модель может оказаться полезной при решении задач природно-техногенной безопасности.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Ю.С.Харин

(Белорусский государственный университет, Минск)

В Белорусском госуниверситете подготовка математиков-экономистов ведется с 1991 года на факультете прикладной математики и информатики в рамках специальности Н.08.03.00 – Экономическая кибернетика по специализациям: "Математическое и программное обеспечение компьютерного анализа, моделирования и прогнозирования в экономике", "Математическое и программное обеспечение оптимального планирования и управления в экономике", "Информационные технологии в бизнесе", "Информационные банковские системы".

Направление, связанное с математическим и программным обеспечением моделирования и прогнозирования в экономике, является одним из основных в подготовке математиков-экономистов. Это обеспечивается преподаванием следующей системы учебных дисциплин [1]: "Описательная статистика социально-экономических систем" (52 час., лекции, практикум), "Теория вероятностей и математическая статистика" (204 час., лекции, семинары), "Математические модели микро- и макроэкономики" (34 час., лекции), "Имитационное и статистическое моделирование" (68 час., лекции, практикум), "Эконометрика" (102 час., лекции, практикум), "Статистический анализ данных" (68 час., лекции, практикум), "Математическое прогнозирование в экономике и бизнесе" (68 час., лекции, практикум), "Математические модели рынка ценных бумаг" (34 час., лекции), "Математическая экономика" (68 час., лекции, семинары).

Компьютерные практикумы поддерживаются следующими пакетами прикладных программ, разработанными в Белорусском госуниверситете: ЭКОНОМЕТРИКА, СТАТПРО (СТАТистическое ПРОгнозирование), РОСТАН (РОбастный СТАТистический АНализ), СЭМП (Система Эконометрического Моделирования и Прогнозирования). При выполнении индивидуальных заданий компьютерных практикумов студенты используют также ППП STATISTICA, SPSS, GPSS, Econometric Views, STADIA, MICROFIT.

## Литература

1. Харин Ю.С., Малюгин В.И., Кирлица В.П., Лобач В.И. Основы имитационного и статистического моделирования. Учебное пособие. – Минск: Дизайн ПРО, 1997, 302с.

## К вопросу использования номограмм в системе остаточных классов.

Хатамова М.А. (г. Ставрополь)

В настоящее время развитие науки и техники невозможно представить без применения вычислительных машин, обрабатывающих информацию. Поэтому актуален вопрос об улучшении структуры и логики ЭВМ, а так же об увеличении их эффективности.

Одним из наиболее перспективных путей повышения производительности и надежности ЭВМ является система счисления в остаточных классах.

В СОК арифметические операции проводятся по каждому основанию в отдельности независимо от результатов по другим основаниям. Кроме того, остатки малоразрядны и не превышают величины основания. Применение СОК к номографии позволяет получить любую, наперед заданную точность результата, что достигается разложением составной номограммы на ряд номограмм по малоразрядным основаниям и вычислениям по ним.

Техническая реализация номографических методов обработки информации в СОК становится возможной при использовании оптоэлектронных устройств. Носителем информации в таких устройствах является свет. Таким образом, на одной номограмме можно выполнить сразу несколько операций.

Аналогично, по любому модулю. Кроме того, можно объединять номограммы по нескольким модулям.

### Литература:

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., - 1968г.
2. Казангалов А.Н. Номограммы в системе остаточных классов. Алма-Ата, «Наука», 1965г.

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИПРОЦЕССОРНЫХ ЭВМ ДЛЯ РАСЧЕТА  
ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

И.А.Цепелев, С.С.Шиманов (г. Екатеринбург)

В области  $\Omega \subset R^3$  рассматривается движение вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. В декартовых координатах это движение описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \operatorname{div}(\mu \epsilon_{ij}) + \vec{F}, \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$F_1(\rho(t, x), \vec{u}) = 0, \quad F_2(\mu(t, x), \vec{u}, p, T) = 0.$$

Здесь  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости,  $\vec{F} = (0, 0, -g\rho)$  — вектор внешних массовых сил,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — вязкость,  $T$  — температура,  $\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ , — тензор скоростей деформаций,  $F_1, F_2$  — уравнения эволюции плотности и вязкости.

Следуя исходную задачу (1) можно свести к задаче минимизации квадратичного функционала

$$\vec{w} = \operatorname{atgmin}\{E_{(\mu, T)}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) - 2b_\rho(\vec{\psi}) : \vec{\psi} \in (W_2^2(\Omega))^3\}, \quad (2)$$

где  $E_{(\mu, T)}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) \geq 0$  — симметричная билинейная форма.

Численный метод решения задачи (2) основывается на применении метода Галеркина со специально выбранным базисом в пространстве  $(W_2^2(\Omega))^3$ . В виду большой размерности аппроксимированной задачи рассматриваются различные аспекты применения мультипроцессорной вычислительной техники:

1) при наличии пространственных симметрий формы  $a_\mu$  экстремальную задачу (2) удается свести к  $2^n$  независимым подзадачам ( $n$  — количество симметрий); 2) параллельные реализации метода Холесского решения линейных систем; 3) параллельные реализации итерационных методов Зейделя и Шварца решения линейных систем; 4) параллельные реализации метода Фурье.

Приводятся результаты численных расчетов алгоритмов, реализованных для мультипроцессорных ЭВМ МВС-100, МВС-1000 (Институт математики и механики УрО РАН).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №98-01-00046, №99-05-65050).

## РАЗРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ОЧИСТКИ ВОДОЕМА

Цирулёва В. М. (Тверь)

Строится модель управления процессом очистки водоема от загрязнения органическими отходами. Скорости изменения концентрации растворенного кислорода  $x_2(t)$  и органических отходов  $x_1(t)$  зависят от коэффициентов отбора кислорода  $k_1$  и ре-аэрации  $k_2(t)$ . Разложение отходов происходит под воздействием бактерий, вызывающих химическую реакцию, которая происходит с использованием растворенного кислорода. Процесс очистки регулируется с помощью очистных работ ( $u(t)$ ), интенсивность которых зависит от количества отходов. Процесс описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) - \phi^l(x_1(t), u(t)), & x_1(0) &= L_0, \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 x_1(t) - k_2(t) x_2(t), & x_2(0) &= D_0, t \in [0, T], \end{aligned}$$

где

$$\phi^l(x_1(t), u(t)) = \begin{cases} u(t), & x_1(t) \leq x_N, \\ u(t)x_1(t), & x_1(t) > x_N, \end{cases} \quad l = \begin{cases} 1, & x_1(t) \leq x_N, \\ 2, & x_1(t) > x_N. \end{cases}$$

На управление наложены ограничения  $u(t) \in [0, u_i]$ . Целью управления является минимизация суммарных затрат на проведение очистных работ, уменьшение концентрации отходов и дефицита кислорода в течение рассматриваемого периода времени. Соответствующий целевой функционал имеет вид

$$J(u) = \int_0^T (\psi^l(x_1(t), u(t)) + x_1(t) + x_2(t)) dt,$$

где стоимость очистных работ зависит от количества отходов

$$\psi^l(x_1(t), u(t)) = \begin{cases} c^1 u(t), & x_1(t) \leq x_N, \\ c^2 u(t)x_1(t), & x_1(t) > x_N. \end{cases}$$

Модель исследуется аналитически и численными методами.

## Об экономической подготовке студентов-математиков Черемных Ю.Н. (Москва)

Расширение и углубление содержательных областей математического моделирования за счет экономической проблематики и представляет собой важный фактор плодотворного развития как экономической теории и её приложений, так и самой математики. В настоящее время в экономической реальности наблюдается значительное повышение уровня востребованности математики и компьютерных технологий. Поэтому включение в Учебные планы математических специальностей курсов экономико-математического моделирования позволит студентам этих специальностей расширить свой научный кругозор относительно полезности математики для решения актуальных экономических задач, а также некоторым из них подготовиться для работы в аналитических отделах рыночных структур. Отбор и структуризация материалов курсов экономико-математического моделирования представляют собой достаточно серьезную задачу, ибо в экономической теории и ее приложениях построено большое число математических моделей, имеющих высокий научный уровень и успешно используемых для решения многих прикладных задач (модели с производственными функциями, межотраслевые модели, модели в виде экстремальных и игровых задач, широкие классы стохастических моделей и т.п.). Помимо выбора содержательных областей моделирования и самих моделей важным является вопрос о реальных данных и их преобразовании в модельную информацию особенно в связи с тем, что в современной экономической реальности теневой сектор играет весьма заметную роль. Обращает на себя внимание также проблема рационального сочетания экономико-математического моделирования с компьютерными технологиями.

МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ В МЕХАНИЗМЕ  
ДИНАМИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО  
ПЕРЕХОДА И ФИЗИЧЕСКАЯ  
СУЩНОСТЬ ФУНКЦИИ СПЛОШНОСТИ  
КАЧАНОВА

*Чинь Ван Хоа*

*Кафедра Физики полимеров и кристаллов,  
МГУ*

Рассматривается модель трещины с динамическим фазовым переходом. Получено решение релаксационного уравнения методом итерации в представлении Лемана. Техника динамической ренормгруппы использована для получения уравнения поверхности разрушения.

## ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ВМОА.

Р. Ф. Шамоян. (Москва)

Пусть  $D = \{z : |z| < 1\}$  – единичный круг комплексного пространства  $C$ ,  $H(D)$  – множество всех голоморфных в  $D$  функций. В последнее время появился ряд работ (см. [1-2]), в которых вводятся тем или иным способом классы ВМОА, играющие важную роль в различных вопросах комплексного анализа. Введем классы типа ВМОА в единичном круге  $D$

$$ВМОА_{s,q}(D) =$$

$$\left\{ f \in H(D) : \sup_{|z|<1} \left( \int_T \frac{|f(\zeta) - f(z)|^p}{|1 - \zeta z|^q} (1 - |z|^2) d\tau(\zeta) \right)^{1/s} < \infty, \quad 0 < s, q < \infty \right\},$$

$$ВМОА_s^q(D) =$$

$$\left\{ f \in H(D) : \sup_{|z|<1} \left( \int_T \frac{|f(\zeta) - f(z)|^q}{|1 - \zeta z|^2} (1 - |z|^2)^s d\tau(\zeta) \right)^{1/s} < \infty, \quad 0 < s, q < \infty \right\}.$$

Величины, определяющие квазинорму в них при частных значениях параметров совпадают с известной нормой Гарсиа в ВМОА (см. [1]).

В докладе будут сформулированы результаты, устанавливающие ограниченность операторов Теплица  $T_\varphi$  (см. [2]),  $\varphi \in H^1$ , действующих из "аналитических" классов Бесова  $B_s^1(D)$  (см. [3]) в  $ВМОА_{s,q}$  и  $ВМОА_s^q$ . В частности, справедлива следующая

**Теорема.**

1. Пусть  $0 < s < 1$ ,  $2 - s < q < 1 + s$ . Тогда оператор Теплица  $T_\varphi$  является ограниченным оператором из  $B_s^{\frac{q-1}{s}}(D)$  в  $ВМОА_{s,q}(D)$  тогда и только тогда когда  $\varphi \in H^\infty(D)$ .
2. Пусть  $s \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,  $1 - s < q < s + 1$ . Тогда оператор Теплица  $T_\varphi$  действует ограниченно из  $B_s^{\frac{2-s}{s}}(D)$  в  $ВМОА_s^q(D)$  тогда и только тогда, когда  $\varphi \in H^\infty(D)$ .

### Л И Т Е Р А Т У Р А

[1]. J. Ortega, J. Fabrega., Pointwise multipliers and corona type decomposition in ВМОА. – Ann. L'Inst. Four, Grenoble, 46, 1999, 1, p. 111-137.

[2]. С. В. Шведенко, Итоги науки и техники. – сер. Мат. Ан., Москва, 1985, т. 23.

[3]. В. В. Пеллер, С. В. Хрущев., Операторы Гонкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы. – Успехи Мат. Наук, 1982, 37, N1, 53-124.

email shan@bgpi.bitmcut.bryansk.su



**ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО  
ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ  
ВЫРОЖДЕНИЯ**

Шарафутдинова Г.Г. (г. Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^n u_{yy} = 0, \quad n > 0, \quad (1)$$

в области  $D$ , ограниченной: 1) кривой  $\Gamma$  из класса Ляпунова, лежащей в первой четверти плоскости с концами в точках  $B(1, 0)$  и  $B_1(0, 1)$ ; 2) характеристиками  $AC$  и  $CB$  уравнения (1) при  $x > 0, y < 0$ ; 3) характеристиками  $AC_1$  и  $C_1B_1$  уравнения (1) при  $x < 0, y > 0$ , где  $A(0, 0)$ ,  $C(l, -l)$ ,  $C_1 = (-l, l)$ ,  $l = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $\alpha = \frac{n+2}{2}$ . Пусть  $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ ,  $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ ,  $D_3 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$ ;  $x = x(s), y = y(s)$  — параметрические уравнения кривой  $\Gamma$ ,  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от точки  $B$ ;  $S$  — длина кривой  $\Gamma$ .

**Задача Трикоми (Задача  $T$ ).** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ ;  $Lu(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ;  $u(x, y) = u(x(s), y(s)) = \varphi(s)$ ,  $0 \leq s \leq S$ ;  $u(x, y) \Big|_{AC \cup AC_1} = \psi(x)$ ,  $-l \leq x \leq l$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — заданные достаточно гладкие функции.

Регулярным решением задачи Трикоми назовем функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям задачи  $T$  и дополнительно потребуем, чтобы производная  $u_\eta$  в характеристических координатах была непрерывна в  $D_2 \cup AC$  и  $D_3 \cup AC_1$ . Равномерный в  $\bar{D}$  предел последовательности регулярных решений задачи  $T$  назовем обобщенным решением задачи  $T$ .

**Теорема 1.** Если  $\varphi(s) \in C^1[0, S]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$ ,  $\psi(x) \in C[-l, l] \wedge C^3[-l, 0] \wedge C^3[0, l]$  и кривая  $\Gamma$  в малых окрестностях точек  $B$  и  $B_1$  совпадает с дугами нормальной кривой уравнения (1), то существует регулярное решение задачи Трикоми.

**Теорема 2.** Если  $\varphi(s) \in C[0, S]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$ ,  $\psi(x) \in C[-l, l] \wedge C^3[-l, 0] \wedge C^3[0, l]$ , то существует единственное обобщенное решение задачи Трикоми, которое принадлежит классу  $C(\bar{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ , при произвольном подходе кривой  $\Gamma$  к осям координат, за исключением случаев, когда в достаточно малых окрестностях точек  $B$  и  $B_1$  соответственно  $dx/ds$  и  $dy/ds$  меняют знаки.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится на основании [1, 2]

**Литература**

1. Сабитов К.Б., Карамова А.А., Шарафутдинова Г.Г. // Известия вузов. Математика. 1999. №11. С. 69 – 80.
2. Сабитов К.Б. // Дифференц. уравнения. 1992. Т.2, №12. С.2092 – 2101.

## ВИХРЕВЫЕ ТОКИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ И ПЛЁНКАХ

Шевченко А. Е., Поляков Н. Н. (г. Липецк)

Анизотропия электронных свойств полупроводников порождает поперечные электронные потоки и, как следствие, циркуляционные токи. Они хорошо известны в теориях термо-, фотомангнитной-, поперечной демберовской фотоэдс и т.д. Экспериментально исследованы электрический пинч, квазихолловское поперечное поле, отмечено существование вихревых токов в приконтактных областях, что приводит к изменению общего продольного сопротивления образца. Однако в настоящее время отсутствует достаточно полная и строгая модель наблюдаемых явлений. В нашей работе эта проблема сведена к соответствующим краевым задачам электродинамики, которые интегрируются общими методами математической физики. Полученные в аналитическом виде распределения электрического потенциала и плотности тока позволяют при помощи ПЭВМ построить наглядные модели эквипотенциалей и линий тока в анизотропных кристаллах и плёнках.

Вихревой ток анизотропии (ВТА) представляет собой разность токов через анизотропный образец и соответствующий ему изотропный, в котором ВТА отсутствуют. Предлагаемая модель характеризует ВТА не только с качественной стороны, но и количественно. В местах сгущения линий вихревого тока он имеет наибольшую плотность. Такие области находятся вблизи токовых контактов, именно в этих областях влияние ВТА на распределение общего тока наиболее значительно. В частности, ВТА влияют на выделение джоулевой теплоты и приводят к ряду эффектов, влияющих на электрофизические свойства материалов.

Работа может представлять интерес для исследований электрофизических свойств полупроводниковых материалов электронной техники, а также при разработке датчиков на основе анизотропных кристаллов и плёнок.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВАНИЯ Шеретова Ю.В. (Тверь)

На соревнованиях по бегу, плаванию, конькобежному спорту, велосипедным гонкам и др. результаты спортсменов определяются их возможностями развивать максимальное усилие, запасами энергии, правильным дыханием. Целью спортсмена является преодоление заданной дистанции за минимальное время. Для этого он должен оптимально распределить свою силу во время движения.

Математическая модель, описывающая плавание была построена в работе Х.Бенке [1]. В статье [2] предложена новая система уравнений, позволяющая изучать бег на заданной дистанции. Настоящая работа посвящена обобщению этой системы на случай плавания.

При построении модели плавания необходимо учитывать влияние прыжка во время старта и потери времени на поворотах. С этой целью функцию сопротивления представим в виде  $r(x, v) = r_1(v) + r_2(x)$ . Первое слагаемое вычисляется по той же формуле, что и в модели бега [2]. Второе слагаемое определим выражением  $r_2(x) = r_s(x) + r_p(x)$ . Оно оказывает влияние только на старте и поворотах, для других участков дистанции  $r_2(x)$  равно нулю. Момент старта складывается из времени реакции спортсмена, процесса свободного полета, времени погружения и выныривания. Сопротивление на повороте вычислим по формуле  $r_p(x) = \sum_{k=1}^q r_k(x)$ , где  $q = D/50 - 1$  – количество поворотов на дистанции в бассейне длиной 50 м,  $k$  – номер поворота.

Соответствующая дискретная задача решена с помощью метода штрафных функций. По описанному в [2] алгоритму была проведена серия расчетов при различных значениях входных данных. Результаты расчетов вполне удовлетворительно согласуются с данными таблицы мировых рекордов.

### Литература

1. Behncke H. A Mathematical Model for the Force and Energetics in Competitive Running // J. Math. Biol. 1993. V. 31. P. 853-878.
2. Шеретова Ю.В. Математическая модель бега спортсмена на коротких и средних дистанциях // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1999. С. 175-183.

**ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ,  
ПОРОЖДАЕМЫЕ СЕМЕЙСТВАМИ БАНАХОВЫХ  
ПРОСТРАНСТВ**

Шубарин М.А. (Ростов-на-Дону)

Пусть дано семейство банаховых пространств  $\bar{X} = [X_0, \dots, X_p]$ ,  $X_p \subset X_r \subset X_0$  для произвольного  $r$ . Пусть, кроме того,  $\|\cdot\|_r$  — норма в  $X_r$ . Для произвольного  $x \in X_p$ ,  $x \neq 0$  положим

$$F(x, \bar{X}) := \inf \max_{0 \leq r \leq p} \frac{\|x\|_r \|x'\|'_r}{|x'(x)|},$$

где точная нижняя грань берётся по всем функционалам  $x' \in X'_0$ . Функции вида  $F(\cdot, \bar{X})$  возникают при изучении интерполяционных свойств семейств пространств Фреше. Точнее, необходимо исследовать геометрические свойства линий уровня этой функции, т.е. множеств

$$L_t := \{x \in X_p, x \neq 0 : F(x, \bar{X}) \leq t\}.$$

**Теорема.** Пусть дана последовательность  $(a_n)$ ,  $a_n \geq 1$  для произвольного  $n$ . Следующие условия равносильны:

1. функция  $F(\cdot, [l_p, l_p(a_n)])$  ограничен на  $l_p(a_n)$ ,
2. последовательность  $(a_n)$  ограничена (т.е.  $l_p = l_p(a_n)$ ).

**Теорема.** Функция  $F(\cdot, \bar{X})$  — плюрисубгармоническая и однородная степени 0, т.е.  $F(tx, \bar{X}) = F(x, \bar{X})$  для произвольных ненулевых  $t \in \mathbb{C}$  и  $x \in X_p$ . Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \forall x \in X_p, x \neq 0 \quad F(x, \bar{X}) &\geq 1; \\ \forall x_0 \in X_p, x_0 \neq 0 \quad \exists \varepsilon : \\ \forall \tau \in (0, 1/2) \quad \forall x_1 \in X_p, \|x_0 - x_1\|_r &< \frac{1}{9} \tau \varepsilon, \quad 1 \leq r \leq p \\ \left\langle \frac{F(x_1, \bar{X})}{F(x_0, \bar{X})} \right\rangle &\leq \frac{1+\tau}{1-\tau} \end{aligned}$$

Здесь  $\langle x \rangle := \exp(|\ln(x)|)$ . В частности, функционал  $F(\cdot, \bar{X})$  непрерывен на  $X_p \setminus \{0\}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №97-01-00215

## СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИОГЕННЫХ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Г.Е. Шунин, С.А. Кострюков, В.В. Пешков, М.В. Матвеева,  
Д.В. Каталиков, П.А. Потехин (Воронеж)

В общем случае физические процессы в конструктивных элементах криогенных гравиинерциальных приборов описываются нелинейными и нестационарными дифференциальными уравнениями в обыкновенных и частных производных второго порядка, заданных в области со сложной геометрией, с учетом начальных и граничных условий 1, 2 и 3 рода и ряда дополнительных условий.

Для решения таких задач методом конечных элементов разработана система компьютерного моделирования, включающая в себя блок описания и дискретизации геометрии, задания граничных и других условий, вычислительный блок и блок анализа результатов с широким набором функций визуализации информации и расчета локальных и интегральных характеристик. Максимальное число степеней свободы – более 260 тыс. Геометрия задач может быть плоской, осесимметричной и трехмерной.

Метод конечных элементов выбран в качестве вычислительного средства как один из самых эффективных методов решения краевых задач математической физики. Он позволяет разрабатывать устройства и структуры на основе теоретических моделей их функционирования.

Данная система компьютерного моделирования реализована с использованием современных методов структурного и объектно-ориентированного программирования, использует эффективные математические методы и быстрые алгоритмы. Конечно-элементная сетка может генерироваться либо блочным методом, либо методом Делоне, причем последний в трехмерном варианте реализован в полуавтоматическом режиме. Дискретизация по времени осуществлена пошаговым методом. На каждом шаге для решения нелинейных задач используется метод Ньютона-Рафсона. Разработаны адаптивные  $h$ -схемы метода конечных элементов, позволяющие эффективно перестраивать как пространственную конечно-элементную сетку, так и шаг по времени. В систему также входит проблемно-ориентированная база данных, библиотеки характеристик и свойств объектов, типичных геометрических конфигураций, типов конечных элементов и др.

С помощью разработанной системы проведено компьютерное моделирование электромагнитных процессов в сверхпроводниковых экранах и подвесах. Получены трехмерные распределения напряженности магнитного поля, вычислены магнитомеханические и диссипативные характеристики.

# ВСПЛЕСКИ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

А.Д.Юнаковский (Нижний Новгород)<sup>1</sup>

В области  $0 \leq x \leq 1$  приближенное решение уравнения

$$Lu(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + b(x) \frac{du(x)}{dx} + c(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

$$\text{с граничными условиями} \quad \alpha \frac{du(0)}{dx} - u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2)$$

ищется методом типа Галеркина с базисом, построенным по ортогональным всплескам. Пусть

$$L_2(\mathbf{R}) = V_j \oplus \left\{ \bigoplus_{i \geq j} W_i \right\},$$

где  $V_j, W_j$  - подпространства с ортогональными базисами

$$\{ \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), k \in \mathbf{Z} \}, \{ \psi_{i,k}(x) = 2^{i/2} \psi(2^i x - k), k \in \mathbf{Z}, i \geq j \}.$$

Здесь  $\varphi(x)$  - скейлинг - функция с компактным носителем и с нулевым первым моментом,  $\psi(x)$  - соответствующий всплеск с компактным носителем и двумя первыми нулевыми моментами.

Пусть  $G(x, \xi)$  - функция Грина оператора  $\frac{d^2}{dx^2}$  в области  $0 \leq x \leq 1$  с граничными условиями (2). Приближенное решение задачи (1), (2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_k \gamma_k \int_0^1 G(x, \xi) \varphi_{j,k}(\xi) d\xi + \sum_{i \geq j} \sum_k \alpha_{i,k} \int_0^1 G(x, \xi) \psi_{i,k}(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Легко видеть, что функция  $w_{i,k}(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \psi_{i,k}(\xi) d\xi, M \leq k \leq 2^j - M$

имеют тот же носитель что и  $\psi_{j,k}(x)$ , если носитель  $\psi_{j,k}(x)$  не пересекает границ области. Матрица уравнения  $L^{(i)} \alpha_{i,k} = f_{i,k}$  в подпространстве  $W_i$  для нахождения коэффициентов  $\alpha_{i,k}$  является разреженной  $L^{(i)} = (l_{m,k}^{(i)})$  с  $(2M+1)$  ненулевыми диагоналями и  $M$  первыми и последними столбцами. Здесь  $l_{m,k}^{(i)} = \langle Lw_{i,k}, \psi_{i,m} \rangle \approx h = 2^{-i}, k \neq m$  и  $\approx 1$  для  $k = m$ . Решение этого уравнения находится с помощью циклической прогонки. При нахождении коэффициентов  $\gamma_k$  обращается матрица, приводящаяся к виду  $L_i$ , у которой вместо нулей в строках стоят линейно зависящие от номера строки коэффициенты  $l_{m,k}^{(i)} \approx \tau r_k$ .

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН 603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46 тел.: (831) 2-36-74-51, эл. почта:

Об одном вырождающемся дифференциальном уравнении в гильбертовом пространстве

Н.А. Янцева (Елец)

В сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение

$$(\alpha^2(t)u')' - B(t)u' - Au = f(t), \quad t \in R_1^+, \quad (1)$$

здесь  $\alpha(t)$  ( $t \in R_1^+$ ) — весовая функция, удовлетворяющая условиям:  $\alpha(t) \in C^1[0, \infty)$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) > 0$  при  $t > 0$ ;  $\alpha(t) = \text{const}$  при  $t \geq \alpha > 0$ ;  $A$  — линейный полуограниченный оператор с плотной в  $H$  областью определения  $D(A)$ , имеющий вполне непрерывный обратный;  $B(t)$  — линейный оператор, имеющий переменную область определения  $D(B(t))$ , причем при всех  $t \in [0, \infty)$   $D(B(t)) \supseteq D(A^{1/2})$ .

Условие 1. Оператор  $B(0)$  ограничен в  $H$  и  $\text{Re}(B(0)v, v) \geq \beta \|v\|^2$ ,  $\forall v \in H$ ,  $\beta > 0$  ( $\|v\|$  — норма  $v$  в  $H$ ) существует ограниченный в  $H$  оператор  $T$  такой, что

$$A^{1/2}B(0)A^{-1/2} = T^*T.$$

Условие 2. Существуют постоянные  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$  такие, что при любых  $\eta, \xi \in H$  и при всех  $t \in (0, \infty)$

$$\|[B(t) - B(0)]A^{-\frac{1}{2}}\eta\| \leq \mu\alpha(t)\|\eta\|,$$

$$\|\alpha(t)\eta\|^2 + \text{Re} \left( [B(t) - B(0)]A^{-\frac{1}{2}}\eta, \xi \right) + \|\xi\|^2 \geq \nu (\|\alpha(t)\eta\|^2 + \|\xi\|^2).$$

В дальнейшем мы будем использовать абстрактные функциональные пространства  $L_2(0, \infty; H)$  функций  $u(t)$ ,  $0 < t < \infty$ , со значениями в  $H$ , измеримых по Бохнеру и таких, что конечна норма  $\| \|u\| \| = \left\{ \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$ .

Получена коэрцитивная априорная оценка решений уравнения (1), имеющих конечную норму

$$\| \|(\alpha^2 u')'\| \| + \| \|\alpha A^{1/2} u'\| \| + \| \|u'\| \| + \| \|Au\| \| < \infty.$$

Теорема Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для решения уравнения (1) такого, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  справедлива оценка

$$\| \|(\alpha^2 u')'\| \| + \| \|\alpha A^{1/2} u'\| \| + \| \|u'\| \| + \| \|Au\| \| \leq C \left\{ \| \|f\| \| + \left\| \left| A^{1/2} u(t) \right| \right\|_{t=0} \right\},$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $f$  и  $u$ .

Уравнение (1) и граничные задачи для него при  $0 < t < \alpha$  изучалось в работах В.П. Глушко, О.М. Смелянского.

Литература

1. Глушко В.П., Смелянский О.М. Коэрцитивная оценка решений одного вырождающегося дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве // Amer. Math. Soc. Transl. v. 115. 1980. С. 175-185.

**О ПРИКЛАДНОЙ СИСТЕМНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ В ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ -  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ ЭКОНОМИКИ  
(аксиоматический подход)**

**Самыловский А.И. (Москва)**

Рассматривается система непрерывного математического образования студентов ГУ-ВШЭ как совместное дело общеуниверситетской кафедры Высшей математики и выпускающих кафедр факультетов Экономики, Менеджмента, Социологии, Прикладной политологии, Права. Реализуется система такого образования, позволяющая повысить мотивацию студентов младших курсов к изучению общих математических дисциплин, стимулировать вовлеченность выпускающих кафедр в процессы целенаправленного формирования общих математических дисциплин и необходимой математизации дисциплин направлений и специализаций. В основе системы лежит отношение "математика - социально-экономические сущности реального мира" и релевантные этому креативные образовательные процессы и технологии, формирующие творческих аналитиков, исследователей, управленцев, бизнесменов, политиков и т.д.

Проводится аксиоматизация предметного содержания - собственно математической компоненты профессионального образования: вводятся т.н. "аксиома внутренней структуры", "аксиома предметности", "аксиома результативности", "аксиома диссипации", "аксиома разумной достаточности". На базе аксиом формируется то, что составляет специфические феноменологические содержания "математики экономистов", "математики менеджеров", "математики политологов" и др. Приводятся конкретные примеры. Проводится аксиоматизация "оболочки" предметного содержания - прикладной системности математического образования: вводятся "аксиома операционной системности", "аксиома организационной системности". На базе аксиом математическое образование конституируется как профессиональная среда и средство прикладной системной интеграции в целях объединения различных предметных выпускающих кафедр, факультетов, внешних партнеров и заказчиков. Приводятся конкретные примеры.

Формируется динамическая парадигма функционирования системы математического образования в ГУ-ВШЭ, которая позволяет выделить повторяющийся цикл интеграции математического знания в математическую компоненту профессиональной подготовки студентов и в образовательную среду Университета в целом. В реальном формировании и поддержании функционирования такого цикла видится общая созидательная миссия системы математического образования.



# Именной указатель

Абдуллаева Р.А. ....	5	Валюхов С.Г. ...	44,45,46,47,48,49,50
Абрахип С.И. ....	6	Ванько В.И. ....	51
Аввакумов С.Н. ....	7	Васильев В.В. ....	52
Александрова Э.И. ....	8-9	Васильева И.Е. ....	50
Алексеев Б.В. ....	10	Вахитова Е.В. ....	53
Андреева Е.А. ....	11,12	Вервейко Н.Д. ....	44,45
Анисимов А.И. ....	13	Виноградова Г.А. ....	54
Астахов А.Т. ....	14	Воронцова Е.Г. ....	55
Астахова И.Ф. ....	15		
Афанасьева Д.В. ....	10	Гаврилов В.С. ....	56
		Гаврилова В.В. ....	57
Багмутов В.П. ....	16	Гапонов А.А. ....	36
Баклушин М.Б. ....	17	Гареева Т.М. ....	134
Батенко А.Н. ....	219	Гинзбург Н.С. ....	58
Бекмагавбетов К.А. ....	18	Глазатов С.Н. ....	59
Беловошко Д.Ф. ....	19	Глазунова В.О. ....	60-61
Беляева Н.П. ....	20	Глушко В.П. ....	62
Беляева Э.С. ....	21-22	Головко Н.И. ....	63,64,65
Бережной Е.И. ....	23	Гончаров О.В. ....	68
Берестова С.А. ....	154	Гончаров С.И. ....	66, 67
Бирюк Н.Д. ....	24	Гончарова Г.А. ....	68,135
Близняков Н.М. ....	25	Горелов Г.Н. ....	69
Блошанский И.Л. ....	26	Городецкий Ю.И. ....	70
Блюман С.Л. ....	27-28	Горшков В.Н. ....	135
Богданов Е.П. ....	16	Горяев Ю.А. ....	71-72
Богомоллов Я.Л. ....	29	Григоренко А.А. ....	73
Боева И.В. ....	30	Григорьев А.И. ....	19
Бойко В.К. ....	31	Григорьева Е.Г. ....	74
Бондаренко Т.Е. ....	32	Громов Ю.Ю. ....	80
Борзаков А.Ю. ....	33	Губенков А.А. ....	76
Борздыко В.И. ....	34	Губенков А.Н. ....	77
Бормисов А.А. ....	35	Гурьянов А.Е. ....	75
Боровских А.В. ....	176	Гусев Е.Л. ....	78
Бутаков А.В. ....	36, 37		
Булгаков А.И. ....	38	Данкова И.Н. ....	79
Булинская Е.В. ....	39,40	Дедов С.А. ....	48
Бушуева М.Е. ....	41	Денисов А.П. ....	80
Быстрай Г.П. ....	42,43	Денисов В.С. ....	81,181

Денисов С.А. ....	82,83	Клячкин В.А. ....	112
Деревягина Е.И. ....	84	Ковалев Н.Ф. ....	114
Десятирикова Е.Н. ....	13	Ковалева Т.А. ....	24
Дикарева Л.Ю. ....	85	Коваль А.С. ....	115
Дмитриев М.Г. ....	20	Колупаева С.Н. ....	178
Долгий Ю.Ф. ....	86	Коштыкова Л.Б. ....	116
Домашевская Э.П. ....	179	Коржов Е.Н. ....	117
Дорошенко-Ярушок П.М. ....	87	Корнев В.В. ....	118
Дубовский П.Б. ....	88	Коробицын В.В. ....	119
Дубровский О.И. ....	129	Королев В.С. ....	120
		Корчагин И.И. ....	121
Евстафьева В.В. ....	89	Кослов А.Т. ....	90,91
Евтеев А.В. ....	90,91	Костин В.А. ....	46
Егорова Д.П. ....	92-93,94	Кострюков С.А. ....	237
Епифанцев Ю.Ф. ....	24	Котов П.А. ....	122
Ерохин В.И. ....	95	Красноженов Г.Г. ....	123
Ефремов А.А. ....	38	Красноперова Д.Г. ....	124
Ефремов И.И. ....	96	Крутов А.В. ....	125,126
		Кудренко Н.Г. ....	127
Жлид М.А. ....	12	Кузьмичев Ю.Б. ....	19
Жуковская Т.В. ....	97	Кулаев Б.Ч. ....	128
Жуковский Е.С. ....	97	Кулаев Р.Ч. ....	128
Жураев Г.У. ....	17	Куликов А.А. ....	160
Журбин А.Н. ....	15	Курганский С.И. ....	129
		Курин А.Ф. ....	130
Завгородний М.Г. ....	98	Курсина И.С. ....	131
Задорожный В.В. ....	129	Кучер Н.А. ....	63,64,65
		Кучкарова А.Н. ....	132
Игропуло В.С. ....	99	Куцев А.Б. ....	133
Идрисов Р.Г. ....	194-195		
		Лазарев К.П. ....	134
Калитвин А.С. ....	100,101	Левченко Е.В. ....	90
Каплыбаев О. ....	102	Легеня Т.В. ....	139
Карамова А.А. ....	196	Легошин Г.М. ....	135
Карелина И.Г. ....	103	Листров Е.А. ....	136
Каталиков Д.В. ....	237	Лихачёв Е.Р. ....	129
Катрахов В.В. ....	63	Лобанова О.А. ....	137
Качалов Ж.В. ....	104	Лукавый А.П. ....	138
Квасов Д.С. ....	173	Ляхов Л.Н. ....	139
Квасов И.С. ....	105		
Кильматов Т.Р. ....	106	Макаров Е.А. ....	140,157
Киванш О.М. ....	107	Максимов В.И. ....	141
Кириченко А.В. ....	108	Максимова Е.И. ....	129
Кириченко В.Ф. ....	109	Малотина О.П. ....	142
Киселев В.В. ....	7,110	Мамадолимов А.Р. ....	182
Киселев Ю.Н. ....	7	Маринов А.В. ....	143
Клочанцев М.И. ....	111	Матвеев М.Г. ....	144
Клячкин А.А. ....	113	Матвеева М.В. ....	237

Махрипова М.В. ....	145	Попов Л.Е. ....	178
Мельникова Л.А. ....	146	Попова И.А. ....	179
Миленин А.В. ....	91	Потапов А.С. ....	21-22
Милованов А.В. ....	147	Потапов В.Н. ....	104
Минин Л.А. ....	44	Потапов Д.К. ....	180
Мишук С.А. ....	148	Потехин П.А. ....	237
Миронов В.В. ...	149,150,151,152,153	Примакова С.И. ....	81,181
Митрохин Ю.С. ....	152	Пулатов А.К. ....	182
Митюшов Е.А. ....	154	Пуспенева С.И. ....	178
Митяков С.В. ....	155	Пустарнакова Ю.А. ....	183
Михайлов П.Н. ....	156	Пуханова Л.С. ....	164
Мойсеев И.В. ....	157		
Моренченко С.В. ....	68	Ратыни А.К. ....	184
Мочалин А.А. ....	158	Редькина Т.В. ....	185
Мочалин П.А. ....	158	Рогова Н.В. ....	186
Мугафаров М.Ф. ....	197	Розенберг В.Л. ....	146,187
Мукминов Ф.Х. ....	35	Рубанова Н.П. ....	188
Мустафокулов Р. ....	159	Рубцова Г.Р. ....	189
		Рудаков И.А. ....	190
Нагорняк Е.М. ....	43	Рыжков А.В. ....	191
Неприщев В.И. ....	160	Рыжкова Н.А. ....	136
Нестеренко Р.В. ....	161	Рыхлов В.С. ....	192
Новикова О.Н. ....	162, 163	Рябогин А.К. ....	193
Носач А.К. ....	164		
Нурсултанов Е.Д. ....	165	Сабитов К.Б. ....	194-195,196,197
		Савинков А.Ю. ....	198
Обгадзе Т.А. ....	140,172	Саврасова Н.А. ....	179
Огарков В.Б. ....	166,167	Савченко Г.Б. ....	199
Одинцова Н.Ю. ....	154	Сагопова С.А. ....	105
Ожунева Г.Л. ....	168	Салаватова С.С. ....	200
Олейников В.Е. ....	169	Самонов В.Е. ....	99
		Самыловский А.И. ....	240
Павленко В.Н. ....	170	Сапронов Ю.И. ....	33
Павлов С.П. ....	171	Свиридов А.С. ....	144
Паксютова Е.В. ....	68	Секерин А.Б. ....	201
Папасенко Е.А. ....	38	Семенова М.М. ....	202
Перегудов А.Б. ....	171	Семькина Н.А. ....	203
Пескова М.В. ....	172	Семёнов С.М. ....	46,47
Петелин М.И. ....	29	Сергеев А.С. ....	58
Петров Ю.П. ....	124	Сергеева Т.С. ....	204
Пешков В.В. ....	237	Ситчихин А.Н. ....	153
Пигарина А.А. ....	173	Скворцова Ж.Ю. ....	177
Платонова И.А. ....	51	Сливкин А.И. ....	24
Плетяева О.К. ....	174	Смирнова Е.В. ....	62
Покорная И.Ю. ....	175	Смольянов В.А. ....	160
Покорный Ю.В. ....	103,176,177	Смотров О.А. ....	45
Покровский А.Н. ....	147	Солощенко М.Ю. ....	205
Поляков Н.Н. ....	169,223,234	Сорокина В.М. ....	206

Староверов О. ....	207	Шапоренко Р.С. ....	219
Степанцов В.А. ....	208	Шарафутдинова Г.Г. ....	233
Столяров В.Е. ....	105	Шатагов С.С. ....	176
Студенок С.И. ....	43	Шевченко А.Е. ....	234
Сумин В.И. ....	209	Шеретова Ю.В. ....	235
Сумин М.И. ....	56	Шиманов С.С. ....	228
Тарушкин В.Т. ....	210	Шубарин М.А. ....	236
Тарушкина Л.Т. ....	210	Шунин Г.Е. ....	237
Титоренко С.А. ....	211	Шуринов Ю.А. ....	136
Тлеуханова Н.Т. ....	212	Юнаковский А.Д. ....	29,114,238
Трибунских О.А. ....	98	Юрков А.В. ....	210
Тюрян В.М. ....	213	Юсупова Н.И. ....	153
Устинов Г.М. ....	214	Ярославцев С.В. ....	44,45,48,49,50
Фаталиев Н.К. ....	215	Ярцева Н.А. ....	239
Феохтистов В.В. ....	216		
Федорова Л.Б. ....	217		
Филер З.Е. ....	218,219		
Фильченков С.Е. ....	114		
Фомин В.И. ....	220,221,222		
Фролов П.В. ....	223		
Фролова Е.В. ....	101		
Ханова Т.Г. ....	224		
Харбин Н.Н. ....	225		
Харин Ю.С. ....	226		
Хатамова М.А. ....	227		
Ходус В.В. ....	49,50		
Хромов А.П. ....	118		
Цепенев И.А. ....	141,228		
Цехан О.Б. ....	31		
Цирулева В.М. ....	229		
Цуканова Л.П. ....	104		
Чернов А.В. ....	209		
Черемных Ю.Н. ....	230		
Чесноков Б.П. ....	94,135		
Чиж Е.А. ....	170		
Чикирякин А.А. ....	37		
Чинь Ван Хау ....	231		
Чубурин Ю.П. ....	224		
Шамоян Р.Ф. ....	232		
Шаптала В.В. ....	168		
Шаптала В.Г. ....	168		