ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В.А.СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ ПРИ АДМИНИСТРАЦИИ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЩЕСТВО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА" ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ "ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-VII"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(17-23 АПРЕЛЯ 1996 Г.)

Воронеж 1996

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В.А.СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ ПРИ АДМИНИСТРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЩЕСТВО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА"
ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ВЕСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-VII"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
(17-23 апреля 1996 г.)

Воронеж – 1996

УДК 517.94 (92; 054; 97)

"Понтрягинские чтения – VII": Тезисы докладов школы. – Воронеж, ВГУ, 1996. – 208 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, состоявшихся на очередной Воронежской весенней математической школе, проводимой совместно с Математическим институтом РАН им. В.А.Стеклова и Московским университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем теории оптимального управления, качественной теории дифференциальных уравнений, анализа, геометрии, аналитического и численного моделирования сложных систем.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и комитет по науке и высшей школе при Администрации Воронежской области

УДК 514.17+514.177.2

У.У.Абдыманапов (г. Бишкек)

Метрически-выпуклая геометрия в экстремальных задачах на плоскости E^2

Как известно, существует целый ряд важных и интересных задач, посвященных вопросу об отыскании такой выпуклой фигуры, для которой некоторая величина достигает своего максимального или, наоборот, своего минимального значения. Такие задачи обычно называются экстремальными.

В данной работе, которая предлагается на суд рассмотрения читателя основываясь на понятии теории меры (в частности меры Лебега в E^2) доказано:

ТЕОРЕМА 1 Пусть K – выпуклое множество (или область) в евклидовой плоскости E^2 ограниченное и центрально-симметричное, имеющее центр симметрии в точке 0. И пусть $\alpha(2s, 2t)|_{(1 \leq s,t \leq n)} \in K$ - конечная последовательность целочисленных точек евклидовой плоскости E^2. Тогда

$$\min \mu K(\alpha) >> 0.1875\pi^3 r^2 >> 0.43304\pi^2 r^2.$$

ТЕОРЕМА 2 Пусть K - выпуклое множество (или область) в евклидовой плоскости E^2 ограниченное и центрально-симметричное, имеющее центр симметрии в точке 0. И пусть $\alpha(2s, 2t)|_{(1 \leq s,t \leq n)} \in K$ - конечная последовательность целочисленных точек евклидовой плоскости E^2. Тогда

$$\max \mu K << 36,0127r^2 << 2,o535\pi r^2.$$

УДК 514.17+514.177.2

У.У. Абдыманапов (г. Бишкек)

Метрически-выпуклая геометрия в экстремальных задачах в пространстве E^3

Как известно, существует целый ряд важных и интересных задач, посвященных вопросу об отыскании такой выпуклой фигуры, для которой некоторая величина достигает своего максимального или, наоборот, своего минимального значения. Такие задачи обычно называются экстремальными.

В данной работе, которая предлагается на суд рассмотрения читателя основываясь на понятии теории меры (в частности меры Лебега в E^3) доказано:

<u>*ТЕОРЕМА 1*</u> Пусть Ω - выпуклое множество (или область) в евклидовом пространстве E^3 ограниченное и центрально-симметричное, имеющее центр симметрии в точке 0. И пусть $\beta(2s,2t,2k)|_{(1\le s,t,k\le n)} \in\Omega$- конечная последовательность целочисленных точек евклидового пространства E^3. Тогда

$$\min \mu\ \Omega(\beta)>>0,1310\pi^4 r^3>>1,25\pi^3 r^3.$$

<u>*ТЕОРЕМА 2*</u> Пусть Ω - выпуклое множество (или область) в евклидовом пространстве E^3 ограниченное и центрально-симметричное, имеющее центр симметрии в точке 0. И пусть $\beta(2s,2t,2k)|_{(1\le s,t,k\le n)} \notin\Omega$ - конечная последовательность целочисленных точек евклидового пространства E^3. Тогда

$$\max \mu\ \Omega<<8,0931\pi r^3<<23,542 r^2.$$

Об условиях экстремума в слабо-анормальных задачах.

Е.Р.Аваков, А. В. Арутюнов, С.В.Горбунова

(Москва)

Рассмотрим экстремальную задачу с ограничениями типа равенств:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) \to min \\ F(x) = 0. \end{cases}$$

Здесь X - гильбертово пространство, а Y - евклидово k-мерное пространство. Функция $f : X \to R$ и отображение $F : X \to Y$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по Фреше.

Известно, что если точка x_0, в которой достигается минимум в рассматриваемой задаче, является анормальной, то есть $ImF'(x_0) \neq Y$, то классическое правило множителей Лагранжа в ней является неинформативным, а классические необходимые условия второго порядка, вообще говоря, не выполняются. В работах [1], [2] получены необходимые условия первого и второго порядка для анормальных точек.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется слабо-анормальной, если $codim(ImF'(x_0)) = 1$.

Доклад посвящен исследованию "зазора" между необходимыми условиями из [1], [2] и достаточными условиями локального минимума.

Теорема. Предположим, что точка x_0 слабо-анормальна и в ней выполнены необходимые условия второго порядка из [1, Теорема 2] и необходимые условия второго порядка из [2, Теорема 3.1]. Тогда существует такой вектор $y \in Y$, что для произвольного $\varepsilon > 0$ точка x_0 является точкой строгого локального минимума в возмущенной задаче

$$\begin{cases} f(x) + \varepsilon|x - x_0|^2 \to min \\ F(x) + \varepsilon y|x - x_0|^2 = 0. \end{cases}$$

Важно заметить, что в сформулированной теореме предположение слабой анормальности точки x_0 существенно: без него она, вообще говоря, не верна.

Литература.

1. Аваков Е.Р. Условия экстремума для гладких ограничений типа равенств // ЖВМ и МФ. — 1985. — Т. 25, N 5. — С. 680–693.

2. Арутюнов А.В. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Известия РАН, сер. матем. — 1996. — Т. 60, N 1. - С. 37 - 62.

С.Н.Аввакумов (г. Москва)

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ.

В оптимальном управлении решение некоторых краевых задач принципа максимума [1] сводится к решению нелинейных систем алгебраических уравнений с конечным числом неизвестных. Например, для линейной задачи быстродействия такими неизвестными служат начальное значение сопряженной переменной и оптимальное время. Различные варианты метода продолжения по параметру [2] в сочетании с методом Ньютона позволяют находить достаточно точно приближенное решение рассматриваемых нелинейных систем. Предлагаемая далее модификация метода продолжения по параметру учитывает погрешности вычислений, возникающие при численной реализации стандартных методов продолжения. В новой схеме содержится член в форме обратной связи, который по невязке системы уточняет получаемое методом продолжения приближенное решение. Рассматриваемая схема представлена в непрерывной форме.

Рассмотрим систему n конечных уравнений

$$F(x,t) = 0, \quad x \in X, t \in I \tag{1}$$

относительно вектора неизвестных $x \in E^n$ и параметра t; X – связная область в E^n, I – отрезок [0,1]. Для каждого $t \in I$ требуется определить такое $x = \bar{x}(t) \in X$, что $F(\bar{x}(t), t) = 0$. При определённых условиях регулярности на F и её производные система (1) имеет единственное определённое на I гладкое решение $\bar{x}(t)$.

Пусть известно значение $x = \bar{x}(0) \in X$ для которого $F(\bar{x}(0), 0) = 0$. При реализации метода продолжения по параметру с обратной связью интегрируется следующая задача Коши:

$$\dot{x} = -\left[F'_x(x,t)\right]^{-1}\left(F'_t(x,t) + W(t)F(x,t)\right), \quad x(0) = \bar{x}(0),\ t \in I. \tag{2}$$

Решение $x(t)$ которой совпадает с решением $\bar{x}(t)$ системы (1). При $W(t) \equiv 0$ имеем обычную схему метода продолжения. Если определённая на [0, 1) симметричная непрерывная матрица $W(t) \geq 0$, то все решения $x(t)$ системы (2) с достаточно близкими к $\bar{x}(0)$ начальными значениями $x(0)$ определены на [0, 1), и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$, $t \in [0, 1)$ при $|x(0) - \bar{x}(0)| < \delta$. Кроме того, если существует такая матрица B, что $(1-t)W(t) \geq B > 0$, то $\lim\limits_{t \to 1-0} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0$.

В схеме с обратной связью, выбирая специальным образом матрицу $W(t) \geq 0$, можно точнее находить решение системы (1). Пусть $x(t)$ – решение задачи (2), исходящее из близкой к $\bar{x}(0)$ точки $x(0) = \bar{x}(0) + \mu \cdot h$, где h – постоянный вектор, μ – малый параметр. Тогда при $\mu \to 0$ и $t \in [0, 1)$ имеет место соотношение

$$x(t) = \bar{x}(t) + \mu \cdot \left[F'_x(\bar{x}(t), t)\right]^{-1} \Phi(t) F'_x(\bar{x}(0), 0) \cdot h + o(\mu, t),$$

где матрица $\Phi(t)$ – решение линейной системы $\dot{\Phi} = -W(t)\Phi$ с начальным условием $\Phi(0) = E$, E – единичная матрица, а $o(\mu,t)/\mu \to 0$ равномерно по t на множестве [0, 1) при $\mu \to 0$.

Метод продолжения по параметру с обратной связью применялся для решения линейных задач быстродействия и показал свою эффективность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N 96-01-00920.

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. - 392 с.

[2] Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975. - 558 с.

Авсянкин О. Г. (г. Ростов-на-Дону)

Псевдоспектры усечённых интегральных операторов с однородными ядрами

В пространстве суммируемых функций рассматриваются интегральные операторы вида

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} k(x;y)\varphi(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad |x|\leqslant 1,$$

где ядро $k(x;y)$ однородно порядка $-n$, инвариантно относительно вращений в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет специальному условию суммируемости, обеспечивающему ограниченность оператора K.

Рассматривается вопрос о применимости к оператору K проекционного метода и исследуется связь между спектральными характеристиками оператора K и усеченного оператора K_τ, где

$$(K_\tau\varphi)(x) = \int\limits_{\tau<|y|<1} k(x;y)\varphi(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad 0<\tau<|x|<1.$$

С этой целью рассматриваются псевдоспектры операторов K и K_τ. (Напомним, что $\forall\varepsilon>0$ ε–псевдоспектром оператора A называется множество $\Lambda_\varepsilon(A)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \|(\lambda I-A)^{-1}\|\geqslant 1/\varepsilon\}$). Доказывается

Теорема. Пусть оператор K действует в $L_2(\Omega)$, где $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leqslant 1\}$. Тогда $\forall\varepsilon>0$

$$\lim_{\tau\to 0}\Lambda_\varepsilon(K_\tau) = \Lambda_\varepsilon(K).$$

Данные результаты получены совместно с Карапетянцем Н. К.

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

Агранович Ю.Я., Азизова О.Т. (Воронеж)

О СОВМЕСТНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРОВ И ПРИЛОЖЕНИЯХ

Для полиномиального операторного пучка $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} M_i$ с коэффициентами $\{M_i\}_{i=0}^{n}$, являющимися операторами в k-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и соответствующего многочлена $\det L(\lambda) = \sum_{i=0}^{nk} d_i \lambda^{nk-i}$ с коэффициентами $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$, — смешанными дискриминантами, — неизвестны необходимые и достаточные условия на операторные коэффициенты $\{M_i\}_{i=0}^{n}$, при которых числовые коэффициенты $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$ зависели бы только от инвариантов семейства $\{M_i\}_{i=0}^{n}$.
Здесь речь пойдет о достаточных условиях.

ТЕОРЕМА 1 *Пусть $\{M_i\}_{i=0}^{n}$ — произвольное коммутативное семейство операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Пусть $\sigma(\{M_i\}_{i=0}^{n}) = \{\{c_j^{(i)}\}_{i=0}^{n}\}_{j=1}^{l}$ — совместный спектр операторов $\{M_i\}_{i=0}^{n}$, состоящий из l различных точек кратности n_j, $(j = \overline{1,l})$. Тогда смешанные дискриминанты однозначно определяются координатами точек совместного спектра операторов $\{M_i\}_{i=0}^{n}$ и их кратностями:*

$$\det L(\lambda) = \sum_{i=0}^{nk} d_i \lambda^{nk-i} = \prod_{j=1}^{l} \Big(\sum_{i=0}^{n} c_j^{(i)} \lambda^{n-i}\Big)^{n_j}.$$

Доказательство использует удобную форму определения совместного спектра операторных коэффициентов пучка и основано на результатах теории спектральных операторов.

Теорема 1 позволяет получить обобщение результатов Гершгорина о локализации собственных значений на случай полиномиальных операторных пучков.

ТЕОРЕМА 2 *Пусть выполнены условия Теоремы 1, $c_j^{(0)} \neq 0, c_j^{(n)} \neq 0$ $(j = \overline{1,l})$. Тогда спектр пучка $L(\lambda)$ содержится в объединении l колец, определяемых условиями:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{c_j^{(n-i)}}{c_j^{(n)}}\Big| \cdot \Gamma_j^{i}\Big)^{-1/n} \cdot \frac{1}{\psi(n)} \leq |\lambda| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(0)}}\Big| \cdot \gamma_j^{n-i}\Big)^{1/n} \cdot \psi(n), \quad j = \overline{1,l},$$

где

$$\Gamma_j = 2 \max_{i=\overline{1,n}} \Big|\frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(n)}}\Big|^{1/(n-i)}, \quad \gamma_j = 2 \max_{i=\overline{1,n}} \Big|\frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(0)}}\Big|^{1/i}, \quad \psi(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ нечетно} \\ n-1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Если одна из связных компонент указанной области локализации образована объединением r колец, то она содержит ровно $n \cdot r$ собственных значений пучка $L(\lambda)$ с учетом их кратности.

В докладе будут приведены также различные следствия из указанных результатов.

Азизов Т.Я. (Воронеж)

ПРОСТЫЕ p-ЦИКЛИЧЕСКИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОНТРЯГИНА

Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве с регулярной индефинитной метрикой с κ положительными квадратами, т.е. в пространстве Понтрягина Π_κ.
Оператор A называется p-циклическим, если существует такое подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_\kappa$, что $\Pi_\kappa = \text{c.l.s.}\{A^n\mathcal{L}\}_{n=0}^{\infty}$, и простым p-циклическим, если не существует такого разложения $\Pi_\kappa = \Pi_{\kappa_1}[\dot{+}]\Pi_{\kappa_2}$ на инвариантные относительно A подпространства Π_{κ_1} и Π_{κ_2}, что операторы $A|\Pi_{\kappa_i}$ являются p_i-циклическими, $i = 1, 2$, $p_1 + p_2 = p$.

Известно, что каждый простой p-циклический самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является циклическим, т.е. в этом случае $p = 1$. В случае пространства Понтрягина этот результат оказывается верен лишь при $\kappa = 1$.

ПРИМЕР. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = \text{l.s.}\{e_1\} \dotplus \text{l.s.}\{e_2\} \dotplus L_2(-1, 1) \dotplus \text{l.s.}\{e_4\} \dotplus \text{l.s.}\{e_5\}$$

со скалярным произведением (x, y) и введем в нем индефинитную метрику $[x, y] = (Jx, y)$ с помощью оператора J:

$$J(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f(t) + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5) = \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 - f(t) + \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_5.$$

Пространство $\mathcal{H}$ с индефинитной формой $[x, y]$ является пространством Понтрягина Π_κ, $\kappa = 2$. Оператор A:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f(t) + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5) = (\int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \alpha_5 e_1) + \alpha_4 e_2 + (tf(t) - \alpha_4)$$

будет самосопряженным в Π_κ и простым 2-циклическим.
В самом деле, так как $\ker A = \text{l.s.}\{e_1, e_2\}$, то $\dim\ker A > 1$ и потому A не может быть циклическим оператором. Поскольку же $\Pi_\kappa = \text{c.l.s.}\{A^n \text{l.s.}\{e_4, e_5\}\}_{n=0}^{\infty}$, то A — 2-циклический оператор. Простота оператора A следует из того, что его корневой линеал, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$ совпадает с $\text{l.s.}\{e_1, e_2, e_5\}$ и потому не допускает разложения на инвариантные ортогональные в Π_κ подпространства.

Акимов М.Ю., Вельмисов П.А. (Ульяновск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА

Исследуется динамическая, квазистатическая и статическая устойчивость трубопровода с учетом взаимодействия с потоком жидкости в трубопроводе. Исследования проводятся на основе модельного интегро-дифференциального уравнения для прогиба $w(x,t)$

$$(m_0+m_*)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\int\limits_0^t\frac{\partial Q(x,\tau,t)}{\partial\tau}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}d\tau\right]+\xi\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left((T_0+m_*U^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+r\left[w-\int\limits_0^t\frac{\partial V(x,\tau,t)}{\partial\tau}w(x,\tau)d\tau\right]+$$

$$+\sigma\frac{\partial w}{\partial t}+(2m_*U)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta\frac{\partial w}{\partial x}\int\limits_0^\ell\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx+\psi\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\ell\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right]=0$$

где коэффициенты в уравнении в общем случае зависят от x,t.

Исследования динамической и квазистатической устойчивости проводилось на основе функционалов типа Ляпунова. В частности, при $\theta=\psi=0$ функционал имеет вид

$$J(t)=\int\limits_0^\ell\left\{M\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2(1+Q(x,0,t)-Q(x,t,t))+\right.$$

$$+D\int\limits_0^t\frac{\partial Q(x,\tau,t)}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2d\tau+r\,[(1+V(x,0,t)-$$

$$\left.-V(x,t,t))w^2+\int\limits_0^t\frac{\partial V(x,\tau,t)}{\partial\tau}(w(x,t)-w(x,\tau))^2d\tau]\right\}dx$$

В этом случае одно из условий устойчивости налагает ограничение на сжимающее усилие T_0 и скорость потока U

$$T_0<\frac{2}{\ell^2}K_0-m_*U^2,\quad K_0=\inf_{x,t}[D(1+Q(x,0,t)-Q(x,t,t))]>0,$$

Границами области устойчивости на плоскости (U,T_0) являются прямая $U=0$ и ветвь параболы $T_0=const-m_*U^2$, направленная вниз. Если $T_0=0$, то имеем ограничение на значение скорости $U^2<2K_0/(m_*\ell^2)$. Условия устойчивости налагают также ограничения на вид закреплений (т.е. на краевые условия при $x=0,x=\ell$).

Александров А.В. (Владимир)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССАХ ТИПА ХАРДИ

В ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ рассмотрим l - вектор функции $u(x,y) = (u_1, \ldots, u_l)$ - решения эллиптической системы второго порядка

$$u_{yy} + a_0\, u_{xx} + a_1\, u_{xy} = 0 \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in R^{l \times l}$, $i = 0,1$.

Наряду с общим представлением Бицадзе решений u через через семейство аналитических в D функций, сравнительно недавно Солдатовым А.П. предложено общее представление решений через J - аналитические l вектор функции - решения эллиптической системы первого порядка $\Phi_y - J\Phi_x = 0$, $\quad u = Re\; b_0\Phi$.
Здесь $l \times l$ комплексные матрицы b_0, J однозначно определяются из коэффициентов уравнения a_j, $j = 0,1$. Как и в аналитическом случае для уравнения Лапласа, соответствие $u = Re\; b_0\; \Phi$ позволяет рассматривать классы решений уравнения (1) и связывать их с соответствующими классами J - аналитических функций.

Считая область D односвязной, рассмотрим монотонно расширяющуюся последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, которая равномерно аппроксимирует границу области $\Gamma = \partial D$ в классе гладкости кривой Γ. Для ляпуновских границ это означает наличие сдвигов $\gamma_n : \Gamma_n \to \Gamma$, обладающих свойством $\gamma_n(t) - t \to 0$ в классе H^1 при $n \to \infty$.

Классы типа Харди $e_p^k(D)$, $k = 0,1$ решений эллиптических систем (1) включают в себя все решения u, для которых конечна норма

$$|u|_{e_p^k(D)} = \sup_{n>0} |u|_{L_p(\Gamma_n)} + k \times (\sup_{n>0} |u_x|_{L_p(\Gamma_n)} + \sup_{n>0} |u_y|_{L_p(\Gamma_n)}), \quad 1 < p < \infty$$

Теорема. *Пусть область D обладает ляпуновской границей.*
(a) Фредгольмовость задачи Дирихле $u|_{\partial D} = f$, $f \in L_p(\partial D)$ *в классе* $e_p^0(D)$ *равносильна слабой связанности системы (1) :* $\det b_0 \neq 0$.
(b) Для нетеровости задачи Пуанкаре в классе $e_p^1(D)$
$(A_1(t)u_x(t) + A_2(t)u_y(t) + A_0(t)u(t))|_\Gamma = f$, $f \in L_p(\partial D)$
в предположении непрерывности по Гельдеру коэффициентов A_i, *необходимо и достаточно выполнения условия*
$\det G(t) = \det(A_1\; b_0 + A_2\; b_0\; J) \neq 0 \quad \forall t \in \partial D$,
при этом индекс задачи высчитывается по формуле
$æ = -1/\pi i\; arg\; [detG(t)]|_\Gamma + 2l$.

Александрова И.А. (Владимир)

ОЦЕНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СО СНОСОМ

Пусть $K(x,y,t)$ есть ограниченное на $R^m \times R^m$ при каждом $t > 0$ фундаментальное решение уравнения диффузии со сносом

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\ (\mathrm{a}(x)\nabla u) + b(x)\nabla u\ = 0$$

в котором $\mathrm{a}(x)$ - гладкая симметрическая на $\mathbb{R}^m$ матрица, удовлетворяющая условиям эллиптичности и ограниченности, $b(x)$ - гладкое периодическое векторное поле.

Пусть $K_0(x,y,t)$ есть фундаментальное решение усредненного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\ (\mathrm{a}^0\nabla u)\ = 0$$

Известно, что

$$K_0(x,y,t) = (2\pi t)^{-m/2}(\det \mathrm{a}^0)^{-1/2}\ \exp\left(-(x-y)(\mathrm{a}^0)^{-1}(x-y)/(4t)\right).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Найдутся*

1) постоянная симметричная положительно определенная матрица a^0 ,

2) постоянный вектор $\beta \in \mathbb{R}^m$,

3) гладкая положительная периодическая функция $p(x)$,

такие, что при $t \geq 1$ *справедливы оценки*

$$|K(x+\beta t,y,t) - p(y)\ K_0(x,y,t)| \leq\ C\ t^{-(m+1)/2}$$
$$(\forall x \in R^m\ ,\forall y \in R^m)$$

$$\int_{R^m} |K(x+\beta t,y,t) - p(y)\ K_0(x,y,t)|dy \leq\ C\ t^{(-1/2+\delta)}$$
$$(\forall x \in R^m,\ \delta\ > 0)$$

Из этой теоремы в качестве следствий нетрудно получить теорему о близости, центральную предельную теорему и теорему об усреднении.

Алхутов Ю. А. (Владимир)

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В ограниченной области D евклидова пространства точек $(t,x) = (t, x_1, ..., x_n)$ рассматривается равномерно параболический оператор

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{n} \left((a_{ik}(t,x)u_{x_i}\right)_{x_k} - u_t$$

с непрерывными в $\bar{D}$ коэффициентами и исследуется вопрос об однозначной разрешимости первой краевой задачи с однородным краевым условием на параболической границе $\Gamma(D)$ в L_p пространствах Соболева.

Если $D = \Omega \times (0,T)$, то изучается структура области, при которой задача

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}, f_i \in L_p(D), u|_{\Gamma(D)} = 0, u \in W_p^{1,0}(D)$$

однозначно разрешима при всех $p \in (1, \infty)$ с соответствующей оценкой

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(D)} \leq \text{ const } \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_p(D)}$$

Найденный критерий формулируется в терминах свойств гармонической меры специальных множеств области Ω .Приводятся достаточные условия геометрического характера на границу $\partial\Omega$.

Для областей типа "квадратичного параболоида" с изолированной характеристической точкой на границе краевая задача изучается в весовых L_p пространствах.

В частности, найдено необходимое и достаточное условие на весовые функции, обеспечивающее двухвесовую коэрцитивную L_p оценку для оператора теплопроводности. Критерий формулируется в терминах условий типа Макенхаупта и учитывает геометрию области.

Полученные оценки применяются для изучения асимптотического поведения решений краевой задачи в окрестности характеристической точки границы при минимальных требованиях относительно коэффициентов уравнения.

Андреева Е.А., Цирулева В.М. (Тверь)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ

В работе исследуется процесс распространения эпидемии в однородном сообществе с учетом времени скрытого периода заболевания τ, описываемый с помощью системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием в аргументе функции состояния. Искомыми функциями являются количество здоровых людей, подверженных заболеванию $x_1(t)$, больных людей $x_2(t)$ и функция, характеризующая социальную программу здоровье $x_3(t)$, включающую использование телевидения, радио, рекламы, лекций и т.д.. Управление процессом распространения эпидемии осуществляется с помощью функций управления: введения вакцины $u_1(t)$, карантина для больных людей $u_2(t)$ и функции управления социальной программой $u_3(t)$, на которые наложены ограничения $0 \le u_i(t) \le B_i$, $i=1,2,3$, где B_i - заданные постоянные величины.

$$\dot{x}_1 = -(1-x_3)f(x_1,x_2) - u_1,$$
$$\dot{x}_2 = (1-x_3)f(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) - \gamma x_2 - x_2 u_2,$$
$$\dot{x}_3 = u_3 - b x_3,$$
$$x_i(0) = N_i, \quad i=1,2,3.$$

Выбор оптимального управления осуществляется из условия минимума функционала, выражающего "цену эпидемии", включающую стоимость введения вакцины, стоимость карантина, программы здоровья и количество больных членов общества:

$$J(u) = \int_0^T (x_2 + c_1 u_1 + c_2 u_2 x_2 + c_3 u_3)\, dt$$

Для этой модели разработан и реализован на ЭВМ численный метод решения краевой задачи принципа максимума, исследовано влияние начальных данных и параметров на оптимальный процесс.

1. Behncke H. The Control of Determenistic Epidemics. Math. Appl. Sci. 1993. V. 3. Pp. 298-311.

2. Андреева Е.А., Цирулева В. М. Исследование управляемого процесса распространения эпидемии с помощью вакцины, карантина и программы здоровье. - Тверь, 1995. 17 с. - Деп. в ВИНИТИ 29.03.95 N 856-В95.

Конечномерные редукции и визуализации в теории бифуркаций нелинейных колебаний

И.П.Анисимова (Воронеж)

Используя вариационный метод и точные конечномерные редукции Ляпунова-Шмидта или Морса-Ботта [1], можно многие качественные задачи теории периодических нелинейных колебаний свести к изучению поведения функций малого количества переменных. А именно, после функционально-операторной трактовки уравнения теории колебаний в форме $f(x) = 0$, где f - нелинейный фредгольмов оператор нулевого индекса (в банаховых пространствах периодических функций), и перехода к эквивалентной вариационной задаче $V(x) \longrightarrow \inf$ с последующей редукцией к ключевой функции $W(\xi) = \inf\limits_{x: p(x)=\xi} V(x)$, $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x))$ – ключевые параметры, исследование колебаний сводится к анализу критических точек и поверхностей уровней (лебеговых множеств) W. Элементы компьютерных графических изображений этой функции дают точную информацию о количестве допустимых колебаний, об их регулярности или кратности, о бифуркациях (при наличии дополнительных параметров) и т.д.

В докладе будут рассмотрены классическое уравнение Дуффинга, его обобщения и связанные с ними периодические краевые задачи [2]. Будут также представлены результаты вычислений локальных тейлоровских аппроксимаций ключевых функций от двух и трех ключевых переменных, соответствующих этим задачам, и некоторые результаты их аналитического и компьютерного бифуркационного анализа. Будет также дано доказательство теоремы о нелокальной редуцируемости обобщенного уравнения Дуффинга.

Литература:

[1] *Sapronov Yu.I.* Smooth Marginal Analysis of Bifurcation of Extremals.// Geometry in Partial Differential Equations. World Scientific publishing. Co. Pte. Ltd. 1994. P.345-375.

[2] *Перов А.И.* Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: изд. ВГУ, 1981. 196 с.

УДК 519.68

Аржеухов Л.Б. (Воронеж)

ОДИН АЛГОРИТМ СИНТЕЗА УПРАВЛЯЮЩИХ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В развитие подхода к моделированию процессов сверхплотной и сверхнадежной записи цифровой информации в интеллектуальных системах памяти знакочередующимися числовыми рядами и последовательностями (ЗЧЧП) решается задача преобразования со сжатием произвольной двоичной числовой последовательности (ДЧП) в управляющую ЗЧЧП вида

$$a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 - \dots + a_i \cdot b_i - \dots, \qquad (I)$$

где a_i принимают поочередно значения ±I, b_i – двоичные коды, получаемые из членов исходной ДЧП по приводимому алгоритму.

I. Представляют исходную ДЧП в виде последовательности m-разрядных двоичных кодов и разбивают последнюю на подпоследовательности по r членов.

2. Дополняют каждую подпоследовательность двумя маркерными членами, отмечаемыми тем, что их минимальные абсолютные значения превосходят максимально возможные значения других членов подпоследовательности, и одним, двумя или тремя служебными m-разрядными членами, отмечаемыми определенным местоположением в подпоследовательности.

3. Выполняют над информационными членами подпоследовательности по одному или по два следующих преобразований: исключение всех или несколько членов; обращение кодов одного, нескольких или всех членов; обнуление значений одного или нескольких членов; вычет заданного числа из значений нескольких или всех членов; транспонирование кодов группами по m членов.

4. Подсчитывают суммы всех членов подпоследовательности после каждого ее преобразования.

5. Выбирают вариант преобразованной подпоследовательности с минимальным значением суммы всех ее членов.

6. Определяют значения и знаки сумм отдельно всех нечетных и четных членов выбранной преобразованной подпоследовательности, а также их разностей для разных позиций в подпоследовательности второго маркерного члена.

7. Выбирают вариант подпоследовательности с минимальным значением разности и дополняют исходное значение первого или второго, в зависимости от знака разности, маркерного члена минимальным значением разности.

УДК 539.214;539.374

М.А.Артемов, Д.Д.Ивлев (Воронеж, Чебоксары)

О КИНЕМАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЯХ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В докладе дается обзор некоторых результатов по кинематически определимым состояниям в теории идеальной пластичности.

Кинематически определимые задачи в общем случае характеризуются тремя конечными независимыми соотношениями

$$f_k(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора скорости деформации.

Три соотношения (1) определяют замкнутую систему уравнений относительно трех компонент скорости перемещения u_i.

Уравнения кинематически определимых состояний в случае осесимметричной задачи теории идеальной пластичности приведены в [1]. Там же рассмотрен пространственный случай кинематически определимого состояния при предельном состоянии, отвечающем отрыву.

Плоская задача, для которой имеет место кинематически определимое состояние, рассмотрена в [2].

В [3,4] определены соотношения кинематически определимых состояний в трехмерном случае.

Линеаризированные уравнения кинематически определимых состояний теории пластичности рассмотрены в [4].

Литература

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 232 с.

2. Ивлев Д.Д. К теории предельного состояния пластических пористых тел// Изв. АН РФ. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 163–166.

3. Артемов М.А., Ивлев Д.Д. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести// Изв. АН РФ. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 104–110.

4. Артемов М.А., Ивлев Д.Д. Об общих соотношениях теории идеальнй пластичности при кусочно-линейных условиях текучести// Изв. АН ЧР. № 2. 1994. С. 16 - 21.

5. Артемов М.А., Ивлев Д.Д. О линеаризированных уравнениях кинематически определимых задач// Изв. АН РФ. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 104–107.

УДК 539.214;539.374

М.А.Артемов, Д.Д.Ивлев (Воронеж, Чебоксары)

ОБ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

В работе [1] А.Ю.Ишлинский в линеаризированной постановке рассмотрел плоское идеальнопластическое состояние растягиваемой полосы переменного сечения.

В аналогичной постановке рассматривается пространственное идеальнопластическое состояние призматических тел при кусочногладких поверхностях текучести.

Из условия предельного состояния идеальнопластического тела $F(\sigma_{ij}) = 0$ и соотношений ассоциированного закона пластического течения $\varepsilon_{ij} = \mu\,\partial F/\partial\sigma_{ij}$, $\mu \geq 0$, если невозмущенное напряженно-деформированное состояние является однородным, для компонент возмущений имеем

$$a_1\sigma'_x + a_2\sigma'_y + a_3\sigma'_z = 0, \quad a_i = \partial F^0/\partial\sigma_i, \quad i = 1,2,3 \qquad (1)$$

$$\varepsilon'_x = \mu^0\,(b_{11}\sigma'_x + b_{12}\sigma'_y + b_{13}\sigma'_z) + \mu' a_1, \quad b_{ij} = \partial^2 F^0/\partial\sigma_i\partial\sigma_j \quad (x\,y\,z,\ 1\,2\,3) \qquad (2)$$

Обозначения в круглых скобках определяют круговую перестановку индексов. Для изотропного материала

$$\tau'_{xy} = a_{xy}\,\varepsilon'_{xy}, \quad a_{xy} = (\sigma^0_x - \sigma^0_y)/(\varepsilon^0_x - \varepsilon^0_y), \quad (x\,y\,z) \qquad (3)$$

Согласно ассоциированному закону течения $a_{ij} \geq 0$.

К семи соотношениям (1)–(3) следует присоединить три уравнения равновесия $\partial\sigma'_x/\partial x + \partial\tau'_{xy}/\partial y + \partial\tau'_{xz}/\partial z = 0$, (xyz) и соотношения Коши $\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(u'_{i,j} + u'_{j,i})$. Имеем замкнутую систему уравнений относительно десяти независимых переменных σ'_{ij}, u'_i, μ'.

Рассмотрены случаи, когда напряженное состояние соответствует грани условия пластичности $a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 = 1$, $a + b + c = 0$, $a, b, c - const$, или ребру, определяемому пересечением двух поверхностей текучести $F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, $F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Установлено соответствие между напряженным и деформированным состояниями для случаев грани и ребра. Решена задача об одноосном растяжении призматического тела.

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. Киев. 1958. № 1. С. 12 – 15.

С.М. Асеев[†] (Москва)

Методы аппроксимаций в экстремальных задачах для дифференциальных включений.

При помощи различных методов аппроксимаций для задачи оптимального управления дифференциальным включением с фазовым ограничением получены необходимые условия оптимальности в усиленной форме Эйлера–Лагаранжа [1] содержащей дополнительное условие стационарности гамильтониана [2]. Следующий пример иллюстрирует дополнительность данного условия в негладких задачах оптимизации:

Пример. Пусть K - нигде не плотное замкнутое подмножество отрезка $[0,1]$ положительной меры. Положим

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t \notin K; \\ 1, & t \in K; \end{cases} \qquad f(x) = \int_0^x p(t)\,dt.$$

Тогда f - липшицевая на отрезке $[0,1]$ функция.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in F(x) = \{f(x) + u : \ |u| \le 1\}; \\ &x(0) = 0, \quad x(T) = 1; \\ &T \to \min. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что сопряженная функция $\psi(t) \equiv 1$ удовлетворяет усиленному включению Эйлера–Лагранжа [1]

$$\dot{\psi}(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} \operatorname{conv}\{u : \ (u, \psi(t)) \in \hat{N}_{\operatorname{graph} F}\ (x_0(t), \dot{x}_0(t))\}.$$

Для этой сопряженной функции вдоль оптимальной траектории x_0 $H\Big(F(x_0(t), \psi(t)\Big) = f(x_0(t)) + 1 \not\equiv \mathrm{const}$. В данном примере $\psi(t) = \frac{1}{1+f(x_0(t))}$ – единственная, с точностью до положительного множителя, сопряженная функция удовлетворяющая условию $H\Big(F(x_0(t), \psi(t)\Big) \equiv \mathrm{const} \ge 0$.

Литература.

1. *Смирнов Г.В.*, Дискретные аппроксимации и оптимальные решения дифференциальных включений // Кибернетика. 1991. С. 76–79.

2. *Арутюнов А.В.*, *Асеев С.М.*, Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость // Доклады РАН. 1994. Т.334. С. 134–137.

[†]Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант No. 96-01-00920.

А.Т. Астахов

УБЫВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОНУСЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^n$

В работе рассматривается вопрос: как быстро может убывать гармоническая функция, заданная в конусе пространства $\mathbb{R}^n$?

Доказан следующий результат.

Теорема. Если гармоническая функция $u(x_1,\dots,x_n)$ задана на конусе раствором $\pi/2\alpha$, непрерывна вплоть до его границ и выполняется условие $|u(x_1,\dots,x_n)| \le M e^{-\varepsilon\|x\|^\alpha}$

$\alpha>0,\ \varepsilon>0,\ \|x\|\to\infty,\ M=const$

то $u(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$

Основная идея доказательства основана на усреднении функции $u(x_1,\dots,x_n)$ $\tilde{u}(x_1,r)=\int\limits_{S(x_1,r)} u(x_1,\dots,x_n)\,d\sigma$

где $S(x_1,r)$ сфера размерности $(n-2)$ в перпендикулярном сечении к оси x_1 и $r=(x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$. Далее используя преобразование Сонина-Пуассона её можно превратить в гармоническую функцию в угле $\pi/2\alpha$. Обозначим эту функцию $v(x_1,r)$. По данной гармонической функции строится аналитическая функция, у которой действительная часть является гармонической функцией $v(x_1,r)$, и при конформном отображении с помощью функции $\omega=(z e^{-i\varphi_0})^\alpha$ отображающей угол на полуплоскость $Re\,\omega>0$ используется теорема Карлсона.

Эти методы применимы к вопросам об убывании гармонической функции в телах вращения в пространстве $\mathbb{R}^n$. При некоторых довольно естественных предположениях на тело вращения характер убывания гармонической функции будет такой же как и в плоском случае. Автор выражает благодарность проф. В.З. Мешкову за внимание к работе.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

И.Ф.Астахова Б.Н.Подболотов
(Воронежский госуниверситет)

Метод математического моделирования имеет три составные части: модель, алгоритм и программа, реализующая эту модель и алгоритм. С развитием компьютерной техники и вычислительных методов этот метод находит все более широкое применение при решении технических задач. Построение моделей основывается на физических законах сохранения энергии, количества движения и массы. Разработка алгоритма связана с вычислительными методами. Одними из наиболее перспективных и эффективных методов являются методы дробных шагов, так как они обладают нужным порядком аппроксимации и являются безусловно устойчивыми.

В двумерных моделях для описания характеристик воздушной среды применяются уравнения Навье-Стокса (для функций тока, вихря и безразмерного перепада температур). Эта модель состоит из двух параболических уравнений и одного эллиптического. Прогрев твердого тела определяется при решении сопряженной задачи с краевыми условиями III рода (на границе твердое тело-окружающая среда) и краевыми условиями IY рода на границе двух твердых тел с разными теплофизическими характеристиками. Для определения напряженно-деформируемого состояния конструкции применяется модель упругая в перемещениях, состоящая из двух эллиптических уравнений. При решении этих уравнений применяются методы дробных шагов [1]. При проведении вычислительного эксперимента эти методы для ЭВМ с быстродействием порядка 1 миллиона операций в секунду позволяет сократить затраты машинного времени в 3 раза по сравнению с явными методами, что ощутимо заметно при расчетах, требующих порядка 1 часа машинного времени.

1. Molchadski I.S., Astakhova I.F. Fire Resistance Design of Constructions under conditions of Natural Fires//The fist International Symposium on Thermal Stresses and Related Topics - Hamamatsa, Japan, June 5-7, 1995 - pp 602-606.

Астровский А.И. (Минск, Беларусь)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ГРАМА

В классической постановке проблемы управляемости динамических систем предполагается, что класс управляющих воздействий - это либо множество кусочно-непрерывных, либо измеримых почти всюду ограниченных функций. Однако в приложениях оказывается важным вопрос об управляемости при наличии ограничений на класс управлений. В литературе, в основном, различают два типа ограничений на управления: 1) ограничения на область возможных значений управлений (так называемые геометрические ограничения); 2) ограничения на допустимый класс управляющих функций.

В сообщении рассматриваются задачи управляемости с ограничениями второго типа. Известно решение задачи управляемости для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классах релейных функций, достаточно гладких функций, финитных функций, кусочно постоянных и импульсных функций, алгебраических и тригонометрических полиномов заданной степени, решений линейных дифференциальных уравнений и т.д.

В докладе для линейных нестационарных систем управления рассматриваются задачи управляемости в классе многочленов систем функций Чебышева. При исследовании задач управления в специальных классах функций возникает необходимость изучения обобщенной матрицы Грама. В докладе указана связь задач управления с обобщенной матрицей Грама, получены условия невырожденности указанной матрицы. В терминах матрицы управляемости получены необходимые и достаточные условия управляемости в классе многочленов систем функций Чебышева.

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ СТЕПЕНИ G-ЭКВИВАРИАНТНЫХ C^2-ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Бабаев В.С., Борисович Ю.Г. (Воронеж)

Теория степени эквивариантных фредгольмовых отображений развивается в настоящее время интенсивно (см., напр. [1], [2]). Существует несколько подходов к определению такой степени; один из них, предложенный в [1], обобщается ниже на более широкий класс отображений.

Пусть X, Y – банаховы пространства с сильно непрерывным действием компактной группы Ли G, $f : X \to Y$ C^2-фредгольмово G-эквивариантное отображение индекса 0, Ω – G-инвариантное ограниченное открытое подмножество в X и $f|_{\overline{\Omega}}$ – собственное отображение. Если $Df(p) \in GL(X, Y)$ для некоторой точки $p \in X$ и $y \in Y \setminus f(\partial\Omega)$ – регулярное значение $f|_{\Omega}$, то определена степень $d_p(f, \Omega, y)$ отображения f в точке y относительно базовой точки p. В случае $X = Y$ эта степень рассмотрена в [1].

Наша цель – обобщить это понятие на случай отображения $f+k$, где $k : \overline{\Omega} \to Y$ вполне непрерывное, необязательно гладкое отображение. Для решения указанной задачи строится гладкая конечномерная аппроксимация отображения k на Ω при условии, что пространство X имеет шаудеровский базис. Более того, рассмотрим фильтрацию $\{E_i\}$ пространства X, порожденную базисом X и наложим на проекторы P^i на соответствующее i-мерное подпространство условие ограниченности их норм. При достаточно большом N можно добиться, чтобы образ множества нулей отображения $f + k$ не пересекался с образом границы $\partial\Omega$ при действии проектора p^N.

Используя указанный проектор P^N, стандартную шаудеровскую аппроксимацию вполне непрерывного отображения k, теорему Дугунжи о продолжении, строим C^2-гладкую аппроксимацию $\hat{k} : X \to Y$ и на $\overline{\Omega}$ $\|k(x) - \hat{k}(x)\| < \epsilon$, где ϵ – достоточно мало. Усреднением по группе G получаем G-эквивариантную аппроксимацию $\hat{k}_G$. Отображение $f + \hat{k}_G \in \Phi_{0G}$ – фредгольмово индекса 0 C^2-гладкое отображение, и для него определяется степень $d_p(f + \hat{k}_G, \Omega, y)$, независящая от выбора аппроксимации. Обобщенная базовая степень задается формулой:

$$d_p(f + k, \Omega, y) = d_p(f + \hat{k}_G, \Omega, y).$$

Она удовлетворяет тем же свойствам, что и степень в [1]. В частности, представляет интерес формула "сужения" для эквивариантных отображений и некоторых представлений

$$d_p(\Phi, \Omega, y) = d_p(\Phi|_{\Omega G}, \Omega G, y), \; \Phi = f + k,$$

где ΩG – инвариантная окрестность множества неподвижных точек G в Ω.

Литература: [1] P.M.Fitzpatrick, J.Pejsachowicz and P.J.Rabier, The degree of Proper C^2 Fredholm mappings: covariant theory. Journal of Yu.Schauder Center, 3(1994), 325-367. [2] Борисович Ю.Г., Фоменко Т.Н. Гомологические методы в теории периодических и эквивариантных отображений // Глобальный анализ и мат. физика. Воронеж, 1987, с.3-25.

БАЙЗАКОВ А.Б. (г.БИШКЕК)

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ.

В данной работе излагается вопрос о существовании и структуре обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью.

Рассмотрим уравнение

$$t^{q} u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t). \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА Пусть I) в области $G\{0\le s\le t\le T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и $K(0,0)=\lambda\neq 0$; 2) $q>1$, $f(0)\neq 0$.

Тогда интегральное уравнение (1) имеет обобщенное решение вида

$$u(t) = \alpha(t) - (f(0)/K(0,0))\,\delta(t),$$

где $\delta(t)$ дельта функция Дирака и функция $\alpha(t)$ определяется из уравнения

$$\alpha(t) = \int_{\varepsilon}^{t} e^{\lambda\frac{t^{-q+1}-\tau^{-q+1}}{-q+1}}\,\tau^{-q}\Big(\int_0^{\tau}[K(\tau,s)-\lambda]\alpha(s)ds + F(t)\Big),$$

где

$$F(t) = \int_0^t e^{\lambda((t^{-q+1}-\tau^{-q+1})/-q+1)}\cdot\tau^{-q}\big(f(\tau)-(f(0)/K(0,0))\cdot K(\tau,0)\big)$$

и $\varepsilon=0$,если $Re\lambda<0$ и $\varepsilon>0$ если $Re\lambda>0$.

При рассмотрении уравнения (I) использована методика из [I, 2]. Случай $q=1$ расмотрен в [3].

ЛИТЕРАТУРА

I) М.И.Иманалиев. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода Фрунзе, I98I - I44с.

2) А.Б.Байзаков Асимптотическая и аналитическая структура решений одного нелинейного интегрального уравнения с иррегулярной особой точкой. - Минск, I983.-2Iс (Препринт (Институт математики АН БССР: 2I (I8I))

3) А.Бектеналиев. Обобщенные решения нелинейных интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра. //Респ.научн.конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения".г.Ош I993г. с.36.

Бакусов Л.М., Насыров Р.В., Сулейманова А.М. (Уфа)

БАЛАНСНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рассматривается мультикомпартментная, многопродуктовая модель экономической системы в одной из форм межотраслевого баланса Леонтьева. В такой постановке предподлагается, что через систему протекает поток вещественных и энергетических ресурсов.

Показано, что при определенных допущениях данная модель может быть представлена в виде задачи динамического программирования в интересах поиска оптимального в смысле какого-либо критерия решения. При этом учитывается тот факт, что модель Леонтьева является частным случаем модели Неймана и имеет направляющие лучи для оптимальной траектории.

Показано, что отклонения от оптимальной траектории, задаваемой исходными соотношениями описываются в форме задачи динамического программирования, которую можно записать в рекуррентном виде.

Исследования показали, что использование квадратичного функционала качества управления является наиболее эффективным и обеспечивает приемлемое время при расчете на компьютере.

Для указанной постановки задачи получены формальные соотношения в итеративной форме, позволяющие получить количественные характеристики для принятия решений о последовательности управляющих действий, направленных на уменьшение отклонений траектории системы в пространстве ресурсов от оптимальной.

Такое решение является оптимальным в смысле указанного функционала.

Баландин Д.В. (Нижний Новгород)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

К настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы нахождения оптимального управления распределенными системами, описываемыми начально-краевыми задачами, в случае, когда все параметры системы и действующих на нее возмущений полностью известны. Однако, во многих реальных задачах такая полная детерминированность обычно отсутствует. Если известно лишь множество, заведомо содержащее возможные значения всех неопределенных факторов, то целесообразна постановка задач по принципу минимума гарантированного результата. При расчете управления системой всегда важно предварительно оценить предельные возможности управления. Когда управление рассчитывается, исходя из принципа минимума гарантированного результата, оценку предельных возможностей управления следует проводить с учетом всего множества неопределенных факторов.

В докладе рассматриваются задачи оптимального (в смысле интегрального квадратичного функционала) управления колебаниями упругой системы, вызванными возмущениями из определенного класса [1]. Исследуются два типа задач: о предельных возможностях управления и о минимуме гарантированного результата. Показано, что минимум гарантированного результата ограничен снизу решением задачи о предельных возможностях управления. Предлагаются способы решения указанных задач, а также примеры расчетов управления конкретной упругой системой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00138).

Литература

1. Баландин Д.В. Об оптимальном гашении колебаний упругих объектов// Прикладная математика и механика. 1995. Т.59, вып.3. С.464-474.

Балащенко В.В. (Минск)

ОДНОРОДНЫЕ Φ-ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ

Пусть (M, g, ∇, f) – риманово многообразие с метрикой g, связностью Леви-Чивита ∇ и метрической f-структурой классического типа $(f^3 + f = 0)$. Назовем f приближенно келеровой f-структурой (nearly Kähler f-structure), если $\nabla_{fX}(f)(fX) = 0$ для всех векторных полей X на M. Такие структуры включают известные приближенно келеровы структуры $(f^2 = -id)$ А.Грея и киллинговы f-структуры А.С.Грицанса-В.Ф.Кириченко, входя в свою очередь в широкий класс G_1-структур обобщенной эрмитовой геометрии В.Ф.Кириченко. Содержательные примеры введенных структур обеспечивают регулярные Φ-пространства, на которых обнаружен [I] значительный запас классических аффинорных структур (в частности, f-структур).

Пусть G/H – регулярное Φ-пространство связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, соответствующее ее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$. Обозначим $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$, и пусть $\mathfrak{m}^{(\lambda,\mu)}$ – подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное векторами $[\lambda(\theta)X, \mu(\theta)X]$, где $X \in \mathfrak{m}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}[\theta]$. Заметим, что в случае симметрического пространства $(\Phi^2 = id)$ все подпространства $\mathfrak{m}^{(\lambda,\mu)}$ тривиальны.

ТЕОРЕМА I. Пусть G/H – регулярное Φ-пространство с естественно редуктивной метрикой g и канонической [I] метрической f-структурой (g, f). (g, f) является приближенно келеровой f-структурой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}^{(f_0, f_0^2)} \subset \mathfrak{h}$, где f_0 – значение структуры f в точке $p_0 = H$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G/H – однородное Φ-пространство порядка 4 $(\Phi^4 = id)$ с естественно редуктивной метрикой g. Каноническая f-структура на G/H, определяемая оператором $f_0 = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ [I], является приближенно келеровой f-структурой.

Примером приближенно келерова f-многообразия с метрикой, которая не является естественно редуктивной, служит 6-мерная обобщенная группа Гейзенберга, реализованная как однородное Φ-пространство порядка 4 с канонической f-структурой.

I. Балащенко В.В., Степанов Н.А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах // Матем. сб. 1995. Т. 186, № II. С. 3-34.

Бардин А.Е., Смирнова Е.Б. (Орехово–Зуево)

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ.

Имеется четыре предприятия,которые используют для технических целей некоторый природный водоём. Предполагается, что

1^0. каждое предприятие располагает двумя чистыми стратегиями: использование очистных сооружений для отработанной воды (стратегия 0) или сбрасывание ее в водоем без очистки (стратегия 1);

2^0. известны расходы по очистке воды для каждого предприятия и убытки от загрязнения окружающей среды;

3^0. первые три предприятия стремятся минимизировать свои затраты, при этом они должны учитывать неопределенный фактор: действие четвертого предприятия, поведение которого неизвестно.

Математическая модель задачи формализуется в виде смешанного расширения бескоалиционной игры трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \mathbf{N} = \{1,2,3\}, \{\{\nu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{\mu\}\}, \{f_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\mu)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle,$$

где $\mathbf{N}$ — множество игроков; $\{\nu_i\} = \{\xi_i | \xi_i \in [0;1]\}, (i \in \mathbf{N}); \{\mu\} = \{\xi_4 | \xi_4 \in [0;1]\}$, а ξ_j — вероятность выбора второй чистой стратегии ($j = 1,2,3,4$).

Предполагается, что при выборе своей смешанной стратегии i-й игрок ($i \in \{1,2,3\}$) руководствуется известными принципами и понятиями из теории игр, теории многокритериальных задач и теории принятия решения. Согласно этому вводится

Определение. Ситуацию $\nu^{ce}(\cdot) = (\nu_1^{ce}(\cdot), ..., \nu_N^{ce}(\cdot))$ назовём *решением Нэша–Сэвиджа–Слейтера* игры Γ в смешанных стратегиях, если

a) существует смешанная неопределённость $\mu^s(\cdot) \in \{\mu\}$ такая, что

$$f_i(\nu_i, \nu^{ce}_{\mathbf{N}\setminus i}, \mu^s) \le f_i(\nu^{ce}, \mu^s), \quad \forall i \in \mathbf{N}, \quad \nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\};$$

b) несовместна система неравенств

$$\varphi_i(\nu^{ce}, \mu) > \varphi_i(\nu^{ce}, \mu^s), \quad \forall i \in \mathbf{N}, \quad \mu(\cdot) \in \{\mu\},$$

где $\varphi_i(\nu,\mu) = \max\limits_{\lambda_i \in \{\nu_i\}} f_i(\lambda_i, \nu_{N\setminus i}, \mu) - f_i(\nu,\mu), \quad i \in \mathbf{N}$.

Решения Нэша–Сэвиджа–Слейтера получены в явном виде и установлена их практическая ценность.

Барсуков А.И. (Воронеж)

ЗАДАЧА КОШИ С ДИССИПАТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ наряду со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ индефинитное скалярное произведение $[\cdot,\cdot]$, задаваемое соотношением

$$[x,y] = (Wx,y), \quad x,y \in \mathfrak{H},$$

где W — непрерывный и непрерывно обратимый самосопряженный оператор. Такое пространство в общем случае называется пространством Крейна, а при условии, что квадратичная форма $[x,x]$ имеет κ отрицательных квадратов — пространством Понтрягина Π_κ.

Подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$ называется равномерно отрицательным, если существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$-[x,x] \geq \alpha(x,x), \quad x \in \mathfrak{L}.$$

Равномерно отрицательное подпространство $\mathfrak{L}$ называется максимальным, если оно не является собственной частью никакого равномерно отрицательного подпространства.

Линейный оператор $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ называется a-диссипативным (соответственно, (a,W)-диссипативным), если

$$\operatorname{Re}(Ax,x) \leq a(x,x), \quad (\text{соответственно } \operatorname{Re}[Ax,x] \leq a(x,x)), \ x \in \mathfrak{D}(A).$$

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{H}$ - комплексное пространство Крейна и пусть A - максимальный (a,W)-диссипативный оператор, в области определения которого содержится максимальное равномерно отрицательное подпространство и $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$. Тогда для любой непрерывной функции $g = g(t)$ со значениями в $\mathfrak{H}$ и $u_0 \in \mathfrak{D}(A)$ существует единственное решение $u = u(t)$, $t \geq 0$, задачи Коши:*

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + g \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Отметим, что в случае, когда A — максимальный плотно заданный (a,W)-диссипативный оператор в пространстве Понтрягина, то в $\mathfrak{D}(A)$ априорно содержится максимальное равномерно отрицательное подпространство.

Бахтин И.А. (Воронеж)

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

I. Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H нелинейный оператор $A\ (A0=0)$ задан в некоторой окрестности нуля $U(0,\rho_0): \|x\|<\rho_0$ и представляется в виде суммы: $A = B+C+D$, где линейный самосопряженный оператор B имеет собственные числа $\lambda_1>\lambda_2>\dots>\lambda_n>\lambda_{n+1}>0$:

$$Bh_{ik}=\lambda_i h_{ik}\ (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,k_i),$$
$$Bh_{n+1}=h_{n+1}\ (\|h_{ik}\|=1,\ \|h_{n+1}\|=1)$$

(система (h_{ik}) ортогональна), а остальная часть его спектра лежит в круге $|\lambda|\le\lambda_*\in(0,\lambda_{n+1})$; однородный порядка $s_1>1$ оператор C: $Ctx=t^{s_1}Cx$ удовлетворяет условию Липшица в форме: $\|Cx_1-Cx_2\|\le q_1 z^{s_1-1}\|x_1-x_2\|$ и такой, что $(Ch_{n+1},h_{n+1})<0$; оператор D удовлетворяет условию Липшица в форме: $\|Dx_1-Dx_2\|\le q_2 z^{s_2-1}\|x_1-x_2\|$, где $s_2>s_1$; $q_1, q_2>0$ – фиксированные числа и $z = \max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}<\rho_0$.

2. Теорема. В условиях пункта I при некоторых дополнительных ограничениях на оператор A существуют клин $K\subset H$, колокол $K_0\subset K$ и число $z_0\in(0,1)$, такие, что

I) для любого собственного вектора $x_0\in(K_0)z_0$ оператора A: $Ax_0=\lambda_0 x_0$ соответствующее ему собственное число $\lambda_0>0$;

2) каждому позитивному собственному числу λ оператора A: $Ax=\lambda x, x\in(K_0)z_0\setminus 0$ соответствует единственный собственный вектор $x=x(\lambda)\in(K_0)z_0$;

3) для любых двух позитивных собственных чисел λ_1,λ_2 оператора A: $Ax_1=\lambda_1x_1, Ax_2=\lambda_2x_2;\ x_1,x_2\in(K_0)z_0$ из $\lambda_1<\lambda_2$ следует $x(\lambda_1)\gg x(\lambda_2)$;

4) функция $x(\lambda)$ непрерывна по полунорме $\|x\|_{h_{n+1}}$ в каждой точке λ_0 позитивного спектра оператора A;

5) уравнение $Ax=x$ имеет в $(K_0)z_0\setminus 0$ решение тогда и только тогда, когда существуют элементы $x_0,y_0\in(K_0)z_0\setminus 0$, такие, что $x_0\le Ax_0$, $Ay_0\le y_0$ и что по крайней мере одна из последовательностей $x_m=Ax_{m-1}$, $y_m=Ay_{m-1}\ (m\in N)$ содержится в $(K_0)z_0$.

Б.Ц.Бахшиян (Москва)

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу обобщенного линейного программирования (ОЛП)

$$L = \min_{x_i, A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(A_i)x_i : \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b, \quad x_i \geq 0, \quad A_i \in \mathcal{A}_i \right\}, \qquad (1)$$

где $c_i(\cdot)$ – известные функции, $b \in R^m$, $\mathcal{A}_i \subset R^m$ – заданные выпуклые множества. В задаче (1) существует оптимальное допустимое базисное решение (ДБР), т.е. вектор $x_B \in R^m$ и $m \times m$-матрица B, столбцы которой есть некоторые векторы из $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, удовлетворяющие условиям $Bx_B = b$, $x_B \geq 0$, $L = c_B^T x_B$, где вектор c_B составлен из функций $c_i(\cdot)$, соответствующих базисной матрице B [1]. Это решение обычно ищется методом генерации столбцов, состоящем в следующем. Текущее ДБР оптимально, если $\Delta = 0$, где

$$\Delta = \min_{i,A} \left\{ \Delta_i(A) \doteq c_i(A) - c_B^T B^{-1} A : \quad \forall A \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, ..., n \right\}. \qquad (2)$$

Считается, что задача (2) решается эффективно. Если $\Delta < 0$, то в матрицу B на каждой итерации симплекс-метода вводится вектор, дающий минимум в (2). При этом целевая функция уменьшается на $\theta(-\Delta)$, где θ – новая базисная переменная. Если $\theta = 0$, то целевая функция не изменяется. Для исключения таких вырожденных итераций имеется алгоритм [1]. Здесь дается его более практичная версия. Пусть положительны только первые компоненты $x_1, ..., x_k$ вектора x_B, $k < m$, а матрица S составлена из последних $m - k$ строк матрицы B^{-1}. Рассмотрим вспомогательную задачу ОЛП с $m - k + 1$ условиями-равенствами:

$$D = \min_{\lambda_i, A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(A_i)\lambda_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S A_i = 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \geq 0, A_i \in \mathcal{A}_i \right\}. \quad (3)$$

Теорема. *Критерием оптимальности ДБР задачи (1) является условие $D \geq 0$, либо несовместность условий задачи (3). Если $D < 0$, то векторы $A_{k+1}, ..., A_{m+1}$, соответствующие оптимальному ДБР в задаче (3), вводятся в базисную матрицу B вместо ее последних $m - k$ столбцов и того столбца, номер которого доставляет минимум $\theta = \min\{x_j/\alpha_j : \alpha_j > 0, j = 1, ..., k\}$, где α_j определяются из уравнений $\lambda_{k+1}A_{k+1} + ... + \lambda_{m+1}A_{m+1} = B\,(\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, .., 0)^T$. При этом целевая функция в (1) уменьшается на $\theta(-D)$.*

Эта теорема позволяет построить сходящийся алгоритм решения задачи ОЛП.

1. Бахшиян Б.Ц. Критерии оптимальности и алгоритмы решения вырожденной и обобщенной задач линейного программирования // Экономика и мат.методы. 1989. Т.28. №2. С.314.

Белоусова Е.П. (Воронеж)

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРИЗНАКИ ЭРГОДИЧНОСТИ

Рассмотрим непрерывную марковскую цепь с конечным числом состояний

$$\dot{x}(t) = \mathcal{K}\, x(t)\,, \quad 0 \le t < \infty$$

где $\mathcal{K} = (k_{ij})$ – колмогоровская $n \times n$ – матрица,

$$k_{ij} \geq 0\,,\ i \neq j\,,\ i,j = 1,\dots,n\,; \quad \sum_{i=1}^{n} k_{ij} = 0\,,\ j = 1,\dots,n$$

Как известно, нуль есть собственное значение матрицы $\mathcal{K}$

$$\det \mathcal{K} = 0.$$

и весь спектр лежит в замкнутой левой полуплоскости. Опираясь на критерий асимптотической устойчивости внедиагонально неотрицательной матрицы, лемму Котелянского и предельный переход можно показать, что все главные миноры матрицы $-\mathcal{K}$ (матрицы $\mathcal{K}$ взятой со знаком минус) неотрицательны,

$$(-1)^p \mathcal{K}\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_p \\ i_1,\dots,i_p \end{pmatrix} \geq 0\,, \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le n$$

В частности, одного знака все главные миноры $\mathcal{K}_i$ порядка $n-1$ получающиеся вычеркиванием строки и столбца с номером i.

Т е о р е м а. Колмогоровская матрица $\mathcal{K}$ является эргодической тогда и только тогда, когда отличен от нуля хотя бы один главный минор $\mathcal{K}_i$ порядка $n-1$. При выполнении этого условия эргодическое распределение вероятностей дается формулой

$$\pi_j = \mathcal{K}_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}_j$$

Используемые здесь терминология, обозначения и теоремы можно найти в [1].

Аналогичные результаты для дискретных марковских цепей содержатся в [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967, 575 с.
2. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. Гостехиздат, 1949, 436 с.

УДК. 517. 95

Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. (Гродно)

ОБ ОДНОМ КВАЗИЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим уравнение

$$u_x\left(u_x^2 u_{xtt} - 2u_x u_t u_{xxt} + u_t^2 u_{xxx}\right) = \\ = u_{xx}\left(u_x^2 u_{tt} - 2u_x u_t u_{xt} + u_t^2 u_{xx}\right). \tag{I}$$

Легко показать, что (I) не имеет полярных решений.
Полагая

$$u_t = \omega u_x, \tag{2}$$

для ω получим уравнение

$$\omega_{xt} = \omega\omega_{xx} - \omega_x^2. \tag{3}$$

Будем строить решение (3) в виде ряда

$$\omega = \frac{\varphi}{t} + \varphi_t + t^{-3}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{k\lambda t\varphi}, \quad \alpha_k = \alpha_k(t), \tag{4}$$

$$\varphi = \varphi(x,t), \quad \varphi_x = 1, \quad \lambda = C.$$

Подставляя (4) в (3), убедимся, что α_1, α_2 - произвольные постоянные, а для нахождения остальных его коэффициентов получим рекуррентную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\alpha_k)_t = \frac{\lambda}{kt^2}\sum_{m=1}^{k-1} m(2m-k)\alpha_m\alpha_{k-m}, \quad k=2,3,\ldots. \tag{5}$$

Если в (4) положить $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, то решение (2) примет вид

$$\omega = \frac{\varphi}{t} + \varphi_t + \alpha t^{-3} e^{\lambda t\varphi}.$$

Таким образом, используя (2) и (4), можно получить решение уравнения (I), представленное рядами экспонент.

В докладе обсуждается вопрос сходимости ряда (4) с коэффициентами из (5) и наличия свойства Пенлеве у уравнений (I) и (3).

Блюмин С.Л., Миловидов С.П., Мишачёв Н.М. (Липецк)

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ $a_1xb_1 + a_2yb_2 = c$ В РЕГУЛЯРНОМ КОЛЬЦЕ

Ассоциативное кольцо R называется регулярным по фон Нейману, если для каждого элемента $a \in R$ найдётся элемент $a^- \in R$ такой, что $aa^-a = a$.

ТЕОРЕМА. Уравнение $a_1xb_1 + a_2yb_2 = c$ в регулярном по фон Нейману кольце R с единицей разрешимо тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих условий:

1) при выполнении $a_1a_1^-a_2 = a_2$ должно быть $Q_1 = a_2a_2^-Q_1B_1^-B_1$;
2) при выполнении $b_2b_1^-b_1 = b_2$ должно быть $Q_1 = A_1A_1^-Q_1b_2^-b_2$;
3) при выполнении $a_2a_2^-a_1 = a_1$ должно быть $Q_2 = a_1a_1^-Q_2B_2^-B_2$;
2) при выполнении $b_1b_2^-b_2 = b_1$ должно быть $Q_2 = A_2A_2^-Q_2b_1^-b_1$,

где

$$Q_1 = c - a_1a_1^-cb_1^-b_1, \qquad Q_2 = c - a_2a_2^-cb_2^-b_2,$$
$$A_1 = (1 - a_1a_1^-)a_2, \qquad A_2 = (1 - a_2a_2^-)a_1,$$
$$B_1 = b_2(1 - b_1^-b_1), \qquad B_2 = b_1(1 - b_2^-b_2).$$

Решением уравнения являются соответственно:

1) $y = a_2^-Q_1B_1^- + w - a_2^-a_2wB_1B_1^-$,
$x = a_1^-(c - a_2yb_2)b_1^- + z - a_1^-a_1zb_1b_1^-$;

2) $y = A_1^-Q_1b_2 + w - A_1^-A_1wb_2b_2^-$,
$x = a_1^-(c - a_2yb_2) + z - a_1^-a_1zb_1b_1^-$;

3) $x = a_1^-Q_2B_2^- + w - a_1^-a_1wB_2B_2^-$,
$y = a_2(c - a_1xb_1)b_2^- + z - a_2^-a_2zb_2b_2^-$;

4) $x = A_2^-Q_2b_1^- + w - A_2^-A_2wb_1b_1^-$,
$y = a_2^-(c - a_1xb_1)b_2^- + z - a_2^-a_2zb_2b_2^-$,

где w, z - произвольные элементы из R.

При невыполнении условий 1), 2) необходимым условием разрешимости уравнения является

$$A_1A_1^-(1 - a_1a_1^-)cb_2^-b_2 + a_2a_2^-c(1 - b_1^-b_1)B_1^-B_1 = $$
$$= (1 - a_1a_1^-)c + c(1 - b_1^-b_1).$$

Исследованное уравнение находит приложения в теории управления.

Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырин Д.А. (Липецк)

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЯВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В приложениях возникают системы управления, описываемые неявными векторными уравнениями $F(x,x',u,u')=0 \in R^m$, $x \in R^n$, $u \in R^r$; при условии $F(0) = 0$ линеаризованные уравнения приобретают вид

$$Ex' + Ax + Bu + Cu' = 0,\ x = x(t),\ u = u(t),\ t \geqslant 0, \qquad (1)$$

где матрицы E, A, B, C - производные (матрицы Якоби) F по x', x, u, u'. Системы (1) известны как "сингулярные (вырожденные) системы, содержащие производные управления" [1-3]; классические системы - их частный случай при $E = I$, $C = 0$.

В приложениях возникают задачи смешанного управления, в которых для $t \geqslant 0$ известны части $x^*(t)$ вектора состояния и $u^*(t)$ вектора управления, а требуется найти оставшиеся части $x^-(t)$, $u^-(t)$, $x = [x^*\ x^-]^T$, $u = [u^*\ u^-]^T$. Классическими являются прямая задача, когда $u^* = u$, $x^- = x$, и одна из обратных - задача траекторного управления, когда $x^* = x$, $u^- = u$; для системы (1), благодаря её "сбалансированной" структуре, эти задачи решаются однотипно.

Учёт условий задачи смешанного управления позволяет, разбивая матрицы на блоки типа $E = [E^*\ E^-]$ и т.д., переписать (1) так:

$$E^*x^{*\prime} + E^-x^{-\prime} + A^*x^* + A^-x^- + B^*u^* + B^-u^- + C^*u^{*\prime} + C^-u^{-\prime} = 0$$

или, полагая $x^\sim = [x^-\ u^-]^T$, $E^\sim = [E^-\ C^-]$, $A^\sim = [-A^-\ -B^-]$,

$$E^\sim x^{\sim\prime} = A^\sim x^\sim + f,\ f = -E^*x^{*\prime} - A^*x^* - B^*u^* - C^*u^{*\prime}.$$

Такие структуры изучаются в теории сингулярных систем с различных точек зрения и различными методами. Эффективным является использование различных типов обобщённых обратных матриц. Учёт блочной структуры матриц $E^\sim$, $A^\sim$ позволяет конкретизировать известные общие результаты. Следует подчеркнуть, что постановка задачи смешанного управления представляется наиболее естественной в классе неявных систем благодаря их сбалансированной структуре.

ССЫЛКИ

1. Lin J., Yang Z. Mathematical control theory of singular systems // IMA J. Mathem. Control & Information. 1989. N 6.
2. Ibrahim E., Lovass-Nagy V., Schilling R. Open-loop optimal control of linear time-invariant systems cotaining the first derivative of the input // Int. J. Control. 1989. N 3.
3. Блюмин С.Л., Пличко Н.П., Бормотова Т.В., Гореликова Н.В., Мурзиков Ю.А. Сравнительное исследование скалярно-дифференциального и частотного методов синтеза АСУЭП // Изв. вузов. Электромеханика. 1986. N 7.

УДК 519

Богачев Б.М., Ляхов Л.Н. (Воронеж)

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ СИНГУЛЯРНЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Сингулярной производной порядка $2k$, $k=1,2,3,\ldots$ от функции $f(x)$ четной по x_i будем называть функцию $(\partial/x_i\partial x_i)^k f(x)$. Дробные степени таких производных введены И.А.Киприяновым в [1] и в нашем случае имеют следующий вид

$$\left(\frac{\partial}{x_i\partial x_i}\right)^k f(x)=C(\gamma)\int_{E_n^+}\hat{f}(\xi)\,\xi_i^{2k}\,j_{\frac{\gamma_i-1}{2}+k}(x_i\xi_i)\prod_{j=1}^{n} j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)\,\xi^\gamma d\xi,$$

где $E_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n),\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}+k}(x_i\xi_i)$ – нормированная функция Бесселя порядка $\frac{\gamma_i-1}{2}+k$ (первого рода), $\hat{f}(\xi)$ – преобразование Фурье-Бесселя функции $f(x)$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел.

Обозначим через $H_\gamma^l(E_n^+)$, $l=(l_1,\ldots,l_n)$ пополнение по норме

$$\|f\|^2_{H_l^\gamma}=\int_{E_n^+}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2l_i}\right)|\hat{f}(\xi)|^2\,\xi^\gamma d\xi$$

множества бесконечно дифференцируемых функций, четных по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$, имеющих ограниченный носитель.

Т е о р е м а.

Пусть $f(x)\in H_l^\gamma(E_n^+)$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $\mu=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{l_i}>0$.

Тогда

$$\left\|x^k\left(\frac{\partial}{x\partial x}\right)^k f(x)\right\|_{H_\mu^\gamma}\le C\,\|f\|_{H_l^\gamma}.$$

Литература

1. Киприянов И.А. Труды МИАН, т. 89. 1967. С. 130 – 213.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ НЕОДНОРДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ФИКСИРОВАННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Богданов С.Ю. (Киев)

Работа посвящена приложению теории оптимального управления к задачам управления колебаниями неоднородных упругих систем при нестационарном (импульсном) нагружении. В качестве примера неоднородных упругих систем берутся подкрепленные шпангоутами цилиндрические оболочки и пластины. Оболочка и подкрепляющие ребра описываются по линейной теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Особенностью изучаемых конструкций является наличие разрывов производных функций перемещений срединной поверхности оболочки в точке размещения подкрепляющих элементов. Поэтому для учета взаимодействия оболочки и ребер используется модель, при которой задаются условия сопряжения оболочки и ребер. Эти условия выражают непрерывность перемещений срединной поверхности оболочки и разрывность напряжений в точках установки ребер. Рассматриваются задачи оптимального управления на фиксированном интервале $[0,T]$ [1],где $T > 0$ - время действия приложенной нагрузки. Среди допустимых управлений требуется найти такое,которое в момент времени $t = T$ минимизирует интеграл полной энергии подкрепленной конструкции. В качестве класса допустимых управлений выбирается множество обобщенных функций, заданых на отрезке $[0,T]$. Исследованы вопросы корректности постановки рассмотренных задач. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности оптимального управленияна фиксированном интервале. Доказана теорема об единственности конечного состояния. Сформулировано необходимое и достаточное условие оптимальности управления в виде принципа максимума. Рассмотрены задачи оптимального возбуждения на фиксированим временном интервале. Доказана теорем а существования оптимального по времени возбуждения.

1.В.Комков.Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем.М.:Мир,1975,158 стр.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ

Борисович Ю.Г.(Воронеж)

В последние годы указанная тема интенсивно развивается, включая не только уравнения, но и дифференциальные включения.

В работе автора [1] был развит метод исследования множества решений уравнений, не разрешенных относительно производной, основанный на применении современных топологических методов, обобщающих классические методы Лере-Шаудера [2].

Рассматривается следующее функционально-дифференциальное уравнение с управляющей вектор-функцией $u(t)$ м векторной функциональной связью:

$$g(x(t),\dot{x}(t)) = \tilde{f}(t,u_t,x_t,\dot{x}_t),\quad t\in[0,1],\quad l(u(\cdot),x(\cdot),\dot{x}(\cdot)) = 0. \qquad (2)$$

Под решением системы (1) понимается пара функций $(u(t),x(t) \in (L^\infty)^n \times (AC)^n$, $t\in[0,1]$, продолжение которых на $[-h,0]$ суть $p_0(s)$, $q_0(s)$, $r_0(s)\equiv \dot{q}_0(s)$.

Определим операторы L, Φ, $\bar{l}$, Λ, G, H равенствами

$$L(u,x) = g(x(t),\dot{x}(t)),\ \Phi(u,x) = f(t,u_t,x_t,\dot{x}_t),\ \bar{l}(u,x) = l(u(\cdot),x(\cdot),\dot{x}(\cdot))$$

$$\Lambda(u,x) = (L(u,x),0),\quad G(u,x) = (\Phi(u,x),\bar{l}(u,x)),\quad H(u,x) = \Lambda(u,x) - G(u,x)$$

ТЕОРЕМА 1. При соответствующих условиях операторы Λ, G, H непрерывно действуют в пространствах $(L^\infty)^m\times(AC)^n \longrightarrow (L^1)^n\times R^k$, и оператор G является A-уплотняющим на ограниченной области $\overline{\Omega}$.

Пусть U^d - конечномерное подпространство в $(L^\infty)^m$ и $\Omega\subset U^d\times(L^\infty)^m\times(AC)^n$. Тогда пара операторов (Λ, G) является "допустимой" с Λ-уплотняющим оператором G, причем Λ - собственный оператор из класса Φ_qC^1, где $q=d+n-k\geq 0$. Пусть выполнено условие $H(\partial\Omega)\not\ni\theta$.

ТЕОРЕМА 2. пределены топологические степени $Deg\,H$, $\widetilde{Deg}\,H$ на области $\overline{\Omega}$ относительно точки θ со значениями в классах бордизмов $F_q(\Omega)$, $\tilde{F}_q(\Omega)$ соответственно. Если одна из степеней отлична от "тривиального" элемента в классе бордизмов, то существует совпадение (u_*,x_*) пары Λ, G: $\Lambda(u_*,x_*) = G(u_*,x_*)$.

Задача вычисления степеней $Deg\,H$, $\widetilde{Deg}\,H$ представляет несомненный интерес для приложений к проблеме существования решений системы (1). Одним из методов служит метод гомотопии оператора H к более простому. Предложенный в [1] метод гомотопирования может быть применен и к более сложным системам (1) сочетании с учетом симметрий в системе, порождающих эквивариантность оператора $H(u,x)$ относительно действия некоторых групп Ли на пространствах $U^d\times(AC)^n$ в $(L^1)^n\times\mathbb{R}^k$, при $d=k-n$. Подробно рассмотрен случай действия группы S^1.

ЛИТЕРАТУРА: [1] Yu.G.Borisovich. Global Analysis and the solvability of Nonlinear Controllable Systems. // Methods and Applications of Global Analysis. New Developments in Global Analysis series, Voronezh University Press, 1993.- p.28 - 39. [2] Yu.G.Borisovich. Modern approach in theory of topological characteristics of nonlinear operator.1,2 // Lect.Notes in Math., 1988, v.1334. - p.199-220, 1990, v.1453. - p.21-50.

Булатов В.И. (Минск)

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим стационарную систему, не разрешенную относительно производной

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{I}$$

где $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^r$, $t\in[0;+\infty[$; A_0, A и B - вещественные $n\times n$, $n\times n$ и $n\times r$-матрицы.

Под решением системы (I), соответствующим начальному услови

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где x_0 -постоянный n-вектор, будем подразумевать пару $(x(t); u(t))$, $t\in[0;+\infty[$, из достаточно гладких вектор-функций $x(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих (I)-(2).

Систему (I) считаем управляемой, если для любого начального условия (2) найдется решение $(x(t); u(t))$, $t\in[0;+\infty[$, системы (I)-(2) и число $t_0>0$, для которых $x(t_0)=0$.

Из [I] следует, что система (I) управляема тогда и только тогда, когда

$$\underset{\forall\lambda}{\mathrm{rank}}[\lambda A_0-A\,;B] = \mathrm{rank}[A_0;A;B] = \mathrm{rank}[A_0\,;B].$$

На основании этого доказывается

Т Е О Р Е М А. Для управляемой системы (I) существуют такие вещественные $n\times r$ и $r\times r$-матрицы G_i, $i=\overline{0,n-1}$, и Q_i, $i=\overline{0,n}$, что каждое решение системы (I)-(2) представимо в виде

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} G_i z^{(i)}(t), \\ u(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i z^{(i)}(t), \end{cases}$$

где $z(t)$, $t\in[0;+\infty[$, - соответствующая n раз дифференцируемая r-вектор-функция.

I. Булатов В.И. К управляемости систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производной // Тезисы докладов У Всесоюзного совещания по управлению многосвязными системами. Тбилиси, октябрь 1984 г. Москва. 1984. с.78.

Булгаков А.И., Ткач Л.И. (Тамбов)

ВКЛЮЧЕНИЕ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С НЕВЫПУКЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ.

Пусть R^n - пространство n - мерных вектор-столбцов с нормой $|\bullet|$. Обозначим L - пространство функций $x:[a,b]\to R^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой $\|x\|_L=\int_a^b|x(s)|ds$; C пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\{|x(t)|: t\in[a,b]\}$.

Будем говорить, что множество $\psi\subset L$ выпукло по переключению (разложимо), если для любых измеримых по Лебегу множеств $U_1,U_2\subset[a,b]$ таких, что $U_1\cap U_2=\varnothing$, $U_1\cup U_2=[a,b]$ и любых $x,y\in\psi$ справедливо включение $\chi(U_1)x+\chi(U_2)y\in\psi$, где $\chi(\bullet)$ - характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через П [L] множество всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых по переключению подмножеств из L.

В докладе рассматривается в пространстве C включение

$$x\in f(x)+V\Phi(x), \qquad (1)$$

где вполне непрерывный оператор $f: C\to C$, многозначный оператор $\Phi: C\to П[L]$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного $B\subset C$ образ $\Phi(B)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Линейный непрерывный интегральный оператор $V: L\to C$ определен равенством

$$(Vz)(t)=\int_a^b V(t,s)z(s)ds, t\in[a,b],$$

переводит каждое слабо компактное в L множество в компактное в C.

Под решением включения (1) понимается такой элемент $x\in C$, для которого справедливо включение (1). Таким образом, каждому решению x включения (1) соответствует такой $z\in L$, что $z\in\Phi(x)$ и $x=f(x)+Vz$.

Под квазирешением включения (1) понимается такой элемент $x\in C$, для которого существует такая последовательность $w_i\in\Phi(x)$, $i=1,2,\ldots$ что $x_i=f(x)+Vw_i\to x$ в C при $i\to\infty$.

В докладе рассматриваются вопросы разрешимости включения (1). Изучаются свойства квазирешений включения (1), а также обсуждается "бэнг-бэнг" принцип.

Бурмистрова А. В. (г. Челябинск)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций рассмотрим следующую краевую задачу

$$\ddot{x}(t) + g(x(t)) \cdot \dot{x}(t) + f(t, x(1-t)) = e(t), \quad t \in [0;1], \qquad (1)$$
$$x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1),$$

где функции $e:[0;1] \to \mathbf{R}^1$, $g:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ и $f:[0;1] \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ непрерывны.

В работе [1] обоснована практическая значимость этой задачи и получены некоторые достаточные условия ее разрешимости. В докладе к краевой задаче (1) применяется схема исследования, основанная на понятии обобщенного оператора Грина, использующего метод расширения пространства решений [2]. Получены достаточные условия разрешимости задачи (1) отличные от результатов работы [1].

Теорема. *Пусть непрерывные функции* $g:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ *и* $f:[0;1] \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ *удовлетворяют условиям:*

а) $g(-\tau)=-g(\tau)$ *для всех* $\tau \in \mathbf{R}^1$;

б) $f(1-t,-\tau)=-f(t,\tau)$ *для любых* $t \in [0;1]$ *и* $\tau \in \mathbf{R}^1$;

в) существуют числа $a, в \geq 0$ *и непрерывная функция* $\gamma:[0;1] \to \mathbf{R}^1$ *такие, что* $|g(\tau)| \leq 0$ *для всех* $\tau \in \mathbf{R}^1$, *и* $|f(t,s)| \leq \gamma(t) + в|s|$ *для любых* $(t,s) \in [0;1] \times \mathbf{R}^1$, *причем* $a+в<1/3$.

Тогда для любой непрерывной функции $e:[0;1] \to \mathbf{R}^1$ *такой, что* $e(1-t)=-e(t)$ *краевая задача* (1) *имеет решение нечетное относительно* 1/2, *то есть удовлетворяющее равенству* $x(1-t)=-x(t)$.

Литература

1. De Pascale E., Iannacci R. Periodic solutions of qeneralized Lienard equations with delay//Lect. Notes Math. - 1983. - V.1017. - P. 148-156.
2. Бурмистрова А. В. Конструкция обобщенного оператора Грина топологически нетеровых краевых задач//Тез. докл. XYI Всесоюзной Школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Н. Новгород, 1991. - С. 30.

Буробин А. В. /Обнинск/

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ

Для описания процессов коагуляции частиц в дисперсных системах в стационарном случае используется кинетическое уравнение /см. [1]/

$$\frac{\partial}{\partial z}[v(x,z)f] = \frac{1}{2}\int_0^x \Phi(x-y,y)f(x-y,z)f(y,z)dy - f(x,z)\int_0^\infty \Phi(x,y)f(y,z)dy, \qquad /1/$$

где функция распределения частиц $f(x,z)$ и ядро коагуляции $\Phi(x,y)$ неотрицательны, а скорость перемещения частиц $v(x,z)$ складывается из положительно направленной скорости восходящих потоков и противоположно направленной скорости седиментации и меняет знак.

Предполагается, что дисперсная система сосредоточена в области положительных координат z, а на границе $z=0$ задано распределение входящих в нее частиц

$$f(x,0) = f_0(x), \qquad v(x,0) > 0. \qquad /2/$$

В настоящем докладе обсуждаются условия единственности решения краевой задачи /1/, /2/. Условия разрешимости этой задачи были представлены ранее в [2].

Литература

1. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах.- Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

2. Буробин А. В. О разрешимости краевой задачи для уравнения коагуляции.- "Понтрягинские чтения - IV": Тезисы докладов школы - Воронеж: ВГУ, 1993, с. 42.

УДК-516.9

Бут Н.Л, Ризун В.И., Шкляр В.Г. (Алчевск)

О СВОЙСТВАХ НОВОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

В монографиях [1,2] излагается модифицированный метод вспомогательных функций, который основывался на введении вспомогательных функций и новой системы функций (СФ), которые играли важную роль для успешного решения многих задач.

В настоящей работе строится новая СФ

$$\varphi_1(t) = F(t), \quad \varphi_2(t) = -F(t)\,ch^{-4}(\alpha_1 f_1(t)),$$

$$\varphi_3(t) = F(t)\,ch^{-4}(\alpha_1 f_1(t))\,ch^{-4}[\alpha_2 th(\alpha_1 f_1)], \ldots,$$

$$\varphi_i(t) = (-1)^{i+1}\varphi_{i-1}(t)\,ch^{-4}\langle \alpha_{i-2}\, th\{\alpha_{i-3}\ldots\alpha_2 th(\alpha_1 f_1)\}\rangle, \ldots \qquad (I)$$

$$F(t) = \exp\left(-2\int Q(t)dt\right),$$

$$f_1(t) = \int \exp\left(-\int Q\,dt\right)dt.$$

Доказаны следующие свойства СФ (I):

а) СФ (I) – базис Бари [3];

б) СФ (I) – квадрируемая [3];

Приведено несколько примеров применения СФ (I).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных обьектов.-Киев: ИСИО, 1994.- 409с.

2. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.- Киев: ЦБНТИ, 1991.- 332с.

3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.- М.:Наука,1965.- 448с.

Бутова С.Б., Стеценко В.Я (Ставрополь)

Развитие признаков А. Островского неособенности матриц и разрешимости интегральных уравнений.

В теории матриц и ее приложениях важную роль играет признак Адамара неособенности матриц и его усиление, предложенное О. Таусски для неразложимых матриц. Существенными развитиями теоремы Адамара явились три теоремы А. Островского, содержащие признаки неособенности матриц. Оказывается, что в случае неразложимых матриц эти результаты могут быть также усилены. В докладе приводятся такое развитие теорем Островского, которое находится в таком же отношении к теоремам Островского, в каком теорема Таусски к теореме Адамара.

Теорема 1. Пусть $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1,2,3\dots,n)$ неразложимая матрица и для некоторого $k\in[0;1]$ выполняются неравенства $|a_{ii}| \geqslant P_i^k Q_i^{1-k}$ $(i=1,2,\dots,n)$, (1)

где $P_i = \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $Q_i = \sum\limits_{j=1,(j\neq i)}^{n} |a_{ij}|$,

причем хотя бы для одного значения $i=i_0$ $(1\leqslant i_0\leqslant n)$ выполняется строгое неравенство

$$|a_{i_0 i_0}| > P_{i_0}^k Q_{i_0}^{1-k}$$

Тогда A- неособенная матрица.

Замечание. В первой теореме Островского все неравенства (1) предполагаются строгими.

Теорема 2. Пусть $A=(a_{ij})$ неразложимая матрица и для ее элементов при некотором $k\in[0;1]$ выполняются неравенства

$$|a_{ii}|\cdot|a_{jj}| \geqslant P_i^{k}\cdot Q_i^{1-k}\cdot P_j^{k}\cdot Q_j^{1-k} \quad (i\neq i; j=1,\dots,n) \qquad (2)$$

причем хотя бы для одного значения индекса $i=i_0$ при всех $j=1,2,\dots,n$ выполняются строгие неравенства

$$|a_{i_0 i_0}|\cdot|a_{jj}| > P_{i_0}^{k}\cdot Q_{i_0}^{1-k}\cdot P_j^{k}\cdot Q_j^{1-k} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

Тогда матрица A неособенная.

Аналогично указывается развитие третьей теоремы Островского для бесконечных матриц и интегральных операторов, а также приложения к локализации спектра соответствующих операторов.

Вайсман К.С. (Орехово-Зуево)

НЕКОТОРЫЕ НЕУЛУЧШАЕМЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается бескоалиционная дифференциальная линейно-квадратичная игра трёх лиц при неопределённости

$$\Gamma(U, Z_u) = \langle \{1,2,3\}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3}, \mathcal{Z}_u, \{J_i(U, Z_u, t_*, x_*)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

Здесь управляемая система $\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{3} u_i, \quad x(t_*) = x_*$, где $x, u_i \in \mathbb{R}^n$; время $t \in [t_*, \vartheta]$, постоянные $\vartheta > t_* \geq 0$, $A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$. Множество стратегий i-го игрока $\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) | u_i(t,x) = Q_i(t)x, Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\}$. $U = (U_1, U_2, U_3)$ — ситуация игры $\Gamma(U, Z_u)$.

Используя понятие "контрстратегии" из [1] вводится множество неопределённостей

$$\mathcal{Z}_u = \{Z_u \div z(t,x,u) | z(t,x,u) \div P(t)x, P(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta], \forall U_i \div u_i(t,x,u), U_i \in \mathcal{U}, i = 1,2,3\}$$

Пусть $x(\cdot) = x(t), t \leq t \leq \vartheta$, решение системы Σ при выбранных игроками стратегиях $U_i \div u_i(t,x)$. С помощью $x(\cdot)$ строятся реализации $u_i[t] = u_i(t, x(t))$, $z[t] = z(t, x(t), u(t, x(t)))$. На полученных пятёрках $(x(t), u_1[t], u_2[t], u_3[t], z[t])$ определена функция выигрыша i-го игрока

$$J_i(U, Z_u, t_*, x_*) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_*}^{\vartheta} \{\sum_{j=1}^{3} u_j'[t]D_{ij}u_j[t] + z'[t]L_i z[t] + 2z'[t]M_i u_i[t]\}dt,$$

$n \times n$ - матрицы C_i, D_{ij}, L_i — постоянны и симметричны.

На основе модификации понятия векторного максимина из [2] предлагается следующее решение игры Γ:

1^0. Каждой ситуации U ставится в соответствие множество Z_u^S минимальных по Слейтеру неопределённостей $Z_u^S \div z^S(t,x,u)$ трёхкритериальной задачи $\Gamma(U, Z_u)$.

2^0. Строится множество пар (U^B, Z_{uB}^S), где U^B ситуация равновесия по Бержу [3] в игре $\Gamma(U, Z_u^S)$.

3^0. Определяется максимальное по Слейтеру решение $(\hat{U}^B, \hat{Z}_{\hat{U}B}^S)$ трёхкритериальной задачи

$$\langle \{U^B, Z_{uB}^S\}, \{J_i(U^B, Z_{uB}^S, t_*, x_*)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

<u>Определение.</u> Пару $(\hat{U}^B, \hat{Z}_{\hat{U}B}^S)$ построенную в результате $1^0 - 3^0$ назовём *неулучшаемым гарантирующим равновесием Бержа-Слейтера (UGBSE)* игры Γ с начальной позицией $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$.

Множество UGBSE внутренне устойчиво. На основе метода динамического программирования установлены коэффициентные критерии существования UGBSE и найден их явный вид.

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

2. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. Boston, San Diego, New York, London: Academic Press, 1994.

3. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. and Vaisman K.S. The Berge Equilibrium: Preprint. Tbilisi: Institute of Control Systems, 1994.

Васильев В.Б. (Новгород)

Задачи Дирихле и Неймана для псевдодифференциальных уравнений

Рассматривается следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C_+^a, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\substack{x_2 - a x_1 = 0 \\ x_1 > 0}} = g_1(x_2 + a x_1), \quad \frac{\partial^{(k)}}{\partial n} u\Big|_{\substack{x_2 + a x_1 = 0 \\ x_1 < 0}} = g_2(x_2 - a x_1) \tag{2}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi_1, \xi_2)$, однородным степени α, допускающим волновую факторизацию относительно конуса C_+^a (см. Васильев В.Б. Псевдодифференциальные уравнения в конусах, Дифференц. уравнения, 1995, Т.31, № 8) с индексом $\mathfrak{x}$,

$$C_+^a = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 > a|x_1|, \; a > 0 \}$$

Решение u ищется в пространстве $H^{s,\mathfrak{x}}(C_+^a)$ функций с конечной нормой (" $\sim$ " обозначает преобразование Фурье)

$$\| u \|^2_{s,\mathfrak{x}} = \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\xi)|^2 |\xi|^{2\mathfrak{x}} (1 + |\xi|)^{2(s-\mathfrak{x})} d\xi ,$$

носитель которых содержится в $\bar{C}_+^a$, правые части g_1, g_2 берутся из пространств $H^{s-1/2, \mathfrak{x}-1}(\mathbb{R}_+)$, $H^{s-k-1/2, \mathfrak{x}-1}(\mathbb{R}_+)$ соответственно, $k = 0$ (условия Дирихле на обеих сторонах угла ∂C_+^a) или $k = 1$ (на одной стороне угла условие Дирихле, на другой – условие Неймана).

При некоторых дополнительных ограничениях на $A(\xi)$ в случае $\mathfrak{x} - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, $s > k + 1/2$, доказывается теорема существования и единственности решения задачи (1), (2) и дается априорная оценка решения

$$\| u \|_{s,\mathfrak{x}} \leq c \left([g_1]_{s-1/2, \mathfrak{x}-1} + [g_2]_{s-k-1/2, \mathfrak{x}-1} \right)$$

Васильев Н.С. (Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ РАВНОВЕСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ КОЛЬЦЕВОЙ СЕТИ

Рассмотрен сетевой уровень описания дейтаграммной сети передачи данных [1]. Модель сети представляет собой неориентированный кольцевой граф, в узлах которого расположены устройства коммутации, а вдоль дуг проложены линии связи. Абоненты получают доступ в сеть через узлы графа и передают друг другу сообщения по его маршрутам. Для каждой пары абонентов сети имеется только два соединяющих маршрута, соответствующих передаче пакета по кольцу в направлении по или против часовой стрелки.

Для всех пар абонентов сети, перенумерованных $k = 1,2,\ldots, m$, заданы λ_k - интенсивности потоков пакетов, которыми они обмениваются. Управление маршрутизацией заключается в выборе распределений λ_j^k, $j = 1,2$, потоков λ_k по маршрутам L_j^k, $j = 1,2$, $1,\ldots m$. Величины $\{\lambda_j^k\}$ определяют потоки z_l на ребрах графа сети $l=1,\ldots n$, равные суммам маршрутных потоков λ_j^k, проходящих по ним. От последних зависит задержка $f_l = f_l(z_l)$ пакета в линии связи l. Предполагается, что функции задержки f_l монотонно возрастают и непрерывны при $z_l \geqslant 0$, $l = 1,\ldots n$.

Время передачи любого пакета от момента входа в сеть до момента доставки адресату складывается из задержек в линиях связи вдоль маршрута следования. Для k-й пары абонентов сети оптимальным назовем такой маршрут, по которому время передачи пакетов минимально. Если все пары абонентов сети используют только оптимальные маршруты передачи, то эта маршрутизация сети называется равновесной (по Нэшу). Подобная игровая постановка задачи лежит в основе протоколов сетей *ARPANET* и *TYMNET* [1]. Доказано, что в кольцевой сети существует единственное равновесие. Проблемой является построение алгоритма управления, приводящего к равновесию и работающего по принципу обратной связи (все абоненты располагают информацией о векторе z).

Предположим, что не существует маршрутизаций $\Lambda=\{\lambda_j^k\}$ и $\bar\Lambda=\{\bar\lambda_j^k\}$, таких что $\lambda_1^k = \bar\lambda_2^k$ и $\bar\lambda_1^k = \lambda_2^k$, в каждой из которых всякая пара абонентов применяет единственный неоптимальный маршрут передачи. Предложен асинхронный самосогласующийся алгоритм, находящий равновесие примерно для половины пар абонентов сети. Действия остальных пар по выбору маршрутов требуют существенной организации.

1.Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.

Ватолкин М.Ю. (Ижевск)

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вопросу об индексе дефекта самосопряженного дифференциального оператора посвящено большое число работ (см. [I] и библиографию в [I]).

Определим квазидифференциальное выражение $Lx \doteq -(px')' + qx$ в интервале $\mathcal{J} \doteq \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$, где $x, p, q : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$. Здесь рассматриваем линейный квазидифференциальный оператор второго порядка, порожденный этим выражением. Скажем, что он имеет индекс дефекта (k,k) $(0 \leqslant k \leqslant 2)$, если уравнение

$$Lx - \lambda x = 0, \quad Im\,\lambda \neq 0, \quad t \in \mathcal{J}$$

имеет k линейно независимых решений, интегрируемых с квадратом на $\mathcal{J}$.

Доказана следующая

Теорема . Пусть $p(t)>0$ и $q(t)>0$ почти всюду в $\mathcal{J}$, интеграл $\int_0^\infty ds/p(s)$ расходится, и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

I) функции $1/p(t)$ и $q(t)$ ограничены в существенном на $\mathcal{J}$;

2) функция $\left(1+\int_0^t ds/p(s)\right) \cdot exp\left(-C\left(1+\int_0^t q(s)ds\right)\left(1+\int_0^t ds/p(s)\right)\right)$ суммируема с квадратом на $\mathcal{J}$ при некотором вещественном значении $C \geqslant 1$.

Тогда оператор, порожденный квазидифференциальным выражением Lx имеет индекс дефекта (I,I).

Доказательство основано на применении нового представления решений квазидифференциального уравнения в виде скалярных рядов, члены которых рекуррентно выражаются через коэффициенты исходного квазидифференциального уравнения (см. [2]). Указаны начальные условия, которым должно удовлетворять интегрируемое с квадратом на $\mathcal{J}$ решение уравнения $Lx = 0$, доказана его единственность с точностью до постоянного множителя и получено представление этого решения в виде ряда.

I. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528с.

2. Ватолкин М.Ю., Дерр В.Я. О представлении решений квазидифференциального уравнения//Изв.вузов. Математика. 1995. № 10. С.27-34.

Вельмисов П.А.(Ульяновск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ.

Исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для дифференциального уравнения с частными производными, описывающего динамику пластины в сверхзвуковом потоке газа

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[N\frac{\partial w}{\partial x}\right]+$$
$$+\gamma\frac{\partial w}{\partial t}+\beta w+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial t}+V\frac{\partial w}{\partial x}\right)+g\left(x,\frac{\partial w}{\partial t}+\theta w\right)+f(x,w)=0$$

Здесь x - координата, $0<x<b$; t - время; $w(x,t)$ - прогиб пластины (искомая функция); $M(x)$, $D(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $N(x)$, $\gamma(x)$, $\beta(x)$ - заданные функции переменной x; $g(x,w,\partial w/\partial t)$ - заданная функция переменных x, w, $\partial w/\partial t$; α, V,θ - положительные постоянные.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия

$$M>0,\ D>0,\ \xi\ge 0,\ \eta\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \theta>0,\ \frac{2}{b^2}\inf_x\xi-\eta\theta\ge 0$$

$$(\gamma+\alpha-M\theta)+\frac{2}{b^2}\inf_x\left[\frac{2}{b^2}\inf_x\xi-\eta\theta\right]>0,\quad \beta+\theta(\gamma+\alpha-M\theta)\ge 0$$

$$N<\frac{2}{b^2}\inf_x D-\frac{\alpha^2V^2}{4\theta}\left[(\gamma+\alpha-M\theta)+\frac{2}{b^2}\inf_x\left(\frac{2}{b^2}\inf_x\xi-\eta\theta\right)\right]^{-1}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\theta w\right)g\left(x,\frac{\partial w}{\partial t}+\theta w\right)\ge 0,\ wf(x,w)\ge 0,\ \int_0^w f(x,z)\,dz\ge 0,$$

Тогда решения уравнения для w устойчивы (по Ляпунову), если при $x=0$, $x=b$ выполнены следующие краевые условия: "з-з", "з-ш", "ш-з", "ш-ш", "з-с" ("з" - жесткое защемление, "ш" - шарнир, "с" - свободный элемент).

Укажем примеры функций $f(x,w)$, $g(x,\partial w/\partial t+\theta w)$, удовлетворяющих указанным условиям

$$f(x,w)=\sum_{n=1}^{r} f_{2k+1}(x)w^{2k+1},\ f_{2k+1}(x)\ge 0,\ k=1\div r$$

$$g(x,\partial w/\partial t+\theta w)=\sum_{n=1}^{s} g_{2n+1}(x)(\partial w/\partial t+\theta w)^{2n+1},\ g_{2n+1}(x)\ge 0,\ n=1\div s$$

Гавриков А.И., Новоженов М.М., Беспалова Т.Ю. (Нижний Новгород)

О существовании решения с однородной правой частью в задаче Дирихле

Пусть Ω – выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Введем строго эллиптический оператор второго порядка

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u$$

и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f(x,u), & x \in \Omega \\ \mathcal{B}(r,u) &= g(x,u), & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $\mathcal{B}(r,u) = \beta_1(x)u + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} r \beta_2(x)$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – оператор косой производной и параметр r принимает значения $0; 1$.

Используя методику функционально-интегральных уравнений, показывается существование решения поставленной краевой задачи.

Особо рассматривается случай, когда $f(x,u)$ является однородной функцией по u и существуют подобласти Ω_i такие, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $\Omega_i \cup \Omega_j \neq \Omega$ и

$$f(x,u) = 0, \ x \in \Omega_i$$

Приводятся достаточные условия существования положительного решения для случая, когда

$$f(x,u) \geq 0 \text{ и } f(x,u) = 0$$

при условии, что

$$\mathcal{B}(r,u) = 0.$$

Гайшун И.В. (Минск, Беларусь)

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В предлагаемом сообщении рассматривается задача стабилизируемости линейной обратной связью двухпараметрической дискретной системы в пространстве ограниченных последовательностей.

Показано, что если оператор сдвига, определяющий систему, имеет бесконечный порядок, то стабилизируемость имеет место, если система управляема (на самом деле, как и в случае обыкновенных дискретных систем, управляемость обеспечивает разрешимость задачи об управлении спектром). Отмечены особенности, возникающие для систем с оператором сдвига конечного порядка.

Галкина В.А. (г.Ставрополь)

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В докладе рассматривается вопрос об оценке решения уравнения

$$y = (B_1 - B_2)y + f, \qquad (1)$$

где B_1, B_2 - линейные положительные операторы.

Для этого рассматривается вспомогательная система линейных уравнений

$$\begin{cases} v - A_1 v + A_2 u = f + R(x_1) \\ u - A_1 u + A_2 u = f - R(x_1), \end{cases} \qquad (2)$$

где A_1, A_2 - линейные положительные операторы, такие, что

$$A_1 \leqslant B_1,\ A_2 \leqslant B_2,$$

а f и f приближения к f такие, что

$$f \leqslant f \leqslant f.$$

Положим, $R = (B_1 + B_2) - (A_1 + A_2)$.

Теорема 1. Пусть $r(B_1 + B_2) < 1$.

Тогда имеет место оценка

$$u^* \leqslant y^* \leqslant v^*$$

u^*, v^* - решение системы (2).

В связи с тем, что точное решение системы (2) далеко не всегда можно найти достаточно просто, возникает вопрос о получении эффективных оценок y^*. Такую оценку предоставляет следующая теорема.

Теорема 2. (об оценке решений).

Пусть u_o, v_o - такие два элемента, что

$$\begin{cases} v_o \geqslant A_1 v_o - A_2 u_2 + f + R(x_1) \quad (= v_1) \\ u_o \leqslant A_1 u_o - A_2 v_2 + f^o - R(x_1) \quad (= u_1), \end{cases}$$

а p и q такие две неотрицательные постоянные, что

$$u_1 - u_o \geqslant p(v_o - v_1), \quad v_o - v_1 \geqslant q(u_1 - u_o)$$

и $m = \min(p,q)$.

Тогда, при выполнении всех предположений этого доклада, уравнение (1) имеет решение y^*, причем

$$(u_1 + mv_1)/(1 + m) \leqslant y^* \leqslant (v_1 + mu_1)/(1 + m)$$

и, в частности,

$$u_1 \leqslant y^* \leqslant v_1.$$

Из этого утверждения, как частный случай, следует важная теорема Л.В.Канторовича об оценке решений операторного уравнения.

ГЛЫЗИН С.Д. (Ярославль)

КАСКАД БИФУРКАЦИЙ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ "РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ"

Известная краевая задача типа "реакция-диффузия"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \; \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \tag{1}$$

где вектор-функция $u(t,x) \in R^n, 0 < \varepsilon << 1$, а правые части системы (1) таковы, что при $D = 0$ она имеет близкий к гармоническому устойчивый предельный цикл, может быть промоделирована с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \xi_1' &= d\xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d\cos\delta - \xi_1^2)\xi_1 , \\ \xi_2' &= d\xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d\cos\delta - \xi_2^2)\xi_2 , \\ \alpha' &= -d\left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta)\right] + b(\xi_1^2 - \xi_2^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\xi_1(t), \xi_2(t)$ – нормированные амплитуды колебаний $u(t,x)$ в случае условного разбиения отрезка изменения x на две части, $\alpha(t)$ – разность фаз этих колебаний. Параметры d, δ и b определяются через инварианты краевой задачи (1).

Численное и аналитическое исследование системы (2) позволяет получить бифуркационные значения $d_j \equiv d_j(a,b)$, $j = 1\ldots 7$; $d_j^S \equiv d_j^S(a,b)$, $j = 1\ldots\infty$; $d_j^A \equiv d_j^A(a,b)$, $j = 1\ldots\infty$; $d_j^H \equiv d_j^H(a,b)$, $j = 1\ldots\infty$, при которых происходят перестройки фазового портрета исследуемой системы. Опишем наиболее интересные из них.

1. При $0 < d < d_1$ глобально устойчиво состояние равновесия (ξ^*, ξ^*, π).

2. При $d = d_1$ от состояния равновесия (ξ^*, ξ^*, π) ответвляется самосимметричный устойчивый цикл $C_{\text{П}}$ (бифуркация Андронова-Хопфа).

3. При $d = d_1^S$ симметрия цикла $C_{\text{П}}$ теряется, он расщепляется на два симметричных цикла $C_1^T, \bar{C}_1^T$ (бифуркация потери симметрии).

4. При $d = d_{11}\ldots d_{1\infty}$ с каждым из циклов $C_1^T, \bar{C}_1^T$ происходят бифуркации удвоения периода. В результате при $d > d_{1\infty}$ имеем два симметричных странных аттрактора $A_1^T, \bar{A}_1^T$, возникших по фейгенбаумовскому сценарию.

5. При $d = d_1^H$ пара симметричных странных аттракторов $A_1^T, \bar{A}_1^T$ объединяются в один самосимметричный A_1^S, который при $d = d_1^A \simeq 1.46$ превращается в самосимметричный двухобходный цикл C_1^S, условно "двойного" по сравнению с $C_{\text{П}}$ периода.

6. При увеличении d процесс повторяется: при $d = d_2^S$ теряется симметрия цикла C_2^S, затем с каждым из пары родившихся циклов $C_2^T, \bar{C}_2^T$ при $d = d_{21}\ldots d_{2\infty}$ происходят бифуркация удвоения, завершающиеся рождением симметричных странных аттракторов $A_2^T, \bar{A}_2^T$ и т.д.

7. Каскад бифуркаций странных аттракторов и циклов завершается рождением странного аттрактора более высокой ляпуновской размерности, который при увеличении d бифурцирует стандартным образом.

Бифуркации решений вариационных задач с поликруговыми симметриями

А.В.Гнездилов (Воронеж)

Прямой функционально-аналитический метод исследования нелинейных вариационных задач, основанный на применении схем конечномерных редукций Пуанкаре, Ляпунова-Шмидта и Морса-Ботта, позволяет сводить исследование бифуркаций решений вариационных задач к изучению поведения функций (ключевых) на конечномерных пространствах. Если исходная задача эквивариантна относительно ортогонального (в интегральной метрике) действия группы Ли [1], то ключевая функция инвариантна относительно индуцированного действия этой же группы в пространстве ключевых параметров ξ_j. В этом случае решения возникают не изолированным образом, а в виде тороидальных или более общих подмногообразий (групповых орбит) [2]. Доклад посвящен рассмотрению ситуаций поликруговых и расширенно-поликруговых симметрий, означающих эквивариантность относительно действий $n-$мерного тора и $(n+2)-$мерной компактной группы Ли, содержащей в качестве подгруппы $n-$мерный тор, $n \geq 2$. Предполагается, что индуцированное действие в пространстве ключевых параметров является точным (множество неподвижных точек состоит из одного нуля). Основные результаты относятся к случаю бифуркации из экстремали с эквивариантной особенностью типа торической сборки. Последнее означает, что при основных критических значениях управляющих параметров ключевая функция представима в виде инвариантной квартичной формы $\sum a_{j,k}(\xi_{2j-1}^2+\xi_{2j}^2)(\xi_{2k-1}^2+\xi_{2k}^2)+o(|\xi|^4)$ с матрицей $(a_{j,k})$, обладающей невырожденными диагональными минорами. В этом случае дано описание общей структуры бифуркационной диаграммы (как стратифицированного множества) [3]. При $n = 2,3$ описаны расклады бифурцирующих невырожденных торов (количества торов, их размерности и индексы Морса).

Литература: [1] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. [2] *Логинов Б.В., Треногин В.А.* ДАН СССР. 1971. Т.197, N 1. С.36-39. [3] *Сапронов Ю.И.* Матем. сборник. 1989. Т.180, N 10. С.1299-1310.

Условия положительности функции влияния консоли на упругой подушке.

Голованева Ф.В., Покорный Ю.В.
(Воронеж)

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(Tu''(x))'' + q(x)u(x) = f(x) \qquad (0 \le x \le l), \tag{1}$$

где T характеризует упругость консоли, $q(x)$- интенсивность сопротивления подушки и $f(x)$- интенсивность внешней нагрузки. Предполагается, что $q(x) = Q'(x)$ и $f(x) = F'(x)$, где $Q(x)$ и $F(x)$- функции ограниченной вариации. Другими словами, допускаются сосредоточенные силы реакции и внешние усилия (тогда в $q(x)$ и $f(x)$ присутствуют члены типа дельта-функций). Краевые условия для (1) определяются условиями консоли: $u(0) = u'(0)$ и $u''(l) = u'''(l)$. Оператор $Lu(x) \equiv (Tu''(x))''$ при этих условиях имеет сильно положительный обратный и уравнение (1) эквивалентно операторному:

$$u(x) + (Au)(x) = L^{-1}f(x), \tag{2}$$

где $(Au)(x) = L^{-1}(q(x)u(x)) = \int\limits_0^l G_0(x,s)u(s)dQ(s)$- также сильно положителен.

Вопрос о положительной разрешимости (1) с неотрицательной $f(\cdot)$ эквивалентен вопросу о неотрицательности функции влияния $K(x,s)$ системы. Она, наверняка, меняет знак, если упругость стержня невелика.

Отмеченный вопрос означает неясность с положительностью оператора $Bf = (I + A)^{-1}L^{-1}f$. Если бы A был оператором отрицательным, то, нам хорошо известно, положительная обратимость $(I + A)$ эквивалентна оценке $\rho(A) < 1$ на спектральный радиус $\rho(A)$. Для рассматриваемого случая, когда A положителен, в общей теории подходящих результатов нет. Оказывается, положительность B можно обеспечить согласованием свойств множителей $(I + A)^{-1}$ и L^{-1} в $(I + A)^{-1}L^{-1} = B$. Специальные оценки, установленные Ю.В.Покорным для функции Грина $G_0(x,s)$ оператора L, в сочетании с некоторыми проективными свойствами фокусирующих операторов позволяют показать, что если $\rho(A)$ не слишком велик, то оператор B положителен. Из этого следует, что при достаточно большой жесткости стержня (т.е. при большом T) функция влияния рассматриваемой системы неотрицательна.

Головинская Т.Я. (Воронеж)

Связь ренормгруппы с фрактальной геометрией и приложения к некоторым нелинейным биологическим структурам

Фрактальные множества пространства размерности D_T отличает скейлинговая инвариантность и нецелые значения размерности Хаусдорфа-Безиковича D, причём $D > D_T$ и $D = \lim_{\delta\to 0} \ln N(\delta)/\ln(1/\delta)$, где $N(\delta)$ - число кубов с ребром δ, покрывающих множество.

Рассмотрим последовательные преобразования некоторой фигуры A_0 на плоскости: $A_1(\delta) = \hat{V}A_0(\delta), \ldots A_n(\delta) = \hat{V}^n A_0(\delta)$, где $\hat{V}$ - оператор увеличения детализации фигуры. Пусть $\hat{W}$ - оператор изменения масштаба δ: $\hat{W}A_i(\delta) = A_i(\delta/a)$. Площадь множества $S(\hat{W}A_{n+1}) = S(\hat{W}\hat{V}A_n)$. Оператор $\hat{R} = \hat{W}\hat{V}$ является оператором ренормализационной группы, если выполняется соотношение подобия $S(\hat{R}A_n) = a^d S(A_n)$. Инвариантность относительно этого оператора отражает особое свойство структуры - ее фрактальность.

В качестве примера фрактальной структуры в реальном мире рассматривается двумерная проекция древесной кроны. Не являясь идеализированным математическим объектом, крона является предфракталом некоторого конечного порядка. Обсуждается существование неподвижной точки оператора $\hat{R}$ и возможность генерирования кроны как самоподобного множества на основе коэффициента подобия с заданным значением D. В результате компьютерной обработки экспериментальных данных видеоизображение представляется матрицей чисел $C(m_1, m_2)$, где $c_{kl} \in \{0, 1\}$ $(k = \overline{1, m_1}, l = \overline{1, m_2})$. Расчет фрактальной размерности D фигуры, соответствующей элементам $c_{kl} = 1$, производится "box-counting" методом. Расчеты показали, что фрактальная размерность проекций крон сохраняет в пределах вида свои значения в определенных интервалах $D_i \in [B_{1i}, B_{2i}]$ $(i = \overline{1,3})$ и для каждого индекса возраста i $\Delta z_i \leq 0.04$, где $\Delta z_i = (B_{2i} - B_{1i})/B_{2i}$. Таким образом, такая топологическая характеристика как значения D_i является существенной, и ее можно рассматривать в роли одного из "видовых" чисел.

Закон подобия внутри вида находит свое отражение при изучении геометрических форм листовых пластин. Преобразование формы листа некоторых видов описывается группой растяжений, инвариантом которой является соотношение $I = Q/L^2$, где Q – площадь листа, L – длина его границы.

УДК 517.514

А.О.Гохман (Воронеж)

ПОНИЖЕНИЕ ГЛАДКОСТИ В ТЕОРЕМЕ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ИНВАРИАНТАХ ГРУПП КОКСТЕРА И СВОЙСТВА ОБРАТНОГО НЬЮТОНОВСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Гладкая функция $f(x)$, инвариантная относительно конечной группы Кокстера W, действующей в $\mathbb{R}^n$, представима в виде

$$f(x)=F(p(x)), \qquad (1)$$

где $p=(p_1,\dots,p_n)$ базис в алгебре W-инвариантных полиномов. Понижение гладкости F относительно f носит анизотропный характер, при этом F описывается в терминах классов $C^k_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, т.е. непрерывными полагаются производные $D^\alpha F$ при $(\alpha,\overline{\mu})\le k$ [1]. Выясняется, что анизотропность понижения гладкости в соотношении (1) аналогична анизотропности отображения $x(p):p(\mathbb{R}^n)\to K$, обратного отображению, порождённому базисом p, где K - камера, образованная отражающими гиперплоскостями.

В качестве примера рассмотрим случай $W=B_n$, тогда $p(x)=\sigma(\xi(x))$, где $\sigma(x)$ - элементарные симметрические функции, $\xi(x)=(x_1^2,\dots,x_n^2)$, $K=\{x: x_1\ge\dots\ge x_n\ge 0\}$. Обозначим через $\varkappa(x)$ максимальное число совпадающих координат x_i точки x, а через $\varkappa_0(x)$ число $x_i=0$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $f(x)\in C^k(\mathbb{R}^n)^{B_n}$, тогда в любой точке $p=p(y)\in p(\mathbb{R}^n)$ в соотношении (1) $F(p)$ имеет гладкость $C^k_{\overline{\mu}(p)}$, $\overline{\mu}(p)=(\mu_1(p),\dots,\mu_n(p))$, $\mu_j(p)=\max(\varkappa(\xi(y)),2\varkappa_0(y)-2)$, $j<n$, $\mu_n(p)=\max(\varkappa(\xi(y)),2\varkappa_0(y))$.

Обозначим $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$, $\|x\|^{1/\overline{\mu}}=\max\limits_i|x_i|^{1/\mu_i}$.

<u>Теорема 2.</u> Отображение $x(p):p(\mathbb{R}^n)\to K$, порождённое базисом группы B_n, в любой точке $p=p(y)\in p(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию Гёльдера следующего вида: при любых $\overline{p},\overline{\overline{p}}\in p(\mathbb{R}^n)$ близких к p, имеет место неравенство

$$\|x(\overline{p})-x(\overline{\overline{p}})\|\le H(p)\|\overline{p}-\overline{\overline{p}}\|^{1/\overline{\mu}(p)},$$

где вектор $\overline{\mu}(p)=(\mu_1(p),\dots,\mu_n(p))$ определён в теореме 1.

1. А.О.Гохман. Функцион. анализ и его прил. 1994. Т.28, № 4.

УДК 517.977

Григорьева С.В. (Екатеринбург)

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СТАБИЛЬНОСТЬ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ.*

Для конфликтно – управляемой системы $dx/dt = f(t,x,u,v)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$), $x \in R^m$, $x[t_0] = x_0$, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, рассматривается задача сближения-уклонения с компактом $M \subset R^m$ в фиксированный момент времени ϑ в классах позиционных стратегий $U \div U(t,x)$ первого игрока и контр-позиционных стратегий $V \div V(t,x,u)$ второго игрока при обычных предположениях на правую часть системы.

Известно (см.[1]), что решение можно построить, исходя из конструкций оператора стабильного поглощения, определенного на базе семейства отображений $\{F_\psi : D \to 2^{R^m}\}$, удовлетворяющего условиям:

А.1. $\forall (t,x,\psi) \in D \times \Psi$ $F_\psi(t,x)$ компактно и $F_\psi(t,x) \subset H$, где H – шар с центром в начале координат такой, что $F(t,x) \subset intH$ $\forall (t,x) \in D$; $F(t,x) = co\{f(t,x,u,v) : u \in P,\ v \in Q\}$.

А.2. $\forall (t,x,l) \in D \times S$ выполняется $\min\limits_{\psi\in\Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = h(t,x,l)$, здесь $h(t,x,l) = \max\limits_{u\in P} \min\limits_{v\in Q} < l, f(t,x,u,v) >$ – гамильтониан управляемой системы, $h_F(l)$ – опорная функция множества F.

А.3. Существует функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$) такая, что $\forall (t_*, x_*)$, $(t^*, x^*) \in D$, $\forall \psi \in \Psi$ имеет место $d(F_\psi(t^*,x^*), F_\psi(t_*,x_*)) \le \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|)$. ($d(F^*, F_*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F^* и F_*.

Пусть единичная сфера S разбита на конечное число замкнутых подмножеств $L_\psi(t,x)$ ($\psi \in \Psi$) таких, что

В.1. $\forall (t,x) \in D$ конус $K(L_\psi(t,x))$ -выпуклое множество;

В.2. $h(t,x,l)$ - выпуклая по l на $K(L_\psi(t,x))$ функция $\forall (t,x) \in D$;

В.3. Существует функция $\tilde\omega(\delta)$ ($\tilde\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$) такая, что $\forall (t_*, x_*)$, $(t^*, x^*) \in D$, $\forall \psi \in \Psi$ имеет место $d(L_\psi(t^*,x^*), L_\psi(t_*,x_*)) \le \tilde\omega(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|)$.

Т е о р е м а. Семейство отображений $\{F_\psi : D \to 2^{R^m}\}$, заданное равенствами $F_\psi(t,x) = \bigcap\limits_{l\in L_\psi(t,x)} \{ f \in R^m : < l, f > \le h(t,x,l)\} \bigcap F(t,x)$, удовлетворяет условиям А.1, А.2, А.3.

Л и т е р а т у р а

1. Тарасьев А.М.,Ушаков В.Н.,Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления//ПММ.1987.Т.51.вып.2.

*Поддержано РФФИ, код проекта 93=011=16032; the research described was made possible in part by Grant N⁰ NME000 from the International Science Foundation

Гудович Н.Н. (Воронеж)

БЛОЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА.

Предложены системы сеточных уравнений блочного типа для линейного уравнения переноса

$$u'_t + c u'_x = f(x,t) \quad , -\infty < x < \infty \, , \; t \geq 0. \qquad (1)$$

Блочный принцип конструирования сеточных уравнений основан на группировке узлов аппроксимации дифференциального уравнения в непересекающиеся блоки узлов, покрывающие в совокупности все множество узлов аппроксимации и получающиеся друг из друга сдвигами вдоль осей координат. В пределах блока шаблоны аппроксимаций меняются от узла к узлу, шаблоны же аппроксимаций, отвечающие соответственным узлам разных блоков, идентичны.

В полудискретном случае вводим на оси t сетку узлов $t_i = i\tau$ с целыми номерами и под сеточным решением в узле t_i понимаем функцию $u_i(x)$ переменной x. Сеточные уравнения, связывающие $u_i(x)$ и их производные по x, получаются аппроксимацией уравнения (1) в узлах $t_{i+\frac{1}{2}}$ с полуцелыми номерами. Приэтом указанные узлы группируются в непересекающиеся блоки $T_m = \{t_{Km+s-\frac{1}{2}}\}$ из K соседних узлов каждый, где K - требуемый порядок аппроксимации (K - натуральное), m - номер блока (m=0,1,...), s - номер узла в блоке (s=1,2,...,K). Производная $u'_t(x, t_{Km+s-\frac{1}{2}})$ заменяется разностным приближением порядка $O(\tau^K)$ вида

$$[a_0(s)u(x, t_{Km}) + a_1(s)u(x, t_{Km+1}) + \ldots + a_K(s)u(x, t_{K(m+1)})]/\tau \, ,$$

а производная $u'_x(x, t_{Km+s-\frac{1}{2}})$ - линейной комбинацией значений этой же производной в узлах с целочисленными номерами

$$b_0(s)u'_x(x, t_{Km}) + b_1(s)u'_x(x, t_{Km+1}) + \ldots + b_K(s)u'_x(x, t_{K(m+1)}) \quad (2)$$

с погрешностью порядка $O(\tau^{K+1})$.

Доказано, что описанная полудискретная сеточная задача удовлетворяет спектральному критерию при любом K .

Введем на оси x сетку с узлами $x_n = nh$, положим в (2) $x = x_n$ и заменим фигурирующие там производные $u'_x(x_n, t_{Km+l})$ их разностными аппроксимациями с фиксированным и симметричным относительно x_n шаблоном. Показано, что полученная система сеточных уравнений удовлетворяет спектральному критерию при любом соотношении шагов τ, h.

В случае начально-краевой задачи для построения устойчивых сеточных задач блочный принцип приходится применять не только для замены u'_t , но и для замены u'_x . Как показывают численные эксперименты, при $K \leq 10$ схемы такого типа устойчивы при любом соотношении шагов. Для $K > 10$ численные эксперименты не проводились.

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

УМЕНЬШЕНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Совместное накопление ошибок метода и округления при решении на ЭЦВМ системы обыкновенных дифференциальных уравнений может оказаться трудно преодолимым препятствием [1]. Для исключения возможности превышения порядка суммарной ошибки используемого метода порядком суммарной ошибки округления необходимо при решении на ЭЦВМ задачи Коши применять разные правила округления чисел так, чтобы накопленная погрешность округления была мала или, по крайней мере, не превышала накопленной погрешности метода.

Например, при решении на ЕС ЭЦВМ со стандартным способом округления чисел методом ломанных Эйлера следующей задачи Коши

$$dx/dt = -ax + by + sin(t+u),$$
$$dy/dt = -bx - ay + cos(t+u),$$
$$x(0) = 3, \quad y(0) = 4,$$

где $t,u,x,y \in R^1$, $a = (1-cosu)/u$, $b = sinu/u$, $u > 0$, с постоянным шагом интегрирования h , $h = u$, на интервале $0 \le t \le 50$ уменьшение шага h , начиная с $1/2000$ при обычной точности или начиная с $2/1000000$ при удвоенной точности, приводит к существенному превышению модуля ошибки метода модулем накопленной ошибки округления [2]. Здесь легко избежать этого превышения, изменив способ округления чисел так, чтобы при $xy < o$ значение абсолютной величины x вычислялось с недостатком, а значение абсолютной величины y с избытком, а при $xy \ge 0$ наоборот, т.е. чтобы значение абсолютной величины x вычислялось с избытком, а значение абсолютной величины y с недостатком.

Литература

1. Гурьянов А. Е. Невычислимое на ЭЦВМ методом Эйлера экспоненциально устойчивое в целом периодическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Понтрягинские чтения-YI: Тезисы докладов школы. – Воронеж, ВГУ, 1955. – С. 30.

2. Гурьянов А. Е. Прикладной анализ численного решения задачи Коши // Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов школы. – Воронеж, ВГУ, 1995. – С. 83.

Гусятников П.Б. (Москва)

МНОГОЧЛЕННЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Рассмотрим матричное уравнение Риккати

$$C + AX - XB - XDX = 0 \qquad (1)$$

в котором X - неизвестная, а C,A,B,D - заданные матрицы соответственно размеров $m \times n$, $m \times n$, $m \times m$, $n \times n$, $n \times m$. Элементы всех матриц суть элементы некоторого поля K. Обозначим через SOL совокупность всех решений уравнения (1). Пусть p - натуральное число, $X_0, .., X_p$ ($X_p \neq 0$) - некоторые матрицы размеров $m \times n$. Семейство матриц $X(t) = X_0+X_1t +...+X_pt^p$, $t \in K$ назовем многочленным семейством (степени p) решений уравнения (1), если $\forall t \in K$: $X(t) \in SOL$. Если p = 1, то семейство назовем линейным, если p = 2, то квадратичным. Построен пример, показывающий, что в поле действительных чисел, линейные семейства решений могут отсутствовать.

Теорема 1. *Если поле K алгебраически замкнуто, то множество SOL либо конечно (или пусто), либо содержит линейное семейство решений.*

Теорема 2. *Пусть в поле K все неприводимые многочлены имеют степень не выше второй (этому условию удовлетворяет поле действительных чисел). Тогда множество SOL либо конечно (или пусто), либо обладает линейным или квадратичным семейством решений.*

Пример уравнения (1) в поле рациональных чисел, в котором C = 0,

$$A = B = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad D = \left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

примечателен тем, что для него множество SOL бесконечно, но не обладает ни линейным ни квадратичным семейством решений[1].

Литература

1. П.Б.Гусятников, В.В.Крылова "Линейные многообразия решений несимметричного матричного уравнения Риккати" в сб.Некоторые проблемы современн.матем. и их приложения к задачам физ. и механ. М., изд.МФТИ,1995, С.87-89.

Гусятников П.П. (Москва)

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение ($D=d/dx$)

$$a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+...+a_ny=0, \qquad (1)$$

в котором $a_0\neq 0$, $a_1,...,a_n$ – комплексные числа. Пусть $L(\lambda) = a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=(\lambda-\lambda_1)^{p_1}...(\lambda-\lambda_m)^{p_m}$ - каноническое разложение характеристического многочлена уравнения (1). Введем многочлены $L_{sj}(\lambda)=L(\lambda)/(\lambda-\lambda_s)^j$ и переменные $L_{sj}(D)y=w_{sj}$, $j=1,...,p_s$, $s=1,...,m$. Для тех решений у уравнения(1), для которых $w_{s1}\neq 0$ при всех $s=1,...,m$, введем переменные $z_s=w_{s1}$ (при $\lambda_s=0$), $z_s=(\mathrm{Log}\,w_{s1})/\lambda_s$ (при $\lambda_s\neq 0$), $z_{sj}=w_{s(j+1)}/w_{s1}$, $j=1,...,p_s-1$ (если $p_s>1$), $s=1,...,m$. Выпишем в этих переменных систему из $n-1$ независимого первого интеграла уравнения (1).

1. Если $p_1=...=p_m=1$, $\lambda_1\neq 0,..., \lambda_m\neq 0$, то это интегралы:

   $Q_s=z_s-z_1$, $s=2,...,m$ (при $m>1$).

2. Если $p_1=...=p_m=1$, $\lambda_1=0$, то это интегралы:

   $Q_1=z_1$, а также $Q_s=z_s-z_2$, $s=3,...,m$ (при $m>2$).

3. Если $p_1>1$, $\lambda_1\neq 0,..., \lambda_m\neq 0$, то это интегралы:

а) $Q_{11}=z_{11}-z_1$, $Q_{1j}=U_j(z_{11},...,z_{1j})$, $j=2,..., p_1-1$ (при $p_1>2$),

б) $Q_{s1}=z_s-z_{11}$, $Q_{s2}=z_{s1}-z_{11}$(при $p_s>1$), $Q_{sj}=U_{j-1}(z_{s1},...,z_{s(j-1)})$, $j=3,...,p_s$ (при $p_s>2$), $s=2,...,m$ (при $m>1$).

4. Если $p_1>1$, $\lambda_1\neq 0$, $p_2=1$, $\lambda_2=0$, то это интегралы:

а) из п.3, б) из п.3 (при $s\neq 2$, $m>2$), а также интеграл $Q_2=z_2$.

5. Если $p_1>1$, $\lambda_1=0$, то это интегралы:

а) $Q_{11}=z_1$, $Q_{sj}=U_j(z_{s1},...,z_{sj})$, $j=2,...,p_s-1$(при $p_s>2$),

а также интегралы б) из п.3.

В этих формулах $U_j(v(1,1),...,v(1,j))=U(1,j)$ - многочлены, построенные в теореме 2 статьи [1].

Литература

1. П.П.Гусятников, П.Б.Гусятников "Алгоритм построения полной системы инвариантов линейной динамической системы" в сб.Некоторые проблемы современн. матем. и их приложения к задачам физ. и механ., М., изд. МФТИ, 1995, С.73-76.

Гуц А.К. (Омск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА В КЛАССЕ $L_{1,loc}$

Биективное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется преобразованием Лоренца, если его компоненты $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (i = 1, ..., n)$ являются локально интегрируемыми функциями, то есть принадлежат классу $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, и для любой финитной функции $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ справедливы тождества

$$\sum_{i,k=1}^{n} \eta_{ik} \left(f_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_l}\right) \left(f_k, \frac{\partial \phi}{\partial x_m}\right) = \eta_{lm}(1, \phi)^2,$$

где

$$\eta_{ik} = diag(1, -1, ..., -1)$$

- метрика Минковского в $\mathbb{R}^n$,

$$(g, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x) d\mu,$$

μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Классическим преобразованием Лоренца называется диффеоморфизм $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{n} \eta_{ik} \frac{\partial h_i}{\partial x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_m} = \eta_{lm}.$$

Теорема. *Преобразование Лоренца является вектор-функцией f эквивалентной относительно меры Лебега классическому преобразованию Лоренца.*

Теорема, думается, справедлива и в классе обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Другой подход к определению преобразований Лоренца в классе $W^1_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ дан в работе [1].

1. Гуров Л.Г. //Сиб.мат.ж. 1980. Т.21, N.2. С.51–60.

БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

Термодинамическая теория фазовых переходов Ландау в настоящее время привела к значительным успехам в систематизации широкого круга экспериментальных исследований и понимании физической природы фазовых состояний. Их исследование для многих сред сводится к изучению бифуркации стационарных точек термодинамического потенциала, представленного в виде полинома по параметрам, характеризующим фазовое состояние. Использование этого представления, как правило, производится при значениях управляющих параметров, близких к критическим. При достаточно сильно выраженных "нелинейных свойствах" среды может оказаться, что фазовый переход не является единственным. Последнее связано с возможным наличием вблизи основного состояния нескольких стационарных состояний, претендующих на роль основного (при соответствующих управлениях). Для таких сред имеется методика достаточно точного описания изменения их качественных и количественных характеристик, разработанная теорией особенностей гладких функций. В докладе будут рассмотрены допустимые расклады значений индекса Морса по стационарным точкам, бифурцирующим из точки минимума с особенностью 3-мерной сборки. Первый фазовый переход (второго рода) происходит при вырождении квадратичной части потенциала. В этот момент поверхность уровня квадратичной части (до вырождения представляющая собой эллипсоид) превращается в цилиндр с эллиптическим сечением и осью, параллельной оси вырождения (моде бифуркации). При дальнейших изменениях управляющих параметров (температуры, внешнего поля и т.д.) новое состояние также может измениться, приведя к так называемой вторичной бифуркации, характер которой зависит от топологических свойств квартичной части функции и, в частности, от количеств и типов её условных экстремалей на невырожденных центрально симметричных поверхностях второго порядка (вследствие возможности редукций на поверхности второго порядка). В докладе будет дано описание диаграмм равновесий различных фаз со стабильной фазой и метаморфоз поверхностей уровня потенциала.

Денисов И.В. (Тула)

ОБ УГЛОВОМ ПОГРАНСЛОЕ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В прямоугольнике Ω: $0 < x < 1$, $0 < t \le T$, рассматривается первая краевая задача для параболического уравнения:

$$\varepsilon^2 \left[a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right] = F(u,x,t,\varepsilon),$$

$$u(x,0,\varepsilon) = 0, \; u(0,t,\varepsilon) = u(1,t,\varepsilon) = 0.$$

Здесь $F(u,x,t,\varepsilon)$ - нелинейная функция от u. Асимптотическое разложение решения строится методами книги [1]. Асимптотика состоит из регулярной, погранслойных на сторонах прямоугольника и угловых частей. Регулярная и погранслойная части находятся аналогично работе [2]. Для нахождения главного члена угловой части асимптотики с необходимой оценкой убывания используется метод верхних и нижних решений. При этом требуются некоторые ограничения на функцию $F(u,x,t,\varepsilon)$. Остальные угловые погранфункции являются решениями в области R^2_+ первых краевых задач для линейных уравнений вида

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \tau} = G(\xi,\tau)v + g(\xi,\tau).$$

Функция $G(\xi,\tau)$ в области R^2_+, вообще говоря, меняет знак, но при $(\xi+\tau)\to\infty$ становится положительной. Доказывается теорема об оценке остаточного члена.

Литература:

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
2. Денисов И.В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. N 11. С. 1666 - 1678.

Дербенев В.А., Цалюк З.Б. (Краснодар)

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Изучается асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решения задачи

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

по заданной асимптотике свободного члена $f(t)$ в случае неустойчивого уравнения (1).

Предполагается, что все функции определены и непрерывны при $t \geq 0$, $f(t) \in A_m$, где A_m – пространство функций, имеющих асимптотическое разложение по степенной шкале функций порядка m.

Обозначим через $L(B)$ – преобразование Лапласа функции $B(t) \in L_1(0,\infty)$. Справедлива

ТЕОРЕМА.

Пусть уравнение $z - A - L(B) = 0$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число корней λ_i, $i = 1,\dots,k$ кратности n_i соответственно.

Если $t^{p+m} B(t) \in L_1(0,\infty)$, где $p = \max\limits_{\operatorname{Re}\lambda_i = 0} \{n_i\}$ и $m \geq 0$ – целое число, то при $f(t) \in A_m$ решение задачи (1) имеет асимптотику

$$x(t) = \int_0^t Q(t-s)\varphi(s)ds, \quad t \to \infty,$$

где $Q(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} P_{n_i - 1}(t) e^{\lambda_i t}$, $P_r(t)$ – многочлен степени $\leq r$ и $\varphi(t) \in A_m$.

И.А. Дободейч (Воронеж)

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Одномерное течение жидкости описывается известными уравнениями. Последние в цилиндрических координатах при постоянных динамической вязкости ($\rho\nu$), масштабах скорости "a" и линейном R в поле тяжести с ускорением g, безразмерных z и r имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho M}{\partial z} = 0, \qquad M \equiv \frac{W}{a}, \qquad \tau \equiv \frac{a}{R}t, \qquad \mu \equiv \frac{\rho\nu}{Ra}, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial M}{\partial\tau} + \rho M\frac{\partial M}{\partial z} - \mu\left(\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 M}{\partial\varphi^2}\right) = \Phi, \tag{2}$$

$$\Phi = \frac{gR}{a^2}\rho\sin\vartheta + \frac{\mu}{3}\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho\nu}{3R}\frac{\partial^2 M}{\partial r\partial z} - Rg\rho\cos\vartheta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial P}{\partial\varphi} = \frac{\rho\nu}{3R}\frac{\partial^2 M}{\partial\varphi\partial z} + Rg\rho r\cos\vartheta\sin\varphi, \tag{4}$$

где z, r, φ – продольная, радиальная и угловая координаты;

W, ρ, P – скорость, плотность, давление,

ϑ – угол наклона оси потока жидкости к горизонту ; r = 0–1. Угловая координата φ отсчитывается от направления радиуса на наивысшую точку в поперечном сечении потока.

2. Интересным по возможной физической трактовке является следующее семейство частных решений системы уравнений (1)-(4)

$$\begin{cases} M = \dfrac{c_4 z - c_0 r\cos\varphi - c_2 + c_1 r^2/\mu}{1 + c_4\tau} - c_3(1 + c_4), & c_1,\ \rho_0\text{-Const}, \\[2ex] \rho = \dfrac{\rho_0}{1 + c_4\tau}\exp[-c_5 M - 2c_3 c_5(1 + c_4\tau)], & f_{(\tau)}\text{- произвольная}, \\[2ex] P = a^2\left(\dfrac{\mu}{3}\dfrac{\partial M}{\partial z} + \dfrac{4c_1 z}{1 + c_4\tau}\right) - Rg\rho\cos\vartheta\dfrac{1 + c_4\tau}{c_0 c_5} + f_{(\tau)}, \end{cases} \tag{5}$$

при $gc_1\cos\vartheta = 0$ и

$$\frac{Rg}{a^2}\left(\frac{c_4}{c_0}\cos\vartheta - \sin\vartheta\right) = 2c_3 c_4. \tag{6}$$

Долгий Ю.Ф. (Екатеринбург)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается линейное периодическое дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)\frac{dx(h(t))}{dt} + C(t)x(h(t)), \qquad (1)$$

где A, B и C - вещественные ω -периодические $n \times n$ -матрицы-функции; элементы матриц A и C суммируемы на отрезке $[0,\omega]$, а элементы матрицы B являются абсолютно непрерывными функциями на этом отрезке; $h(t) = t - \tau(t)$, $t \in R$; запаздывание τ - положительная ω -периодическая функция, абсолютно непрерывная на отрезке $[0,\omega]$, на этом отрезке $0 < \tau(t) \le \omega$, производная функции τ ограничена в существенном и удовлетворяет условию $vrai\sup_{t\in[0,\omega]} \dot\tau(t) < 1$.

При изучении устойчивости уравнения (1) требуется уметь оценивать расположение спектра оператора монодромии. Оператор монодромии можно рассматривать в пространстве непрерывных функций, если использовать обобщенные решения уравнения (1) . Он является ограниченным и содержит непрерывную и дискретную части спектра. Задачи нахождения непрерывной и дискретной части спектра принципиально различные. При нахождении дискретной части спектра (собственных чисел оператора монодромии) необходимо анализировать условия нетривиальной разрешимости однородных уравнений второго рода с вполне непрерывными операторами. Специфика определения оператора монодромии позволяет при нахождении его собственных чисел использовать краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений. Такой подход имеет определенные технические преимущества, т.к. полнее учитывает специфику рассматриваемой задачи. В частности, для уравнений с постоянным запаздыванием, рационально соизмеримым с периодом, функционально-дифференциальные уравнения из краевой задачи заменяются обыкновенными.

УСЛОВИЯ СКАЧКА И СИНГУЛЯРНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ МЕРЫ В РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Дубовицкий А.Я. (Черноголовка)

Ввиду очевидных трудностей аппарата ПМ актуальны условия, делающие его более доступным. Пусть $w^0=x^0,u^0$ экстремаль регулярной задачи: $\int f_0 dt \Rightarrow \min$, если $\dot{x}=f$, $g=0$, $G\leqslant 0$, $\Phi(x,t)\leqslant 0$. $V[t]$- множество допустимых u в t. Функции ПМ экстремали w^0: $H=\psi_x f-\alpha f_0+\psi_t$-Понтрягина, $\bar{H}=H-aG+bg$- Гамильтона. Сопряженная система: $-d\psi=\bar{H}'_{xt}[t]dt-\Phi'^{*}_{xt}[t]d\mu$. В точке скачка $t_*\in(t_0,t_1)$ меры μ, выполнено <u>условие</u>: (a) $\psi_{пр}(t_*)-\psi_{л}(t_*)=\Phi'^{*}_{xt}[t_*]\mu(t_*)$

Для формулировки условия (b) положим : $\xi_{л(пр)}(t_*)=\{r\,|\,\exists\, t_s\Rightarrow t_*-0(t_*+0) : r=\lim \Delta x^0_s/\Delta t_s\}$, $\xi()=\xi_л()\cup\xi_{пр}()$. Имеет место <u>условие</u>(b): $\xi(t_*)\subseteq \mathrm{cof}[t_*,\overline{u^0_л}(t_*)]\cap \mathrm{cof}[t_*,\overline{u^0_{пр}}(t_*)]\subseteq \mathrm{cof}[t_*,V[t_*]]$.

Поэтому всюду на $\xi(t_*)$ $H_{пр,л}[r,t_*]=\psi_{xпр,л}(t_*)r+\psi_{tпр,л}(t_*)$ достигают нулевого максимума относительно $\mathrm{co}\, f[t_*,V[t_*]]$.

<u>Пример</u> (A) $\int_{t_0}^{t_1}\Phi dt\to\min$, если $\dot{x}(=)u$, $\Phi(x,t)\leqslant 0$, $x,u,t\in Q$. Q- открыто, неравенства $\Phi_i\leqslant 0$- позитивно независимы. Для ПМ экстремали w^0, согласно (b), $\forall\, r\in\xi(t_*)$ реализует нулевой максимум $H_{л,пр}[u,t_*]$ в открытом множестве $Q[t]$. Поэтому $H'_{(л,пр)u}[u_*,t_*]=0$. Откуда $\psi_{пр}(t_*)=\psi_л(t_*)$. Согласно (a) $\Phi'^{*}_x[t_*]\,\mu(t_*)=0$, что противоречит позитивной независимости фазовых ограничений.

<u>Условие сингулярности</u>(c). Положим μ_s - сингулярная составляющая меры μ. Тогда для $\forall\, r\in \mathrm{co}\, f[t,V[t]]$ п.в. в смысле μ_s : $d\mu/d|\mu|(t)(\Phi'_x[t]r+\Phi'_t[t])=0$.

В частности, если экстремаль w^0 +(-) управляема, то норма сингулярной составляющей μ_s ее меры μ равна нулю.

Если в примере (A) Φ''_{uu} положительно определена на Q, и Q выпукло по u, то мера μ ПМ любой экстремали абсолютно непрерывна. Условия (b,c) получены совместно с А.А.Милютиным.

Доклад подготовлен при поддержке РФФИ:проект 94-01-00840.

УДК 519.853

Дудов С.И. (Саратов)

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФИКСИРОВАННЫХ ДОПУСКОВ

Рассматривается задача расчета номинальных значений параметров проектируемого устройства, которые обеспечивали бы, в пределах точностных возможностей используемого оборудования, техническую реализацию устройства с наилучшими качественными показателями. Одна из ее формализаций приводит к задаче вида

$$\varphi(x) = \min_{n(y)\leq r} f(x-y) \longrightarrow \max_{x\in R^p}, \tag{1}$$

где $f(x)$ - качественная характеристика устройства, зависящая от вектора параметров $x\in R^p$, $n(\cdot)$ - норма, выбор которой связан со спецификой технологического процесса; $r>0$ - фиксированное число, отображающее точностные возможности оборудования (например, допуски на параметры). Пусть $f(x)$ - непрерывная и дифференцируемая по направлениям функция на R^p, $f'(x,g)$ - ее производная по направлению g в точке x, $\gamma_f(x)=\{g\in R^p / f'(x,g)<0\}$, $\gamma_{1,f}(x)=\{g\in R^p/f'(x,g)\leq 0\}$.

Т е о р е м а 1. Если $\varphi(x)$ достигает в точке x_0 наибольшего на R^p значения и для каждой точки $z\in Q(x_0)=\{z\in R^p/n(z)\leq r, \varphi(x_0)=f(x_0-z)\}$ $f'(x,g)$, как функция переменных (x,g), полунепрерывна снизу в точках (x_0-z,g) для любого $g\in R^p$ и $n(z)=r$, то

$$\bigcup_{z\in Q(x_0)} \gamma_{1,f}(x_0-z)=R^p. \tag{2}$$

Т е о р е м а 2. Если $f(x)$ - квазивогнутая функция и в точке x_0 выполняется условие (2), а также

$$\overline{R^p\setminus \gamma_{1,f}(x_0-z)} = R^p\setminus \gamma_f(x_0-z)\ ,\quad \forall z\in Q(x_0)$$

то x_0 - точка максимума функции $\varphi(x)$ на R^p.

В докладе будет также предложен алгоритм решения задачи (1) для случая, когда $f(x)$ является квазивогнутой функцией.

Работа поддержана РФФИ (код проекта 95-01-00156).

Применение индекса пересечения в нелинейной задаче о собственных векторах

Дымарский Я.М. (Киев)

Пусть $A : R^n \longrightarrow L$ – непрерывное отображение в пространство самосопряженных операторов. Рассмотрим задачу

$$Au = \lambda u, \qquad \|u\| = r \qquad (u \in R^n, \lambda \in R) \tag{1}$$

Рассмотрим задачу о собственных значениях (с.зн.) λ и нормированных собственных векторах (н.с.в.) u. Если пара (λ_0, u_0) удовлетворяет (1), то λ_0 является с.зн. линейной задачи

$$A(u_0)u = \lambda u \tag{2}$$

и среди н.с.в. задачи (2), которые соответствуют λ_0, присутствует u_0. С.зн. задачи (1) назовем простым (кратным), если оно является таковым для задачи (2). С.зн. и н.с.в. задачи (1) присвоим тот же номер(а), которым обладает λ_0 как с.зн. (2). Рассмотрим C^∞-многообразие $M = \{(u, B) : Bu = \lambda u\} \subset S^{n-1} \times L$. Точкам $(u, B) \in M$ также присвоим номера и кратности соответствующих с.зн. λ. Многообразие M естественным образом стратифицируется по номерам и кратностям. Обозначим через $M_k \subset M$, $(dim\, M_k = dim\, M = dim\, L)$ страт, содержащий простые пары (u, B) с номером k.

Теорема. *Вектор u является н.с.в. (1) в том и только том случае, когда $(u, A(u)) \in M$; при этом u имеет тот номер(а), которым обладает страт, содержащий $(u, A(u))$.*

Из теоремы следует, что достаточным условием существования простого н.с.зн. с номером k является отличие от нуля индекса пересечения χ замыкания M_k с графиком A.

Проекция $\pi : M \longrightarrow L$ $(\pi(u, B) = B)$ вырождена только на краю ∂M_k и $codim\pi(\partial M_k) = 2$. Поэтому в некоторых случаях χ можно вычислить с помощью коэффициента зацепления многообразия $\pi(\partial M_k)$ с некоторой окружностью $S^1 \subset L$, которая порождена отображением A.

Описанная конструкция позволяет получить новые теоремы о существовании н.с.в. и малых с.в. для некоторых классов квазилинейных краевых задач.

Е.П. ЕНИНА Воронеж

АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Известно, что оптимальное решение задачи оценивания неизвестных параметров случайных процессов приводит к соответствующим байесовским операторам. Однако, практическое использование этих операторов встречает существенные трудности. К ним относятся обычно имеющая место априорная неопределенность, произвольность выбора потерь, сложности теоретического анализа и технической реализации. Эти трудности заметно возрастают при совместной оценке нескольких параметров векторного сигнала. Частично преодолеть трудности, связанные с применением байесовских операторов можно на основе анализа их асимптотического поведения.

В докладе рассматривается способ построения асимптотически-оптимальных оценок, основанный на анализе асимптотического поведения многомерного апостериорного распределения неизвестных параметров случайных процессов. Показано, что при выполнении довольно общих условий регулярности апостериорное распределение сходится к многомерному гауссовскому. В результате, для симметричных неубывающих функций потерь, многомерная байесовская оценка сходится к оценке максимального правдоподобия.

Факт асимптотической гауссовости апостериорного распределения оцениваемых параметров в условиях высокой апостериорной точности хорошо известен.

Однако, в отличие от известных результатов полученное асимптотическое представление апостериорного математического ожидания неизвестных параметров векторного сигнала позволяет рассчитать точность аппроксимации байесовской оценки посредством оценки максимального правдоподобия. В результате найдены асимптотически точные выражения для среднего квадрата погрешности аппроксимации байесовской оценки с помощью оценки максимального правдоподобия.

Еровенко В.А. (Минск)

Аналог классической теоремы Вейля об инвариантности существенного спектра для дифференциальных операторов

В докладе на примерах различных классов обыкновенных дифференциальных операторов, рассматриваемых во всех банаховых пространствах $L^p(a,\infty)$, для любого p, $1 \le p \le \infty$, и любого a, $-\infty \le a < \infty$, демонстрируются некоторые возможности применяемого автором метода исследования спектральных и фредгольмовых свойств оператора, состоящего в изучении одновременно всех существенных спектров в соответствующих шкалах банаховых пространств. Такой подход позволяет использовать все полезные свойства различных существенных спектров. В определенном смысле, максимальная общность в исследовании достигается как за счет всестороннего рассмотрения всех соответствующих дифференциальных операторов, от минимального до максимального, так и за счет изменения Лебеговых пространств, зависящих от показателя суммируемости p, а также от интервала изменения независимой переменной [1].

Эти результаты используются для доказательства новых теорем об инвариантности существенных спектров, обобщающих классическую теорему Вейля (1909), а именно, равенство $\sigma_{ew}(A+B) = \sigma_{ew}(A)$ для самосопряженного оператора A, возмущенного самосопряженным компактным оператором B. Новый класс возмущающих несамосопряженных операторов можно назвать "относительно малые на бесконечности".

Теорема [2]. Пусть для коэффициентов b_k в дифференциальной операции $\tau := \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k(t))D^k$ имеем, $1/(a_n + b_n)$, $b_k \in L^\infty(a,\infty)$, $0 \le k \le n$,

$$b_k \in L^p_{\mathrm{loc}}(a,\infty) \text{ и } \lim \int_s^{s+1} |b_k(t)|^p\,dt = 0 \text{ при } s \to \infty,\ 0 \le k \le n.$$

Тогда для существенных спектров минимального $T_0(\tau)$, максимального $T(\tau)$ и "промежуточного" $S(\tau)$, т.е. $T_0 \subset S(\tau) \subset T$, дифференциальных операторов, порожденных τ в банаховом пространстве $L^p(a,\infty)$, $-\infty < a < \infty$, $1 \le p < \infty$, справедливы равенства для всех существенных спектров:

$$\sigma_{ek}[S(\tau)] = \sigma_{e2}^{\pm}[S(\tau)] = \{P(\lambda) : \mathrm{Re}\lambda = 0\},\ k = 1,2,3,$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\tau)] = \sigma[T_0(\tau)] = \{P(\lambda) : \mathrm{Re}\lambda \ge 0\},\ k = 4,5,$$

$$\sigma_{ek}[T(\tau)] = \sigma[T(\tau)] = \{P(\lambda) : \mathrm{Re}\lambda \le 0\},\ k = 4,5,$$

где P – полином соответствующей операции τ, $P(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

1. Еровенко В.А. // Доклады АН Беларуси.- 1995.- Т. 39, N2.
2. Еровенко В.А. // Доклады АН Беларуси.- 1996.- Т. 40, N2.

Ефремов А.А. (Челябинск)

Проблема линейного квадратического регулятора для линейного уравнения типа Соболева

Ставится и исследуется задача оптимального управления (проблема линейного квадратического регулятора [2]) для уравнения типа Соболева [1]

$$L\dot{x} = Mx + Bu \tag{1}$$

в гильбертовых пространствах $\mathcal{X} \ni x, \mathcal{U} \ni u$, снабженного начальным условием $x(0) = x_0$. Операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y}$ — гильбертово; $M : domM \to \mathcal{Y}$ линеен, замкнут и плотно определен; $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Рассматривается случай необратимости оператора L ($\ker L \neq \{0\}$).

Функционал стоимости имеет вид

$$J(u) = \int_0^T (< \dot{z}(t), \dot{x}(t) >_{\mathcal{X}} + < z(t), x(t) >_{\mathcal{X}})dt +$$

$$+\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^T < u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) >_{\mathcal{U}} dt$$

где $z = Cx; C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ - оператор наблюдения.

Установлен факт существования и единственности решения данной задачи. Получено выражение для программного оптимального управления, осуществлен синтез оптимальных уравнений.

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т.49,N4 с.47-74.

2. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ·- М.:Наука, 1980.

УДК 519.853.53:517.816

Жуковский В.И., Мухин В.В. (Москва)

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Причины появления неопределенностей.

2. Постановка задачи, "игровая" интерпретация неопределенностей.

3. Векторные гарантии по Слейтеру, Парето, Борвейну, Джоффриону и А-минимальные гарантии [1]: свойства, классификация, обратная задача.

4. Равновесие Нэша-Слейтера (-Парето, -Борвейна, -Джоффриона, А-равновесие): необходимые условия, структура; применение метода динамического программирования, коэффициентные критерии, явный вид, отсутствие гарантирующих равновесий.

5. Позитивные и негативные свойства гарантирующих равновесий: динамическая устойчивость [2], внутренняя неустойчивость и др.

6. Аналог векторного максимина из [3]: формализация неулучшаемых равновесий Нэша-Слейтера, внутренняя устойчивость, сравнение с равновесием Нэша-Слейтера, достаточные условия, коэффициентные критерии, алгоритм построения.

7. Дифференциально-разностные линейно-квадратичные позиционные игры [4] при неопределенности: особенности формализации гарантирующих и неулучшаемых гарантирующих равновесий, достаточные условия, существование.

8. Перспективы развития теории дифференциальных позиционных игр при неопределенности.

Литература

1. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 320с.

2. Мухин В.В. Динамическая устойчивость векторной седловой точки// Систем.анал.,моделир.и оптимиз.прикл.задач: Сб.научн.тр. М., 1990. С.51-55.

3. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. New York: Academic Press. 1993. 404p.

4. Жаутыков О.А., Жуковский В.И., Жаркынбаев С. Дифференциальные игры нескольких лиц (с запаздыванием времени). Алма-Ата: Наука, 1988. 319с.

Жура Н. А. (Москва)

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ СОСТАВНОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a\frac{\partial u}{\partial x_1}\;,\quad u=(u_1,u_2,\dots,u_\ell)\;,\quad a\in R^{\ell\times\ell}\;,\quad \ell\geqslant 3 \qquad (1)$$

где предполагается, что $\det a\neq 0$, а характеристический полином матрицы a имеет как вещественные, так и комплексные корни, т.е. рсистема(1)- система составного (в частности главного по Хермандеру [1])типа. Для регулярных решений системы (1) имеет место представление его общего решения [2] $u = 2\,\mathrm{Re}\, b_1\phi + b_2\psi$, $b=(b_1 : \bar{b}_1 : b_2)$, $\det b\neq 0$, где $\phi(x_1,x_2)$ - регулярное решение канонической эллиптической системы, а $\psi(x_1,x_2)$ - регулярное решение канонической гиперболической системы [2] соответственно: $\partial\phi/\partial x_2 = \mathcal{J}_1\partial\phi/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial x_2 = \mathcal{J}_2\partial\psi/\partial x_1$, $b^{-1}a\,b=\mathcal{J}$, $\mathcal{J}=\mathrm{diag}(\mathcal{J}_1,\bar{\mathcal{J}}_1,\mathcal{J}_2)$, $\mathcal{J}_2\in R^{s_2\times s_2}$, $\mathcal{J}_1\in C^{s_1\times s_1}$, $\mathcal{J}_1=\lambda+\mathcal{J}_{0,1}$, $\mathrm{Im}\,\lambda>0$, $2s_1+s_2=\ell$. Пусть $\mathcal{D}$-конечная односвязная область типа луночки, границей которой служат две достаточно гладкие дуги Γ_1 и Γ_2, каждая из которых ни в одной из своих точек не имеет характеристических направлений, причем на Γ_k заданы условия вида $C_k u = f_k$, $k=1,2$, где заданная вещественнозначная матрица-функция C_1 (C_2) порядка $s_1\times\ell$ (порядка $(s_1+s_2)\times\ell$) . При определенных условиях на $\mathcal{J}_2$, C_k доказано, что эта задача эквивалентна краевой задаче теории функций [3]

$$\mathrm{Re}\, A\,T_\gamma\phi = h$$

где функциональный оператор A $\in\mathcal{A}$ - алгебре функциональных операторов [3]. Если же $\mathcal{D}$ - треугольник, то оператор A лишь в исключительных случаях принадлежит этой алгебре. Это позволило получить для сформулированных задач теорему нетеровости и формулу индекса и исследовать асимптотику решений вблизи угловых точек и его гладкость в классе $H_{\beta,\lambda}$.

Литература:
1. Hormander L. Math.Ann., v.140, 1960, p.124-160.
2. Жура Н.А., Доклады РАН, том 331, N5, 1993г.
3. Солдатов А.П., Одномерные сингулярные операторы, М.,1991г.

Завгородний М.Г.. Кулаев Р.Ч.(Воронеж)

О КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ.

Для краевой задачи на графе обсуждается вопрос о существовании собственной функции кратности большей единицы.

Рассмотрим на графе-пучке Г с внутренней вершиной a краевую задачу

$$u'' + \lambda u = 0, \qquad u/_{\partial\Gamma} = 0. \qquad (1)$$

$$u_i(a) = u_j(a), \quad \sum_{i=1}^{d} a_i u_i'(a) = 0, \quad (a_i \neq 0, \sum_{i=1}^{d} a_i \neq 0) \qquad (2)$$

В работе [1] был приведен пример задачи (1), (2), для которой существовала цепочка корневых функций, состоящая из двух собственных функций и двух присоединенных. При этом соответствующим образом были подобраны коэффициенты α_i. А именно: d=3, $2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0$. Оказывается, если λ является собственным, то всегда можно подобрать α_i так, чтобы существовала собственная функция кратности большей единицы.

Пусть λ собственное значение краевой задачи (1), (2).Обозначим через $\{\gamma_i\}_1^s$ множество различных по длине ребер графа Г, а через $\{l_i\}_1^s$ их длины. Пусть $J(l)$ - число ребер длины l. Пусть при $i = \overline{1,m}$ существуют такие целые k_i, что $l_i\sqrt{\lambda} = \pi k_i$, и при $i = \overline{m+1,n}$ такие целые k_i, что $l_i\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi k_i$. Пусть остальные длины l_i вышеперечисленным условиям не удовлетворяют.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) 2n>s, 2) $J(l_i)>1$ при $i = \overline{n+1,s}$. Тогда существует последовательность вложенных подпространств $R^s \supset \cdots \supset R^1$, такая, что для любого $k \le s-1$ и для любых $\{\alpha_i\} \in R^{s-k} \setminus R^{s-k-1}$ существует собственная функция кратности не меньшей r, где r=k+1 при $k \le 2(s-n)$ и r=2k-2(s-n)+1 при $k>2(s-n)$.

Теорема 2. Пусть n<s и хотябы одно из условий теоремы 1 не выполнено. Тогда существует последовательность вложенных подпространств $R^s \supset \cdots \supset R^1$, такая, что для любого $k \le s-1$ и для любых $\{\alpha_i\} \in R^{s-k} \setminus R^{s-k-1}$ существует собственная функция кратности $r \ge k+1$.

Теорема 3. Пусть m=s. Тогда найдется набор констант $\{\alpha_i\}$ такой, что существует собственная функция кратности r=2s-1.

Литература.

1.Завгородний М.Г.,Кулаев Р.Ч. О существовании присоединенных функций задачи на графе.Тез. докл. школы "Понтрягинские чтения V".Воронеж.1994.С.49.

УДК 517.972

Задорожний В.Г. (Воронеж)

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ВАРИАЦИОННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Как и в обычном интеграле, самым мощным средством интегрирования является метод замены переменной. Для вариационного интеграла приведем два варианта этого метода.

Пусть $X(G)$ банахово пространство функций, определенных на области $G \subset R^n$. Если дифференциал Фреше $dy(x,h)$ функционала $y: X(G) \to \mathbb{C}$ имеет вид

$$dy(x,h) = \int_G \varphi(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

где интеграл понимается в смысле Стилтьеса, то $\varphi: X \times G \to \mathbb{C}$ называется вариационной производной от y и обозначается $\delta y(x)/\delta x(\xi)$, а $y(x)$ называется вариационным интегралом от $\varphi(x,\xi)$ и обозначается $\int \varphi(x,\xi)\delta x$.

Теорема 1. Пусть $g: X(G) \to R$, $f: R \to R$, $x: G \to R$,

$$\int f(u)\,du = y(u),$$

тогда

$$\int f(g(x))\frac{\delta g(x)}{\delta x(\xi)}\delta x = y(g(x)).$$

Обозначим через $C(G)$ пространство непрерывных на G функций $x: G \to R$.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset C(G)$, $g: \Omega \times G \to \mathbb{C}$, $f: R \to R$, для любого $x \in \Omega$ существует равномерная производная $f'(x(\xi))$ и

$$\int g(u,\xi)\delta u = y(u),$$

тогда имеет место равенство

$$\int g(f(x),\xi)\, f'(x(\xi))\delta x = y(f(x)).$$

Задорожний В.Г., Смагина Т.И. / г.Воронеж /

НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается начальная задача

$$\ddot{x} + \varepsilon^2 x = f, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \qquad /1/$$

со случайными коэффициентами. Случайные величины x_0, x_1 а также ε и f могут быть зависимы между собой, но x_0 и x_1 независимы с ε и f. Предполагается, что известна характеристическая функция $\varphi(v,u) = M(\exp(i\varepsilon v + i f u))$. Для нахождения математического ожидания $Mx(t)$ решения задачи /1/ вводится вспомогательная функция

$$y(t,v,u) = M(x(t)\exp(i\varepsilon v + i f u)).$$

Очевидно, что $Mx(t) = y(t,0,0)$. Функция $y(t,v,u)$ является решением задачи Коши для некоторого детерминированного гиперболического уравнения и может быть выписана в явном виде. Для $Mx(t)$ получается представление

$$Mx(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{-t+\alpha}^{t-\alpha} M(f\exp i\varepsilon\beta)\,d\beta\,d\alpha + \frac{Mx_1}{2}\int_{-t}^{t}\varphi_\varepsilon(\alpha)\,d\alpha + \frac{Mx_0}{2}[\varphi_\varepsilon(t) + \varphi_\varepsilon(-t)]. \qquad /2/$$

Здесь $\varphi_\varepsilon(t) = M(\exp i\varepsilon t)$. Заметим, что хотя для вывода этой формулы требовалось знание характеристической функции $\varphi(v,u)$, но в /2/ она не фигурирует. Если ε и f – независимые случайные величины, то $M(f\exp i\varepsilon\beta) = Mf\,\varphi_\varepsilon(\beta)$ и математическое ожидание решения полностью определяется математическими ожиданиями f, x_0, x_1 и характеристической функцией случайной величины ε. Так, если ε распределена по нормальному закону со средним значением $\bar{\varepsilon}$ и дисперсией σ^2, то из /2/ получается представление

$$Mx(t) = \frac{Mf}{\sigma^2}\left[e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\cos\bar{\varepsilon}t - e^{-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2\sigma^2}}\right] + Mx_0 e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\cos\bar{\varepsilon}t + \frac{Mf\cdot\bar{\varepsilon}}{\sigma^2}\int_0^t e^{-\frac{\sigma^2\alpha^2}{2}}\cdot\sin\bar{\varepsilon}\alpha\,d\alpha + (Mf\cdot t + Mx_1)\int_0^t e^{-\frac{\sigma^2\alpha^2}{2}}\cdot\cos\bar{\varepsilon}\alpha\,d\alpha.$$

УДК 517.98

Задорожний Б.Г. (Мариуполь)

ФУНКЦИОНАЛ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема. Если обратная задача вариационного исчисления для уравнения $b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{xz} + b_4 u_{yy} + b_5 u_{yz} + b_6 u_{zz} + b_7 u = 0$, где $b_1, \dots, b_7$ функции переменных $x, y, z, u, u_x, u_y, u_z$, имеет решение, то функционал находится по формуле $J(u) = \int F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\,d\xi$ и функция F вычисляется по формуле

$$F = -\frac{u_x}{2}\int_{\beta}^{u_y} b_2(\alpha_5,\gamma_7)\,du_y - \frac{u_y}{2}\int_{\gamma}^{u_z} b_5(\beta_6)\,du_z - \frac{u_y}{2}\int_{\alpha}^{u_x} b_2(\beta_6,\gamma_7)\,du_x - \frac{u_z}{2}\int_{\alpha}^{u_x} b_3(\gamma_7)\,du_x -$$

$$- \frac{u_z}{2}\int_{\beta}^{u_y} b_5(\alpha_5,\gamma_7)\,du_y + \frac{\alpha}{2}\int_{\beta}^{u_y} b_2(\delta_4,\alpha_5,\gamma_7)\,du_y + \int_{\alpha}^{u_x} u_x b_1(\delta_4,\gamma_7)\,du_x + \int_{\beta}^{u_y} b_4(\delta_4)\,u_y\,du_y + \frac{\beta}{2}\int_{\alpha}^{u_x} b_2(\delta_4,\beta_6,\gamma_7)\,du_x +$$

$$+ \frac{\beta}{2}\int_{\gamma}^{u_z} b_5(\delta_4,\beta_6)\,du_z + \int_{\gamma}^{u_z} u_z b_6(\delta_4)\,du_z + \frac{\gamma}{2}\int_{\alpha}^{u_x} b_3(\delta_4,\beta_6,\gamma_7)\,du_x + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{u_x}\int_{\beta}^{u_y} b_2(\delta_4,\gamma_7)\,du_y\,du_x +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{u_z}\int_{\beta}^{u_y} b_5(\delta_4)\,du_y\,du_z + \frac{\gamma}{2}\int_{\beta}^{u_y} b_5(\delta_4,\gamma_7)\,du_y - \frac{1}{2}\int_{\delta}^{u}\int_{\gamma}^{u_z} b_{3x}\,du_z\,du - \frac{1}{2}\int_{\delta}^{u}\int_{\beta}^{u_y} b_{2x}(\alpha_5,\gamma_7)\,du_y\,du -$$

$$- \int_{\delta}^{u}\int_{\alpha}^{u_x} b_{1x}(\gamma_7)\,du_x\,du - \frac{u_x}{2}\int_{\gamma}^{u_z}[b_3 - b_3(\delta_4)]\,du_z - u_x\int_{\alpha}^{u_x} b_1(\gamma_7)\,du_x - \int_{\delta}^{u}\int_{\beta}^{u_y} b_{4y}\,du_y\,du -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\delta}^{u}\int_{\alpha}^{u_x} b_{2y}(\beta_6,\gamma_7)\,du_x\,du - \frac{1}{2}\int_{\beta}^{u}\int_{\gamma}^{u_z} b_{5y}(\beta_6)\,du_z\,du - u_y\int_{\beta}^{u_y} b_4\,du_y - \int_{\delta}^{u}\int_{\gamma}^{u_z} b_{6z}\,du_z\,du -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\delta}^{u}\int_{\alpha}^{u_x} b_{3z}(\gamma_7)\,du_x\,du - \frac{1}{2}\int_{\delta}^{u}\int_{\beta}^{u_y} b_{5z}(\alpha_5,\gamma_7)\,du_y\,du - u_z\int_{\gamma}^{u_z} b_6\,du_z + \int_{\delta}^{u} b_7\,du,$$

где, например, $b_6(\delta_4)$ означает, что в b_6 на месте четвертой переменной стоит δ, а остальные переменные не фиксированы.

Зарудняк Л.В., Стеценко В.Я. (Ставрополь)

О РАЗРЕШИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СХОДИМОСТИ МЕТОДА РЕДУКЦИИ

1. В теории бесконечных линейных алгебраических систем важную роль играют, с одной стороны метод редукции, а с другой стороны - признаки существования решения у этих систем.

В докладе приводятся новые результаты относительно метода редукции для операторных уравнений, из которых вытекают, в частности, как результаты о сходимости метода редукции в случае бесконечных систем, так и оценки погрешности метода редукции. Приводятся также новые признаки существования решения.

Все рассмотрения ниже приводятся в вещественном банаховом пространстве E, полуупорядоченном нормальным конусом K; A, B - линейные операторы, действующие в E. В докладе используется терминология теорем полуупорядоченных пространств.

2. Пусть последовательность линейных операторов B_n, действующих в E, сходится к линейному оператору B в одном из следующих смыслов:

A) B_n сходится к B сильно.

B) B_n сходится к B слабо.

C) B_n (o) - сходится к B.

Рассмотрим для заданных элементов f_n E последовательность уравнений

$$y = B_n y+f_n, \quad (n=1,2,\ldots), \qquad (1_n)$$

которые будем считать приближениями к заданному уравнению

$$x = Bx + f, \qquad (1)$$

при условии, что B_n сходится к B в одном из указанных выше смыслов, а f_n сходится к f в одном из следующих смыслов:

A_1) сильно; B_1) слабо; C_1) (o) - сходится.

В докладе устанавливаются условия при выполнении которых каждое из уравнений (1_n) имеет главное решение $x_в^{(n)}(f_n)$ причем эта последовательность сходится к галвному решению $x_в(f)$ уравнения (1) одним из указанных выше способов A_1) - C_1). При этом главным решением называется решение, полученное по методу последовательных приближений, начиная с нулевого приближения.

Змий Б.Ф., Оксиюк А.Г.(Воронеж)

Равноволновая аппроксимация заданной функции полиномами третьей степени

Функция $\tilde{F}(\omega, a_1 ... a_n)$ аппроксимирует вещественную функцию $F(\omega)$,заданную на интервале $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ в чебышевском смысле,если параметры $a_1, a_2 ... a_n$ определены так, что выполняется условие :

$$\min_{\bar{a}} \max_{\omega} \left| \tilde{F}(\omega) - \tilde{F}(\bar{a}, \omega) \right| < \varepsilon \quad . \qquad (1)$$

Аппроксимация функции $F(\omega)$ функциями Чебышева приводит к рациональной функции $\left|\tilde{F}\right|^2 = \left(1 + \varepsilon T_n(\omega)\right)^{-1}$ где: ε -величина погрешности аппроксимации, $T_n(\omega)$- полином Чебышева n-го порядка. Коэффициенты $a_1,...,a_n$ определяются на основании решения уравнения $1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega) = 0$.

В некоторых случаях,имеющих важное практическое применение в теории цепей,целесообразно решить задачу равноволновой аппроксимации функции $F(\omega) = 1$ на интервале $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ функциями третьего порядка.В этом случае задачу (1) необходимо решать при ограничениях на расположение корней аппроксимирующей функции при условии ,что

$$\bar{a} = \{a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{0m}, a_{1m}, a_{2m}\} \text{ и } F(\omega, \bar{a}) = \prod_i^m (x^3 + a_{2i} x^2 + a_{1i} x + a_{0i} \quad (2)$$

где: m-число множителей третьего порядка , $x = \omega^2$.

Решение задачи (1) с учётом (2) осуществлено численными методами с использованием модифицированного алгоритма Ремеза.Полученные полиномы третьего порядка (до m=4) дают возможность обеспечения равноволновой аппроксимации амплитудно-частотной характеристики фильтров с любыми требованиями к неравномерности затухания в полосе пропускания.Отличия полученных полиномов от полиномов Чебышева заключаются в большем количестве вещественных полюсов и соответственно несколько меньшей крутизной нарастания за пределами интервала аппроксимации при одном и том же пордке функции .

Литература

Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации . М.:Наука,1965,-408с.с илл.

Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей.:Учебник для вузов . М.: Радио и связь , 1986,-544с.:илл.

УДК 512.86:519.12

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОКСТЕРА

Золотухина О.Н., Субботин В.Ф.. Удоденко Н.Н. (Воронеж)

Пусть дан неориентированный граф G без петель и кратных ребер ($N = |G|$ - число вершин). Обозначим через A матрицу смежности (МС), а через C - матрицу преобразования Кокстера (ПК) (определения МС и ПК см. в [1] и [3]).

ТЕОРЕМА 1. [2] ПК C имеет собственное значение (с.з.) $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда МС имеет с.з. $\mu = 2$. Алгебраическая кратность $\mu = 2$ равна геометрической кратности $\lambda = 1$.

ТЕОРЕМА 2. [2] Пусть на графе G заданы две нумерации вершин, которым соответствуют ПК C_1 и C_2. Если $\lambda = 1$ - с.з. для C_1, то оно же будет с.з. для C_2, причем их геометрические кратности совпадают.

Известен пример графа и его нумераций вершин, при которых алгебраические кратности $\lambda = 1$ различны.

Пусть $\tilde{A}$ – кососимметрическая матрица, в верхнем треугольнике которой стоят элементы МС A.

ТЕОРЕМА 3. ПК имеет с.з. $\lambda = -1$ тогда и только тогда, когда $\tilde{A}$ имеет с.з. $\nu = 0$. Алгебраические и геометрические кратности $\lambda = -1$ и $\nu = 0$ совпадают.

Алгебраическая кратность $\lambda = -1$ меняется при перенумерации вершин.

Пусть ПК графа не имеет с.з. $\lambda = 1$. Описывается построение графа G_1 ($|G_1| = N + 1$), ПК которого имеет $\lambda = 1$ с геометрической кратностью 1. Если ПК имеет с.з. $\lambda = 1$ с геометрической кратностью $k > 1$, то путем удаления некоторых вершин можно построить графы $G_1, G_2, \ldots$, ПК которых имеют $\lambda = 1$ с геометрической кратностью $\leq k$.

Последняя процедура пригодна для ПК с $\lambda = -1$.

ЛИТЕРАТУРА. [1] Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. УМН, т.28, вып. 2 (170), 1973, с. 19-33. [2] Гриненко Е.Н., Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. О спектральных свойствах преобразований Кокстера и устойчивость рассинхронизованных систем. Воронеж, - 1992. Рукопись деп. в ВИНИТИ 26.05.92, N 1748-В92. [3] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применения. Киев, Наукова Думка, 1984, 384 с.

УДК 513.7. Зубков А.Н. (г.Таганрог).

О ВЫЧИСЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ОСНАЩЕНИЯ ПОЛОСЫ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ F^m В $V^n(K)$, $n>m$.

Рассматривается подмногообразие F^m класса C^k, $k \geq m+1$, в пространстве $V^n(K)$, $n>m$, постоянной кривизны $K = e r^2$, где $e=\pm 1$, $r>0$. Оно является базой своего касательного $T(F^m)$ и нормального $N(F^m)$ векторного расслоения, слоями которых являются соответственно касательное $T_x F^m$ и нормальное $N_x F^m$ векторные пространства, где $x \in F^m$, а $T_x F^m$, $N_x F^m \subset T_x V^n \subset R^{n+1}$. Кривая $\mathcal{L} \subset F^m$ вместе с $N_x F^m$, $x \in \mathcal{L}$, называется поверхностной полосой на $F^m \subset V^n(K)$. Она определяет однопараметрическое семейство реперов в сумме Уитни $P(F^m) \oplus P^\perp(F^m)$, где $P(F^m)$ - расслоение реперов в $T_x F^m$ и $N_x F^m$, $x \in \mathcal{L}$, соответственно. В $P(F^m)$ и $P^\perp(F^m)$ определяются связности ∇ и $\nabla^\perp$. Деривационные уравнения такого репера, связанного с $\mathcal{L} \subset F^m$, называются формулами Френе поверхностной полосы на F^m. С помощью этих формул и правила нахождения базисных инвариантов оснащения полосы на $F^m \subset V^n(K)$ [1], не зависящих от выбора её оснащения нормалями $\bar{e}_\alpha \subset N_x F^m$, $x \in \mathcal{L}$, $(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, доказывается

ТЕОРЕМА. Для получения алгебраических инвариантов оснащения полосы на подмногообразии F^m в $V^n(K)$, $n>m$, заданных на его касательном расслоении $T(F^m)$, нужно взять проекцию на $N_x F^m$, $x \in F^m$, абсолютной производной в связности $(\nabla \oplus \nabla^\perp)$ на F^m от некоторого векторного поля, заданного вдоль геодезической $\mathcal{L}_g \subset F^m$, проходящей через точку $x \in F^m$ в направлении $\bar{t} \subset T_x F^m$, $|\bar{t}| = 1$, и свернуть её по какому-либо правилу с другим контравариантным тензором в слое $N_x F^m$, $x \in \mathcal{L}_g$.

Например, если $\bar{H} = \sum_{\alpha=m+1}^{n} H^\alpha \bar{e}_\alpha$ – средний нормальный вектор для F^m в E^n, то мера бивектора $np_{N_x F^m} \frac{d\bar{H}}{ds}\Big|_{\mathcal{L}_g} \wedge \bar{H}$ даёт инвариант $\Gamma = \left[\sum_{\alpha=m+1}^{n} (H^{[\alpha} \nabla_s^\perp H^{\beta]})^2\right]^{1/2}$, который совпадает с инвариантом Швеца для F^2 в E^4 [2].

1 . Зубков А.Н. О системе базисных инвариантов оснащения полосы на подмногообразии F^m в $V^n(K)$, $n>m$, связанных с её кручениями. /Тезисы докладов Воронежской весенней матем.школы "Понтрягинские чтения - УI", Воронеж, 20-26.04.1995г., С. 37.

2 . Švec A. Global Differential Geometry of Surfaces. - VEB DVW, Berlin, 1981.

УДК 539.3,539.2

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Иванищева О.И.,Прибытков Ю.Н.,Трофимов В.Г.

Рассматривается приближенный метод оценки устойчивости статистически нелинейного дифференциального уравнения второго порядкас детерминированными граничными условиями.

Коэффициенты уравнения представляют собой случайные функции, которые можно рассматривать как результат прохождения нормальных белых шумовчерез некоторые линейные фильтры.

Расширение фазового пространства за счет координат, описывающих процессы в фильтрах,приводит к рассмотрению многомерной диффузионной марковской системы.

Решение заданного уравнения описывает эволюцию одной из компонент этой системы.

Исследуется стохастическая устойчивость системы в смысле [1]. Формулируются условия устойчивости нулевого решения на основе системыуравнений относительно моментных функций.

Проблема замыкания решается на основе гипотезы квазинормальности компонент марковской системы.К полученной после замыкания нелинейной системе применяется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Модель описывает задачу устойчивости пластины со стохастическими упругими и геометрическими характеристиками [2] и позволяет построить зависимость критической сжимающей силы от статистических характеристик параметров.

Литература.

1. Bolotin v.v. Reliability theory and stohastic Stability.- Stady on Stability.-Waterloo:Univ.of Waterloo Press,1971.
2. Иванищева О.И.,Трофимов В.Г. Об одной модели устойчивости пластины со стохастическими неровностями и микроструктурой. Всесоюзная конференция по математическому и машинному моделированию.1991.

Изотова И.В. (г. Ярославль)

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Исследуется устойчивость решений линейных уравнений

$$x_{n+1,m+1} = ax_{n+1,m} + bx_{n,m+1} + cx_{n,m}, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

возникающих в теории двумерной цифровой фильтрации. Анализируются различные краевые задачи. В качестве основных результатов для каждой из них получен соответствующий критерий устойчивости. Центральным моментом является выбор фазового пространства. К числу простых следует отнести три возможных случая, которые обусловлены выбором соответствующих краевых условий:

1. Условие Дирихле: $x_{n,p} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, (m = 0, 1, \ldots, p-1)$;
2. Условие Неймана: $x_{n,p-1} = x_{n,p}, n = 0, 1, \ldots, (m = 0, 1, \ldots, p-1)$;
3. Периодические граничные условия: $x_{n,m+p} = x_{n,m}, n, m = 0, 1, \ldots$.

Каждое из этих условий означает, что фазовое пространство является конечномерным. Тем самым, задавая $z_0 = (x_{0,0}; x_{0,1}; \ldots; x_{0,p})$, однозначно находим решение $x_{n,m}$ при $n > 0, \quad m = 0, \ldots, p$. 4. Для уравнения (1) естественной является ситуация, когда переменная m принимает все значения от 0 до ∞. Имея в виду конкретные приложения, представляется наиболее естественным ограничение вида: $x_{n,m} \to \infty, \quad n = 0, 1, \ldots$. Фазовое пространство в этом случае обозначим через L. Наиболее приемлемы метрики стандартных пространств L_1 или L_2. Как оказалось, краевое условие может быть недостаточно для определения решения $x_{n,m}$ уравнения (1). В этом случае необходимо существенно расширить фазовое пространство и отказаться от интерпретации индекса n, как аналога временного дискрета. В качестве фазового пространства приходится определять пространство M элементов $z_0 = (\ldots; x_{0,2}; x_{0,1}; x_{0,0}; x_{1,0}; x_{2,0}; \ldots)$, с краевыми условиями $|x_{0,j}| + |x_{j,0}| \to 0 \quad$ при $\quad j \to \infty$.

В каждом из отмеченных выше случаев получено полное описание спектра устойчивости соответствующих линейных операторов.

Иркин В. П. (Воронеж)

ГРАНИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Использование модулярной арифметики в спецвычислителях позволяет существенно повысить их быстродействие за счёт распараллеливания процесса обработки информации. Известны три принципа построения подобных вычислительных структур: сумматорный, табличный и матричного циркулянта, из которых наиболее разработанным является первый. Наряду с временными затратами при проведении вычислений важную роль играют и аппаратурные, тесно связанные с надежностными характеристиками спецЭВМ.

Формулируется задача минимизации аппаратурных затрат спецвычислителей, функционирующих в остаточной арифметике, для различных по величине разрядных сеток и принципов построения. В результате решения этой задачи определены граничные значения аппаратурных затрат и оптимальные величины уровней многоступенчатых спецЭВМ. Получены соотношения для временных затрат, анализ которых позволяет сделать вывод о возможности получения субоптимальных схемотехнических решений спецпроцессоров, основанных на различных принципах. Рассмотрены вопросы их комбинации в вычислительной структуре и приведены соответствующие параметры основных технических характеристик.

Определяются рациональные наборы модулей вычислительных структур, исходя из диапазона представления операндов и принципа реализации. Предлагаются интегральные критерии производительности для нетабличных вариантов перспективных алгоритмов функционирования. Рассматриваются проблемы и пути их преодоления, связанные с использованием позиционно-остаточных систем счисления.

Проведен сравнительный анализ граничных параметров модулярных структур с параметрами спецвычислителей, использующими позиционную систему счисления и систему счисления с иррациональными основаниями, результаты которого показывают целесообразность использования предлагаемого подхода к построению спецпроцессоров. Функциональные зависимости, полученные при решении задачи оптимизации позволили синтезировать конкретные вычислительные структуры с параметрами, близкими к граничным. Рассматриваются алгоритмы их работы, перспективы совершенствования и области применения такие, как оптические операционные устройства и сигнальные процессоры.

Каланчук Р.И. (Кемерово)

К ИССЛЕДОВАНИЮ МОНЖЕВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТЕПЕНИ ОДНОРОДНОСТИ 2.

Изучается геометрическая структура так называемых уравнений Монжа (С.Ли)

$$F(x, dx) = 0$$

однородных степени $k>1$ относительно дифференциалов dx.

В каждой точке области задания функции F возникает конус k – го порядка (конус Монжа). Среди множества интегральных кривых уравнения стандартным образом выделяются замечательные классы: геодезические "прямейшие" и "кратчайшие", асимптотические, линии кривизны 1 и 2 родов. В своё время ещё С.Ли выделил уравнение 2 – го порядка однородности

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varphi^2 (x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

которому соответствует уравнение в частных производных первого порядка

$$(p^2 + q^2 + 1)(|\nabla \varphi|^2 - 1) = (p\varphi_x + q\varphi_y + \varphi_z)^2$$

среди множества интегральных кривых которого каждая интегральная минимизирует функционал длины дуги, то есть является геодезической кратчайшей.

Доказано, что данное уравнение единственно, то есть уравнений Монжа отличных от вида (1) у которых имеется совпадение множества интегральных кривых и геодезических "кратчайших" нет.

Изучение уравнений Монжа 2 – го порядка однородности представляет особый интерес, так как в этом случае инвариантным образом возникает пфаффово распределение, ортогональное векторному полю осей локальных конусов Монжа, в подвижном репере уравнение которого

$$\theta^3 = 0 .$$

Уравнение монжева распределения

$$(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 - tg^2\alpha (\theta^3)^2 = 0 ,$$

где $\alpha = \alpha(x,y,z)$ функция полураствора конуса.

Данный переход позволяет описывать инварианты монжева распределения через инварианты пфаффова распределения и функцию α

В случае интегрируемости уравнения Монжа общее решение представляет собой двупараметрическое семейство поверхностей и тогда можно говорить о существовании однопараметрического семейства голономных пфаффовых распределений огибающих данное монжево распределение.

Для некоторых частных классов монжевых уравнений получены необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Все результаты обощаются на случай евклидовых пространств произвольной размерности.

Калинин А.В., Новоженов М.М., Морозов С.Ф., (Нижний Новгород)

Оптимальное управление квазистационарными магнитными полями в неоднородных изотропных средах.

Рассматривается задача оптимального управления системой уравнений Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\mathbf{J}(\mathbf{E}^{\text{CT}}) \equiv \int_{(0,T)\times\Omega} (\mathbf{H}(t,x) - g(t,x))^2 \to \inf,$$

где $\mathbf{H}$ - решение задачи:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J},$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

с граничными и начальными условиями:

$$\mathbf{H}_\tau(\mathbf{x},t) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \in (0,T), \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,|_{t=0} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega$$

при материальных соотношениях:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{CT}})$$

Здесь $\mathbf{E}^{\text{CT}}$, - управление.

Получены необходимые условия оптимальности и предложен алгоритм отыскания оптимального управления.

Калитвин А.С. (Липецк)

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Пусть T и S - множества с σ - конечными лебеговыми мерами, $U = U(T)$ и $V = V(S)$ - правильные банаховы идеальные пространства (БИП) с носителями T и S и K - оператор с частными интегралами

$$(Kx)(t,s) = Il(t,p)x(p,s)dp + Jm(s,q)x(t,q)dq,$$

где ядра $l(t,p)$, $m(s,q)$ и функция $x(t,s)$ измеримы на $T \times T$, $S \times S$ и $T \times S$ соответственно, а $I(J)$-интеграл Лебега по $T(S)$. К уравнению $\lambda x = Kx + f$ приводятся некоторые задачи механики сплошных сред. В отличие от интегральных операторов никакая гладкость ядер, вообще говоря, не обеспечивает даже непрерывность собственных функций оператора K. Поэтому изучение свойств оператора K и уравнения $\lambda x = Kx + f$ следует проводить в пространствах функций с требуемыми свойствами. Будем предполагать, что $l(t,p) \geq 0, m(s,q) \geq 0$ и интегральные операторы $(Lu)(t) = Il(t,p)u(p)dp, (Mv)(s) = Jm(s,q)v(q)dq$ действуют в БИП U и V соответственно. Тогда K ограничен в БИП со смешанной нормой $V[U], U[V]$ и обладает двойственным оператором $(K^*y)(t,s) = Il(p,t)y(p,s)dp + Jm(q,s)y(t,q)dq$.

Теорема. *Пусть $r(K), r(l), r(M)(r_c(K), r_c(L), r_c(M))$ - спектральные радиусы (радиусы Фредгольма) операторов K, L, M. Тогда справедливы утверждения: 1) $r(K) = r(L) + r(M)$; 2) если $(Lu)(t) \geq \alpha u(t), (Mv)(s) \geq \beta v(s)$, где $\alpha, \beta > 0$, а $u \in U, v \in V$ - положительные функции, то $r(K) \geq \alpha + \beta$; 3) если $r(L)$ и $r(M)$ - позитивные собственные числа (ПСЧ) операторов L и L^*, M и M^*, то $r(K)$ - ПСЧ операторов K и K^*; 4) если $r_c(L) < r(L), r_c(M) < r(M)$, то $r(K)$ - ПСЧ операторов K и K^*; 5) если L и M компактны и удовлетворяют условию 2), то верно 4); 6) если $\{\lambda : R(\lambda) = (\lambda I - L)^{-1} : U \to U\} = \{\lambda : R(\lambda)$ регулярен в $U\}$, $L(M) - u_0(v_0)$ положительный оператор, а $L^n(M^m)$ компактен при некотором $n(m)$, то $r(K)$ - простое ПСЧ оператора $K : U[V] \to U[V]$ и модули отличных от $r(K)$ собственных чисел оператора K меньше $r(K)$.*

Карапетянц А.Н., Ногин В.А. (Ростов-на-Дону)

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫХ С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ.

В рамках метода аппроксимативных обратных операторов (АОО) дана характеризация пространств двух типов, порождаемых вырождающимися дифференциальными операторами (дробного порядка): a) лиувиллевских пространств Никольского-Лизоркина комплексного порядка, b) областей определения комплексных степеней дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами и вырождающимися символами.

a) В анализе важную роль играют лиувиллевские пространства $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ Никольского-Лизоркина, которые могут быть определены следующим образом:

$$L^{\overline{\alpha}}_{p,r} = \{f : \; f \in L_r, \; F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + ... + |\xi_n|^{\alpha_n})Ff \in L_p\}, \; \alpha_j > 0.$$

Случай комплексных α_j, охватывающий, в частности, пространства риссовых, бесселевых, параболических потенциалов комплексного порядка ранее не рассматривался. Это связано с тем, что в случае комплексных α_j для описания пространств $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$ из-за того, что функция $|\xi_1|^{\alpha_1} + ... + |\xi_n|^{\alpha_n}$ может иметь нули в R^n, отличные от начала координат, неприменимы традиционные методы p-мультипликаторов и гиперсингулярных интегралов. Мы приводим описание пространств $L^{\overline{\alpha}}_{p,r}$, $\alpha_j \in C$, $Re\alpha_j > 0$ в терминах АОО

$$T^{\overline{\alpha}} f = \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon \to 0}} (F^{-1}(|\xi_1|^{\alpha_1} + ... + |\xi_n|^{\alpha_n}) \exp(-\varepsilon|\xi_1| - ... - \varepsilon|\xi_n|)) * f :$$

$$L^{\overline{\alpha}}_{p,r} = \{f : \; f \in L_r, \; T^{\alpha} f \in L_p\}, \; 1 < p \leq 2, \; 1 \leq r \leq 2.$$

b) Методом АОО получено также описание областей определения комплексных ($Re\alpha > 0$) степеней вырождающегося дифференциального оператора

$$-p(D) + c \cdot D, \tag{1}$$

$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $c = (c_1, ... c_n)$, $c_j \in C$, $p(x)$ - произвольная положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами. Отрицательные степени оператора (1) в рамках L_p-пространства реализуются в виде операторов типа потенциала $I^{\alpha}_c \phi$ с функцией Макдональда в ядрах и с символами

$$\dot{m}_{\alpha,c}(\xi) = (p(\xi) - ic \cdot \xi)^{-\alpha/2}, \; Rec = (Rec_1, ..., Rec_n) \neq 0, \; m_{\alpha,c}(\xi) = (p(\xi) - ic \cdot \xi - i0)^{-\alpha/2}, \; Rec = 0.$$

Построено обращение указанных потенциалов в виде АОО. Так, в случае $Rec \neq 0$ обратный оператор имеет вид

$$D^{\alpha}_c f = \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon \to 0}} (F^{-1}(p(\xi) - ic \cdot \xi)^{\alpha/2} (c \cdot \xi / (c \cdot \xi + i\varepsilon))^m \exp(-\varepsilon|\xi|^2)) * f,$$

$m > n - [Re\alpha/2]$. Получено также описание образа $I^{\alpha}_c(L_p)$ в терминах оператора D^{α}_c (фактически речь идет об описании областей определения комплексных степеней оператора (1)).

Карп Д.Б. /Владивосток/, Ситник С.М./Воронеж/.

ДРОБНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ .

Классическое преобразование Фурье включено в непрерывную группу операторов: дробное преобразование Фурье. В данной работе мы определяем дробное преобразование Ханкеля и рассматриваем некоторые из его приложений.

Определение 1 *Положим* $\nu > -1$, $Re\left(1 + i\cot\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, *тогда дробное преобразование Ханкеля (ДПХ) вводится по формуле*

$$(H_\nu^\alpha f)(x) = A_{\nu,\alpha}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}i\cot\frac{\alpha}{2}\left(x^2+t^2\right)\right)\sqrt{xt}J_\nu\left(C_\alpha xt\right)f(t)dt,$$

где $A_{\nu,\alpha} = \left(1+i\cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(-e^{i\alpha}\right)^{-\frac{\nu}{2}}$, $C_\alpha = \left(1+i\cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(-e^{i\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, J_ν *- функция Бесселя первого рода.*

В естественных ограничениях, наложенных на параметры и функции, имеет место следующая

Теорема 1 *Семейство операторов ДПХ образует группу по* α:

$$H_\nu^\alpha H_\nu^\beta = H_\nu^\beta H_\nu^\alpha = H_\nu^{\alpha+\beta}. \tag{1}$$

Производящий оператор группы H_ν^α - это дифференциальный оператор $A = -\frac{1}{4}L_\nu + \frac{1}{4}x^2 - \frac{\nu+1}{2}$, где $L_\nu = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}$ - оператор углового момента из квантовой механики. Таким образом, имеет место экспоненциальное представление $H_\nu^\alpha = exp(i\alpha A)$.

Групповое свойство (1) позволяет в явном интегральном виде найти любую степень оператора H_ν. В частности, можно вывести фомулу для квадратного корня из преобразования Ханкеля:

$$\left((H_\nu)^{\frac{1}{2}}f\right)(x) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{i}{2}(x^2+t^2)}(xt)^{\frac{1}{2}}J_\nu(\sqrt{2}xt)f dt.$$

Теорема 2 *Если* $Im\alpha < 0$, *тогда оператор ДПХ определен на плотном в* $L_2(0,\infty)$ *множестве и неограничен. Если* $Im\alpha > 0$, *тогда оператор ДПХ ограничен в* $L_2(0,\infty)$ *и его норма равна* 1. *Если* $Im\alpha = 0$, *тогда оператор ДПХ унитарен в* $L_2(0,\infty)$.

В отличие от классического случая, спектр H_ν^α в $L_2(0,\infty)$ довольно разнообразен. Для различных α он содержит вершины произвольных правильных n-угольников, единичную окружность, последовательности точек на действительной оси и логарифмической спирали, а также их предельные точки.

Установлены формулы операционного исчисления, с помощью которых дробное преобразование Ханкеля может быть применено для решения дифференциальных уравнений. Для демонстрации такого применения решены две модельные задачи для стационарного и нестационарного уравнений Шредингера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karp D., Sitnik S. The fractional Hankel transformation and its application to mathematical physics // Hokkaido Math. J. (in print, 1996), 15p.

2. Карп Д.Б. Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике//ДАН России,1994,338,№1,с.10-14.

PERTURBATION RESULTS FOR MAXIMAL MONOTONE AND M-ACCRETIVE OPERATORS IN BANACH SPACES

ATHANASSIOS G. KARTSATOS

Let X be a real Banach space and G a bounded, open and convex subset of X. The solvability of the fixed point problem $(*)$ $Tx + Cx \ni x$ in $D(T) \cap \overline{G}$ is considered, where $T : X \supset D(T) \to 2^X$ is a possibly discontinuous m-dissipative operator and $C : \overline{G} \to X$ is completely continuous. It is assumed that X is uniformly convex, $D(T) \cap G \neq \emptyset$ and $(T+C)(D(T) \cap \partial G) \subset \overline{G}$. A result of Browder, concerning single-valued operators T that are either uniformly continuous or continuous with X^* uniformly convex, is extended to the present case. Browder's method cannot be applied in this setting, even in the single-valued case, because there is no class of permissible homeomorphisms. Let Γ be the family of all $\beta : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$ such that $\beta(\rho) \to 0$ as $\rho \to \infty$. The effect of a weak boundary condition of the type $\langle u + Cx, x\rangle \geq -\beta(\|x\|)\|x\|^2$ on the range of operators $T + C$ is studied for m-accretive and maximal monotone operators T. Here, $\beta \in \Gamma$, $x \in D(T)$ with sufficiently large norm and $u \in Tx$. Various new eigenvalue results are given involving the solvability of $Tx + \lambda Cx \ni 0$ with respect to $(\lambda, x) \in (0,\infty) \times D(T)$.

Let $T : X \supset D(T) \to 2^X$ be m-accretive with $(T+I)^{-1}$ compact. Let $C : X \supset D(T) \to X$ be such that $C(I + \lambda T)^{-1} : X \to X$ is condensing for some $\lambda \in (0,1)$. Let $p \in X$ and assume that there exists a bounded open set $G \subset X$ and $z \in D(T)\bigcap G$ such that $C(D(T)\bigcap \overline{G})$ is bounded and

$$\langle u + Cx - p, j\rangle \geq 0,$$

for all $x \in D(T)\bigcap \partial G$, $u \in Tx$, $j \in J(x-z)$, where J is the duality mapping of X. Then $p \in (T+C)(D(T)\bigcap \overline{G})$. A basic homotopy result of the degree theory for $I - A$, with A condensing and $D(A)$ possibly unbounded, is used to improve and/or extend recent results by Hirano and Kalinde.

(Joint work with C. Liang) Control problems of the type

$$(*) \qquad x' + A(t,u)x = B(t)u, \quad t \in [0,T],$$

are considered, where, for every $(t,u) \in [0,T] \times X$, $A(t,u) : X \supset D^x(A) \to X$, $B(t) : X \to X$ are possibly nonlinear operators. It is shown that $(*)$ is controllable with pre-assigned responses under various assumptions on the operators $A(t,u)$, $B(t)$ The methods contain applications of the Leray-Schauder degree theory on appropriate homotopies.

Let H be a real Hilbert space such that $H = X \oplus Y$, where X, Y are closed subspaces of H. Let P_1, P_2 be the projection operators onto X, Y, respectively, and $G \subset H$ open and bounded with $0 \in G$. Let $T : H \supset D(T) \to 2^H$ be maximal monotone and $C : H \to H$ continuous and bounded. Under further assumptions, it is shown that the saddle point boundary condition

$$\langle u + Cx, (P_2 - P_1)x\rangle \geq 0, \quad x \in D(T) \cap \partial G, \; u \in Tx,$$

is sufficient for the existence of a zero of $T + C$ in G. Such saddle point conditions were recently introduced by Hirano in the perturbation theory of nonlinear maximal monotone operators. A localized version of the result of Hirano is given by using a variant of a homotopy which was recently introduced by the author.

С.А. Кащенко, Н.Л. Майорова (Ярославль)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

Асимптотическими методами исследуются вопросы динамики проведения возбуждения по нервному волокну. Согласно теории сальтаторного (скачкообразного) проведения, нервные импульсы (спайки) генерируются в определённых (коротких) участках - перехватах Ранвье - и распространяются по изолированному (миелинизированному) сегменту. Состояние волокна характеризуется локальным мембранным потенциалом, который считается однородным по радиальному сечению. Для потенциалов $v_1(t)$, $v_2(t)$ перехватов Ранвье будем использовать предложенные в [1] уравнения. Тогда для потенциала $u(x,t)$ миелинизированного сегмента возникает краевая задача:

$$\dot{u}=du''-\gamma u,\quad u'|_{x=0}=h(u|_{x=0}-v_1),\quad u'|_{x=1}=-h(u|_{x=1}-v_2), \tag{1}$$

$$Lv_1\equiv\dot{v}_1-\lambda[-1-f_{Na}(v_1)+f_K(v_1(t-1))]v_1=g(u|_{x=0}-v_1),$$

$$Lv_2=g(u|_{x=1}-v_2). \tag{2}$$

Положительные функции $f_{Na}(v)$ и $f_K(v)$ имеют конкретный нейрофизиологический смысл [1], причем $\alpha=f_K(0)-f_{Na}(0)-1>0$. Основное допущение состоит в том, что $\lambda>>1$. При этом условии рассматривается вопрос о существовании и устойчивости нелокальных периодических решений краевой задачи (1) - (2).

В [1] показано, что уравнение $Lv=0$ имеет периодическое решение импульсного типа. Амплитуда импульса $\approx\exp\lambda(f_K(0)-1)$, а продолжительность $\approx f_K(0)$. Промежутки между соседними по времени импульсами асимптотически одни и те же и неограниченно растут при $\alpha\to\infty$.

Показано, что при достаточно больших λ и при малых значениях d краевая задача имеет устойчивый колебательный режим (асимптотически близкий к периодическому), в котором спайки перехватов Ранвье перемежаются по времени. В зависимости от значений параметров d и γ следующий по времени спайк перехвата может быть вызван либо спайком другого перехвата, либо инерционными свойствами миелинизированного участка. В последнем случае колебательных режимов по крайней мере два.

1. Кащенко С.А., Майоров В.В. //Мат. модел., 1993, т. 5, N 12.

УДК 517.956.2

Киприянова Н.И. (Воронеж)

ТЕОРЕМА ГАРНАКА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим конечную область Ω^+ в $R^+_N = \{x = (x_1, \dots, x_N), x_i > 0\}$ с границей $\Gamma^+ \cup \Gamma^0$, где Γ^0 – часть границы, принадлежащая гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, а Γ^+ ортогональна этим гиперплоскостям в точках пересечения Γ^+ и Γ^0. Функция $u(x)$ называется В-гармонической в области Ω^+, если

$$\Delta_B u = 0,$$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{k_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad k_i > 0.$$

Дифференцирование, осуществляемое по переменным $x' = (x_1, \dots, x_n)$ посредством оператора $B^{\alpha} = (B_1^{\alpha_1}, \dots, B_n^{\alpha_n})$, будем называть В-производными порядка $2|\alpha|$.

Т е о р е м а.

Пусть $\{u_m(x)\}$ последовательность В-гармонических в Ω^+ функций, каждая из которых непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup \overline{\Gamma}^+ \cup \Gamma^0$. Если последовательность $\{u_m(x)\}$ раномерно сходится на $\overline{\Gamma}^+$, то

1) последовательность $\{u_m(x)\}$ равномерно сходится в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$;

2) предельная функция $u(x)$ В-гармонична в Ω^+;

3) в любой замкнутой подобласти $\overline{\Omega}_1^+ = \Omega_1^+ \cup \overline{\Gamma}_1^+ \cup \Gamma_1^0$ области Ω^+ производные по x'' и В-производные по x' любого порядка от $u_m(x)$ равномерно сходятся к соответствующим производным от предельной функции.

При доказательстве теоремы использован частный случай теоремы о среднем, полученной в [1].

Литература

1. Киприянова Н.И. Дифференц. уравнения. Т. XXI, № 11. 1985. С. 1998–2001.

Китаев Г.Ф., Жерегеля В.С., Петухова Г.Н.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО НАГРЕВА СЛОЯ ВАРЕНОЙ КРУПЫ В ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Большинство из известных моделей гигротермической обработки зерновых и гранулированных материалов затруднительно использовать для практических инженерных расчетов в широком диапазоне граничных условий режимов сушки. Для расчета времени нагрева вареных круп в поле токов высокой частоты составим тепловой баланс, сделав следующие дополнения и ограничения. Нагрев осуществляем при постоянной влажности и толщине слоя материала, постоянной частоте электрического поля, постоянных геометрических параметрах рабочего конденсатора в интервале температур от 20 до 80 $^{\circ}$C и величине термического к.п.д. η_t =0,95 %. С учетом указанных допущений, тепловой баланс при нагреве вареных круп в поле ТВЧ имеет вид :

$$Q_н = Q_v \cdot \tau - Q_u \qquad (1).$$

где $Q_н$ – количество тепла, необходимое для нагрева продукта ;

Q_v – количество тепла, выделяющееся в продукте ;

Q_u – потери тепла за счет испарения .

После преобразования формулы (1), получим формулу для определения τ :

$$\tau = \frac{C_м (t_к - t_н) \cdot \frac{1}{\eta_t} + (r + 0{,}056\, E_{св}) \cdot 0{,}02\, U_м}{0{,}556\, (E_м)^2 \cdot f \cdot K \cdot \frac{1}{\gamma_м} \cdot 10^{-1}} \qquad (2),$$

где τ – время нагрева крупы, с ;

$t_н, t_к$ – начальная и конечная температура материала ;

$E_{св}$ – удельная энергия на преодоление связи влаги с материалом, Дж/кмоль ;

0,056 – коэффициент, учитывающий молекулярный вес воды ;

$U_м$ – влагосодержание материала, кг/кг ;

$E_м$ – напряженность поля в материале, кВ/м ;

K – фактор потерь ;

$\gamma_м$ – насыпной вес продукта, кг/м ;

$C_м$ – теплоемкость материала, Дж/кг С .

Уравнение (2) справедливо для четырех видов варено-сушеных круп при ограничениях, расмотренных выше.

Расчетное значение τ для круп : гречневая ядрица, перловая № 1, рисовая сорт 1, пшеничная "Артек" (при нагреве в ВЧ-поле с f = 27 мГц), составило величину соответственно: 31с, 10,5с, 40с, 26с.

Козленко Л.А., Мартыненко Т.В., Новикова С.С.
(Воронеж)

О связи явления управляемости гиперболических систем с явлением резонанса, возникающего в этих системах.

Пусть Ω - область в R^n, с кусочно-гладкой границей Γ. Пусть состояние системы в каждый момент времени t определяется функцией $v(t,x)$, $x\in\Omega$, $t\in[0,+\infty)$, удовлетворяющей гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t,x) + Av(t,x) = 0, \tag{1}$$

начальным

$$v(0,x) = v_0(x) \in H^1(\Omega), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v(0,x) = v_1(x) \in L_2(\Omega), \tag{3}$$

и краевому условиям

$$\frac{\partial}{\partial n} v(t,s)\bigg|_{s\in\Gamma} = u_0(s)u(t). \tag{4}$$

Здесь A - эллиптический оператор, порожденный дифференциальной формой $\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ и краевым условием Неймана, $u(t) \in L_2[0,T]$, $u_0(s) \in L_2(\Gamma)$, $u(s)\equiv 0$ при $s \in \Gamma\setminus\Gamma_1$, где $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

В приложениях хорошо известны две задачи. Задача о стабилизируемости системы (1)-(4), и задача о нахождении параметра ω, при котором возникает явление резонанса в системе, описываемой уравнением (1) с краевым условием

$$\frac{\partial}{\partial n} v(t,s)\bigg|_{s\in\Gamma} = u_0(s)\cos(\omega t). \tag{5}$$

Установлен следующий факт.

Теорема : Для того, чтобы система (1)-(4) была почти стабилизируема при заданном способе управления (4) необходимо и достаточно, чтобы возникал резонанс при любых $\omega = \sqrt{\lambda_k}$, $k = \overline{1,\infty}$. Здесь $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность собственных чисел оператора A.

Кокурин М.Ю. (Йошкар- Ола)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1)]

Рассматривается линейная краевая задача

$$(Q\dot{x})(t)+A(t)x(a)=f(t)+(Fu)(t)+G(t)v,\ t\in[a,b];$$
$$\int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)ds+\Psi x(a)=\alpha+qu+Rv.$$

Здесь $x=x_{uv}\in(W_2^1)^n$ - функция состояния управляемой системы, пара $(u,v)\in\mathcal{D}=\{(u,v)\in L_2^n\times R^k:\ \|u\|_{L_2^n}\le\rho,\|v\|_{R^k}\le\tau\}$ описывает управление. Предполагается, что Q, F - нетеровы операторы, действующие из L_2^n в L_2^n, $f\in L_2^n$, матрицы $A(t),G(t),\Phi(t)$ размерностей $n\times n$, $n\times k$, $m\times n$ имеют суммируемые с квадратом компоненты; Ψ, R - постоянные матрицы размерностей $m\times n$, $m\times k$; $\alpha\in R^m$, $q:L_2^n\to R^m$ - линейный непрерывный вектор - функционал. Исследуется задача

$$\min_{(u,v)\in\mathcal{D}}\mathcal{J}(u,v),\quad \mathcal{J}(u,v)=\|x_{uv}-x^\circ\|^2_{(W_2^1)^n}+(Nu,u)_{L_2^n}+(Mv,v)_{R^k},$$

где $x^\circ\in(W_2^1)^n$ - заданная вектор- функция; $N^*=N:L_2^n\to L_2^n$,

$$M^*=M:R^k\to R^k,\ N\ge\nu_1 I_{L_2^n},\ M\ge\nu_2 I_{R^k};\ \nu_1,\nu_2>0;\ \|x\|^2_{(W_2^1)^n}\triangleq\|\dot{x}\|^2_{L_2^n}+\|x(a)\|^2_{R^n}.$$

Обозначим $z^\circ(t)=\dot{x}^\circ(t)$, $\beta^\circ=x^\circ(a)$ и введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(z,\beta,u,v;\lambda,\mu,p,q)=\|z-z^\circ\|^2_{L_2^n}+\|\beta-\beta^\circ\|^2_{R^n}+(Nu,u)_{L_2^n}+(Mv,v)_{R^k}+$$
$$+(Qz+A(t)\beta-f(t)-Fu-G(t)v,p)_{L_2^n}+(\Phi z+\Psi\beta-\alpha-qu-Rv,q)_{R^k}+$$
$$+\lambda(\|u\|^2_{L_2^n}-\rho^2)+\mu(\|v\|^2_{R^k}-\tau^2);\ \lambda,\mu\in R^1_+,\ p\in L_2^n,\ q\in R^k.$$

Критерий оптимальности управления $(u_*,v_*)\in\mathcal{D}$ и состояния $x_*(t)=\int_a^t z_*(s)ds+\beta_*$, $z_*(t)=\dot{x}_*(t)$, $\beta_*=x_*(a)$, устанавливает

Теорема. Найдутся такие $(\lambda^*,\mu^*,p^*,q^*)\in R^1_+\times R^1_+\times L_2^n\times R^k$, что при $(z,\beta,u,v;\lambda,\mu,p,q)=(z_*,\beta_*,u_*,v_*;\lambda^*,\mu^*,p^*,q^*)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}=0;$$
$$\lambda^*(\|u_*\|_{L_2^n}-\rho)=0,\ \mu^*(\|v_*\|_{R^k}-\tau)=0.$$

Исследуется гладкость оптимального управления u_* в зависимости от свойств исходных данных.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства РФ (грант NMW 000)

О минимумах отделенной квадратичной формы на центральном кубе

Колмыков В.А. (Воронеж)

Пусть G - граф, $V(G)$ - множество его вершин. Взвешиванием графа называется отображение

$$M : V(G) \times V(G) \longrightarrow \mathbf{R},\ M : (u,v) \longmapsto M_{uv},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $M_{uv} = M_{vu}\ \ \forall u, v \in V(G)$;

2) Если u и v - различные вершины, не соединенные ребром, то $M_{uv} = 0$.

Кординаты вектора $x \in \mathbf{R}^{V(G)}$ в стандартном базисе будут обозначаться x_v, где $v \in V(G)$.

Пусть G - взвешенный граф с взвешиванием M. Формой, ассоциированной с этим взвешенным графом G, называется отображение $M_G : \mathbf{R}^{V(G)} \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$M_G(x) = \sum_{u,v \in V(G)} M_{uv} x_u x_v.$$

Форма M_G называется *отделенной*, если веса графа G распределены следующим образом:

1) веса всех вершин равны 1;

2) веса всех ребер меньше или равны $-\frac{1}{2}$.

Нас будут интересовать свойства точек минимума отделенной формы M_G на кубе $K_\alpha(G) = \{x \in \mathbf{R}^{V(G)} | 1 \le x_u \le \alpha \forall u \in V(G)\}$.

Если f - вещественная функция, определенная на множестве E, а P - подмножество E, то множество точек минимума f на P обозначается $\operatorname*{Min}_P f$. Т.е. $\operatorname*{Min}_P f = \{x \in P | f(x) \le f(y) \forall y \in P\}$.

Определим множество главных вершин графа G. Это множество определяется индуктивно:

1) все вершины степени ≥ 3 являются главными. Если uv - концевое ребро, $\deg v = 1$, $M_{uv} \le -1$, то v - главная вершина. Если uv - не концевое ребро, $M_{uv} \le -\frac{3}{4}$, то u и v - главные вершины;

2) если u и v - главные вершины, то любая вершина любого пути P_{uv} (соединяющего u и v) является главной.

ТЕОРЕМА. Пусть G - взвешенный граф, не являющийся цепью и трехлучевой звездой $Z(1,1,n)$ с длинами лучей $1,1,n$; M_G - ассоциированная с ним отделенная форма, $\alpha \in [1,2]$, $x \in \operatorname*{Min}_{K_\alpha(G)} M_G$. Тогда $x_u = \alpha$ для любой главной вершины u.

УДК 519.175

Колмыков В.А., Меньших В.В., Субботин В.Ф. (Воронеж)

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ БАЗИСОВ ЦИКЛОВ ГРАФОВ

При решении задачи восстановления параметров электрических сетей по некоторому подмножеству известных параметров возникает необходимость изучения базисов циклов графов [1] и интегралов по этим циклам [2]. (Значимость изучения циклов и интегралов по ним особенно проявляется при практическом применении законов Кирхгофа). В [3] показано, что знание значений интегралов на произвольном базисе циклов позволяет определить значение интеграла на любом цикле. Однако практическое использование полученных там результатов ограничено громоздкостью вычислений. В связи с этим представляется перспективным использовать при решении задач восстановления не произвольные базисы, а базисы со специальными свойствами (гомогенные, фундаментальные), обеспечивающими более простое выражение циклов через базис или имеющих менее сложный алгоритм их построения. Поэтому возникают задачи изучения различных типов базисов циклов и взаимосвязей между ними.

1. Простые циклы графа z_i и z_j [1] называются гомогенными друг другу ($z_i H z_j$), если $z_i \cap z_j$ - простая цепь, содержащая хотя бы одно ребро. ($\oint_{z_i+z_j} d\mu$ наиболее просто выражается через $\oint_{z_i} d\mu$ и $\oint_{z_j} d\mu$, если $z_i H z_j$ [4]). Многократно суммируя гомогенные циклы можно получить гомогенную оболочку H(M) данного множества циклов M. Базис циклов называется гомогенным (однородным), если его гомогенная оболочка содержит все простые циклы графа [4].

Фундаментальный базис циклов - это базис, порожденный любым остовным деревом графа [1]. (Алгоритм построения фундаментального базиса имеет небольшую вычислительную сложность).

Теорема. Любой фундаментальный базис является гомогенным [5].

2. В связи с рассмотрением указанной проблемы возникают следующие практически важные задачи.

1) На множестве базисов естественно действует группа $GL(c, Z_2)$, где c - цикломатическое число графа, $Z_2=\{0,1\}$. Найти как можно большую подгруппу H в $GL(c, Z_2)$, такую, что из гомогенности базиса B следует гомогенность любого базиса из орбиты H(B).

2) Найти гомогенное разложение произвольного цикла по фундаментальному базису.

1. Кристофидес Н. Теория графов. М.: Мир, 1978.

2. Боровских А.В., Колмыков В.А. Интегрирование по дискретным мерам на графах. Тезисы докладов ВЗМШ-1995. Воронеж, 1995, с. 49.

3. Колмыков В.А. Редукции интеграла и канонический вид дискретных мер на графах. Там же, с.124.

4. Колмыков В.А., Субботин В.Ф. Фундаментальные, гомогенные и интегральные базисы циклов на графах. Там же, с. 127.

5. Меньших В.В., Субботин В.Ф. Об условиях сопряженности преобразований Кокстера и подобия ориентаций. Воронежский госуниверситет, 1985. Деп в ВИНИТИ 29.12.85, №8974-В.

Колногоров А. В. (Новгород)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ЦЕЛЕСООБРАЗНОМ УПРАВЛЕНИИ СРЕДНИМ УРОВНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

Под случайными помехами понимается последовательность случайных величин $\{\xi_n;\ n=1,2,3,\dots\}$, распределения которых зависят только от выбираемого в текущий момент времени варианта. Количество вариантов равно двум. Если в момент времени n выбран вариант l, то $E_l\xi_n=0$, $E_l\xi_n^2=\sigma_l^2$, ($\sigma_1\neq\sigma_2$), где E_l - знак математического ожидания относительно распределения, соответствующего варианту l.

Под целесообразным управлением понимается такое, при котором предельная средняя дисперсия меньше среднего арифметического дисперсий за отдельные варианты. Для этого на отрезке $[-X,+X]$ с отражающими экранами в граничных точках порождается следующее случайное блуждание $\{\eta_n;\ n=1,2,3,\dots\}$. Положим $\eta_1=0$ и далее $\eta_{n+1}=\eta_n+\xi_n$, если $|\eta_n+\xi_n|<X$ и $\eta_{n+1}=\eta_n$ в противном случае. Выбор вариантов определен правилом: если $\eta_n>0$, то выбирается первый вариант, если $\eta_n<0$ то второй, при $\eta_n=0$ варианты выбираются произвольно.

Сделаем замену переменных $x=\eta X^{-1}$, $t=n X^{-2}$. Тогда при $X\to+\infty$ существует предельная плотность распределения $u(t,x)$, которая является решением следующей краевой задачи ($\sigma(x)=\sigma_1$ при $x>0$, $\sigma(x)=\sigma_2$ при $x<0$)

$$u'_t(t,x)=\frac{\sigma^2(x)}{2}u''_{xx}(t,x),\quad |x|\le 1,\ x\neq 0,$$

$$u'_x(t,+1)=u'_x(t,-1)=0,\quad \sigma_2^2u(t,-0)=\sigma_1^2u(t,+0),$$

$$u(0,x)=\hat{c}(x).$$

Кроме того при всех $t>0$ выполняется условие

$$\int_{-1}^{+1}u(t,x)\,dx=1.$$

Находятся фундаментальное решение и стационарное распределение для указанной задачи. Предельная средняя дисперсия равна среднему гармоническому дисперсий за отдельные варианты, т.е. $\sigma^{-2}=(\sigma_1^{-2}+\sigma_2^{-2})/2$. Отсюда следует целесообразность алгоритма, кроме того предельная средняя дисперсия не превосходит удвоенной величины меньшей из дисперсий σ_1^2, σ_2^2.

Коновалова Д.С./Владивосток/, Ситник С.М./Воронеж/

ФОРМУЛА ТЭЙЛОРА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА БЕССЕЛЯ .

Объектом изучения является пара интегральных операторов

$$(\mathcal{D}_{b-}(\alpha,\beta,\nu) f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+2\alpha)} \int_x^b \left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{\beta+2\alpha-1} y^{1-2\alpha} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta+\alpha+\frac{\nu-1}{2},\ \alpha\\ \beta+2\alpha\end{matrix}\Big| 1-\frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\,dy, \quad (1)$$

$$(\mathcal{D}_{a+}(\alpha,\beta,\nu) f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+2\alpha)} \int_a^x \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{\beta+2\alpha-1} x^{1-2\alpha} \, {}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta+\alpha+\frac{\nu-1}{2},\ \alpha\\ \beta+2\alpha\end{matrix}\Big| 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\,dy, \quad (2)$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция Гаусса, а также формально сопряжённые к ним. Эти операторы на подходящих функциях являются отрицательными дробными степенями оператора Бесселя $B_\nu = y^{-\nu} d/dy\, y^\nu\, d/dy$, и одновременно обобщают дробные интегралы и операторы Эрдейи-Кобера.

Основной результат- формула Тэйлора с оператором Бесселя (справедливая при очевидных ограничениях)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\Gamma(2k-1)} \left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2k-2} {}_2F_1\left(\begin{matrix}k+\frac{\nu-1}{2},\ k-1\\ 2k-1\end{matrix}\Big| 1-\frac{x^2}{b^2}\right) \cdot \left(B_\nu^{k-1} f\right)\Big|_b - \frac{1}{\Gamma(2k)} \left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix}k+\frac{\nu-1}{2},\ k\\ 2k\end{matrix}\Big| 1-\frac{x^2}{b^2}\right) \cdot \left(DB^{k-1} f\right)\Big|_b \right\} + \frac{1}{\Gamma(2n)} \int_x^b \left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2n-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix}n+\frac{\nu-1}{2},\ n\\ 2n\end{matrix}\Big| 1-\frac{x^2}{y^2}\right) B^k f(y)\,dy.$$

Таким образом, интегральные операторы(I-2)являются ядрами остаточных членов приведённых формул Тэйлора.

Авторами также изучены формулы Тэйлора для более общего дифференциального оператора, получены формулировки в терминах функций Лежандра, построены резольвенты, формулы композиций и связи разносторонних операторов, обоснованы приложения к решению сингулярных уравнений В-эллиптического типа по методу конечных элементов и Бубнова-Галёркина.

Корытова М.А. (Челябинск)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть L_p^n, $1\leqslant p<\infty$ - пространство функций $x:[0,1]\to R^n$, суммируемых со степенью p, $\|x\|_{L_p^n}=\left[\int_0^1|x(s)|^p ds\right]^{1/p}$.

Рассматривается задача управления

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+\int_0^t d_sR(t,s)x(s)=G(t)u(t)+v(t),\ t\in[0,1] \qquad (\mathrm{I})$$

с краевыми условиями

$$x(0)=\alpha_1,\quad x(1)=\alpha_2 \qquad (2)$$

Элементы r_{ij} матрицы R удовлетворяют следующим условиям: $r_{ij}(\cdot,s)$ и $\rho_{ij}(\cdot)=\underset{s\in[0,1]}{var}\ r_{ij}(\cdot,s)\in L_1^1$, $i,j=\overline{1,n}$; для любого $t\in[0,1]$ $r_{ij}(t,\cdot)$ - кусочно-непрерывные слева функции; $R(t,1)\equiv 0$; элементы g_{iq} матрицы G - кусочно-непрерывные слева функции, $q=\overline{1,m}$.

Получены реализуемые конструктивные теоремы о разрешимости задачи управления (1,2).

На основе этих теорем разработаны и реализованы средствами систем аналитических вычислений алгоритмы исследования разрешимости таких задач.

Приводятся иллюстрирующие примеры.

Доказана теорема о принципиальной возможности установления факта разрешимости для любой разрешимой задачи управления (I),(2) с использованием предлагаемой схемы.

К задаче Коши для абстрактного уравнения Бесселя

Костин В.А.(Воронеж)

В банаховом пространстве B рассматривается задача Коши

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t) = A\,u\,(t) \qquad (1)$$

$$u(0)=y\ ,u'(0)=0,\ \text{где } k\geq 0,\ t>0. \qquad (2)$$

Определение 1.Функция $u(t)$ со значениями в B называется решением задачи (1)-(2), если: 1) $u(t)$ сильно непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на любом конечном промежутке в $[0,\infty)$; 2) $u(t)\in D(A)$, при любом $t>0$; 3) $u(t)$ удовлетворяет (1)-(2).

Определение 2. Задача Коши (1)-(2) равномерно корректна, если для любого y D(A) она имеет решение и $\lim\limits_{t\to 0_+}\|u(t)-y\| = 0$, равномерно на любом компакте из $[0,\infty)$.

Теорема 1. Задача (1)-(2) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A - генератор полугруппы $U(z)$ аналитической в полуплоскости $\arg|z|<\frac{\pi}{2}$ и выполняется оценка

$$\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\|\exp(\tau\lambda^2)K(\lambda\ ,t)\lambda R(\lambda^2)yd\lambda\|\leq M(t)\|y\|,$$

равномерно для всех $\tau\in(0,\varepsilon)$.

Из этой теоремы следует

Теорема 2. Пусть $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, оператор Лапласа в $C(R^n)$ и $A=\Delta^{2m+1}$ — его нечетная степень ($m=0,1,\ldots$), тогда задача (1)-(2) равномерно корректна в том и только в том случае, когда $(n+1)\leq(2m+1)(k+2)$, при этом положительным начальным функциям $y(x)$ соответствуют положительные решения $u(t,y)$.

Литература.

В.А.Костин, ДАН СССР, 1989, т.307, N4, с.786-799.

В.А.Костин, ДАН СССР, 1991, т.319, N1, с.38-41.

Кострюков С. А., Пешков В. В., Шунин Г. Е. (Воронеж)

ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ И ЗАДАННЫМИ СКАЧКАМИ ПОТЕНЦИАЛА НА РАЗРЕЗАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим уравнение Лапласа для многосвязной области

$$\Delta\Psi = 0 \tag{1}$$

с однородным краевым условием Неймана и условием скачкообразного изменения потенциала на некоторой поверхности разреза S:

$$\Psi|_{S_+} - \Psi|_{S_-} = I \tag{2}$$

(Здесь $\Psi|_{S_+}$ и $\Psi|_{S_-}$ — значения потенциала на двух различных сторонах поверхности S). Поверхность разреза S проводится так, чтобы область вместо многосвязной стала односвязной. Подобных разрезов, на каждом из которых потенциал терпит свой скачок, может быть несколько. Такая задача, как известно из теории потенциала, имеет однозначное решение, не зависящее от формы выбранной поверхности разреза.

Учет условия скачкообразного изменения потенциала приводит к модификации системы линейных алгебраических уравнений в методе конечных элементов. Выделим два элемента l и m, имеющие общие узлы i и j, которые лежат на поверхности разреза S. Условие (2) требует модификации локальных матриц элементов, имеющих узлы на S и находящихся только по одну сторону относительно S. Пусть видоизменению подлежит локальная матрица элемента l. Тогда в правой части уравнения, соответствующего любому узлу k этого элемента в глобальной системе, появится дополнительный член:

$$-(Q_{ki} + Q_{kj})I,$$

где Q – локальная матрица жесткости элемента l. В результате решения этой системы получим, как обычно, набор узловых значений Ψ_m. Однако при вычислении потенциала внутри l в качестве узловых значений, соответствующих узлам i и j, следует брать Ψ_i+I и Ψ_j+I соответственно.

Рассмотренная формулировка задачи была использована для компьютерного моделирования системы проводов в сверхпроводящей полости.

УДК 531.383 Котов П.А.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Динамика широкого класса систем управления описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами с учетом воздействия диссипативных сил, пропорциональных первой степени скорости изменения управляемой величины. Практический интерес представляет вопрос исследования динамики следящей системы с нелинейным поведением динамических характеристик чувствительного элемента.

В зависимости от назначения к чувствительным элементам систем управления подвижных объектов предъявляются различные требования с точки зрения как их статических характеристик (динамика и точности измерения, линейности характеристик и др.), так и динамических (частоты собственных колебаний, степени затухания-демпфирования, полосы пропускания и динамических ошибок в заданном диапазоне частот). Для определения основных параметров широко применяется качественное исследование моделей движения систем и их элементов.

Исследуются фазовые троектории и область устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения, которым описывается динамика исследуемой системы с учетом нелинейности демпфирования, пропорционального целой положительной степени скорости изменения управляемой величины.

КРУГЛИКОВ С.В.(Екатеринбург)

О СВОЙСТВЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ КАЧЕСТВА

Рассматривается формализация понятия разделения экстремальных задач в гарантированной постановке для линейных систем, качество функционирования которых оценивается экстремальным значением выпуклого функционала [1]. Принята следующая операторная схема формализации.

Задача 1 *Пусть заданы некоторые гильбертовы пространства X, Y, Z, $\hat{Z}$; семейство $\mathbb{U}$, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}(Y,\hat{Z})$, операторов U и отображение A, $A : \mathbb{U} \to \mathbb{C}(X,Y)$. Среди всех U, $U \in \mathbb{U}$, найти такой оператор U_*, что выполняется условие*

$$-\infty < \sup_X\{\varphi(F\eta + G_0 \circ U_* \circ A(U_*)\eta) - \theta(\eta)\} = \min_{\mathbb{U}} \sup_X\{\varphi(F\eta + G_0 \circ U \circ A(U)\eta) - \theta(\eta)\} < +\infty,$$

Выпуклые, собственные, слабо замкнутые функционалы φ и θ моделируют оценку качества функционирования системы и ограничение на неопределенные параметры, соответственно. Аналогичные постановки при $\varphi(\zeta) = <\zeta,\zeta>_Z$ и $\theta(\eta) = \gamma < \eta,\eta>_X$, исследуются в теории H_∞-оптимального управления [2].

Наряду с задачей 1 рассмотрим две частные согласованные постановки. Одна из них отвечает случаю гарантированных задач априорного оценивания при заданном управлении. Вторая соответствует задаче управления на основе полных измерений.

Предположение 1 *Пусть $\hat{X}$ — гильбертово пространство и заданы операторы F_1, F_2, B_1, B_2, $F_1 \in \mathbb{B}(X,\hat{X})$, $F_2 \in \mathbb{B}(\hat{X},Z)$, $B_1 \in \mathbb{B}(\hat{Z},\hat{X})$, $B_2 \in \mathbb{B}(\hat{X},Y)$, такие, что $F = F_2 \circ F_1$, $B = B_2 \circ B_1$.*

Задача 2 *Пусть предположение 1 выполнено, задан оператор $U \in \mathbb{U}$ и некоторое, отвечающее U, семейство $\mathbb{H}(U) \subseteq \mathbb{B}(Y,\hat{X})$. Среди всех H, $H \in \mathbb{H}(U)$, найти оператор $H_*(U)$ такой, что выполняется условие*

$$-\infty < \sup_X\{\hat{\varphi}(F_1\eta + B_1 \circ U \circ A(U)\eta - H_*(U) \circ A(U)\eta) - \theta(\eta)\} =$$
$$= \min\nolimits_{\mathbb{H}(U)} \sup\nolimits_X \{\hat{\varphi}(F_1\eta + B_1 \circ U \circ A(U)\eta - H \circ A(U)\eta) - \theta(\eta)\} < +\infty.$$

Задача 3 *Пусть выполнено предположение 1. Кроме того определены семейство $\hat{\mathbb{U}}$ операторов $\hat{U}$, $\hat{U} \in \mathbb{B}(\hat{X},\hat{Z})$, и отображение $\hat{G}$, $\hat{G} : \hat{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}(\hat{Z},Z)$, сопоставляющее каждому $\hat{U}$ некоторый оператор $\hat{G}(\hat{U})$. Среди всех $\hat{U} \in \hat{\mathbb{U}}$ найти $\hat{U}_*$ такой, что выполняется условие*

$$-\infty < \sup_{\hat{X}}\{\varphi(F_2\hat{\eta} + \hat{G}(\hat{U}_*) \circ \hat{U}_*\hat{\eta}) - \hat{\theta}(\hat{\eta})\} = \min_{\hat{\mathbb{U}}} \sup_{\hat{X}}\{\varphi(F_2\hat{\eta} + \hat{G}(\hat{U}) \circ \hat{U}\hat{\eta}) - \hat{\theta}(\hat{\eta})\} < +\infty.$$

Определение 1 *Для задачи 1 справедлив принцип разделения, если существует решение U_*, удовлетворяющее операторному уравнению*

$$U_* = \hat{U}_* \circ H_*(U_*),$$

где $\hat{U}_*$ — решение задачи 3, а $H_*(U)$ — решение задачи 2 при фиксированном операторе $U \in \mathbb{U}$.

Приведены условия на элементы формализации задач 2 и 3 достаточные для выполнения свойства разделения. В качестве примера рассмотрена задача о построении управления оптимального по квадратичному критерию качества для линейной системы с неопределенными параметрами в гарантированной постановке.

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности.- М.: Наука, 1977.
2. **Basar T., Bernhard P.** H_∞ – optimal control and related minmax design problems. A dynamic game approach.- Boston MA: Birkhauser, 1991.

УДК 514.7+514.8+531.1 Крутов А.В. (Воронеж)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЭВОЛЬВЕНТ

Эвольвентами данной кривой будем называть кривые, лежащие на поверхности касательных данной кривой и пересекающие эти касательные под прямым углом.

Угловой скоростью переменного вектора $\mathbf{a}(p)$ /1/ будем называть вектор $\mathbf{a}\times(d\mathbf{a}/dp)/\mathbf{a}^2$. Угловая скорость базиса равна угловой скорости неизменного по направлению вектора в этом базисе, ортогонального угловой скорости базиса.

Нормированная угловая скорость первого орта базиса Френе данной последовательной эвольвенты некоторой кривой или второго орта или всего самого базиса Френе предыдущей эвольвенты есть орт бинормали последующей эвольвенты.

Линией откоса или обобщенной винтовой линией называют кривую, у которой отношение кривизны k к ее кручению $\varkappa$ есть величина постоянная. Известно, что касательная во всех точках линии откоса составляет с некоторым неизменным направлением в пространстве один и тот же угол. Нетрудно показать, что этим неизменным направлением является вектор Дарбу угловой скорости триэдра Френе кривой и что имеет место следующая теорема. Для того, чтобы кривая являлась линией откоса, необходимо и достаточно, чтобы направление ее вектора Дарбу $\Omega_1=\varkappa_{11}\tau_1+k_{11}\beta_1$ в пространстве было неизменно.

Эвольвента линии откоса совпадает с соответствующей эвольвентой ее проекции на ортогональную вектору Дарбу Ω_1 плоскость, если совпадают исходные точки этих эвольвент.

Линия кривизны поверхности с нормалью ν является эвольвентой кривой, базисом Френе которой является базис Дарбу $-\nu,\tau,-\mathbf{b}$, ($\mathbf{b}=\nu\times\tau$) линии кривизны, который можно рассматривать в качестве примера нулевого базиса последовательности базисов кривой /2/, в то время как первым служит базис Френе $\tau,\mathbf{n},\beta$ этой линии кривизны.

Если отношение нормальной и геодезической кривизн вдоль линии кривизны величина постоянная, то эта линия кривизны есть плоская кривая и значит является одновременно геодезической.

Литература: 1. Крутов А.В. Кинематическая интерпретация основных понятий теории кривых//Современные проблемы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тез. докл. школы.- Воронеж, ВГУ, 1995. - С.136. 2. Крутов А.В. Аналог натуральных и алгоритм построения координатно-параметрических уравнений базовых кривых одного класса// "Понтрягинские чтения - IV": Тезисы докладов школы. - Воронеж: ВГУ, 1993. - 220 с.

Кряжимский А. В. (Лаксенбург, Австрия),
Максимов В. И. (Екатеринбург, Россия),
Самарская Е. А. (Лаксенбург, Австрия)

РЕКОНСТРУИРУЕМОСТЬ ИНТЕНСИВНОСТИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Обсуждается задача реконструкции переменной интенсивности точечных источников по результатам неточных измерений характеристик фазовых траекторий. Методологически эта задача относится к категории обратных задач динамики для систем с распределенными параметрами.

Сначала обсуждается проблема наличия необходимой информации о реальных источниках, которая в принципе позволяет осуществить процесс реконструкции по данным наблюдений. Затем указываются два численных алгоритма решения задачи реконструкции, основанные на методе динамической регуляризации и аппарате теории некорректных задач. Эти алгоритмы позволяют вычислять приближения для текущих входных воздействий посредством конечномерных операций. Поскольку первый алгоритм работает при особых условиях, мы дополняем его вторым, применимым для общего случая. В последней части сообщения один из предложенных алгоритмов иллюстрируется на модельном примере, просчитанном для случая, когда рассматривается математическая модель процесса переноса загрязняющей субстанции грунтовыми водами, интегрированная в информационную систему по контролю. Эта модель и информационная система, озаглавленная **XGW: A Prototype Expert System User Interface Interactive Modeling of Groundwater Contamination**, были разработаны в IIASA, проект "Advanced Computer Applications". Данная математическая модель представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения жидкости и перенос загрязнения в неограниченном водном регионе.

Для первых двух авторов работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

Кузютин Д.В.[1] (Санкт-Петербург)

О СВОЙСТВАХ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЗИЦИОННЫХ ИГР

В докладе обсуждается новое свойство динамической совместимости [4] решений позиционных игр Γ со многими участниками, предъявляющее к используемому принципу оптимальности более жесткие требования, чем известное свойство сильной динамической устойчивости [5, 3]. Введенное свойство обеспечивает согласованность "локально-оптимального" поведения и исходных требований оптимальности. Исследуется динамическая совместимость равновесия по Нэшу, Парето-оптимального множества и связанных решений для конечных игр в развернутой форме [2]. Кроме того, получены новые достаточные условия существования единственного (в смысле выигрышей игроков) абсолютного равновесия в играх с полной информацией.

Показано, что множество $U_P(\Gamma)$ ситуаций, оптимальных по Парето, в общем случае является динамически несовместимым. В то же время, существуют нетривиальные подмножества $U_P(\Gamma)$, обладающие свойством динамической совместимости. Таким образом, понятие динамической совместимости порождает новый обоснованный подход к сужению множества оптимальных ситуаций в позиционной игре. Обсуждаются возможности нарушения динамической совместимости равновесия по Нэшу в играх с полной информацией, приведены конкретные примеры многошаговых игр с отмеченной особенностью.

Пусть, далее, Γ – конечная игра с полной информацией, $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, P_i – множество очередности игрока i, $h_i(x)$ – выигрыш игрока i в окончательной позиции x, $T(\Gamma_m)$ – множество окончательных позиций некоторой подыгры Γ_m.

Т е о р е м а. Если для каждого игрока $i \in N$, в каждой подыгре Γ_m, $m \in P_i$, для всех $x, y \in T(\Gamma_m)$ выполнено следующее условие:

$$\Big[h_i(x) = h_i(y)\Big] \Longrightarrow \Big[h_j(x) = h_j(y)\ \forall j \in N\Big],$$

то игра Γ имеет единственное (в смысле выигрышей) абсолютное равновесие.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical Control Problems. Springer, 1987.
[2] Kuhn H.W.// Contrib. to the Theory of Games,II. Princeton, 1953, 193-216.
[3] Кузютин Д.В.// Техническая кибернетика. 1994, N 5, 242-247.
[4] Кузютин Д.В. Устойчивость решений в позиционных играх. СПб, 1995.
[5] Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. World Scientific, 1993.

[1]Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 96-01-00398).

Кулишова О. Н. (Москва)

О НЕСТАНДАРТНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

В докладе предлагается процедура дифференцирования негладких функций с разрывами первого рода на не более чем счетном множестве точек. Для этого приводится описание самой процедуры дифференцирования и связанного с ней пространства обобщенных функций. Для такого типа функций распространяется понятие вариации и приводятся аналоги классических теорем о функциях ограниченной вариации, включая линейность пространства этих функций.

Предлагается процедура обратная к квазидифференцированию, осуществляемая простой модификацией интеграла Римана.

Для введенных обобщенных функций и их производных устанавливается аналог теоремы Ролля и связь знака производной с монотонностью. Приводится аналог известной теоремы Пойя об оценке суммарной кратности производной по числу нулей исходной функции.

Далее показывается, что алгебраическое дифференцирование обычного полинома заключается в сдвиге коэффициентов в его представлении по формуле Тейлора и имеет точный аналог в процедуре дифференцирования для введенных выше обобщенных функций.

Полученные результаты демонстрируется на многочисленных примерах.

В заключении рассматривается приложения квазидифференцирования к задачам оптимального управления.

Данная работа проведена под руководством проф. Покорного Ю. В. (Воронеж).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. "Математическая теория оптимальных процессов.", Москва, Наука, 1983.

2. Покорный Ю. В., Об интегральном представлении систем Маркова. ДАН, 335, №1, 1994, с. 17-20.

3. Филиппов А. Ф. "Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью", Москва, Наука, 1985.

УДК 517.9:621.039

Кузнецов Ю.А. (Нижний Новгород)

ОСНОВЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работах [1,2] описаны некоторые классы нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений математической физики со специальными свойствами входящих в них операторов и выделены соответствующие им классы нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве. В докладе излагаются результаты исследования разрешимости и качественных свойств решений указанных классов эволюционных уравнений по следующим направлениям.

1. Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров максимального (непродолжимого) решения задачи Коши. Признаки существования и несуществования глобальных решений, основанные на предположениях о порядках роста по различным нормам нелинейных операторов. Ограниченность решений.

2. Принцип сравнения и вопросы разрешимости и качественные свойства решений нелинейных эволюционных уравнений. Метод векторфункций А.М.Ляпунова. Операторные неравенства, односторонние и двусторонние оценки решений в полуупорядоченных банаховых пространствах. Положительные решения и их продолжимость. Линейные положительные функционалы как функционалы А.М.Ляпунова в исследовании продолжимости положительных решений. Положительные решения, определенные на ограниченном интервале времени.

3. Качественные свойства решений нелинейных задач математической физики. "Естественная" полуупорядоченность фазового пространства и связанные с ней свойства нелинейных операторов.

Литература

1. Кузнецов Ю.А. Математические задачи динамики ядерных реакторов.- М.: Энергоатомиздат, 1994. - 384с.
2. Кузнецов Ю.А. Методы качественной теории нелинейных эволюционных уравнений и динамика ядерных реакторов.//"Современные методы в теории краевых задач". (Тезисы докладов ВВМШ). Воронеж: ВГУ, 1992.- с.127.

А.А.Ларин (Воронеж)

О ТЕОРЕМАХ ОГРАНИЧЕНИЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

Пусть $E^+_{n+1} = \{(x, y): x \in E_n, y > 0\}$, $n \geqslant 1$, S^+_n - часть единичной сферы в E_{n+1} с центром в нуле, расположенная в E^+_{n+1}, $L_{p,\nu} = L_p(E^+_{n+1}; d\mu = y^{2\nu+1}dy\,dx)$, $L_{2,\nu}(S^+_n) = L_2(S^+_n; d\mu = y^{2\nu+1}dS)$, где ν - вещественное число, большее $-1/2$. Символом F_ν обозначим интегральное преобразование Фурье-Бесселя, построенное с помощью нормированной функции Бесселя $j_\nu(y)$ ($j_\nu(y) = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\mathcal{J}_\nu(y)/y^\nu$, где $\mathcal{J}_\nu(y)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν).

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть p - произвольное число, принадлежащее сегменту $[1, 2(n+2\nu+3)/(n+2\nu+5)]$, и пусть $f \in L_{p,\nu}$. Тогда $F_\nu f \in L_{2,\nu}(S^+_n)$ и с некоторой постоянной C, не зависящей от функции f, выполняется неравенство

$$\| F_\nu f \|_{L_{2,\nu}(S^+_n)} \leqslant C \, \| f \|_{L_{p,\nu}} .$$

Замечание. Легко строится пример, показывающий, что показатель суммируемости p в данной теореме увеличить нельзя.

Аналогичное утверждение доказано и для n - мерного анизотропного преобразования Бесселя.

УДК 536.24

Левицкий С.П., Шабунина З.А., Полев В.А. (Воронеж)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ПАРООБРАЗОВАНИИ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО РАСТВОРА

Рассматривается процесс испарения из плоского горизонтального слоя полимерного раствора конечной толщины, имеющего в начальный момент времени постоянную температуру T_0 и концентрацию k_0. На свободную поверхность начинает действовать постоянный тепловой поток q, под действием которого происходит испарение растворителя и нагрев жидкости. Диффузионный поток n, согласно /1/, описывается уравнением

$$n = -\rho \int_0^t \mu(t - t') \nabla k\,(t', x)\, dt,$$

$$\mu(t) = D_1\, \delta(t) + \frac{D_0 - D_1}{\lambda} \exp(-t/\lambda),$$

где $\mu(t)$ – функция памяти при одном времени релаксации λ, ρ – плотность раствора, D_1, D_0 – мгновенный и равновесный коэффициенты диффузии. Система уравнений, описывающая задачу включает в себя уравнения теплопроводности, диффузии, а также уравнение движения границы.

При описании процесса учитывается неравновесность фазовых переходов, связанную с тем, что количество пара, испаряющегося с поверхности зависит от кинетических возможностей паровой фазы. Как и в /2/, используется уравнение Герца-Кнудсена-Ленгмюра. В полной постановке задача может быть решена только численно, однако рассматривая тепло- и массоперенос на начальной стадии, решение которой находится с помощью преобразований Лапласа. Анализ полученных решений показывает, что релаксационные эффекты при диффузии испаряющегося компонента к межфазной границе могут существенно снизить скорость парообразования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 95-02-06-073.

Литература

1. Neogi P. Anomalous diffusion of vapors throudh polymers // AIChE J. - 1983. - V. 29, N 5. - P. 829-833.
2. Levitskiy S.P., Shulman Z.P. Bubbles in polymeric liquids. Dynamics and heat-mass transfer. - Lancaster-Basel: Technomic Publish. Co.- 1995, - 287 p.

УДК 517.982 Лепский А.Е. /Таганрог/

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Придерживаясь обозначений и терминологии работы [1], введем следующие определения. Пусть E - локально выпуклое пространство (л.в.п.) с топологией τ. Последовательность $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ в E называется Макки-сходящейся к x (обозначение: $x^{(n)} \xrightarrow{M} x$), если существует такая числовая последовательность $(\lambda_n)_n$, $\lambda_n \to 0$, что $\lambda_n^{-1}(x^{(n)}-x) \to 0$ в (E,τ) при $n\to\infty$. Подмножество A пространства E называется М-замкнутым, если из $(x^{(n)})_n \subset A$, $x^{(n)} \xrightarrow{M} x$ при $n\to\infty$ следует, что $x \in A$. М-замкнутые подмножества пространства E удовлетворяют аксиомам замкнутости для топологии, которая обозночается τ_M. Если $\tau=\tau_M$, то пространство (E,τ) называется супериндуктивным. Пространство Фреше и сильно двойственное к пространству Фреше-Шварца являются супериндуктивными.

Будем говорить, что метризуемое пространство E обладает (К)-свойством ((K_M)-свойством), если для любого компакта Q из E существует сходящаяся (М-сходящаяся) к нулю последовательность $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $Q \subset \mathrm{con}\,|\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}|$. Заметим, что любое банахово пространство удовлетворяет (К)-свойству (см.[2], стр.144).

Если Q - абсолютно выпуклое замкнутое множество в л.в.п. E, то через E_Q будем обозначать банахово пространство $\bigcup_{n=1}^{\infty} nQ$ с топологией нормы $q_Q(\cdot)$ - функционала Минковского. Справедлива

Теорема. Если л.в.п. E удовлетворяет (K_M)-свойству, то для любого компакта K из E существует абсолютно выпуклое компактное множество Q в E такое, что K является компактом в банаховом пространстве E_Q.

Следствие. Пусть E - супериндуктивное л.в.п.. Для того, чтобы пространство E обладало (К)-свойством необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта K из E существовало абсолютно выпуклое компактное множество Q из E такое, чтобы K было компактным в E_Q.

Литература

1. Dineen S. Complex analysis in locally convex spaces. - Amsterdam: North-Holland Pub. Co. - 1981. - 492 с.

2. Шефер Р. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971. - 360 с.

Конечномерные редукции для сверхтекучей фазы гелия

В.Н.Ливина (Воронеж)

В соответствии с общей теорией сверхтекучести гелия, переход температуры через критическое значение приводит к бифуркации параметра порядка, определяющего фазовое состояние гелия. Допустимые значения параметра порядка задают функцию, являющуюся решением уравнения Гинзбурга-Ландау или, что эквивалентно, экстремалью его потенциала, равного функционалу свободной энергии [1]. Общая аналитическая форма функционала энергии рассмотрена в работе В.Л.Голо [2]. В работах Абрикосова, Климова, Бобылева, Брезиса и др. были исследованы экстремали некоторых разновидностей этого функционала при периодических краевых условиях и краевых условиях типа Дирихле на ограниченных областях. В этих работах использовались как алгебраические, так и аналитические методы.

Доклад посвящен бифуркациям экстремалей функционала Гинзбурга-Ландау с лагранжианом вида $\frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + \frac{\lambda}{4}(1 - |\varphi|^2)^2$, в котором φ - параметр порядка. В трехмерном случае установлена фредгольмовость нелинейного оператора $F(\varphi)$ Эйлера-Лагранжа для указанного функционала в соболевских пространствах функций W_2^m, $m \geq 3$, на гладких областях в $\mathbf{R}^3$ (x, y, z) при краевых условиях Дирихле. Рассмотрена задача бифуркации по параметру λ от нулевого решения для шаровой области, на которой линеаризованное уравнение Эйлера-Лагранжа имеет нечетнократные собственные подпространства, порождаемые функциями Бесселя. На основе аналитического метода Ляпунова-Шмидта доказано, что соответствующие собственные значения являются точками бифуркации решений уравнения Гинзбурга-Ландау. Для круговой области (в плоском случае) вычислены асимптотические представления параметра порядка по закритическому приращению температуры. Будет также рассмотрен вопрос нелокальной конечномерной редуцируемости уравнения Гинзбурга-Ландау.

Автор выражает признательность научному руководителю проф. Ю.Г.Борисовичу и проф. Ю.И.Сапронову за обсуждение результатов работы.

Литература: *[1] Абрикосов А.А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы // ЖЭТФ, 1957, т.32, в.6, 1442-1452. [2] Голо В.Л. Геометрические методы в теории сверхтекучего гелия-3 // сб. Топологические и геометрические методы в математической физике. Воронеж, изд-во ВГУ, 1983, с.26-41. [3] Brezis H. Lecture Notes on Ginzburg-Landau Vortices, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1995.*

АНАЛИЗ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ КОНТРОЛЕПРИГОДНЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Ломакина Л.С.

Россия, 603600, Н.Новгород, ул. Минина, 24, НГТУ,
факультет радиоэлектроники и технической кибернетики,
кафедра вычислительной техники, тел./8312/ 36 82 28

Разработаны методы и алгоритмы обеспечения контролепригодности и синтеза контролепригодных сложных систем, в том числе, технологических процессов и программных средств, которые представляют собой объединенные в структуру блоки или могут быть описаны объединенными в структуру параметрами.

Если блоки пронумеровать от I до n и каждому поставить в соответствие 0 или I в зависимости от того исправен или неисправен блок, то получим последовательность из нулей и единиц, которая описывает состояние системы. Определение состояния системы является основной целью разработанных средств диагностики.

В качестве исходной модели системы выбрана матрица проверок, которая отражает структуру системы и описывает математический канал связи между состояниями системы и результатами измерения параметров в организованных для этой цели точках контроля. Результат измерения принимается равным I, если контролируемый параметр вышел из допуска и нулю в противном случае. Номер столбца матрицы соответствует номеру блока, а номер строки - номеру точки контроля. Элементы матрицы могут принимать два значения I и 0. Элемент матрицы равен I, если параметр в соответствующей точке контроля выходит из допуска при отказе соответствующего блока и равен 0 в противном случае.

На основании введенного информационного критерия, который позволяет учесть вероятности отказов блоков, вводится количественная характеристика глубины определения состояния системы и решены следующие задачи:

- определение минимального множества точек контроля, необходимого для обеспечения заданной глубины диагностирования;
- определение глубины диагностирования при заданном множестве точек контроля;
- распределение элементов системы по конструктивным блокам с целью повышения контролепригодности;
- принятие решения о состоянии системы по критерию максимума апостериорной вероятности.

Лубенец Ю.В. (Липецк)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ОТОБРАЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ ПРЕДЕЛОВ

Рассмотрим обратные последовательности $\{X_k, f_{k,k+1}\}$ и $\{Y_k, g_{k,k+1}\}$, где X_k, Y_k - метризуемые компакты и $f_{k,k+1}: X_{k+1} \to X_k$ и $g_{k,k+1}: Y_{k+1} \to Y_k$ - отображения. Хорошо известно, что обратные пределы $X = \varprojlim \{X_k, f_{k,k+1}\}$ и $Y = \varprojlim \{Y_k, g_{k,k+1}\}$ являются также метризуемыми компактами. Пусть для всех k определены отображения $h_k: X_k \to Y_k$. Исследуется вопрос, при каких условиях отображения h_k будут индуцировать предельное отображение $h: X \to Y$ и в каких случаях это отображение будет инъективным или сюръективным. Некоторые частные случаи этой задачи рассматривались М.Брауном, Дж.Дж.Уолшем, А.Н. Дранишниковым, автором и другими.

Введём обозначения: $f_{j,k} = f_{j,j+1} \ldots f_{k-1,k}$, $g_{j,k} = g_{j,j+1} \ldots g_{k-1,k}$; $f_k: X \to X_k$ и $g_k: Y \to Y_k$ - предельные проекции; ε_k и δ_k - некоторые числовые последовательности; $d(x,y)$ - расстояние.

Для существования отображения $h: X \to Y$ достаточно выполнение условий:

(1) для любого $x \in X_{k+1}$ $d(h_k f_{k,k+1}(x), g_{k,k+1} h_{k+1}(x)) < \varepsilon_k$,

(2) для любых $k > j$ и $y_1, y_2 \in Y_k$ из $d(y_1, y_2) < \varepsilon_k$ следует $d(g_{j,k}(y_1), g_{j,k}(y_2)) < \varepsilon_j/2^{k-j}$.

Если, кроме этого, выполнены условия:

(3) для любых $k > j$ и $x_1, x_2 \in X_k$ из $d(x_1, x_2) < 4\delta_k$ следует $d(f_{j,k}(x_1), f_{j,k}(x_2)) < 4\delta_j/2^{k-j}$,

(4) для любых $x_1, x_2 \in X_k$ из $d(h_k(x_1), h_k(x_2)) < 4\varepsilon_k$ следует $d(x_1, x_2) < 4\delta_k$,

отображение $h: X \to Y$ является инъективным.

Для сюръективности отображения h достаточно того, чтобы отображения h_k были включениями и выполнения условий (1), (2), (3) и, кроме того, условия:

(5) для любого $y \in Y_k$ существует такой $x \in X_k$, что $d(y_k, h_k(x)) < \varepsilon_k$.

Любасова Г.Ю. (Старый Оскол)

О БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение

$$\dot{u} = f(u,\varepsilon)\ ,\ f(0,\varepsilon) = 0\ ,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

для которого выполнен принцип сведения Плисса.

Предположим, что линеаризация $\frac{\partial f}{\partial u}(0,\varepsilon)$ имеет n пар комплексно сопряженных собственных значений, трансверсально пересекающих при $\varepsilon = 0$ мнимую ось без сильных резонансов. Пусть остальные точки спектра имеют отрицательные действительные части.

В рассматриваемых условиях ставится вопрос о бифуркации из нуля инвариантных торов.

После приведения уравнения (1) к нормальной (частично) форме на центральном многообразии и полярной замене координат получим систему

$$\dot{r}_j = \varepsilon_j r_j + r_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\varepsilon) r_k^2 + R_j(r,\varphi,\varepsilon)$$

$$\dot{\varphi}_j = \beta_j(\varepsilon) + r_j \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(\varepsilon) r_k^2 + r_j^{-1}\Phi_j(r,\varphi,\varepsilon)$$

$$j = 1, \ldots, n$$

Изучение инвариантных торов этой системы начинается с построения инвариантных торов огрубленной системы, после чего выясняются условия "сохранения" торов при возвращении к исходной системе.

Доказаны теоремы о существовании одномерных и двумерных торов для полной системы при $n = 3$. (Существование n-мерных инвариантных торов n-мерной системы доказано в работах Бибикова Ю.Н.)

Ляховецкий Г.В. / Манчестер /, Ситник С.М./Воронеж/

Приложения гипергеометрических функций к аналитическому и приближенному вычислению одного класса интегралов в задачах расчета конструкций на упругом основании.

Как указано в [1], большой класс задач о расчете изгиба пластинок, стержней и штампов на упругом основании при использовании различных моделей приводит к необходимости вычисления интегралов типа

$$A(x) = \int_0^\infty \frac{y^\alpha J_\nu(xy)dy}{P(y)},$$

где J_ν - функция Бесселя, P - многочлен 2, 3 или 4 степени. Через интеграл A выражаются прогиб, давление, угол поворота, изгибающий момент, поперечная сила и другие характеристики. В [1] описаны также некоторые простейшие численные методы и таблицы для A.

Авторами получены следующие две группы результатов.

1) Проведено вычисление интегралов типа $A(x)$ при различных P, ν, α^* в терминах гипергеометрической функции Гаусса и новых введенных авторами обобщенных гипергеометрических функций от нескольких переменных. Эти функции вводятся при помощи ассоциированной матрицы коэффициентов, содержащей ψ- функции. Описаны особенности и асимптотики $A(x)$ при $x \to 0, x \to \infty$. Вычисления основаны на знаменитой теореме Л.Дж. Слейтер - О.И. Маричева, для данного класса задач приводящей к сложному случаю логарифмических расходимостей.

2) Полученные формулы содержат быстросходящиеся при всех x ряды; в типичном случае это ряды ${}_0F_5$ с общим членом $\sim \frac{x^k}{(k!)^5}$. На основе этих разложений построены эффективные простые численные методы расчета $A(x)$, для значений P, ν, α из физических моделей построены графики и расчитаны таблицы. О сложностях, возникающих при прямом расчете $A(x)$ по квадратурным формулам см. также [1] и цитированную там литературу.

Литература.

1. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. / Москва, 1960, ГИФМЛ.

Майорова С. П. (Воронеж)

О СПЕКТРЕ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В работах [1,2] для неосциллирующего на конечном интервале (a,b) дифференциального оператора $Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x$ с суммируемыми коэффициентами установлен факт осцилляционности спектра краевой задачи

$$Lx = \lambda \frac{q(t)}{(b-t)^n (t-a)^n u(t)} x \tag{1}$$

при духточечных и многоточечных краевых условиях Валле-Пуссена. Предполагалось, что q(t) сохраняет знак на (a,b) и $|q(t)| \le C(t-a)^\gamma (b-t)^\sigma$ при некоторых положительных γ и σ. Функция u(t) подбирается так, что отношение G(t,s)/u(t) сохраняет знак на (a,b) при каждом фиксированном s, где G(t,s)- функция Грина оператора L. В случае двухточечных краевых условий u(t)=1.

В докладе обсуждается осцилляционность спектра переопределенной краевой задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1), решение которого удовлетворяет краевым условиям

$$x(a) = x'(a) = \ldots = x^{(p-1)}(a) = x(b) = x'(b) = \ldots = x^{(q-1)}(b) = 0, \; p+q=n \tag{2}$$

и дополнительным условиям в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ($a < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < b$) вида

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha_i x^{(i)}(a_j - 0) + \beta_i x^{(i)}(a_j + 0) \right] = 0 \tag{3}$$

В предположении, что функция Грина Г(t,s) задачи (1) - (3) удовлетворяет специальным оценкам, установлено следующее утверждение.

Теорема. Переопределенная задача (1) - (3) имеет осцилляционный спектр.

Доказательство опирается на теорему 2 работы [3].

Литература.

1. Майорова С. П. // Воронеж. ун-т. Воронеж, 1992.- 29 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ 30.11.92, №3394- В92.

2. Майорова С. П.//Тез. докл. школы "Понтрягинские чтения-IV"/ Воронеж, 1993.- С. 125.

3. Майорова С. П.//Тез. докл. школы "Современные проблемы механики и математической физики"/ Воронеж, 1994.- С. 66.

Мамонов С.С. /Рязань/

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКАМИ РАВНОВЕСИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Исследуется система уравнений вида

$$\dot{x} = A(x)\cdot x, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ – $n\times n$ -матрица, $A(0)=0$. Для изучения системы (1) используется решение матричного уравнения Ляпунова

$$B^T H + H B = M, \qquad (2)$$

где $M = S\cdot\Lambda\cdot S^T$, $B = S^{T^{-1}} A\cdot S^T$, $\Lambda = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $A = \alpha_0 \mathfrak{I} + \mathfrak{J}$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha = 2\alpha_0$, $\mathfrak{I}$ –единичная матрица, $\mathfrak{J}$ – матрица у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю, $S = S_{n,n-1}\cdot S_{n-1,n-2}\cdot S_{n,n-1}\cdot\ldots\cdot S_{2,1}\times$ $\times S_{3,2}\cdot\ldots\cdot S_{n,n-1}$, матрица $S_{i,i-1}$ имеет диагональные элементы равные единице, элемент $s_{i,i-1} = \alpha^{-1}$, а все остальные элементы равны нулю. Решение H уравнения (2) имеет вид $H = diag\left(\varepsilon_1\cdot\alpha^{-1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\alpha^{-(2n-(2i-1))}\right)$. В частности рассматривается случай, когда в уравнение (2) входят матрицы размерности 2×2, $x\in\mathbb{R}^2$, $\alpha_0 = g_0(x)$, $g(x) = 2\cdot g_0(x)$. Пусть матрица $P(x) = diag(f(x)^{-1}, 1)$, $f(x)\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_1 = \alpha_1 f(x)^2\cdot g(x)$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 g(x) - \alpha_1 f(x)^2\cdot g(x)^{-1}$, α_1, $\alpha_2\in\mathbb{R}$, тогда с помощью преобразования $P(x)$ уравнение (2) запишется в виде.

$$A(x)^T\cdot D + D\cdot A(x) = \Lambda(x),$$

где $D = diag(\alpha_1, \alpha_2)$, $A(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) & f(x) \\ 0 & g_0(x)\end{pmatrix}$, $\Lambda(x) = \begin{pmatrix}\alpha_1 g(x) & \alpha_1 f(x)\\ \alpha_1 f(x) & \alpha_2 g(x)\end{pmatrix}$.

Для системы (1) с найденной матрицей $A(x)$ рассматривается функция Ляпунова $V(x) = x^T D x$, производная которой в силу системы (1) имеет вид $\dot{V}(x) = x^T\Lambda(x)x$. Используется функция $V(x)$ и критерий Сильвестра для матрицы $\Lambda(x)$ при изучении устойчивости состояния равновесия и наличия предельных циклов системы (1).

УДК 517.95

Мартынов И.П., Соболевский С.Л. (Гродно)

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$u^2 u_x u_{xxt} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right) u^2 u_{xx} u_{xt} + a_1 u u_x u_t u_{xx} + a_2 u u_x^2 u_{xt} + a_3 u_x^3 u_t + F, \qquad (\mathrm{I})$$

где a_1, a_2, a_3 зависят от x, t, $\nu \in \mathbb{Z}$, F – полином четвертой степени по $u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$ с коэффициентами, являющимися вместе с a_1, a_2, a_3 аналитическими функциями по x, t в некоторой области.

Предположим также, что решения (I) не имеют подвижных нулей и подвижных полярных особенностей. При этих условиях выделим уравнения вида (I) со свойством Пенлеве.

Из предположения найдем, что $a_1 + a_2 = 1 + \frac{2}{\nu}$, $a_3 = -1 - \frac{1}{\nu}$.

Упрощенным для (I) будет уравнение

$$u^2 u_x u_{xxt} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right) u^2 u_{xx} u_{xt} + \left(\frac{1}{\nu} + \ell\right) u u_x u_t u_{xx} + \left(1 + \frac{1}{\nu} - \ell\right) u u_x^2 u_{xt} - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) u_x^3 u_t, \qquad (2)$$

$$\ell = \ell(x_0, t_0),$$

инвариантное относительно преобразования

$$(x, t, u) \longrightarrow (x_0 + \alpha x, t_0 + \alpha t, u), \text{ где } \alpha \text{ – параметр.}$$

Для решения сформулированной выше задачи необходимо, чтобы (2) имело свойство Пенлеве.

<u>Лемма</u>. Для наличия у (2) свойства Пенлеве необходимо, чтобы

$$\ell \equiv 0$$

<u>Теорема</u>. Уравнение

$$u^2 u_x u_{xxt} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right) u^2 u_{xx} u_{xt} + \frac{1}{\nu} u u_x u_t u_{xx} + \left(1+\frac{1}{\nu}\right) u u_x^2 u_{xt} - \left(1+\frac{1}{\nu}\right) u_x^3 u_t + a u u_x (u u_{xx} - u_x^2) + b u u_x (u u_{xt} - u_x u_t) + \frac{c}{\nu} u^2 u_x^2,$$

где a, b, c – произвольные функции от x, t, аналитические в некоторой области, имеет свойство Пенлеве.

Мелихов С.Н. (Ростов-на-Дону)

ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ элементов локально выпуклого пространства $\mathcal{H}$ (над полем $\mathbb{C}$) называется абсолютно представляющей системой (АПС) в $\mathcal{H}$, если всякий элемент $f\in\mathcal{H}$ можно разложить в абсолютно сходящийся (к f) в $\mathcal{H}$ ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k$, $c_k\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$. Наиболее изученными АПС, не являющимися базисами, являются АПС из экспонент в пространствах аналитических и бесконечно дифференцируемых функций. В пространствах распределений АПС, не являющиеся базисами, до сих пор не исследовались. Известны только результаты о разложении в ряды Фурье периодических распределений. В настоящем докладе излагаются результаты об АПС из обобщенных экспонент, допускающих нетривиальные разложения нуля, в пространстве распределений на кубе $\mathbb{T}(a):=[-a,a]^p$, $a>0$, $p\in\mathbb{N}$, в $\mathbb{R}^p$.

Положим $\mathcal{D}(\mathbb{T}(a)):=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^p)\mid \operatorname{supp} f\subseteq \mathbb{T}(a)\}$ ($\mathcal{D}(\mathbb{T}(a))$ наделяется естественной топологией пространства Фреше); $\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$ - сильное сопряженное к $\mathcal{D}(\mathbb{T}(a))$ пространство. Обобщенные экспоненты $e_\lambda\in\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$ определим равенствами $e_\lambda(f):=\int f(x)\exp(-i\langle\lambda,x\rangle)dx$, $f\in\mathcal{D}(\mathbb{T}(a))$, где $\langle\lambda,x\rangle:=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j$, $\lambda\in\mathbb{C}^p$, $x\in\mathbb{R}^p$. Пусть

$$\widehat{\mathcal{F}}(a):=\{f\in A(\mathbb{C})\mid \exists k\in\mathbb{N}: \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|(1+|z|)^{-k}\exp(-a|\operatorname{Im} z|)<+\infty\};$$

$\mathcal{L}_j\in\widehat{\mathcal{F}}(a)$, $1\le j\le p$; $(\lambda_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ - все нули функции $\mathcal{L}_j$, причем каждый из них простой; $\lambda_{(n)}:=(\lambda^{(j)}_{n_j})_{j=1}^p$, $n\in\mathbb{N}^p$.

В работе установлены условия на функции $\mathcal{L}_j$, при которых система $(e_{\lambda_{(n)}})_{n\in\mathbb{N}^p}$ является АПС в $\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$. Показано, в частности, что система Фурье $(e_{\pi n/a})_{n\in\mathbb{Z}^p}$ является АПС в $\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$, а для регулярных распределений g из $C^\infty(\mathbb{T}(a))$ соответствующий ряд Фурье абсолютно сходится к g в $\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$.

Исследуется также следующий вопрос: можно ли коэффициенты разложений распределений $g\in\mathcal{D}'_\beta(\mathbb{T}(a))$ по АПС $(e_{\lambda_{(n)}})_{n\in\mathbb{N}^p}$, как выше, выбрать непрерывно и линейно зависящими от g ?

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

УДК 681.3.01

Меньших В.В. (Воронеж)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

Значения вырабатываемых в системах управления параметров часто отличаются от оптимальных. Это происходит в силу следующих основных причин:

информация, на основе которой вырабатываютсяпараметры могут быть измерены с погрешностью или доставлены в систему управления с задержкой, что приводит к необходимости использования устаревшей информации [1];

модель объекта управления, на основе которой вырабатываются параметры всегда приближенно отражает сам объект.

Оценки точности параметров управления характеризуют качество функционирования системы управления и могут быть использованы для определения текущей эффективности функционирования системы или выбора наиболее целесообразного в данный момент варианта выработки параметров, если система содержит альтернативные варианты. Особенность проведения оценок точности заключается в том, что оно должно осуществляться в реальном масштабе времени функционирования системы оперативного управления, что значительно ограничивает использование известных подходов к оценке точности.

В докладе проводится анализ возможностей существующих подходов к оценке точности и предлагается новый математический аппарат, использующий методы теории нечетких множеств [2], заключающийся во введении субъективного понятия "достоверность" и разработки правил действий с параметрами достоверности.

1. Меньших В.В. Об одном подходе к оценке старения информации. В кн.: Всероссийская конференция "Информационные технологии и системы". Тезисы докладов. - Воронеж: ВГУ, 1995, с. 35.

1. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта./ Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986. - 312 с.

Минюк С.А., Бойко В.К. (Гродно)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ

Рассмотрим объект управления

$$(Lx)(t) \overset{def}{=} (Qx)(t) + A(t)x(t_0) + B(t)u + v(t), \quad t \in [t_0, t_1] = T, \quad (1)$$

где главная часть Q оператора L имеет вид

$$(Qy)(t) = y(t) - \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} Q(t,s)\,y(s)\,ds, \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$x(t_0)=0, \; x(t_1) \in X, \quad (3)$$

и функционалом качества

$$I(u) = x'(t_1)N_1 x(t_1) + 2h_1' x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t) +$$
$$+2h_2'(t)x(t) + 2h_3'(t)u(t)]dt, \quad (4)$$

где элементы выражений (1),(2),(4) удовлетворяют условиям, сформулированным в [1], а X - некоторое заданное множество в R^n.

Задача. Для задачи (1) - (3) определить оптимальное управление $u^0(t) \in T$ из условия минимума функционала (4).

В докладе предложен алгоритм, позволяющий свести данную задачу к задаче математического программирования с целевой квадратично-линейной функцией на множестве X.

Алгоритм реализован для модельной задачи [2]

$$\ddot{q} + \dot{q} + q = \int_0^t e^{\tau - t} q(\tau)d\tau + \int_0^t e^{\tau - t}\ddot{q}(\tau)d\tau + u(t).$$

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0, (q(1))^2 + (\dot{q}(1))^2 = 1,$$

$$I = \int_0^1 [(q(t) - \dot{q}(t))^2 + u^2(t)]dt \to min.$$

1. Valeri Boiko, Stepan Minyuk. Optimization of the boundary-value problem for functional-differential eqution with quadratic criterion of quality. // Proceedings of the 12-th Internatinal Conference on Systems Science. V.1. Systems Theory, Control Theory. Wroclaw. 1995. p. 41-48.

2. Астапов И.С., Белоцерковский С.М., Качанов Б.О., Кочетков Ю.А. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №9. С. 1628-1637.

С.П.Митин (Владимир.)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.

Рассматривается обобщенная смешанная краевая задача

$$Au = F, \quad au\big|_{\Gamma} = f \tag{1}$$

для эллиптической системы

$$Au = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x \in D$$

с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in R^{l\times l}$ в области с кусочно-ляпуновской границей Γ, оператор $au = \{(d_1 u)(x),\ (d_2 \delta u)(x)\}$, $x \in \Gamma$, где δ является граничной конормальной производной $\sum a_{ij} n_i \partial u/\partial x_j$, d_1 и d_2 представляют собой прямоугольные матрицы-функции порядков соответственно $r \times l$ и $(l-r) \times l$, $0 \le r \le l$ кусочно-постоянна на границе Γ области D, $f = (f_1, f_2)$.

Обозначая $H^{(1)}$ класс функций $Au = F \in H$ и F обращающихся в нуль в окрестностях угловых точек, оператор $A^{(-1)}$ – правый обратный к A. т.е. $AA^{(-1)}F \equiv F$, $q(f)$ - линейный функционал вида:

$$q(f) = \int_{\Gamma} (Pf_1) g\, ds + \int_{\Gamma} f_2 h\, ds + \sum_{j,\pm} f_2(\tau_j \pm 0)\xi_j^{\pm}.$$

где P-оператор проектирования $H^{(1)}(\Gamma)$ на его подпространство функций, обращающихся в нуль в угловых точках τ_j.

В работе показывается, что необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи в классической постановке [1] имеют вид: $q(f - aA^{(-1)}F) = 0$ для всех q. Если слабое (в $L_2(D)$) решение этой однородной задачи совпадает с сильным, их можно описать как условия ортогональности к решениям формально сопряженной задачи.

Литература

1. Солдатов А.П. // Изв. РАН. Сер. матем. 1992, Т. 56, N 3, С. 566-604.

УДК 532.5 Могилевич Л.И. Попов В.С.

ГИДРОУПРУГОСТЬ ПОПЛАВКОВЫХ ПРИБОРОВ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ

Рассматривается математическая модель поплавковых приборов учитывающая такие аспекты в их конструкции как упругие свойства корпуса поплавка и наличие на его внутренней поверхности ребер жесткости. Ребра жесткости представляют собой шпангоут с разрывом. При этом исследование модели сводится к постановке и решению задачи гидроупругости геометрически нерегулярной оболочки взаимодействующей с твердыми телами.

Математическая модель представляет собой системы уравнений Навье-Стокса и уравнение неразрывности, динамики оболочки с ребрами жесткости и уравнений движения абсолютно жестких тел. Осуществлен переход к безразмерным переменным, выделены малые параметры задачи. Определены силы и моменты, действующие на абсолютно жесткие торцевые диски поплавка со стороны слоя вязкой несжимаемой жидкости через геометрически нерегулярную оболочку.

Решение связанной нелинейной задачи гидроупругости находится методом возмущений. За малый параметр принят относительный эксцентриситет λ характеризующий амплитуду колебаний торцевых дисков поплавка. При этом первый член разложение определяет динамику приборов, а второй их точность. Решение задачи представляется в виде гармонических функций по времени с коэффициентами зависящими от координат.

Для решения задачи динамики упругого корпуса с ребрами жесткости применяется метод Бубнова-Галеркина.

Найдены постоянные составляющие возмущающих моментов действующих на торцевые диски поплавка, определяющие погрешность приборов.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, с одной стороны, положительное влияние ребер жесткости - уменьшение возмущающего момента на порядок (на низких и средних частотах) при круговой вибрации, а с другой стороны негативное действие - увеличение возмущающего момента до 2-5 порядков (на низких и средних частотах) при линейной вибрации, по сравнению с упругим поплавком без ребер. Причем, влияние ребер жесткости снижается и становится незначительным с ростом частоты.

Проведен сравнительный анализ модели с корпусом поплавка переменной ступенчато изменяющейся толщины с моделью аппроксимирующей оболочку переменой толщины оболочкой постоянной толщины исходя из равенства объемов. Анализ показал, что такая аппроксимация неправомерна на низких и средних частотах вибрации, а с ростом частоты показания обоих моделей имеют тенденцию к выравниванию.

Морозов С.Ф., Семенов А.В. /Нижний Новгород/

О РАСШИРЕНИЯХ РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Исследуются различные виды расширений одномерных вариационных задач, определенных на множестве существенно-разрывных функций класса $H\Pi$ (см. [1]), имеющих не более чем конечное множество точек разрыва типа "стенка" и являющихся кусочно-гладкими в интервалах однозначности. Вводится расширение, обобщающее конструкцию Юнга-Макшейна (см. [2], [4], [5]) на случай существенно-разрывных функций и отличающееся от расширения Кротова [3]. Определяется класс, состоящий из пар $(C, \nu[t])$, где $C \in \Pi$, t -параметр, $\nu[t]$ - меры, который в определенном смысле содержит классы допустимых элементов вышеуказанных расширений. Используя факт непрерывности вариационного функционала в классе пар $(C, \nu[t])$ и теорему компактности множеств этого класса, устанавливается теорема существования решения класса $H\Pi$ исходной вариационной задачи.

Литература

1. Морозов С.Ф. Разрывные задачи вариационного исчисления.- Н.Новгород: изд-во ННГУ, 1991.- 80 с.
2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Расширение вариационных задач.// Труды Моск. матем. об-ва.- 1968.- т.18.- с.180-246.
3. Кротов В.Ф. Разрывные решения вариационных задач.// Изв. ВУЗов. Матем.- 1960.- №5.- с.86-98.
4. E.J McShane. Generalized curves.// Duke Math. Journ.- 1940.- v.6.- pp 513-536.
5. L.C. Young. Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations // Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III.- 1937.- v 30.- pp. 212-234.

Назаров С.Ю. (Липецк)

Краевая задача с нелокальными смещением и характеристическим носителем

В треугольной области $D = \{(x,y):\ 0 < x < y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$(x - y)U_{xy} - \beta U_x + \alpha U_y = 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1)$$

Задача. Найти решение $U(x,\ y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x,\ x) = \tau(x), \quad 0 < x < 1$$

$$A(x) I_{0x}^{a,b,-\alpha+\beta-1} U(0,x) + B(x) J_{x1}^{a+\alpha+\beta,c,-\alpha+\beta-1} U(x,1) = \varphi(x),\ 0<x<1$$

где $\tau(x)$, $\varphi(x)$, $A(x)$, $B(x)$ - известные функции, a, b, c - заданные действительные числа, $I_{ax}^{C_1,C_2,C_3} f$, $J_{xb}^{C_1,C_2,C_3} f$ - операторы обобщённого дробного интегро-дифференцирования М.Сайго, определяемые по формулам [1]:

$$I_{ax}^{C_1,C_2,C_3} = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{-C_1-C_2}}{\Gamma(C_1)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{F\left(C_1+C_2,-C_3,C_1,\dfrac{x-t}{x-a}\right)}{(x-t)^{1-C_1}} f(t)dt, & C_1>0 \\ \dfrac{d^n}{dx^n} I_{ax}^{C_1+n,C_2-n,C_3-n} f, & 0 < C_1+n < 1 \end{cases}$$

$$J_{xb}^{C_1,C_2,C_3} f = \begin{cases} \dfrac{(b-x)^{-C_1-C_2}}{\Gamma(C_1)} \displaystyle\int_x^b \dfrac{F\left(C_1+C_2,-C_3,C_1,\dfrac{t-x}{b-x}\right)}{(t-x)^{1-C_1}} f(t)dt, & C_1>0 \\ (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n} I_{xb}^{C_1+n,C_2-n,C_3-n} f, & 0 < C_1+n < 1, \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 - действительные числа, $\Gamma(x)$ - гамма функции Эйлера, $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

При некоторых ограничениях показана редукция задачи к сингулярному интегральному уравнению.

Литература

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Ganss hypergeometric functions. - Math.Rep.Kyushu Univ., 1972, V.11, N 2, P.135-143.

Нахман А.Д. (Тамбов)

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДЛЯ СРЕДНИХ ДВОЙНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ

Пусть $\{P_K^{\alpha\beta}(x)\}$ - система ортонормированных с весом $\rho^{\alpha\beta}(x)=(1-x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}, \alpha,\beta>-1$ многочленов Якоби. Кратная система $\{P_K^{\alpha\beta}(x)\cdot P_\ell^{\alpha\beta}(y)\}$ порождает средние Валле-Пуссена "квадратных" /прингсхеймовских/ частных сумм $S_{\nu\nu}^{\alpha\beta}(f,x,y)$ двойного разложения Фурье произвольной суммируемой на $[-1,1]^2$ с весом $\rho^{\alpha\beta}(x)\cdot\rho^{\alpha\beta}(y)$ функции $f(x,y)$:

$$V_{m,K}(f)=V_{m,K}(f,x,y)=\frac{1}{m-K+1}\sum_{\nu=K}^{m}S_{\nu\nu}^{\alpha\beta}(f,x,y) \qquad /1/$$

Рассмотрим последовательность функций Лебега $L_{mK}^{\alpha\beta}(x,y)$, определяемых в виде нормы оператора /1/ , действующего в пространстве непрерывных функций /из C в C /.

Известно /установлено автором/, что при $-1<x,y<1$ поведение $L_{m,K}^{\alpha\beta}(x,y)$ аналогично поведению соответствующих констант Лебега-Валле-Пуссена двойных рядов Фурье по тригонометрической системе; был также изучен рост в вершинах квадрата $[-1,1]^2$; напр., при $K=0$, $\alpha=\beta=0$ он имеет порядок $\ln^2(m+1)$. Интересным теперь является поведение $L_{mK}^{\alpha\beta}(x,y)$ на границах квадрата ортогональности системы, напр., при $x=1$, $-1<y<1$.

Т е о р е м а. При всех $-\frac{1}{2}<\alpha,\beta<\frac{1}{2}; -1<y<1; m=1,2,\dots; K=0,\dots,m$ имеет место оценка

$$L_{m,K}^{\alpha\beta}(1,y)\leqslant C_y\left\{1+m^{\alpha}+\min\left(\sqrt{\frac{m}{m-K+1}},\sqrt{m-K+1}\cdot m^{\alpha}\right)\right\}\sqrt{\frac{m}{m-K+1}}\cdot\ln(m+1). \qquad /2/$$

Замечания. 1. Оценка /2/ равномерна по y /постоянная $C=C_y=O(1)$/ на отрезках, внутренних к $(-1,1)$.
2. Распространение результатов на случаи всех $\alpha,\beta\geqslant-\frac{1}{2}$ или остальных границ квадрата $[-1,1]^2$ сопряжено лишь с более громоздкими формулировками.
3. Оценка /2/ окончательна на всем классе значений K,α,β. В важнейшем случае средних арифметических частных сумм /в определении /1/ $K=0$ / имеем следующую оценку роста:

$$L_{m,0}^{\alpha\beta}(1,y)=O\left((1+m^{\alpha})\cdot\ln(m+1)\right).$$

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ.

Пьер Ндии (Москва)

Рассматривается система

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m} A_i x(t-\omega_i) + Bu(t) = f(t), \quad t>0$$

$$0=\omega_0<\omega_1<\dots<\omega_m$$

с начальными условиями: $X(t)\equiv g(t), t\in[-\omega_m, 0]$

$f(t), g(t)$ - n-мерные измеримые вектор функции и $u(t)$-функция управления, интегрируемая по Лебегу в любом интервале $[0,T]$, $T>0$. $u(t)\in U\subset E^r$, где U-замнуктое и ограничечное множество. $A_i(i=\overline{0,m})$ и B - соотвественно заданные nxn и nxr матрицы. доказано, что решение $x(t)$ можно представить по формуле Коши:

$$x(t)=K(t)g(0)+\int_0^t K(t-s)f_1(s)ds-\sum_{i=1}^{m}\int_{-\omega_i}^{0} K(t-s-\omega_i)A_i g(s)ds$$

где $f_1(s)=f(s)-Bu(s)$, $K(t)$-решение матричного уравнения

$$\dot{K}(t)+\sum_{i=0}^{m} A_i K(t-\omega_i)=0, \quad t>0$$

с начальными условиями: $K(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ E, & t=0\end{cases}$, где E-единичная матрица.

Удобным аналитическим аппаратом для изучения множества достижимости представляют преобразавание Лапласа [1] и теория опорных функций [2]. Установлено, что множество достижимости является выпуклым компактом. Таким оброзом для нахождения этого множества достаточно установить его границу по его спорной функции. Просчитано нескольких конкркетных премеров.

Литература:

1. Беллман Р.К. и Кук К.Л. Дифференциально-разнострые управления. Москва: Мир, 1967.

2. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. Москва: МГУ, 1978.

Никольский М.С. (Москва)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТРЕКИНГА.

Рассматривается линейный управляемый объект

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \; , \; x(0) = 0 \qquad (1)$$

и его выход

$$y = \pi x(t) \; , \qquad t \in \Delta = [0, T] \; , \qquad (2)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^p$, $y \in R^m$; $A(t)$, $B(t)$ - непрерывные на Δ матричные функции соответствующих размерностей; π - постоянная $m \times n$ - матрица. Управления $u(t) \in R^p$ принадлежат гильбертову пространству $L_2(p, \Delta)$ суммируемых по Лебегу на Δ вместе с квадратом модуля p-мерных функций. По формуле Коши для выхода (2) получаем формулу:

$$y(t) = \int_0^t \pi \Phi(t,s) B(s) u(s)\, ds \; , \quad t \in \Delta \; ,$$

где $\Phi(t,s)$ - матрицант для уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Правая часть этого выражения определяет вполне непрерывный оператор K, действующий из $L_2(p,\Delta)$ в $L_2(m,\Delta)$.

Работа посвящена изучению свойств оператора K. В частности получены условия, при которых множество $K L_2(p,\Delta)$ всюду плотно в $L_2(m,\Delta)$. Такие условия представляют интерес для теории трекинга (слежения), когда нужно сколь угодно точно в метрике $L_2(m,\Delta)$ отследить произвольную функцию $g(\cdot) \in L_2(m,\Delta)$ с помощью выхода (2). Системы (1),(2), для которых такое отслеживание возможно, мы называем гибкими. Рассмотрены примеры. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 94-01-00710).

Оганджанян В.Г. /Ереван/

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С СИЛЬНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

В этой заметке речь идёт о нелинейных интегральных уравнениях вида

$$x(t) = \int_a^b K(t,s,x(s))\,ds, \qquad (1)$$

где ядро $K(t,s,x)$ определено в области $G=\{(t,s,x): t\in[a,b], x\in R, s\in E\}$, $E=[a,b]\setminus\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$, $a=s_0<s_1<s_2<\dots<s_n=b$, и имеет сильные особенности по s при $s=s_i$ $(i=0,1,\dots,n)$, (см. [1]).

Нами установлена следующая теорема:

Теорема. Предположим, что ядро $K(t,s,x)$ не убывает по x и удовлетворяет условиям:

$$\int_{s_i-\tau}^{s_{i+1}-\tau} \sup_{|x|\le\gamma} |K(t,s,x)|\,ds < +\infty,$$

$$\lim_{|t'-t''|\to 0} \int_{s_i-\tau}^{s_{i+1}-\tau} \sup_{|x|\le\gamma} |K(t',s,x)-K(t'',s,x)|\,ds = 0, \quad i=0,1,2,\dots,n.$$

Пусть, далее, существуют непрерывные на $[a,b]$ функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$, $z_1(t)\le z_2(t)$, $t\in[a,b]$ такие, что функции $(Kz_i)(t)$ $(i=1,2)$ непрерывны на $[a,b]$ и $\forall t\in[a,b]$ выполняются следующие интегральные неравенства $z_1(t)\le (Kz_1)(t)$, $z_2(t)\ge (Kz_2)(t)$.

Тогда: оператор $K:\Omega\to C[a,b]$ и вполне непрерывен, где

$$\Omega = \{x(t)\in C[a,b]:\ z_1(t)\le x(t)\le z_2(t),\ t\in[a,b]\}.$$

б/ Для любого $t\in[a,b]$ последовательные приближения

$$x_{m+1}(t) = (Kx_m)(t), \quad m=0,1,2,\dots\dots$$

не возрастают, если $x_0=z_2$ /соответственно не убывают, если $x_0=z_1$/ и равномерно на $[a,b]$ сходятся к верхнему /соответственно к нижнему/ решению уравнения /1/.

[1]. В.Г.Оганджанян. Условия полной непрерывности интегральных операторов с неподвижными особенностями в пространстве непрерывных функций, ДУ, том 8, №8, 1972, стр. 1473-1485.

Огарков В.Б.(Воронеж)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ, ПРИВОДЯЩИХСЯ К ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

В статье рассматриваются краевые задачи линейной теории термоупругости и теплопроводности изотропных и анизотропных упругих тел. Для изотропного тела краевая задача термоупругости сводится к необходимости решения неоднородного уравнения Лапласа с постоянными коэффициентами.

При решении задач теории кручения и изгиба анизотропных упругих стержней приходится решать задачу Дирихле для неоднородного уравнения Лапласа. Для стационарных задач теплопроводности анизотропного тела используются также уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа.

Автором показано, что во всех случаях целесообразно использовать вспомогательную функцию комплексного переменного, которая позволяет вывести разрешающее уравнение в частных производных первого порядка с коэффициентами, содержащими мнимую единицу. Искомое решение выражается через вспомогательную функцию с помощью формулы Чезаро. Полученное уравнение первого порядка может быть решено методом характеристик; методом разделения переменных; методом интегральных преобразований; численными методами.

Рассмотрены конкретные примеры в теории кручения анизотропных стержней с поперечными сечениями в виде эллипса и треугольника.

В задачах теории теплопроводности анизотропных композитных тел доказано, что для контактных задач в плоской постановке анизотропия приводит к увеличению максимальной температуры, что важно в теории управления.

Проведено обобщение полученных уравнений для кусочно-постоянных коффициентов в классе обобщенных функций, что имеет прикладное значение в теории теплопроводности и упругости слоистых систем. Аналогичные уравнения могут быть получены в теории гидромеханики, электростатики и других разделах математической физики.

Павленко В. Н., Искаков Р. С.

ГЛАДКИЕ АПРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ.

Пусть функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^2(\overline{\Omega})$, и $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ на $\overline{\Omega}$ для любого $i = \overline{1, k-1}$ (Ω – ограниченная область в R^m с достаточно гладкой границей S). Для почти всех $x \in \Omega$ функция $g_0(x,u) = f_i(x,u)$,если $u \in [\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x))$ и $1 \le i \le k-1, g_0(x,u) = f_0(x,u)$ при $u < \varphi_1, g_0(x,u) = f_k(x,u)$ при $u \ge \varphi_k(x), f_i(x,u)$ – каратеодориевы функции $i = \overline{1,k}$. Найдется $n_0 \in N$ такое , что множества $G_i = \{(x,u) | x \in \Omega, |u - \varphi_i(x)| < 1/n_0\}; i = \overline{1,k}$, попарно не пересекаются. Задача Дирихле

$$Lu + g_0(x,u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1_0}$$

$$u\,|_S = 0, \tag{2_0}$$

где $L = -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}^{(0)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ равномерно эллиптический симметричный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij}^{(0)} \in C^1(\overline{\Omega})$, апроксимируется последовательностью задач $(n \ge n_0)$

$$L_n u + g_n(x,u) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1_n}$$

$$u\,|_s = 0, \tag{2_n}$$

где $L_n = -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}^{(n)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $a_{ij}^{(n)} \in C^1(\overline{\Omega}), a_{ij}^{(n)}(x) = a_{ji}^{(n)}$ на $\overline{\Omega}$ и $(a_{ij}^{(n)}(x))$ равномерно на $\overline{\Omega}$ сходится к $(a_{ij}^{(0)}(x))$; для любого $n \ge n_0$ функция $g_n(x,u)$ каратеодориева , равная $g_0(x,u)$, если $\min_{1 \le i \le k} |u - \varphi_i(x)| \ge 1/n$, а в остальных точках $\Omega \times R$ она по модулю ограничена константой M_1 не зависящей от n. Заметим что существует $n_1 > n_0, n_1 \in N$, такое, что при $n > n_1$ оператор L_n - равномерно эллиптический. С каждой задачей $(1_n) - (2_n)(n \in N \cup \{0\})$ свяжем функционал $J_n(u) = 2^{-1} a_n(u,u) + \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_n(x,s)ds$ на пространстве $\dot{W}_2^1(\Omega)$, $a_n(u,u) = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^m a_{ij}^{(n)} u_{x_i} u_{x_j} dx$. Предположим, что $g_0(x,u)$ ограничена по модулю некоторой постоянной M на Ω и для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_0(x, \varphi_i(x)-) < g_0(x, \varphi_i(x)+)$ при некотором $1 \le i \le k$ влечет $(L\varphi_i(x) + g_0(x, \varphi_i(x)-)(L\varphi_i(x) + g_0(x, \varphi_i(x)+) > 0$. Тогда в силу теоремы 2.1 из [1] существуют $u_n \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ такие , что $J_n(u_n) = \inf\limits_{\dot{W}_2^1(\Omega)} J_n(v)$ (3) , причем любое такое u_n принадлежит пространству $W_q^2(\Omega)$ для произвольного $q > 1$ и для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1_n) и является точкой непрерывности $g_n(x,*)$. Установлен следующий результат :

Теорема. *Пусть дополнительно к перечисленным выше условиям равенству* (3) *при* $n = 0$ *удовлетворяет единственное* u_0.

Тогда $u_n \to u_0$ *в* $C(\overline{\Omega})$.

На актуальность данной тематики указано в [2]

Список литературы

[1] Павленко В. Н. Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами.// Вестник Челябинского Университета . Математика, механика – 1994 – с.87-95 .

[2] Красносельский М. А. Покровский А. В. Уравнения с разрывными нелинейностями.// ДАН СССР –т.248, N5.– с.1056-1059.

Н.Д.Пазий (Челябинск)

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТИПА СОБОЛЕВА

Сингулярной системой типа Соболева называется система

$$A(x)\dot{x} = v(x), \quad x \in (\mathbb{C}^n, 0) \tag{1}$$

с матрицей $A(x)$, вырожденной в нуле.

Рассматриваются такие сингулярные системы типа Соболева, в которых матрицезначная функция A и векторное поле v голоморфны в $(\mathbb{C}^n, 0)$ и $v(0) \neq 0$.

Множество $\{\det A(x) = 0\}$ называется *множеством вырождения системы* (1).

Две системы типа Соболева называются *аналитически эквивалентными*, если существует локальный биголоморфизм, который решения одной из них переводит в решения другой.

Начало классификации таких систем положено в работе [1]. В случае, когда $\operatorname{Im} A(0)$ трансверсален линейной оболочке вектора $v(0)$, а множество вырождения — гладкая поверхность, вещественная аналитическая классификация систем типа Соболева в ситуациях конечной коразмерности была получена в [2].

Пусть V_n — класс систем (1) таких, что $v(0) \in \operatorname{Im} A(0)$.

Теорема. *1. Типичная система класса V_2 аналитически эквивалентна нормальной форме*

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(y) \\ \lambda y \alpha(y) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, α — голоморфная в $(\mathbb{C}, 0)$ функция, $\alpha(0) \neq 0$.

2. Две системы вида (2) с параметрами $(\alpha(y), \lambda)$ и $(\tilde{\alpha}(y), \tilde{\lambda})$ аналитически эквивалентны если и только если $\alpha \equiv \mathrm{const}, \tilde{\alpha} = \alpha/\lambda, \lambda\tilde{\lambda} = 1$.

Литература

[1] Oka H., Kokubu H. An approach to constrained equations and attractors //Patterns and Waves. Qual. Anal. Nonlinear Differ. Equat.–Tokyo; Amsterdam, 1986,p.607–630.

[2] Пазий Н.Д. Локальная аналитическая классификация трансверсально-сингулярных систем типа Соболева //Теория уравнений типа Соболева и ее приложения: Сб. работ под ред. Г.А.Свиридюка.–Челяб.гос.ун-т., Челябинск, 1995, с.96–116.

ПаксютоваЕ.В, Гарбуз Е.В., Гончарова Г.А.(Саратов)

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Рассматривается расчет конструкций, материал которых может находиться в одном из трех термо-влагонапряженных состояний, характеризующихся своим набором механических и тепло-влагофизических характеристик. При описании поведения конструкции использовались общие вариационные принципы неравновесной термодинамики, которые позволили получить уравнения движения в каждой фазе, соотношения Коши, определяющие соотношения влаго-термоупругости и уравнения энергии в каждом состоянии, условия непрерывности полей перемещений при переходе границ раздела состояний, соотношения для тепло-и влагопотоков, соответствующие граничные условия, а также условия на границах раздела состояний.

В том случае, если границы раздела состояний неопределены, в систему определяющих уравнений следует добавлять физические соотношения, характеризующие условия фазовых переходов в материале.

Численное исследование полученной краевой задачи проводилось для полого достаточно длинного цилиндра, материал которого может находиться в двухфазном состоянии. Все исследуемые параметры считались независящеми от координат z и φ. Цилиндр находился под внутренним и внешним давлениями агрессивной среды в осесимметричном температурном поле.

Для решения описанной краевой задачи была разработана методика расчета, основанная на применении процедуры последовательных возмущений параметров, в качестве которых принимались механическая нагрузка, концентрация среды, от которой зависело фазовое состояние материала цилиндра, температура, время.

Панов Е.Ю. (Новгород)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Пусть X - пространство симметричных линейных операторов на $\mathbb{R}^n$ или эрмитовых операторов на $\mathbb{C}^n$, $N = \dim X$. Рассмотрена следующая $N \times N$-система квазилинейных законов сохранения:

$$U_t + \left(\hat{f}(U)\right)_x = 0, \tag{1}$$

$U = U(t,x) \in X$; $(t,x) \in \Pi = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$; $\hat{f} : X \mapsto X$, $U \mapsto \hat{f}(U)$ - функция от оператора U, определенная по некоторой скалярной вещественной функции $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$. Показано, что система (1) является гиперболической в широком смысле. При условии нелинейности функции $f(u)$ на невырожденных интервалах установлено, что C^2-гладкие энтропии для системы (1) с точностью до линейного слагаемого исчерпываются функциями вида $p(U) = \operatorname{Tr}\hat{\varphi}(U)$, $\varphi(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) \geq 0$; $\operatorname{Tr} : X \mapsto \mathbb{R}$ - оператор следа. При этом, соответствующий $p(U)$ поток энтропии $q(U) = \operatorname{Tr}\hat{\psi}(U)$, где функция $\psi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ определена равенством $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$. Рассмотрены обобщенные энтропийные решения (коротко - о.э.р.) $U \in L^\infty(\Pi, X)$ задачи Коши для системы (1) с начальным условием

$$U(0,x) = U_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}, X), \tag{2}$$

удовлетворяющие энтропийным условиям Кружкова-Лакса:
$p(U)_t + q(U)_x \leq 0$ в смысле распределений на Π для всех энтропийных пар (p,q). Показано, что в этих условиях достаточно ограничиться линейными энтропиями и специальными энтропиями вида $p(U) = \operatorname{Tr}\widehat{\varphi_k}(U)$, где при $k \in \mathbb{R}$ функции $\varphi_k(u) = |u-k|$, при этом соответствующие потоки $q(U) = \operatorname{Tr}\widehat{\psi_k}(U)$, $\psi_k(u) = (f(u) - f(k))\operatorname{sign}(u-k)$ определены и в случае лишь непрерывной функции $f(u)$. Ввиду этого обстоятельства понятие о.э.р. определено при $f(u) \in C(\mathbb{R})$. При достаточно общих предположениях доказано существование о.э.р. и показано (при $f(u) = u^2$), что, несмотря на обилие энтропийных условий, о.э.р. может оказаться неединственным. Пусть норма $\|U\|_p$ на X совпадает при $p = \infty$ с операторной нормой, а при $1 \leq p < \infty$ равна $\left(\operatorname{Tr}\widehat{f_p}(U)\right)^{1/p}$, $f_p(u) = |u|^p$. Для о.э.р. $U(t,x)$ установлены оценки: 1) для п.в. $t > 0$ $\int \|U(t,x)\|_p^p dx \leq \int \|U_0(x)\|_p^p dx$; 2) для п.в. $(t,x) \in \Pi$ $\|U(t,x)\|_\infty \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \|U_0(x)\|_\infty$. В связи с неединственностью о.э.р. определено понятие сильного о.э.р. (коротко - с.о.э.р.), основанное на требовании, что $\forall k \in \mathbb{R}$ оператор $\widehat{\varphi_k}(U)_t + \widehat{\psi_k}(U)_x \leq 0$ (отрицательно определен) в смысле распределений. Установлено, что с.о.э.р. является также и о.э.р. В общем случае $f(u) \in C(\mathbb{R})$ доказана единственность с.о.э.р. Показано, что если для п.в. $x, y \in \mathbb{R}$ операторы $U_0(x)$ и $U_0(y)$ коммутируют, система (1) приводится к системе независимых скалярных законов сохранения и существует единственное разумное решение задачи (1),(2), которое оказывается с.о.э.р. Однако, в общей ситуации условие, лежащее в основе определения с.о.э.р. довольно ограничительно, что подтверждено примером классического решения задачи (1),(2), не являющегося с.о.э.р.

УДК 517.956.2 Пенкин О.М., Богатов Е.М., Кашкаров Ю.М.

(Воронеж)

О слабой разрешимости задачи Дирихле на двумерном клеточном комплексе.

На двумерном клеточном комплексе

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=0}^{2} \bigcup_{i=1}^{\nu(k)} \overline{\sigma}_{ki} \subset \mathbf{R}^2.$$

где $\overline{\sigma}_{ki}$, называемое k-клеткой, диффеоморфно к-мерному многоугольнику в $\mathbf{R}^2$. рассматривается набор уравнений

$$-div(p_i grad\, u_i) + q_i u_i = f_i \quad \text{на } 2 - \text{клетках}$$

$$-\frac{d}{ds}(p_i \frac{d}{ds} u_i) + q_i u_i = f_i \quad \text{на } 1 - \text{клетках}$$

$$-\sum_{i=1}^{\nu(0)} \frac{d}{ds} u_i + q_i u_i = f_i \quad \text{на } 0 - \text{клетках}$$

трактуемый, как единое уравнение на Ω (специальным образом понимаемой внутренности $\overline{\Omega}$). На $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ задается нулевое условие Дирихле. Обсуждается вопрос о слабой разрешимости полученной так задачи Дирихле.

Данная задача решается на базе аналогов классических интегральных тождеств и неравенства Пуанкаре, которое для рассматриваемой нами ситуации выглядит так:

$$\int_\Omega u^2(x)\, d\mu \le C \int_\Omega p(\nabla u)^2(x)\, d\mu,$$

где μ – мера, совпадающая на каждом σ_{ki} с к-мерной мерой Лебега.

УДК 517.956.2 Пенкин О.М., Покорный Ю.В.

(Воронеж)

Аналог леммы Бохнера для эллиптического оператора на стратифицированном множестве.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – стратифицированное множество (см. определение в [1]), а Ω_0 – связное подмножество Ω, состоящее из стратов Ω и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. На Ω_0 в подходящем классе функций рассматривается эллиптический оператор $L_q = \Delta - q$, действие которого в локальных координатах на каждом страте σ_{mi} размерности m описывается следующим образом

$$(L_q u)|_{mi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial y^\beta} \right) + \sum \frac{1}{\sqrt{g^{mm}}} g^{m\beta} \frac{\partial u}{\partial y^\beta} |_{\overline{m+1j}} - qu.$$

где $g^{\alpha\beta}$, g – контравариантные компоненты и определитель метрического тензора на Ω, порожденного вложением Ω в $\mathbf{R}^n$, по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование, а вторая сумма распространяется на $m+1$ -мерные страты, к которым примыкает σ_{mi}. Выражение типа $f|_{ki}$ означает сужение f на σ_{ki}, а $f|_{\overline{ki}}$ – доопределение по непрерывности последнего сужения на $\overline{\sigma}_{ki}$.

Для оператора L_q доказываются аналоги формул Грина, на базе которых удается обосновать ряд качественных свойств решений неравенства $L_q u \geq 0$, в числе которых – точный аналог леммы Бохнера (см. [2]), а именно, имеет место

ТЕОРЕМА Пусть $\Omega_0 = \Omega$, $q \equiv 0$ на Ω. Если u – решение неравенства $L_q u \geq 0$ на Ω, то $u \equiv const$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.Мир, 1970.

2. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.

Перов А.И., Белоусова Е.П. (Воронеж)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Изучаются дискретные и непрерывные стационарные системы, описываемые линейными разностными или дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, для которых известны некоторые критические собственные значения, лежащие на единичной окружности для дискретных систем или на мнимой оси для непрерывных систем, и отвечающие им левые (строки) или правые (столбцы) критические собственные векторы.

Ставится задача о выяснении эффективно проверяемых коэффициентных условий (типа кругов Гершгорина или кругов Островского в проблеме локализации собственных значений), носящих достаточно общий характер, при выполнении которых все остальные собственные значения являются устойчивыми (т.е. лежат внутри единичного круга для дискретных систем или внутри левой полуплоскости для непрерывных систем).

Метод основан на вычислении или оценке спектрального радиуса (матричной нормы) возмущенной матрицы для дискретных систем - они должны быть меньше единицы, или спектральной абсциссы (логарифмической нормы) возмущенной матрицы для непрерывных систем - они должны быть отрицательными. Возмущения допускаются только специального вида: разрешается из каждого столбца матрицы коэффициентов системы вычитать любую линейную комбинацию известных критических правых собственных векторов (столбцов) и из каждой строки - любую линейную комбинацию известных критических левых собственных векторов (строк).

Задачи подобного типа представляют интерес как в теоретических исследованиях, так и в различных приложениях. Такие системы возникают, например, в изученных Ляпуновым критических случаях; при выяснении орбитальной устойчивости периодических решений нелинейных автономных систем; при изучении условий эргодичности дискретных цепей Маркова или непрерывных систем Колмогорова - в теории вероятностей; в автоматическом регулировании и т.п.

Работа поддержана грантом в области фундаментального естествознания 94-1. 17-359 (Санкт-Петербургский университет).

УДК 517.43 Петрова В.Е. (г.Воронеж)

УПРУГАЯ ПОЛОСА, СОДЕРЖАЩАЯ МАКРОТРЕЩИНУ И ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ МИКРОТРЕЩИНЫ

Исследуется задача о взаимодействии макротрещины с произвольно расположенными микротрещинами в упругой изотропной полосе, растягиваемой на бесконечности усилиями параллельными границам полосы, с учетом возможного контакта между берегами трещин.

Рассмотрена возможность решения этой проблемы с привлечением метода сингулярных интегральных уравнений. Интегральные уравнения для полосы с трещинами, полученные Панасюком В.В. и др. [1], имеют ту же структуру, что и уравнения для аналогичной задачи для бесконечной плоскости или для полуплоскости. Поэтому предлагается решать их методами, используемыми для вышеназванных задач. Для решения задачи с учетом гладкого контакта на линиях трещин, уравнения предварительно разделяем на действительную и мнимую части: для нормальных и сдвиговых скачков смещений, соответственно. Применяя метод малого параметра (за малый параметр берется отношение длин микро- и макротрещины), получена рекуррентная система уравнений для определения неизвестных разрывов смещений на линиях трещин. Первое уравнение этой системы — это уравнение для одной трещины в полосе, последующие уравнения учитывают наличие микродефектов. Далее, рекуррентную систему уравнений можно решать численно методом механических квадратур. В зависимости от вида макротрещины, трещина внутренняя или краевая, исследованы подходы к решению полученной рекуррентной системы уравнений и методы определения коэффициентов интенсивности напряжений для макротрещины.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 95-01-01296.

[1] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук.думка, 1978.

УДК 66.048.65:681.3.06

Н.Д. Писаренко

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ РЕКТИФИКАЦИИ

Разработка автоматизированных систем управления технологическими процессами требует знания оптимальных режимов работы оборудования. В работе рассматриваются основные колонны двухколонной ректификационной установки в производстве стирола.

С целью определения оптимальных статических характеристик колонн ректификации построена регрессионная модель колонн. Модель получена с использованием методов оптимального планирования эксперимента. Точки статических режимов, соответствующих оптимальному плану, рассчитывались путем численного экспериментирования со статической моделью колонн ректификации. Проведена проверка адекватности полученной регрессионной модели реальному объекту.

В качестве критерия оптимального управления выбран критерий, учитывающий стоимость потерь конечных продуктов разделения и затраты на управляющие воздействия.

Путем моделирования выявлено влияние каждого из факторов (управляющих воздействий) в чистом виде на составы конечных продуктов. Определены оптимальные по данному критерию статические режимы. Приведены результаты исследований для первой колонны ректификации.

Для этой колонны алгоритм управления предусматривает стабилизацию состава кубового продукта, нахождение и поддержание оптимальной концентрации этилбензола в дистилляте. Расчетные данные показывают, что при постоянном составе кубового продукта оптимальный режим чаще всего соответствует максимальному расходу флегмы.

Подпорин В.П. (Ростов-на-Дону)

ОБЩИЙ ВИД ОПЕРАТОРОВ, КОММУТИРУЮЩИХ С СИСТЕМОЙ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА ФУНКЦИЮ

Пусть $\mathcal{O}_0$ -пространство ростков голоморфных в начале координат функций n переменных, наделенное естественной топологией индуктивного предела.

Теорема. Если $f_k(z)\in\mathcal{O}_0$, $f_k(0)=0$, $k=1,\dots,p<n$ и $\dim_0\{z: f_k(z)=0, k=1\dots,p\}=n-p$, то в $\mathcal{O}_0$ существуют такие ростки $u_s(z), s=1,\dots,n-p$, $e_j(z), g_j(z), j=1,\dots,m$, что общий вид линейных непрерывных операторов L в пространстве $\mathcal{O}_0$, коммутирующих с каждым из операторов умножения на $f_k(z), k=1,\dots,p$, дается формулой

$$(Lx)(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu\geq 0} a_{j,\nu}(z)(W_{j,\nu}x)(z) \qquad (1)$$

Операторы $W_{j,\nu}$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_{n-p})\in\mathbb{N}^{n-p}$, определяются формулой

$$(W_{j,\nu}x)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{x(t)g_j(t)dt}{[f(t)-f(z)]u^{\nu+1}(t)} \quad , z\in\Pi_\varepsilon$$

где $f(t)-f(z)=\prod_{k=1}^{p}[f_k(t)-f_k(z)]$, $u^{\nu+1}(t)=u_1^{\nu_1+1}(t)\dots u_{n-p}^{\nu_{n-p}+1}$, Γ_ε- остов полиэдра $\Pi_\varepsilon=\{z\in U: |f_k(z)|<\varepsilon, k=1,\dots,p, |u_s(z)|<\varepsilon, s=1,\dots, n-p\}$, область $U\ni 0$ в $\mathbb{C}^n$ и $\varepsilon>0$ настолько малы, что полиэдр Π_ε относительно компактен в U, а функции $x(z)$, $f_k(z)$, $g_j(z)$, $u_s(z)$ голоморфны в U. Ростки $a_{j,\nu}(z)\in\mathcal{O}_0$ таковы, что $\forall r>0\ \exists\rho>0\ \exists C>0$:

$$\max\{|a_{j,\nu}(z)|: |z_k|<\rho, k=1,\dots,n\} < Cr^{\|\nu\|},\ j=1,\dots,m,\ \nu\in\mathbb{N}^{n-p}.$$

Ряд (1) $\forall x\in\mathcal{O}_0$ сходится абсолютно в $\mathcal{O}_0$. Ростки $a_{j,\nu}(z)$ определяются однозначно оператором L, причем

$$a_{j,\nu}(z)=(Le_ju^\nu)(z).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант 96-01-01041).

ВОЛНЫ В НЕСИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

Рассматриваются решения уравнения

$$u = Lu, \tag{1}$$

где $u = u(t,x), u \in R^n, t \in R, x \in R$ или $x \in R^2, L = \{L_{jk}\}$, $j,k = \overline{1,n}$, $L_{jk} = \sigma_{jk}C_{jk}B_{jk}A_{jk}$, где $\sigma_{jk}=0,\pm1$, $C_{jk} > 0$; B_{jk}, A_{jk} - линейные интегральные операторы типа свёртки с условиями нормировки $B_{jk}1 = 1$, $A_{jk}1 = 1$, действующие на переменные t и x соответственно.

Наряду с L рассмотрим оператор L^0; $L^0_{jk} = \sigma_{jk}C_{jk}B_{jk}$, и задачу

$$u = L^0 u \tag{2}.$$

Определение 1. Семейство операторов L^0, зависящих от параметров C_{jk}, назовём структурно устойчивым, если при любых $C_{jk} > 0$ нулевое решение (2) асимптотически устойчиво.

Определение 2. Набор операторов A_{jk} назовём симметричным, если все A_{jk} симметричны относительно отражения в начале координат, и несимметричным в остальных случаях.

Определение 3. Собственную функцию (1) вида $exp(ikt - i\omega t)$, где $\omega \in R_+$, $k \in R$ или $k \in R^2$, назовём волновым решением (1). Волновое решение назовём несимметричным, если $exp(ikx + i\omega t)$ не является решением (1) при тех же k и ω.

Утверждение 1. Если набор операторов A_{jk} симметричный, а L^0 структурно устойчивы, то (1) не имеет несимметричных волновых решений.

Утверждение 2. Существуют такие несимметричные наборы A_{jk}, структурно устойчивые L^0 и наборы параметров $C_{jk} > 0$, для которых (1) имеет несимметричное волновое решение.

Работа поддержана РФФИ проект 95-01-00356а.

УДК 517.946

Половинкина М.В.

ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ.

Пусть B - оператор Лапласа-Бельтрами в Римановой метрике $\|g_{ij}\|$ в некоторой области Ω, $A(r)$- площадь поверхности римановой сферы радиуса r с центром в точке x. Введем в окрестности точки x полярные геодезические координаты $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, отвечающие метрике g. Пусть $A(r)\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\,dr\,d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}$-элемент объема, где функция угловых координат Φ определяется этим элементом объема и удовлетворяет условиям

$$\Phi \geqslant 0, \quad \int \ldots \int \Phi(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} = 1.$$

Пусть $\overline{\varphi}_\lambda(r)$ - регулярное решение обыкновенного дифференциальног уравнения

$$\varphi''(r) + A'(r)\varphi'(r)/A(r) + \lambda\varphi(r) = 0,$$

удовлетворяющее условию $\overline{\varphi}_\lambda(0) = 1$. Тогда справедлива

Теорема. Если для всякой геодезической сферы с центром в точке x радиуса r, лежащей в односвязной области Ω, функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет формуле среднего

$$\int \ldots \int u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} = u(x)\overline{\varphi}_\lambda(r),$$

то u является в Ω решением уравнения

$$Bu + \lambda u = 0.$$

Эта теорема обращает результат, установленный в [1] и для случая собственных функций обобщает результат [2].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ильин В.А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами // Дифференциальные уравнения.-1969.-Т.5, №11.-С.1940-1978.

2. Каштанов О.В. Обратная теорема о среднем для присоединенных функций i-го порядка оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения.-1993.-Т.29, №10.-С.1822-1824.

Попович М. (Югославия, Приштина)

СВЯЗЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЦИКЛОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ H_2 В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ H_3 С ЦИКЛОГРАФИЕЙ СКОПЕЦА

Если мы заменим каждую точку гиперболического пространства H_3, изображающую цикл гиперболической плоскости H_2, ее полярной плоскостью, мы получим изображение циклов в плоскости H_2 плоскостями пространства H_3.

ТЕОРЕМА. Изображение циклов плоскости H_2 плоскостями пространства H_2 полярными плоскостями точек, изображающих эти циклы, совпадает с изображением циклов плоскости H_2 в циклографии З.А.Скопеца.

В самом деле, построим интерпретацию Клейна пространства H_3 в пространстве E_3, в котором абсолют пространства H_3 изображается сферой пространства E_3, а за плоскость π примем диаметральную плоскость этой сферы. Тогда цикл, изображающий произвольную плоскость σ, является геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из точек пересечения плоскости σ со сферой на плоскость π. Тем самым каждой плоскости σ мы поставили в соответствие сечение абсолюта этой плоскостью. Но в изображении циклов плоскости H_2 всякий цикл плоскости H_2 изображается точкой пространства H_3, являющейся полюсом плоскости, высекающей из абсолюта изображение этого цикла.

В частности, орициклы плоскости H_2 изображаются в пространстве H_3 точками конуса с вершиной в точке 0, касающегося абсолюта по коническому сечению, лежащему в плоскости π. Согласно циклографии Скопеца орициклы плоскости H_2 изображаются в пространстве H_3 плоскостями σ, параллельными плоскости π, т.е. плоскостями, составляющими с плоскостью π углы, равные нулю. Поэтому при замене плоскостей σ их полюсами, они изображаются точками, находящимися на нулевом расстоянии от полюса плоскости π, и, следовательно, орициклы плоскости H_2 изображаются точками конуса с вершиной в полюсе плоскости π, касающегося абсолюта пространства H_3. Поэтому следует считать, что в циклографии Скопеца абсолют плоскости H_2 изображается самой плоскостью π.

Литература

1. Скопец З.А. Циклографическое отображение пространства Лобачевского // 125 неевклидовой геометрии Лобачевского. - М.: ГТТИ, 1952. - С.129-150.

2. Скопец З.А. Основы начертательной геометрии пространства Лобачевского // Методы начертательной геометрии и ее приложения. - М.: ГТТИ, 1955. С.312-368.

3. Попович М. Циклографические методы геометрии гиперболического пространства.- Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1994.- 72 с.

ОДИН ПРИМЕР НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ

Провоторов В.Б. (Воронеж)

На графе-пучке $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \bar\gamma_i$, $\bar\gamma_i = [a_i, \xi]$ ($i = \overline{1,k}$) – ребра-входы, $\bar\gamma_i = [\xi, b_i]$ ($i = \overline{k+1,m}$) – ребра-выходы, задано дифференциальное уравнение соотношениями

$$-(py')' + qy = f(x), \quad x \in \gamma_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{1}$$

и

$$y(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_1} = y(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_2} = \ldots = y(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} (py')(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_i} = \sum_{i=k+1}^{m} (py')(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_i} \tag{3}$$

в узле ξ. Здесь функции $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $f(x)$ заданы на $\bar\gamma_i$ ($i = \overline{1,m}$) и обладают необходимой гладкостью на Γ.

Начальными условиями для дифференциального уравнения (1)–(3) назовем условия, задаваемые в вершинах-входах a_i ($i = \overline{1,k}$) и узле ξ графа Γ:

$$y(a_1) = y_{01},\ y'(a_1) = y_{11};\ y(a_2) = y_{02},\ y(a_3) = y_{03}, \ldots, y(a_k) = y_{0k}; \tag{4}$$

$$y'(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_{k+1}} = y_{1k+1},\ y'(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_{k+2}} = y_{1k+2}, \ldots, y'(\xi)\big|_{\xi \in \bar\gamma_{m-1}} = y_{1m-1}. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. Начальная задача (1)–(5) имеет единственное решение.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ – m решений уравнения (1)–(3).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ были линейно независимы на графе Γ, необходимо и достаточно отличия от нуля определителя

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1'(x_1) & \varphi_2'(x_1) & \ldots & \varphi_m'(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_m(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_k) & \varphi_2(x_k) & \ldots & \varphi_m(x_k) \\ \varphi_1'(x_{k+1}) & \varphi_2'(x_{k+1}) & \ldots & \varphi_m'(x_{k+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1'(x_{m-1}) & \varphi_2'(x_{m-1}) & \ldots & \varphi_m'(x_{m-1}) \end{vmatrix}$$

для произвольных точек x_i графа Γ ($x_i \neq \xi$).

Такой набор функций $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{1,m}$) назовем фундаментальной системой решений уравнения (1)–(3).

Понятие начальной задачи можно обобщить на случай произвольного дифференциального выражения в (1) и соотношений в (2).

ФУНКЦИЯ КОШИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ

Провоторова Е.Н., Провоторов В.В. (Воронеж)

Продолжается рассматриваться приведенное в предыдущем сообщении дифференциальное уравнение на графе-пучке $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{\gamma}_i$, ($\bar{\gamma}_i = [a_i, \xi]$ ($i = \overline{1,k}$) – ребра-входы, $\bar{\gamma}_i = [\xi, b_i]$ ($i = \overline{k+1,m}$) – ребра-выходы, ξ – узел пучка), заданное соотношениями

$$-(py')' + qy = f(x), \qquad x \in \gamma_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$y(\xi)\big|_{\xi \in \bar{\gamma}_1} = y(\xi)\big|_{\xi \in \bar{\gamma}_2} = \ldots = y(\xi)\big|_{\xi \in \bar{\gamma}_k}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} (py')(\xi)\big|_{\xi \in \bar{\gamma}_i} = \sum_{i=k+1}^{m} (py')(\xi)\big|_{\xi \in \bar{\gamma}_i}$$

(здесь функции $p(x) > c$, $q(x) > c$, $f(x)$ заданы и обладают необходимой гладкостью на Γ).

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

ЛЕММА. Для каждого фиксированного ребра $\bar{\gamma}_{i_0}$ ($i_0 \in \overline{1,m}$) среди функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ найдется ровно две линейно независимых на этом ребре.

ТЕОРЕМА. Линейная оболочка функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ имеет ровно две функции, которые линейно независимы на каждом ребре $\bar{\gamma}_i$ ($i = \overline{1,m}$) графа Γ .

Обозначим такие функции $\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x)$. Функцией Коши для дифференциального уравнения (1) на Γ назовем функцию

$$C(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1^*(s) & \varphi_2^*(s) \\ \varphi_1^*(x) & \varphi_2^*(x) \end{vmatrix},$$

где $W(s)$ – вронскиан функций $\varphi_1^*(s), \varphi_2^*(s)$. Нетрудно убедиться в том, что формула

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x) + \int_{a_i}^{x} C(x,s) f(s)\,ds + \int_{\Gamma_{a_i}} C(x,s) f(s)\,ds$$

задает общее решение уравнения (1). Здесь a_i – произвольная вершина-вход графа Γ , подграф Γ_{a_i} – множество путей, соединяющих произвольные точки графа Γ с входом a_i (ребра, ориентация которых не совпадает с направлением движения исключаются).

Пуляев В.Ф. (Краснодар)

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ.

Рассматриваются уравнения

$$x(t) = \int_0^\infty K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in R_+, \quad (1)$$

с почти периодической матрицей K(t,S). Последние получаются из матриц вида

$$\sum_{j=1}^{m} \exp(i\alpha_j t) P_j(t-s), \quad P_j \in L_1^{n\times n}(R_+),$$

соответствующим предельным переходом.

Уравнения (1) изучаются в пространстве ограниченных на R_+ функций и его подпространствах: равномерно непрерывных, стремящихся к нулю на бесконечности и асимптотически почти периодических функций. Установлены условия нетеровости таких уравнений и показано, что нетеровость уравнения (1) в одном из указанных пространств влечет нетеровость и совпадение дефектных чисел в остальных пространствах.

Аналогичные результаты получены и для интегродифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^\infty K(t,s)x(s)ds + f(t)$$

Литература.

1. Пуляев В.Ф. Ограниченные и почти периодические решения линейных интегральных уравнений. Ред.ж. "Дифференц. уравнения".Минск.1989.20 с. (Деп.в ВИНИТИ 11.08.89.№ 5416-889).

УДК-517.9

Ризун В.И., Манаков В.П., Подгорная Н.А. (Алчевск)

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ) В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

В монографиях [1,2] рассмотрены некоторые задачи теории упругости неоднородных тел. Но при этом, не имея общего метода решения таких задач, в [1,2] изучались лишь частные случаи изменения механических характеристик (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т.п.).

В настоящей работе предлагается решать задачи теории упругости неоднородных тел при произвольном изменении механических характеристик (они могут быть непрерывными, разрывными, обобщенными функциями). Это удалось осуществить при помощи ММВФ [3,4].

Следует отметить, что ММВФ дает возможность получить решение в виде быстросходящегося ряда. В большинстве изучаемых задач ограничиться двумя-тремя членами в искомом ряде -решения.

Поэтому преимущество этого метода перед существующими в теории упругости неоднородных тел в настоящее время неоспоримо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колгин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов.-Кишинев: Картя молдовеняскэ, 1971.-172с.
2. Колчин Г.Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел.- Кишинев: Штиинца, 1977.- 120с.
3. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.-Киев : ЦБНТИ, 1991.-332с.
4. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных обьектов.- Киев: ИСИО, 1994.-409с.

УДК-517.9

Ризун В.И.,Сушинин В.В.,Шкляр В.Г.(Алчевск)

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Решение новых задач теории управления связано, как правило, с постоянно возрастающими требованиями к точности автоматического управления, сложностью и широтой диапазона изменения характеристик обьектов автоматизации (быстро изменяющиеся во времени, разрывные, обобщенные функции и т.п.). Все это настоятельно требует создание новых методов исследования систем управления. Классы задач управления, решаемые при помощи существующих методов, а также их недостатки, общеизвестны [1,2] .

В настоящей работе излагается новый метод решения задач теории управления, обобщающие исследования [3-5]. Этот метод основан на введении новой системы функций (СФ), которая обладает рядом свойств, которыми обладала ранее введенная СФ в [3-5] , а также новыми очень важными свойствами. Эти новые свойства СФ и позволили решить ряд новых современных задач, к которым существующие методы неприменимы или их применение встречает непреодолимые трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В.Ф., Гурман В.Н., Методы и задачи оптимального управления.- М.:Наука, 1973.- 448с.
2. Ту Ю. Современная теория управления.-М.: Машиностроение, 1971.- 472с.
3. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.- Киев: УЦБНТИ, 1991.- 332с.
4. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных обьектов.-Киев:ИСИО, 1994.-409с.
5. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Решение задач управления модифицированным методом вспомогательных функций.-Шестая конференция (тезисы докладов).-Казань:КАИ, 1992.-с.73-74.

УДК517.6

Ризун В.И., Сухинина О.А., Шкляр В.Г.(Алчевск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

В монографиях [1,2] изложено некоторые варианты обоснования ММВФ, но все они доказаны (или указаны лишь пути доказательств) довольно сложным путем.

В этой работе предлагается один подход к обоснованию ММВФ, который , как нам кажется, более простой и более строгий в рассуждениях и выкладках, т.к. он опирается на фундаментальные результаты работ [3,4] .

В результате этого подхода доказано, что вспомогательная система функций (ВСФ) (введенная в [1,2]) является квадратично близкие к ОНСФ.

Кроме этого, эта ВСФ - линейно независима. Эти два доказанные свойства дают основание (по теореме Н.К.Бари[3,4]) сделать вывод, что ВСФ, введенная в [1,2] , является базисом Бари [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991.-332с.
2. Иркличевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных обьектов.- Киев: ИСИО, 1994.- 409с.
3. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве.- Уч.запис. МГУ, 4 вып. 149 (151).- с. 69-107.
4. Кашин Б.С.- Саакян А.А. Ортогональные ряды.- М.: Наука, 1984.- 496с.

Руденко Е.Н. / Вятка /

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИОННОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Для приближенного нахождения множества достижимости D в момент времени T для линейной управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = x_0,$$

где $x \in R^n$, управление - измеримая по Лебегу функция $u = u(t) \in P$, P - отрезок в R^1, предлагается, задавшись некоторым натуральным числом N, строить аппроксимирующее D множество E_N в виде алгебраической суммы N отрезков в R^n по формуле

$$E_N = x_N + \sum_{i=1}^{N} e_i P,$$

где точка $x_N \in R^n$ определяется из соотношений

$$x_{i+1} = \left(I + \frac{T}{N}A + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{N}\right)^2 A^2 \right) x_i,$$

а отрезки $e_i P = \{ e_i \alpha \mid \alpha \in P \} \in R^n$ находятся по точкам $e_i \in R^n$, которые определяются из соотношений

$$e_{i+1} = \left(I + \frac{T}{N}A + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{N}\right)^2 A^2 \right) e_i,$$

причем $e_1 = \left(\frac{T}{N} b + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{N}\right)^2 A b \right)$. В работах В. Вельова доказано существование такой константы C, что выполняется $H(D, E_N) \le C\left(\frac{T}{N}\right)^2$, где H — хаусдорфово расстояние.

Здесь выводится формула для константы C через данные системы $\|A\|$, $|b|$, $|P|$, $|x_0|$ и T, которая открывает возможность при использовании предлагаемой схемы гарантировать заранее заданную точность, выбрав подходящее N.

Рыжков А.В. (Воронеж)

ТЕОРЕМА АЛЬМАНЗИ ДЛЯ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть Ω – конечная область в пространстве E_{γ}^{n}, четная по переменным $x_{k+1},\dots,x_n$; $x=(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$; $r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$. Функция $u=u(x)$ называется В- полигармонической в области Ω, если она четна по переменным $x_{k+1},\dots,x_n$ и в области Ω удовлетворяет уравнению

$$\Delta_B^m u=0,$$

где

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=k+1}^{n}x_i^{-\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\ \gamma_i>0.$$

В случае $m=1$ функция носит название В- гармонической. Полигармоническим порядком функции $u=u(x)$ в области Ω является наименьшее целое ℓ такое, что $\Delta_B^{\ell}u=0$ в области Ω. Теорема. Пусть Ω – конечная область, симметричная относительно переменных $x_{k+1},\dots,x_n$ и звездная относительно начала координат. Функцию $u=u(x)$ В- полигармоническую в этой области и четную относительно переменных $x_{k+1},\dots,x_n$ можно единственным образом представить в виде

$$u(x)=\sum_{\ell=0}^{m-1}r^{2\ell}\psi_\ell(x),$$

где $\psi_s(x)$ – В-гармонические функции четные по переменным $x_{k+1},\dots,x_n$, а m – порядок полигармоничности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.- 808 с.
2. Киприянов И.А. Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов.- Труды МИАН СССР, 1967, т.89, с. 130-213.

Рычаго М. Е. (Владимир)

ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕКОЭРЦИТИВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Пусть $a(x) = a(x_1, x_2, ..., x_n)$ - периодическая с периодом 1 по каждому аргументу, полунепрерывная снизу функция на $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая оценке $0 \le a(x) \le 1$. Рассматриваются вариационные задачи вида:

$$m_\varepsilon = \min_{u \in V_\varepsilon} \int_\Omega a_\varepsilon(x)\left(|\nabla u|^p + |g-u|^p\right) dx \,, p > 1 \,,$$

где Ω - ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^N$, $a_\varepsilon(x) = a(\varepsilon^{-1}x)$, $g \in L^p(\Omega)$, а пространство

$V_\varepsilon =$ замыкание множества $C^\infty(\Omega)$ по норме $\left(\int_\Omega a_\varepsilon(|\nabla u|^p + |u|^p)dx\right)^{1/p}$.

Пусть F - замкнутое периодическое множество в $\mathbb{R}^N$. Положим

$$a(x) = \begin{cases} 1 \text{ , если } x \in \mathbb{R}^N \setminus F, \\ 0 \text{ , если } x \in F. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $V_\varepsilon = W^{1,p}(\Omega \setminus F_\varepsilon)$, где $F_\varepsilon = \varepsilon F = \{\varepsilon x, x \in F\}$, и наша задача принимает вид вариационной задачи в перфорированной области $\Omega \setminus F_\varepsilon$. Усреднению таких задач посвящена обширная литература.

В общем случае мы рассматриваем множество $F = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) = 0\}$, которое периодично и замкнуто. Теорема усреднения доказывается без использования специальной техники продолжения решения $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$, определенного в области $\Omega \setminus F_\varepsilon$ на всю исходную область Ω (что связано с существенными ограничениями на периодическое открытое множество $\mathbb{R}^N \setminus F$), а применяется более простой подход, предложенный В.В.Жиковым. Введем усредненную задачу:

$$m_0 = \min_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \int_\Omega \left(f_0(\nabla u) + \vartheta |g-u|^p\right) dx \,,$$

где $\vartheta = \int_\Box a(x)dx$, $\Box = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N$ - ячейка периодичности, $f_0(\xi)$ - усредненный интегрант, $f_0(\xi) = \inf\limits_{v \in W^{1,p}_{per}(\Box)} \int_\Box a(x)|\xi + \nabla v|^p dx$.

Теорема. *Пусть периодическое открытое множество* $\mathbb{R}^N \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ *связно в* $\mathbb{R}^N$. *Тогда*

1) *усредненный интегрант* f_0 *коэрцитивен, т.е.* $f_0(\xi) \ge c_0|\xi|^p$ $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$, $c_0 > 0$;

2) *имеет место сходимость энергий:* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon = m_0$;

3) *имеет место сходимость решений:* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a_\varepsilon |u^\varepsilon - u^0|^p dx = 0$,

где u^ε *- решение исходной, а* u^0 *- решение усредненной задачи.*

Рябогин А. К. (Ставрополь)

УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СОПРЯЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАМ ХАРДИ

Пусть U(x,y) гармоническая функция в R_+^{n+1}. Сопряженной к U(x,y) гармонической функцией называется вектор-функция $V(x,y) = (V_1,...,V_n)$ координаты которой суть гармонические функции, удовлетворяющие обобщенным условиям Коши-Римана
$\partial U/\partial y + \sum_{k=1}^{n} \partial V_k/\partial x_k = 0$, $\partial V_k/\partial x_i = \partial V_i/\partial x_k$, $k \neq i$, $\partial U/\partial x_i = \partial V_i/\partial y$,
$k,i = (1,2,...,n)$.

Вектор-функция $F(x,y) = (U,V) = (U,V_1,...,V_n)$ называется гармоническим вектором. Мы будем использовать интегральные средние $M_p(y,F) = \{\int_{R^n} |F(x,y)|^p dx\}^{1/p}$, $p > 0$.

Если U(x,y) гармоническая функция в R_+^{n+1}, то $U^+(x) = \sup\{|U(x,y)|: y > 0\}$ "радиальная" максимальная функция и $U(x,y) \in H_p \Leftrightarrow U^+(x) \in L_p, p > 0$.

Теорема 1. Пусть $p > 0, k \in N, F(x,y) = (U,V_1,...,V_n)$ гармонический вектор в R_+^{n+1}, удовлетворяющий условиям:

1) $F(x,y) \to 0$ равномерно относительно x при $y \to +\infty$,

2) $M_p(\partial^k/\partial y^k U) \leq C$, 3) $M_p(y,\partial^k/\partial y^k U) \leq Cy^k$.

Тогда

а) $F(x,y) \in H_p$ для p < r < n p / (n - kp), 0 < kp < n и всем H_r, r > p, если kp ≥ n,

б) Любая частная производная j-того порядка 1 ≤ j ≤ (k-1) каждой координаты принадлежит H_r, $p < r < np/(n-(k-j)p)$ и всем $H_r, r > p$, если $n \leq np/(n-(k-j)p)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 любая частная производная j-того порядка принадлежит пространству H_p.

Существуют сопряженные гармонические функции, показывающие, что в пункте а) заключения теоремы 1 нельзя положить r = n и r = np / (n - kp).

Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Никифорова О.К.
(Воронеж)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ ПОТОКА В ТРУБОПРОВОДЕ С ОТВОДАМИ

Изменение концентрации вещества в отводе трубопровода описано уравнением [1]

$$dC(\tau)/d\tau = \beta U [C_0 - C(\tau)]/V, \qquad (1)$$

с условием $C(0)=0$, где $C(\tau)$, C_0 - концентрации в отводе и в основной магистрале; U - объемный расход потока в трубопроводе; V - объем отвода; β - параметр, имеющий смысл доли потока, поступающего в отвод; τ - текущее время.

Для определения β сформулирована задача

$$\partial C(X,\theta)/\partial\theta = \partial^2 C(X,\theta)/\partial X^2,$$
$$C(X,0)=0, \quad C(0,\theta)=1, \quad \partial C(1,\theta)/\partial X = 0, \qquad (2)$$

где $C(X,\theta) = C(x,\tau)/C_0$; $X = x/h$; $\theta = \tau D_k/h^2$;
x - координата, направленная по отводу; h - длина отвода;
D_k - коэффициент конвективной диффузии.
Из решения (1) и (2), когда диаметр трубопровода d равен диаметру отвода, найдено

$$\beta = 3(d/h)/(Re \cdot Pr), \qquad (3)$$

где Re, Pr - числа Рейнольдса и Прандтля. Обработка численного эксперимента по течению вязкой несжимаемой жидкости в каверне [2], позволило получить критериальное уравнение

$$\beta = 9{,}4 \cdot 10^{-3} (d/h)^{3{,}04} Re^{0{,}4}.$$

Литература

1. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии.- Киев: Вища школа, 1973.-280с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1987.-840с.

Разложения Морса для функционалов действия на группах матричных петель

Т.Ю.Сапронова (Воронеж)

Известно, что экстремалями функционала действия $V = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt$ на банаховом многообразии M матричных C^2-петель $f : [0,1] \longrightarrow SO(n)$, $f(0) = f(1) = I$, служат геодезические петли, соответствующие одномерным подгруппам в $SO(n)$ [1,2]. При построении локального разложения Морса в окрестности экстремали и, в частности, при вычислении её индекса Морса важную роль играет та аналитическая форма, к которой удаётся привести второй дифференциал. Поиск удобной аналитической формы второго дифференциала V тесно связан с анализом так называемого отображения угловой скорости: *петля* $f \longmapsto$ *угловая скорость* $\Omega = f^{-1}\frac{d}{dt}f$. Для первого дифференциала этого отображения имеет место представление $\frac{\partial\Omega}{\partial f}(f)(h) = \frac{d}{dt}\tilde{h} + [\Omega, \tilde{h}]$, $\tilde{h} = f^{-1}h \in C^2([0,1], so(n))$, $h(0) = h(1) = 0$, Оператор $F : f \longmapsto -\frac{d}{dt}\Omega(f)$, выполняющий роль градиента V, задает фредгольмово отображение из M в банахову алгебру Ли непрерывных кососимметричных матричных функций. *Для второго дифференциала V на произвольной геодезической петле имеет место следующее представление:* $\frac{\partial^2 V}{\partial f^2}(h,h) = \langle \frac{\partial F}{\partial f}\tilde{h}, \tilde{h}\rangle = -\langle \frac{d^2}{dt^2}\tilde{h} + [\Omega, \frac{d}{dt}\tilde{h}], \tilde{h}\rangle$. Данное соотношение позволяет эффективно осуществить основной шаг в построении разложения Морса, связанный с отысканием касательных подпространств к устойчивому и неустойчивому подмногообразиям. Дальнейшие шаги сводятся к построениям соответствующих интегральных кривых на M для поля градиентов F.

Существует другой подход к рассматриваемой задаче, основанный на редукции к функционалу действия на сферических петлях.

Автор искренне благодарит Ю.Г.Борисовича за внимание к данной работе.

Литература: [1] *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. М., Мир. 1988. 456 с. [2] *Клингенберг В.* Лекции о замкнутых геодезических. М., Мир. 1982. 416 с.

Семенов Ю.М. , Коннов А.И. (Чебоксары).

ОБ ОБЪЁМЕ МНОЖЕСТВА НУЛЬ-ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Пусть $C=(V,A,\Omega)$ - линейная система с компактным ограничивающим множеством Ω. Рассматривается задача вычисления объёма $\Phi(C,t)$ множества нуль-достижимости $K(C,t)$. Для вычисления функции $\Phi(C,t)$ предлагается формула:

$$\frac{d}{dt}\Phi(C,t) = \int\limits_{\partial K(C,t)} \max_{u\in\Omega}\left\langle e^{At}u,n\right\rangle dS \qquad (1)$$

где n- вектор внешней нормали.

Вычисление функции $\Phi(C,t)$ по формуле (1) вызывает большие трудности, которые иллюстрируются следующим примером. Пусть C_n - система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = u, \end{cases}$$

где $u=\pm 1$. Для функции $\Phi(C_n, t)$ найдено представление в виде интеграла

$$\frac{2^n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k!}\int\limits_0^t \int\limits_0^{T_n} \ldots \int\limits_0^{T_2} \prod_{1\le i<j\le n}(T_j - T_i)\,dT_1\ldots dT_{n-1}dT_n$$

Можно показать, что

$$\Phi(C_1,t)=2t, \quad \Phi(C_2,t)=\frac{2}{3}t^3, \quad \Phi(C_3,t)=\frac{t^6}{45}, \quad \Phi(C_4,t)=\frac{584}{5!7!}t^{10}.$$

Справедлива следующая оценка:

$$\Phi(C_n, t)\le \frac{2^n}{\prod\limits_{k=0}^{n} k!}.$$

Сидорова И.В. / Владимир./

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ СО СДВИГОМ.

На комплексной плоскости рассмотрим односвязную область $\mathcal{D}$, ограниченная простым кусочно - гладким контуром Γ, который состоит из гладких дуг Γ_j, $j = 1, 2, \dots, n$ с общими концами $\tau_1, \dots, \tau_n$. Пусть α – диффеоморфизм дуги Γ_1 внутрь области $\mathcal{D}$, причем концы дуги $\Gamma_0 = \alpha(\Gamma_1)$ совпадают с угловыми точками Γ. Контур Γ ориентирован положительно по отношению к области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим следующую задачу R. Найти аналитическую в области $\mathcal{D}$ функцию $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\begin{cases} Re\,[G(t)\Phi^+(t) - G_0(t)\Phi(\alpha(t))] = \varphi(t),\ t \in \Gamma_1 \\ Re\,[G(t)\Phi^+(t)] = \varphi(t),\ t \in \Gamma \setminus \Gamma_1 . \end{cases} \tag{I}$$

Все рассмотрения ведутся в весовом пространстве Гельдера $H_{\mu,\lambda}(\bar{\mathcal{D}}; \tau_1, \dots, \tau_n)$, где $0 < \mu < 1$, $\lambda = (\lambda_j)_1^n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

В краевые условия задачи (I) входит диффеоморфизм α, поэтому эту задачу можем разделить в зависимости от геометрии сдвига на два типа:

I) задача с "прямым" сдвигом – R^+;

2) задача с "обратным" сдвигом – R^-.

При соответствующих предположениях относительно гладкости дуг Γ_j и функций $G(t)$ в работе даны критерий нетеровости, формула индекса задачи в пространстве $H_{\mu,\lambda}(\bar{\mathcal{D}}; \tau_1, \dots, \tau_n)$.

Сижук В.П. (Ставрополь)

Сверточный оператор, сохраняющий мероморфные звёздообразные функции со знакочередующимися коэффициентами

Пусть $\widetilde{\Sigma}(a,b), -1 \le b < 0, b < a \le -b$, класс функций

$$f(z) = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n z^n, \quad a_n \ge 0, \qquad (*)$$

регулярных в области $0 < |z| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$-\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+az}{1+bz}, \qquad |z| < 1,$$

где $\prec$ -операция подчинения. Имеем: $\widetilde{\Sigma}(a,b) \subseteq \Sigma^*$, $\widetilde{\Sigma}(-1,1) \equiv \Sigma^*$ -класс всех звёздообразных однолистных в $0 < |z| < 1$ функций вида (*).

Введем на классе $\widetilde{\Sigma}(a,b)$ оператор L:

$$f \to L(a_1,\dots,a_p;c_1,\dots,c_q)f \overset{def}{=} \frac{1}{z}\, {}_pF_q(z) * f(z),$$

где $*$ -свёртка Адамара, $f \in \widetilde{\Sigma}(a,b)$,

$${}_pF_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n\, n!} z^n$$

-обобщённая гипергеометрическая функция, $p \le q+1$,

$(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$, a_i, c_j -вещественные параметры, $c_j \ne 0,-1,-2,\dots$.

Теорема. Оператор $L(a_1,\dots,a_p;c_1,\dots,c_q)$ для любых положительных значений параметров $a_i\ (i=1,\dots,p), c_j\ (j=1,\dots,q)$ таких, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n\, n!} \le 1,$$

отображает класс $\widetilde{\Sigma}(a,b)$ в себя.

Рассматриваются возможности распространения этой теоремы на случай отрицательных параметров a_i, c_j.

Ситник С.М. / Воронеж /

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УТОЧНЕНИЙ НЕРАВЕНСТВА КОШИ-БУНЯКОВСКОГО И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К ОЦЕНКАМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается новый метод получения усилений неравенства КГБ вида

$$\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \leq \int_a^b p^2 dx \int_a^b \left(\frac{fg}{p}\right)^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx . \quad (1)$$

При этом устанавливается определённая двойственность между весами p и произвольными средними двух величин. Примеры конкретных средних- степенные, средние Радо, медианты рядов Фарея, итерационные средние типа арифметико-геометрического приводят к интересным конкретным примерам допустимых весов.

Разработан метод сравнения между собой различных усилений вида (I) и на основе полученных теорем сравнения установлена иерархия различных конкретных семейств усилений.

Далее получены алгоритмы конструирования итерационных процедур уточнения (I), которые порождаются каждым конкретным усилением вида (I). Эти итерационные процедуры приводят к бесконечной последовательности новых усилений, каждое из которых точнее предыдущего. Некоторые процедуры порождают двусторонние неравенства.

Полученные результаты применяются для обоснования достаточно общего систематического метода получения равномерных неравенств для специальных функций на основе их интегральных представлений. При этом уже первые шаги предлагаемых итерационных процедур приводят к известным неравенствам, дальнейшие шаги- к существенным уточнениям этих неравенств. Подробные расчёты проведены для вывода неравенств для интегральной показательной и гамма-функций. Особенно эффективным метод оказывается для получения двусторонних оценок эллиптических интегралов Лежандра вблизи особой точки, что иллюстрируется численными примерами.

Другие применения наших результатов лежат в областях традиционных следствий неравенства КГБ: неравенства треугольника, Сельберга, Ацеля, пространства Лоренца-Лобачевского, оценки в элементарной геометрии и геометрии пространств со скалярным произведением, дискретные аналоги, описание допустимых связей в различных моделях упругости и пластичности.

Ситник С.М. /Воронеж/

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА РЯДА ТЭЙЛОРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим остаточный член ряда Тэйлора для экспоненты

$$R_n(x) = exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \geqslant 0.$$

Недавно Horst Alzer доказал неравенство

$$R_{n-1}(x) R_{n+1}(x) > \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left(R_n(x) \right)^2; \; x > 0, \; n \in \mathbb{N}$$

с наилучшей возможной постоянной в правой части.

Автором получены следующие результаты. Показано, что приведённое неравенство есть эквивалентная перезапись одного ранее известного результата У. Гаучи. Приведены некоторые другие эквивалентные неравенства в терминах вырожденной гипергеометрической функции Гаусса, неполной гамма-функции, дробного интеграла Римана-Лиувилля. Доказаны многочисленные обобщения неравенства Гаучи-Алзера, указывающие на глубокие связи этого замечательного неравенства с различными, часто весьма удалёнными друг от друга разделами Анализа: мажоризацией рядов по Бору, неравенствами Коши-Буняковского и Чебышёва, теоремой Бернштейна о рядах с положительными коэффициентами, выпуклостью и логарифмической выпуклостью некоторых последовательностей, со- и антимонотонностью функций, интегральным неравенством о средних, теорией интерполяции и теоремой Адамара о трёх прямых, преобразованием Лапласа, характеризацией положительных операторов, неравенствами А.М.Финка, теорией мажоризации Мюрхеда, неравенствами Кимберлинга, аппроксимациями Паде, формулой Обрешкова, средними Чезаро, оценками для экспаденты/ Паде-аппроксимациями экспоненты/ преобразованием Эйткена, проблемой Бибербаха и неравенствами типа Аски-Вильсона для гипергеометрических полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ситник С.М. Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции: Препринт. Владивосток: Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской Академии наук. 1993, 30 с.

Smirnova L.V. (Orekhovo-Zuevo)

THE SOLUTION OF NASH - HURWITZ - SLATER FOR NON - COOPERATIVE GAME UNDER UNCERTAINTY

Let us consider a non-cooperative game of N players under uncertainty

$$\left\langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}} \right\rangle . \tag{1}$$

Here $\mathbf{N} = \{1,\dots,N\}$ is the set of the numbers of payers; $X_i \subset R^{n_i}$ is the nonempty compact convex set of the strategies of the i-th player; Y is the compact convex set of unsertainties and the payoff function of i-th player $f_i(x,y)$ is continuous in $\prod_{i=1}^{N} X_i \times Y$

We define the following multivalent mappings

$$Y^S(\cdot): X\to Y: x\to Y^S(x)=\{y^S(x)\in Y \mid f(x,y)> f(x,y^S(x)),\ \forall y\in Y\},$$

$$Y_S(\cdot): X\to Y: x\to Y_S(x)=\{y_S(x)\in Y \mid f(x,y)< f(x,y_S(x)),\ \forall y\in Y\}.$$

<u>Definition1.</u> The situation $x^* \in X$ is called the solution of Nash-Hurwitz for game (1), if exists $\hat{y}_S(x^*) \in Y_S(x^*), \hat{y}^S(x^*) \in Y^S(x^*)$ such that

$$g_i(x^*, \hat{y}_S(x^*), \hat{y}^S(x^*)) \ge g_i(x^* \| x_i, y_S(x^* \| x_i), y^S(x^* \| x_i)),$$

$$\forall x_i \in X, \forall y_S(x^* \| x_i) \in Y_S((x^* \| x_i), \forall y_S(x^* \| x_i) \in Y_S\ (x^* \| x_i\},\ \forall i \in \mathbf{N}.$$

Here $g_i(x, y_S(x), y^S(x)) = \alpha_i f_i(x, y_S(x)) + (1-\alpha_i) f_i(x, y^S(x)),\ \alpha_i \in [0,1],\ i\in\mathbf{N}$..

Let X^N be a set of Nash-Hurwitz's solutions.

<u>Definition2.</u> The situation $x^* \in X^N$ is called the solution of Nash-Hurwitz-Slater for game (1), if exists $\bar{y}_S(x^*) \in Y_S(x^*)$, $\bar{y}^S(x^*) \in Y^S(x^*)$ such that

$$g(x^*, \bar{y}_S(x^*), \bar{y}^S(x^*)) < g(x, y_S(x), y^S(x)),$$

$$\forall x \in X^N, \forall y_S(x) \in Y_S(x), \forall y^S(x) \in Y^S(x).$$

Let X^{NS} be a set of Nash-Hurwitz-Slater's solutions.

<u>Theorem1.</u> If

1) functions $f_i(x,y)$ are concave with respect x when each $y \in Y$ is fixed and $f_i(x,y)$ are concave with respect y when each $x \in X$ is fixed;

2) for every $x', x'' \in X$ and $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda Y_S(x') + (1-\lambda) Y_S(x'') \subset Y_S(\lambda x' + (1-\lambda) x'')\ \ ;$$

$$\lambda Y^S(x') + (1-\lambda) Y^S(x'') \subset Y^S(\lambda x' + (1-\lambda) x'')\ \ ;$$

3) multivalent mappings $Y_S(\cdot): X \to Y, Y^S(\cdot): X \to Y$ are lower semicontinuous on X;

4) $$A(x) = \left\{ \bar{y}_S(x) \in Y_S(x) \left| f_i(x, \bar{y}_S(x)) = \max_{y_S(x)\in Y_S(x)} f_i(x, y_S(x)), \forall i \in \mathbf{N} \right. \right\},$$

$$B(x) = \left\{ \bar{y}^S(x) \in Y^S(x) \left| f_i(x, \bar{y}^S(x)) = \max_{y^S(x)\in Y^S(x)} f_i(x, y^S(x)), \forall i \in \mathbf{N} \right. \right\}$$

are nonempty sets;

Then, the game (1) has a least one solution of Nash-Hurwitz.

<u>Theorem2.</u> If the condition 1)-4) of theorem 1 are fulfilled, then the set X^{NS} is a nonempty compact subset of X.

Сокол Г.Ф. (Краснодар)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ.

Рассматривается задача :

$$\begin{cases} x''(t)+a_0(t)x'(t)+a_1(t)x(t)+\lambda\int\limits_{t_0}^{t}K(t,s)\,x(s)\,ds=f(t) & (1)\\ x(t_0)=x_0\,,\quad x'(t_0)=x'_0\,, & (2)\end{cases}$$

где функции $a_0(t), a_1(t), f(t)$ и $K(t,s)$ - непрерывны.

Исследуется возможность построения приближенного решения задачи (1)-(2) методом сплайн-коллокации.

Решение ищется в виде

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i A_i(t)+x'_0 B_0(t)+x'_n B_n(t), \qquad (3)$$

где α_i - некоторые константы, подлежащие определению; $A_i(t)$, $B_0(t)$, $B_n(t)$ - фундаментальные кубические сплайны [1], задаваемые следующими условиями:

$$\begin{aligned} &A_i(t_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=0,1,2,\dots,n),\\ &A'_i(t_k)=0 \quad (i=0,1,2,\dots,n;\ k=0,n);\\ &B_k(t_j)=0 \quad (j=0,1,2,\dots,n;\ k=0,n),\\ &B'_k(t_j)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases} \quad (k,j=0,n).\end{aligned} \qquad (4)$$

В случае, когда узлы коллокации совпадают с узлами равномерной сетки, указаны условия, обеспечивающие разрешимость соответствующей алгебраической системы уравнений.

Литература.

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976.

Соловьев В.Н. (г.Калининград Моск. обл.)

О СВЯЗИ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ. II

Здесь мы даем достаточные условия выпуклости множества A в терминах гладкости его опорной функции $\delta^*(y^*|A)$. В работах [1,2] приведены такие условия в терминах сопряженных функций и функции расстояния $\rho(x,A)$.

Теорема 1. *Пусть произвольное множество A будет (слабо) замкнуто в рефлексивном банаховом пространстве $Y\neq\mathbb{R}^1$, а его опорная функция $\delta^*(y^*|A)\not\equiv+\infty$ и дифференцируема по (Гато) Фреше во всякой точке $y^*\neq0$, в которой $\partial\delta^*(y^*|A)\neq\varnothing$. Тогда, если замыкание его выпуклой оболочки $\overline{\text{conv}}\,A$ имеет непустую внутренность, то справедливо равенство*

$$\overline{\text{conv}}\,A = (A+A)/2 \qquad (1)$$

Следствие 1. *Если множество $A\subset\mathbb{R}^n$ замкнуто, опорная функция $\delta^*(y^*|A)\not\equiv+\infty$, а ее субдифференциалы $\partial\delta^*(y^*|A)$ при $y^*\neq0$ содержат не более одного элемента, то при $n>1$ имеет место представление (1).*

Следствие 2. *Если множество $A\subset\mathbb{R}^n$ гомеоморфно выпуклому компакту в $\mathbb{R}^n$, а его опорная функция дифференцируема всюду, кроме нуля, то это множество выпукло.*

1. Soloviov V. Duality for Nonconvex Optimization and Its Applications// Analysis Mathem. 1993. V.19. N4. P.297-315.

2. Соловьев В.Н. О связи выпуклости и гладкости// Тезисы докладов III-ей Международной конференции женщин-математиков (29 мая - 2 июня 1995). Воронеж: ВИПКРО, 1995. С.60.

Степанов Г.Д. (Воронеж)

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ СО ЗНАКОПОСТОЯННЫМИ МИНОРАМИ

Многие вопросы, обсуждаемые в теории Чебышевских и Марковских систем, а также вопросы теории знакорегулярных ядер (ядер Келлога, осцилляционных по Гантмахеру-Крейну ядер, сильно знакорегулярных ядер), связаны с выяснением условий, обеспечивающих отсутствие зазора между строгим и нестрогим знаком миноров и вронскианов некоторых систем функций [1,2].

Далее через $[z_1, z_2, \ldots, z_p](t)$ обозначается определитель Вронского, составленный из функций $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_p(t)$.

Теорема 1. *Пусть для системы функций $\{z_i(t)\}_1^n$ из $C^{n-1}[a,b]$ при некотором $p < n$ выполнены условия*

$$z\begin{pmatrix} t_1, t_2, \ldots, t_p \\ 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (a < t_1 < \ldots < t_p < b), \tag{1}$$

$$[z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}](t) > 0 \quad (a < t < b).$$

Тогда

$$[z_1, z_2, \ldots, z_p](t) > 0 \quad (a < t < b).$$

Это утверждение играет заметную роль в получении эффективных необходимых и достаточных условий знакорегулярности функции Грина двухточечных краевых задач [3]. В частности, из теоремы 1 вытекает следующий факт

Следствие 1. *Пусть для системы функций $\{z_i(t)\}_1^n$ при всех $p = \overline{1,n}$ выполнено условие (1) и $[z_1, \ldots, z_n](t) > 0$ $(a < t < b)$. Тогда рассматриваемая система в (a,b) обладает W- свойством Пойа.*

Родственное следствию 1 утверждение приведено в [1] (У.4.2). Согласно этому утверждению, если система $\{z_i(t)\}_1^n$ является T_+-системой в (a,b) и при всех $p < n$ удовлетворяет условию (1), то она является и M_+-системой в (a,b) (CT-системой в терминологии [2]). Соответствующий аналог можно сформулировать и для теоремы 1.

Следует также отметить, что ни теорема 1, ни следствие 1 не допускают усиления "напрашивающейся" заменой условия (1) на условие

$$[z_1, z_2, \ldots, z_p](t) \geqslant 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

ЛИТЕРАТУРА. 1. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 3. *Степанов Г.Д.* Критерий знакорегулярности функции Грина двухточечной краевой задачи // ДАН СССР. 1977. Т. 234. №4. С. 765–767.

Стеценко В.Я. (Ставрополь)

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ МОДЕЛИ НЕЙМАНА

В докладе исследуются свойства модели Неймана

$$Bx - Ax, = f \quad (1)$$

с линейными операторами A, B, действующими из E_1 в E_2, где $E_i(i=1,2)$ банаховое пространства, полуупорядоченное конусом K_i, причем $BK_1 \subseteq K_2$, $AK_1 \subseteq K_2$, f - заданный элемент из K_2, x - неизвестный элемент из K_1. Решением (1) называется всякий элемент $x \in K_1$, удовлетворяющий неравенству (1). В частном случае, когда A, B - неотрицательные (n x m) матрицы, (1) превращается в модуль Неймана, имеющую важный экономический смысл.

Пару операторов (A, B) будем называть неразложимой, если совокупность $\overset{\circ}{K}_2$ внутренних элементов K_2 нечетное множество и из неравенств

$$\alpha Bx \geqslant Ax, \quad \alpha > 0, \ x > 0$$

Следует, что $Bx \in \overset{\circ}{K}_2$, это понятие при B=I переходит в понятие неразложимости оператора A.

Введем в рассмотрение множества:

$$(A,B) = \{\lambda \geqslant 0 : \exists_x > 0,\ Ax \geqslant \lambda Bx\},\ (A,B) = \{\lambda \geqslant 0 : \exists_x > 0,\ Ax \leqslant \lambda Bx\}$$ и числа $\Lambda(A,B) = \sup\{\lambda : \lambda \quad (A,B)\}$, $\lambda(A,B) = \inf\{\lambda : \lambda \quad (A,B)\}$.

Соответствующим образом определяются (A^*,B^*), (A^*,B^*), $\Lambda(A^*,B^*)$, $\Lambda(A^*,B^*)$.

Теорема 1. Если K_2 - телесен и $(A,B) \neq 0$, то

$$\lambda(A,B) \geqslant \lambda(A,B), \ \lambda(A,B) \geqslant \lambda(A^*,B^*)$$

В случае, когда (A, B) неразложимая пара, то $\lambda(A,B) \geqslant \lambda(A,B)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для разрешимости модели (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda(A,B) = \lambda(A,B) < 1$$

Для модели Неймана выясняются достаточные условия существования таких векторов $X^* > 0$ и $l^* > 0$ и числа λ, что

$$\lambda Bx^* = Ax^*, \quad \lambda B^* l^* = A^* l^*.$$

Рассматриваются также некоторые модификации модели (1), в том числе и нелинейные варианты этой модели.

Сукачева Т.Г. (Новгород)

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛУТРАЕКТОРИИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

Рассматривается задача Коши *для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева*

$$u(0) = u_0, \quad L\dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \tag{1}$$

Здесь оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \mathrm{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$, причем $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (1) назовем *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Задача (1) исследуется с помощью понятия относительно p-секториального оператора и полугруппового подхода в предположении, что оператор M сильно (L,p)- секториален. В этом случае $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{F}^0$– *ядра*, а $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^1$– *образы* аналитических разрешающих полугрупп U^t, F^t, соответствующего линейного однородного уравнения [1].

Т е о р е м а. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R – бирасщепляющий, оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, функция $f \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$ и*

(i) *для точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ выполнены равенства* $0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t)$, $u^{01} = \mathrm{const}$;

(ii) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 справедливо соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t));$$

(iii) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$– топлинейный изоморфизм* ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$, $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$, $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$ $k = 0,1$):

(iv) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено условие*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), являющееся квазистационарной полутраекторией.

Здесь $R = M_0^{-1}L_0$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $g = M_0^{-1}(I - Q)f$, $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ – проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом. Кроме того, $L_k(M_k)$ означает сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k(\mathcal{U}^k \cap \mathrm{dom}\, M)$ $k = 0,1$; $u = u^{00} + u^{01} + u^1$, $u^{00} \in \mathcal{U}^{00}$, $u^{01} \in \mathcal{U}^{01}$, $u^1 \in \mathcal{U}^1$, где положено $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$. Через $\mathcal{U}_M$ обозначен линеал $\mathrm{dom} M$, снабженный нормой графика.

В качестве модели предложенной абстрактной схемы рассматривается задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости. Представленные результаты обобщают и развивают соответствующие результаты [1-3].

Работа выполнена при поддержке Международного научного Фонда Дж.Сороса (грант d1320).

Литература

1. *Свиридюк Г.А.* // Успехи матем. наук. 1994, т. 49, N 4, с. 47-74.
2. *Свиридюк Г.А.* // Изв. вузов. Матем. 1990, N 12,с. 65-70.
3. *Свиридюк Г.А.* // Алгебра и анализ. 1994. т. 6, N 5, с. 252-272.

Сумин М.И. (Нижний Новгород)

СУБОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ [1]

Приводятся новые результаты теории субоптимального управления распределенными системами (см., например, [1,2]). В качестве конкретной управляемой системы рассматривается третья краевая задача для линейного параболического уравнения

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x,t) z_{x_j} + b_i(x,t,u(x,t)) z_{x_i} + a(x,t,u(x,t))z + f(x,t,u(x,t)) = 0,$$

$$z(x,0) = v(x),\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t)z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

где $u : Q_T \to R^m$, $v : \Omega \to R^1$, $w : S_T \to R^1$ - ограниченные распределенное, начальное и граничное управления соответственно, $z(x,t)$ - обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи. Рассматриваются две оптимизационные задачи: задача о наискорейшем попадании в функциональную точку (задача быстродействия)

$$T \to \inf, \quad z(\cdot, T) = p(\cdot) \in L_2(\Omega) \tag{1}$$

и задача с фиксированным временем

$$I_0(\pi) \to \inf,\ I^{\kappa_1}(\pi) \equiv (I_1(\pi), \ldots, I_{\kappa_1}(\pi)) \le q,\ I^{\kappa_2}(\pi) \equiv (I_{\kappa_1+1}(\pi), \ldots, I_\kappa(\pi)) = r, \tag{2}$$

где $\pi \equiv (u,v,w)$, $\kappa_2 \equiv \kappa - \kappa_1$, $p \in L_2(\Omega), q \in R^{\kappa_1}, r \in R^{\kappa_2}$ - параметры,

$$I_i(\pi) \equiv \int_\Omega F_i(x, z(x,T), v(x))\,dx + \int_{S_T} G_i(x,t,w(x,t))\,dxdt.$$

При некоторых естественных предположениях об исходных данных задач (1),(2) обсуждаются следующие вопросы: 1) необходимые и достаточные условия на элементы минимизирующих приближенных решений в смысле Дж.Варги; 2) дифференциальные свойства соответствующих понятию минимизирующего приближенного решения функций значений задач (1),(2) как функций их параметров, чувствительность; 3) условия регулярности и нормальности; 4) сходимость минимизирующих последовательностей.

Литература

1. Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. (в печати)

2. Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: свойства нормальности, субградиентный двойственный метод//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. (в печати)

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 95-01-00701а.

Сухочева Л.И. (Воронеж)

ОПЕРАТОРНЫЙ ПУЧОК С ПАРАМЕТРОМ

Рассматривается задача о малых конвективных движениях жидкости, частично заполняющей сосуд. После ряда преобразований, учитывая лишь нормальные движения и используя фундаментальные свойства оператора Стокса и оператора граничных данных, исходная начально краевая задача редуцируется к изучению спектральных свойств квадратичного пучка

$$L_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda(\varepsilon Q - I) + C \tag{1}$$

с операторными коэффициентами A, $\varepsilon Q - I$, C, действующими в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем A, C, Q — компактные самосопряженные операторы, $A > 0$, $C \geq 0$, а ε— положительный параметр.

Постановка задачи: существует ли такое ε_0, что при $\varepsilon > \varepsilon_0$ пучок (1) имеет собственные значения в правой полуплоскости, т.е. что соответствующие колебания будут неустойчивы.

Коль скоро , $\varepsilon\|Q\| \leq 1$, то все собственные значения пучка $L_\varepsilon(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости. Если $\varepsilon\|Q\| > 1$, то, вообще говоря, могут появиться точки спектра $L_\varepsilon(\lambda)$ и в открытой правой плуплоскости.
По пучку $L_\varepsilon(\lambda)$ строится линейная оператор-функция

$$N(\nu) = \nu U_\varepsilon - V_\lambda, \tag{2}$$

с операторными коэффициентами U_ε, самосопряженным оператором, имеющим при каждом ε конечное множество положительных собственных значений, и V_λ, положительным оператором при каждом λ. Доказывается существование таких ε, что собственные значения функции (2) совпадают с λ, собственными значениями пучка (1). Тем самым доказана возможность перехода собственных значений пучка (1) из левой полуплоскости в правую, что, как известно, влечет неустойчивость соответствующих движений жидкости.
Ключевыми при получения основного результата явились следующие формулы для упорядоченных по возрастанию собственных значений оператор-функции (2):

$$\begin{aligned} \nu_1(\varepsilon,\lambda) &= \min_{x \in \mathfrak{P}_\varepsilon^{++}} \frac{(V_\lambda x, x)}{(U_\varepsilon x, x)}, \\ \nu_i(\varepsilon,\lambda) &= \min_{\mathfrak{H}_i} \max_{x} \frac{(V_\lambda x, x)}{(U_\varepsilon x, x)}, \end{aligned}$$

где $x \in \mathfrak{H}_i \setminus \theta$, $\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{P}_\varepsilon^{++} = \{x : (U_\varepsilon x, x) > 0\} \cup \{\theta\}$, $\dim \mathfrak{H}_i = i$, $i = 2, 3, \ldots$.
Используя линеаризацию Крейна-Лаптева, показано, что при каждом ε пучок (1) имеет конечное число положительных собственных значений и оно не зависит от числа положительных собственных значений оператора $\varepsilon Q - I$.
В заключение заметим, что при $\varepsilon = 0$, т.е. без учета конвекции, рассматриваемая спектральная задача исследовалась С.Г. Крейном и др. Общий случай, пучок (1), исследовался Н.Д. Копачевским, в том числе с В.Н. Пивоварчиком.

Ткач Л.И (Тамбов).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИОНАЛОМ.

Пусть R^n - пространство n - мерных вектор-столбцов с нормой $|\bullet|$; $\Omega(R^n)$ - множество всех непустых замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств пространства R^n. Обозначим L - пространство суммируемых функций $x:[a, b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)|ds$; D - пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a, b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_D = |x(a)| + \|x\|_L$; C - пространство непрерывных функций $x:[a, b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Будем говорить, что множество ψ выпукло по переключению (разложению), если для любых измеримых по Лебегу множеств $U_1 \cup U_2 \subset [a, b]$, таких, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $U_1 \cup U_2 = [a, b]$ и любых $x, y \in \psi$ справедливо включение $\chi(U_1)x + \chi(U_2)y \in \psi$, где $\chi(\bullet)$ - характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\Pi[L]$ множество всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых по переключению подмножеств из L.

Рассмотрим задачу

$$Zx \in \Phi(x),\ lx \in \varphi(x), \qquad (1)$$

где многозначные отображения $\Phi: C \to \Pi[L]$, $\varphi: C \to \Omega(R^n)$; $Z: D \to$ _, $l: D \to R^n$ - линейные отображения.

Под решением задачи (1) понимается такой $x \in D$, который удовлетворяет включениям в (1).

Рассмотрим "овыпукленную" задачу (1)

$$Zx \in \overline{co}\,\Phi(x),\ lx \in \varphi(x), \qquad (2)$$

В докладе обсуждаются вопросы разрешимости задачи (1), а также вопрос о плотности в пространстве C множества решений включения (1) во множестве решений включения (2).

Терехин М.Т. /Рязань/

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Иследуется система уравнений вида

$$\dot{x} = A(t,\lambda)x + L(x,\lambda)x, \qquad (I)$$

в которой $A(t,\lambda)$ и $L(x,\lambda)$ – $n\times n$ -матрицы, $x\in E_n$, $\lambda\in E_m$ – параметр, E_s – S -мерное векторное пространство.

Предполагается, что для вектора $\lambda\in\{\lambda : \lambda\in E_m, |\lambda-\lambda_0|\le\delta_0\}$, $\delta_0>0$ -некоторое число, существуют числа $t_0(\lambda)<t_1(\lambda)<\ldots<t_m(\lambda)$, $t_m(\lambda)-t_0(\lambda)=\omega(\lambda)$, такие, что при любом $q\in\{1,2,\ldots,m\}$ и любом $t\in[t_{q-1}(\lambda), t_q(\lambda)[$ матрица $A(t,\lambda)$ определяется равенством $A(t,\lambda)=A_q(\lambda)$, вне промежутка $[t_0(\lambda), t_m(\lambda)[$ матрица $A(t,\lambda)$ определяется по $\omega(\lambda)$ -периодическому закону.

Под решением системы (I) , определенным на некотором промежутке, понимается непрерывная на этом промежутке вектор-функция, дифференцируемая во всех точках этого промежутка, кроме точек разрыва матричной функции $t\to A(t,\lambda)$, и удовлетворяющая во всех точках дифференцируемости системе (I) .

Доказана теорема, определяющая условия зависимости точек разрыва матричной функции $t\to A(t,\lambda)$ от параметра, при которых система (I) имеет ненулевое периодическое решение.

Толпаев В.А. (г.Ставрополь)

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КРУПНО-ЯЧЕИСТЫХ СРЕДАХ

Под крупно-ячеистой средой в работе понимается пространство, заполненное непроницаемыми неподвижными твердыми включениями, суммарный объем которых мал по сравнению с объемом рассматриваемого пространства. Моделью крупно-ячеистой среды может служить, например, лесной массив.

На течение жидкости в крупно-ячеистой среде существенное влияние оказывают силы трения. В то же время анализ течения жидкости в крупно-ячеистой среде невозможно выполнить путем решения задачи обтекания вязкой жидкостью всех заданных границ из-за непреодолимых математических трудностей.

Для исследования течений жидкости в крупно-ячеистых средах в работе предложен следующий подход: силы трения моделируются фиктивными массовыми силами сопротивления, пропорциональными первой степени скорости течения. Подчеркнем, что такой-же подход к моделированию сил трения применяют и в теории фильтрации. Однако в докладываемой работе, в отличие от теории фильтрации, изучаются течения в которых нельзя пренебрегать квадратичными членами скорости. Последнее является существенным отличием данной работы от теории фильтрации.

На основании перечисленных подходов по моделированию течений жидкости в крупно-ячеистых средах выведены уравнения для функции тока осредненного по пространству течения, а также для поля давления. Предложен алгоритм численного решения уравнения для функции тока.

Возможный круг приложений развитой теории: задачи обтекания лесных массивов воздушными потоками; исследования течений воздушных масс на полях с геометрически правильными посадками сельско-хозяйственных культур (например чайные плантации, виноградные посадки и н.др.); исследования течений жидкости в теплообменниках и н.др.

Тюрин В.М. (Липецк)

Некоторые свойства ε - коэрцитивных оценок для линейных дифференциальных операторов с частными производными

В банаховом пространстве X изучаются оценки коэрцитивного типа для линейного дифференциального оператора с частными производными

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha D^\alpha \colon W^m(F) \to F \ (m \in \mathbb{N}),$$

где $A_\alpha \in C(\mathbb{R}^n, \ \mathrm{Hom}(X, X))$, F - нормированное пространство функций $u\colon \ \mathbb{R}^n \to X$, $W^m(F)$ - нормированное пространство функций $u \in F$, у которых производные $D^\alpha u \in F$ ($|\alpha| \leqslant m$). Норма в пространстве $W^m(F)$ задаётся по формуле

$$||u||_{W^m(F)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_F.$$

Пусть $\langle\cdot\rangle$ - полунорма, определённая на некотором линейном многообразии $W^{m+\langle\rangle}(F) \subset W^m(F)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда ε - коэрцитивность оператора $P\colon W^m(F) \to F$ относительно полунормы $\langle\cdot\rangle$ определяется через неравенство

$$||u||_{W^m(F)} \leqslant \varepsilon \langle u\rangle + K_F ||Pu||_F \ (u \in W^{m+\langle\rangle}(F)).$$

В пространствах $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, \ X)$ со степановской нормой и Лебега $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ ($p \geqslant 1$) рассматривается полунорма

$$\langle u\rangle_{\gamma,mJ}{}^{0+} = C_1 \langle u\rangle_{\gamma,m}{}^{0} + C_2 \langle u\rangle_{\gamma,mJ}{}^{0}$$
$$(C_1 > 0, \ C_2 \geqslant 0, \ 0 < \gamma < 1).$$

В первом слагаемом справа величина $\langle u\rangle_{\gamma,m}{}^{0}$ есть суммарная гёльдеровская полунорма, а $\langle u\rangle_{\gamma,mJ}{}^{0}$ - суммарная интегральная гёльдеровская полунорма.

Полунорма $\langle\cdot\rangle_{\gamma,mJ}{}^{0+}$ выделяет в пространствах $W^m(M^p)$, $W^m(L^p)$ многообразия $W_{\gamma J}{}^{m+0\gamma}(M^p)$, $W_{\gamma J}{}^{m+0\gamma}(L^p)$, на функциях которых рассматриваются коэрцитивные неравенства.

Теорема. ε - коэрцитивность оператора $P\colon W^m(L^p) \to L^p$ относительно полунормы $\langle\cdot\rangle_{\gamma,mJ}{}^{0+}$ влечёт ε - коэрцитивность оператора $P\colon W^m(M^p) \to M^p$ относительно этой же полунормы.

Гюрин С.В. (Липецк)

Регулирование скорости в релейной системе электропривода постоянного тока

Рассматривается регулируемый по скорости электропривод постоянного тока, описываемый системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -a_2x_2 - a_3x_3 - bu + f, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x_2 характеризует отклонение фактической угловой скорости электропривода от заданной, x_3 - величина, связанная с током якоря, a_2 и a_3 определяются постоянными времени якорной цепи и электромеханической постоянной электропривода, b зависит от напряжения, приложенного к якоря двигателя, f характеризуется величиной момента статистического сопротивления и сигналом задания скорости.

Для системы (1) закон управления формируется в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \cdot \operatorname{sign} s, \\ s &= c_2x_2 + x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Динамическая система (1) - (2) есть система с переменной структурой. Для неё изучаются условия возникновения скользящих режимов на прямой s. Особенность управления (2) состоит в том, что скользящие режимы во всех точках прямой s могут существовать лишь при отдельных значениях параметра c_2. Это последнее обстоятельство заметно снижает качество регулирования привода. В связи со сказанным скользящие режимы для системы (1) - (2) рассматриваются на определённом отрезке прямой s.

Получена область G_0, из которой изображающая точка попадает на рассматриваемый отрезок скольжения. Если корни характеристического уравнения системы (1) действительные, то область G_0 можно записать в виде неравенств

$$G_0:\ \phi_2(x_3) < x_2 < \phi_1(x_3),\quad |x_3| < d_1. \qquad (3)$$

В (3) $x_2 = \phi_2(x_3)$ и $x_2 = \phi_1(x_3)$ - уравнения интегральных кривых систем (1) при определённых значениях u и f, проходящих через некоторую точку, d_1 - постоянная величина, зависящая от параметра c_2.

На основании полученных результатов для систем (1) - (2) построен релейный регулятор скорости электропривода постоянного тока.

УКД 519.837

Ухоботов В.И. (Челябинск)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИГР С ПОЛОМКОЙ

Линейная дифференциальная игра с заданным моментом окончания с помощью линейной замены переменных может быть сведена к игре с простым движением, в которой вектограммы игроков зависят от времени [1]:

$$\dot{z} = -u + v, z \in R^n, \ u \in U(t), \ v \in V(t), \ t \le p \tag{1}$$

Рассматривается игра, в которой вектограмма первого игрока в каждый момент времени является многогранником $U(t) = A(\alpha(t))$, где

$$A(\alpha) = \{z \in R^n : < x_j, z > \le \alpha_j, \ j = 1, ..., l\} \tag{2}$$

Здесь $x_j \in R^n$-заданные векторы. Многогранник (2) является непустым множеством тогда и только тогда, когда $\alpha \in K$, где K-конус, определяемый векторами x_j. Предполагается, что при любых $\alpha \in K$ многогранник (2) является ограниченным и удовлетворяет условию линейности

$$\alpha, \ \beta \in K \Rightarrow A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

Первый игрок стремится минимизировать величину

$$f(z(p)) = \max_{1 \le j \le l} < x_j, z(p) >$$

Второй игрок ее минимизирует. предполагаем, что при $t_0 \le t \le \tau$ динамика определяется функциями $\alpha(t)$ и множеством $V(t)$. А при $\tau \le t \le p$-функциями $\alpha_*(t)$ и множеством $V_*(t)$. Это может произойти в результате поломки [2]. Момент поломки τ первому игроку не известен.

В явном виде записывается для каждого начального состояния значение цены игры. Осуществляется синтез управления игроков. При этом оказывается, что в пространстве переменных t, z существует область, в которой цена игры не зависит от переменной z. Это приводит к тому, что в этой области игроки могут выбирать произвольные допустимые управления. В этом смысле эта область является областью безразличия.

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.:Наука, 1974, 456 с.

2. Никольский М.С. Об одной задаче управления с нарушениями в динамике // Тр. МИАН СССР, 1988.Т.185.с.181-186.

УДК 517.917

Фомин В.И. (Тамбов)

О ПОВЫШЕНИИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Как известно ([1], [2]), классические, то есть непрерывно дифференцируемые решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром при производной в банаховом пространстве, переходящего при обращении параметра в нуль в сингулярное дифференциальное уравнение, могут не сходиться при стремлении малого параметра к нулю к ограниченному решению соответствующего предельного уравнения; однако, если рассматривать достаточно гладкие решения этого уравнения, то такая сходимость имеет место. В связи с этим актуальна проблема получения решения задачи Коши с заданным порядком гладкости для линейного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad s \le t \le T, \quad s \in [0,T), & (1) \\ x(s) = x_s, \quad x_s \in \mathcal{D}(A) & (2) \end{cases}$$

с линейным неограниченным коэффициентом $A(t)$ в банаховом пространстве E : при каждом $t \in [0,T]$ $A(t): \mathcal{D}(A(t)) \equiv \mathcal{D}(A) \subset E \to E$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$.

Показано, что при определенной гладкости $A(t)$ (в смысле сильной дифференцируемости) и $f(t)$ решение $x(t)$ задачи (1), (2) при $x_s \in \mathcal{D}(A^n(s))$ n раз непрерывно дифференцируемо, $x(t) \in \mathcal{D}(A^n(t))$, $s \le t \le T$, ($n \in \mathcal{N}$, $n \ge 2$).

Литература

1. Зюкин П.Н. Поведение решений сингулярных дифференциальных уравнений с малым параметром: Автореф. дис... канд.физ.-мат. наук. - Воронеж, Изд-во Воронежского ун-та, 1982. - 13 с.
2. Фомин В.И. Сингулярное дифференциальное уравнение с малым параметром в случае переменного ограниченного операторного коэффициента// Дифференц. уравнения. - 1989. - Т.25, № 8. - С.1350-1354.

УДК 517.43 Хорошавин С.А. (г.Воронеж)

О СХОДИМОСТИ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ АППРОКСИМАЦИЯМ КРЕЙНА J-УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть H — гильбертово пространство, P_+, P_- — пара ортопроекторов, $P_+ + P_- = I$, $P_+P_- = 0$. Положим $J := P_+ - P_-$. Пусть V — J-унитарный оператор, т.е. $V^*JV = J = VJV^*$. Пусть, наконец, K_t — угловой оператор максимального неотрицательного подпространства, инвариантного относительно действия оператора $V^{-1}e^{tJ}$ (т.н. аппроксимации Крейна оператора V^{-1}); здесь $t > 0$.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть V — нормальный оператор. Тогда семейство $\{K_t\}_t$ является s^*- сходящимся при $t \to +0$.

Теорема 2. Пусть L — V- инвариантное подпространство, P — ортопроектор на L, $P_t := P_+ + K_tP_+$.
Если спектральный радиус $V \mid L$ меньше единицы, то $\|(I - P_t)P\| \to 0$ при $t \to +0$.

Теорема 3. Пусть

$$R_t := (P_+ + K_tP_+ + K_t^*P_- + P_-)/2,$$

R_0 - - предельная точка семейства $\{R_t\}_t$ $(t \to +0)$ в слабой операторной топологии.

Тогда: 1) $V\,Ker(I - R_0) = Ker(I - R_0)$

2) $Ker(I - R_0)$ — нейтральное подпространство.

Христиченко Ю.М., Гусятников П.Б.(Москва)

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОПЕРЁК СЛОЯ ЖИДКОСТИ В УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$d^2T/dt^2 = - Q(T(\cdot))\Phi(T) \qquad (1)$$

в котором $T=T(t)$, $t \in [-1,1] = K$, Q - функционал, определенный на множестве $C(K)$ всех непрерывных на K функций $T(\cdot)$, $\Phi(z) > 0$ - непрерывная по $z \in R^1$ функция. Предположим, что для всякой функции $T(\cdot) \in C(K)$: $Q(T(\cdot)) \geq 0$. Для дифференциального уравнения (1) поставим краевую задачу

$$T(-1) = A, \ T(1) = B, \qquad (2)$$

где A и B - заданные числа. В общем случае краевая задача (1),(2) может не иметь решения или иметь несколько решений, как показывает пример уравнения (1) при $\Phi(T) = 1$, $B = -A = 1$,

$$Q(T) = \int_{-1}^{1} T^2(t)dt + 2\lambda.$$

При $\lambda > 13/96$ краевая задача (1),(2) решений не имеет, при $\lambda = 13/96$ задача имеет единственное решение, при $0 < \lambda < 13/96$ задача имеет два решения. Нами рассмотрен функционал

$$Q(T) = 4m \left(\int_{-1}^{1} \Phi(T(t))dt \right)^{-2}, \qquad (3)$$

$m > 0$ - заданное число. Задача (1),(2) с функционалом (3) при $\Phi(z) = \exp(z)$ соответствует задаче о стационарном распределении температуры поперек тонкого слоя смазки в упругогидродинамическом контакте ([1], стр. 229-243). Доказана

Теорема. *Задача (1),(2) с функционалом (3) имеет и притом единственное решение, непрерывно зависящее от* m, A, B *и функции* Φ.

Литература

1. М.А.Галахов, П.Б.Гусятников, А.П.Новиков Математические модели контактной гидродинамики. М.,Наука, 1985.

Христиченко М.Д., Гусятников П.Б.(Москва)

О МАТРИЧНОМ УРАВНЕНИИ РИККАТИ В ФИЛЬТРЕ КАЛМАНА ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НАВИГАЦИИ

Рассмотрим дифференциальное матричное уравнение Риккати

$$dR/dt = AR+RB+C-RDR, \qquad (1)$$

в котором все матрицы - квадратные матрицы четвертого порядка, $C=\mathrm{diag}(0,c^2,0,0)$, $D=\mathrm{diag}(a^2,0,0,b^2)$, $B = A^T$,строки матрицы A суть (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,0), (0,0,0,0). Это уравнение является модельным в задаче Калмановской фильтрации процесса равномерной навигации при наличии двух датчиков физической информации [1]. Найдено в аналитическом виде [1] и применено в алгоритмах реальных навигационных систем общее симметрическое решение уравнения (1). С точки зрения теории дифференциальных уравнений представляет самостоятельный интерес изучение всех, а не только симметричных решений уравнения (1) и, в частности, стационарных решений этого уравнения ,т.е. решений алгебраического уравнения

$$AR+RB+C-RDR = 0 \qquad (2)$$

Найдено множество всех решений уравнения (2) для этой модельной задачи. Это множество оказалось распадающимся на несколько семейств многочленов степени не выше второй от двух действительных переменных с матричными коэффициентами [2]. Каждое из этих семейств составлено из линейных образующих. Изучен вопрос об устойчивости стационарных решений уравнения (1). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(95-01-00771)

Литература

1. П.Б.Гусятников, М.Д.Христиченко. "Асимптотическое поведение решения уравнения ковариаций для навигационного комплекса", ПММ, т.59 вып.1, 1995, С.96-101.

2. П.Б.Гусятников, М.Д.Христиченко. "Решение задачи стационарного распределения ошибки оценки", в сб. Проблемы математики в физических и технических задачах, М., изд.МФТИ, 1994, С.85-91.

УДК 517.928

А.П.Хромов (Саратов)

Об обращении одного класса интегральных операторов

Пусть $Af = \int_0^1 A(x,t)$ интегральный оператор в $L_2[0,1]$ с ядром:

$$A(x,t) = \alpha_1 A_1(x,t)\varepsilon(x,t) + \alpha_2 A_2(x,t)\varepsilon(x,t) +$$
$$+ \alpha_3 A_3(1-x,t)\varepsilon(1-x,t) + \alpha_4 A_4(1-x,t)\varepsilon(t,1-x),$$

$\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $t \le x$, $\varepsilon(x,t) \equiv 0$ при $t > x$.

Предполагаем, что $A_i(x,t)$ $(i = 1,3)$ непрерывно дифференцируема при $t \le x$; $A_i(x,t)$ $(i = 2,4)$ непрерывно дифференцируема при $t \ge x$ и $A_i(x,t) = 1 + o(1)$ при $x - t \to 0$ $(i = 1,2,3,4)$.

Теорема 1. *Пусть $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \ne 0$ и A^{-1} существует. Тогда существует комплексное число α такое, что для $y = Af$ имеет место:*

$$A^{-1}y = (E + N_\alpha)^{-1}P(y'(x) + \alpha y(x)),$$

$$y(0) = \int_0^1 A(0,t)(E + N_\alpha)^{-1}P(y'(t) + \alpha y(t))dt$$

и обратно. Здесь $N_\alpha = PN_{1,\alpha}$, $N_{1,\alpha}f = \int_0^1 (A'_x(x,t) + \alpha A(x,t))f(t)dt$, E- единичный оператор, $Pf(x) = \delta^{-1}\{(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)f(1-x)\}$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $A_1(x,t) \equiv A_3(x,t)$ и $\delta \ne 0$. Тогда A^{-1} существует и для $y = Af$ справедливы:*

$$A^{-1}y = \delta^{-1}(E + N)^{-1}[\alpha_1 y'(x) + \alpha_3 y'(1-x)],\ \alpha_1 y(0) - \alpha_3 y(1) = 0$$

и обратно. Здесь $Nf = \int_0^x A'_{1,x}(x,t)f(t)dt$.

Укажем на одно применение дифференциально-разностного оператора: $l[y] = \alpha_1 y'(x) + \alpha_3 y'(1-x)$.
Пусть L оператор: $Ly = l[y]$, $U_1(y) = c_1 y(0) - \alpha_1 y(1) = 0$. Оказывается, что $l^2[y] = \delta y''(x)$, где $\delta = \alpha_1^2 - \alpha_3^2$. Обозначим через D область определения оператора $y''(x)$, $U_i(y) = c_i y^{(i-1)}(0) - d_i y^{(i-1)}(1) = 0$ $(i = 1,2)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы $D = D_{L^2}$ (-область определения оператора L^2) при некоторых α_1 и α_3, причем $\delta \ne 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех: а) $c_i^2 = d_i^2$ $(i = 1,2)$, б) $c_i = d_i$ $(i = 1,2)$, в) $c_i = -d_i$ $(i = 1,2)$.*

(Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект n 95-01-00156)

Цалюк З.Б. (Краснодар)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, решение системы

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t)$$

записывается в виде

$$x(t) = R(t)x(0) + \int_0^t R(t-s)f(s)ds,$$

где матрица R – решение задачи

$$R'(t) = AR(t) + \int_0^t K(t-s)R(s)ds, \quad R(0) = I.$$

Для R получено представление, позволяющее, в частности, находить асимптотику решения в зависимости от свойств f.

Пусть $\hat{K}(z)$ преобразование Лапласа ядра K, а $P_z(t)$ – означает многочлен с матричными коэффициентами порядка $\le z$.

ТЕОРЕМА

Пусть матрица $(zI - A - \hat{K}(z))^{-1}$ имеет в полуплоскости $Re\, z \ge 0$ конечное число полюсов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ порядков $m_1, \dots, m_k$ соответственно.

Пусть $t^{p+q}K(t) \in L_1[0,\infty)$, где $p = \max\limits_{Re\,\lambda_j = 0}\{m_j\}$, а $q \ge 0$ – целое число. Тогда

$$R(t) = e^{-t}I + H(t) + \int_0^t Q(t-s)H(s)ds,$$

где $Q(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t}$, а $t^q H \in L_1$ и $t^q H(t) \longrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

Подобное же представление получено для резольвенты системы интегральных уравнений Вольтерра.

Условия нелокальной распрямляемости гладкой функции

С.Л.Царёв (Воронеж)

Из леммы Морса вытекает, что гладкая функция $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в невырожденной точке минимума $a \in \mathbb{R}^n$ допускает локальное распрямление: в некоторой карте (гладкой локальной системе координат) $x = \varphi(\xi)$ с центром в точке a $(\varphi(0) = a)$ функция является квадратичной формой в каноническом виде: $V(\varphi(\xi)) = |\xi|^2 = \Sigma\xi_j^2$. В связи с задачами нелокального существования и сравнения конечномерных редукций гладких функционалов возникает необходимость изучения условий глобальной распрямляемости гладкой функции. Нетрудно заметить, что в случае глобальной распрямляемости V на $\mathbb{R}^n$ с необходимостью должны выполняться следующие условия: $V(a) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \neq a$, a - морсовская точка V и a - единственная критическая точка V. Примеры показывают, что эти условия не являются достаточными (исключая $n = 1$). Если к ним добавить коэрцитивность (неограниченное возрастание V на бесконечности), то получится достаточная для глобальной распрямляемости совокупность условий (в карте на $\mathbb{R}^n$, образ которой совпадает с $\mathbb{R}^n$). Существуют менее жесткие дополнительные ограничения, гарантирующие распрямляемость в картах на $\mathbb{R}^n$ с образами, не совпадающими с $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пусть выполняется одно из следующих условий: 1) множество $\{V = c\}$ компактно $\forall c \in \mathbb{R}$, 2) каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ не направлен противоположно вектору $\operatorname{grad} V(x)$, 3) существует такая коэрцитивная функция U, что $\operatorname{grad} V(x) \neq l \operatorname{grad} U(x)$ $\forall x, l$, $x \in \{\mathbb{R}^n \setminus 0\}$, $l < 0$. Тогда V допускает глобальное распрямление.*

Доклад посвящен доказательству этой теоремы, некоторых её обобщений и описанию новых топологических конструкций, позволяющих строить разнообразные классы глобально распрямляемых или не распрямляемых функций.

Будет также расмотрено обобщение, связанное с расширением класса используемых карт за счет допущения "самопересечений" (совпадение координат в различных точках).

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для гиперболических уравнений

В обширной литературе, посвященной теории оптимального управления гиперболическими уравнениями, традиционно мало внимания уделялось вопросу об устойчивости (по возмущению управления) существования глобальных решений (у.с.г.р.). Важность изучения этого вопроса при построении необходимых условий оптимальности и обосновании численных методов несомненна (см.,напр.,[1]). В [2] был предложен общий способ получения достаточных условий у.с.г.р. краевых задач для класса управляемых систем, сводящихся к функциональному уравнению вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi,$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$—компакт, $f : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m$—функция типа Каратеодори, $v \in L_{\infty,s}(\Pi)$—управление, $A : L_{\infty,m}(\Pi) \longrightarrow L_{\infty,l}(\Pi)$—линейный ограниченный оператор, вольтерров в смысле определения, обобщающего известное определение А.Н.Тихонова. К указанному классу относятся и многие гиперболические системы. В [2] были получены условия у.с.г.р. для: задачи Гурса–Дарбу, задачи Коши и смешанной задачи для нелинейного волнового уравнения, задачи Коши для системы уравнений 1-го порядка. В докладе приводятся условия у.с.г.р. ряда не рассматривавшихся ранее в теории оптимального управления краевых задач для гиперболических уравнений. Сюда входят: всевозможные варианты задачи Коши для нелинейного уравнения Дарбу (рассматриваются, в частности, случаи варьируемой границы и частичного задания граничных условий на характеристике), многомерные аналоги задачи Гурса–Дарбу, задача Коши для полулинейного гиперболического уравнения 2-го порядка с волновым оператором в главной части. Применяется метод [2], сводящий получение достаточных условий у.с.г.р. к изучению оператора A. Используется признак квазинильпотентности, предложенный в [3].

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. -М.:Наука, 1987.

2. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

3. Сумин В.И., Чернов А.В. / Тезисы 2-й Междунар. конф. "Матем. алгоритмы", Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1995. С.54.

УДК 517.927

Завгородний М.Г. (Воронеж), Четвертнова Т.В. (Тамбов)

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ.

На геометрическом графе - пучке Г (см. 1), состоящем из 4-х ребер с общей вершиной a, рассмотрим краевую задачу

$$(pu'')''+qu=\lambda u \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{\partial\Gamma}=u'|_{\partial\Gamma}=0 \tag{2}$$

с условиями непрерывности

$$u_1(a)=u_2(a)=u_3(a)=u_4(a) \tag{3}$$

и с условиями "гладкости"

$$u_1'(a)=u_3'(a), \qquad u_2'(a)=u_4'(a),$$

$$u_1''(a)-u_3''(a)=ku_1'(a), \quad u_2''(a)-u_4''(a)=\mu u_2'(a), \quad \sum_{i=1}^{4}\alpha_i(pu_i'')'=0 \tag{4}$$

В докладе обсуждается вопрос о базисности системы корневых (собственных и присоединенных) функций рассматриваемой краевой задачи.

Теорема. Любая истокопредставимая функция разлагается в ряд по корневым функциям, сходящийся по норме пространства $C^3(\Gamma)$.

При доказательстве теоремы существенным образом используются оценки функции Грина:

$$|G(x,s,\lambda)| \le c|\lambda|^{-\frac{3}{4}}\exp\{-\sigma|x-s|\},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s,\lambda)\right| \le c|\lambda|^{-\frac{1}{4}(3-k)}\exp\{-\sigma|x-s|\},$$

где $\sigma=|\mathrm{Re}\,\lambda^{\frac{1}{4}}|$.

В заключении отметим, что к изучаемой краевой задаче мы приходим при применении метода разделения переменных к задаче, моделирующей малые колебания крестообразной системы стержней, спаянных в их общей вершине

Литература.

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. // Дифференц. ур-я, 1989, Т.25, N 7.- С. 1141-1150.

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

О РЕЗОНАНСАХ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Пусть $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ – периодическая вещественная чётная по переменной x_3 функция, $W(x)$ – функция, периодическая по x_1, x_2 и экспоненциально убывающая при $|x_3| \to \infty$ (все периоды равны 1). Рассмотрим оператор Шредингера $H_\varepsilon(k_\parallel) = -\Delta + V(x) + \varepsilon W(x)$, определённый на функциях из $L^2(\Omega)$ с блоховскими по x_1, x_2 граничными условиями, где $k_\parallel = (k_1, k_2)$ – (плоский) квазиимпульс, $\Omega = (0,1)^2 \times \mathbb{R}$. Пусть $H(k) = -\Delta + V(x)$ – оператор Шредингера, определённый на блоховских функциях из $L^2(\Omega_0)$, где $k = (k_\parallel, k_3)$, $\Omega_0 = (0,1)^3$. Предположим, что $E_0 = E_{n_0}(k_\parallel, 0)$ – экстремум невырожденного собственного значения $E_{n_0}(k)$ – и больше никакого – оператора $H(k)$, $\psi_{n_0}(x,k)$ – соответствующий собственный вектор с единичной нормой, причём

$$A = \frac{\partial^2 E_{n_0}(k_\parallel, 0)}{\partial k_3^2} \neq 0, W_0 = \int_{\Omega_0} |\psi_{n_0}(x,(k_\parallel,0))|^2 W(x)\,dx \neq 0.$$

Обозначим через $\Gamma_0(x,y,k_\parallel,E)$ ядро резольвенты оператора $H_0(k_\parallel)$. В окрестности точки E_0 функция Γ_0 имеет особенность вида $(E-E_0)^{-1/2}$. Решения интегрального уравнения

$$\psi(x) = -\varepsilon \int_\Omega \Gamma_0(x,y,k_\parallel,E) W(y) \psi(y)\,dy \qquad (\mathrm{I})$$

являются собственными функциями оператора $H_\varepsilon(k_\parallel)$, если E вещественно и не лежит на спектре $H_0(k_\parallel)$; и резонансами, если E находится на втором листе и $\operatorname{Im} E < 0$.

Можно доказать, что для малых ε и $E \approx E_0$ решение уравнения (I) существует и единственно (с точностью до числового множителя) в классе функций, для которых $\sqrt{|W|}\psi \in L^2(\Omega)$; а для соответствующего уровня верна формула

$$E_\varepsilon(k_\parallel) = E_0 - \varepsilon^2 (2A)^{-1} W_0^2 + O(\varepsilon^3).$$

Аналогичные результаты справедливы и в (более простом) одномерном случае, а также при отсутствии чётности потенциала.

Шабанова С.С. (г. Воронеж)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ.

Построена асимптотика решения периодической задачи для нелинейного матрично сингулярно возмущенного уравнения вида:

$$(A+\varepsilon B)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = f(t,x,\varepsilon) \qquad (1)$$
$$x(0,\varepsilon)=x(T,\varepsilon)$$

где $x(t,\varepsilon)\in X$, X-действительное конечномерное евклидово пространство, $t\in[0,T]$, $f(t,x,\varepsilon)\in X$ гладкие T-периодические функции и $f(t,x,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j f_j(t,x)$; оператор $A\in L(X)$ вырожден, $A+\varepsilon B\in L(X)$ обратим при достаточно малых $\varepsilon\neq 0$, причем все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p. Заметим, что асимптотика решений задачи Коши для линейных уравнений построена в работах Зубовой С.П. (см.[1]), а асимптотика решения периодической задачи для линейного матрично сингулярно возмущенного уравнения построена в [3]. Асимптотика для решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (1) искалась в виде:

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n(t)+r_n(t,\varepsilon) \qquad (2)$$

При некоторых условиях найдены выражения для T периодических функций x_j. Предполагая, что существует вещественная неособенная матрица $P(t)$ с периодом T, такая что $P^{-1}(t)G(t)P(t)=\begin{pmatrix}\bar{B}(t) & 0\\ 0 & \bar{D}(t)\end{pmatrix}$, где $B(t)$ матрица с m строками и столбцами, собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части, а $D(t)$ матрица с n строками и столбцами, собственные значения которой имеют положительные вещественные части, $G(t)$ оператор, который определяется из уравнения (1) и имеет m собственных значений с отрицателными вещественными частями и n – с положительными, и применяя метод последовательных приближений с учетом [2] получена оценка :

$$\| r_n(t,\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^{n+1}, \quad C>0 \qquad (3)$$

Литература

1. Зубова С.П. Асимптотическое решение некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений./Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям. Фрунзе: Илим, 1975, 36-39.

2. Flatto L., Levinson N. Periodic solutions of singularly perturbed systems, J.Rat.Mech and Analysis, 4(1955), 943-950.

3. Шабанова С.С. Асимптотика решений периодической задачи для линейного матрично сингулярно возмущенного уравнения./3 Международная конференция женщин-математиков, 1995, тезисы доклада./

Шаламова Н.Л. (Омск)

ОДНОРОДНЫЕ ПОРЯДКИ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Рассматриваем порядок в 3-мерном аффинном пространстве A^3, заданный семейством $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^3\}$ подмножеств P_x пространства A^3, для которого выполняются условия: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если $y \neq x$, то $P_y \neq P_x$ 4) P_x – эллиптический конус.

Пусть G_3 это связная односвязная разрешимая группа Ли, действующая просто транзитивно как подгруппа группы $Aff(A^3)$ аффинных преобразований аффинного пространства A^3. Предполагаем, что действие G_3 на A^3 нормально, т.е. максимальная абелева подгруппа действует как параллельные переносы. Будем считать, что порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно G_3, т.е. $g(P_x) = P_{g(x)}$ для любых $x \in A^3$ и $g \in G_3$.

Гомеоморфизм $f : A^3 \to A^3$ называется порядковым $\mathcal{P}$-автоморфизмом, если для любой $x \in A^3$ имеем $f(P_x) = P_{f(x)}$. Группу порядковых автоморфизмов порядка $\mathcal{P}$ будем обозначать $Aut(\mathcal{P})$. Если e фиксированная точка A^3, то $Aut(\mathcal{P})_e$ стабилизатор группы $Aut(\mathcal{P})$ в точке e.

Порядок $\mathcal{P}$ называется int-однородным (соотв.: ∂-однородным, ext-однородным), если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $int(P_e)$ (соотв.: на $\partial P_e \setminus \{e\}, A^3 \setminus (P_e \cup P_e^-)$), где $P_e^- = \{x \in A^3 : e \in P_x\}$.

Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ порядок в A^3, удовлетворяющий перечисленным выше условиям, а группа G_3 действует нормально на A^3. Тогда порядок $\mathcal{P}$ будет либо int-, либо ∂–, либо ext-однородным тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$задается семейством равных и параллельных конусов.*

Замечание. Порядок, заданный семейством равных и параллельных эллиптических конусов инвариантен относительно аффинного нормального действия абелевой группы и группы G_4VII_0 по классификации Бьянки-Гаврилова.

Краевые и угловые особенности в анализе закритического поведения эйлерова стержня

О.В.Швырёва (Воронеж)

Известно, что краевые и угловые особенности гладких функций появляются в вариационных задачах с ограничениями в виде неравенств и в вариационных задачах, эквивариантных относительно систем инволюций, коммутирующих на линейных оболочках основных мод бифуркаций [1]. Доклад посвящен изучению краевых и угловых экстремалей функционала полной энергии

$$V(x,\lambda,\psi)=\int\limits_0^1\left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2}+\lambda(\cos x(t)-1)+\psi(t)x(t)\right)dt$$

эйлерова стержня при ограничении $\int\limits_0^1 e(t)x(t)dt\geq 0$ и при паре ограничений $\int\limits_0^1 e_j(t)x(t)dt\geq 0$, $j=1,2$; ψ - управляющий функциональный параметр. Предполагается также, что для угловой функции $x(t)$ выполняются стандартные краевые условия на концах отрезка $[0,1]$ (типа свободного или жесткого закреплений). Наличие при $\psi=0$ симметрии четности приводит к появлению новых типов краевых и угловых особенностей. Их изучение можно успешно осуществлять на основе редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта, в соответствии с которой анализ поведения экстремалей V (при вариациях λ,ψ) сводится к изучению критических точек ключевой функции на полуплоскости (случай двух ключевых переменных) или в трехмерной области, ограниченной двухгранным углом (случай трех ключевых переменных). Используя стандартные методы теории особенностей гладких функций (диаграммы Ньютона, нормальные формы особенностей, версальные деформации и т.п.), можно дать описание бифуркационных диаграмм получаемых особенностей и раскладов экстремалей (количеств экстремалей и распределений значений индекса Морса) при небифуркационных значениях параметров.

Литература: [1] *Сапронов Ю.И.* Полурегулярные угловые особенности гладких функций.// Матем. сборник. 1989. Т.180,№ 10. С.1299-1310.

Шурупова И.Ю.

О ЗНАКОРЕГУЛЯРНОСТИ ОДНОГО КЛАССА УСЛОВНО-ГЛАДКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В осцилляционной теории одним из самых существенных является свойство знакорегулярности краевой задачи. Задача называется знакорегулярной если для любой правой части $f(t)$ и соответствующего решения $x(t)$ выполнено $S(x)\leqslant S(f)$.

Рассмотрим $\tilde{C}[a,b]$ - множество непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих кусочно-непрерывные производные до порядка $n-1$. Пусть $M_{\alpha\beta}$ один из классов условно-гладких функций, определяемый заданием в точках ξ_i условий вида

$$\Delta D_{l_i}x(\xi_i)=\alpha_i D_{l_i}x(\xi_i-0),\ i=\overline{1,p},$$

$$\Delta D_{l_i}x(\xi_i)=\beta_{1i}D_{l_i-1}x(\xi_i-0)=\beta_{2i}D_{l_i-1}x(\xi_i+0),\ i=\overline{p+1,q},$$

причем некоторые из точек $\xi_i, i=\overline{1,q}$ могут совпадать.

Точку $s\in(a,b)$ назовем нулевой точкой кусочно-непрерывной функции $x(\cdot)$ из $M_{\alpha\beta}$ либо, если функция непрерывна в точке s и $x(s)=0$, либо s- точка разрыва и в ней $x(s+0)x(s-0)\leqslant 0$. Определим кратность изолированного нуля ξ для функции $x(\cdot)$. Если для некоторого $j<k$ точка ξ является нулевой точкой функций x, $D_1x,\ldots, D_{j-1}x$ и, если не является нулевым местом функции D_jx, то $r_k(x,\xi)=j$, иначе $r_k(x,\xi)=k$.

Определим функцию $\pi_j(t)=\prod_i \operatorname{sign}(t-\xi_i)$, где в произведении берутся те точки ξ_i, в которых функция $D_jx(t)$ допускает разрывы. Обозначим $d_j=S(\pi_j)$, $\tau_i=r_1(D_ix)+d_i-r_1(\pi_i\cdot D_ix)$.

Теорема 1. Пусть $x(\cdot)\in M_{\alpha\beta}$ и $s\leqslant n-1$. Тогда для всех $0\leqslant j\leqslant k-1\leqslant s$ выполнено $r_k(x)-j\leqslant r_{k-j}(D_jx)-\tau_j\leqslant r_1(D_{k-1}x)-\tau_{k-1}+k-j-1$.

Теорема 2. Краевая задача Валле-Пуссена

$$Lx\equiv x^{(n)}+p_1(\cdot)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(\cdot)x=f$$

$$x(a_i)=x'(a_i)=\ldots=x^{(k_i-1)}(a_i)=0,\ i=\overline{0,m},\ \sum_{i=0}^{m}k_i=n.$$

в классе $M_{\alpha\beta}$ является знакорегулярной.

У Д К 517.513

Щербин В.М. (Воронеж)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

Пусть X и У - К - пространства, то есть условно полные векторные решетки.

$$u \in X_+ \setminus \{0\},\ v \in Y_+ \setminus \{0\}\ ;\ P_\varepsilon(a, u) = \{x \in X \mid |x - a| < \varepsilon u\}$$
$$X_u^0 = \{h \in X \mid \alpha u \le h \le \beta u;\ \alpha = \alpha(h), \beta = \beta(h);\ \alpha, \beta \in R\}.$$

Определение: O- линейный оператор $L_a: X_u^0 \to Y$ называется относительно равномерной производной или (u, v) - производной отображения $f ;\ P_\varepsilon(a, u) \to Y$ в точке $a \in X$, если из $|h| \le \varepsilon_n u$ следует

$$|\omega_n| = |f(a + h_n) - f(a) - L_a h_n| \le \eta_n v,$$

причем $\eta_n \cdot \varepsilon_{n}^{-1} \to 0$ при $\varepsilon_n \to 0$. См. [2]. (a).

Будем обозначать эту производную $f_{(u, v)}^{(a)}$

Теорема. Если отображение $f ; X \to Y\ (u', v)$ и (u', v) - дифференцируемо на нормальном множестве $M \ni a$ и кроме того $f' z$ - непрерывно в Т. $X = a$, то отображение $f\ (u, w)$ - дифференцируемо в m, $x = a$, где $u = \sup(u', u'')$.

Эту теорему можно усилить:
предположим, что отображение $f : X \to Y\ (u_i, v)$ - дифференцируемо на нормальном множестве

$$M \ni a\ ;\ i = 1, 2, \dots, n,\ u_i d u_j;\ i \ne j.$$

$$u_0 = \sup u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i,$$ тогда отображение $f ;\ X \to Y\left(u_0, \frac{i}{w}\right)$- дифференцируемо в Т. $a \in M$.

По поводу терминологии К - пространств см. [1] .

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
2. Соболев В.И., Щербин В.М. О дифференцировании отображений К- пространств. - ДАН, 1975, 225 : 5 С. 1020-1022.

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА САМОЙЛЕНКО

В.В.Юргелас /Воронеж/

Одним из эффективных конструктивных методов анализа периодических нелинейных систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x)$$

является численно-аналитический метод Самойленко А.М., впервые систематически изложенный в монографии [1]. В настоящей работе показано, что класс систем, к которым этот метод применим, может быть расширен: вводится оператор взятия верхнего вольтеррова среднего в классе непрерывных функций и в терминах точных оценок норм его степеней формулируются условия сходимости метода.

В качестве приложения рассматривается задача управления радиотехнической системой параметрического усиления. Обсуждаются алгебраические аспекты численной реализации метода.

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.- Киев, Вища школа, 1976.-184 с.

Д.Л. Яновский (Воронеж)

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ БОХНЕРА О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

В работе вводится и изучается мера непериодичности функции $\varepsilon_0 \geq 0$. При $\varepsilon_0 = 0$ получаем почти периодическую функцию. Доказывается критерий аналогичный критерию Бохнера о компактности множества сдвигов для почти периодической функции [1].

Определение 1. Непрерывная функция $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, имеет меру непериодичности $\varepsilon_0, 0 \leq \varepsilon < \infty$ (ε_0 - н.п.функция), если для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ существует такая длина $L = L(\varepsilon) > 0$, что каждый интервал $\alpha < x < \alpha + L$ содержит по крайней мере одно действительное число τ такое,что выполнено неравенство

$$| f(x+\tau) - f(x) | \leq \varepsilon$$

Определение 2. Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega$ множества Ω называется инфимум тех $\varepsilon > 0$, при которых Ω имеет в банаховом пространстве E конечную ε-сеть. Если элементы ε-сети лежат в Ω, то мера некомпактности называется внутренней.

Теорема. *Пусть $\chi(H)$ - внутренняя мера некомпактности Хаусдорфа семейства функций $\{f(x+h)\}$ (сдвигов $f(x)$, $h \in (-\infty, +\infty)$). Тогда справедлива оценка*

$$\varepsilon_0 \leq \chi(H) \leq 3\varepsilon_0,$$

где ε_0-мера непериодичности функции $f(x)$. Если дополнительно предположить, что $f(x)$ равномерно непрерывная функция на $(-\infty, +\infty)$, то $\chi(H) = \varepsilon_0$.

Литература

[1] Бор Г.Почти периодические функции.- М.:1934.

[2].Левитан Б.М.Почти периодические функции.-М.:Гостехиздат, 1953.

[3].Ахмеров А.С. и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. - Новосибирск.:Наука,1986.

Ярославцева В. Я. (Липецк)

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

В области $G = \{ 0 \le x < \pi,\ 0 \le y < \pi \}$ 2- х мерного евклидова пространства точек R^2 рассматривается сингулярное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\partial^2 u/\partial x^2 - \partial^2 u/\partial y^2 + 2k[\, ctgx\ \partial u/\partial x - ctgy\ \partial u/\partial y\,] = 0, \quad (1)$$

где k - положительное число.

Через $C^{\infty}_{чет,0}(G)$ обозначим множество четных бесконечно дифференцируемых в R^2 функций с компактным носителем в области G, а через $C^{\infty,k}_{чет,0}(G)$ - образ оператора преобразования F_xF_y, определенного на множестве $C^{\infty}_{чет,0}(G)$. Оператор преобразования F_x на функции u из функционального пространства $C^{\infty}_{чет,0}(G)$ действует по формуле

$$F_x u(x,y) = (2^k\Gamma(k+1/2))/(\sqrt{\pi}\,\Gamma(k))\sin^{1-2k} x \int_0^x u(t,y)(\cos t - \cos x)^{k-1}dt$$

Методом операторов преобразования строится решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(\cos x, \cos y)\,|_{y=0} = f(\cos x) \quad (2)$$

в функциональном классе $C^{\infty,k}_{чет,0}(G)$.

Показывается, что решение задачи Коши (1) - (2) порождает оператор обобщенного сдвига $T_x^y f$, рассмотренный в [1].

Литература

1. Ярославцева В. Я. О некоторых свойствах оператора обобщенного сдвига. // Понтрягинские чтения - IV. Тез. докл. Воронеж, 1993, с. 212.

Теоремы Штурма и разрывные уравнения на графах.

Абдульмаджид М., Прядиев В.Л.
(Воронеж, Дамаск)

Пусть Γ – геометрический связный граф, вложенный в $\mathbb{R}^n$, представляющий собой объединение замыканий интервалов γ_i $(i = \overline{1,m})$, могущих пересекаться только концами, а L_q – дифференциальный оператор, действующий на функциях $u : R(\Gamma) \to \mathbb{R}$ (здесь $R(\Gamma) = \cup\gamma_i$) по правилу: $(L_q u)(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)$ при $x \in R(\Gamma)$ и

$$(L_q u)(x) = \{-p_i(x)u_i'(x) + \sum_{j\in I(x)\setminus\{i\}} k_{ij}(x)[u_i(x) - u_j(x)] + k_i(x)u_i(x)\}_{i\in I(x)}$$

при $x \in \mathcal{J}(\Gamma)$. Здесь $\mathcal{J}(\Gamma)$ – множество внутренних вершин Γ, $I(x) = \{j = \overline{1,m} \mid \overline{\gamma}_j \ni x\}$, а $u_i'(x)$ – производная u в точке x вдоль ребра γ_i по единичному направлению "от x"; $u_i(x)$, $p_i(x)$ – пределы u и p при $y \to x$ и $y \in \gamma_i$; $k_{ij}(x)$ и $k_i(x)$ – положительные числа; p' и q равномерно непрерывны на каждом интервале γ_i, а $\inf p > 0$ на $R(\Gamma)$.

Если оператор L_q действует на непрерывных на Γ функциях, отличаясь от рассматриваемого тем, что $(L_q u)(x) = \sum_{i\in I(x)} p_i(x)u_i'(x)$ при $x \in \mathcal{J}(\Gamma)$, то верны [1] аналоги теорем Штурма о перемежаемости и о сравнении, позволяющие исследовать соответствующую спектральную задачу. Оказывается, и в рассматриваемом случае верны аналоги этих теорем. Введем понятие S-зоны, аналогичное введеному в [1]. Пусть Γ_0 – подграф Γ, т.е. $R(\Gamma_0) \subset R(\Gamma)$ и $\mathcal{J}(\Gamma_0) \subset \mathcal{J}(\Gamma)$. Γ_0 назовем S-зоной функции u, если 1) $u\big|_{\Gamma_0} > 0 (< 0)$, 2) на любом пути, соединяющем точки $x \in R(\Gamma_0)$ и $y \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, u меняет знак или имеет нули.

ТЕОРЕМА. Пусть v – решение уравнения $(L_{q_1}u)(x) = 0$ $(x \in \Gamma)$, а Γ_0 – его S-зона. Тогда любое решение уравнения $(L_{q_2}u)(x) = 0$ $(x \in \Gamma)$, в котором $q_2 \geq q_1$, либо коллинеарно v на Γ_0 (что возможно лишь при $q_2 \equiv q_1$ на Γ_0), либо меняет знак в Γ_0.

Литература

[1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // ДУ, 1989, Т. 25, № 7, С. 1141-1150.

Бравый Е.И. (Пермь)

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ.

Рассмотрим задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \varphi(t)(\ddot{x}(t) - p(t)\dot{x}(t)) + q(t)x(h(t)) = f(t), \; t \in [a,b], \qquad (1)$$

$$\ell_1 x \equiv x(a) = \alpha_1, \quad \ell_2 x \equiv x(b) = \alpha_2. \qquad (2)$$

Здесь $q, f \in L(a,b)$; $p \in L_{loc}(a,b)$;

$$\varphi(t) = \frac{\int_a^t \psi(s)ds \int_t^b \psi(s)ds}{\psi(t)};$$

$$\psi(t) = e^{\int_c^t p(s)ds}, \; c \in (a,b);$$

$h : [a,b] \to [a,b]$ — измеримая функция. Предполагается, что $\psi \in L(a,b)$.

Уравнение $\mathcal{L}x = f$ сингулярно, так как

$$\int_a^c \frac{dt}{\varphi(t)} = \int_c^b \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty.$$

В случае $h(t) \equiv t$ задача (1), (2) изучалась в работе И.Т.Кигурадзе, Б.Л.Шехтера[1].

Пусть D — множество таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to R$, что $\dot{x} \in L_{loc}(a,b)$ и $\varphi(\ddot{x} - p\dot{x}) \in L(a,b)$. Пространство D с нормой

$$||x||_D = ||\varphi(\ddot{x} - p\dot{x})||_L + |x(a)| + |x(b)|$$

банахово.

Теорема 1. Оператор $[\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2]$ непрерывно действует из пространства D в прямое произведение пространств $L(a,b) \times R^2$ и является фредгольмовым.

Теорема 2. Если

$$\int_a^b |q(t)|dt < \int_a^b \psi(t)dt,$$

то краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x \in D$.

[1] Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совремеи. пробл. матем. 1987. Т. 30. С. 105 – 201.

Гайденко С.В. (Краснодар)

Устранимые граничные множества второй смешанной задачи для параболического уравнения

Пусть в цилиндре $Q=\{(x,t)\colon x\in D\subset \mathrm{R}_n,\, n\geq 2,\, t\in(0,T)\}$ с ограниченным основанием D, $\partial D\in C^2$, задан равномерно параболический оператор

$$Lu(x,t)=u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)u_{x_i}+a(x,t)u,$$

$a_{ij}=a_{ji}\in C^1(\overline{Q})$; $a_i, a\in C(\overline{Q})$. Для этого оператора рассматривается вторая смешанная задача

$$Lu=f(x,t),\quad u(x,0)\Big|_{D\setminus E_0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\Big|_{\Gamma\setminus E_1}=\psi(x,t),$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ – производная по внешней конормали L на боковой границе $\Gamma=\partial Q\times$ $\times(0,T)$, а E_0, E_1 – компактные множества, освобожденные от краевых условий.

Исследуется единственность в классе $L_p(Q)$ обобщенного решения задачи в зависимости от "размеров" исключительных множеств. Под обобщенным решением рассматриваемой задачи понимается функция $u(x,t)$, которая принадлежит пространству $W_2^{1,0}(Q\setminus V)$ для любой окрестности V множества $E_0\cup E_1$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q\Big(-uv_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}v+auv\Big)dxdt=$$
$$=\int_D\varphi\, v(x,0)dx+\int_\Gamma\psi\, vdsdt+\int_Q f\, vdxdt$$

для каждой функции $v(x,t)\in W_2^{1,1}(Q\setminus V)$, равной нулю в некоторой своей окрестности множества $E_0\cup E_1$ и $v(x,T)=0$.

Установлено, что $L_p(Q)$ является классом единственности поставленной задачи, если конечны хаусдорфовы меры множеств E_0 и E_1 порядков сооответственно $n+2-2q$ и $n+1-2q$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p\geq\dfrac{n+1}{n-1}$ (в случае равенства E_1 должно быть конечно).

Удовлетворение краевым условиям можно понимать в более слабом смысле, как это сделано в работах автора для эллиптических краевых задач [1],[2]. Первая смешанная параболическая задача в аналогичной постановке изучалась в диссертации Сливиной Н.А.[3].

1.Гайденко С.В., Матем.сб.,1980, т.111(153), № 1, с.116-134

2.Гайденко С.В., Матем.сб.,1984, т.125(167), № 3, с.347-363

3.Сливина Н.А., О единственности решений первой смешанной задачи для параболических уравнений второго порядка, Дисс. к. ф.-м. н., МЭИ, 1992.

УДК 517.946. Иванов Л.А., Хлусов А.А. (Воронеж)

ОБЛАСТИ СТАЦИОНАРНОСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Отправляясь от теоремы о среднем для одномерного волнового уравнения (уравнения колебаний струны) мы рассматриваем те области в пространстве переменных $(\xi, \eta) \in R^2$ в которых решение волнового уравнения в характеристических координатах

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

равняется тождественно нулю. Такие области будем называть областями стационарности или покоя. В соответствии с этим подходом мы изучаем окрестности областей где уже известно, что струна находится в состоянии покоя.

Мы устанавливаем, что когда исходная область является полосой, полуплоскостью, простейшими геометрическими фигурами , то область стационарности описывается соответствующим геометрическим обьектом, как то: полосой, полуплоскостью и т.д.

Теорема I. Если область стационарности является углом , заключенным между лучами $a_1\xi \le \eta \le a_2\xi$, то ближайшая область стационарности является также углом

$$\frac{a_1^2}{a_2}\xi \le \eta \le \frac{a_2^2}{a_1}\xi,$$

при $0 < a_1 < a_2 < \infty$.

Следствие. Если некоторый угол с вершиной в начале координат, лежащий в первой четверти, является областью стационарности, то и вся первая четверть является областью стационарности.

Теорема 2. Если ограниченная область является областью стационарности, то и прямоугольник, описанный около неё является о.с.

КРАСОВСКИЙ А.Н. (г.Екатеринбург, РОССИЯ)

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАДАЧ ИГРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ.

Рассматриваются задачи об оптимальном управлении по принципу обратной связи при дефиците информации о действующих динамических помехах [1]. Задачи на минимакс или максимин заданного критерия качества процесса управления формализуются в антагонистичекую дифференциальную игру двух лиц в рамках концепции, развиваемой в последние годы в Екатеринбурге (Свердловске). Для движения конфликтно-управляемой динамической системы расматриваются различные оценки - критерии качества. А именно, - оценки типа максимума нормы фазового вектора управляемой системы на всем отрезке времени, показатели качества, отслеживающие заданное движение и другие. Рассматриваемые критерии качества объединяются в группы, в зависимости от так называемого достаточного информациаонного образа, на базе которого формируются оптимальные стратегии (алгоритмы) управления в схеме управления по принципу обратной связи. Устанавливаются соответствующие теоремы существования оптимальных решений (оптимальных гарантированных результатов, цены игры, оптимальных стратегий и седловой точки) для введенных групп критериев качества. При этом установлено, что в качестве достаточного информационного образа могут выступать: позиция объекта (текущий момент времени и текущее состояние фазового вектора); история движения, сложившаяся к текущему моменту времени; переменная, зависящая от реализовавшихся к текущему моменту времени управляющих воздействий, а также - их комбинации. Для рассматриваемых групп задач обосновываются универсальные конструкции построения оптимальных стратегий управления (чистых или смешанных) и процедуры вычисления оптимальных гарантированных результатов (или цены игры) для любого возможного текущего состояния управлямого объекта. Эти конструкции базируются на так называемых методе экстремального сдвига на сопутствующие элементы и методе выпуклых оболочек, разрабатываемых в Уральском государственном университете и в Институте математики и механики УрО РАН. Работоспособность предлагаемых алгоритмов управления иллюстрируется на модельных механических примерах и их численной симмуляции на ЭВМ.

Литература: Krasovskii A.N.,Krasovskii N.N. Control Under Lack of Information. Birkhauser, Boston, USA, 1995, 320 p.

Расщепление системы уравнений нестационарного плоского течения микроструктурной жидкости для группового анализа.

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж), Шуринов Ю.А. (Москва)

Рассмотрена система уравнений [1]

$$\partial v_x/\partial t = -\partial p/\partial x + \Delta v_x + 2b\,\partial \nu_z/\partial y + F_x \qquad (1)$$

$$\partial v_y/\partial t = -\partial p/\partial y + \Delta v_y - 2b\,\partial \nu_z/\partial x + F_y \qquad (2)$$

$$\partial \nu_z/\partial t = a\Delta \nu_z - k^2[\nu_z - 2^{-1}(\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y)] \qquad (3)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2; \quad \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0, \qquad (4)$$

где a, b, k^2 - постоянные, F_x, F_y заданы, v_x, v_y, p, ν_z - соответственно проекции вектора скорости, давление, проекция угловой скорости микровращения на ось z. В докладе показано, что система (1)-(4) заменой переменных

$$v_x = \tilde{v}_x - 2bk^{-2}\partial \tilde{\nu}_z/\partial y, \quad v_y = \tilde{v}_y + 2bk^{-2}\partial \tilde{\nu}_z/\partial x,$$
$$\nu_z = \tilde{\nu}_z - 2^{-1}(\partial \tilde{v}_x/\partial y - \partial \tilde{v}_y/\partial x) \qquad (5)$$

преобразуется так, что в (1) и (2) исчезает ν_z, а уравнение (3) решается отдельно от (1), (2), (4)

$$\partial \tilde{\nu}_z/\partial t = \Delta \tilde{\nu}_z - k^2 \tilde{\nu}_z + 2^{-1}(\partial F_x/\partial y - \partial F_y/\partial x) \qquad (6)$$

В докладе исследуются групповые свойства как исходной, так и преобразованной системы уравнений.

Литература.

1. Мигун Н.П., Прохоренко П.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурных жидкостей.- Мн.:Наука и техника, 1984 - 264 с.

А.П.Солдатов

Обобщенная задача Римана на римановых поверхностях

Широкий круг краевых задач теории функций, включая задачи Римана-Гильберта, Карлемана, Газемана и др. можно охватить в рамках единой постановки [1].

Рассмотрим на римановой поверхности семейство относительно компактных областей $(D^i)_1^n$ с кусочно-гладкой границей. Гладкие дуги, составляющие их границы, занумеруем единым образом $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ (причем дуги, являющиеся разрезами, встречаются дважды). В соответствии с этим под граничным значением семейства $\phi = (\phi^i)$ функций ϕ^i, аналитических в D^i, понимается семейство функций $\phi^+ = (\phi_j^+(t),\ t \in \Gamma_j)$.

Обобщенная задача Римана (задача R) состоит в отыскании ϕ по краевому условию $\operatorname{Re} A\phi^+ = f$, где A - обобщенный оператор умножения. Последнее означает, что найдутся такие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$ и функции $A_{ij}(t)$, $0 \le t \le 1$, что $(A\varphi)_i \circ \gamma_i = A_{i1}(\varphi_1 \circ \gamma_1) + \cdots + A_{im}(\varphi_m \circ \gamma_m)$, $i = 1, \cdots, m$.

Дуги Γ_j снабжены ориентацией положительной по отношению к (D^i). Рассмотрим $m \times m$-матрицу-функцию $B(t)$, $0 \le t \le 1$, с элементами $B_{ij} = A_{ij}$, если γ_j не меняет ориентации Γ_j и $B_{ij} = \bar{A}_{ij}$ в противном случае. Задачу R отнесем к нормальному типу, если $\det B(t) \neq 0$, $0 \le t \le 1$. Это условие определяет корректность постановки задачи R и ниже предполагается выполненным. Задачу R будем рассматривать в классах H^* и H_ε^* Гельдера с весом [2], определяемых по отношению к угловым точкам. С ней связываем союзную задачу R' того же типа, соответственно, в классах H_ε^* и H^*.

Теорема . *Пространство решений однородной задачи R в классе H^* конечномерно. Неоднородная задача разрешима в классе $H^*(H_\varepsilon^*)$ тогда и только тогда, когда f ортогональна (относительно соответствующей билинейной формы) всем решениям $\psi \in H_\varepsilon^*$ ($\psi \in H^*$) однородной союзной задачи R'.*

В терминах так называемого концевого символа задачи R указывается также явная формула ее индекса.

Литература. 1. Солдатов А.П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей. Ин-т прикл. матем. Тбил.гос.ун-та, ч.II, 1991, 276 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ульянова Е.Л. (Воронеж)

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, а $A:D(A)\subset H\to H$ нормальный оператор, спектр которого представим в виде

$$\sigma(A)=\cup\sigma_j,\ j\geq 1, \qquad (1)$$

где $\sigma_j, j\geq 1$-взаимно непересекающиеся компактные множества. Обозначим через P_j $j\geq 1$ – проектор Рисса, построеный по спектральному множеству σ_j, причем $\sum_{j\geq 1} P_j = I$. Этот ряд является сходящимся в сильной операторной топологии.

Без ограничения общности будем считать, что спектр оператора $\sigma(A)$ не содержит нуля. Рассмотрим оператор $B:D(A)\subset H\to H$ задаваемый соотношением ,

$$Bx=\sum_{k=1}^{\nu}(Ax,a_k)b_k, \quad a_k,b_k\in H, \qquad (2)$$

называемый относительно конечномерным возмущением.

Пусть n - некоторое натуральное число , $\delta_n=\sigma_1\cup\sigma_2...\cup\sigma_n$,$Q_n=P(\delta_n,A)$-проектор Рисса, простроеннный по спектральному множеству δ_n оператора A. Получены условия, при которых оператор A-B подобен оператору

$$A_1=A-Q_nXQ_n-(I-Q_n)X(I-Q_n),$$

где X - решение уравнения подобия (см. [1]), и

$$\|Q_n-\widetilde{Q}_n\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

где $\widetilde{Q}_n$ - проектор Рисса , построенный по спектральному множеству $\sigma(A_1|Q_nH)$ оператора A-B.

Литература.

1.Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. -Воронеж, 1987.-164 с.

Зубова С.П.

О РЕДУКЦИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Найдено условие, необходимое и достаточное для редукции системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t), \qquad (1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$; $t \in \mathbb{R}$; $A(t)$ - линейный оператор, к скалярному дифференциальному уравнению n -го порядка относительно одной компоненты вектор- функции $x(t)$. Выписывается это дифференциальное уравнение. Приводятся алгебраические уравнения для нахождения остальных компонент.

Это условие для линейного уравнения является более общим, чем условие, приведенное в классической литературе (Степанов В.В. "Курс дифференциальных уравнений").

Такая редукция позволяет для уравнения (1) использовать результаты, полученные ранее для скалярного дифференциального уравнения.

Например, для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с малым параметром ε:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (J - \varepsilon B(t,\varepsilon))\,x(t,\varepsilon), \qquad (2)$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$; J - жорданов одноклеточный оператор; $B(t,\varepsilon)$ - линейный оператор, найденное условие редукции выполняется; результаты, относящиеся к нахождению асимптотических разложений $x(t,\varepsilon)$, полученные в 1972-1992г. киевскими и воронежскими математиками, легко получаются из результатов, полученных ранее для скалярного дифференциального уравнения (Разумейко В.Г., 1971г., ДУ).

С помощью редукции также уточняется известное уравнение ветвления для (2).

Об инвариантных преобразованиях уравнения течения воды в почве.

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж), Журинов Ю.А. (Москва)

Рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \qquad (1)$$

где α, β – положительные константы.

В [1] получено автомодельное преобразование этого уравнения

$$\alpha U + \beta = (\alpha t + d)\varphi(\eta), \quad \eta = \frac{dx + e}{\alpha t + d} \qquad (2)$$

где e, d – произвольные постоянные.

В докладе показано, что имеется ещё два автомодельных преобразования:

1. $\eta = \frac{t}{x^2}$; $U = U(\eta)$

$$\frac{dU}{d\eta} = 4\alpha U \eta^2 \frac{d^2U}{d\eta^2} + 4\eta^2 \beta \cdot \frac{d^2U}{d\eta^2} + 4\alpha \eta^2 \left(\frac{dU}{d\eta} \right)^2 \qquad (3)$$

2. $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$; $U = U(\eta)$

$$-\frac{\eta}{2} \frac{dU}{d\eta} = \alpha U \frac{d^2U}{d\eta^2} + \beta \frac{d^2U}{d\eta^2} + \alpha \left(\frac{dU}{d\eta} \right)^2 \qquad (4)$$

В случаях (3) и (4) функция U является абсолютно постоянно конформно инвариантной относительно группы преобразований [2].

Литература.

1. Bhutani O.P., Sharma N.L. On the similarity solutions of the generalized Boussinesq eqvation in hydrology via transformation groups. – Int. J.Engng Sci. Uol., 1981, p.p. 779 – 790.
2. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. – М.: Энергия, 1975, с. 62-70.

Барабанов А.Е. (Санкт-Петербург)

РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ $\mathcal{H}^\infty$-ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Построен фазовый портрет оптимальных позиционных стратегий и явно найдена цена игры для динамического объекта управления с ограниченным в $L^2(0,\infty)$ возмущением. Объект управления описывается системой линейных стационарных дифференциальных уравнений с управлением и возмущением, которые выбираются игроками с целью минимизации и максимизации, соответственно, квадратичного функционала качества от фазового вектора и управления. Равномерных ограничений на управление и возмущение не предполагается. Позицией является пара (x,δ), состоящая из фазового вектора x уравнения и величины δ, ограничивающей L^2-норму возмущений.

Допустимые стратегии — позиционные, но с дискриминацией игрока, выбирающего возмущения. Так поставленная задача есть обобщение известной постановки равномерно-частотной оптимизации ($\mathcal{H}^\infty$-оптимальное управление [1]) на случай ненулевых начальных данных и позиционных, а не только программных стратегий возмущения.

Оказалось, что цена игры не является дифференцируемой функцией на всем фазовом пространстве. Имеется плоский конус, на котором эта функция имеет только производные по направлению, что затрудняет применение стандартных вариационных методов. Доказано, что оптимальная стратегия выбора управления всегда существует и может быть неединственной, но множество оптимальных стратегий управления выпукло. Оптимальные стратегии для возмущения могут существовать на всем пространстве или на всем пространстве, кроме плоского конуса, в зависимости от свойств предельных алгебраических уравнений Риккати. Даже при существовании оптимальной стратегии по возмущению множество таких стратегий невыпукло и даже несвязно. Оптимальные стратегии управления явно выписаны.

1. А.Е.Барабанов, А.А.Первозванский. Оптимизация по равномерно-частотным показателям ($\mathcal{H}$-теория). — Автоматика и телемеханика. 1992, N 9, с. 3–32.

Именной указатель