АДМИНИСТРАЦИЯ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ, НИИ МАТЕМАТИКИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН им. В. А. СТЕКЛОВА
НТО «МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА» ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА—1995

Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ ШКОЛЫ

(г. Воронеж, 25 января — 1 февраля 1995 г.)

ВОРОНЕЖ — 1995

АДМИНИСТРАЦИЯ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ, НИИ МАТЕМАТИКИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН им. В.А. СТЕКЛОВА
НТО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА"
ЧЕРНОЗЕМЬЯ

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 1995

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ ШКОЛЫ

(г. Воронеж, 25 января–1 февраля 1995г.)

Воронеж 1995

УДК 517.53; 517.97; 517.98

Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов школы. - Воронеж: ВГУ, 1995. - 270 с.

В сборнике представлены тезисы докладов, сделанных на Воронежской зимней математической школе, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова и Московским государственным университетом.

Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем теории функций и функционального анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и соответствующих приложений в математическом моделировании.

ОРГКОМИТЕТ ШКОЛЫ

Школа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Комитета по науке и высшей школе Администрации Воронежской области.

УДК 517.5+517.9

А.В.Абанин (Ростов-на-Дону)

СЛАБО ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА МИНИМАЛЬНОГО ТИПА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Пусть $\Phi=\{\varphi_n:\ n\ge1\}$ – неубывающая по n последовательность неотрицательных локально ограниченных в $\mathbb{C}$ функций. Положим

$$E_n := \left\{f\in H(\mathbb{C}):\ \|f\|_n:=\sup\{|f(z)|\exp(-\varphi_n(z)):\ z\in\mathbb{C}\}<\infty\right\},$$

а для $S\subset\mathbb{C}$ –

$$E_{n,S} := \left\{f\in H(\mathbb{C}):\ \|f\|_{n,S}:=\sup\{|f(z)|\exp(-\varphi_n(z)):\ z\in S\}<\infty\right\}.$$

Если в $E(\Phi)=\cup E_n$ ($=\cup E_{n,S}$) совпадают топологии $\operatorname{limind} E_n$ и $\operatorname{limind} E_{n,S}$, то S называется *слабо достаточным множеством* (СДМ) для $E(\Phi)$ (D.M.Schneider).

Пусть, далее,

$$\hat{E}(\Phi):=\left\{L\in H(\mathbb{C}):\ \forall n\ \exists m \,\middle|\ |L(z)|=O\left[\exp(2\varphi_m(z)-\varphi_n(z)\right]\ \text{в}\ \mathbb{C}\right\}.$$

Будем говорить, что $\Lambda=\{\lambda_k:\ k\ge1\}$ составляет для $E(\Phi)$ СДМ *минимального типа* (СДММТ), если Λ – СДМ для $E(\Phi)$ и имеется отличная от тождественного нуля функция L из $\hat{E}(\Phi)$, обращающаяся на Λ в нуль.

Доклад посвящен задаче о характеризации СДММТ в терминах свойств функций L относительно весов из Φ. Ее постановка инициирована исследованиями А.Ф.Леонтьева по представлению функций, голоморфных в области, рядами экспонент и их обобщений и их дальнейшим развитием в работах Ю.Ф.Коробейника и В.В.Напалкова. В указанном направлении получен ряд результатов – от достаточных условий до критериев (в зависимости от общности предположений о весах из Φ). В частности, для весовых последовательностей с конечной верхней огибающей, являющейся субгармонической в плоскости функцией конечного порядка, показано существование СДММТ, обладающих определенной универсальностью относительно свойства минимальности. В качестве приложений получено описание абсолютно представляющих систем леонтьевского типа, состоящих из собственных элементов линейного непрерывного в пространстве Фреше оператора, а также обобщенных экспонент в различных конкретных пространствах голоморфных и ультрадифференцируемых функций. Результаты работы, кроме того, что они охватывают аналогичные исследования других авторов, позволили также изучить поставленную задачу в таких пространствах, в которых этого не удавалось сделать ранее.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-242).

УДК 517.

Абдуллаев К.Х. /г.Ташкент/

Оценка отклонения функции от её частичных сумм Крестенсона – Леви.

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированная, мультипликативная на $[0;1)$ система функции КрестенсоВа – Леви при P=3,Т.Е.

$$\chi_0(x)=0; \quad \chi_n(x)=\exp\frac{2\pi i}{3}\sum_{k=1}^{z(n)} x_k n_k$$

где

$$x_k \equiv [x\cdot 3^k] (\mathrm{mod}\, 3)\ ; \quad n_{-k} \equiv \left[\frac{n}{3^{k-1}}\right] (\mathrm{mod}\, 3),\ 0 \le x_k; n_{-k} \le 2,$$

$[a]$ – целая часть числа a.Пусть $S_m(f;x)=\sum_{k=0}^{m-1} C_k(f)\chi_k(x)$, $m=0,1,2,..$

частичные суммы разложения функции $f(x)$ по системе Крестепсона Леви при P=3 , а

$$C_k(f)=\int_0^1 f(t)\chi_k(t)\,dt\ , \ k=0;1;2,\ldots$$

Коэффициенты Фурье Крестенсона-Леви функции $f(x)$ периода I.Следуя Маргенталлеру, введём g -модуль непрерывности функции $f(x)$:

$$\omega_g(f,\delta)=\sup_{|h|<\delta}|f(x\dot{+}h)-f(x)|_C$$

Рассматривается асимптотическое поведение величины

$$E_{S_m}(H[\omega_g])=\sup_{f\in H}\|f(x)-S_m(f,x)\|_C$$

В работе для $m=3^n+3^{n-1}+\ldots+3+1$ получена оценка снизу отклонения функции от её частичных сумм ряда Фурье по системам Крестепсона-Леви при P=3, т.е.доказана теорема.

Теорема: Для частичных сумм ряда Фурье по системе Крестепсона-Леви при P=3, удовлетворяется неравенство

$$|f(x)-S_{m_1}(f^*,x)| \ge C_1\cdot n\cdot \omega_g\left(f^*;\frac{1}{3^{n+1}}\right);\ C_1>0;\ C_1=C_1(m_1).$$

УДК 517.925.2

Абдульмаджид М. (Сирия, Дамаск), Прядиев В.Л. (Воронеж)

РАЗРЫВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-(pu')'+qu=0 \quad (x\in \Gamma\setminus J(\Gamma)). \tag{1}$$

Здесь Γ – связный открытый граф из $\mathbb{R}^n$, $J(\Gamma)$ – множество внутренних вершин. Функции $u(\cdot)$ предполагаются дважды дифференцируемыми на каждом ребре γ_i графа Γ и непрерывными в целом на Γ. Функции $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ достаточно гладки на замыкании $\overline{\gamma}_i$ каждого ребра, причем $p(\cdot)$ не имеет нулей. В каждой из внутренних вершин $a\in J(\Gamma)$ уравнение (1) трактуется в виде условия

$$\alpha_i(a)u_i'(a+0)=\sum_{j\in I(a)} k_{ij}(a)[u_i(a)-u_j(a)]+k_i(a)u_i(a) \quad (i\in I(a)), \tag{1'}$$

где $I(a)=\{i\,|\,\overline{\gamma}_i\ni a\}$, $\alpha_i(a)>0$ $(i\in I(a))$, $u_i(\cdot)$ – сужение $u(\cdot)$ на γ_i. Коэффициенты $k_{ij}(a)$, $k_i(a)$ вместе с функцией $p(\cdot)$ предполагаются неотрицательными.

<u>Теорема</u>. Пусть $v(\cdot)\not\equiv 0$ – решение (1), причем Γ есть зона знакопостоянства $v(\cdot)$. Пусть $w(\cdot)$ – неколлинеарное с $v(\cdot)$ решение уравнения $-(pu')'+Qu=0$ $(x\in\Gamma\setminus J(\Gamma))$, в котором $Q(\cdot)\geq q(\cdot)$. Тогда $w(\cdot)$ меняет знак в Γ.

Абрамян А.В.

Дробные степени однородного дифференциального оператора второго порядка, инвариантного относительно растяжения.

Тезисы

Строятся дробные степени оператора $x^2 \frac{d^2}{dx^2}$ в виде дробных интегралов и производных. Отрицательные степени исходного оператора определяются в образах Меллина на "хороших" функциях равенством

$$(\mathcal{M} I^\alpha \varphi)(\xi) = (-\xi^2 + i\xi)^{-\alpha/2} (\mathcal{M}\varphi)(\xi), \; Re\alpha > 0.$$

Для оператора I^α получено интегральное представление вида

$$(I^\alpha \varphi)(x) = \int_x^\infty i_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\frac{dy}{y}, \; Re\alpha > 0, \, x > 0,$$

где

$$i_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} |\ln x|^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}|\ln x|\right)\sqrt{x}\,\theta(1-x), \; x > 0,$$

$I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Дробный интеграл $I^\alpha\varphi$, $0 < Re\alpha < 2$, ограниченно действует из $L_p = \{\varphi : \|\varphi\|^p_{L_p} = \int_0^\infty |\varphi(x)|^p \frac{dx}{x} < \infty\}$, $1 \le p < 2/Re\alpha$, в L_q, $\max\{\frac{1}{p} - Re\alpha; 0\} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{Re\alpha}{2}$. Кроме того, оператор I^α ограничен из L_p в L_q, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{Re\alpha}{2}$, если $1 < p < \frac{2}{Re\alpha}$, и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - Re\alpha$, если $1 < p < \frac{1}{Re\alpha}$, $0 < Re\alpha < 1$.

Положительные степени исходного оператора /обратные к отрицательным/ строятся в виде

$$D^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}^{(L_p)} \int_0^\infty K^\alpha_\varepsilon(y) f\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}, \; \varepsilon > 0, \qquad /1/$$

где

$$K^\alpha_\varepsilon(x) = (\mathcal{M}^{-1}(-\xi^2 + i\xi)^{\alpha/2} e^{-\varepsilon|\xi|})(x).$$

Для функции $K^\alpha_\varepsilon(y)$ получено явное выражение через элементарные функции и функцию Макдональда. Имеет место следующая

Теорема. Пусть $0 < Re\alpha < 2$, $f = I^\alpha\varphi$, $\varphi \in L_p$, $1 \le p < 2/Re\alpha$. Тогда $\varphi = D^\alpha f$. Предел по L_p-норме в /1/ можно заменить пределом "почти всюду".

Получено описание образа $I^\alpha(L_p)$ в терминах обращающих конструкций /1/.

Yu. Ya. Agranovich (Voronezh)

ON THE INFLUENCE OF THE INERTIA PARAMETER ON THE DEFINING MODES AND THE FRACTAL DIMENSION OF AN ATTRACTOR FOR ONE REGULARIZATION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

In paper [1] P.E.Sobolevskii suggestes following D_ε-approximation of inertial terms of the equetion of motion in the Cauchy form:

$$D_\varepsilon(v) = \left(\frac{v}{1+\varepsilon|v|^2}\,\mathrm{grad}\right)v, \quad |v|^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2, \quad \varepsilon > 0, \qquad (1)$$

Regularized in this way the Navier-Stokes equations have a unique srong solution on any finite temporal segment both in the case of two and three space variables.

Let H be a closure in norm L_2 of the space of finite solenoidal in Ω vector functions; A - the Friedrichs expansion of the Stokes operator for the corresponding stationary problem for the Navier-Stokes equations with homogenous boundary value conditions; λ_N - N - an eigen-value of operator A. For an autonompus initial boundary value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D_\varepsilon(v) - \mu_0 \Delta v + \mathrm{grad}\,p = f(x), \; \mathrm{div}\, v = 0 \; (t \geq 0,\; x \in \Omega); \; v = 0 \; (t \geq 0, \qquad (2)$$

$$x \in \partial\Omega); \; v(0,x) = v^0(x) \; (x \in \bar{\Omega}); \; (p,1)_{L_2(\Omega)} = 0;$$

$\partial\Omega \in C^2$, $\Omega \subset R^3$, Ω, is a bounded domain, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\varepsilon > 0$ it is considered that the necessary and sufficient conditions of the existence and uniqueness of the strohg solution: $f(x) \in L_2(\Omega)$; $v^0(x) \in H(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ are satisfied. As a phase space we consider $H(\Omega)$ with norm $L_2(\Omega)$. The following statements hold true:

Theorem 1. Let $V_{t,\tau}$ Be a family of resolving operators of problem (2): $V_{t,\tau}(v(\tau,x)) = v(t,x)$, then operators $V_{t,\tau}$ are quite continuous for $\forall t > \tau$, i.e. a semi-group of nonlinear operators is a semi-group of class 1.

Corollary. If $v(t,x) \in H(\Omega) \cap W_2^{1+\delta}(\Omega)$, then for the semi-group $V_{t,\tau}$ there exists a minimal global attractor $\mathfrak{M} \in H(\Omega)$; $\mathfrak{M}$ - is a non-empty, compact, invariant with respect to the action of $V_{t,\tau}$ $(\forall t \geq \tau,\; \forall \tau \in R)$ set consisting of all full trajectories.

Lemma. The set $\mathfrak{M}$ is bounded in norm $W_2^1(\Omega)$:

$$\|v(t,\cdot)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \beta(1/\varepsilon), \quad \forall v \in \mathfrak{M}.$$

Theorem 2. The semi-group $V_{t,\tau}$ has a property of "finite dimensionality of dynamics" on $\mathfrak{M}$. The number of the defining modes N is drawn from the inequality

$$\lambda_{N+1} \cdot \frac{\mu_0}{2} > \frac{1}{\mu_0}\left[\,8/\varepsilon + 81\,\beta^4(1/\varepsilon)/\mu_0^2\,\right]. \qquad (3)$$

Theorem 3. The set $\mathfrak{M}$ has a finite fractal (informational) dimension: $D_I \leq D_f(1/\varepsilon) < \infty$.

The authir is grateful to S.G.Krein and V.L.Khatskevich for numerous discussion of the result obtained.

References

1. P.E.Sobolevskii, DAN SSSR, 1985, V.285, N1, P. 44-48.
2. O.A.Ladyzhenskaya, UMN, 1987, V.42, N 6, P. 25-60.

УДК 517.9 Азарнова Т.В. (Воронеж)

ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ (МНОГОМЕРНЫЙ ВАРИАНТ)

В алгебре линейных ограниченных операторов End X , действующих в бесконечномерном комплексном банаховом пространстве X рассмотрим специальную дизъюнктную последовательность проекторов P_j ($j\in Z_+^n$) и поставим в соответствие каждому оператору A матрицу $A=(A_{ij})$ $(i,j\in Z_+^n)$ с операторными блоками $A_{ij}=P_iAP_j$. Взяв в качестве величин, выражающих свойства операторов через свойства их матриц величины $d_A(k)=\sup\limits_{i-j=k}|P_iAP_j|$ $(k\in Z^n)$, выделим подалгебры операторов со специальными нормами и получим оценки для норм обратных операторов в этих подалгебрах.

1. End X = { $A\in$ End X : $\Sigma\, d_A(k)\alpha(k)<\infty$, где $\alpha(k)$-неубывающий субэкспоненциальный вес } с нормой $|A|_\alpha=\Sigma\, d_A(k)\alpha(k)<\infty$.
   Имеет место оценка
   $$|A^{-1}|_\alpha \leqslant L\ \Sigma\, \alpha(k)\ 4|A^{-1}|(1-1/(4\ 3^n\varkappa(A)))^{|k|/n},$$
   где L -величина, зависящая от $|A|,|A^{-1}|$ и функции α .

2. End X = { $A\in$ End X : $\sup d_A(k)\beta(k)<\infty$, где $\beta(k)$-неубывающий субэкспоненциальный вес, для которого существует такая постоянная $c(\beta)$, что $\Sigma\ (\beta(k-j)\beta(j))^{-1}\leqslant c(\beta)\ (\beta(k))^{-1}$, $k\in Z^n$ } с нормой $|A|_\beta=c(\beta)\sup d_A(k)\alpha(k)$.
   Имеет место оценка
   $$|A^{-1}|_\beta \leqslant B\ \sup \beta(k)\ 4|A^{-1}|(1-1/(4\ 3^n\varkappa(A)))^{|k|/n}$$
   где B -величина, зависящая от $|A|,|A^{-1}|$ и функции β.

3. End_0 X = { A End X : $d_A(k)=0$ для $k\neq e,-e$ и $k<-e$ или $k>e$, где $e=(1,1...1)$ } с нормой $|A|_1=\Sigma d_A(k)$.
   Имеет место оценка
   $$|A^{-1}|_1 \leqslant 2|A^{-1}|\left[\frac{\sqrt[n]{2\ 3^n\varkappa(A)+1}+\sqrt[n]{2\ 3^n\varkappa(A)}}{\sqrt[n]{2\ 3^n\varkappa(A)+1}-\sqrt[n]{2\ 3^n\varkappa(A)}}\right]^n$$

УДК 517.9 Акимов М.Ю., Вельмисов П.А, Семенов А.С. (Ульяновск)

О ДИНАМИКЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ТРУБОПРОВОДА

Рассматривается задача о колебаниях вязкоупругой осесимметричной оболочки, являющейся частью стенки бесконечно длинного трубопровода, по которому протекает идеальная несжимаемая жидкость. Решение задачи основано на разбиении всей области течения $\{-\infty<x<\infty,\ 0\le r\le R_0\}$, где x,r – цилиндрические координаты, на три области $x<0, 0<x<\ell, x>\ell$, в каждой из которых соответствующие потенциалы скоростей жидкости $\varphi_1(x,r,t)$, $\varphi_2(x,r,t)$, $\varphi_3(x,r,t)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа, имеют свое специальное представление. В крайних сечениях оболочки $x=0$, $x=\ell$ обеспечиваются условия непрерывности функций φ_k, $\partial\varphi_k/\partial x$, $\partial^2\varphi_k/\partial x^2$; на границах $\{r=R_0, x<0\}$, $\{r=R_0, x>\ell\}$ выполняются условия непротекания абсолютно жестких частей трубопровода $\partial\varphi_k(x,R_0)/\partial r=0$, $k=1,3$; при $x\to\pm\infty$ налагаются условия отсутствия возмущений $\operatorname{grad}\varphi_k=0, k=1,3$. С учетом вышесказанного основные уравнения задачи имеют вид

$$M\ddot{w}+D\left[w''''-\int_0^t R(t,\tau)(w''''+\nu R_0^{-2}w'')(x,\tau)d\tau\right]+N(w''+\nu R_0^{-1})+$$

$$+EhR_0^{-2}\left[w-\int_0^t R(t,\tau)w(x,\tau)d\tau\right]+\eta(\dot{w}''''+\nu R_0^{-2})\dot{w}''=$$

$$=-\rho\left[\varphi_{2t}+V\varphi_{2x}\right](x,R_0,t)+P_0-P_*-\frac{1}{2}\rho V^2,\quad 0<x<\ell$$

$$\varphi_{2r}(x,R_0,t)=\dot{w}(x,t)+Vw'(x,t),\quad 0<x<\ell$$

где $w(x,t)$ – прогиб оболочки: точка и штрих обозначают производные по времени t и координате x. Потенциалы скоростей задаются в виде

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t)g_k(r)\exp(\lambda_k x),\quad \varphi_3=\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t)g_k(r)\exp(-\lambda_k x)$$

$$\varphi_2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(t)\exp(\lambda_k x)+b_k(t)\exp(-\lambda_k x)\right]g_k(r)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin(\mu_n x)f_n(r)$$

где $\mu_n=n\Pi/\ell$; $g_k'(R_0)=0$; $g_k(r)$ – функции Бесселя, $f_k(r)$ – модифицированные функции Бесселя. Прогиб $w(x,t)$ отыскивается в виде

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(t)\psi_n(x)$$

где $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная на отрезке $[0,\ell]$ система функций, ви которых зависит от способа закрепления оболочки. Решение задач сведено к исследованию интегродифференциальных уравнений для функ ции $w_n(t)$. При численном моделировании задачи на плоскости (N,V) где N – сжимающее усилие, V – скорость невозмущенного однороднoг потока, построена область устойчивости движения оболочки.

УДК 517.927.2 Алероев Т.С. (Нальчик)

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть T – замыкаемый оператор из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, а T_1 – оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, область определения которого содержит $\mathcal{D}(T)$. Рассмотрим линейный операторный пучок $T(\varkappa)=T+\varkappa T_1$ и предположим, что $T(\varkappa)$ замыкаем и замыкание $\tilde{T}(\varkappa)$ образует голоморфное семейство типа (A) [1, стр. 473].

Теорема. Пусть T – полный самосопряженный оператор, все собственные значения λ_n которого изолированы и имеют кратность, равную единице. Предположим, что $|\varkappa|<r_0$, r_0 – радиус сходимости ряда Тейлора для $\lambda_n(\varkappa)$ ($\lambda_n(\varkappa)$ – n-е собственное значение $T(\varkappa)$) [1]. Далее, пусть T_1 можно представить в виде $T_1=M+N$, где M и N такие, что $MR(T)=R(T)M$, $[NR(T)]^2=0$; $R(T)$ – резольвента оператора T. Тогда

$$\lambda_n(\varkappa)-\lambda_n=\varkappa\,\mathrm{tr}(NP_n+MP_n);\quad P_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} R(T)\,d\lambda.$$

Следствие. Для собственных значений λ_n задачи

$$u''+\varkappa D_{0x}^{1-\alpha}u=\lambda u,\qquad \alpha<1,$$

$$u(0)=0,\ u(\pi)=0,$$

где D_{0x}^{σ} – оператор дробного дифференцирования порядка σ, справедливо соотношение

$$\lambda_n=n^2+\frac{2\varkappa}{\pi}n^{1-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Литература

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.

Число компонент связности дополнений солнц

*Алимов А.Р.** (Москва)

Через (LN) мы будем обозначать класс действительных линейных нормированных пространств. Для $x \in X$ и $M \subset X$ определим $P_M x = \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ — множество ближайших точек из M для x. Множество M называется *солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $y \in P_M z$ для любой точки z из луча с началом в точке y и проходящего через точку x. Пусть $s, s' \in X$, $\|s\| = \|s'\| = 1$. Точки s и s' называются *далекими*, если $\|s - s'\| = 2$. Обозначим через $k(X)$ — максимальное число попарно далеких точек единичной сферы пространства X. Легко видеть, что для любого $X \in (LN)$ $k(X) \geq 2$.

Предложение. *Пусть $X_n \in (LN)$, $\dim X_n = n < \infty$. Тогда $k(X_n) \leq 2^n$. Оценка достигается тогда и только тогда, когда единичной сферой пространства X_n является параллелепипед.*

Отметим, что $k(X)$ в случае бесконечномерного X может принимать бесконечные значения.

Теорема. *Пусть $X \in (LN)$, ν — число (возможно равное бесконечности). Для того, чтобы в X существовало солнце с ν компонентами связности дополнения, необходимо и достаточно, чтобы $k(X) \geq \nu$.*

Следствие 1. В строго выпуклых пространствах (например, в гильбертовом, в $L^p[0, 1]$, l^p $(1 < p < \infty)$) солнце не может иметь более двух компонент связности дополнения.

Следствие 2. Пусть $X_n \in (LN)$, $\dim X_n = n < \infty$. Тогда солнце в X_n не может иметь более чем 2^n компоненты связности дополнения. Хорошо известно (см., например, [1, теорема 4.13]), что ограниченно компактное чебышёвское множество является солнцем (в частности, чебышёвское множество в конечномерном пространстве есть солнце). Поэтому в X_n чебышёвское множество не может иметь более, чем 2^n компоненты связности дополнения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Власов Л.П.* Аппроксимативные свойства множеств // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.

---

*Работа поддержана программой “Университеты России” по направлению “Фундаментальные проблемы математики и механики”, проект № 1.1.39.

УДК 517.925.2

ОБ ОДНОМ КАЧЕСТВЕННОМ СВОЙСТВЕ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Аль-Турк М. (Воронеж)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-(pu')'+qu=0 \quad (x\in \Gamma\setminus J(\Gamma)). \tag{1}$$

Здесь Γ – связный открытый граф из $\mathbb{R}^n$, $J(\Gamma)$ – множество внутренних вершин. Функции $u(\cdot)$ предполагаются дважды дифференцируемыми на каждом ребре γ_i графа Γ и непрерывными в целом на Γ. Функции $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ достаточно гладки на замыкании каждого ребра, причем $p(\cdot)$ не имеет нулей. В каждой из внутренних вершин $a\in J(\Gamma)$ уравнение (1) мы будем трактовать в виде условия

$$\sum_i \alpha_i(a)u_i'(a+0)=k(a)u(a), \tag{1'}$$

где коэффициенты $\alpha_i(a)$ строго положительны для каждого i, при котором γ_i примыкает к a, и $u_i(\cdot)$ означает сужение функции $u(\cdot)$ на γ_i. Коэффициенты $k(a)$ вместе с функциями $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ предполагаются неотрицательными.

Уравнение (1) вместе с условием (1') возникает при моделировании упругих колебаний сетки из натянутых струн. При этом отличие от нуля $k(a)$ в какой-то внутренней вершине a означает, что в этой вершине имеется упругая опора. На описанное уравнение переносятся основные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений на графах, развитой в работах Покорного Ю.В., Пенкина О.М., Прядиева В.Л. и др. В частности, верна

<u>Теорема</u>. Существует нетривиальное решение $u(\cdot)$ уравнения (1) такое, что $\inf\limits_{x\in\Gamma}|u(x)|>0$.

Это утверждение обеспечивает неосцилляцию на Γ уравнения (1), т.е. отсутствие у любого нетривиального решения S-зоны (зоны знакопостоянства). Терминология здесь, как и ранее, используется согласно вышеупомянутой теории.

УДК 517.9 **Андреев А.А.** (Самара)

Об одном обобщении функции Бесселя и его приложении

В докладе рассматриваются свойства вырожденной гипергеометрической функции двух аргументов четвертого порядка, которая имеет следующее представление в виде ряда

$$J(\gamma;\tau,\sigma)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m+3n}}\frac{\tau^m}{m!}\frac{\sigma^n}{n!}$$

При $\sigma=0$ $J(\gamma;\tau,0)={}_0F_1(\gamma;\tau)=(-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2}}\Gamma(\gamma)J_{\gamma-1}(2\sqrt{-\tau})$.

При $\tau=0$ $J(\gamma;0,\sigma)={}_0F_3\left(\frac{\gamma}{3},\frac{\gamma+1}{3},\frac{\gamma+2}{3};\frac{\sigma}{27}\right)$ - гипер-

бесселева функция.

Методом рядов строится функция Римана для уравнения гиперболического типа второго порядка с сингулярными характеристиками $x=0$ и $y=0$

$$u_{xy}-\left(\frac{A}{\sqrt{x}}+\frac{B}{\sqrt{y}}\right)u=0,$$

которая представляет собой рассмотренную ранее функцию $J(1;\tau,\sigma)$

$$\tau=2A(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(y-y_0)+2B(x-x_0)(\sqrt{y}-\sqrt{y_0})$$

$$\sigma=\frac{4}{9}AB(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})^3(\sqrt{y}-\sqrt{y_0})^3.$$

С помощью изученных свойств функции $J(\gamma;\tau,\sigma)$ методом Римана строится решение задач Коши и Гурса.

УДК 517.9 Андреев И.А. (Самара)

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ "РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ".

Рассматривается задача о тепловом взрыве с учетом теплопередачи по объему реакционного сосуда и диффузии реагирующего вещества. Для автокаталитической реакции горения соответствующая система уравнений имеет вид

$$\gamma\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)+\delta^{-1}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+\frac{n}{\xi}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right),$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau}=-\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)+\frac{1}{\mu\gamma}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}+\frac{n}{\xi}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right),$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0,\left.\Theta\right|_{\xi=1}=0,\left.\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0,\left.\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=0,\left.\Theta\right|_{\tau=0}=0,\left.\eta\right|_{\tau=0}=1.$$

Здесь $n=0$ соответствует плоскопараллельному реактору, а $n=1$ – цилиндрическому. γ – малый параметр.

Для моделирования критических режимов используются решения-утки. Решения-утки соответствуют некоторым значениям δ, которые естественно называть критическими. Если через δ^* обозначить критическое значение параметра δ, то при $\delta<\delta^*$ в системе возникают взрывные режимы, а при $\delta>\delta^*$ невзрывные (режимы выгорания). Для вычисления критических значений параметра δ используются асимптотические разложения по степеням малого параметра

$$\delta=\delta_0\left(1+\gamma\delta_1+O(\gamma^2)\right).$$

В случае плоскопараллельного реактора при $\beta=0$:

$$\delta_0=3.514,\quad \delta_1=8.892.$$

В случае цилиндрического реактора при $\beta=0$:

$$\delta_0=8,\quad \delta_1=8\frac{4-\pi}{4+\pi}=0.962.$$

УДК 517.5

Андриенко В.А. (Одесса)

О ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ СХОДИМОСТИ

Пусть $Z_+^2=\{n=(n_1,n_2)\}$ – множество точек плоскости с неотрицательными целыми координатами и для 0 , k , $n\in Z_+^2$ неравенство $0\le k\le n<\infty$ означает, что $0\le k_i\le n_i<\infty$, $(i=1,2)$, а $\varphi = \{\varphi_n(x): n\in Z_+^2\}$ – ортонормированная система (ОНС) функций, определенных на пространстве $(X,\mathfrak{F},\mu)$ с положительной мерой.

Теорема I. Для того чтобы система φ была системой сходимости (определение см. в [I, с. I0]):

а) необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{a_n : n\in Z_+^2\}\in \ell^2$ была конечна для п.в. $x\in X$ функция

$$S_\varphi^*(\{a_n\}) = \sup\Big\{\Big|\sum_{0\le n\le N} a_n\varphi_n(x)\Big| : 0\le N<\infty\Big\};$$

б) достаточно, чтобы при некоторых $p>0$ и $C_0<\infty$ для любой конечной последовательности $\{a_n : 0\le n\le M\}$, $0, n, M\in Z_+^2$ выполнялось неравенство

$$\int_X \left[S_\varphi^*(\{a_n\})\right]^p d\mu(x)\le C_0\Big(\sum_{0\le n\le M} a_n^2\Big)^{p/2}$$

Теорема I является обобщением утверждения I из книги [I, с. I0 – I2]. Следующая теорема – это аналог известной теоремы А.Н. Колмогорова (см. [I, с. 44 – 47]) в случае двойных ОНС функций.

Теорема 2. Пусть $(X,\mathfrak{F},\mu)$ – пространство с конечной положительной мерой. Тогда любая двойная ОНС независимых функций φ является системой сходимости. Более того, оператор $S_\varphi^*(\{a_n\})$ есть ограниченный оператор из ℓ^2 в $L^2(X)$:

$$\|S_\varphi^*(\{a_n\})\|_2\le 2\|\{a_n\}\|_{\ell^2}.$$

Литература.

I. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды.М.: Наука, 1984.– 496 с.

УДК 539.374

М.А.Артемов, Д.Д.Ивлев (Воронеж, Чебоксары)

О ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ КИНЕМАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ

В работе [1] показано, что условие полной пластичности $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \sigma_1 + k$, где σ_i – главные напряжения, k – предел текучести, приводит к статически определимым уравнениям теории идеальной пластичности.

Аналогично услрвия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_1)$ приводят к кинематически определимым уравнениям. Рассматриваются линеаризированные уравнения при кинематически определимых соотношениях теории идеальной пластичности для кусочно-линейных условиях текучести

$$|\sigma_i - \sigma_j| = 3\alpha\sigma + k, \quad \alpha,\ k - \mathrm{const},\ \sigma = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (1)$$

Для грани условия предельного состояния (1), соотношения ассоциированного закона пластического течения приводят к выражениям вида

$$(\varepsilon_x - \lambda(1-\alpha))(\varepsilon_y - \lambda(1-\alpha)) = \varepsilon_{xy}^2, \quad (x,y,z) \qquad (2)$$

$$(\varepsilon_x - \lambda(1-\alpha))\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}, \quad (x,y,z) \qquad (3)$$

где $\lambda = \varepsilon/(2/3 - \alpha)$, $\varepsilon = 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$.

Три соотношения (2) или (3) определяют кинематически замкнутые системы соотношений отноительно компонент перемещений u, v, w.

Когда исходное кинематическое состояние материала является однородним и бессдвиговым уравнения для компонент u, v удовлетворяют условиям Коши-Римана, определяют бессдвиговое деформирование среды в плоскости xy и принадлежат к эллиптическому типу. Для случая $\sigma_z^0 = \sigma_3^0 = 0$ определяется выражения для компонет возмущенного напряженного состояния.

1. Ивлев Д.Д. Об уравнениях линеаризированных пространственных задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР.- 1960. - Т. 130, № 6

Работа выполнена за счет средств РФФИ (код проекта 013-16520).

УДК 539:374

М.А.Артемов, Ю.М.Мяснянкин (Воронеж)

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ В СТАТИКЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Основные соотношения на поверхностях разрыва напряжений и скоростей перемещений в теории идеальных несжимаемых жестко-пластических сред были получены в работах [1,2]. В работе [3] получены общие соотношения на поверхностях разрыва напряжений и скоростей деформаций для произвольных условий пластичности, зависящих от первого инварианта тензора напряжений, и проведено исследование этих соотношений при условиях пластичности Губера-Мизеса.

В данной работе рассматриваются соотношения на поверхностях разрыва скоростей перемещений, напряжений и скоростей деформаций при напряженных состояниях, соответствующих ребрам и граням пирамиды текучести Кулона: $|\sigma_i - \sigma_j| = 2k\cos\rho + (\sigma_i + \sigma_j)\sin\rho$ и $\sigma_i = \sigma_j$, $\sigma_k = \sigma_i a \pm b$, $a = (1 \pm \sin\rho)\backslash(1 \mp \sin\rho)$, $b = 2k\cos\rho/(1 \mp \sin\rho)$, где σ_i – главные компоненты тензора напряжений, ρ, k – постоянные, представляющие собой угол трения и коэффициент сцепления среды. Для определения разрывов напряжений получены замкнутые системы нелинейных алгебраических уравнений, проведено их решение. Получены уравнения, которым должны удовлетворять разрывы скоростей перемещений и скоростей деформаций на поверхностях разрыва. Рассматривается возможность применения полученных результатов для построения статически допустимых и кинематически допустимых полей напряжений и скоростей перемещений и определения предельных нагрузок. В частности, рассмотрено предельное равновесие пирамиды, изготовленной из идеального жестко-пластического сжимаемого материала, находящейся под действием равномерных усилий, действующих по ее противоположным граням.

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мяснянкин Ю.М. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах//ДАН СССР.-1967.-Т.177,вып.5

2. Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах//ДАН СССР.-1966.-Т.167,вып.6.

3. Дегтярев И.С. О разрывах напряжений и скоростей деформаций в пространственной задаче сжимаемого жестко-пластического тела // ПММ.- 1971.-Т.35,вып.5

УДК 517.9 Арутюнов А.В., Аваков Е.Р. /Москва/

К ТЕОРИИ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ[1]

Рассматривается следующая экстремальная задача с ограничениями типа равенств:

$$f(x) \to \min, \ F(x) = 0; \ x \in X; \ F: X \to \mathbb{R}^k,$$

где все отображения предполагаются достаточно гладкими.

Пусть x_0 – решение указанной задачи. Известно, что если точка x_0 анормальна, т. е. $\operatorname{Im} F'(x_0) \neq \mathbb{R}^k$, то правило множителей Лагранжа выполняется тривиально /то есть уравнение Эйлера не зависит от минимизируемой функции f/, а классические необходимые условия второго порядка, заключающиеся в неотрицательности формы $\mathcal{L}_{xx}$ на подпространстве $\operatorname{Ker} F'(x_0)$, вообще говоря, не выполняются. Это обусловлено тем, что в окрестности анормальной точки множество $\{x : F(x) = 0\}$ имеет особенность.

В докладе предлагается два подхода к получению необходимых условий экстремума первого и второго порядка, остающиеся содержательными и в анормальных точках. Первый из них заключается в построении новой функции, являющейся аналогом функции Лагранжа. При этом необходимые условия первого, второго и т. д. порядков получаются в полном соответствии с лагранжевым формализмом.

Второй подход основан на методах возмущений. Он приводит к необходимым условиям второго порядка, которые заключаются в оценке индекса квадратичной формы $\mathcal{L}_{xx}$ и доказательстве неотрицательности на $\operatorname{Ker} F'(x_0)$ максимума формы $\mathcal{L}_{xx}(x_0, \lambda)$, взятого по некоторому множеству Λ_a. В случае общего положения зазор между указанными необходимыми условиями и достаточными условиями оказывается минимально возможным.

---

[1]Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант № 94-01-00476 и Международного Научного Фонда № NBV-000.

УДК 517.9 Асеев [1] С.М. (Москва)

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} \in F(x,t); \tag{1}$$

$$x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2,\ p = (x_1, x_2); \tag{2}$$

$$x(t) \in G \quad \forall t \in I = [t_1, t_2]; \tag{3}$$

$$J(x(\cdot)) = k_0(p) \to \min. \tag{4}$$

Здесь $x \in R^n$; F - липшицевое по x, t многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями; C_1, C_2, G – непустые замкнутые подмножества в R^n; $k_0(p)$ – липшицевая функция. Предполагается, что касательный конус Кларка $T_G(x)$ к множеству G в точке x имеет непустую внутренность. Минимум в задаче (1)-(4) ищется в классе липшицевых функций x определенных на фиксированном отрезке времени $I = [t_1, t_2]$.

В работе [1] исследован феномен вырождения принципа максимума Понтрягина для задач с фазовыми ограничениями. При этом для задачи (1)–(4) принцип максимума получен в гамильтоновой форме. Следующий результат уточняет утверждение Теоремы 1 из [1]. Отличие от [1] состоит в более сильной лагранжевой форме сопряженной системы [2].

Теорема. Пусть x_0 - решение задачи (1)-(4). Тогда существуют число $\lambda_0 \geq 0$, абсолютно – непрерывная функция ψ и ограниченная регулярная борелевская векторная мера η на I такие, что выполняются следующие условия:

a) функция $h(t) = H(F(x_0(t), t), \psi(t) + \int_{t_1}^{t} d\eta)$ абсолютно непрерывна на I;

b) $H\left(F(x_0(t), t), \psi(t) + \int_{t_1}^{t} d\eta\right) = H\left(F(x_0(t), t), \psi(t) + \int_{t_1}^{t} d\eta - \eta(t)\right) \quad \forall t \in I$;

c) мера η неположительна на множестве $\{y \in C(I) : y(t) \in T_G(x_0(t))\ \forall t \in I\}$;

d) $(\dot{\psi}(t), -\dot{h}(t)) \overset{a.e.}{\in} co\{(u, v) : (u, v, \psi(t)) \in N_{graphF}(x_0(t), t, \dot{x}_0(t))\}$;

e) $\left(\psi(t_1), -\psi(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} d\eta\right) \in \lambda_0 D^- k_0(x_0(t_1), x_0(t_2)) + N_{C_1 \cap G}(x_0(t_1)) \times N_{C_2 \cap G}(x_0(t_2))$;

f) $\lambda_0 + \|\psi(t_1)\| + \|\eta\| \neq 0$.

Здесь $H(M, \psi)$ – опорная функция множества М в направлении ψ, $\eta(t)$ атомическая составляющая меры η в точке t, $N_M(x)$ - конус обобщенных нормалей к множеству M в точке x, $D^- f(x) = \{x^* \in R^n : (x^*, -1) \in N_{epif}(x, f(x))\}$ – D^- - производная функции f в точке x [3], $graphF = \{(x, t, y) \in R^{2n+1} : y \in F(x, t)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Арутюнов А.В., Асеев С.М. Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость, ДАН, 1994, т.334, 134 –137. 2. Смирнов Г.В. Дискретные аппроксимации и оптимальные решения дифференциальных включений, Кибернетика, 1991, $N3$, 76 - 79. 3. Мордухович Б.Ш. Оптимизация и негладкий анализ, -М.:Наука, 1988.

[1] Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант N 94 - 01 - 00476 - а и Международного Научного Фонда, грант N NBV 000.

УДК 517.982.27 С.В. Асташкин, Ю.Е. Ким (Самара)

БИЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКТОРОВ ПЕТРЕ И ПЕТРЕ-ГУСТАВССОНА

В работе доказаны общие билинейные интерполяционные теоремы для интерполяционных функторов Петре $\langle \cdot \rangle_\varrho$ и Петре-Густавссона $\langle \cdot , \varrho \rangle$ [1, p. 466 - 468]. Так, например, для первого из них имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $\varrho = \varrho(t)$ – квазивогнутая функция на полуоси $(0,\infty)$, удовлетворяющая условиям:
1) нижний и верхний показатели растяжения функции ϱ [1, p. 405 - 406] такие, что $0 < \gamma_\varrho \leqslant \delta_\varrho < 1$;
2) существует такое $\alpha > 0$, что для любых $u > 0$, $v > 0$ выполнено неравенство

$$\varrho(u) \cdot \varrho(v) \leqslant \alpha\, \varrho(uv).$$

Предположим, что $\vec{X}=(X_0,X_1)$, $\vec{Y}=(Y_0,Y_1)$, $\vec{Z}=(Z_0,Z_1)$ – произвольные банаховы пары и T – билинейный оператор, непрерывный из $X_0 \times Y_0$ в Z_0 и из $X_1 \times Y_1$ в Z_1. Тогда T можно продолжить до билинейного оператора, непрерывного из $\langle \vec{X} \rangle_\varrho \times \langle \vec{Y} \rangle_\varrho$ в $(Z_0, Z_1)^{\mathcal{K}}_{\varrho,\infty}$.

Напомним, что пространство $(Z_0, Z_1)^{\mathcal{K}}_{\varrho,\infty}$ состоит из всех $z \in Z_0 + Z_1$, для которых конечна норма

$$\| z \| = \sup_i \frac{\mathcal{K}(2^i, z; \vec{Z})}{\varrho(2^i)},$$

где $\mathcal{K}(t, z; \vec{Z})$ – $\mathcal{K}$-функционал Петре [1, p. 382].

В качестве следствия получены теоремы об интерполяции билинейных операторов в пространствах Марцинкевича, а также в "весовых" пространствах c_0 и ℓ_∞.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349 - 515

УДК 517.982.27 Атласов И.В. (Воронеж)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИДЕАЛОВ К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРОВ И ТЕОРЕМ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассматривается расширение понятия "идеала отображения банаховых пар" [I]. Новые идеалы называются парными. Показано, как используя понятие парного идеала, строятся семь новых интерполяционных функторов.

В дальнейшем предполагается, что $\vec{B} = (B_0, B_1)$ такая банахова пара, что пространства B_0', B_1' также образуют банахову пару.

<u>Теорема I.</u> Для любой банаховой пары $\vec{A}$ и элемента $a \in A_0 + A_1$ существует интерполяционный функтор $\mathcal{J}$, такой, что

$$Orb_a(\vec{A}, \vec{B}') = (\mathcal{J}(\vec{B}))'$$

<u>Теорема 2.</u> Для любой банаховой пары $\vec{A}$ и элемента $a \in A_0 + A_1$, существует интерполяционный функтор $\mathcal{J}$, такой, что пространство $(Orb_a(\vec{A}, \vec{B}, N))'$ является подпространством пространства $\mathcal{J}(\vec{B}')$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $\vec{A}$ - банахова пара, E - промежуточное для пары $\vec{A}$ пространство. Тогда существует интерполяционный функтор $\mathcal{J}$ такой, что для любой конечномерной банаховой пары $\vec{B}$ существует изометрия

$$\mathcal{J}(\vec{B}') = (Orb_E(\vec{A}, \vec{B}, N))'$$

<u>Теорема 4.</u> Пусть C - произвольное банахово пространство, $\vec{A}$ - банахова пара, тогда существует изометрия

$$C \otimes_{\pi} [A_0, A_1]^K_{\ell_1^{\rho_0}\ell_1^{\rho_1}} = [C \otimes_{\pi} A_0, C \otimes A_1]^K_{\ell_1^{\rho_0}\ell_1^{\rho_1}}$$

$$L(C, [A_0, A_1]^J_{\ell_\infty^{\rho_0}\ell_\infty^{\rho_1}}) = [L(C, A_0), L(C, A_1)]^J_{\ell_\infty^{\rho_0}\ell_\infty^{\rho_1}}$$

где ρ_0, ρ_1 - весовые функции и $[\cdot,\cdot]^K_{\ell_1^{\rho_0}\ell_1^{\rho_1}}$, $[\cdot,\cdot]^J_{\ell_\infty^{\rho_0}\ell_\infty^{\rho_1}}$ - интерполяционные функторы, построенные по методам констант и средних соответственно.

[I] V.I. Ovchinnikov, "The method of Orbits in Interpolation Theory". 1984 Mathematical Reports. Volume 1. Part 2.

Ахмадалиев А. (Андитан)

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВРЕМЕНИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ РЕСУРСОМ УПРАВЛЕНИЯ

В данной работе приводится уравнение, минимальное решение которого является временем оптимального быстродействия для следующей оптимизационной задачи:

$$\dot{x} = Ax + uv, \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1, \quad u(t) \in P, \quad M_0, M_1, P \in \Omega(R^n), \tag{I}$$

$$v(t) = 1, \text{ при } t \in [t_1, t_2], \quad v(t) = 0, \text{ если } t \notin [t_1, t_2],$$

$$t_2 - t_1 \leq h, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \qquad T \to \inf. \tag{2}$$

При фиксированных t_1, t_2 множество достижимости системы (I) обозначим через $D(T, t_1, t_2)$. Тогда множество

$$D(T) = \bigcup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T,\ t_2 - t_1 \leq h} D(T, t_1, t_2)$$

является множеством достижимости системы (I). Отметим, что при фиксированных t_1, t_2 множество $D(t, t_1, t_2)$ выпуклый компакт.

Для множества достижимости справедлива формула:

$$D(T, t_1, t_2) = e^{TA} M_0 + \int_{t_1}^{t_2} e^{(T-s)A} P \, ds \tag{3}$$

Его опорная функция в направлении $\psi \in S$ имеет вид (см. [I]):

$$c(D(T, t_1, t_2), \psi) = c(M_0, e^{TA^*} \psi) + \int_{t_1}^{t_2} c(P, e^{(T-s)A^*} \psi) \, ds \tag{4}$$

Положим

$$\lambda(t, t_1, t_2) = \min_{\psi \in S} \left[c(D(t, t_1, t_2), \psi) + c(M_1, -\psi) \right].$$

Теорема. Предположим, что существует хотя бы одно допустимое управление $(u(\cdot), t_1, t_2)$, переводящее множество M_0 в M_1. Тогда минимальный корень уравнения

$$g(t) = \max_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t,\ t_2 - t_1 \leq h} \lambda(t, t_1, t_2) = 0$$

есть время оптимального быстродействия задачи (I), (2).

Литература.

I. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. М. Изд-во Моск. ун-та, 1978.

УДК 517.956 Балашова Г.С., Дубинский Ю.А. (Москв

РАВНОМЕРНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Для последовательности нелинейных краевых задач

$$\sum_{|\alpha|=0}^{S_m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_{\alpha m}(x, D^\gamma u_m(x)) = h_m(x), x\in G, m=1,2,\ldots, \quad (1)$$

$$D^\omega u_m(x)\big|_\Gamma = \psi_{\omega m}(x'), x'\in\Gamma, |\omega|=1,2,\ldots,S_m-1, \quad (2)$$

в ограниченной области $G\in\mathbb{R}^n$ с границей Γ изучаются усло вия корректности предельного перехода при $m\to\infty$. Здесь $A_{\alpha m}($ непрерывные функции переменных $x\in G$ и всевозможных $\xi_{\gamma m}, |\gamma|\le$ α, γ, ω – целочисленные мультииндексы, S_m могут быть как коне ными, так и бесконечными, $1<p<\infty$, $\|\cdot\|_p$–норма в пространстве Леб га $L_p(G)$.

Решение $u_m(x)$ каждой задачи (1), (2) предполагается сущест шим в соответствующем уравнению (1) пространстве $W^{S_m}\{a_{\alpha m}, p\}$

$$\equiv\{u(x)\in C^{S_m}(G): \|u_m(x)\|_{S_m} = (\sum_{|\alpha|=0}^{S_m} a_{\alpha m}\|D^\alpha u(x)\|_p^p)^{1/p}<\infty\} \quad (3)$$

при условии, что правая часть $h_m(x)$ принадлежит пространству $W^{-S_m}\{a_{\alpha m}, p'\}(G)$, сопряженному пространству (3).

Семейство задач (1), (2) называется равномерно коррек ным, если множество их решений $u_m(x)$ имеет в некотором смысле предельную точку, являющуюся решением предельной задачи.

Заметим, что в предельной краевой задаче дифференциальн уравнение может быть как конечного, так и бесконечного поряд Условия равномерной корректности для указанных случаев сущес венно отличаются друг от друга. В связи с невозможностью их мулировки в краткой заметке проиллюстрируем на примере точно одного из требуемых условий.

Теорема. Пусть в семействе краевых задач

$$(-1)^m a_{mm} D^{2m} u_m(x) - D^2 u_m(x) + u_m(x) = h_m(x), x\in(0,a), \quad (4)$$

$$D^k u_m(0) = D^k u_m(a) = 0, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \quad (5)$$

последовательность правых частей $h_m(x)$ сходится к $h(x)$ в $L_2($ Тогда для слабой сходимости в $W_2^2(0,a)$ последовательности ре ний $u_m(x)$ задач (4), (5) к $u(x)$, являющейся решением преде ной задачи $-D^2u(x)+u(x)=h(x)$, $u(0)=u(a)=0$, необходимо и д точно, чтобы $\lim_{m\to\infty} m\, a_m^{1/m} = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Сорро

УДК 519.3

Балаш О.С. (Саратов)

Интерпретация канонического разложения таблиц сопряженности

С помощью метода канонических корреляций осуществляется анализ взаимосвязей групп экономических показателей различной структуры, сокращение исходных наборов признаков без существенной потери информации об исследуемых социально-экономических явлениях.

Пусть выборка представлена в виде таблицы сопряженности размером r*c. В качестве меры зависимости между анализируемыми показателями используется критерий Хи-квадрат.

Припишем категориям таблицы метки x_i, y_j ; $i=1,r$; $j=1,c$. Считая их нормированными, потребуем, чтобы $cov(x_i, y_j)\text{->}max$.

Метки x_i, y_j – удовлетворяющие этому условию являются собственными векторами матрицы $N*N'$, где $N=\{ n_{ij}/(n_{i*}*n_{j*})^{1/2}\}$, $i=1,r$; $j=1,c$; собственные числа матрицы $N*N'$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – квадратами коэффициентов корреляции между соответствующими метками, или квадратами канонических корреляций $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$.

Канонические корреляции ρ_i и соответствующие им канонические метки $x^k{}_i$, $y^k{}_j$ позволяют представить наблюдаемые частоты n_{ij} в виде суммы теоретической частоты и вклада, связанного с k-ой канонической корреляцией

$$n_{ij} = n^0{}_{ij}\ (1+ \sum_{l=2}^{k} (\rho_l * x^l{}_i * y^l{}_j))$$

При интерпретации канонического разложения используют, что канонические корреляции ρ_k с ростом k убывают достаточно быстро. Если ρ_2 – значительно превосходит последующие коэффициенты канонической корреляции, то соответствующие им члены в разложении относят к случайным эффектам. В результате получается таблица сопряженности, учитывающая основную тенденцию изучаемой связи. В противном случае выбирается величина $\varepsilon>0$ и рассчитываются таблицы сопряженности для $\lambda_k > \varepsilon$. В этом случае говорят, что наряду с главной тенденцией в исходных данных учитывается побочные влияния, а действие случайных факторов исключаются.

УДК 519.3

Балаш В.А. (Саратов)

Классификация многомерных наблюдений в пространстве разнотипных признаков

Наличие в массиве данных признаков различной природы (количественных, ранговых, номинальных) существенно затрудняет статистический анализ и, в том числе, задачу многомерной классификации. При наличии этапа обучения, цель состоит в выработке решающих правил либо восстановлении плотностей вероятности на основании статистических выборок, с указанием принадлежности каждого из объектов обучающей выборки к одному из состояний $D_1, D_2, \dots, D_k$.

Пусть исследуемая совокупность представлена в виде (X,Y), где X - непрерывные (количественные), Y - (дискретные) - качественные переменные. Задачей классификации является оценивание по исходной выборке (x_i, y_i) смеси плотностей вероятностей

$$P(X,Y) = \sum_{i=1}^{N_y} P(Y=y_i) * P(X|Y=y_i),$$

где N_y - число различных сочетаний комбинаций значений дискретных переменных, $P(Y=y_i)$ - вероятность их появления, $P(X|Y=y_i)$ - условная плотность вероятности непрерывных переменных.

При значительном числе градаций дискретных переменных оценивание приведенных вероятностей по данным выборки невозможно. В качестве альтернативы можно прибегнуть к "агрегированию" дискретных признаков. Введем меру близости двух объектов y' и y'' в пространстве дискретных переменных

$$\rho(y', y'') = \sum c_i\ a(y', y''),$$

где $a(y'_i, y''_i) = (1,$ если $y'_i = y''_i$; 1, если $y'_i \neq y''_i)$, c_i - весовые множители. На ее основе определим функцию принадлежности объекта к j-сму классу $Q_j(y)$. $Q_j(y) = \Phi(\rho(y', y^0_j))$, где $\Phi()$ - удовлетворяет требованиям к функции распределения вероятностей. Тогда сумму плотностей вероятностей можно искать в виде

$$P(X,Y) = \sum_{i=1}^{N_y} Q_j(Y) * P(X|Y=D_j)$$

УДК 517.95 Баев А.Д. (Воронеж)

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим достаточно гладкую на R_1^+ функцию $\alpha(t)$, для которой $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(t)=const$ при $t\geq d>0$. Следуя [I] введем интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta)=\int_0^\infty u(t)\exp\left(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (I)$$

определенное, например, на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_1^+)$.

Это преобразование связано с преобразованием Фурье равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}\left[\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\right],$$

где $t=\varphi^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Справедливо также следующее равенство

$$F_\alpha[\mathcal{D}_{\alpha,t}^j u](\eta)=\eta^j F_\alpha[u](\eta);\ \mathcal{D}_{\alpha,t}=i\sqrt{\alpha(t)}\,\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\alpha(t)}\,u).$$

Следуя [I] определим весовой псевдодифференциальный оператор формулой

$$K(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})v(t,x)=F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[\lambda(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(t,x)]],$$

заданный, например, на функциях $v(t,x)\in C_0^\infty(R_n^+)$.

Обозначим через $S_{\delta,1}^m$ класс функций $\lambda(t,\xi,\eta)\in C^\infty(R_{n+1}^+)$, определенных на множестве $[0,+\infty)\times R_{n-1}\times R_1^1$, таких что при всех k, ℓ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{\partial^\ell}{\partial\eta^\ell}\lambda(t,\xi,\eta)\right|\leq c_{k,\ell}(1+|\xi|+|\eta|)^{m-\ell+\delta k}.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $P(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ и $Q(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ – весовые псевдодифференциальные операторы с символами, принадлежащими $S_{\delta,1}^{m_1}$ и $S_{\delta,1}^{m_2}$ (m_1, m_2 – действительные числа, $0\leq\delta<1$). Тогда их суперпозиция есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\delta,1}^{m_1+m_2}$.

Литература.

I. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними ПДО. Докл. АН СССР, 1982 - Т.265, №5, с.1044-1046.

517.9 Баскаков А.Г., Герасимов И.А. (Воронеж)

К вопросу обратимости разностного оператора в банаховом пространстве.

Пусть G – локально-компактная абелева группа, $\hat{G}$ – двойственная группа её непрерывных унитарных характеров. Пусть X – комплексное пространство, $\operatorname{End} X$ –банахова алгебра ограниченных операторов, действующих в X и $L_p = L_p(G, X)$ –банахово пространство суммируемых со степенью p функций, определённых на группе G со значениями в X. Рассмотрим разностный оператор вида:

$$\mathcal{D} \in \operatorname{End} L_p, \quad \mathcal{D}x(g) = x(g) - Ax(g - g_0);$$
$$A \in \operatorname{End} L_p$$

где $x \in L_p$, g_0 –произвольный элемент группы G такой, что множество $\{\chi(g_0) : \chi \in \hat{G}\}$ плотно на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА: Оператор $\mathcal{D}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие: $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ и обратный оператор $\mathcal{D}^{-1} \in \operatorname{End} L_p$ имеет вид:

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}(g, k)\, x(g - kg_0),$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{G}(g, k) = \begin{cases} (AP_-)^k & k \geq 0 \\ -(AP_+)^k & k < 0 \end{cases}$

$P_- + P_+ = I$; P_- –проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{\lambda : |\lambda| < 1;\ \lambda \in \sigma(A)\}$, а $(AP_+)^{-1}$ –оператор, равный 0 на $X_- = \operatorname{Im} P_-$ и совпадает с обратным к сужению A на $\operatorname{Im} P_+$.

Литература:

1. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения.
Минск 1990.

УДК 539.3

Баскаков В.А. (Воронеж)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Изучаются ударно-волновые процессы деформирования тел под действием интенсивных импульсов излучения различной природы (механической или тепловой). В таких случаях внешний поглощающий слой мгновенно становится распределенным источником теплоты, вызывающим непрерывное распределение температуры и появление волн напряжений. В различных областях техники уже стало необходимым или представляется актуальным в ближайшем будущем моделирование процессов деформаций элементов различной конфигурации как процессов распространения и отражения волн деформаций. К таким областям в частности относятся: выявление экстремальных значений параметров динамического процесса деформации (скорость, ускорение, механические напряжения), математическое моделирование глобального поведения объекта (устойчивость, формоизменение) при очень быстром или кратковременном механическом воздействии, математическое моделирование переходных волновых процессов (МПВП) в мишени при облучении ее лазером и др.

Нами рассматривается МПВП на базе нелинейной теории термоупругости, в то время как подавляющее большинство работ по ПВП выполнены на основе линейной теории упругости или на основе линейной теории оболочек и пластин, построенных на базе линейной теории упругости. Ставится вопрос исследовать закономерности распространения ударных волн в нелинейных термомеханических средах.

Обсуждены особенности постановок и получено решение класса автомодельных задач динамической теории термоупругости для тел с центральной и осевой симметрией, в частности рассмотрена задача о скручивающем и осевом ударе по цилиндру в адиабатическом приближении. Представлены критерии разрушения шара и цилиндра под действием всестороннего сжатия.

УДК 517.9 Батаронов И.Л., Дежин В.В., Рощупкин А.М. (Воронеж)

ФУНКЦИЯ ОТКЛИКА ЛИНЕЙНОГО ДЕФЕКТА В УПРУГОМ ПОЛЕ ЦЕНТРА ДИЛАТАЦИИ

В работе [1] была получена функция отклика $g_0(q,\omega)$ изолированного линейного дефекта. Учёт его взаимодействия с другими дефектами приводит к появлению в функции Лагранжа дополнительного члена, соответствующего эффективному натяжению линейного дефекта, зависящему от координаты вдоль линии дефекта. Наибольший интерес представляет взаимодействие с точечным дефектом – центром дилатации. Для этого случая получено следующее уравнение для смещения $\xi_\omega(q)$ линейного дефекта из равновесного положения под действием силы $f_\omega(q)$

$$g_0^{-1}(q,\omega)\xi_\omega(q) - A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq'}{2\pi}K_d(q-q')\xi_\omega(q') = f_\omega(q), \qquad (1)$$

где $K_d(q)=\frac{1}{2}(qd)^2K_2(qd)$, $A=(3/2\pi)(\mu b|\Omega_0|/d^3)(1+\nu)/(1-\nu)$, d – расстояние от линейного дефекта до точечного дефекта, $K_2(x)$ – функция Макдональда второго рода второго порядка, μ – модуль сдвига упругой среды, b – вектор Бюргерса линейного дефекта, Ω_0 – изменение объёма среды, вызванное введением одного точечного дефекта, ν – коэффициент Пуассона. Решение уравнения (1) в длинноволновом пределе позволяет найти явный вид функции отклика линейного дефекта

$$g(q,q',\omega) = 2\pi\delta(q-q')g_0(q,\omega) + g_0(q,\omega)\alpha(\omega)K_d(q)g_0(q',\omega),$$

где

$$\alpha^{-1}(\omega) = \frac{1}{A} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}g_0(q,\omega)K_d(q).$$

Функция $\alpha(\omega)$ описывает отклик линейного дефекта непосредственно в области расположения центра дилатации и определяет связанные состояния и их время жизни для рассматриваемой системы.

1. Батаронов И.Л., Дежин В.В., Рощупкин А.М. // Известия РАН. Серия физическая. 1993. Т.57, № 11. С.97–105.

УДК 517.9 Бахтин И.А. (Воронеж)

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПОРЯДКОВО ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В банаховых пространствах с конусами развивается теория неподвижных точек порядково полунепрерывных, вообще говоря, немонотонных операторов. Пусть оператор A действует в вещественном банаховом пространстве E, полуупорядоченном при помощи конуса $K\subset E$.

Определение. Назовем оператор $A: M\subset E\to E$ порядково полунепрерывным снизу (сверху) в точке $x_0\in M$, если для любых возрастающей последовательности $(y_n)\subset M$, $\sup(y_n)=x_0$ и убывающей последовательности $(x_n)\subset M$, $\inf(x_n)=x_0$ и элемента $z\in E$ из

$$Ax_n, Ay_n \leq z\ (n\in N)\quad (Ax_n, Ay_n \geq z\ (n\in N))$$

следует $Ax_0\leq z$ $(Ax_0\geq z)$.

Определение. Назовем оператор $A: M\subset E\to E$ порядково вполне полунепрерывным снизу (сверху) в точке $x_0\in M$, если для любых цепей $\mathcal{N}_1\subset M$, $\sup\mathcal{N}_1=x_0$ и $\mathcal{N}_2\subset M$, $\inf\mathcal{N}_2=x_0$ и элемента $y\in E$ из

$$Ax\leq y\ (x\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2)\quad (Ax\geq y\ (x\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2))$$

следует $Ax_0\leq y$ $(Ax_0\geq y)$.

Теорема I. Пусть

I) конус $K\subset E$ вполне h-экстремален;

2) порядково вполне полунепрерывный сверху оператор A преобразует конусной отрезок $\langle x_0, y_0\rangle$ $(x_0<y_0)$ в себя;

3) для любого строго вперед идущего элемента $x\in\langle x_0, y_0\rangle$ оператора A: $Ax>x$ существует элемент $x'\in\langle x_0, y_0\rangle$, $x'>x$, такой, что $Ax'\geq x'$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, y_0\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Теорема 2. Пусть

I) конус $K\subset E$ h-экстремален и h-счетного типа;

2) порядково полунепрерывный снизу оператор A преобразует конусной отрезок $\langle x_0, y_0\rangle$ $(x_0<y_0)$ в себя;

3) для любого строго назад идущего элемента $x\in\langle x_0, y_0\rangle$ оператора A: $Ax<x$ существует элемент $x'\in\langle x_0, y_0\rangle$, $x'<x$, такой, что $Ax'\leq x'$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, y_0\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

УДК 517.9 Бахтин И.А. (Воронеж)

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОРЯДКОВО НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ДВУМЯ КОНУСАМИ

В вещественных банаховых пространствах с двумя конусами приводятся признаки сходимости, вообще говоря, немонотонных последовательностей приближений к неподвижным точкам монотонных порядково нерастягивающих операторов. В банаховых пространствах с одним конусом этот вопрос исследовался автором ранее.

Пусть оператор T действует в вещественном банаховом пространстве с двумя конусами $K \subset E$ и $K_0 \subset K$. Порядки в E, порожденные конусами K и K_0, будем обозначать соответственно знаками $\overset{K}{\le}$ и $\overset{0}{\le}$.

Определение. Оператор T называется (K_0, K)-монотонным на множестве $M \subset E$, если для любых $x, y \in M$ из $x \le y$ следует $Tx \overset{0}{\le} Ty$.

Определение. Оператор T назовем порядково (K, K_0)-нерастягивающим на множестве $M \subset E$, если $\forall x, y \in M$ из $x \overset{0}{\le} y$ следует $Ty - Tx \le y - x$.

Теорема 1. Пусть

1) вполне непрерывный (K_0, K)-монотонный порядково (K, K_0)-нерастягивающий на конусном отрезке ${}^0\langle u_0, v_0\rangle^0$ оператор T преобразует ${}^0\langle u_0, v_0\rangle^0$ в себя.

Тогда для любого элемента $x_0 \in {}^0\langle u_0, v_0\rangle^0$ из ограниченности по норме последовательности

$$x_n = Tx_{n-1} \quad (n \in N) \qquad (1)$$

следует ее сходимость к некоторой неподвижной точке $x_* \in {}^0\langle u_0, v_0\rangle^0$ оператора T.

Теорема 2. Пусть

1) $K_0 \subset K$ - воспроизводящий конус;

2) вполне непрерывный (K_0, K)-монотонный порядково (K, K_0)-нерастягивающий в пространстве E оператор T имеет в E неподвижную точку x_*.

Тогда для любого элемента $x_0 \in E$ из ограниченности по норме последовательности (1) следует ее сходимость к некоторой неподвижной точке оператора T.

Отметим, что если выполняется по крайней мере одно из условий: а) конус K_0 нормален; б) при некотором $n_0 \in N$ множество $A^{n_0}\langle u_0, v_0\rangle$ ограничено по норме, то последовательность (1) ограничена по норме.

УДК 519.4 Бекларян Л.А. (Москва)

О метрических инвариантах для групп гомеоморфизмов прямой

Различные вопросы алгебры, анализа, теории динамических систем, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом приводят к необходимости исследования групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Такие группы допускают классификацию в зависимости от сложности множества неподвижных точек элементов группы и группы в целом, а также структуры орбит. Для таких групп к наиболее актуальным относится проблема существования метрических инвариантов.

В докладе будут сформулированы условия существования серии метрических инвариантов (существование n-проективно-инвариантных мер) в виде условий на структуру множества неподвижных точек, а также в виде условия "полусопряженности" исследуемой группы группе аффинных преобразований n-мерного пространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований N 94-01-01513-а.

1. Бекларян Л.А. Инвариантные и проективно-инвариантные меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Докл.РАН, 1993, т.332, N6. с.679-681.

УДК 517.5

Белов А.С. (Иваново)

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Речь будет идти об экстремальных задачах, связанных с неотрицательными тригонометрическими полиномами, у которых все коэффициенты, кроме, быть может, свободного члена, являются целыми неотрицательными числами. Для примера приведем результаты, касающиеся одной из таких задач.

Для каждого натурального n через W_n^+ обозначим совокупность всех тригонометрических полиномов с действительными коэффициентами вида $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$ таких, что $\sum_{k=0}^{m} a_k \cos(kx)\geq 0$ при всех x и $m=1,\ldots,n$ и $a_k\geq 1$ при всех $k=1,\ldots,n$. Через $W_n^{+\downarrow}$, W_n^{+Z}, $W_n^{+\downarrow Z}$ будем обозначать совокупность всех полиномов $T_n \in W_n^+$, которые удовлетворяют, соответственно, условию $\downarrow$: $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$; условию Z : $a_1, \ldots, a_n$ – целые числа; обоим этим условиям. Пусть $M^+(n)=\min\{a_0 : T_n \in W_n^+\}$. Аналогично определяются величины $M^{+\downarrow}(n)$, $M_Z^+(n)$ и $M_Z^{+\downarrow}(n)$ заменой W_n^+ на $W_n^{+\downarrow}$, W_n^{+Z} и $W_n^{+\downarrow Z}$ соответственно. Пусть

$$K_Z^{+\downarrow}(n)=\inf\left\{-\min_{m\geq 1}\min_{x}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cos(kx)\right\},$$

где нижняя грань берется по всем невозрастающим последовательностям неотрицательных целых чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k = n$. Справедлива следующая

Теорема 1. При всех натуральных n верны оценки

$$\frac{1}{4}n^{\alpha}< M^+(n)\leq \min\{M^{+\downarrow}(n), M_Z^+(n)\}\leq \max\{M^{+\downarrow}(n), M_Z^+(n)\}\leq$$

$$\leq M_Z^{+\downarrow}(n)<4n^{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}n^{\alpha}<K_Z^{+\downarrow}(n)<14n^{\alpha},$$

где $\alpha = 0{,}308\ldots$ – единственный корень уравнения

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha}\cos t\,dt = 0 .$$

Отметим, что полученные в теореме 1 оценки не только значительно лучше известных, но и точны по порядку.

Предполагается также рассказать о некоторых вопросах, тесно связанных с указанными экстремальными задачами.

517.537.32:517.977.5 Белоусова Е.П. (Воронеж)

Связь между функцией Грина периодической задачи с многочленами Бернулли

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + f(t), \qquad (1)$$

в котором A постоянный оператор. Уравнение (1) при любой непрерывной ω-периодической функции f (считаем ω=1) имеет единственное ω-периодическое решение x(t) тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda \neq 2k\pi i, \lambda \in \sigma(A)$. При этом справедлива формула

$$x(t) = \int_0^1 G(s) f(t-s)ds = \int_0^1 e^{sA}(I-e^{A})^{-1} f(t-s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (2)$$

где G(t)-приведенная функция Грина или импульсно-частотная характеристика ω-периодического звена. Для нахождения функции Грина можно использовать связь с числами и многочленами Бернулли. Эта связь особенно четко прослеживается, если существует обратный оператор A^{-1} и $\rho(A)<2\pi$ ($\rho(A)$-спектральный радиус оператора A), для чего достаточно, чтобы $\|A\|<2\pi$. Производящая функция чисел Бернулли: $\frac{z}{e^{z}-1}$. Отсюда матрица $(I-e^{A})^{-1}$ представима в виде:

$$(I-e^{A})^{-1} = -A^{-1} - I/2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} A^{2k-1}. \qquad (3)$$

B_{2k} – четные числа Бернулли, нечетные все равны нулю кроме первого. Для многочленов Бернулли производящая функция имеет вид: $\frac{z e^{tz}}{e^{z}-1}$. Тогда функция Грина представима в виде:

$$e^{tA}(I-e^{A})^{-1} = A^{-1} + I/2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} A^{n-1}, \qquad 4)$$

где $B_n(t)$ – многочлены Бернулли. Так как для поиска чисел и многочленов Бернулли существуют рекуррентные формулы, то соотношения (3) и (4) можно использовать для приближенного вычисления функции Грина.

Литература:

1. Далецкий Ю.Л. Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.,"Наука",1970.

2. Красносельский М.А.,Лифшиц Е.А.,Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.."Наука".1985.

УДК 519.71 Белявский Г.И. (Ростов-на-Дону)

ОБНАРУЖЕНИЕ МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ СИГНАЛА КАК ЗАДАЧА РАСПОЗНАВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ С ОДИНАКОВЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ

Задача обнаружения рассматривается в двух постановках (априорной и рекуррентной). При априорной постановке имеется выборка $y(0), y(2), \ldots, y(s)$ - наблюдений за время s. Эта выборка образует случайный вектор y. Если за время наблюдений резких изменений не происходило, то случайный вектор y описывается следующей моделью:

$$y = x + tI + n, \quad Ax = r. \tag{1}$$

В (1) вектор $I = (1,1,\ldots,1)$; t - нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2; n - вектор шума, нормальный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma_1^2 E$; r - нормальный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma_2^2 E$; A - матрица, реализующая разностный оператор.

Если в момент времени $i = 1,2,\ldots s$, произошло резкое изменение сигнала, то случайный вектор y описывается моделью:

$$y = x + fe(i) + tI + n, \quad Ax = r. \tag{2}$$

В (2) вектор $e(i) = (0,0,\ldots,1,1,\ldots,1), i = 1,2,\ldots,s$; f - нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_3^2.

Задача обнаружения момента изменения формулируется как задача отнесения наблюдаемого сигнала к одному из классов: $H(0), H(1), \ldots, H(s)$, где $H(0)$ - изменения сигнала не было, $H(i)$ - изменение произошло в i - й момент времени. Таким образом, сформулированная задача относится к задачам распознавания нормальных законов, с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами, различающимися на матрицы единичного ранга. Показано, что оптимальный алгоритм принятия решения выглядит следующим образом. Сперва определяется: $i^* = \arg\min U(i,y)$. Затем, если $U(i^*, y) > 0$, то делается вывод что разладки не было. В противном случае принимается решение о разладке в момент i^*. Функции $U(i,y) = \theta(i) - (g(i),y)$. Для параметров $\theta(i)$ и $g(i)$ получены аналитические выражения.

При рекуррентной постановке рассматривается случайная последовательность. Для параметров $\theta(i,s)$ и $g(i,s)$ получены рекуррентные формулы, на основе которых решена задача обнаружения в рекуррентной постановке.

УДК 517.95

Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. (Гродно)

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА ПЕНЛЕВЕ

В работах [1], [2] дано определение свойства Пенлеве для нелинейных уравнений в частных производных. Установим наличие этого свойства для уравнения

$$u_x u_{xxx} = \frac{3}{2} u_{xx}^2 + \mathcal{F}, \qquad (1)$$

где функция $\mathcal{F}$ - однородная второй степени относительно u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}. Решение уравнения (1) ищем в виде формального ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^{k-1}, \quad u_k = u_k(x,t), \quad \varphi = \varphi(x,t). \qquad (2)$$

Для (1) резонансными будут числа -1, 0, 1. Следовательно, необходимо, чтобы функции u_0, u_1, φ в разложении (2) были произвольными. Чтобы это условие было выполнено, уравнение (1) должно иметь вид

$$u_x u_{xxx} = \frac{3}{2} u_{xx}^2 + a u_x^2 + b u_x u_t + c u_x u + d u_t^2 + e u_t u + h u^2, \qquad (3)$$

где $a, \dots, h$ - функции от x, t. Как и в [2] убеждаемся, что в решениях (3) отсутствуют логарифмы.

Если в (3)

$$d = e = h = b_x = c_x = a_{xx} = 0, \qquad (4)$$

то полагая $u_{xx} = 2 v u_x$, для v получим уравнение

$$v_{xxx} = 6 v^2 v_x + (a v)_x + b v_t,$$

которое на основании [3] имеет свойство Пенлеве.

Если для уравнения Кортевега -де Фриза

$$\omega_{xxx} = 6 \omega \omega_x + b \omega_t + A \omega + B, \qquad (5)$$

$A = A(t)$, $A_t + 2A^2 + 6B_x = 0$, применить преобразование $\omega = 2u_x^2 u^{-2} - 2u_{xx} u^{-1} + W$, где ω, W - решения уравнения (5), то найдем, что u удовлетворяет уравнению (3) при условии (4) и $C = 0$, $a_x = A$.

Литература

1. Weiss J., Tabor M., Carnevale C. // J. Math. Phys. - 1983 - V. 24, N3. - P. 522-526.
2. Cosgrove C.M. // Stud. Appl. Math. - 1993. - V. 89. - P. 1-61.
3. Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. //Дифференц. уравнения.- 1994. - Т.30, №10. - С.1703-1709.

УДК 548.0:534

Бестужева Н.П., Даринский Б.М. /Воронеж/

ПРОДОЛЬНЫЕ НОРМАЛИ УПРУГИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ

В работе проведен анализ и сравнение возможных ситуаций относительно продольных нормалей в кристаллах различных сингоний. В каждом из рассматриваемых случаев существует определенное число направлений продольных нормалей, не зависящих от упругих модулей или существующих при любых значениях упругих постоянных. Они образуют основу, присущую данной сингонии, и, естественно, определены кристаллографической симметрией. Соответствующие индексированные точки основной функции, которая полностью определяет продольные нормали, обладают этими же свойствами. Другая группа - промежуточные нормали общего положения - возникает и исчезает при определенных значениях упругих модулей. Выяснено, что процесс возникновения новых направлений происходит как расщепление основных решений, а исчезновение - слияние с основными решениями. Эти явления сопровождаются сохранением топологических индексов Пуанкаре рассматриваемых критических точек, реакция которых при расщеплении позволила рассмотреть различные виды поверхности, определяемой основной функцией. Картина преобразований этой поверхности при изменении упругих модулей, появление новых критических точек и смен индекса основных решений подчинена закономерностям, при изучении которых могут оказаться полезными некоторые методы современной топологии. Форма поверхности исследуется с помощью графов. Приведена эволюция графов для кристаллов гексагональной, тригональной, тетрагональной, ромбической и моноклинной сингоний. Отмечено, что чем меньше основных решений, тем большую роль они играют как источники ветвлений решений, что подтверждается графами моноклинной и ромбической сингоний.

УДК 517.9 Бирюкова Л.В., Жуковский В.И. (Москва)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассматривается квадратичный функционал

$$J(x(\cdot,\beta),\beta)=x'(\vartheta,\beta)G_1x(\vartheta,\beta)+\int_{t_*}^{\vartheta}x'(t,\beta)\left[G_2(t)+\beta G_3(t)+\beta^2G_4(t)\right]x(t,\beta)dt$$

на решениях $x(\cdot,\beta)=\{x(t,\beta),\ t_*\le t\le\vartheta\}$ системы

$$\dot{x}=[A(t)+\beta E_n]x,\ x(t_*)=x_*.$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$; $\vartheta=const>0$; $(t_*,x_*)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$; $n\times n$-матрицы $A(t)$, $G_j(t)$ непрерывны ($j=2,3,4$), G_1 – постоянна и G_i симметричны ($i=1,\dots,4$); параметр $\beta>0$;

$$G_4(t)>0\ (<)\Longleftrightarrow\exists\lambda=const>0:\ x'G_4(t)x\ge\lambda x'x\ (x'G_4(t)x\le-\lambda x'x).$$

ЛЕММА. Если $G_4(t)>0\ (<)$, то для каждого $\beta>0$ существует $\beta^*=const>0$ такое, что при всех $\bar\beta\ge\beta^*$, $(t_*,x_*)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$, $\|x_*\|\ne0$ будет

$$J(x(\cdot,\bar\beta),\bar\beta)>J(x(\cdot,\beta),\beta)\ \left(J(x(\cdot,\bar\beta),\bar\beta)<J(x(\cdot,\beta),\beta)\right).$$

Данная лемма позволяет выделить классы линейно-квадратичных дифференциальных игр [1,2], в которых отсутствует решение. Например, для антагонистической дифференциальной игры

$$J(U_1,U_2,t_*,x_*)=x'(\vartheta)Cx(\vartheta)+\int_{t_*}^{\vartheta}\left(x'(t)Gx(t)+\sum_{i=1}^{2}u_i'[t]D_iu_i[t]\right)dt,\qquad(1)$$

$$\dot{x}=A(t)x+\sum_{i=1}^{2}B_i(t)u_i,\ x(t_*)=x_*,\qquad(2)$$

$$\mathcal{U}_i=\{U_i\div u_i(t,x)\mid u_i(t,x)=Q_i(t)x,\ Q_i(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]\},$$

где $x,u_i\in\mathbb{R}^n$; $n\times n$-матрицы C, G, D_i симметричны, $A(\cdot),B_i(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]$; $(t_*,x_*)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$; $x(\cdot)=\{x(t),t_*\le t\le\vartheta\}$ – решение системы (2) при $u_i=Q_i(t)x$; $u_i[t]=Q_i(t)x(t)$. $(i=1,2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $D_1>0$ или $D_2<0$, то для функционала (1) не существует седловой точки при любых $(t_*,x_*)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$, $\|x_*\|\ne0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhukovskiy V.I., and M.E. Salukvadze. Vector-Valued Maximin. New York, Academic Press, 1994, 404 p.
2. Vaisbord E.M., and Zhukovskiy V.I. Introduction to Multi-Player Differential Games and their Applications. New York: Gordon and Breach Science Publishers. 1988, 582p.

УДК 519.62 Блатова В.В.

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ ОРТОПРОЕКТОРОВ И СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ краевую задачу

$$\varepsilon \dot{y} = F(y,t),\ Ay(-1)+By(1)=0,\ y=(y_1,\dots,y_n)^T\in R^n,\ 0<\varepsilon\ll 1 \qquad /1/$$

Пусть уравнение $F(y,t)=0$ имеет изолированное решение $y_0(t)$, причем $\det F_y(y_0(t),t)\neq 0$ при $t\in[-1;1]$. Предположим, что выполнены все условия [1], обеспечивающие существование в некоторой L_1-окрестности $y_0(t)$ изолированного решения $y_\varepsilon(t)$ с двумя экспоненциальными погранслоями. Построим на $[-1;1]$ адаптивное разбиение Н.С.Бахвалова $\Delta: -1=t_{0}<t_{-2m+1}<\dots<t_{2m-1}<t_{2m}=1$, сгущающееся в зоне погранслоев /см.[2]/. Пусть $S(\Delta,2,1)$ – пространство параболических сплайнов дефекта 1 на сетке Δ. Пусть $E(\varepsilon,m)=\{u\in(S(\Delta,2,1))^n: Au(-1)+Bu(1)=0\}$ – пробное галеркинское пространство, $F(\varepsilon,m)=[\varepsilon\frac{d}{dt}+F_y(y_0(t),t)]\cdot E(\varepsilon,m)$ – тестовое галеркинское пространство. Метод Галеркина решения задачи /1/ состоит в отыскании такой $y_m(t)\in E(\varepsilon,m)$, что для любой $z_m(t)\in F(\varepsilon,m)$

$$(\varepsilon\dot{y}_m(t)-F(y_m(t),t),\ z_m(t))=0 \qquad /2/$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $(L_2[-1;1])^n$

Теорема 1. Найдутся такие числа $c_1>0, \varepsilon_0>0, \gamma_0>0$ и номер m_0, что для всех $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0], m>m_0: \varepsilon|\ln\varepsilon|m_0\leq\gamma_0$ существует единственное решение $y_m(t)$ задачи /2/, для которого справедливы оценки

$$\|y_m(t)-y_\varepsilon(t)\|_{C[-1;1]}\leq\frac{c_1}{m^2}$$

Пусть $P(\varepsilon,m)$ – ортопроектор на $F(\varepsilon,m)$. Доказательство теоремы 1 основано на следующем результате.

Теорема 2. Семейство операторов $\{P(\varepsilon,m),\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0,\ m\geq m_0:$ $\varepsilon|\ln\varepsilon|\cdot m_0\leq\gamma_0$ удовлетворяет оценке $\|P(\varepsilon,m)\|_{C\to C}\leq const$, где $const$ не зависит от ε, m.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973
2. Стрыгин В.В., Сируняя В.В. Сходимость метода Галеркина на адаптивных сетках для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. мат. журн. 1990. Т.31. №5. С. 138-148

УДК 517.9

Близняков Н.М. (Воронеж)

О ВЫБОРЕ КРИВОЙ РЕГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Следующее утверждение дополняет теорему Сарда о структуре множества регулярных значений для случая полиномиальных отображений $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Теорема. Пусть $P = (P_1, P_2, \ldots, P_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – полиномиальное отображение и $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ степени полиномов $P_1, P_2, \ldots, P_m$,соответственно. Тогда существуют числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} \in \mathbb{N}$,зависящие лишь от $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ и $t \in \mathbb{R}_+$ такие, что все точки кривой $x(t) = (t, t^{k_1}, \ldots, t^{k_{m-1}})$, $t \in (0, t_0)$ будут регулярными значениями отображения P .

Указан алгоритм вычисления чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы "Университеты России".

Литература

1. Bliznyakov N.M. Cauchy indices and singular point index of a vector field // Lecture Notes in Mathematics. - 1986. v. 1214. - p. 1-20.

2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.-М.:Мир, 1970.- 412 с.

3. Том Р., Левин Г. Особенности дифференцируемых отображений // в сб. "Особенности дифференцируемых отображений".-М.:Мир, 1968. - с. 9-101.

УДК 517.928 Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.(Москва)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается сингулярно возмущенная задача с запаздывающим аргументом вида

$$\varepsilon \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + g(t), \quad x(t)\Big|_{-h\le t\le 0} = \varphi(t), \qquad (1)$$

где $x=\{x_1,\dots,x_n\}$, $A(t)$, $B(t)$ –известные $(n\times n)$ –матрицы, $g(t)=\{g_1,\dots,g_n\}$, $\varphi(t)=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ –известные вектор-функции, $\varepsilon>0$ –малый параметр. Предпринята попытка обобщения на задачи типа (1) алгоритма метода регуляризации Ломова [1]. Этот метод, как известно, применялся в условиях отсутствия запаздывания. Для задач без запаздывания этот метод позволяет строить асимптотические решения в случае, когда спектр $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$ лежит в замкнутой левой полуплоскости $Re\,\lambda\le 0$. К системам с запаздыванием метод регуляризации ранее не применялся.

Исследование задач типа (1) с запаздывающим аргументом с позиций метода регуляризации позволило обнаружить новые эффекты. В частности оказалось, что применение к задачам (1) метода шагов связано с появлением на каждом шаге новых типов существенно особых сингулярностей, что заметно усложняет разработку соответствующего алгоритма построения асимптотических решений задачи (1). Описать полностью существенно особые сингулярности в терминах спектра $\{\lambda_j(t)\}$ как это было в задачах без запаздывания не удается. Возникает необходимость в классификации задач типа (1) на нерезонансные $(\lambda_i(t)\ne\lambda_j(t-h),\ \forall t\in[0,T])$, тождественно резонансные $(\lambda_j(t)\equiv\lambda_j(t-h),\ \forall t\in[0,T])$ и задачи с нетождественным резонансом (когда соотношения $\lambda_i(t)=\lambda_j(t-h)$ выполняются в отдельных точках отрезка $[0,T]$).

В работе рассмотрены линейные и нелинейные системы типа (1) в нерезонансном случае, а также в случае тождественного резонанса. Для этих случаев разработаны алгоритмы метода регуляризации и проведены их обоснования.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.–М.: Наука, 1981.– 400 с.

УДК 517.95 Бободжанов А.А., Туйчиев О.Д. (Худжанд)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ВОЛЬТЕРРА В СЛУЧАЕ КРАТНОГО СПЕКТРА

Рассматривается сингулярно возмущенная интегродифференциальная система

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = A(x)y + \int_0^x K(x,s)y(s)ds + h(x), \quad y(0,\varepsilon) = y^0 . \qquad (1)$$

Ставится задача о построении ее асимптотического решения (при $\varepsilon \to +0$) при следующих предположениях:

1) оператор $A(x)$ действует при каждом $x \in [0,T]$ в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^n$ и имеет единственное собственное значение $\lambda(x)$ геометрической кратности, равной единице, т.е.

$$A\varphi_1 = \lambda \varphi_1 , \qquad A\varphi_i = \lambda \varphi_i + \varphi_{i-1} \quad (i=2,\dots,n);$$

2) выполняются условия гладкости:

$$A(x) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^{n^2}),\ K(x,s) \in C^\infty(0 \le s \le x \le T, \mathbb{C}^{n^2}),\ h(x) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n).$$

Не умаляя общности, будем считать, что $n=2$. Следуя [1], введем регуляризирующие функции

$$\tau = \varepsilon^{-1}\int_0^x (\lambda + \sqrt{\varepsilon}\, p)d\theta , \quad \sigma = \varepsilon^{-1}\int_0^x (\lambda - \sqrt{\varepsilon}\, q)d\theta , \qquad (2)$$

и, рассматривая расширение $\tilde{u}(x,\tau,\sigma,\varepsilon)$ решения задачи (1) в пространстве $U = \{y : y = y_1(x)e^\tau + y_2(x)e^\sigma + y_0(x),\ y_j(x) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)\}$, построим расширенную задачу

$$\varepsilon\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + (\lambda + \sqrt{\varepsilon}\, p)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + (\lambda - \sqrt{\varepsilon}\, q)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} - A(x)\tilde{u} - \tilde{I}(x,\tau,\sigma,\varepsilon) = h(x),\ \tilde{u}(0,0,0,\varepsilon) = y^0,$$

где

$$\tilde{I} \equiv \sum_{k=-1}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k \Big[\int_0^x K(x,s)y_0^{(k)}(s)ds + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\sqrt{\varepsilon})^m \Big(\big(I_1^m K(x,s) y_1^{(k)}(s)\big)_{s=x} \cdot e^\tau -$$

$$- \big(I_1^m K(x,s) y_1^{(k)}(s)\big)_{s=0} \Big) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\sqrt{\varepsilon})^m \Big(\big(I_2^m K(x,s) y_2^{(k)}(s)\big)_{s=x} \cdot e^\sigma -$$

$$- \big(I_2^m K(x,s) y_2^{(k)}(s)\big)_{s=0} \Big) \Big] , \quad I_j^m \equiv \Big[(\lambda + \sqrt{\varepsilon}\, \ell_j)\frac{\partial}{\partial s} \Big]^m (\lambda + \ell_j \sqrt{\varepsilon}),$$

$$\ell_1(x) \equiv p(x), \quad \ell_2(x) \equiv -q(x) .$$

Определяя ее решение в виде ряда $\tilde{u} = \sum_{k=-1}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k y_k$, $y_k \in U$, и изучая разрешимость итерационных задач в пространстве U, докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия 1–2. Тогда для достаточно малых ε $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ задача (1) имеет единственное решение $y(x,\varepsilon)$, причем имеет место оценка

$$\| y(x,\varepsilon) - u_{\varepsilon N}(x) \|_{C[0,T]} \le C_N \cdot \varepsilon^{\frac{N+1}{2}} , \quad N = -1, 0, 1, \dots,$$

где $u_{\varepsilon N}(x)$ – сужение N-й частичной суммы указанного ряда на регуляризирующих функциях (2), постоянная $C_N > 0$ не зависит от ε.

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.– М.: Наука, 1981.– 400 с.

УДК 563.25 Богданова М.В., Миловская Л.С. (Воронеж)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА В СОСУДАХ С КРИОГЕННЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

В настоящее время метан и другие природные газы рассматриваются как перспективные виды топлива для авиации нового поколения. Надежность и эффективность работы новейших летательных аппаратов во многом зависят от всестороннего изучения процессов теплообмена, протекающих в энергетических установках. Необходим учет различных режимов эксплуатации подобных систем, их геометрии, а также изоляционных свойств материалов, используемых для изготовления этих систем.

В данной работе рассматривается задача определения теплового поля в замкнутом цилиндрическом сосуде, неполностью заполненном криогенной жидкостью. Зеркало жидкости параллельно оси цилиндра. К внешней поверхности цилиндра подводится переменный поток тепла. Имеется капиллярный сток заданной мощности. Рассчитывается температурное поле и поле течения жидкости. В качестве математической модели рассматривается пространственная модель Навье-Стокса. В предпосылках [1] в данной работе изучаются тепловые поля и поля течений жидкости для случая несимметричной геометрии. Кроме того, в отличие от предыдущих работ, пространственная модель приближенного решения поставленной задачи редуцируется к последовательности двумерных задач. При решении двумерных задач используется метод конечных разностей. Составлена программа на языке Паскаль.

Результаты вычислений позволяют учесть пространственную специфику задачи, а также спрогнозировать течение процессов теплообмена в сосудах с криогенными жидкостями.

1. Полежаев В.И., Черкасов С.Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом потоке тепла. Изв. АНСССР, МЖГ,1983, N4.

УДК 551.510.42

БОРИСОВ Н.И., ВОРОНОВ О.В. ЖУЧКОВ И.А. (Воронеж)

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВИДИМОСТИ В ПРОМЫШЛЕННЫХ ДЫМАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МИ

При расчете метеорологической (оптической) видимости в промышленных дымах используется выражение, связывающее спектральный коэффициент аэрозольного ослабления света $\alpha(\lambda)$ и весовую концентрацию дыма:

$$\alpha(\lambda) = C\frac{4}{3}\frac{\int_0^\infty r^2 Q\left(\frac{2\pi r}{\lambda}, m\right) f(r)\,dr}{\int_0^\infty r^3 f(r)\,dr} \qquad (1)$$

Фактор ослабления света одной частицей $Q\left(\frac{2\pi r}{\lambda}, m\right)$ рассчитывается на основании соотношений теории Ми / 1 /.

Были проведены исследования по определению верхнего предела интегрирования и количества интервалов разбиений несобственных интегралов выражения (1) при замене их определенными интегралами без потери точности вычисления. В расчетах аэрозоль представляется суперпозицией отдельных фракций, микроструктура которых задается формулой:

$$f(r) = \sum_{i=1}^{N} f_i(r) = \sum_{i=1}^{N} A_i r^{a_i} \exp(-b_i r^{c_i}). \qquad (2)$$

В результате проведенных исследований для определенных фракций примесей были получены значения верхнего предела интегрирования и количества интервалов разбиений, которые позволяют без потери точности рассчитывать метеорологическую видимость в промышленных дымах по формуле Кошмидера / 2 /.

Литература

1. Борен К., Хафман Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. - Москва, Мир, 1986г.
2. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Оптика атмосферного аэрозоля.- Л. Гидрометеоиздат,1986г.

УДК 517.95 + 517.98

БОРИСОВИЧ А.Ю. *
(Воронеж)

БИФУРКАЦИИ КАПИЛЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОМЕХАНИКИ

Изучаются бифуркации в следующей нелинейной краевой задаче, тесно связанной с проблемой Плато

$$\operatorname{div} T(w) - \lambda w = 0, \quad (x,y) \in S \tag{1}$$

$$w = \psi(\lambda), \quad (x,y) \in \partial S \tag{2}$$

где $T(w) = (I + \nabla^2 w)^{1/2} \circ \nabla w$. параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ - капиллярная константа, $W(x,y)$ - поверхность, удерживающая столб вязкой жидкости в капилляре, $\psi : \partial S \times \mathbb{R}_\lambda \to \mathbb{R}$ - достаточно гладкая функция.
При $\lambda = 0$ поверхность $W(x,y)$ является минимальной, т.е. экстремалью функционала площади. Модель (1) - (2) и некоторые ее вариации начали исследоваться еще в работах Юнга, Лапласа и Гаусса. Обзор современного состояния проблемы можно найти в монографиях [1, 2]. Задача (1) - (2) сводится к операторному уравнению в пространствах Соболева с нелинейным фредгольмовым индекса 0 оператором, и для ее исследования применяется теорема о простой точке бифуркации. При условиях $\psi'_\lambda(0) = \psi''_\lambda(0) = 0$ получен следующий результат:
ТЕОРЕМА 1) Пусть S - круг единичного радиуса. Пусть M_{kj} - нули функций Бесселя $J_k(x)$, $k = 0,1,2,\dots$; $j = 1,2,\dots$
Если $\lambda_0 = \mu^2_{0j}$, $j = 1,2,\dots$, тогда $(0,\lambda_0)$ - однократная точка бифуркации для задачи (1) - (2), и множество решений в окрестности этой точки состоит из двух гладких кривых: семейства малых решений $(W(\lambda),\lambda)$. где $W(\lambda_0) = 0$, $W'(\lambda_0) = 0$, и трансверсального ему семейства решений $(W(s),\lambda(s))$. где $(W(0),\lambda(0)) = (0,\lambda_0)$, $W'(0) \neq 0$.

2) Пусть $S = \{(x,y) : -\pi/2 \le x \le \pi/2, \ -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$ -квадрат.
Если λ_0 - однократное значение функции $\lambda(k,m) = k^2 + m^2$, $(k,m \in \mathbb{Z})$, тогда $(0,\lambda_0)$ - однократная точка бифуркации для задачи (1) - (2), и множество решений в окрестности этой точки состоит из двух гладких кривых. 3) В каждой однократной точке бифуркации проведена конечномерная редукция по схеме Ляпунова - Шмидта к проблеме ветвления критических точек ключевых функций. Вычислен тип особенностей: для всех точек бифуркации это A_3 ("сборка").

ЛИТЕРАТУРА

1) Дао Чонг Тхи, А.Т.Фоменко. Минимальные поверхности, мультиварифолды и проблема Плато. //Москва: Наука, 1987.
2) R.Finn. Equilibrium capillary surfaces. //Springer - Verlag, 1986.
3) A.Yu.Borisovich. Functional-Topological Properties of the Plateau Operator and Applications to the Study of Bifurcations in Problems of Geometry and Hydrodynamics. //Advances in Soviet Mathematics. Vol. 15, AMS, 1993, pp.287-330

* Research supported by International Science Foundation

УДК 917.988 Борисович Ю.Г. (Воронеж) *

К ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНДАМЕНТАЛЬНО СУЖАЕМЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Автором в свое время был сформулирован принцип компактного сужения (см.[1]) для построения топологических характеристик некомпактных отображений, развитый затем для уплотняющих оператор автором, Ю.И.Сапроновым, В.В.Обуховским. Совместно с последним было введено понятие вращения для класса векторных полей с выпуклыми компактными образами, не являющихся компактными, но "вполне фундаментально сужаемых" - класс M_B [2]. В докладе рассматривается новый класс $\Phi_n C^1 M_B$ векторных полей $f:(X,\partial X)\to(E,E\setminus 0)$, $f=A-g$, $A\in\Phi_n C^1$, $n\geq 0$, - нелинейное собственное отображение, $g\in K_v$, - полунепрерывное сверху с выпуклыми компактными образами, причем пара (A,g) вполне фундаментально сужаема. Здесь X - банахово многообразие с краем ∂X класса C^1 с ориентируемой фредгольмовой структурой X_Φ, индуцированной посредством A из банахова пространства E с тривиальной Φ -структурой. Пара (A,g) вполне фундаментально сужаема, если м-отображение $g\circ A^{-1}: AX\to AX$ вполне фундаментально сужаемо в смысле [2] (наше определение следует общей концепции [1] и более удобно, чем в [3], где рассмотрен однозначный случай). Для отображений $f\in\Phi_n C^1 M_B$ определяются топологические характеристики $\deg f\in\mathfrak{F}_n$, $\widetilde{\deg} f\in\widetilde{\mathfrak{F}}_n$ - ориентируемые степени со значениями в классах n - бордизмов Элворти, Тромба, характеризующие множество совпадений $S(A,g)$ включений $A(x)\in g(x)$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены приведенные выше условия. Тогда: 1) если $\deg f$ или $\widetilde{\deg} f$ - нетривиальные в своем классе элементы, то $S(A,g)$ не пусто; 2) $\widetilde{\deg} f$ сохраняется при гомотопии векторного поля f; 3) $\deg f$ аддитивно зависит от области в $X\setminus\partial X$.

Для G -эквивариантных отображений A, g получен аналог соответсвующей теоремы из [3] при $G=S^1$, $G=T^n$, вычисляющей $\deg f$, $\widetilde{\deg} f$. Конструкция распространяется на индексы пересечения $\widetilde{\gamma}(f,S)$, $\gamma(f,S)$ из $\widetilde{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{F}$, а также на вариант $A\in\alpha_0$ - классу И.В.Скрыпника и вариант Φ - сечений банахова векторного расслоения. Получено приложение к задаче управления динамической системой с функциональными связями и с G - симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1) Borisovich Yu.G. Topological Characteristics in Nonlinear Problems of Geometry, Optimization and Mathematical Physics.// Applied Aspects of Global Analysis. - Voronezh University Press, 1994.- pp.11-30
2) Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. - Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. // Успехи матем.наук, 35:1/1980/.с.1-64.
3) Звягин В.Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и о возмущении решений нелинейной граничной задачи с некомпактными возмущениями. // Матем.сборник, т.182, N 12(1991).- с.1740-1768.

* Работа поддержана грантами МНФ (N RJ2000), РФФИ (N 94-01-00413-а) "Программа Университеты России".

КЛАССИФИКАЦИЯ УПРУГИХ СРЕД ПО ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ УПРУГИХ ВОЛН

Ю.Г.Борисович, Б.М.Даринский

Рассматриваются плоские упругие волны в анизотропных упругих средах. Зависимость оператора Кристоффеля, определяющего поляризации и скорости распространения трех мод упругих волн, от направления распространения порождает отображение сферы направлений S^2 в многообразие $SO(3)$, образованное всевозможными ориентациями главных осей оператора Кристоффеля.

Обращается внимание на особые точки на S^2 этого отображения, отвечающие вырождению 3-репера собственных векторов оператора Кристоффеля. Используется топологический формализм, сопоставляющий изолированной особенности элемент из фундаментальной группы $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, называемый топологическим индексом особенности. Аналогично определяется глобальный индекс множества особенностей, который аддитивно зависит от области по $mod\,2$. Особенности с индексом I по $mod\,2$ являются топологически устойчивыми относительно гомотопирования оператора Кристоффеля путем изменения компонент упругих модулей. Особенности с индексом $0\ mod\,2$ являются неустойчивыми. Проводится классификация упругих сред по типам различных особенностей и их индексами на основе введенной характеристики типа числа Пуанкаре. В ранней работе [I] было показано, что для любой анизотропной среды можно указать три продольные нормали, то есть такие, направления распространения упругих волн, в которых может распространяться чисто продольная волна. В работе показано, что эти направления связаны друг с другом линиями чисто поперечных волн на сфере направлений, которые производят разбиение сферы направлений на восемь сферических треугольников. Рассчитывается число вращений собственных векторов оператора Кристоффеля при обходе сферы по линии поперечных волн. Показано, что относительное число вращений,может принимать значения -2, -I, -I/2, 0, I/2, I, 2. Проводится классификация упругих сред по различным тройкам индексов Пуанкаре. Исследуются обычно встречаемые среды в практике. Показано, что их топологический тип характеризуется набором чисел вращения I, I, I, а поля собственных векторов на сфере направлений имеют минимум две особенности, называемые акустическими осями с топологическим индексом I/2. Приводятся условия принадлежности кристаллов к определенному топологическому типу, выраженные через компоненты матрицы упругих модулей.

[I] Борисович Ю.Г., Даринский Б.М., Кунаковская О.В.//Теор. и матем.физика. 1993. Т.93. № I. С.146.

УДК 517.518 **Об экстремумах разрывных систем Чебышева и Маркова**

А.В.Боровских (Воронеж)

Известны классические свойства систем Чебышева и Маркова, связанные с числом нулей и перемен знака непрерывных функций. Использование таких систем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к естественному вопросу, сохраняются ли свойства Чебышева-Маркова при дифференцировании системы? В определенном смысле на этот вопрос отвечает приведенный ниже результат.

Напомним, что система $\{u_i(t)\}_0^n$ непрерывных на промежутке J функций называется системой Чебышева на J, если любая нетривиальная линейная комбинация $u(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_iu_i(t)$ имеет на J не более n нулей. Описанное свойство эквивалентно положительности определителей

$$\Delta\begin{bmatrix}u_0\ldots u_n\\ t_0\ldots t_n\end{bmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=}\det\|u_i(t_j)\|_{i,j=0}^{n} \qquad (1)$$

при $t_0<\ldots<t_n$. Система $\{u_i(t)\}_0^n$ называется системой Маркова, если любая подсистема $\{u_i(t)\}_0^k$, $k\le n$ является системой Чебышева. Свойства Маркова и Чебышева на интервале эквивалентны, а на отрезке-нет.

Точку $t^*\in J$ назовем точкой внутреннего максимума функции $u(t)$, если для всех t из некоторого промежутка $(\tau_-,\tau_+)\ni t^*$ выполнено $u(t)\le u(t^*)$ и в этом промежутке найдутся точки $t_1<t^*$, $t_2>t^*$ такие, в которых выполнено строгое неравенство $u(t_i)<u(t^*)$. Аналогично определяется точка внутреннего минимума.

Теорема. Пусть $\{u_i(t)\}_0^n$ образуют систему Маркова и $u_0(t)\equiv1$. Тогда любая комбинация $u(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_iu_i(t)$ имеет на J не более $n-1$ внутреннего экстремума.

Из этой теоремы следует, что если все функции $u_i(t)$, образующие систему Маркова, дифференцируемы по некоторой строго монотонной мере μ, то $\left\{\frac{du_i}{d\mu}(t)\right\}_1^n$ тоже обладает свойством Маркова (правда, в нестрогом смысле): $v(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\frac{du_i}{d\mu}(t)$ может менять знак не более $n-1$ раз.

Утверждение теоремы сохраняется и для разрывных систем Маркова, определяемых следующим образом: Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное линейно упорядоченное множество (его параметризация - вложение в $\mathbb{R}$ и топология непринципиальны). Систему $\{u_i(t)\}_0^n$ заданных на $\mathfrak{M}$ функций назовем системой Чебышева на $\mathfrak{M}$, если определители (1) положительны для всех наборов $(t_0,\ldots,t_n)\in\mathfrak{M}^{n+1}$, таких, что $t_0<\ldots<t_n$. Соответственно определяется и система Маркова на $\mathfrak{M}$.

УДК 519.175 Боровских А.В., Копытков В.А. (Воронеж)

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ДИСКРЕТНЫМ МЕРАМ НА ГРАФАХ

1. Пусть Γ – конечный граф без петель и кратных ребер. Будем говорить, что на Γ задана ориентированная мера μ, если на каждом его ребре указано направление (стрелка) и вещественное число – вес. Мы не различаем двух мер, получающихся одна из другой разворотом стрелок одного или нескольких ребер с одновременной сменой знака веса у каждого из этих ребер (т.н. переключение на ребре). Множество $M(\Gamma)$ всевозможных мер на Γ естественным образом является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

2. Циркуляцией цикла (цикл здесь всюду – простой цикл) называется задание последовательного обхода его вершин. Пусть на графе зафиксирована циркуляция каждого цикла.

Определение. $\oint_c d\mu = \mu^+(c) - \mu^-(c)$, где $\mu^+(c), \mu^-(c)$ – сумма весов ребер, ориентированных вдоль (против) циркуляции цикла c. $\oint d\mu$ – это отображение, сопоставляющее каждому циклу c – интеграл по c.

3. Введем теперь естественные преобразования мер, сохраняющие интеграл, определим классы эквивалентности мер, для которых $\oint d\mu$ является полным инвариантом. Оператор $\psi_{v,h} : M(\Gamma) \to M(\Gamma)$ (здесь v – вершина, $h \in \mathbb{R}$) уменьшает на h вес каждой стрелки, входящей в v, и увеличивает на h вес каждой стрелки, выходящей из v. Множество $\{\psi_{v,h}\}_{v,h}$ порождает (относительно суперпозиции) группу $\Psi(\Gamma)$.

Определение. Меры $\mu_1, \mu_2 \in M(\Gamma)$ называются эквивалентными ($\mu_1 \sim \mu_2$), если существует $\psi \in \Psi(\Gamma)$ такое, что $\mu_1 = \psi\mu_2$.

ТЕОРЕМА. $\oint d\mu_1 = \oint d\mu_2 \iff \mu_1 \sim \mu_2$

4. Аналогично п.2 можно определить $\int_p d\mu$ – интеграл по пути (не обязательно простому), идущему из вершины v_1 в v_2. Сейчас мы выделим случай, когда на Γ можно определить интеграл $\int_{v_1}^{v_2} d\mu$. Мера μ называется регулярной, если $\oint d\mu$ – нулевое отображение.

ТЕОРЕМА. μ – регулярна $\iff \int_p d\mu$ не зависит от пути p, идущему из вершины v_1 в v_2.

Эта теорема как в случае аналитических функций позволяет определить интеграл с переменным верхним пределом.

УДК 517.22 Бродовский В.Г. (Алматы)

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Один из результатов работы [1] о разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений распространяется на случай, когда значения искомой функции принадлежат пространству ограниченных числовых последовательностей ℓ_∞.

Пусть $L_p[\ell_\infty]$ – пространство функций $x: [0,1] \to \ell_\infty$, компоненты которых суммируемы в степени p $(1 \le p < \infty)$ и ограничены в существенном, если $p = \infty$. Рассмотрим линейные ограниченные операторы $\Phi: L_p[\ell_\infty] \to \ell_\infty$, $\Psi: \ell_\infty \to \ell_\infty$. Предположим, что множество значений $R(\ell)$ вектор-функционала $\ell \overset{def}{=} (\Phi\ \Psi)$ совпадает с ℓ_∞. Пусть ℓ_∞ разлагается в две прямые суммы $M_1 \dot{+} M_2$, $N_1 \dot{+} N_2$ подпространств M_1, M_2, N_1, N_2 такие, что сужение $\Psi_1: M_1 \to N_1$ оператора Ψ на M_1 имеет ограниченный обратный $\Psi^{-1}: N_1 \to M_1$, $N_2 \subset R(\Phi)$ и подпространства M_2, N_2 изоморфны. Тем самым существует линейный ограниченный оператор $T: M_2 \to N_2$, имеющий ограниченный обратный $T^{-1}: N_2 \to M_2$.

В указанных предположениях найдётся такой линейный ограниченный оператор $A: \ell_\infty \to L_p[\ell_\infty]$, что краевая задача

$$\dot{x} + Ax(0) = f, \quad \Phi\dot{x} + \Psi x(0) = \alpha$$

корректно разрешима для любой пары $f \in L_p[\ell_\infty]$, $\alpha \in \ell_\infty$. При этом A имеет аналитическое представление через Φ, Ψ, T.

Литература

1. Рахматуллина Л.Ф. О канонических формах линейных функционально-дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1975, т.11, №12, с.2143-2153.

УДК 517.5 Буланов А.П. (Обнинск)

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_N)$, непрерывна на единичном N -мерном кубе $Q=[0;1]^N$ и имеет на Q ограниченную Харди вариацию $H=H(f,Q)$. Пусть, далее,

$$R_n=R_n(f,Q)=\inf_{R(x)}\max_{x\in Q}\left|f(x)-R(x)\right|,$$

где *infimum* берется по всем рациональным функциям $R(x)$, степени которых по совокупности переменных не превосходят n;

$$\omega(f,\delta)=\sup_{e\in R_N}\left\{\sup\left(|f(x+te)-f(x)|: x,x+te\in Q; |e|=1; 0\le t\le\delta\right)\right\}-$$

модуль непрерывности функции $f(x)$.

Т е о р е м а . Справедливо неравенство

$$\frac{R_n}{|\ln R_n|\cdot|\ln\omega^{-1}(C_1\cdot R_n)|}<\frac{C_2}{n},\quad n=1,2,\dots,$$

где $\omega^{-1}(t)=\inf\{\delta:\omega(f,\delta)\ge t\}$ – обратная функция по отношению к $\omega(f,\delta)$; C_1 зависит лишь от размерности N, а C_2 – от размерности N и вариации H.

С л е д с т в и е 1 . Если непрерывная функция $f(x)$, $x\in Q$ имеет ограниченную Харди вариацию и модуль непрерывности $\omega(f,\delta)\le M\delta^{\alpha}$, $\alpha>0$, то

$$R_n\le C_3\frac{\ln^2 n}{n},\quad n=2,3,\dots,$$

где C_3 зависит только от H, N, α и M.

С л е д с т в и е 2 . Если непрерывная функция имеет конечную Харди вариацию H и модуль непрерывности $\omega(f,\delta)\le M\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\gamma}$, $\gamma>0$, то

$$R_n\le C_4\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},\quad n=2,3,\dots,$$

где C_4 зависит только от H, N, γ и M.

УДК 517.5

Булыгин Ю.А., Валюхов С.Г., Глушаков А.Н., Кретинин А.В. (Воронеж)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЯ В СМЕСИТЕЛЕ

Разработана математическая модель распределения жидкого компонента топлива по форсункам смесительной головки камеры сгорания. Предполагается, что каждая форсунка вносит гармоническое возмущение в поле распределения расходов, которое моделируется течением от точечного источника. Для получения уравнения возмущения в круговой области применяется последовательность конформных преобразований (рис.1).

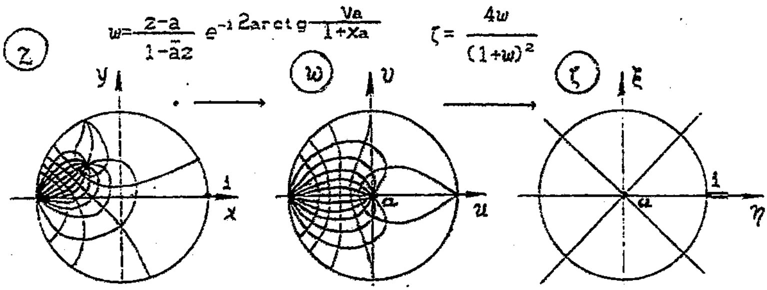


Рис. 1

Представление реального течения его потенциальной моделью обуславливает введение эмпирических функциональных коэффициентов проницаемости для определения величин интенсивностей источников. Вследствие большой размерности задачи оптимизации (N>15), наличия нелинейных ограничений на допустимую область поиска идентификация рассматриваемой математической модели реализуется методом непрямой статистической оптимизации на основе самоорганизации.

УДК 519.8 Буре В.М.,Малафеев О.А.(Санкт-Петербург)

Многошаговая игра олигополии.

Предположим, что в каждом из T интервалов времени $t, t \in 1:T$, одинаковой продолжительности, разыгрывается локальная игра g_t - олигополия Курно /1/,в которой участвуют n игроков, производящих однотипный товар.

Пусть x_{it} - количество товара, произведённого игроком $i, i \in 1:n$, в интервале $t, t \in 1:T$, $\quad x_{it} \in \{0, 1, ..., K_i\}$.

Цена единицы товара в интервале t определяется равенством

$$P_t(x_t) = D_t - \sum_{i=1}^{n} x_{it}, \tag{1}$$

где $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt})$.

Величина D_t зависит от суммарного спроса на рынке в интервале t. Предположим, что затраты производителя $i, i \in 1:n$, на выпуск единицы продукции при увеличении масштаба производства остаются постоянными и равны $C_i, i \in 1:n$.

При этом на производственные мощности производителей имеются ограничения двух типов: локальные $x_{it} \leq k_{it}, i \in 1:n, t \in 1:T$, и глобальные $\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq K_i, i \in 1:n$, где величины $K_i, k_{it}, i \in 1:n, t \in 1:T$, определяются технологией, используемой производителем i, наличным запасом ресурсов и т.д..

Доход u_{it} игрока i в интервале t вычисляется по формуле

$$u_{it}(x_t) = x_{it} P_t(x_t) - C_i x_{it}. \tag{2}$$

Доход U_i игрока i за T интервалов равен

$$U_i = \sum_{t=1}^{T} u_{it}(x_t). \tag{3}$$

Соотношения (1) – (5) определяют общую игру G. Рассматривается следующий сценарий кооперативного поведения. Вначале игроки выбирают производственные квоты $r_{it}, i \in 1:n, t \in 1:T$. После этого на каждом шаге они выбирают компромиссную точку /2/ внутри заданных квот. Значения квот выбираются из условия максимума суммарного дохода всех игроков $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$.В рамках предложенного сценария показана реализуемость выбранного принципа оптимальности.

Литература.

1.Обен Ж-П.,Экланд И. Прикладной нелинейный анализ."Мир",Москва,1988.

2.Малафеев О.А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемые динамические процессы. СПбГУ,С-Петерб.,1990.

УДК 517.955

Буробин А. В. /Обнинск/

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФФУЗИИ

Рассматривается кинетическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(v f) - \operatorname{div}(\mathcal{D} \nabla f) = St_{\Phi}(f, f), \qquad /1/$$

описывающее эволюцию дисперсных систем за счет процессов гравитационной и диффузионной коагуляции / см. [1] /. Здесь

$$St_{\Phi}(\varphi, \psi) = 1/2 \int_0^x \Phi(x-y, y) \psi(x-y) \psi(y) dy - \varphi(x) \int_0^\infty \Phi(x, y) \psi(y) dy.$$

В работе [2] приведены условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения /1/. В данном докладе обсуждается общий подход к постановке и исследованию разрешимости начально-краевых задач для этого уравнения, устанавливаются условия их корректной разрешимости при условии корректной постановки порождающих начально-краевых задач / $\Phi = 0$ /.

Литература

1. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах.- Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

2. Буробин А. В. О задаче Коши для пространственно неоднородного уравнения коагуляции при учете диффузии.- Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 10, с. 1806-1808.

УДК 517.9 Бичков А.Б. (Ростов-на-Дону)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ H°_α и C°_α .

Пусть последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ образует базис в некотором банаховом пространстве F функций, определенных на компакте K. Пусть, кроме того, $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset K$. Базис $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ называется интерполяционным с узлами $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, если $\forall f \in F$, $f(x) = \sum_{i=1}^\infty c_i f_i(x)$, выполняется $(\forall n \in N)$ $(\forall j \le n)$ $f(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x_j)$.

Пусть компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in (0;1)$. Известно, что класс функций $C^\circ_\alpha(K) = \{f \in C(K) \mid |f(x) - f(y)| = o(\|x-y\|^\alpha)\}$ с нормой Гельдера
$$\|f\|_\alpha = \|f\|_C + |f|_\alpha = \max_{x\in K} |f(x)| + \max_{x,y\in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$
является сепарабельным банаховым пространством. Для всякого $x_0 \in K$ рассмотрим банаховы пространства
$$H^\circ_\alpha(K, x_0) = \{f \in C^\circ_\alpha(K) \mid f(x_0) = 0\}$$
с нормой $|\cdot|_\alpha$, образующие шкалу Гельдера, см. [1].

Построены интерполяционные базисы в пространствах $C^\circ_\alpha(K)$ и $H^\circ_\alpha(K)$ для случая $\dim K = 1$, а также для некоторых двумерных K.

Список литературы:

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., 1978. 400 с.

2. Гробер В.М., Бычков Б.М. О базисе в пространстве $C^\circ_\alpha(0;1)$. Изв. СКНЦ ВШ. Естественные науки, 1994, N 1-2.

3. Бичков А.Б., Гробер В.М. О базисах в пространствах $C^\circ_\alpha(K)$.

УДК 517.54 Васильев А.Ю. (Саратов)

МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ И МЕТРИКА НА ПРОСТРАНСТВАХ ТЕЙХМЮЛЛЕРА

Пусть S_0 – риманова поверхность конечного топологического типа (g, n, m), то есть гомеоморфно эквивалентная сфере с g ручками, n проколами и m гиперболическими граничными компонентами (поверхность с краем, если $m \neq 0$). Если f_1 и f_2 – гомеоморфизмы S_0 на себя, и f_1 гомотопно f_2 в смысле гомотопии отображений, то любая замкнутая простая кривая γ на S_0 при этих отображениях перейдет в $\gamma_1 = f_1(\gamma)$ и $\gamma_2 = f_2(\gamma)$, где γ_1 гомотопна γ_2 в смысле гомотопии кривых. Обратное утверждение неверно. Можно в этом убедиться на простейшем примере: $S_0 = \{z : r \leq |z| \leq 1/r, 0 < r < 1\}$, $f_1 = z, f_2 = 1/z, z \in S_0$. Однако в некоторых случаях можно ослабить требование гомотопии отображений, заменив его более слабым требованием гомотопии кривых. В настоящем сообщении мы реализуем это утверждение при построении эквивалентного описания метрики Тейхмюллера на пространствах Тейхмюллера $T(g, n, m)$.

Хорошо известно, что метрика Тейхмюллера $\tau(x, y)$ вводится на классах эквивалентности отмеченных римановых поверхностей $x = [(S, f)]$; f –гомеоморфизм $S_0 \to S$, где эквивалентность рассматривается по гомотопным гомеоморфизмам f.

Пусть теперь Γ – свободное семейство гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на S_0 не гомотопных точке или проколу, f – гомеоморфизм $S_0 \to S$ такой, что (S, f) является представителем x. Обозначим через $mod\Gamma$ модуль семейства Γ. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Величина*

$$m(0, x) = \sup_{\Gamma} \frac{1}{2} \left| \log \frac{mod f(\Gamma)}{mod \Gamma} \right|$$

определяет на $T(g, n, m)$ метрику, совпадающую с метрикой Тейхмюллера $\tau(0, x)$. Верхняя грань берется по всевозможным семействам Γ.

УДК 517.95 Васильев В.Б. / Новгород /

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается следующее уравнение

$$PAu_+ = f, \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \le |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \le c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

c_1, c_2 – некоторые положительные постоянные, P – оператор сужения на множество

$$C_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, \ a > 0\},$$

решение u_+ ищется в пространстве $H_s(C_+)$ С.Л.Соболева- Л.Н.Слободецкого для правой части f, заданной в C_+.

Для символа $A(\xi)$ определяется понятие волновой факторизации, которое связано с представлением $A(\xi)$ в виде произведения двух сомножителей, допускающих аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(C_+^*)$, $T(-C_+^*)$ над конусами C_+^*, $-C_+^*$ соответственно и удовлетворяющих некоторым оценкам ;

$$C_+^* = \{x \in \mathbb{R}^2 : a x_2 > |x_1|\}$$

В зависимости от $\varkappa$ – индекса волновой факторизации – уравнение (1) будет либо однозначно разрешимо /$\varkappa = 0$ /, либо общее решение будет зависеть от $\varkappa$ произвольных функций /$\varkappa > 0$ / из соответствующих функциональных пространств, либо уравнение (1) будет иметь решение, если правая часть удовлетворяет $|\varkappa|$ условиям разрешимости /$\varkappa < 0$ /.

В частности, при $\varkappa > 0$ для однозначного определения упомянутых произвольных функций следует задать $\varkappa$ краевых условий на сторонах угла.

Если символ $A(\xi)$ и элементы волновой факторизации однородны и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, то условия однозначного определения интересующих нас функций можно выписать в виде условий типа Шапиро-Лопатинского как необнуление некоторого функционального определителя.

В случае простых краевых условий / типа Дирихле или Неймана / формулируется точный результат о разрешимости уравнения (1) и даются априорные оценки решения.

УДК 517.929.7

Веневитина С.С., Крейн С.Г.

МАЛЫЕ СОВМЕСТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ КОНТЕЙНЕРА И УПРУГОЙ СРЕДЫ.

Изучается движение абсолютно твердого тела с полостью Ω, целиком заполненной упругой средой. Считается, что в невозмущенном состоянии вся система покоится, а затем под действием малых внешних сил и начальных данных она начинает совершать малые движения вокруг неподвижного центра масс.

Линеаризованные уравнения Ламе в перемещениях, описывающие движение упругой среды в полости Ω имеют вид:

$$\rho_0\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}+\dot{\bar{\mathcal{E}}}\times\bar{r}\right)=\mu\Delta\bar{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\bar{u}+\bar{f}(t,x) \qquad (1)$$

при краевых и начальных условиях:

$$\bar{u}=\bar{u}(t,x)=0 \quad \text{на } \partial\Omega, \qquad (2)$$

$$\frac{d\bar{u}(0,x)}{dt}=\bar{u}_0'\,; \quad \bar{u}(0)=\bar{u}_0 \qquad (3)$$

Уравнение кинетического момента всей системы:

$$\mathcal{J}\dot{\mathcal{E}}+\rho_0\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(r\times\frac{d\bar{u}}{dt}\right)d\Omega=\bar{M} \qquad (4)$$

Задача о нахождении обобщенных решений системы (1)-(4) сводится к решению задачи Коши для операторного уравнения:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}+S^2\bar{u}=\bar{f}_1. \qquad (5)$$

Здесь $S^2=\rho_0^{-1}(I-B)^{-1}A$, где A – порождающий оператор гильбертовой пары $(\bar{H}_0^1(\Omega);\bar{\mathcal{L}}^2(\Omega))$ (см. [1]), а оператор B имеет вид

$$B\bar{v}:=\left(\mathcal{J}^{-1}\rho_0\int_\Omega(\bar{r}\times\bar{v})\,d\Omega\right)\times\bar{r}\,.$$

Оператор $(I-B)$ является положительно определенным и имеет ограниченный обратный (см. там же). С помощью введения нового скалярного произведения в $\bar{\mathcal{L}}^2(\Omega)$, доказывается, что оператор S^2 из (5) является положительно определенным самосопряженным оператором. Тогда из абстрактной схемы (см. [1]) следует, что существует единственное обобщенное решение с непрерывной полной энергией задачи (1)-(4) при любых $\bar{u}_0\in\mathcal{D}(S)$ и $\bar{u}_0'\in\bar{\mathcal{L}}^2(\Omega)$ и непрерывной функцией $f_1(t,x)$. При помощи неравенства Гайнца показывается, что $\mathcal{D}(S)=\mathcal{D}(A^{1/2})=\bar{H}_0^1(\Omega)$.

Список литературы:

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.

УДК 639, 374 Вервейко Н.Д., Вульман С.А., Семыкина Т.Д.

К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

В машиностроении, в частности в авиационной промышленности,приходится иметь дело с расчетом элементов конструкций, представляющих собой тонкие оболочки, одна из главных кривизн которых мала,но отлична от нуля. Предлагаемый метод позволяет свести расчет подобных оболочек к расчету цилиндрических оболочек, для которого имеется хорошо развитый математический аппарат.

Пусть уравнение срединной поверхности оболочки можно выписать в виде

$$r = r1(z) + r2(\theta) \qquad (1)$$

Здесь r, θ, z - цилиндрические координаты.

Для поверхностей, достаточно мало отличающихся от цилиндрической

$$r1(z) = r1_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta 1^n r1_n(z)$$

$$r2(\theta) = r2_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta 2^n r2_n(\theta) \qquad (2)$$

где $\delta 1$ - малый параметр, характеризующий отклонение меридианы от прямой,

а $\delta 2$ - характеризует отклонение второй кривизны от константы.

Из (2) следует, что с точностью до членов второго порядка малости в качестве линий главных кривизн могут быть приняты линии z=const и θ= const.Будем рассматривать оболочки, геометрия которых позволяет пренебречь величинами второго порядка малости. Исходя из этого получим коэффициент первой квадратичной формы и радиуса кривизн срединной поверхности.

Двумя парами близких нормальных сечений z=const и θ=const выделим элемент оболочки и элемент цилиндрической модели. В элементе модели введем усилия, моменты и внешнюю нагрузку, эквивалентные статике элемента исходной оболочки и выпишем относительно полученных усилий-моментов уравнения равновесия.

Для упругих оболочек статические величины можно выразить через кинематические,используя закон Гука. Соотношения Коши выпишем, используя геометрические параметры оболочки, предварительно представив перемещения в виде рядов

$$u_i = u_{i0}(z,\theta) + \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} \delta 1^n \delta 2^m u_{i\,nm}(z,\theta)$$

В итоге получим и статические характеристики в виде рядов по параметрам $\delta 1$ и $\delta 2$. После подстановки полученных выражений в уравнения равновесия отдельной оболочки, можно, приравнивая члены при одинаковых степенях малых параметров получить уравнения, отличающиеся от уравнения цилиндрической оболочки только свободными членами, в которые входят отклонения геометрии оболочки от модели и члены, известные из предыдущих приближений. Таким образом, открывается возможность использовать численные методы, хорошо разработанные для цилиндрических оболочек.

УДК 539.3:534.I

Вервейко Н.Д., Свиридов Ю.Т., Шевелева О.Н.

СИНГУЛЯРНЫЙ ХАРАКТЕР УЧЕТА МАЛОГО ТРЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК.

Различные технологические схемы формообразования пространственных оболочек из трехслойных панелей предполагают скольжение элемента оболочки вдоль формы при наличии трения между двумя соприкасающимися элементами. Даже малый коэффициент трения дает существенный вклад в уравнение баланса сил на элементе поверхности за счет: большого внешнего давления на оболочку лежащую на форме, или большой кривизны поверхности формы при которой сила натяжения оболочки развивает большие усилия прижатия оболочки к форме.

Решение задач деформирования трехслойных оболочек с трением на одной поверхности затруднено существенной нелинейностью трения при малом f ,так как переход к невозмущенной задаче при $f=0$ носит сингулярный характер и переход к уравнениям равновесия при $f \to 0$ ведет к понижению порядка дифференциальных уравнений.

В случае формообразования трехслойных цилиндрических оболочек система уравнений равновесия и физических (реологических) уравнений сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений для перемещений u^+, u^- верхнего и нижнего слоев при заданном вертикальном перемещении $w = g(x) + h + \delta$ срединного слоя

$$f s_{,xx} + k_1^2 t = A_1(x); \quad s_{,xx} - k_2^2 t_{,xx} + k_3^2 t = A_2(x) \tag{I}$$

здесь

$$k_1^2 = (1 + f\tilde{G}/B - fx)/\delta; \quad k_2^2 = \delta/(h+\delta); \quad k_3^2 = \tilde{G}/B(h+\delta)$$

Вводя преобразования растяжения $x = f \cdot \xi$ можно построить решение задачи (I) типа пограничного слоя полагая $f = 0$.

$$t = -c_2 + (c_2/k_2^2)\exp(-\xi/k_2^2); \quad s = c_1 + c_2\xi - c_3\exp(-\xi/k_2^2) \tag{2}$$

Как следует из (2) решение для $t = u^+ + u^-$ и $s = u^+ - u^-$ показывает, что на внешней границе погранслоя $t \to t_\infty; s \to \infty$ так, что $t_{,\xi} \to 0$ $s_{,\xi} \to s_\infty$ т.е. деформации и усилия в оболочке на границе погранслоя достигают конечной величины. Внешнее решение, соответствующее решению задачи (I) при $f = 0$, показывает рост деформаций и усилий вдоль x .Постоянные интегрирования определяются из граничных условий и условия сращивания решения погранслоя к внешнего на границе погранслоя. Решение (2) можно использовать в критериях разрушения оболочки по достижении предельного напряженного состояния или предельно допустимой дефрмации.

УДК 517.5 Вердиева А.В. (Махачкала)

О сходимости средних Чезаро рядов Фурье - Мейкснера.

Пусть $\delta > 0$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$, $N = \frac{1}{\delta}$, $\alpha > -1$,

$$\rho(x) = (1 - e^{-\delta})^{\alpha+1} e^{-x} \frac{\Gamma(Nx + \alpha + 1)}{\Gamma(Nx + \alpha)} .$$

Через $M^\alpha_{n,N}(x)$ обозначим классические многочлены Мейкснера, ортогональные на множестве Ω_δ с весом $\rho(x)$ такие, что

$$M^\alpha_{n,N}(0) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Тогда

$$\sum_{x \in \Omega_\delta} \rho(x)\, M^\alpha_{n,N}(x)\, M^\alpha_{k,N}(x) = h^\alpha_{n,N}\, \delta_{nk},$$

где
$$h^\alpha_{n,N} = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1) \exp(n\delta).$$

Пусть $f(x)$ непрерывная функция, заданная на полуоси $[0,\infty)$, для которой существуют коэффициенты Фурье - Мейкснера

$$\hat{f}_l = \frac{1}{h^\alpha_{l,N}} \sum_{j=0}^{\infty} f(j\delta)\, M^\alpha_{l,N}(j\delta)\, \rho(j\delta) , \quad l = 0, 1, \dots, n.$$

Чезаровские средние порядка k функции $f(x)$ обозначим

$$\sigma^{\alpha,k}_{n,N}(x) = \frac{1}{A^k_n} \sum_{i=0}^{n} A^k_{n-i}\, \hat{f}_i\, M^\alpha_{i,N}(x), \quad \text{где} \quad A^k_n = \binom{n+k}{n}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. (о суммируемости ряда по многочленам Мейкснера в точке $x = 0$). Пусть $0 \le \alpha$ - целое, $0<\delta<1$, $N = \frac{1}{\delta}$, $a > 0$, $n \ge aN$. Тогда, если $k > \alpha + \frac{1}{2}$ и существует интеграл

$$\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\alpha-k-\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx,$$

то
$$\lim_{n\to\infty} \sigma^{\alpha,k}_{n,N}(0) = f(0),$$

т. е. ряд по многочленам Мейкснера функции $f(x)$ (C,k) - суммируем к сумме $f(0)$.

Литература.

1. Шарапутдинов И.И. Многочлены Мейкснера, весовые оценки и приложение. Конструктивная теория функций и ее приложения. Тезисы докладов Всероссийской научной школы по конструктивной теории функций и ее приложений. Махачкала, 1994, с. 125-126.
2. Сеге Т. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М. 1962, с. 256 - 280.

УДК 517.52 Вердиев В.Г. (Махачкала).

Существует интерполяционный полином с данной последовательностью значений его производной.

Пусть : $\Delta = [0,1]$; $\{u_k(t)\}_{k=0}^{n}$ - последовательность, состоящая из n раз непрерывно дифференцируемых на Δ функций, обладающих тем свойсьвом, что каждый полином по ней

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k u_k(t), \quad \sum_{k=0}^{n} x_k^2 > 0,$$

имеет в Δ не более n нулей, при условии, что каждый нуль зачитывается столько раз, какова его алгебраическая кратность; $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n-1}$ - две последовательности вещественных чисел, причем $n \geq 2$.

В настоящем сообщении дан ответ на следующий вопрос: при наложении каких условий на члены последовательностей $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n-1}$ существует полином $\hat{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}_k u_k(t)$ и $n-1$ точек $\{\hat{\tau}_j\}_{j=1}^{n-1}$ такие, что

$$0 =: \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \ldots < \hat{\tau}_{n-1} < \hat{\tau}_n := 1, \qquad (1)$$

$$\hat{P}(\hat{\tau}_i) = v_i, \quad i = 0,1,\ldots,n, \qquad (2)$$

$$\hat{P}'(\hat{\tau}_j) = v_j, \quad j = 1,2,\ldots,n-1 \ ? \qquad (3)$$

Ответ дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n-1}$ - две последовательности вещественных чисел и члены последовательности $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ удовлетворяют следующим неравенствам

$$(v_i - v_{i-1})(v_{i+1} - v_i) < 0, \quad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Тогда существует единственный полином $\hat{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}_k u_k(t)$ и единственная система из $n-1$ точек $\{\hat{\tau}_j\}_{j=1}^{n-1}$ на отрезке Δ, удовлетворяющие соотношениям (1)-(3).

УДК 517.98 Вердиев Т.В. (Махачкала).

Об одной спектральной задаче.

Данная работа посвящена спектральному анализу одной граничной задачи для уравнения шестого порядка методом Ляпунова-Пуанкаре (или методом малого параметра).

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(x) + \lambda y(x) = \alpha y^3(x), \qquad (0<x<1). \qquad (1)$$

Требуется найти число λ и вещественнозначное решение $y(x,\lambda)\not\equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} & y(0) = y(1) = 0, \\ & y''(0) = y''(1) = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(0) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Лемма. Пусть $\alpha = 0$, тогда спектральная задача

$$\left(\frac{d}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (0<x<1).$$

$$\left.\begin{aligned} & y(0) = y(1) = 0, \\ & y''(0) = y''(1) = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(0) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^3 y(1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет решение

$$\lambda_n = (\pi^2 n^2 + a^2)^3, \ \lambda \in \mathbb{N},$$

$$y_n(x) = A_n \sin \pi n x, \text{ где } A_n \in \mathbb{R},\ A_n \neq 0.$$

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Пользуясь методом малого параметра можно получить следующую теорему.

Теорема. (о спектре задачи (1)-(2)).

Существует число $\delta > 0$ такое, что все числа

$$\lambda_n' = \lambda_n + \varepsilon^2 \operatorname{sign} \alpha \qquad (\varepsilon < \delta)$$

принадлежат спектру задачи (1)-(2), при этом соответствующая собственная функция имеет вид

$$y(x,\lambda_n) = \sqrt{\frac{4}{3|\alpha|}} \sin \pi n x + \frac{\left(\frac{4}{3|\alpha|}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^3}{(\pi^2 n^2 + a^2) - (9\pi^2 n^2 + a^2)} \sin 3\pi n x + O(\varepsilon^5).$$

УДК 517.982.27 Веселова Л.В. (Казань)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ БАНАХОВОЙ ПАРЫ ПО СОВОКУПНОСТИ ЕЕ БИЛИНЕЙНО ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Для банахова пространства E через E^* обозначим пространство непрерывных линейных функционалов на E и через $B(E\times E^*)$ - пространство билинейных форм, заданных на $E\times E^*$. Введем функционал на $B(E\times E^*)$:

$$\|\Phi\|_{E\times E^*} = \sup\{|\Phi(x,y)|:\ \|x\|_E\|y\|_{E^*} \le 1,\ x\in E,\ y\in E^*\}.$$

Билинейная форма Φ ограничена на $E\times E^*$, если $\|\Phi\|_{E\times E^*} < \infty$. Пространство ограниченных на $E\times E^*$ билинейных форм обозначим $B_0(E\times E^*)$. Для двух банаховых пространств X, Y будем писать $X \cong Y$, если X совпадает с Y как линейное пространство и нормы этих пространств пропорциональны.

Рассмотрим регулярную банахову пару (X_0, X_1) и промежуточное для нее пространство X. Через X' обозначим пространство линейных функционалов на X, для которых

$$\|y\|_{X'} = \sup\{|\langle x,y\rangle|:\ \|x\|_X \le 1,\ x\in X_0\cap X_1\} < \infty.$$

Промежуточное пространство X назовем билинейно интерполяционным для банаховой пары (X_0, X_1), если для любой билинейной формы Φ на $(X_0\cap X_1)\times(X_0^*+X_1^*)$, которая может быть продолжена до ограниченных билинейных форм $\Phi_i \in B_0(X_i\times X_i^*)$ $(i=0,1)$, существует также билинейная форма $\Phi_X \in B_0(X\times X')$ такая, что для $x\in X_0\cap X_1$ и $y\in X'$ имеет место

$$\Phi_X(x,y) = \Phi(x,y) \quad и \quad \|\Phi_X\|_{X\times X'} \le \max\{\|\Phi_0\|_{X_0\times X_0^*},\ \|\Phi_1\|_{X_1\times X_1^*}\}.$$

Множество всех билинейно интерполяционных пространств для банаховой пары (X_0, X_1) обозначим через $Bil(X_0, X_1)$.

Теорема 1. Пространство X билинейно интерполяционно для регулярной банаховой пары (X_0, X_1) тогда и только тогда когда X' нормально интерполяционно для банаховой пары (X_0^*, X_1^*).

Теорема 2. Если для двух банаховых пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) выполняется равенство $Bil(X_0, X_1) = Bil(Y_0, Y_1)$, то $X_0 \cong Y_0$, $X_1 \cong Y_1$ с точностью до перестановки индексов.

Литература

1. N. Aronszajn and E. Gagliardo, Interpolation spaces and interpolation methods // *Ann. Mat. Pure ed Appl.*, 68(1965), Ser. 4, 51-117.

2. Л.В. Веселова и О.Е. Тихонов, Единственность решения обратной задачи нормальной интерполяции для вложенных банаховых пар // XXVI Воронежская зимняя математическая школа: Сб. науч. тр. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 1994. - С. 35.

УДК 517.942

Власов В.В. (Москва)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются свойства сильных решений уравнения

$$\mathfrak{A}u \equiv \sum_{j=0}^{n} \left(B_j(t)S_{g_j}(Au)(t) + D_j(t)S_{g_j}\left(\frac{du}{dt}\right)(t)\right) = f(t),\ t \in \mathbb{R}_+. \qquad (1)$$

Здесь A – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий ограниченный обратный. Операторы S_{g_j} действуют по правилу $(S_{g_j}v)(t) = v(g_j(t)),\ g_j(t) \geq 0;\ (S_{g_j}v)(t) = 0,$ $g_j(t) < 0,\ B_0(t) \equiv D_0(t) \equiv I$ (I – единичный оператор), $g_j(t)\,(t \geq 0)$ – монотонно возрастающие, непрерывно дифференцируемые функции, такие, что $\frac{d}{dt}g_j(t) > 0,\ t > 0;\ g_j(t) \leq t - \alpha,\ \alpha = const > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ g_0(t) \equiv t.$

Пусть $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ и $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ – пространства вектор-функций со значениями в $\mathfrak{H}$, снабженные нормами

$$\|u\|_{2,\gamma} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2 dt\right)^{1/2},\ \|u\|_{W^1_{2,\gamma}} = \left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{2,\gamma} + \|Au\|^2_{2,\gamma}\right)^{1/2},\ \gamma > 0.$$

<u>Теорема.</u> Пусть оператор-функции $B_j(t)$ и $D_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, принимают значения в кольце ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, сильно непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$\sup_{t \in [0, g_j(+\infty))} \left(\|B_j(g_j^{-1}(t))\|^2 \left|\frac{d}{dt}g_j(t)\right|^{-1}\right) < +\infty,\ \sup_{t \in [0, g_j(+\infty))} \left(\|D_j(g_j^{-1}(t))\|^2 \left|\frac{d}{dt}g_j(t)\right|^{-1}\right) < +\infty,$$

где $g_j^{-1}(t)$ – функции, обратные к $g_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда найдется такое $\gamma_0 \geq 0$, что при любых $\gamma > \gamma_0$ оператор $\mathbb{V}_\gamma$, действующий по правилу $\mathbb{V}_\gamma u \equiv (\mathfrak{A}u, u(+0))$, отображает пространство $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ на пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_{1/2}$ и имеет ограниченный обратный. ($\mathfrak{H}_{1/2} \equiv dom(A^{1/2})$, с нормой графика $A^{1/2}$.)

Кроме того, в докладе приводятся утверждения о свойствах сильных решений уравнения (1), близкие соответствующим результатам из [1] - [5] (см. также указанную там литературу).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 94-01-00804).

[1] Власов В.В.//УМН. 1993. Т.48, вып.6. С.147-148.
[2] Власов В.В.//УМН. 1994. Т.49, вып.3. С.175-176.
[3] Власов В.В.//ДАН. 1992. Т.327. № 4-6. С.428-432.
[4] Власов В.В.//Известия вузов.Математика. 1993.№ 5. С.24-35.
[5] Власов В.В.//Известия вузов.Математика. 1994.№ 6. С.28-38.

УДК 536.2 Воронова Н.П. (Минск)

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА НАГРЕВА МЕТАЛЛА В ПЕЧИ СПЕЦИАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ.

Рассматривается двухсторонний симметричный нагрев заготовок прямоугольного сечения. Дискретный характер расположения заготовок приводит к необходимости решать задачу радиационно-кондуктивного теплообмена для системы сложной конфигурации. Получившиеся в результате дискретизации печного пространства зоны подразделяются на два типа: зоны с заданной температурой и зоны с заданным тепловым потоком (их количества равны соответственно N_1 и N_2).

В результате задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N_1}\left(a_{ij}T_i^4+b_{ij}T_i\right)+Q_j=0\,,\quad j=\overline{1,N_2}\,,$$

$$c\rho\frac{\partial T_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T_i}{\partial y}\right),\quad t=\frac{x}{u}\,,\quad 0\le x\le L_i\,,$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial y}\right|_{y=0}=0\,,\quad \lambda\left.\frac{\partial T_i}{\partial y}\right|_{y=\delta}=\frac{Q_i}{F_i}\,,$$

$$T_i\big|_{t=0}=T_{i-1}\big|_{t=\frac{L_{i-1}}{u}}\,,\quad T_1\big|_{t=0}=T_0\,,\quad i=\overline{1,N_1}\,,$$

где x,y -координаты, t -время, T_0 -начальная температура металла, u -скорость движения металла, F_i -площадь условной поверхности i -ой зоны металла, δ -полутолщина заготовки, Q_i -тепловые потоки на поверхности металла, a_{ij} и b_{ij} -коэффициенты радиационного и кондуктивного теплообмена, c -коэффициент теплоёмкости, λ -коэффициент теплопроводности, ρ -плотность металла.

Задача решается численными методами и позволяет получить распределение температур и тепловых потоков во всём печном пространстве, а также на поверхности металла при перемещении заготовок. Это позволяет дополнить список выходных параметров любым, представляющим интерес, параметром.

М.А. Вышегородских, Л.А.Козленко,Е.А.Курина,Г.В.Мартыненко
(Воронеж)

О необходимых условиях ε-стабилизируемости гиперболической системы при граничном управлении.

Пусть Ω - область в R^n, с кусочногладкой границей $\partial\Omega=\Gamma$, $Q=[0,T]\times\Omega$, $\Sigma=[0,T]\times\Gamma$. Пусть состояние системы в каждый момент времени $t\in[0,T]$ определяется функцией $v(t,x), x\in\Omega\subset R^n$, удовлетворяющей гиперболическому уравнению (см.[1 - 2])

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+Av=0 \tag{1}$$

начальным условиям

$$v(0,x)=v_0(x)\in H^1 \tag{2}$$

$$v_t(0,x)=v_1(x)\in L_2 \tag{3}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Sigma}=u(t,s)\in U \tag{4}$$

Здесь $U=\{u(t,s): u(t,s)=\varphi(t)u_0(s), \varphi(t)\in L_2[0,T], u_0(s)\in L_2(\Gamma), s\in\Gamma\}$,

$$\|u\|_U^2=\int_\Sigma u^2(t,s)\,dt\,ds, \text{ кроме того, } u(s)=0 \text{ при } s\in\Gamma/\Gamma_1.$$

Задача (1)-(4) корректна и ее решение $v(t,s)\in L_2([0,T],H^1), v_t(t,x)\in L_2(Q)$.

Определение 1. Система (1)-(4) слабо ε-стабилизируема, если для любых $v_0(x), v_1(x)$ найдется такое $T>0$, что для любого $\varepsilon>0$ существует решение задачи (1)-(4) $v(t,s)$, такое что $\|v(T,s)\|_{H^1}+\|v_t(T,s)\|_{L_2}\le\varepsilon$.

Определение 2. Система (1)-(4) ε-стабилизируема, если найдется такое $T>0$, что для любых $v_0(x), v_1(x)$ и любого $\varepsilon>0$ найдется решение задачи (1)-(4) $v(t,s)$, такое, что $\|v(T,s)\|_{H^1}+\|v_t(T,s)\|_{L_2}\le\varepsilon$.

Теорема 1. Из слабой ε-стабилизируемости следует ε-стабилизируемость.

Теорема 2. Для того, чтобы система (1)-(4) была ε-стабилизируемой необходимо , чтобы выполнялись соотношения :

$$\int_{\Gamma_1} u_0(s)\psi_k(s)\,ds\neq 0, \text{ где } \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \text{ - собственные функции оператора } A$$

1. Ж.Л. Лионс " Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными ".
2. Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес " Неоднородные граничные задачи и их приложения ".

УДК 517.53. Гайсин А.М.(Уфа)

РЯДЫ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, РЕДКО МЕНЯЮЩИМИ ЗНАК

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z=x+iy) \qquad (1)$$

– целая транцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_k\}$ –последовательность перемен знаков коэффициентов, т.е. $a_{p'_k} a_{p_k}<0$, где $p'_k=\max\{n<p_k: a_n\neq 0\}$. В работе [1] доказана

Теорема А. Пусть а) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} < \infty$; б) $\frac{k}{p_k}\downarrow$. Тогда для некоторой последовательности $\{x_n\}$, $x_n\to\infty$, имеет место равенство

$$\ln M_f(x_n)=(1+o(1))\ln|f(x_n)|, \quad M_f(x)=\max_{|z|=x}|f(z)| \qquad (2)$$

С другой стороны, для любой последовательности $\{p_k\}$, для которой $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}=\infty$, существует целая функция $f(z)$, ограниченная на положительном луче, для которой $\{p_k\}$ – последовательность перемен знаков ее тейлоровских коэффициентов [2]. Возникает вопрос: не справедливо ли равенство (2) лишь при условии а) ? Этот вопрос пока остается открытым.

Мы рассматриваем более общую ситуацию, а именно, вместо рядов (1) исследуем ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, сходящиеся в полуплоскости или во всей плоскости. Предполагаем, что последовательность показателей $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ ряда Дирихле имеет конечную верхнюю плотность и удовлетворяет некоторым естественным условиям несгущаемости. Сформулируем наш результат применительно к рядам (1).

Пусть $\alpha(t)=\max_{\alpha_k<t}\alpha_k$, $\alpha_k=-\ln|Q'(p_k)|$, $Q(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{p_k^2}\right)$.

Теорема В. Пусть выполняется условие а). Если

$$\int^{\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt<\infty, \qquad (3)$$

то при $x\to+\infty$ вне некоторого множества $E\subset[0,\infty)$ нулевой логарифмической плотности

$$\ln M_f(x)=(1+o(1))\ln|f(x)|. \qquad (4)$$

Условие (3) для справедливости (4) существенно. Аналогичное утверждение имеет место и для рядов (1), сходящихся лишь в круге $\{z: |z|<1\}$. Наконец, отметим, что условия теоремы В существенно слабее условий теоремы А.

Литература.

1. Павлов А.И. О росте на положительном луче целых функций с вещественными коэффициентамиТейлора.//Матем.заметки.1973.т.14.№4. с.577-578.

2. Edrei A. Gap and density theorems for entire functions.//Scripta Math.1957.v.23.p.117-141.

УДК 517.5 Галеев Э.М. (Москва)

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ

При вычислении поперечников функциональных классов оценки сверху и снизу часто сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. Так, например, в работе [1] оценка снизу поперечника по Колмогорову $d_N(H_p^r(T^n), L_q)$ класса периодических функций многих переменных с доминирующей смешанной производной $H_p^r(T^n)$ в пространстве $L_q(T^n)$ при $1 < p < q < 2$ сводится к оценке снизу поперечника $d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,q}^{n,m})$ конечномерного множества $B_{1,\infty}^{n,m}$ в смешанной норме $l_{2,q}^{n,m}$ с помощью теоремы Литтльвуда-Пэли, неравенства В.Н.Темлякова и теоремы Марцинкевича-Зигмунда о дискретизации.

Здесь через $B_{p,q}^{n,m}$ обозначен единичный шар нормированного пространства $l_{p,q}^{n,m}$ со смешанной нормой

$$\|x\|_{l_{p,q}^{n,m}} := \left(\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{(s-1)n<k\le sn}|x_k|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}, \ 1 \le p,q \le \infty, \ x \in R^{nm}.$$

При вычислении линейных поперечников оценки сверху и снизу также сводятся к вычислению линейных поперечников конечномерных множеств в смешанной норме. В докладе будут приведены оценки линейных поперечников $\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q)$ класса периодических функций многих переменных $H_p^r(T^n)$ в пространстве $L_q(T^n)$ при $1 < p,q < \infty$. А так же будут приведены оценки линейных поперечников конечномерных множеств в смешанной норме. Предыдущие результаты об оценках линейных поперечников функциональных классов содержатся в работе автора [2].

Литература

1. Галеев Э.М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Известия АН СССР. Сер. матем., 1990, Т.54, N 2, 418-430.

2. Галеев Э.М. Линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ, в.4, 1987, 13-16.

УДК 517.53 Ганжула Л.М. (Москва)

ОБ ОДНОЙ F-АЛГЕБРЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В докладе рассматриваются свойства множества M(D) голоморфных функций f(z) в верхней полуплоскости D={z:Imz>0}, удовлетворяющих условию :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log(1+\sup_{y>0}|f(x+i\cdot y)|)dx < +\infty$$

Устанавливается связь класса M(D) и пространств Харди $H^p(D)$ и Смирнова $N_*(D)$, рассмотренных в [1]: M(D) содержится в пространстве $N_*(D)$ и содержит объединение всех $H^p(D)$, $0<p\leq 1$.

На M(D) вводится инвариантная метрика:

$$\rho(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log(1+\sup_{y>0}|f(x+i\cdot y)-g(x+i\cdot y)|)dx$$

Основной результат состоит в утверждении о том, что M(D) является полным линейным метрическим пространством с непрерывным умножением, т.е. F-алгеброй. Устанавливается также полная характеристика свойства ограниченности подмножеств в M(D).

Литература

[1] Mochizuki N. "Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half-plane".// Hokkaido Mathematical Journal. 1991, V.20, № 3, P.609-620.

УДК 519.21 Гапошкин В.Ф. /Москва/

О СПЕКТРАЛЬНОМ МЕТОДЕ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Спектральный метод применительно к индивидуальным эргодическим теоремам был развит в работах автора для унитарных и нормальных операторов в пространстве L^2. Было показано, что необходимые и достаточные условия для сходимости почти всюду средних арифметических

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f,$$

где T – унитарный или нормальный оператор, $f \in L^2$, выражаются через свойства спектральной меры $Z_f(\lambda)$ в окрестности $\lambda = 0$.

Например, если T – унитарный оператор, $m_n = [\log n]$, то справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sigma_n - Z_f\left[|\lambda| \le 2^{-m_n}\right] \right] = 0 \quad \text{п.в.}$$

Таким образом, рассматриваемая задача тесно связана с задачей о сходимости п.в. ортогонального ряда $\sum \phi_k$, где

$$\phi_k = Z_k - Z_{k-1} \;;\; Z_k = Z_f(|\lambda| \le 2^{-m_k}).$$

В дальнейшем этот метод успешно применялся в теории случайных процессов /для различных классов гармонизуемых процессов/ и в теории операторов/не только в гильбертовом пространстве, но и в пространствах L^p /; были также установлены интересные связи эргодических преобразований с гармоническим анализом / Руссо, Яйте, Кемпбел, Петерсен, Ассани, Розенблат, Удре, Жиллеспи, Берксон, Бургин и др./.

Предполагается дать обзор этих результатов, в том числе недавних результатов автора по суммированию последовательностей $(T^k f)$ методами Рисса.

539.4 Гарбуз Е.В., Гончарова Г.А. / Саратов/

ОБ УЧЕТЕ ДИФФУЗИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ НАГРУЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

При расчете конструкций в условиях воздействия механических нагрузок и агрессивных сред возможно не только изменение механических характеристик материала, но и изменение кинетики происходящих при этом процессов проникания среды в конструкцию, замедление или ускорение физико-химических процессов, изменение формы конструкции вследствие деформирования под действием среды.

Для описания процесса разрушения полимерных конструкций предлагается использовать теорию накопления повреждений. Причем в систему определяющих параметров включаются не только механические, но и физико-химические параметры, учитывающие влияние агрессивной среды на кинетику процессов деформирования и разрушения. В частности, коэффициенты уравнения накопления повреждений зависят от уровня концентрации среды в материале конструкции.

После соответствующей идентификации механических и физико-химических параметров,производимой по экспериментальным данным, данный подход позволяет строить достаточно корректные модели расчета конструкций, учитывающие взаимовлияние процессов деформирования, разрушения и физико-химического взаимодействия. Кроме того, данный подход к расчету элементов конструкций из полимеров, подвергающихся воздействию агрессивных жидких сред в достаточной степени позволяет формализовать расчеты как несущей способности, так и долговечности конструктивных элементов.

Данный подход применен при расчете долговечности цилиндрической оболочки с учетом диффундирующей агрессивной среды.

Полученные результаты показывают, что при расчете долговечности в условиях совместного воздействия механических нагрузок и агрессивных сред необходимо учитывать перераспределение напряжений, возникающее в результате взаимодействия оболочки с агрессивной средой.

УДК 517.9

Гаркавенко Г.В./Воронеж/

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА.

Пусть A -самосопряженный, дискретный оператор с однократным спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ -собственные числа оператора A, а v_n, $n=1,2,\ldots$ соответствующие им собственные векторы, образующие ортонормированный базис. Через $d_n = \rho(\lambda_n, \sigma(A \setminus \lambda_n))$ обозначим расстояние от точки λ_n до спектра $\sigma(A)$ оператора A без точки λ_n.

Обозначим, через $\mathcal{L}_A(H)$ линейное пространство операторов, подчинённых оператору A.

Пусть G_0 -некоторый класс операторов из $\mathcal{L}_A(H)$, для которых выполнены следующие условия:

1). величина $\theta(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(Tv_n, v_n)|^2\right)^{1/2} < \infty$, $\forall T \in G_0$;

2) из условия $\theta(T) = 0$ следует, что $T = 0$, $\forall T \in G_0$;

3) $\forall T \in G_0$ существует постоянная $\alpha > 0$, что для всех $n \geq 1$ имеет место оценка $\|Tv_n\| \leq \alpha\, \theta(T)$.

ТЕОРЕМА. Если A -самосопряженный, дискретный оператор, имеющий однократный спектр и выполняются условия:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-2} < \infty$;

2) $B, \tilde{B}, B - \tilde{B} \in G_0$;

3) $\sigma(A - B) = \sigma(A - \tilde{B})$;

4) $(\|BS_n\|_n \|S_n\|_n \|Bv_n\|)^{1/2} + (\|BS_n\|_n + \|Bv_n\| \|S_n\|_n) \leq \frac{1}{2}$,

$(\|B^* S_n\|_n \|S_n\|_n \|B^* v_n\|)^{1/2} + (\|B^* S_n\|_n + \|B^* v_n\| \|S_n\|_n) < \frac{1}{2}$;

где $S_n : H \to H$; $S_n x = \sum_{k \neq n} \frac{(x, v_k)}{\lambda_n - \lambda_k} v_k$, $S_n v_n = 0$, $\forall x \in H$, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что при $\|Bv_n\| < \varepsilon$, $\|\tilde{B} v_n\| < \varepsilon$ операторы B и $\tilde{B}$ совпадают.

Для некоторых более конкретных классов операторов величину ε можно конкретизировать.

При доказательстве теоремы используется метод подобных операторов.

УДК 519.3 Глухова О.Е., Ибанов А.И., Кожелев В.С. (Саратов)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

При решении краевых задач часто возникает ситуация, когда поле слабо меняется почти по всему исследуемому пространству и резко возрастает в сингулярной точке. Это создает трудности при численном моделировании. Для преодоления проблем такого рода используются разнообразные приемы. Например, в методе конечных элементов иногда применяются сингулярные элементы, учитывающие особенности сингулярного поведения поля.

В настоящей работе предлагается другой подход - численно-аналитический. Основная его идея состоит в следующем.

Пусть краевая задача имеет вид:

$L\,U = F\ ; \quad l\,U = W\ ,$

где U - функция решения, L и l - дифференциальные операторы, F - источник, W - граничные условия.

Представим искомую функцию U суммой:

$U = u + v\ ,$

где u - неизвестная функция, v - функция, являющаяся известным аналитическим решением для области с более простой геометрией и граничными условиями, учитывающая фактически все особенности поведения поля вблизи сингулярной точки.

Далее формулируется краевая задача относительно u

$L\,u = F - L\,v = f\ ; \quad l\,u = W - l\,v = w,$

которая затем решается численно. В нашей работе - методом конечных элементов.

При этом аналитическое решение полностью отражает резкое изменение поля вблизи сингулярной точки, численное решение дополняет аналитическое, учитывая все особенности границ исследуемой области.

С помощью описанного метода решены две задачи. Одна - по расчету напряженности поля и тока матричного автоэмиссионого катода, другая - по расчету нестационарного температурного поля сопла сверхзвуковой аэродинамической трубы.

УДК 517.9

Глызин С.Д. (Ярославль)

СЦЕНАРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕСТРОЕК НОРМАЛИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ДИФФУЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В целом ряде физических и биологических моделей важное значение имеет слабое диффузионное взаимодействие пары осцилляторов, которое описывается в критическом случае нормальной формой

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varepsilon d[-\phi_1\xi_1 + \xi_2\cos(\alpha+\delta)] + \varepsilon\phi_0\xi_1 + d_0\xi_1^3, \\ \xi_2' &= \varepsilon d[-\phi_1\xi_2 + \xi_1\cos(\alpha-\delta)] + \varepsilon\phi_0\xi_2 + d_0\xi_2^3, \qquad (1) \\ \alpha' &= -\varepsilon d\left[\frac{\xi_1}{\xi_2}\sin(\alpha-\delta) + \frac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha+\delta)\right] + c_0(\xi_1^2 - \xi_2^2). \end{aligned}$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 – амплитуды близких к гармоническим осцилляторов, α – их разность фаз. Параметры $\varepsilon\phi_0$, d_0 и c_0 характеризуют осцилляторы (это соответственно – надкритичность и вещественная и мнимая части ляпуновской величины), а d и α определяют связь между ними. Полагаем выполненными условия $0<\varepsilon<<1$, $\phi_0>0$, $d_0<0$, $d>0$, лишь при наличии которых задача имеет нетривиальный смысл.

В результате аналитических и дополняющих их численных исследований удалось определить все возможные фазовые перестройки динамической системы (1). Как оказалось, можно выделить два основных случая, первый из которых связан с рождением в результате бифуркации Андронова-Хопфа пары симметричных циклов и последующими их перестройками (сначала в один объединенный цикл, а затем в состояние равновесия, соответствующее колебаниям осцилляторов в противофазе). Второй сценарий оказывается более сложным, система (1) при этом демонстрирует хаотическое поведение, причем рождение странного аттрактора может происходить, в зависимости от способа изменения параметров, как в результате каскада бифуркаций удвоения периода, так и при совпадении устойчивого многообразия неустойчивого цикла с неустойчивым многообразием седлового состояния равновесия. Исследование динамических характеристик странного аттрактора производилось естественно численными методами. В частности, определялся спектр ляпуновских экспонент и размерности.

Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения

Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина.
Самарский университет.

Для уравнения

$$U_{xy} + A(x,y)U_x + B(x,y)U_y + C(x,y)U = f(x,y) \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{ (x,y) : o < x < a,\ o < y < b \}$ изучается нелокальная задача с интегральными условиями:

$$\int_0^\alpha U(x,y)dx = \Psi(y), \qquad \int_0^\beta U(x,y)dy = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ заданы соответственно в $[o,a]$ и $[o,b]$,

$$o < \alpha \leqslant a, \qquad o < \beta \leqslant b.$$

Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ при выполнении некоторых условий на коэффициенты и заданные функции.

Для доказательства этого утверждения задача сведена к системе интегральных уравнений с непрерывными ядрами. Разрешимость этой системы следует из теоремы единственности, которая доказана с помощью априорных оценок.

Рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (1), в которых решение можно получить в явном виде.

УДК 517.51

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ХАРДИ И БЕЛЛМАНА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Голубов Б.И. /Долгопрудный/

В 1928г. Харди доказал следующую теорему:

Теорема А. Пусть $1 \le p < \infty$, а чётная 2π-периодическая функция $f \in L^p(T)$, $T = [-\pi, \pi]$, имеет ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (a_0 = 0). \qquad /1/$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \qquad \left(A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \qquad /2/$$

является рядом Фурье функции

$$H(f)(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_T f(x-t) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt, \quad /3/$$

которая также принадлежит пространству $L^p(T)$.

На самом деле Харди явно выписал лишь первое слагаемое в правой части равенства /3/ и указал ряд Фурье для второго слагаемого, а явный вид второго слагаемого впервые указал К.Андерсен в 1982г.

В 1944г. Беллман доказал двойственный результат:

Теорема В. Пусть $1 < p \le \infty$, а чётная 2π-периодическая функция $f \in L^p(T)$ имеет ряд Фурье вида /1/. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nx \qquad \left(B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $B(f) \in L^p(T)$.

Беллман отметил, что его доказательство теоремы В опирается на теорему А и не позволяет явно выразить функцию $B(f)$ через f.

Мы приводим другое доказательство теоремы В, которое не опирается на теорему А и позволяет указать явный вид функции $B(f)$:

$$B(f)(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \int_0^x f(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_T f(x-t) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt \quad (4)$$

Из /3/ и /4/ можно заключить, что линейные операторы H: $L^p(T) \longrightarrow L^p(T)$ и B: $L^q(T) \longrightarrow L^q(T)$, где $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, являются взаимно сопряжёнными.

В докладе будет дан также обзор результатов других авторов, связанных с преобразованиями Харди и Беллмана.

УДК 517.51 ГОЛЬДМАН М.Л. (МОСКВА)*

ДИСКРЕТНОЕ ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ

Пусть $0 < p,q,r \le \infty$; $v_n, \varphi_n, w_n \ge 0$, $n \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Рассмотрим наилучшую постоянную в дискретном весовом неравенстве Харди

$$H = \sup_{a_n \ge 0}\left[\left\{\sum_n w_n^{\,q}\left(\sum_{m \le n}[\varphi_m a_m]^r\right)^{q/r}\right\}^{1/q}\left\{\sum_n [v_n a_n]^p\right\}^{-1/p}\right].$$

здесь и ниже мы считаем, что

$$\left(\sum_n b_n^s\right)^{1/s} = \sup_n b_n, \quad если\ s = \infty.$$

Пусть $\sigma = \infty$, если $p \le r$; $\sigma = pr/(p-r)$, если $p > r$ $(p = \infty \Rightarrow \sigma = r)$,

$$V_n = \left\{\sum_{m \le n}\left[\varphi_m v_m^{-1}\right]^\sigma\right\}^{1/\sigma}; \quad W_n = \left\{\sum_{m \ge n} w_m^q\right\}^{1/q}$$

ТЕОРЕМА. При введенных обозначениях

$$c_1^{-1} \le H/F \le c_1, \quad где \quad c_1 = c_1(p,q,r) \ge 1.$$

Здесь

$$F = \sup_n [V_n W_n], \ если\ p \le q,$$

$$F = \left\{\sum_n V_n^s\left[W_n^s - W_{n+1}^s\right]\right\}^{1/s}, \ если\ p > q, \quad s = pq/(p-q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $0 < q < p \le \infty$, то

$$c_2^{-1} \le \frac{1}{F}\left\{\sum_n V_n^s\, W_n^{sq/p}\, w_n^q\right\}^{1/s} \le c_2, \qquad c_2 = c_2(p,q) \ge 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если

$$\Delta = \sup_n [W_{n+1}/W_n] < 1,$$

то для всех $0 < p,q,r \le \infty$, $1/s = (1/q - 1/p)_+$, имеем

$$c_3^{-1} \le \frac{1}{F}\left\{\sum_n [V_n W_n]^s\right\}^{1/s} \le c_3; \quad c_3 = c_3(p,q,\Delta) \ge 1;$$

где $a_+ = a$ при $a > 0$; $a_+ = 0$ при $a \le 0$.

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, Грант 93-01-00255.

УДК 517.988.63

Гончаров Г.М. (Воронеж)

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ В НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

В полном метрическом пространстве $X(\rho)$ со структурой выпуклости в смысле Такахаши рассматриваются теоремы о существовании неподвижной точки и непрерывности в этой точке, вообще разрывных, операторов типа сжатия.

Определение. Отображение $W: X\times X\times[0,1]\to X$ называется выпуклой структурой на $X(\rho)$, если $\forall (x,y,\lambda)\in X\times X\times[0,1],\ u\in X$

$$\rho(u, W(x,y,\lambda)) \le \lambda\rho(u,x) + (1-\lambda)\rho(u,y).$$

Пространство $X(\rho)$ с выпуклой структурой W называется выпуклым метрическим пространством.

Непустое множество $K\subset X$ называется выпуклым, если

$$W(x,y,\lambda)\in K \quad \forall (x,y,\lambda)\in K\times K\times[0,1].$$

Пусть

$$x_0\in K,\ x_{n+1}=W(Ty_n,x_n,\alpha_n),\ y_n=W(Tx_n,x_n,\beta_n),$$
$$n=0,1,2,\dots,\quad 0\le\alpha_n,\beta_n\le 1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty,\ \lim\alpha_n=\alpha>0. \qquad (I)$$

Т е о р е м а. Пусть

1) $K\subset X$ – непустое замкнутое выпуклое множество полного выпуклого метрического пространства,
2) оператор $T: K\to K$ и

$$\rho(Tx,Ty)\le q\max\{\rho(x,y),\rho(x,Tx),\rho(y,Ty),\rho(x,Ty),\rho(y,Tx)\},\ \forall x,y\in K,\ q\in(0,1).$$

Тогда итерационная схема (I) сходится к единственной неподвижной точке T и оператор T непрерывен в этой точке, если K ограничено.

Далее, для отображений T, удовлетворяющих некоторым условиям типа сжатия, показано, что итерационная схема Ишикавы (I) может сходиться только к неподвижной точке T и, если K ограничено, то оператор T непрерывен в этой точке.

Грабовская Р.Г., Тингаев А.А. (Одесса)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Рассматриваются уравнения вида

$$y' = f_1(x,y) + F_1(x,y,W_m y), \tag{I}$$

$$g(x,y)y' = f_2(x,y) + F_2(x,y,W_m y), \tag{2}$$

где $W_m y$ - оператор, определенный на некотором классе функций, действующий на $y, y', \ldots, y^{(m)}$; $y \in C^m$.

Здесь "укороченные" уравнения

$$y' = f_1(x,y), \tag{3}$$

$$g(x,y)y' = f_2(x,y) \tag{4}$$

имеют некоторое семейство решений $y = \varphi(x, c)$, для которого можно найти множество точек $X_0(C)$, такое, что:

в случае (3):

$$\lim_{x \to X_0(c)+0} \varphi(x,c) = \infty, \quad \lim_{x \to X_0(c)+0} f_1(x, \varphi(x,c)) = \infty;$$

в случае (4):

$$\lim_{x \to X_0(c)+0} \varphi(x,c) = y_0(c) \neq \infty,$$

$$\lim_{x \to X_0(c)+0} g(x, \varphi(x,c)) = 0, \quad \lim_{x \to X_0(c)+0} f_2(x, \varphi(x,c)) \neq \infty.$$

То есть $X_0(C)$ - подвижная особая точка решений уравнений (3), (4).

Даются достаточные условия существования решений уравнений (I),(2) на $[X_0(c), X_0(c)+\Delta]$, $0 < \Delta = const.$, асимптотически представимых соответствующим решением соответствующего "укороченного" уравнения (3) или (4) при $X \to X_0(c)+0$.

УДК 517.98 Гуревич А.П., Хромов А.П. (Саратов)

О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе [1] исследуется вопрос о равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора:

$$Af=\int_0^1 A(x,t)f(t)dt\ ,\ x\in[0,1]$$

и в тригонометрический ряд Фурье для случая ядра $A(x,t)$, имеющего поведение при $t=x$ как у функции Грина дифференциального оператора. Теперь исследуется случай схожего поведения при $t=1-x$.

Теорема. Если ядро $A(x,t)$ непрерывно дифференцируемо дважды по x и один раз по t при $0\le t\le 1-x$, $A(x,t)=0$ при $t>1-x$, $A(1-x,x)=1$, $\frac{\partial}{\partial x}A(1-x,t)_{|t=x}=0$, то для любой функции $f(x)\in L[0,1]$ справедливо соотношение:

$$\lim_{r\to\infty}\max_{0<\delta\le x\le 1-\delta}|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)|=0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех номеров "k", для которых $|\lambda_k|<r^2$ (λ_k – характеристическое число оператора A), $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров "k", для которых $|k\pi|<r$.

[1]. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов. Матем. сб., 1981, т.114 (156), N 3, с. 378-405.

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

При математическом моделировании реальных процессов обыкновенными дифференциальными уравнениями часто требуется знать значения дискретизированного решения задачи Коши

$$dy/dx = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{I}$$

где $x, x_0 \in R^1$, $y, y_0 \in R^n$, $f(x,y) \in R^n$.
В такой ситуации предлагается рассматривать в качестве математической модели исследуемого явления только те системы уравнений вида (I), для которых существуют точные численные методы их решения [I, 2]. Сам вывод искомой формулы метода не всегда прост.
Например, для следующего уравнения Бернулли

$$dy/dx = ay + b(x)y^p, \quad (p \neq 0, p \neq 1) \tag{2}$$

где $x, y \in R^1$, $a \in R^1$,

$$b(x) = \sum_{j=1}^{q} (P_j(x)\cos(\mu_j x) + Q_j(x)\sin(\mu_j x))\exp(\lambda_j x),$$

$\lambda_j, \mu_j \in R^1$, $P_j(x)$, $Q_j(x)$ – многочлены аргумента x степеныю m_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, с помощью теорем из статьи [I] устанавливается, что по любому натуральному числу $m \geq 2(q + \sum_{j=1}^{q} m_j)$ и по любому шагу интегрирования $h > 0$ существует явный нелинейный m-шаговый точный численный метод решения уравнения (2) в смысле существования m вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ таких, что $y_k = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{k-j}^{1-p})^{1/(1-p)}$, $k = m, m+1, \ldots$,
где $y_k = y(x_0 + kh)$, $y(x)$ – произвольное решение уравнения (2).

Литература

I. Гурьянов А. Е. Точные методы численного решения систем линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник ЛГУ. Сер. I, вып. 2 (№ 8). 1988. – С. 17 – 21.

2. Гурьянов А. Е. Построение оптимального по точности численного метода решения задачи Коши // Дифференциальные уравнения с частными производными. – Л.: ЛГПИ, 1990. – С. 80 – 84.

УДК 517.9; 518.6 Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

ПРИКЛАДНОЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

При нахождении дискретизированного решения задачи Коши

$$dx/dt = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{I}$$

где $t,\ t_0 \in R^1,\ x,\ x_0 \in R^n,\ f(t,x) \in R^n$, в точках $t_1, t_2, \dots, t_m$ (m, n – натуральные числа), по некоторому вычислительному методу часто требуется знать погрешность найденного приближённого значения x_k, как отклонения от искомого точного значения $x(t_k)$ в виде $x_k - x(t_k)$, $k=1,2,\dots,m$. По аналогии с первым методом Ляпунова А. М. с целью прикладного анализа численного решения x_k задачи (I) рассматривается вспомогательная задача Коши

$$dv/dt = g(t,v), \quad v(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $v,\ g(t,v) \in R^n$, решение которой $v(t)$ обладает тем свойством, что $v(t_k)=x_k$, $k=1,2,\dots,m$. Заметим, что в случае совпадения уравнений (I) и (2) используемый численный метод точен в том смысле, что $x_k=x(t_k)$, $k = 1,2,\dots,m$ [1].

Например, вычисленное по методу Эйлера приближённое решение $x_k,\ y_k \in R^1$, $t_k=kh$, $k=0,1,2,\dots$, следующей задачи Коши $dx/dt=-ax+by+\sin(t+u)$, $dy/dt=-bx-ay+\cos(t+u)$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, где $a=(1-\cos(u))/u$, $b=\sin(u)/u$, $u>0$, и точное решение $v(t)$, $w(t)$ следующей вспомогательной задачи Коши
$dv/dt=w+\sin(t)$, $dw/dt=-v+\cos(t)$, $v(0)=x_0$, $w(0)=y_0$,
при $h=u$ таковы, что $x_k=v(kh)$, $y_k=w(kh)$, и следовательно накопленная абсолютная ошибка метода рассматриваемого численного решения x_k, y_k при возрастании натурального k стремится к бесконечности эквивалентно kh. При вычислении на ЭЦВМ ЕС 1046 замечено, что десятичные порядки накопленной ошибки округления и накопленной абсолютной ошибки метода равны при $h \approx 1/2000$, и тем самым выявлено, что наивысшая точность при решении на ЭВМ ЕС данной задачи Коши методом Эйлера достигается при шаге $h \approx 1/2000$.

Литература

1. Гурьянов А. Е. Точные методы численного решения систем линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений// Вестник ЛГУ. Сер. I, вып. 2 (№ 8). 1988. – С. 17 – 21.

УДК 517.968.22

И.Э. Гурьянова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
В ОБОБЩЕННОЙ ТРАКТОВКЕ

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение второго рода

$$x(t) = f(t) + \int_{M(t)} K(t, s, x(s))\, d\mu_s \qquad /I/$$

с оператором, обладающим свойством вольтерровости в обобщенном смысле, на метрическом пространстве (Ω, ρ) с борелевой мерой μ. Заданное отображение $M: \Omega \longrightarrow 2^{\Omega}$ непрерывно по мере. При условии, что ядро $K(t, s, x)$ удовлетворяет по x локальному условию Липшица, доказывается теорема о существовании и единственности непродолжимого решения уравнения /I/, указан способ построения последовательных приближений этого решения.

Доказаны также теорема о существовании решения на основе принципа Шаудера, теорема о существовании решения уравнения

$$x(t) = f(t) + \int_{M_1(t)} K_1(t, s, x(s))\, d\mu_s + \int_{M_2(t)} K_2(t, s, x(s))\, d\mu_s$$

на основе теоремы Красносельского; ряд теорем существования для абстрактных операторных уравнений вида $\varphi(t) = (V\varphi)(t)$ где V – обобщенный оператор Вольтерра.

В частном случае, когда μ – мера Лебега, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой некоторую область с полностью или частично присоединенной границей, множества $M(t)$ ограничены $\partial\Omega$ и проходящими через точку t интегральными линиями двух заданных дифференциальных уравнений, явно выписана эквивалентная уравнению /I/ краевая задача для соответствующего уравнения с частными производными гиперболического типа.

УДК 539.4

Дворкин М.С. (Саратов)

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ РАБОТЫ ОКИСЛЕННОГО СЛОЯ.

Под влиянием коррозионной среды на внутренней поверхности трубопровода, контактирующего с агрессивной средой образуется окисная пленка, выполняющая роль защитного слоя. Разрушение этого слоя вследствие растрескивания и отслоения приводит к ускорению коррозионного разрушения трубы. Поэтому следует рассчитывать трубу с учетом окисленного слоя для того, чтобы оценить напряжения не только в трубе, но и в этом слое и проанализировать коррозионно-механическое разрушение трубы.

Предлагается модель деформирования и разрушения трубы с окисленным слоем, который в процессе работы периодически разрушается и восстанавливается. Кинетика процесса окисления описывается функцией, учитывающей наличие инкубационного периода. Считается, что в материале трубы и окисленного слоя развиваются процессы ползучести и накопления повреждений различной интенсивности. Процесс ползучести описывается теорией установившейся ползучести, а процесс накопления повреждений - простейшим кинетическим уравнением. Получено разрешающее уравнение для трубы и разработана методика решения этого уравнения. Методика основана на использовании метода последовательных возмущений параметров. Решение задачи производится в несколько этапов. Сначала рассматривается нагружение трубы и определяется напряженно-деформированное состояние (НДС) при отсутствии защитного слоя. Затем рассматриваются процессы окисления и деформирования, приводящие к накоплению повреждений и в материале трубы и в материале защитного слоя. Как только поврежденность в окисленном слое достигнет критического значения, считается, что слой разрушен, и расчет переходит к следующему этапу. На этом этапе заново определяется НДС трубы уменьшенного сечения и опять рассматриваются процессы окисления и деформирования до разрушения вновь образующегося окисленного слоя. Расчет производится до тех пор, пока поврежденность в материале трубы не достигнет предельного значения.

УДК 517.95 Дементьева А.М. (Воронеж)

ОБ ОТЫСКАНИИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКЕ

Рассматривается задача о распространении тепла в тонкостенной круглой трубке при заданной начальной температуре и поддерживаемой температуре на концах трубки. На боковой и внутренней поверхности трубки происходит слабый теплообмен. Получаем краевую задачу для функции $u(t,x,\tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=f(u,x,\tau)$$

$$(t>0,\quad 0<x<1,\quad 1<\tau<1+\varepsilon);$$

$$u(0,x,\tau)=\varphi(x,\tau);$$

$$u(t,0,\tau)=\psi_1(t,\tau),\quad u(t,1,\tau)=\psi_2(t,\tau)$$

$$(\varphi(0,\tau)=\psi_1(0,\tau),\quad \varphi(1,\tau)=\psi_2(0,\tau));$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-A\varepsilon u\Big|_{\tau=1}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \tau}+A\varepsilon u\Big|_{\tau=1+\varepsilon}=0.$$

Здесь ε (толщина трубки) сколь угодно мало. Переходя к новой переменной ρ, где $\tau=\varepsilon\rho+1$, искомую функцию $u(t,x,\rho,\varepsilon)$ ищем в виде разложения в ряд по степеням ε. В данной работе получены нулевое и первое приближения u.

УДК 517.927 Дементьев С.Н., Яновский Л.П. (Воронеж)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В R^m

Рассмотрим в R^m дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - x. \qquad (1)$$

Полуупорядоченность в R^m введем с помощью неотрицательного ортанта R^m_+. Будем предполагать, что u_0 - произвольный внутренний элемент R^m_+, т.е. $u_0 \in int\, R^m_+$. Предположим также, что $f(x)$ непрерывна и принадлежит R^m_+ ($x \in R^m_+$, $x \neq 0$).

<u>Определение</u>. Оператор $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ называется обобщенно вогнутым, если для $x \in \langle \tau u_0, \frac{1}{\tau} u_0 \rangle$, $\tau \in (0,1)$, $i = 1, \dots, m$, $u_0 \in int\, R^m_+$ выполнено условие

$$\frac{1}{\tau} f_i(u_0) \geq f_i(x) \geq \tau f_i(u_0).$$

При этом, очевидно,

$$f(x) \geq (1 + \eta(x,\tau)) f(u_0),$$

если положить

$$\eta(x,\tau) = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{f_i(x)}{\tau f_i(u_0)} - 1 \right\} > 0.$$

Более того, всякий обобщенно вогнутый оператор в R^m является обобщенно равномерно вогнутым.

<u>Теорема</u>. Предположим, что обобщенно вогнутый оператор $f(x)$ имеет инвариантный конусный отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle$, $x_0 \in int\, R^m_+$. Тогда дифференциальное уравнение (1) имеет на $\langle x_0, y_0 \rangle$ единственное положение равновесия x^*, которое глобально асимптотически устойчиво на $int\, R^m_+$.

УДК 517.946

И.А.Добродейч

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

1. При описании одномерного, стационарного течения вязкой сжимаемой жидкости (в.с.ж.) можно использовать частный вариант системы уравнений Навье–Стокса, приведенный в [1]. Она подстановкой

$$\mu = Const, \qquad W = \Psi + \Phi \cdot e^{cz}, \qquad \rho = \frac{\Psi + \Phi}{\Psi + \Phi \cdot \exp(c \cdot z)} \tag{I}$$

сводится к решению следующих уравнений

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{\beta_2}{\mu} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + c^2 \Phi - \frac{1}{\mu} c \Phi (\Phi + \Psi) = \frac{1}{\mu} \beta_1 \tag{3}$$

где $r = 0 \ldots 1$, $z = \ell / R$, $c, R, \beta_i - Const$

2. Решением уравнения (2) является

$$\Psi = n_0 + \frac{1}{4\mu} \beta_2 r^2 + c_1 \cdot r^{\varkappa} \cos \theta_1 + c_2 \ln r + f_2(S_2) + f_3(S_3)$$

$$S_2 = c_2 \cdot r^m (\sin \theta_2 \pm j \cos \theta_2), \qquad \theta_2 = \theta_2^\circ + n \cdot \varphi \pm j \cdot \ln r^{\alpha}$$

$$S_3 = c_3 \cdot r^K (\sin \theta_3 \pm j \cos \theta_3), \qquad \theta_3 = \theta_3^\circ + K \cdot \varphi$$

$$n = m + \alpha, \quad \theta_1 = \theta_1^\circ + \varphi \cdot \varkappa, \quad \varkappa, \alpha, n_0, K, m, n, \theta_i^\circ - Const$$

а $f_2(S_2)$ и $f_3(S_3)$ – произвольные функции комплексов S_2 и S_3.

3. Вопрос об общем аналитическом решении уравнения (3) остается открытым. Можно довольствоваться решением уравнения (3) в виде ряда (для $\Psi = 0$ приведено в [2]). В этом случае вид функции $W(r, 0, 0)$ однозначно определяется значением постоянных μ, c, β_i и граничными условиями конкретной задачи. Например, при $c_1 = c_2 = W(r=1) = 0$ значение $\int_0^1 \rho W dr / (\rho W)_0$ может меняться от 0,5 до 0,7 и более. А последнее, как известно, наблюдается при установившемся турбулентном течении в.с.ж..

ЛИТЕРАТУРА

1. Добродейч И.А. Некоторые возможности решения уравнений Навье–Стокса. "Понтрягинские чтения V". Тезисы докладов школы.– Воронеж, ВГУ, 1994.–162с., С.46.

2. Добродейч И.А. Некоторые проблемы математического моделирования течения жидкости. "Математическое и машинное моделирование": Матер.научн.конф./Воронеж, ВПИ, 1988, ч.I, 160с., С.46–50.

УДК 517.5

Е.П.Долженко (Москва)

ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Доклад является обзорным. Приведём две теоремы существования, полученных автором совместно с Е.А.Севастьяновым.

Пусть $C(\Delta)$ – линейное пространство непрерывных функций на $\Delta=[a,b]$ с чебышевской нормой, L – чебышевское подпространство на Δ (конечномерное линейное пространство, порожденное некоторой чебышевской системой функций на Δ), P – неотрицательный положительно однородный функционал на линейном нормированном пространстве $Л$ с нормой $\|\cdot\|$. Знакочувствительным весом назовем упорядоченную пару $p=(p_-,p_+)$ неотрицательных функций на Δ; $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x):=(-f(x))^+$; $(f,p)(x):=f^+(x)p_+(x)-f^-(x)p_-(x)$, $|f|_{p,\Delta}=\|(f,p)\|_{C(\Delta)}$; величина $W(P;L):=\sup\{\|f\|/P(f):\ f\in L,\ f\neq0\}$ называется свободой системы $(P;L)$ $(L\subset Л)$; $E(P,L,f):=\inf\{P(l-f):\ l\in L\}$ и $l(P;L,f)$ – наименьшее уклонение и элемент наилучшего приближения из L для $f\in Л$; при $P(\cdot)=|\cdot|_{p,\Delta}$ в этих обозначениях пишем $(p,\ldots)$ вместо $(P;\ldots)$.

Вопрос о необходимых и достаточных условиях существования и единственности элемента наилучшего приближения не решен в общем случае, нетривиален в случае аппроксимаций непрерывных функций чебышевскими подпространствами со знакочувствительным весом.

Т е о р е м а 1. *Если функционал P полунепрерывен снизу, L конечномерное подпространство в $Л$, $W(P;L)<\infty$, то каждый элемент $f\in Л$ имеет хотя бы один элемент наилучшего приближения* $l(P;L,f)$.

Условие $W(P;L)<\infty$ здесь нельзя опустить даже в случае $Л=C(\Delta)$, чебышевского подпространства $L\subset C(\Delta)$ и функционала $P(\cdot)=|\cdot|_{p,\Delta}$, где p – ограниченный знакочувствительный вес на Δ.

Т е о р е м а 2. *Пусть L – чебышевское подпространство на Δ, p – ограниченный знакочувствительный вес на Δ. Тогда для существования у каждой функции $f\in C(\Delta)$ хотя бы одного элемента наилучшего приближения* $l(p,L,f)$ *необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:*

(a) $W(p,L)<\infty$,

(b) $W(p,L)=\infty$, *и каждая точка множества* $\Pi(p)=\operatorname{supp}p_-\cap\operatorname{supp}p_+$ *является изолированной точкой множества* $\operatorname{supp}p=\operatorname{supp}p_-\cup\operatorname{supp}p_+$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-01-00236) и Международного научного фонда (грант NCF000).

517.9 Долинкина С.П., Глушанкова Л.Я., Колесникова Н.С.
(Минск)

ДИФФУЗИЯ РАДИОНУКЛИДОВ В СРЕДАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматривается диффузия радионуклидов в средах конечных размеров с цилиндрической симметрией в цилиндрической системе координат (ρ , φ , z) на основе уравнения диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) - \lambda C + I, \qquad (1)$$

где $D = const$ коэффициент диффузии, λ – коэффициент распада, I –внешний источник радионуклидов при начальных условиях

$$t = 0: \quad C = C_0(r, \varphi, z) \qquad (2)$$

и классических граничных условиях I–3 родов, которые в обобщенном виде записываются

$$\left|\alpha_1 \frac{\partial C}{\partial n} + \beta_1 C\right|_{\Gamma} + \left|\alpha_2 \frac{\partial C}{\partial n} + \beta_2 C\right| = \xi(t). \qquad (3)$$

Решая в дальнейшем неоднородное уравнение (1) при неоднородных условиях (2)–(3) с помощью конечных интегральных преобразований, решение однородного уравнения (1) при однородном условии (3) находим методом разделения переменных

$$C(r, \varphi, z, t) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot Z(z)\cdot T(t), \qquad (4)$$

где $T(t) = A_1 e^{-(D\beta^2+\lambda)t}$, $Z(z) = A_2 \cos\alpha z + A_3 \sin\alpha z$,

$\alpha = \mu^2 - \beta^2$, $\Phi(\varphi) = A_4 \cos\nu\varphi + A_5 \sin\nu\varphi$,

$$R(r) = A_6 I_\nu(\beta r) + A_7 Y_\nu(\beta r),$$

A_i – постоянные интегрирования, α , β , ν –постоянные разделения, причем $\alpha^2 + \beta^2 + \nu^2 = \mu^2$, $I_\nu(\beta r)$ – функция Бесселя действительного аргумента ν –го порядка, $Y_\nu(\beta r)$ – функция Бесселя (Неймана) действительного аргумента ν –го порядка.

Для задач с цилиндрической симметрией зависимость от угла отсутствует, поэтому решения последнего уравнения выражаются через функции Бесселя нулевого порядка $R(r) = A_8 I_0(\beta r) + A_9 Y_0(\beta r)$

Если среда ограничена по координате z на отрезке $[0, \ell]$, а по радиусу r на $[0, a]$, тогда для первой краевой задачи граничные условия примут вид $c(a, z, t) = C_a(z, t)$; $c(\ell, r, t) = C_\ell(r, t)$.

Построены фундаментальные решения и конечные интегральные преобразования с ядрами в виде разложений по собственным функциям однородных задач.

УДК 5I7.9 Дудко Л.Л. (Новгород)

ДОСТАТОЧНОСТЬ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ σ-ОГРАНИЧЕННОСТИ.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. В мемуаре [I] введено и исследовано понятие спектральной ограниченности (σ-ограниченности) оператора M относительно оператора L. В частности, в [I] выделены следующие необходимые условия (L,σ)-ограниченности оператора M в случае, когда ∞ - несущественная особая точка L-резольвенты $(\mu L-M)^{-1}$ оператора M.

(А I) Длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L ограничена числом $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$.

(А 2) M-корневое пространство $\mathfrak{U}^0$ оператора L дополняемо в $\mathfrak{U}$.

(А 3) Существует подпространство $\mathfrak{U}^1=\mathfrak{U}\ominus\mathfrak{U}^0$ такое, что $\mathfrak{F}=M[\mathfrak{U}^0]\oplus L[\mathfrak{U}^1]$.

(А 4) Существует оператор $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, где $\mathfrak{F}^0=M[\mathfrak{U}^0]$, а M_0 - сужение оператора M на $\mathfrak{U}^0$.

<u>Теорема</u>. Пусть выполнены все условия (А I) - (А 4). Тогда оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ - несущественная особая точка L-резольвенты оператора M.

При доказательстве используется оператор Γ, введенный в [2].

<u>Следствие</u>. Пусть оператор L фредгольмов, тогда следующие условия эквивалентны:

(i) выполнено условие (А I);

(ii) выполнено необходимое условие теоремы.

Литература

I. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. I994. Т.49, № 4. С.47-74.

2. Свиридюк Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв.РАН, сер. матем. I993. Т.57, № 3. С.I92-207.

УДК 517.51

Дьячков А.М. (Москва)

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ФАТУ

Чтобы перенести теорему Фату о некасательном пределе интеграла Пуассона функции $f \in L(0;2\pi)$ в d-точке на случай кратного интеграла Абеля-Пуассона $P_\varepsilon(x,f)=\int_{R^N}\varphi_A\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-N}f(x-y)\,dy$, где $\varphi_A(\tau)=\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)\left[\pi(1+\tau^2)\right]^{-\frac{N+1}{2}}, N\geq 2$, нужен подходящий аналог понятия d-точки. Дифференцируемость интеграла функции f в точке $x^0\in R^N$ по стандартному базису из шаров $B(x,\tau)=\{y\in R^N \mid |y-x|<\tau\}\ni x^0$ недостаточна.

ТЕОРЕМА I. Пусть $N\geq 2$. Имеется такая функция $f\in L(R^N)$, что

$$\lim_{B(x,\tau)\ni x^0,\ \tau\to 0}\int_{|y|<1}f(x-\tau y)\,dy=0, \qquad (1)$$

но нет предела интеграла $P_\varepsilon(x,f)$ при $|x-x^0|=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to+0$.

Ослабим ограничение $B(x,\tau)\ni x^0$ в условии (I).

ТЕОРЕМА 2. Если $f\in L(R^N)$ и

$$\lim_{|x-x^0|=O(\tau),\ \tau\to+0}\int_{|y|<1}f(x-\tau y)\,dy=d\,\pi^{\frac{N+1}{2}}/\Gamma\left(\tfrac{N+1}{2}\right), \qquad (2)$$

то предел интеграла $P_\varepsilon(x,f)$ при $|x-x^0|=O(\varepsilon),\varepsilon\to+0$ равен d.

Это же верно и для интеграла $\int_{R^N}\varphi\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-N}f(x-y)\,dy$ [1], если вариация ядра $V_\tau^\infty\varphi$ ограничена и быстро убывает. Необходима также высокая гладкость ядра $\varphi(\tau)$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N\geq 2$. Существует финитное ядро $\varphi(\tau)\in Lip\,1/2$, $V_0^\infty\varphi<\infty$, и функция $f\in L(R^N)$, удовлетворяющая (2), для которых

$$\limsup_{|x-x^0|=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to+0}\int_{R^N}\varphi\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-N}f(x-y)\,dy=\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьячков А.М. Асимптотика кратных сингулярных интегралов. Канд. дисс.- М., МГУ.- 1985.- 80 с.

УДК 517.5 Дженкова О.Е. / Киев /

О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ОБЛАСТЯХ С УГЛАМИ.

Помимо классических поточечных оценок приближения многочленами функции $f=f(z)$, аналитической во внутренности области G с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывной на $\bar{G}=G \cup \Gamma$, хорошо известны также и равномерные оценки. Поточечные оценки используют модуль непрерывности от $\rho_h(z)$, где $\rho_h(z)$ - расстояние от точки $z\in\Gamma$ до $(1+h)$-той линии уровня множества G.
В известных равномерных оценках использовался модуль непрерывности /гладкости,.../ не самой функции $f=f(z)$, а функции $f(\psi(w))$, где $\psi(w)$ - конформное отображение внешности единичного круга на внешность области G. Другими словами, ситуация подобна случаю равномерного приближения на отрезке, когда используется k-тый модуль непрерывности функции $\tilde{f}=f(\cos t)$. Такая характеристика имеет недостатки. Например, если $f(x)$ - алгебраический многочлен степени $\leq k-1$, то, вообще говоря, $\omega_k(\tilde{f}, h)\neq 0$. Недавно З.Дитзиан и Б.Тотик ввели новые гладкостные характеристики на отрезке, которые интенсивно применяются многими авторами. В нашей работе построен аналог этих характеристик для множества $\bar{G}$, а именно:

Возьмем $k\in N$, $h>0$, точку $\tilde{z}\in\Gamma$. Обозначим $U[\tilde{z},\rho]$- круг радиуса $\rho_h(\tilde{z})$ с центром в точке $\tilde{z}$, $T_0(\Gamma,\tilde{z},k,\rho)$ - множество всех наборов $Z=\{z_0,z_1,\dots,z_k\}$ из $(k+1)$ точек z_i, каждый из которых удовлетворяет условиям:

$$1/\ z_i\in\Gamma\cap U[\tilde{z},\rho],\ i=\overline{0,k};\qquad 2/\ |z_i-z_j|\geq 2^{-k}\rho_h(\tilde{z}),\ i\neq j,\ i,j=\overline{0,k}.$$

Пусть $\mathcal{L}:=\mathcal{L}(z,f):=\mathcal{L}(z,f;z_1,\dots,z_k)$- многочлен Лагранжа, который интерполирует функцию f в точках $z_1,\dots,z_k$.
Определение. Модулем непрерывности порядка k функции $f=f(z)$ называется функция

$$\overline{\omega}_k(f;t):=\sup_{0<h<t}\ \sup_{\tilde{z}\in\Gamma}\ \sup_{Z\in T_0(\Gamma,\tilde{z},k,\rho)}|f(z_0)-\mathcal{L}(z_0,f;z_1,\dots,z_k)|.$$

В терминах $\overline{\omega}_k(f;t)$ доказана прямая теорема

$$E_n(f)_{C(\bar{G})}\leq c\,\overline{\omega}_k(f;\tfrac{1}{n}),\ n=k-1,k,\dots.$$

и соответствующая обратная теорема, которые в совокупности дают конструктивную характеристику, скажем, функций f таких, для которых $E_n(f)_{C(\bar{G})}=O(\frac{1}{n^\alpha})$, $\alpha=const>0$.

УДК 517.925.42 Евстафьева В.В., Камачкин А.М. /С.-Петербург/

Динамика одного класса неавтономных гистерезисных систем.

Рассматривается динамическое поведение систем вида:

$$/1/ \begin{cases} \dot{H} = AH + BF(\sigma) + Kf(t), \\ \sigma = (C, H), \end{cases}$$

где A,B – матрицы $/n \times n/$ постоянных вещественных коэффициентов, K,C – постоянные n – мерные вектора, H – n–мерныйвектор, $F(\sigma)$–нелинейная гистерезисная функция вида: $F(\sigma) = m_1, \sigma > \ell_1$; $F(\sigma) = m_2, \sigma < \ell_2$; $m_1 < m_2$, $\ell_1 < \ell_2$; $f(t)$ –внешнее бигармоническое воздействие

$$f(t) = a_0/2 + f_1 \sin(\pi t/T + \varphi_1) + f_2 \sin(2\pi t/T + \varphi_2).$$

Задача исследования состоит в определении областей существованияпериодических решений динамической системы /1/ в пространстве исходных параметров.

С помощью канонического преобразования система может быть расщеплена на подсистемы 2-го порядка. Исходя из предположения о существовании хотя бы одного периодического решения системы/1/ и используя ее общее решение, для каждой из таких подсистем можно определить 2Т-периодическую функцию $\sigma = \sigma(t_0, m_i, \ell_i, t_1)$, $i = 1, 2$, с помощью которой выписывается система трансцендентных уравнений вида:

$$/2/ \begin{cases} \ell_2 = \sigma(0, m_1, \ell_1, t_1), \\ \ell_1 = \sigma(t_1, m_2, \ell_2, 2T). \end{cases}$$

Система /2/ используется для определения времен перехода $t_1, 2T-t_1$ изображающей точки с одной поверхности переключения на другую, а также для построения биффуркационных поверхностей, которые разбивают пространство исходных параметров на области качественно различного динамического поведения системы /1/. Система /2/ позволяет получить достаточные условия на параметры системы /1/ существования периодических решений.

УДК 517.51

Ермаков А.И.

СКОРОСТЬ ХАУСДОРФОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ЕЁ РАЗРЫВА

Пусть $\mathfrak{I}=[-1,1]$, $H_\alpha E_n(f,\mathfrak{I})$ - наименьшее уклонение функции $f(x)$, $x\in\mathfrak{I}$, от алгебраических полиномов степени $\le n$, $H_\alpha E_n(f)$ - наименьшее уклонение 2π - периодической функции f от тригонометрических полиномов порядка $\le n$ в α - метрике Хаусдорфа, $\mathfrak{D}(f)$ - множество точек разрыва функции f. Положим $C_\alpha(f)=\varliminf n H_\alpha E_n(f)$, $C_\alpha(f,\mathfrak{I})=\varliminf n H_\alpha E_n(f,\mathfrak{I})$. Зависимость свойств функций от величин $C_\alpha(f)$ и $C_\alpha(f,\mathfrak{I})$ была обнаружена и исследована Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым. В частности, ими доказано, что если $C_\alpha(f)<\pi/\alpha$, то f непрерывна почти всюду, а если $C_\alpha(f)<\pi/2\alpha$, то f непрерывна всюду. Аналогичные результаты имеют место и в алгебраическом случае: при $0<c=C_\alpha(f,\mathfrak{I})<\pi/\alpha$ функция f непрерывна почти всюду на отрезке $[-a',a']$, $a'=a'(c)=\sqrt{1-\alpha^2c^2\pi^{-2}}$, а при $c<\pi/2\alpha$ также ещё непрерывна всюду на интервале $(-a,a)$, $a=a(c)=\sqrt{1-4\alpha^2c^2\pi^{-2}}<a'$ и при этом f может быть разрывной в точках $\pm a$. Пусть $a(c)$ равно 0 при $c\ge\pi/2\alpha$. Если E - множество в метрическом пространстве (X,ρ), $x\in X$, $z(\varepsilon,x,E)$ - точная верхняя грань радиусов непересекающихся с E шаров из ε - окрестности точки x, то $z_0(E)\overset{\mathrm{df}}{=}\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\inf_f z(\varepsilon,x,E)/\varepsilon$, $R(E)\overset{\mathrm{df}}{=}\sup_{\cup E_i=E}\inf_i z_0(E_i)$, где $\sup$ берётся по всем счётным разбиениям множества E. Справедливы

ТЕОРЕМА 1. Пусть f - ограниченная вообще говоря, многозначная функция, заданная на отрезке $\mathfrak{I}$, $0<c=C_\alpha(f,\mathfrak{I})<\pi/\alpha$. Тогда при любом $b\in(a(c),a'(c)]$ имеет место оценка

$$R\left(\mathfrak{D}(f)\cap[-b,b]\right)\ge\left(2\pi\sqrt{1-b^2}-2\alpha C_\alpha(f,\mathfrak{I})\right)/\left(3\pi\sqrt{1-b^2}-2\alpha C_\alpha(f,\mathfrak{I})\right)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\alpha>0$, любого c_0, удовлетворяющего неравенству $0<c_0<\pi/\alpha$, и любого $b\in(a(c_0),a'(c_0)]$ существует заданная на отрезке $\mathfrak{I}$ функция g, для которой $C_\alpha(g,\mathfrak{I})=c_0$ и

$$R\left(\mathfrak{D}(g)\cap[-b,b]\right)=\left(2\pi\sqrt{1-b^2}-2\alpha c_0\right)/\left(3\pi\sqrt{1-b^2}-2\alpha c_0\right)$$

А.П. Петуховым получена оценка снизу коэффициента σ - равнопористости $R(\mathfrak{D}(f))$ множества $\mathfrak{D}(f)$ через $C_\alpha(f)$.

УДК 519.3 Жбанов А.И., Кожелев В.С., Куликов И.В. (Саратов)

ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Решение двумерной задачи упругости в областях со сложной геометрией и различными свойствами актуально при оценке напряженно-деформированного состояния конструкций и определения их долговечности и износостойкости.

Представляемая программа разработана для вычислительных машин типа IBM PC и реализует МКЭ для решения задач упругости в двумерных областях с различными свойствами и произвольной геометрией. На основе разработанной ранее в НИИМФ СГУ библиотеки программ [1,2], реализующей основные этапы решения задач МКЭ (триангуляция области, формирование системы разрешающих уравнений и ее решение), а также процедуры ввода-вывода и графической обработки данных, была разработана программа расчета напряженно-деформированного состояния конструкций.

В программе используется плоско-напряженная модель состояния деформированного тела и последовательно вычисляются перемещения, напряжения и деформации с поэтапным графическим отображением полученных решений.

Программа оттестирована на известных из литературы [3] примерах. Программа проста и удобна в обращении.

Минимальная конфигурация компьютера, требуемая программой: ОЗУ не менее 1Mb, EGA графический адаптер, процессор 286 и выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейвас И.М., Жбанов А.И., Кожелев В.С., Шевцов В.Н. Универсальная программа решения двумерной стационарной задачи теплопроводности для узлов электронных приборов // Электронная техника, сер. Электроника СВЧ. 1980. Вып.12. С. 61.

2. Блейвас И.М., Жбанов А.И., Кожелев В.С. Универсальная программа решения линейной двумерной задачи стационарной теплопроводности с внутренними источниками тепла методом конечных элементов // Электронная техника, сер. Электроника СВЧ. 1984. Вып.6. С.68.

3. Шмельтер Я., Дацко М., Доброчинский С., Вечорек М. Метод конечных элементов в статике сооружений.-М.:Стройиздат. 1986.220 с

УДК 515.142.25:514.746.326 Жогин И.Л. (Кемерово)

k-АДНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ В КЛАССИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ 'КИРАЛЬНОГО' SO-ПОЛЯ

1. Пусть $\{A; B_1, \ldots, B_{k-1}\}$ – пунктированная k-ада [1] ($B_i \subset A$, base point $a_0 \in B_i$), а $\Omega(A, B)$ – множество путей в A с началом в B и концом в $a_0 \in B \subset A$. *Определение* 1 (k+1)-адной гомотопической группы (индукция по k; $r \geq k$):

$$\pi_r(A; B_1, \ldots, B_k) = \pi_{r-1}(\Omega(A; B_1); \Omega(B_2, B_2 \cap B_1), \ldots, \Omega(B_k, B_k \cap B_1)),$$

индукция дает (точную) *гомотопическую последовательность* (k+1)*-ады*:

$$\to \pi_r(A; B_2, \ldots, B_k) \to \pi_r(A; B_1, \ldots, B_k) \to \pi_{r-1}(B_1; B_2 \cap B_1, \ldots, B_k \cap B_1) \to \cdots.$$

Начало индукции – относительная и триадная гомотопические группы [1]. Эквивалентное, но явно симметричное (при $B_i \leftrightarrow B_j$) *Определение* 2:

$\pi_{k+l}(A; B_1, \ldots, B_k) = \pi_0(C_k^l)$, где C_k^l – множество отображений ((k+1)-адных сфероидов) следующего вида ($I_{(i)}^{k-1}$ – i-я грань куба I^k, примыкающая к вершине z_1, $I_{(*)}^{k-1}$ – остальные грани, S^{l-1} – граница шара D^l):

$$D^l \times I^k \to A, \quad D^l \times I_{(i)}^{k-1} \to B_i, \quad S^{l-1} \times I^k, D^l \times I_{(*)}^{k-1} \to a_0.$$

2. Обозначим $\Pi(G) = \pi_0(C_G)$, где $G \subset O_m$ – группа симметрии, C_G – множество G-симметричных (локализованных) конфигураций SO-поля $\sigma(x)$:

$$\sigma: \ \mathbb{R}^m \to SO_m, \quad \sigma(\infty) = 1^m = a_0; \quad \sigma(gx) = g\sigma(x)g^{-1} \ \ \forall g \in G.$$

К группам $\Pi(G)$ сводится классификация G-симметричных решений лево-право-ковариантных (левые глобальные вращения $O(1, m)$, правые – диффеоморфизмы координат) уравнений Абсолютного Параллелизма [2] (деформировав на поверхности Коши $\mathbb{R}^m$ (m=n−1) поле n-реперов $h^a{}_\mu(x)$, чтоб метрика стала тривиальной, убрав бусты, получим поле $\sigma(x) \in SO_m$ [2b]).

3. Простейшей дискретной группе G=P_1 ($x_m \mapsto -x_m$) отвечает 'диаграмма' (стационарные точки Gx=x отображаются в подмн-во $B \subset SO_m$ матриц, коммутирующих с G): $\mathbb{R}_+^m (x_m \geq 0) \to SO_m$, $\mathbb{R}^{m-1} (x_m = 0) \to SO_{m-1} \times 1$; т.е. $\Pi(P_1) = \pi_m(SO_m; SO_{m-1}) (= \pi_m(S^{m-1}))$. Также для непрерывной симметрии O_l: $\Pi(O_l) = \pi_{m-l+1}(SO_{m-l+1}; SO_{m-l})$; для $l \leq 3$ нужно различать O_l и SO_l. 'Составные' симметрии приводят к k-адам, например ($2k \leq m$):

$$\Pi(SO_2^{(1)} \times \cdots \times SO_2^{(k)}) = \pi_{m-k}(SO_m; B_1, \ldots, B_k), \text{ где } B_i = SO_{m-2}^{(i)} \times SO_2^{(i)} -$$

подмн-во вращений, коммутирующих с $SO_2^{(i)}$ (с поворотом осей $2i-1, 2i$).

4. Морфизмы $\Pi(G_2) \xrightarrow{i^*} \Pi(G_1)$ для вложений $G_1 \xrightarrow{i} G_2$ при $m \leq 4$ (особый интерес – m=4) определяются из анализа G-симметричных оснащенных многообразий. Выделяются 'крайние' (или *зарядообразующие*) симметрии $\tilde{G}$:

$\Pi(G) \simeq \Pi(\tilde{G}) \Rightarrow G \subseteq \tilde{G}$; с $\Pi(\tilde{G}) \neq 0$ сопоставляется топологический заряд (если $\Pi(\tilde{G}) \simeq \Pi_0 = \Pi(\{1^m\}) = \pi_m(SO_m)$) или квазизаряд.

[1] *Постников М.М.* Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. — М.: Наука, 1984.

[2] *Жогин И.Л.*//Изв. вузов. Физика. – 1992.– N7.– С.73; 1990.– N7.– С.15.

УДК 539.375

ЖУЧКОВА В.В. (Воронеж)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИЛОВОГО И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается распространение трещины в структурно-неоднородном материале в условиях продольного сдвига. В этом случае уравнение равновесия и закон Гука имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}; \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\tau_{xz} \cos(n\hat{}x) + \tau_{yz} \cos(n\hat{}y) = f \tag{2}$$

Критерий разрушения Гриффита в интегральной форме приведен в работе /1/ и для случая продольного сдвига имеет вид:

$$\frac{\delta W}{\delta \ell} = \frac{z}{2} \int_0^{\pi} \left(W_0 \cos\theta - \tau_{xz} \frac{\partial W}{\partial x} \cos\theta - \tau_{yz} \frac{\partial W}{\partial y} \sin\theta \right) d\theta = \gamma_0 \tag{3}$$

Поле структурных модулей однонаправленных двухфазных композитов хорошо описывается с помощью случайной функции $\varkappa(x,y)$ одного из элементов структуры по формуле

$$\mu = \mu_1 \varkappa + \mu_2 (1 - \varkappa)$$

где μ_1, μ_2 модули сдвига волокон и матрицы, соответственно. Следуя работе /2/ находится эффективный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) $K_{\overline{III}}$ в окрестности вершины трещины, расположенной вдоль оси OX.

В результате вычислений получается, что в окрестностях вершины трещины средние значения напряжений имеют вид:

$$\langle \tau_{xz} \rangle = \frac{\sin \theta/2}{\sqrt{2z}} K'_{\overline{III}}; \quad \langle \tau_{yz} \rangle = \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{2z}} K'_{\overline{III}}.$$

После ряда преобразований средние значения приращения упругой энергии (3) находятся с помощью эффективного КИН $K'_{\overline{III}}$

Таким образом, критерий разрушения Гриффита-Ирвина для трещины продольного сдвига двухкомпонентного композитного материала записывается в виде

$$\frac{\delta W}{\delta \ell} = \frac{\pi}{2(\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\langle \varkappa \rangle)} \left[K_{\overline{III}}^2 + 2K_{\overline{III}} \cdot K_{\overline{III}}^* + K_{\overline{III}}^* \cdot K_{\overline{III}}^* \right] = \gamma_0$$

где $K_{\overline{III}}^*$ - добавка, обусловленная структурной неоднородностью материала.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, отличается от полного квадрата наличием корреляционной связи между пульсациями упругих постоянных в различных точках тела.

Литература

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения Наука: М.,1976г.
2. Бортникова В.В.,Ромалис Н.Б. Распространение трещины сдвига в стохастически неоднородном теле. ЖПМТФ, 1976 N1, с.145-149.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

УДК 517.5

Н.Ш.Загиров (Махачкала)

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ПОДСИСТЕМАМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ

Пусть $\mathcal{U}(n,q,j)=\{1,t,\dots,t^{j-1},t^{j+q},\dots,t^{n+q-1}\}$, $n\geq 2$, $1\leq j\leq n-1$, $q\geq 0$, $\mathcal{P}_n(q,j)$ – множество полиномов по системе $\mathcal{U}(n,q,j)$; $\Delta=[a,b]$. Пусть $\mathcal{D}(t_1,\dots,t_n)$ – определитель типа Вандермонда для системы $\mathcal{U}(n,q,j)$ по точкам $t_1<\dots<t_n$. Если $t_1<\dots<t_{n+1}$, то

$$\mathcal{M}_i=\mathcal{D}(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{n+1}),\quad i=1,\dots,n+1.$$

Считаем, как обычно, что

$$E_n(f)=E_n(f;q,j)=\inf\{\|p-f\|_C : p\in\mathcal{P}_n(q,j)\};$$

$p^0\in\mathcal{P}_n(q,j)$ – полином наилучшего приближения f, если $E_n(f;q,j)=\|p^0-f\|_C$.

ТЕОРЕМА 1. Если q – четное число, то система $\mathcal{U}(n,q,j)$ является чебышевской.

ТЕОРЕМА 2. Пусть q – нечетное число, $f\in C_\Delta$, $E_n(f)>0$. Для того чтобы p^0 был полиномом наилучшего приближения f необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

$(y1)$ существуют точки $t_1<\dots<t_n$ отрезка Δ, обладающие свойствами:

$$\mathcal{D}(t_1,\dots,t_n)=0;\quad p^0(t_i)-f(t_i)=(-1)^i\varepsilon\|p^0-f\|_C,\ i=1,\dots,n,\ \varepsilon=\pm 1;$$

$(y2)$ существуют точки $t_1<\dots<t_{n+1}$ отрезка Δ, обладающие свойствами:

$$\mathcal{M}_i\neq 0;\ p^0(t_i)-f(t_i)=(-1)^i\varepsilon\|p^0-f\|_C\cdot\operatorname{sign}\mathcal{M}_i,\ i=1,\dots,n+1,\ \varepsilon=\pm 1$$

ТЕОРЕМА 3. Если $p^0\in\mathcal{P}_n(q,j)$ – полином наилучшего приближения f, то необходимо существуют точки $t_1<\dots<t_n$ отрезка Δ, такие что

$$p^0(t_i)-f(t_i)=(-1)^i\varepsilon\cdot E_n(f),\ i=1,\dots,n,\ \varepsilon=\pm 1.$$

УДК 517.991 Задорожний В.Г., Алперина Т.В. (Воронеж)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВАРИАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть X - банахово пространство функций, определенных на отрезке $T\subset\mathbb{R}$. Если дифференциал Фреше функционала $y: X\to\mathbb{R}$ является интегральным оператором (на отрезке T), то ядро этого оператора является вариационной (функциональной) производной и обозначается $\delta y(x)/\delta x(t)$.

При изучении стохастических дифференциальных уравнений встречается задача Коши

$$\frac{\partial y(t,x,v)}{\partial t}=a\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2 y(t,x,v)}{\partial x^2}+b(t,x,v)$$

$$y(t_0,x,v)=\varphi(x,v).$$

Здесь $t\in T=[t_0,t_1]$, $x\in\mathbb{R}$, $b: T\times\mathbb{R}\times L_1(T)\to\mathbb{R}$, y - искомое отображение, t_0, t_1, a и $\varphi:\mathbb{R}\times L_1(T)\to\mathbb{R}$ заданы.

Теорема. Пусть $\varphi:\mathbb{R}\times L_1(T)\to\mathbb{R}$ и $b: T\times\mathbb{R}\times L_1(T)\to\mathbb{R}$ имеют вариационные производные по переменной v, тогда обобщенное решение задачи имеет вид

$$y(t,x,v)=F_\xi^{-1}[F_x[\varphi(x,v-a\xi^2\chi[t_0,t])](\xi)](x)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}[F_x[b(\tau,x,v-a\xi^2\chi[\tau,t])](\xi)](x)\,d\tau,$$

где F_x - преобразование Фурье по переменной x, F_ξ^{-1} - обратное преобразование Фурье, $\chi[t_0,t]$ обозначает функцию переменной s, равную $sign(s-t_0)$ при s лежащем в отрезке с концами t_0, t и равной нулю в противном случае. Отметим, что t может быть меньше t_0.

ON A CERTAIN FORMULA OF INDEX OF A ZERO POINT FOR T^r-EQUIVARIANT Φ_0C^1BH-MAPS

V.G.Zvyagin (Voronezh)

Let E and F be Banach spaces with the origins (zero points) 0_E and 0_F, respectively. Consider maps of the form $f+k\colon E \to F$ where f is a Fredholm C^1-smooth map with zero index and k is a completely continuous one. The maps of such a form are called Φ_0C^1BH-maps.

We suppose that 0_E is an isolated solution to the equation $f(x)+k(x)=0_F$ (in this case we say that 0_E is an isolated zero of the map $f+k$). Then the topological index of zero for $f+k$ is well-defined and is denoted by $\mathrm{ind}(f+k,0_E)$. Besides, we suppose that some strongly continuous representations of the torus T^r are given, those representations are denoted by T_1 and T_2. Let f and k are equivariant with respect to the above representations, i.e. the equalities $f\circ T_1(\theta)=T_2(\theta)\circ f$ and $k\circ T_1(\theta)=T_2(\theta)\circ k$ hold for all $\theta \in T^r$. Denote by $\mathrm{Fix}T_i$, $i=1,2$, the set of fixed points of the representation T_i. Then the restriction $G=(f+k)_{|\mathrm{Fix}T_1}\colon \mathrm{Fix}T_1 \to \mathrm{Fix}T_2$ and the index $\mathrm{ind}(G,0_E)$ of zero for this restriction are well-posed.

Theorem. Assume that the operator $f'(0_E)_{|\mathrm{Fix}T_1}\colon \mathrm{Fix}T_1 \to \mathrm{Fix}T_2$ is a Fredholm map with zero index and that 0_E is an isolated zero for $f+k$. Then the following formula

$$\mathrm{ind}(f+k,\ 0_E)=\prod_{j=1}^{q}\frac{(\omega,m^j)}{(\omega,n^j)}\ \mathrm{ind}(G,\ 0_E)$$

holds, where $n^j=(n^j_1,\dots,n^j_r)$, $j=1,\dots,q$, are invariants of the restriction of T_1 on $\mathrm{Ker}\, f'(0_E)$, $m^j=(m^j_1,\dots,m^j_r)$, $j=1,\dots,q$, are invariants of the factor representation $\hat{T}_2$ on the factor space $\mathrm{Coker} f'(0_E)$, $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_r)$ is a certain integer vector and the symbol (ω,ξ) denotes the scalar product of the vectors ω and ξ in $\mathbf{R}^r$.

Some applications of this formula to the problem of bifurcation of solutions to nonlinear equations are described.

УДК 51..7 Зубков А.Н. /г.Таганрог /

О НЕЗАВИСИМОСТИ ИНВАРИАНТОВ НОРМАЛЬНОГО ОСНАЩЕНИЯ ПОЛОСЫ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ F^m В ПРОСТРАНСТВЕ $V^n(K)$, $n>m$.

Пространство $V^n(K)$ постоянной кривизны $K=e r^2$, где $e=\pm 1$, $r>0$, рассматривается в виде гиперсферы радиуса $e r^2$ в плоском пространстве R^{n+1}. Пусть в $V^n(K)$ дано подмногообразие F^m класса C^ℓ, $\ell \geq m+1$. Оно является базой своего касательного $T(F^m)$ и нормального $N^\perp(F^m)$ векторного расслоения, слоями которых являются соответственно касательное пространство $T_x F^m$ и нормальное векторное пространство $N_x^\perp F^m$, где $x\in F^m$, а T_xF^m, $N_x^\perp F^m \subset T_x V^n \subset R^{n+1}$. Расслоение реперов $P(V^n)$ после его ограничения на F^m приводится к сумме Уитни $P(F^m)\oplus P^\perp(F^m)$, где $P(F^m)$- расслоение реперов на T_xF^m, а $P^\perp(F^m)$ -расслоение реперов в $N_x^\perp F^m$. В $P(F^m)$ и $P^\perp(F^m)$ определяются связности ∇ и $\nabla^\perp$.

Кривую $\mathscr{L}\subset F^m$ вместе с $N_x^\perp F^m$, $x\in\mathscr{L}$, назовем поверхностной полосой на F^m. Она определяет однопараметрическое семейство реперов в $P(F^m)\oplus P^\perp(F^m)$. Деривационные уравнения такого репера, который будем называть формулами Френе поверхностной полосы на F^m, приводится к виду:

$$\bar R'_s \equiv \bar x'_s = \bar t_1,\quad \bar t'_{1s} = -\underset{(1)}{k}{}_g \bar t_2 + k_1^\alpha \bar e_\alpha - \bar x e r^{-2},$$

$$\bar t'_{js} = -\underset{(j-1)}{k}{}_g \bar t_{j-1} + \underset{(j)}{k}{}_g \bar t_{j+1} + k_j^\alpha \bar e_\alpha,\quad j=\overline{2,m-1},$$

$$\bar t'_{ms} = -\underset{(m-1)}{k}{}_g \bar t_{m-1} + k^\alpha_m \bar e_\alpha,$$

$$\bar e'_b = -\sum_{i=1}^m k_i^b \bar t_i + \tilde\omega^\alpha_b \bar e_\alpha,\quad \alpha, b=\overline{m+1,n},$$

где S -натуральный параметр вдоль $\mathscr{L}$, $\bar x^2 = e r^2$, $\bar t_i$ -вектор i- ой единичной нормали кривой $\mathscr{L}$ в связности ∇ на F^m, а $\underset{(i)}{k}{}_g$, k_i^b и $\tilde\omega^\alpha_b$ являются дифференциальными инвариантами полосы относительного заданного ее оснащения нормалями $\bar e_\alpha \subset N_x^\perp F^m$, $(\bar e_\alpha \bar e_\lambda)=\delta_{\alpha\lambda}$, и имеют вполне определенный геометрический смысл, при этом $\underset{(i)}{k}{}_g$ не зависят от выбора оснащения $\{\bar e_\alpha\}_{\alpha=m+1}^n$ вдоль $\mathscr{L}$. Также не зависят от выбора оснщения полосы и величины $k_{ij} = \sum_{b=m+1}^n k_i^b k_j^b$, $i,j=\overline{1,m}$.

ТЕОРЕМА. Система величин k_{ij}, $i,j=\overline{1,m}$, является полной системой для инвариантов нормального оснащения полосы на подмногообразии F^m в $V^n(K)$, $n>m$, относительно ее нормальных кривизн k_i^b, $i=\overline{1,m}$; $b=\overline{m+1,n}$. При этом, если $m\leq n-m$, то она содержит точно $\frac12 m(m+1)$ функционально независимых величин; если же $m>n-m$, то это число равно $\frac12 m(m+1) - C_m^{n-m+1}$.

УДК 517 941 Зубова С. П. (Воронеж)

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть A замкнутый линейный фредгольмовский оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с плотной в E_1 областью определения, $\dim \ker A = \dim \operatorname{coker} A = 1$; $B(t), C(t) \in L(E_1, E_2, [0,\infty)), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Для уравнения

$$\varepsilon C(t)\frac{dx}{dt} = [A - \varepsilon B(t)]x(t,\varepsilon)$$

строится линейное многообразие $E_1^* \subset E_1$ такое, что задача Коши с начальными значениями из этого многообразия однозначно разрешима.

Доказывается, что соответствующие решения лежат в E_1^* при всех $t > 0$. Строится решение задачи Коши в E_1^*. Находятся асимптотические разложения решения по целым и дробным степеням параметра ε. Исследуется поведение решения задачи Коши при стремлении параметра к нулю. Находятся условия на коэффициенты уравнения, при выполнении которых решение является голоморфной в окрестности $\varepsilon = 0$ функцией при любых $t > 0$.

В случае $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, A – Жорданов оператор с нулевым собственным числом, $C(t) = \overset{\circ}{I}$ строится решение задачи Коши для любых начальных значений из $\mathbb{R}^n$, строятся асимптотические разложения решения по степеням ε. Устанавливается, что явление погранслоя для такого уравнения наблюдаться не может.

Зубова С.П. Решение задачи Коши для одного класса сингулярно возмущенных уравнений. В кн: Алгебраические структуры и теория сингулярных возмущений. Москва. 1993. С. 69-70.

УДК 517.9 Зуев М.А. (Пермь)

К ВОПРОСУ О НАБЛЮДАЕМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ассматривается система

$$(\mathcal{L}x)(t) = 0 \tag{1}$$

$$Hx(t) = y(t)\ ,\ t \in [0;b] \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{L} : D \longrightarrow L$ - линейный оператор, H - постоянная $m \times n$ матрица, уравнение $(\mathcal{L}x)(t) = 0$ однозначно разрешимо при любых начальных условиях $x(0)$, и его решение имеет представление $x(t) = X(t)x(0)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (1). [1].

Введем множество $\mathcal{Y} = \{y \in D^m : y(t) = HX(t)q,\ q \in R^n\}$.

Определение. *Система (1)-(2) называется наблюдаемой, если для любого $y \in \mathcal{Y}$ решение этой системы единственно.*

Теорема 1. *Система (1)-(2) наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\bigcap\limits_{t \in [0;b]} \operatorname{Ker} HX(t) = \{0\}$.

Пусть $(\mathcal{L}x)(t) \equiv x'(t) - A_0 x(t) - A_1 x(t-h)$, где $h = const > 0$, A_0, A_1 - постоянные матрицы, причем $A_0 A_1 = A_1 A_0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Система (1)-(2) наблюдаема на отрезке [0;b] тогда и только тогда, когда* $\bigcap\limits_{i=0}^{n-1} \bigcap\limits_{j=0}^{r} \operatorname{Ker} HA_0^i A_1^j = \{0\}$, *где*

$r = \min\{(n-1);(k+1)\}$, $k = \left[\dfrac{b}{h}\right]$ - *целая часть числа* $\dfrac{b}{h}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.34с.

УДК 539.4

Иванищева О.И., Трофимов В.Г., Прибытков Ю.Н.

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ РАЗРУШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Рассматривается задача о влиянии стохастической анизотропии материала с трещинами на разрушение пластины в тепловом потоке. Модель структурной анизотропии аналогична рассмотренной в [1] и обусловлена технологической вытяжкой. В исходном состоянии материал ослаблен равномерно рассеянными по объему случайными не взаимодействующими трещинами.

Решается задача о вероятности разрушения пластины в тепловом потоке, не превышающем заданного значения. Это приводит к необходимости вычисления интегралов по сложным областям, границы которых в явном виде не определяются.

В работе предлагается численный метод, основанный на статистическом моделировании. Он позволяет значительно расширить рассмотрение круга задач разрушения стохастически неоднородных тел. Показана достоверность полученных оценок. Предлагаемый алгоритм расчетов отличается простотой и основан на методах моделирования случайных величин с заданным законом распределения [2]. Он позволяет устанавливать зависимость статистических характеристик параметров разрушения от характеристик структурной неоднородности и анизотропии.

Литература.

1. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. Киев, Наукова думка, 1980.

2. Вероятностные методы в вычислительной технике./ Под ред. Лебедева А.Н., Чернявского Е.А./, М.-Высшая школа, 1986.

УДК 531.36 Иванов А.П. (Москва)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОСВОБОЖДАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ.

Расматриваются механические системы с координатами (q_1, q_2) и идеальной освобождающей связью $q_1 \geq 0$. Существует два основных типа движений: 1) связь напряжена, $q_1 \equiv 0$, а ее реакция R положительна - система имеет одну степень свободы, отвечающую координате q_2; 2) связь ослаблена, $q_1 > 0$, $R \equiv 0$ - система имеет две степени свободы. Переход от первого типа ко второму является следствием исчезновения реакции и, как правило, происходит плавно. Напротив, переход к опорной фазе связан с ударами, сопровождающимися нежелательными для прикладных задач эффектами: потерей энергии, перегрузками, вибрацией и т.п. Случай безударного напряжения связи возможен лишь как исключительный, но он то и представляет наибольший практический интерес.

Получены условия существования периодических безударных двухфазных движений в консервативной системе и показано, что для этих движений в фазовом пространстве имеются как области отталкивания, так и области притяжения. Существование последних обусловлено дифференцируемостью энергетичекой кривой отображения Пуанкаре в окрестности периодических решений. Данные области заполнены разрывными траекториями, асимптотическими к периодическим безударным движениям. Эти траектории характеризуются присутствием двух основных типов движения, а также переходного бусконечноударного процесса типа "дребезга".

Исследованы асимптотические движения обсуждаемого типа в задаче о связке двух тел на круговой орбите и в динамике двухмассовых прыгонов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-013-17228.

УДК 517.5

Иванов В.И. (Тула)

КОНСТАНТЫ ДЖЕКСОНА И КОНСТАНТЫ ЮНГА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Пусть G - метризуемая компактная абелева группа, ν - нормированная мера Хаара, $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ - счетная система характеров группы G, $\varphi_0=1$; $E(f,F_n,G)_p$ - величина наилучшего приближения функции f в пространстве $L_p(G)$, $1\le p<\infty$ n-мерным подпространством $F_n\subset L_p(G)$ $(E_n(f,G)_p=E(f,\{\varphi_i\}_{i=0}^{n-1},G)_p)$; $V\subset G$ - окрестность нуля, $\omega(V,f,G)_p=\sup(\|f(x+t)-f(x)\|_p \,|\, t\in V)$ - модуль непрерывности функции f; $r(M,G)_p$ - чебышевский радиус ограниченного в $L_p(G)$ множества M, $d(M,G)_p$ - его диаметр.

Для пары пространств $(L_p(G),L_q(G))$, $1\le p\le q<\infty$ определим четыре величины:

$$K_{pq}(V,n,G)=\sup_{f\in L_q(G)}\frac{E_n(f,G)_p}{\omega(V,f,G)_q}$$ - константу Джексона,

$$d_{pq}(V,n,G)=\inf_{F_n}\sup_{f\in L_q(G)}\frac{E(f,F_n,G)_p}{\omega(V,f,G)_q}$$ - наилучшую константу Джексона,

$$J(L_p(G),L_q(G))=\sup_{M\subset L_p(G)}\frac{r(M,G)_p}{d(M,G)_q}$$ - константу Юнга,

$$\varkappa_{pq}(G)=\sup_{f\in L_q(G)}\frac{E_1(f,G)_p}{\left[\iint\limits_{GG}|f(x)-f(y)|^q\,d\nu d\nu\right]^{1/q}}.$$

В лекции будет идти речь о связи этих величин и некоторых случаях их точного вычисления. Основное внимание будет уделено n-мерному тору и нульмерным группам.

Иванов Л.А. (Воронеж)

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Рассматривается уравнение упругих волн

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{a_1^2}\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{a_2^2}\Delta\right)u=0,$$

где $u=u(t,x)$, $x\in R^n$, Δ - Лапласиан в R^n, $a_1>a_2$.
К нему присоединяются модельные начальные условия Коши

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi(x).$$

Теорема I. Пусть $\varphi\in L_\infty(R^n)$, $\gamma>\left[\frac{n}{2}\right]+1$, тогда рост средних Рисса от обобщенного решения $u(t,x)$ порядка γ:

$$\frac{\gamma}{t^\gamma}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}u(\tau,x)\,d\tau\,,\quad t\to\infty,$$

при стремлении к нулю шарового среднего от начальной функции не превышает t^2.

Теорема 2. Для того, чтобы имела место стабилизация решения задачи, вида

$$\frac{2(a_1^2-a_2^2)}{a_1^2a_2^2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{u(t,x)}{t^2}\to A(x),\ t\to\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы начальная функция удовлетворяла условию

$$M\left(x;\frac{t(a_1-a_2)}{2a_1a_2},\frac{t(a_1+a_2)}{2a_1a_2}\right)\to A(x),\ t\to\infty,$$

где $M(x;\lambda,\mu)$ итетированное сферическое среднее от начальной функции.

УДК 517.51 ИГНАТЬЕВА Н.У. (Москва).

О ПРИБЛИЖЕНИИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ.

Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ есть функция типа модуля гладкости порядка σ ($\sigma \geqslant 0$) и писать $\varphi(t) \in MH(\sigma)$, если она обладает следующими свойствами:

1). $\varphi(t)$ непрерывна и неотрицательна на $(0,2]$,

2). $\varphi(t_1) \leq C_1 \varphi(t_2)$ для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2$

3). существует число $\sigma \geqslant 0$, такое, что для $0 < t_1 \leq t_2 \leq \sigma$ выполняется неравенство:

$$\frac{\varphi(t_2)}{t_2^{\sigma}} \leq C_2 \frac{\varphi(t_1)}{t_1^{\sigma}},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от t_1 и t_2.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА

Пусть даны функции $\varphi_i(x) \in MH(\sigma_i)$, $i=1,2,3,4,5$.

r - натуральное число, M - данное число.

Для того, чтобы функция $f(x) \in L_p[-1,1]$, $p \in (0,\infty]$ удовлетворяла при любом δ ($0 < \delta < 2/r$) условию

$$\left\| \frac{\Delta_\delta^r f(x)}{\varphi_1(\delta)\varphi_2(\sqrt{1-x}+\sqrt{\delta})\varphi_3(\sqrt{1+x}+\sqrt{\delta})\varphi_4\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-x}+\sqrt{\delta}}\right)\varphi_5\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+x}+\sqrt{\delta}}\right)} \right\|_{p,[-1,1-r\delta]} \leq M,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность алгебраических многочленов $\{P_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$, таких, что для построенной по ней кусочно-полиномиальной функции $F_n(x)$ было справедливо неравенство

$$\left\| \frac{f(x)-F_n(x)}{\varphi_1\left(\frac{1}{n}\right)\varphi_2\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi_3\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi_4\left(\frac{1}{n\sqrt{1-x}+\sqrt{n}}\right)\varphi_5\left(\frac{1}{n\sqrt{1+x}+\sqrt{n}}\right)} \right\|_{p,[-1,1]} \leq CM,$$

где C некоторая постоянная, не зависящая от n, f и M, а кусочно-полиномиальная функция $F_n(x)$ определена следующим образом: $F_n(x) = P_{\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]}(x)$, $x \in [a_{i-1}, a_i] \cup [a_{-i+1}, a_{-i})$,

$$a_i = -a_{-i} = 1 - \frac{1}{2^{2i}},\ i = 0,1,2,\dots,\left[\frac{\log_2 n}{2}\right],\ a_{\left[\frac{\log_2 n}{2}\right]+1} = 1,$$
$$a_{-\left[\frac{\log_2 n}{2}\right]-1} = -1.$$

Ранее автором [1] была доказана аналогичная теорема для функций с одинаковой гладкостью вблизи обеих граничных точек.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Н.У.Игнатьева. Приближение функций класса $H_p(\sigma, r, M)$ кусочно-полиномиальными функциями.-М.-В кн. Функциональный и стохастический анализ и их приложения.-МГУ.-1991 г.

УДК 539.3,517.9

Ильюхин А.А.

АСИМПТОТИКО-ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В исследованиях решений систем дифференциальных уравнении в областях сложной геометрии часто невозможно использовать известные аналитические методы в традиционной форме. Возникает необходимость комбинированного применения различных методов, их согласование, определенную модификацию и адаптацию к конкретным граничным задачам. Деформация криволинейных упругих стержней с учетом анизотропии материала описывается громоздкой системой дифференциальных уравнений и граничных условий. Боковая поверхность криволинейного стержня имеет сложную конфигурацию. По определению стержня диаметр d его поперечного сечения Ω много меньше длины L его оси, что позволило естественно ввести малый параметр $\lambda = d / L$ и представить основные величины: вектор перемещения $\bar{u}$, тензор деформации $\hat{\varepsilon}$ и тензор напряжений $\hat{\sigma}$ в виде степенных рядов по этому параметру:

$$\bar{u} = \sum_{m=k}^{\infty} \lambda^m \bar{u}^{(m)}, \quad \hat{\varepsilon} = \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \hat{\varepsilon}^{(m)}, \quad \hat{\sigma} = \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \hat{\sigma}^{(m)} .$$

Параметр λ входит в основные соотношения сингулярно, что потребовало определения порядка сингулярности в каждом из разложений. Получена последовательность граничных задач, и для первых двух приближений тензора напряжений $\hat{\sigma}^{(p)}$ и $\hat{\sigma}^{(p+1)}$ удалось зависимость от координат представить в следующем виде

$$\hat{\sigma}^{(m)}(s, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\sigma}_i^{(m)}(x_2, x_3) \; S_i^{(m)}(s)$$

Для тензоров $\hat{\sigma}_i^{(m)}(x_2, x_3)$ сформулированы граничные задачи в двумерной области. Функции $S_i^{(m)}(s)$ были получены на основе вариационного принципа Рейсснера, модифицированного для задач, в которых присутствуют дополнительные дифференциальные связи. Совместное использование асимптотического и вариационного методов позволило записать необходимые условия разрешимости граничных задач.

Идейно близкая процедура была использована при решении задачи об оптимальном режиме перехода на вращение стержня с заданной угловой скоростью при различных краевых условиях. Предварительно получено разложение по собственным функциям краевых задач, а затем разложение по малому параметру. Оптимальное угловое ускорение определено из решения вариационной задачи.

УДК 517.552 Ишанов Б.Ж. (Обнинск)

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА СЕВЕРИ-БОХНЕРА

Функцию $f(z)$ будем называть k-полианалитической на открытом множестве $G\subset C^n (n,k\geq 1)$, если $f\in C^k(G)$ и $\bar{D}^\alpha f(z)=0$ для всех $z\in G$ и всех α с $|\alpha|=k$, где $\bar{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\bar{z}_1^{\alpha_1}\ldots\partial\bar{z}_n^{\alpha_n}}$.

Определение. Будем говорить, что система комплекснозначных мер в C^n $(n>1)$

$$\mu_{l_1},\ \mu_{l_1 l_2},\ldots,\ \mu_{l_1\ldots l_k},\quad k\geq 1,\ l_1,\ldots,l_k = 1,\ldots,n$$

образует CR систему порядка k, если

$$\int \frac{\partial^k\phi(z)}{\partial\bar{z}_{l_2}\ldots\partial\bar{z}_{l_k}\partial\bar{z}_{j_1}}\, d\mu_{l_1}(z)+\ldots+(-1)^{k-1}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\bar{z}_{j_1}}\, d\mu_{l_1\ldots l_k}(z) =$$

$$= \int \frac{\partial^k\phi(z)}{\partial\bar{z}_{l_1}\ldots\partial\bar{z}_{l_k}}\, d\mu_{j_1}(z)+\ldots+(-1)^{k-1}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\bar{z}_{l_k}}\, d\mu_{j_1 l_1\ldots l_{k-1}}(z)$$

при $l_1,\ldots,l_k,j_1 = 1,\ldots,n$ и любых $\phi\in C_0^\infty(C^n)$, а при $k\geq n$ и компактности общего носителя E всех мер выполняются равенства

$$\int\frac{\partial^{k-1}\phi(z)}{\partial\bar{z}_{l_2}\ldots\partial\bar{z}_{l_k}}\, d\mu_{l_1}(z) - \int\frac{\partial^{k-2}\phi(z)}{\partial\bar{z}_{l_3}\ldots\partial\bar{z}_{l_k}}\, d\mu_{l_1 l_2}(z)+\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\int \phi(z)d\mu_{l_1\ldots l_k}(z) = 0$$

для $l_1,\ldots,l_k=1,\ldots,n$ и любой ϕ, являющейся k-полианалитической в некоторой окрестности E_1, где E_1 – дополнение в C^n неограниченной связной компоненты $C^n\setminus E$.

Теорема. Пусть G – ограниченная односвязная область в C^n $(n>1)$ с гладкой границей ∂G, и пусть для каждого мультииндекса α с $|\alpha|<k$ $(k\geq 1)$ на ∂G заданы непрерывные функции g_α. Для существования k-полианалитической в G функции f такой, что $\bar{D}^\alpha f$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ области G и совпадает на ∂G с g_α при всех α с $|\alpha|<k$, необходимо и достаточно, чтобы система мер

$$\mu_{j_1} = g(z)\omega_{j_1}(\bar{z})\wedge\omega(z),\ldots,\mu_{j_1\ldots j_k} = g_{j_1\ldots j_{k-1}}(z)\omega_{j_k}(\bar{z})\wedge\omega(z)$$

образовывала CR систему порядка k (здесь g обозначает функцию соответствующую мультииндексу $0=(0,\ldots,0)$, а при $p=1,\ldots,k-1$, $j_1,\ldots,j_p=1,\ldots,n$ каждая функция $g_{j_1\ldots j_p}$ совпадает с g_α, где в мультииндексе $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\ldots,\alpha_n)$ α_r равен числу членов в наборе $j_1\ldots j_p$ совпадающих с r $(r=1,\ldots,n)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований, код проекта 93-01-00236 и Международного научного фонда (International Science Foundation, Grant № NCF000).

УДК 517.5 **Казимиров Г. Н.** (Москва)

Приближение алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби

В данной работе доказаны теорема Джексона и ее обратная для k-го итерированного модуля гладкости, определяемого оператором обобщенного сдвига типа Якоби.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке [-1, 1] и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке [-1, 1] и $\|f\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\|_p$. Для $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$ определим оператор обобщенного сдвига Якоби

$$T_t(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)}\times$$

$$\times \int_{-1}^{1} f\left(x\cos t + y\sin t\sqrt{1-x^2} - (1-y^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2}\right)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dy$. Введем обозначения ($k = 2, 3, \ldots$):

$$\Delta_h^1(f, x, \nu, \mu) = T_h(f, x, \nu, \mu) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_k}^k(f, x, \nu, \mu) = \Delta_{h_k}^1\left(\Delta_{h_1,\ldots,h_{k-1}}^{k-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu\right),$$

$$\tilde{\omega}_k(f, x, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|h_i|\le\delta,\, i=1,\ldots,k} \|\Delta_{h_1,\ldots,h_k}^k(f, x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n\in\Pi_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta},$$

где Π_n — множество алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$.

Теорема. Пусть заданы числа p, ν и μ такие, что $1 \le p \le \infty$, $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $\beta = -\frac{1}{2p}$ и $-\frac{1}{2} < \alpha \le \nu$ при $p = 1$, $-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < \nu + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$. Тогда для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ имеют место следующие неравенства:

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \tilde{\omega}_k(f, \frac{1}{n}, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_2}{n^k}\sum_{m=1}^{n} m^{k-1} E_m(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n.

УДК 517.927

Карелина И.Г.(Воронеж)

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРАФЕ

На связном конечном открытом геометрическом графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается нелинейная краевая задача

$$Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = f(x,u), \quad \sum_{i=1}^{m} d_i(a)u_i'(a) = 0 \quad (a \in J(\Gamma)), \qquad (1)$$

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0. \qquad (2)$$

Здесь через $J(\Gamma)$ обозначено множество внутренних, а через $\partial\Gamma$ - граничных вершин Γ, через $u_i(x)$ - сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i, m - количество ребер, $\{d_i(a)\}_{i=1}^{m}$ - набор положительных чисел, свой для каждой $a \in J(\Gamma)$, производная $u_i'(a)$ вычислена вдоль ребра γ_i при его параметризации "от a".

Граф Γ предполагается деревом т.е. не содержит циклов, функция $p(\cdot) > 0$ - регулярной, а функция $q(\cdot)$ - равностепенно непрерывной.

Вопрос о разрешимости задачи (1), (2) в зависимости от поведения функции $f(x,u)$ изучен в [1]. Для приложений интересен случай, когда $f(x,0) \equiv 0$, и задача (1), (2), очевидно, имеет тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Использование общей теории положительных операторов [2] дает возможность получить условия существования нетривиальных (т.е. вторых) решений задачи (1), (2), когда $f(x,u)$ - "сильно" нелинейная по u функция (т.е. существует неотрицательная, неубывающая функция $h(u)$, $\lim\limits_{u\to+\infty} h(u)/u = +\infty$, $f(x,u) \geqslant h(u)$). На этом пути удалось получить специальные двусторонние оценки функции Грина $G(x,s)$ оператора L при краевых условиях (2), обеспечивающие соответствующему интегральному оператору свойство фокусирования [2] его второй итерации на конусе неотрицательных на Γ функций.

Литература

1. Карелина И.Г., Покорный Ю.В. О нелинейной краевой задаче на графе//Исследование качественных свойств решений краевых задач Сб.науч.тр.- Воронеж,1991.- С.59-70.

2. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Линейные позитивные системы. М.:Физматгиз, 1985.

Чебышёвские множества на многообразиях

*Карлов М.И.** (Москва)

Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство X с метрикой ϱ. Для $x \in X$ и непустого $N \subset X$ определим $\varrho(x, N) = \inf_{y \in N} \varrho(x, y)$ — расстояние от x до N. $P_N x = \{y \in N \mid \varrho(x, y) = \varrho(x, N)\}$ — множество ближайших точек из N для x. N называется *чебышёвским* множеством, если $P_N x$ одноточечно для любого $x \in X$. Чебышёвское множество N назовем *нетривиальным*, если оно не является одноточечным и не совпадает с X.

Пусть (M, g) — конечномерное многообразие M, на котором введена риманова метрика g. Как известно, введение римановой метрики превращает связное M в метрическое пространство (см. [1, стр. 405]).

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ на n-мерной сфере S^n существуют только тривиальные чебышёвские множества.*

Отметим, что на двумерном торе и на двумерном эллипсоиде вращения, у которого одна из полуосей по меньшей мере в два раза длиннее каждой из двух других полуосей, существуют нетривиальные чебышёвские множества.

Теорема 2. *Пусть M — двумерное связное компактное многообразие без края гладкости C^2, на котором введена риманова метрика g гладкости C^2, и пусть N — нетривиальное чебышёвское множество на (M, g). Тогда N — одномерное связное многообразие гладкости C^1.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.

---

*Работа поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект № 1.1.39.

Спектр комплексной матрицы Якоби и сходимость диагональных аппроксимаций Паде.

Калягин В.А. [1] ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

В теории рациональных аппроксимаций хорошо известна теорема Маркова о сходимости диагональных аппроксимаций Паде марковских функций (см. [5]). Этот результат может быть иначе истолкован следующим образом: каждую марковскую функцию можно рассматривать как резольвентную функцию некоторого ограниченного самосопряженного оператора, имеющего представление в стандартном базисе пространства l^2 в виде вещественной симметричной трехдиагональной матрицы (т.н. матрица Якоби [1]). Теорема Маркова утверждает, что аппроксимации Паде сходится к этой резольвентной функции вне выпуклой оболочки спектра оператора. В настоящей работе мы исследуем вопрос о сходимости аппроксимаций для произвольного трехдиагонального оператора с комплексными коэффициентами.

Пусть A ограниченный оператор, имеющий в стандартном базисе $\{e_n\}$ пространства l^2 представление в виде трехдиагональной матрицы $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} = 0$, $j \neq i-1, i, i+1$ с условием неэрмитовой симметрии $a_{n,n-1} = a_{n-1,n}$. Будем говорить, что такие операторы задаются комплексной матрицей Якоби. Комплексную функцию $\phi(z) = (R_z e_0, e_0)$ назовем резольвентной функцией оператора. Здесь R_z резольвента A. Рассмотрим асимптотически периодические операторы с периодом s, т.е. такие операторы, у которых имеются пределы через период элементов вдоль каждой диагонали. Эти операторы есть компактные возмущения операторов с чисто периодическими трехдиагональными матрицами. Для описания спектра рассмотрим разностное уравнение $a_{n,n-1}y_{n-1} + a_{n,n}y_n + a_{n,n+1}y_{n+1} = zy_n$ и выберем два его решения $\{q_n\}$, $\{p_n\}$ начальными условиями $q_0 = 1, q_{-1} = 0$, $p_0 = 0, p_{-1} = 1$. Рассмотрим алгебраическую функцию $w^2 - h_s(Q_s +$

---

[1] Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 93-011-278) и грантом ЕЭС (INTAS-93-219)

$P_{s-1})w+1=0$ и введем множество E, составленное из аналитических дуг на которых $|w_1|=|w_2|$. В самосопряженном случае спектр чисто периодического оператора был найден Я.Л.Геронимусом [2]. В общей ситуации, применение результатов работы автора [3] дает следующий результат

Теорема 1 *Для оператора с чисто периодической матрицей Якоби* $\sigma(A)=E\cup\{z_1,z_2,...,z_l\}$, *где* z_1, z_2,...,z_l *те нули многочлена* Q_{s-1} *в области* $D=C\backslash E$, *в которых функция* $\phi(z)$ *имеет полюсы.*

Спектром асимптотически периодического оператора является множество E плюс возможные собственные значения, множество которых не более чем счетно в связной компоненте дополнения E, содержащей бесконечность ([4], стр. 306). Тогда справедлива

Теорема 2 *Пусть матрицей оператора является асимптотически периодическая матрица Якоби с периодом* s. *Тогда аппроксимации Паде резольвентной функции сходятся равномерно внутри резольвентного множества оператора, из которого удалены нули многочленов* $\tilde{Q}^{(i)}_{s-1}$, $i=0,1,\ldots,s-1$. *В удаленных точках сходится не менее половины последовательностей* $\pi_{ks+i}=P_{ks+i}/Q_{ks+i}$.

Доказательство этого утверждения использует общие результаты работы [3], векторную форму теоремы Пуанкаре и предыдущую теорему.

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961
2. Геронимус Я.Л. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов, Зап. мат.отд. ф-м ф-та ХГУ и Харьк. мат. об-ва, 1957, т.25, 86-100.
3. Калягин В.А. Аппроксимации Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных операторов, Мат. Сб., т.185 (1994), с.79-100.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов, Мир, 1972
5. Никишин Е.М. Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность, М., Наука, 1988.

УДК 517.544 Карташева Л.В., Радченко Т.Н.(Ростов-на-Дону)

ПРОСТРАНСТВО ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ $\tilde{\Phi}^{+}$ НА ПОЛУОСИ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть S_+-пространство, состоящее из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi(x) \in C^{\infty}(R_+) \quad , \quad \lim_{x \to 0,\infty} x^{\ell} \varphi^{(m)}(x) = 0 \,, \forall \ell \in R, m = 0,1,2,\ldots$$

Тогда пространство $\tilde{\Phi}^{+}$ определим следующим образом:

$$\tilde{\Phi}^{+} - \tilde{\Phi}^{+}(R_+) = \{\varphi : \varphi \in S_+ \,, \int_0^{\infty} x^{k} \ln^{p} x \, \varphi(x) dx = 0, \, k = 0,1,2,\ldots, p = 0,1,2,\ldots\}$$

Топология в пространствах S_+ и $\tilde{\Phi}^{+}$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi ; \tilde{\Phi}^{+}\|_{k} = \sup_{m \le k} \sup_{x > 0} (1+x)^{k} |\varphi^{(m)}(x)| \,, \, k = 0,1,2,\ldots$$

$$\tilde{\varphi}(z) = (M\varphi)(z) = F.P. \int_0^{\infty} \varphi(x) x^{z-1} dx \,, \, z \in C,$$

-есть преобразование Меллина на функции $\varphi \in \tilde{\Phi}^{+}$

Целая функция $f(z)$ принадлежит пространству $\mathcal{M}$, если для любого $k = 0,1,2,\ldots$ существует константа C_k такая, что при $|Re\, z| < k+1$ выполняется неравенство $|f(z)| \le C_k (1+|z|)^{-k}$ и $f^{(k)}(z) = 0, \, z = 1,2,\ldots, k = 0,1,\ldots$

Топологию в $\mathcal{M}$ зададим с помощью счетной системы норм

$$\|f ; \mathcal{M}\|_{k} = \sup_{|Re\, z| \le k+1} \mathcal{M}_{k}(z) |f(z)| \,, \, k = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{M}_{k}(z) = \sup_{m \le k} \max \{(1+|z|)^{m} ; \prod_{j=1}^{m+1} |z - j|^{-1}\}$$

Теорема 1. Преобразование Меллина изоморфно отображает $\tilde{\Phi}^{+}$ на $\mathcal{M}$

Теорема 2. Сингулярный оператор

$$S\varphi = F.P. \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

отображает пространство $\tilde{\Phi}^{+}$ в себя.

Аналитическим представлением Коши обобщенной функции $f \in \tilde{\Phi}^{+'}$ назовем функционал

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(f_t \,, \frac{1}{t - z} \right)$$

и положим $\tilde{f}(x+ih) = \hat{f}(x+ih) + \hat{f}(x-ih) = \frac{1}{\pi i} \left(f_t \,, \frac{t-x}{(t-x+ih)(t-x-ih)} \right)$

Теорема 3. Если $f(t) \in \tilde{\Phi}^{+'}$, $\varphi(t) \in \tilde{\Phi}^{+}$, то

$$\lim_{h \to +0} (f, -\tilde{\varphi}(t+ih)) = (f, -S\varphi).$$

УДК 519.3 Кириакиди В.К. (Воронеж)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

Сложные системы, как правило, характеризуются наличием нескольких целей и в процессе проектирования таких систем приходится решать задачи многокритериальной оптимизации.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\ell$ - целевые функции. Рассмотрим задачу векторной оптимизации

$$\varphi_i(x) \to \text{"opt"}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell;$$

$$\varphi_p(x) \geq 0, \; p = 1, 2, \dots, m; \quad x \in X \subset R^n,$$

состоящую в нахождении точек множества Парето Ω.

Для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$X_\varepsilon(\Omega) = \{x : \inf\{\|x - x^*\|, \; x^* \in \Omega\} \leq \varepsilon\}$$

- точек, близко расположенных к множеству Парето Ω.

Введем функцию $h(x) = \inf\{\|x - x^*\|, \; x^* \in \Omega\}$,

определяющую расстояние от точки x до множества Ω.

Тогда $\{x : h(x) \leq \varepsilon\} = X_\varepsilon(\Omega)$.

Лемма 1. Множество $X_\varepsilon(\Omega)$ замкнуто.

Следствие 1. Если множество Ω - ограничено, то $X_\varepsilon(\Omega)$ - компактное множество.

Теорема 1. $X_\varepsilon(\Omega) = X_\varepsilon(\bar{\Omega})$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{x^k\}_1^\infty$, $k \in N$ такова, что $\forall \varepsilon > 0$ в $X_\varepsilon(\Omega)$ (где Ω - ограниченное множество) содержится бесконечно много точек этой последовательности, тогда:

1. $\exists$ подпоследовательность $\{x^k\}_1^\infty$, $k \in K_\varepsilon$ такая, что $x^k \underset{k \to \infty}{\to} x^\infty$;
2. $x^\infty \in \bar{\Omega}$;
3. $\lim\limits_{k \to \infty} h(x^k) = 0$, $k \in N$.

Для доказательства используются результаты теоремы 1. и следствия 1.

Идея введения функции $h(x)$ при многокритериальной оптимизации, обобщающей релаксационные схемы, принадлежит М.С. Чирко.

УДК 517.95 Кленина Л.И.(Москва), Кленина В.И.(Воронеж)

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, ПОРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассматриваются пространства Соболева бесконечного порядка, которые порождаются произвольным самосопряженным оператором $\mathcal{L}$, действующим в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H.

Пусть для любого $m=0,1,\ldots$ определена m-ая степень $\mathcal{L}^m$ оператора $\mathcal{L}$. Известно, для того чтобы некоторый элемент u из H допускал m - кратное применение самосопряженного оператора $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} d(E_t u, u) < \infty,$$

где E_t - разложение единицы оператора $\mathcal{L}$.
И если это неравенство выполнено, то имеет место спектральное представление

$$\mathcal{L}^l u = \int_{-\infty}^{\infty} t^l dE_t u \text{ и } \|\mathcal{L}^l u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2l} d(E_t u, u),$$

где $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$ - норма в H, $l=0,1,\ldots,m$.
Обозначим

$$D(\mathcal{L}^m) \equiv \{u \in H : \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} d(E_t u, u) < \infty\}.$$

Множество $\bigcap_{m=0}^{\infty} D(\mathcal{L}^m)$ не пусто, так как существует плотное в H линейное многообразие, на котором определены все степени самосопряженного оператора $\mathcal{L}$.

Определим пространство Соболева бесконечного порядка, которое соответствует оператору $\mathcal{L}$ и заданным числовым последовательностям $a_m \geq 0$, $p_m \geq 1$, $m=0,1,\ldots$. А именно,

$$W_H^\infty \equiv W_H^\infty\{a_m, p_m; \mathcal{L}^m\} = \{u \in \bigcap_{m=0}^{\infty} D(\mathcal{L}^m) :$$
$$\rho(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \|\mathcal{L}^m u\|^{p_m} < \infty\}.$$

Изучаются условия, при которых существует бесконечный набор линейно независимых элементов в W_H^∞. Оказывается, что эти условия зависят от характеристики спектра оператора $\mathcal{L}$. Доказана

Теорема. Пусть оператор $\mathcal{L}$ имеет только непрерывный спектр, который полностью заполняет интервал $(a, b) \subset (0, +\infty)$ (b может равняться и $+\infty$). Тогда для того чтобы пространство имело бесконечный набор линейно независимых элементов, необходимо и достаточно существования такого числа $q > a$, для которого сходится ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m q^{m p_m}$.

УДК 519.53 КЛИМКИН В.М.(Самара)

Теорема Витали - Хана - Сакса на неполных σ - классах

Пусть T - некоторое множество; Σ - некоторый класс подмножеств множества T ($\emptyset \in \Sigma$); X - топологическая абелева группа (т.а.г.).

Последовательность попарно непересекающихся множеств называем спектром.

В дальнейшем предполагается, что функции множества (ф.м.) φ заданы на классе Σ и принимают значения в т.а.г. $X(\varphi(\emptyset) = 0)$.

Говорят, что ф.м. последовательности $\{\varphi_k\}$ равномерно исчерпывающие, если для любого спектра

$$\lim_n \varphi_k(E_n) = 0 \qquad (1)$$

равномерно относительно k.

В случае, если $\varphi_k \equiv \varphi$ для $\forall k$ и выполняется (1), то говорят, что ф.м. φ - исчерпывающая.

Будем говорить, что класс множеств Σ обладает (f_1)- свойством, если для любых спектров $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, для которых $E_k F_n = \emptyset$ $\forall k,n$ существуют бесконечное множество номеров P и множество $F \in \Sigma$ такие, что $F_k \subset F$, если $k \in P$ и $F_k F = E_n F = \emptyset$ для всех номеров n и $\forall k \bar{\in} P$.

Теорема. Пусть класс множеств Σ замкнут относительно разности и обладает (f_1)- свойством; пусть $\{\varphi_n\}$- аддитивные исчерпывающие ф.м.

Если для любого множества $E \in \Sigma$ существует предел

$$\lim \varphi_n(E) = \varphi_0(E), \qquad (2)$$

то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие.

Следствие. Пусть Σ - класс множеств замкнут относительно разности и обладает (f_1)- свойством; пусть $\{\varphi_n\}$ - аддитивные исчерпывающие ф.м.; пусть для любого множества $E \in \Sigma$ существует предел (2).

Для того, чтобы ф.м. $\{\varphi_n\}$ были равномерно исчерпывающие, необходимо и достаточно, чтобы ф.м. φ_0 была исчерпывающей.

УДК 517.912

Ключанцев М.И. (Воронеж)

О ВЗАИМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ОСНОВНЫХ ТИПОВ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Операторы γ-преобразований F_ν и им обратные F_ν^{-1} определяются [1] как композиции операторов

$$F_{\nu_i} f(x)=\int_0^\infty f(xt)e^{-t^2}t^{2\nu_i+2-1}dt, \quad F_{\nu_i}^{-1}\varphi(x)=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)e^{\tau}\tau^{-\nu_i-1}d\tau .$$

Предполагая, что коэффициенты эллиптического оператора L, рассматриваемого в цилиндре $Ц_\infty=G\times(0,\infty)$ не зависят от времени t, определяем в $Ц_\infty$ функции u, v, w из условий

$$(\mathrm{I})\quad u_{tt}-Lu=f(x,t),\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ u|_S=h(x,t),$$

$$(\mathrm{II})\quad v_t-Lv=f_{(-\frac{1}{2})}(x,t)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\psi(x),\quad v|_{t=0}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi(x),\ v|_S=h_{-\frac{1}{2}}(x,t),$$

$$(\mathrm{III})\quad -Lw+\frac{4}{t^2}w=f_{(-\frac{1}{2},0)}(x,t)+\frac{\sqrt{\pi}}{2t}\psi(x)+\frac{\sqrt{\pi}}{t^2}\varphi(x),\ w|_S=h_{(-\frac{1}{2},0)}(x,t),\ |w|<M,$$

где $f(x,t)\in C(Ц_\infty)$, $\varphi(x)\in C^1(\bar{G})$, $\psi(x)\in C(\bar{G})$, $h\in C(S\times(0,\infty))$.
Тогда операторы $F_{-\frac{1}{2}}$, $F_{-\frac{1}{2}}^{-1}$, действующие по переменной t, осуществляют взаимную редукцию задач (I),(II), а операторы F_0, F_0^{-1} и $F_{(-\frac{1}{2},0)}$, $F_{(-\frac{1}{2},0)}^{-1}$ – редукцию задач (II),(III) и (I),(III) соответственно.

В частности, решение Даламбера $\frac{1}{2}[\varphi(x-t)+\varphi(x+t)]$ оператор $F_{-\frac{1}{2}}$ преобразует в поверхностный тепловой потенциал

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{t^2}}\varphi(x-\xi)d\xi ,$$

который, в свою очередь, оператором F_0 переводится в ограниченное решение уравнения $-t^2w_{xx}+4w=4\varphi(x)$:

$$w(x,t)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{2|x-\xi|}{t}}\varphi(\xi)\,d\xi$$

и, наконец, оператор $F_{(-\frac{1}{2},0)}^{-1}$ трансформирует эту функцию в решение Даламбера.

Литература

1. Ключанцев М.И. Введение в теорию γ-преобразований. Мат. сборник. 1987. Т.132(174). № 2. С.167-181.

Метод возмущений в одном классе упруго-пластических задач с произвольным упрочнением

А.В.Ковалев (Воронеж)

Известно, что метод возмущений в теории упруго-пластического тела в основном разработан для случая, когда упрочнение мало. Предлагается модификация метода возмущений в теории упруго-пластического тела, когда упрочнение произвольное, рассматривается приложение метода к кругу задач: растяжение толстой пластины, ослабленной круговым или эллиптическим или близким к правильному многоугольнику отверстием. При этом в последнем случае контур многоугольного отверстия описывается уравнением укороченной гипоциклоиды. Свойства материала пластины в неупругой зоне описываются моделью Прагера-Ишлинского. В отличие от известных подходов, здесь допускается разложение всех функций, входящих в математическую модель исследуемого процесса, по малому параметру. За нулевое приближение принимается известное решение осесимметричной задачи - плоскости, ослабленной круговым отверстием, в рамках модели Прагера-Ишлинского с произвольным коэффициентом упрочнения. При этом предположении уравнения, описывающие первое и последующие приближения, разрешаются с помощью итерационного процесса.

Применительно к конкретным задачам, указанным выше, как и обычно принято, за малый параметр выбирается величина, характеризующая возмущение статических краевых условий. В качестве параметра нагружения принимается радиус упруго-пластической границы невозмущенного состояния. Получено два приближения решения задач. Дано сопоставление полученных приближенных решений задач с известными в случае, когда упрочнение мало.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

УДК 517.988.6

Кокурин М.Ю. (Йошкар- Ола)

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ [*)]

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(u) = f, \tag{I}$$

где F – монотонный хеминепрерывный оператор из гильбертова пространства X в сопряженное X^*. Изучаются некоторые методы регуляризации, вырабатывающие приближения, сильно сходящиеся к решению некорректной задачи (I). В линейном случае известны (прямые) теоремы о скорости сходимости процессов регуляризации в зависимости от гладкости аппроксимируемых решений. Обозначим через $J: X \to X^*$ каноническое дуальное отображение и пусть U – множество решений (I). Для любого $\alpha > 0$ регуляризованное уравнение

$$F(u) + \alpha J u = f$$

имеет единственное решение u_α. Будем предполагать, что $u_\alpha \in Y$, где банахово пространство Y компактно вложено в X, $\|u\|_X \le k \|u\|_Y$ $\forall u \in Y$, и для некоторой функции $C: R_+^1 \to R_+^1$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} C(\alpha) = \infty$, имеет место оценка

$$\|u_\alpha\|_Y \le C(\alpha),\ 0 < \alpha \le \alpha_0.$$

В одном из вариантов метода дискретной регуляризации строится последовательность подпространств $\{X_n\}$, $X_n \subset X$, $\dim X_n < \infty$, плотная в X, и приближение u_n определяется из условия

$$u_n \in X_n: \langle F(u_n) + \alpha_n J u_n - f,\ u_n - v_n \rangle = 0 \ \forall v_n \in X_n. \tag{2}$$

Полагая $h_n = \sup\{\inf\{\|y - x_n\|_X : x_n \in X_n\} : y \in Y, \|y\|_Y = 1\}$, имеем $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$. При исследовании метода (2) предполагается, что

$$\|F(u)\|_{X^*} \le M(1 + \|u\|_X) \ \forall u \in X \ (M > 0).$$

Теорема 1). Пусть $U \ne \emptyset$, $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n^{-1} C(\alpha_n) h_n + \alpha_n) = 0$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_X = 0,\ u \in U.$$

2) Если $\|u_n - u\| \le \varphi_n$, $u \in U$, где $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = 0$, $\sup\limits_{0 < t \le k} t^{-\theta} \mu(t) < \infty$, $\theta \in (0,1)$, $\mu(t) = \min\limits_n \{\varphi_n + (\alpha_n^{-1} C(\alpha_n) h_n)^{1/2} + t\, C(\alpha_n)\}$, то $u \in (X, Y)_{\theta,\infty} \subseteq X$.

Аналогичное п.2) утверждение имеет место для метода prox-регуляризации, в котором последовательность приближений $\{u_n\}$ определяется соотношением $F(u_{n+1}) + \alpha J(u_{n+1} - u_n) = f$, $\alpha > 0$.

Исследуются приложения к дифференциальным уравнениям с монотонной нелинейностью. Для рассматриваемого класса таких уравнений можно положить $C(\alpha) = C_0 \alpha^{-3}$; $0 < \alpha \le \alpha_0$, $C_0 > 0$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NMW000)

УДК 519.175 Колмыков В.А. /Воронеж/

РЕДУКЦИИ ИНТЕГРАЛА И КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ДИСКРЕТНЫХ МЕР НА ГРАФАХ

1. В тезисах Боровских и Колмыкова введено понятие меры на графе Γ и интеграла $\oint d\mu$. В пространстве $M(\Gamma)$ всевозможных мер определено действие группы $\Psi(\Gamma)$. Доказано, что меры интегрально эквивалентны, если и только если они принадлежат одной орбите группы $\Psi(\Gamma)$. Для простоты положим Γ связным.

2. Группа $\Psi(\Gamma)$ состоит из специальных параллельных переносов и поэтому ее можно отождествить с подпространством в $M(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 1. $\dim \Psi(\Gamma) = m^*(\Gamma)$ – коцикломатическое число.

3. Множество ребер E графа Γ называется фундаментальным, если $\Gamma \setminus E$ остовное дерево. Для всякого множества ребер L положим $M(L) = \{\mu \in M(\Gamma) \mid \operatorname{Supp}\mu \subseteq L\}$. Если E – фундаментально, то $\dim M(E) = |E| = m(\Gamma)$ – цикломатическое число.

ТЕОРЕМА 2. E фундаментально $\Leftrightarrow M(\Gamma) = M(E) \oplus \Psi(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 3. E фундаментально $\Leftrightarrow$ $M(E)$ фундаментально относительно действия группы $\Psi(\Gamma)$.

Итак, всякая мера μ эквивалентна ровно одной мере μ_E с носителем, содержащемся в фундаментальном множестве E.

4. В тезисах Колмыкова, Субботина введены $\oint_A d\mu$ и понятие интегрального базиса циклов. Положим $I_A(\Gamma) = \{\oint_A d\mu\}_\mu$.

ТЕОРЕМА 4. $\dim I_\Omega(\Gamma) = m(\Gamma)$ – цикломатическое число.

5. Пусть $E = \{e_i\}_i$ – нумерованное фундаментальное множество ребер, $F = \{f_i\}_i$ – соответствующий фундаментальный базис циклов, $B = \{b_i\}_i$ – произвольный базис циклов, $B = FC$, где C – (0,1) – матрица. Зададим на Γ ориентацию Δ и заменим c_{ij}, на $-c_{ij}$, если e_i направлено против циркуляции b_j. Полученная матрица C_Δ невырождена.

Определим $\mu_i \in M(E) : (\mu_i(e_1), \dots, \mu_i(e_m)) = (0 \dots 0 \underset{i}{1} 0 \dots 0) C_\Delta^{-1}$.

Ясно, что $\oint_{b_j} d\mu_i = \delta_{ij}$. $\{\oint_B d\mu_i\}_i$ – базис в $I_B(\Gamma)$.

ЛЕММА. Если B – базис циклов, то $\dim I_B(\Gamma) = m(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 5. Всякий базис циклов является интегральным.

УДК 519.175 Колмыков В.А., Меньших В.В., Субботин В.Ф.
(Воронеж)

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОРИЕНТАЦИЙ ГРАФОВ

1. Пусть Γ – конечный граф без петель и кратных ребер. Ориентацией Δ графа Γ называется задание на каждом ребре графа Γ направления.

2. Если вершина α – сток в ориентации Δ, то развернув все стрелки Δ, идущие в α, получим новую ориентацию, обозначаемую $\alpha\Delta$. Единицей e ориентации Δ называется такая последовательность вершин, что $e\Delta=\Delta$. Последовательность вершин называется полной, если она содержит каждую вершину графа и ровно один раз.

3. Ориентация называется ациклической, если в ней нет контуров. (Контур-цикл с идущими в одном направлении стрелками).

ЛЕММА. [1] Ориентация Δ ациклична, если и только если она имеет полную единицу (обозначаемую $e(\Delta)$). В этом случае можно выбрать $e(\Delta)$, начинающуюся с произвольного стока.

4. Определение. Подобие (переключательная эквивалентность ориентаций) – тончайшее отношение эквивалентности, при котором $\Delta\sim\alpha\Delta$.

Для ациклических ориентаций это определение выглядит проще:

Определение. Ациклические ориентации Δ_1 и Δ_2 подобны, если $\Delta_2=f\Delta_1$ для некоторой вершинной последовательности f.

Подобие в настоящее время – единственный (исключая случай, когда Γ – цикл) способ связи задач классификации представлений графов [1].

5. Понятие интеграла ориентации см. в заметке Колмыкова, Субботина, публикуемой в этом сборнике.

6. ТЕОРЕМА. Для ациклических ориентаций Δ_1 и Δ_2 следующие утверждения эквивалентны (1) $\Delta_1\sim\Delta_2$ (2) $\oint d\Delta_1=\oint d\Delta_2$.

Доказательство. (2)$\Rightarrow$(1): достаточно найти Δ', подобную Δ_1 и отличающуюся от Δ_2 на меньшее число стрелок, чем Δ_1 от Δ_2. Отметим в графе Γ ребра, на которых $\Delta_1\neq\Delta_2$. Удалим эти ребра. В полученном графе найдется компонента связности E такая, что все отмеченные в Γ ребра, инцидентные E (рассматриваемой как подграф в Γ) направлены к E в ориентации Δ_1. Действительно, иначе в Γ существовал бы цикл, все отмеченные ребра которого одинаково направлены в Δ_1, что противоречит (2). Теперь положим $\Delta'=e(\Delta_1|_E)\Delta_1$.

[1] Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. – УМН, 1973, 2, с. 19-33.

УДК 512.519.46 Колмыков В.А., Кущов В.С., Субботин В.Ф.
(Воронеж)

О ПОВЕДЕНИИ ФОРМЫ КАРТАНА–ТИТЦА НА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ КУБАХ

1. С каждым конечным графом Кокстера ([1], гл. IV, § 1, п.9) связана квадратичная форма Картана–Титца B_Γ ([1] , гл. V, § 4, п.1).

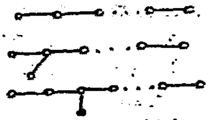
2. Мы будем рассматривать только конечные связные графы Кокстера с весами ребер 3.

3. Целочисленным центральным кубом в $\mathbb{R}^\ell$ называется множество $K(n,m)=\{x\in\mathbb{Z}^\ell \mid n\le x_i\le m \ \forall i\}$ $0\le n<m\le\infty$

а его протяженностью – число $\alpha(K)=\frac{m}{n}$, если $n\ne 0$, $\alpha(K)=m$, если $n=0$. Кубы с $m\le 5$ называются малыми, а остальные – большими.

4. В теории групп Ли известны графы:

A_n
D_n
E_n



5. ТЕОРЕМА. (1) $\alpha(K)\ge 6 \Rightarrow (B_\Gamma|_K>0 \Leftrightarrow \Gamma\in\{A_n, D_n, E_6-E_8\})$

(2) $4\le\alpha(K)<6 \wedge (K -$ большой$) \Rightarrow (B_\Gamma|_K>0 \Leftrightarrow \Gamma\in\{A_n, D_n, E_6-E_8\})$

(3) $4\le\alpha(K)<6 \wedge (K -$ малый$) \Rightarrow (B_\Gamma|_K>0 \Leftrightarrow \Gamma\in\{A_n, D_n, E_n\})$

Работа [2] состоит из доказательства этой теоремы.

Литература

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., Мир, 1972.

2. Колмыков В.А., Кущов В.С., Субботин В.Ф. О проведении формы Картана–Титца на целочисленных кубах. Деп. ВИНИТИ, № 7495–В89. с.29.

УДК 519.175 Колмыков В.А., Субботин В.Ф. (Воронеж)

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ, ГОМОГЕННЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ЦИКЛОВ НА ГРАФАХ.

1. В тезисах Боровских, Колмыкова введено понятие меры и контурного интеграла на графе.

2. Пусть Ω – множество всех циклов графа (цикл здесь всюду – простой цикл). Для $A \subseteq \Omega$ через $\oint\limits_A d\mu$ обозначим отображение $A \to R$, $C \mapsto \oint\limits_C d\mu$.

Базис циклов B называется интегральным ($B \in \mathcal{J}$), если $\oint\limits_\Omega d\mu_1 = \oint\limits_\Omega d\mu_2 \Leftrightarrow \oint\limits_B d\mu_1 = \oint\limits_B d\mu_2$.

3. Определение. Циклы C_1 и C_2 гомогенны ($C_1 H C_2$), если $C_1 \cap C_2$ – простая цепь, содержащая хотя бы одно ребро, $\delta(C_1, C_2) = 1$, если обходы вершин совпадают на $C_1 \cap C_2$, $\delta(C_1, C_2) = -1$ – в противном случае.

4. ЛЕММА. $C_1 H C_2 \Rightarrow \oint\limits_{C_1+C_2} d\mu = \delta(C_1+C_2, C_1) \oint\limits_{C_1} d\mu + \delta(C_1+C_2, C_2) \oint\limits_{C_2} d\mu$.

5. Гомогенная оболочка $H(M)$ множества циклов M определяется индуктивно: 1) $M \subset H(M)$ 2) $C_1, C_2 \in H(M) \wedge C_1 H C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 \in H(M)$.

Базис циклов B называется гомогенным ($B \in \mathcal{H}$), если $H(B) = \Omega$.

6. ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$. Гипотеза $\mathcal{H} = \mathcal{J}$.

7. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех фундаментальных базисов графа Γ. Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{F}$; T_1, T_2 – соответствующие им остовы. Если $d(T_1, T_2) = 1$ ([1], гл. 7, § 2), т.е. $T_1 \setminus T_2 = \ell_1$, $T_2 \setminus T_1 = \ell_2$, то существует ровно один цикл $C(T_1, T_2) \in \Phi_1 \cap \Phi_2$, содержащий ребра ℓ_1, ℓ_2.

8. ЛЕММА. (Меньших–Субботин). Если $d(T_1, T_2) = 1$, то 1) $C(T_1, T_2) H C$ $\forall\, C \in \Phi_1 \setminus \Phi_2$; 2) $\Phi_2 \setminus \Phi_1 = \Phi_1 \setminus \Phi_2 + C(T_1, T_2)$; 3) $\Phi_2 \subset H(\Phi_1)$.

9. Любой остов получается из любого последовательностью элементарных преобразований [1]. Из этого и предыдущей леммы следует

ТЕОРЕМА 2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Проблема: для каких графов $\mathcal{F} = \mathcal{H}$?

10. В тезисах Колмыкова, Меньших, Субботина п. 5 следует читать: ориентация – частный случай меры. $\oint d\mu$ определен в тезисах Боровских, Колмыкова.

[1]. Кристофидес Н. Теория графов. – М., Мир, 1978.

УДК 681.3

ФОРМИРОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА НА БАЗЕ ГЛОБАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

Г.В. Кольцова, Я.Е. Львович, В.Г. Юрасов
Областной Центр Новых Информационных Технологий,
Воронежский государственный технический университет.

Современная информационная среда - важнейший фактор развития образования и науки. Для преодоления сложившегося отставания в части практического внедрения современных информационных компьютерных технологий в повседневную деятельность необходимо качественное изменение состояния информационного пространства высшей школы России в сопряжении с наукой и общественной практикой, а также в сопряжении с мировой высшей школой и наукой. Для этого требуется формирование регионального информационно-интеллектуального пространства на базе современных компьютерных технологий как части единой интеллектуальной среды обитания отечественной высшей школы во взаимодействии с коммуникационными ресурсами зарубежной высшей школы.

Главная цель информационного взаимодействия высших и средних учебных заведений и научных учреждений региона - предоставление принципиально новых возможностей для познавательной и творческой самореализации человека.

Для практической реализации главной цели Воронежским Областным Центром Новых Информационных Технологий в сотрудничестве с Администрацией Воронежской области создана программа развития регионального информационного пространства и его интеграции в мировые интеллектуальные коммуникации, предусматривающая обеспечение доступа к международным базам данных в области высшего образования и знаний в различных сферах, участие в международном разделении труда по формированию информационных ресурсов, стимулирование экспорта баз данных.

Реализация программы предусматривает создание информационно-телекоммуникационных сетей, систем телекоммуникаций региона и информационных ресурсов (баз данных и баз знаний).

Формируется специальная информационно-телекоммуникационная система науки и высшей школы на базе распределенной системы коллективных узлов региона, отдельных организаций, подразделений, библиотечных узлов с выходом на международные сети знаний, обеспечивающая массовый доступ к единой системе информационных ресурсов высшей школы России всех групп пользователей.

На базе Воронежского Областного Центра Новых Информационных Технологий создан и функционирует региональный узел связи, имеющий выход в международную сеть EARN/Freenet. Узел оснащен необходимыми каналами связи и программно-техническими ресурсами, обеспечивающими работу в режиме on-line. В основу работы узла положено использование технологии TCP/IP. Информационными услугами регионального узла связи Воронежского ОЦ НИТ к моменту завершения реализации описанной программы будут охвачены высшие и средние учебные заведения области, научные организации и другие заинтересованные в этом пользователи.

Кононенко Л.И. (Новосибирск)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{x} = f(x,t,\varepsilon), \qquad (I)$$

где $x \in \mathbb{R}^{m+n}$, $t \in \mathbb{R}$, ε – малый параметр.

Пусть выполняются следующие условия.

I. Функция $f \in C^{\infty}$.

II. Вырожденное уравнение $f(x,t,0)=0$ имеет для всех $t \in \mathbb{R}$ решение, записываемое в параметрическом виде $x=\varphi(s,t)$, где $s \in \mathbb{R}^m$ – параметр, а для функции $\varphi(s,t)$ в некоторой области пространства переменных $\mathcal{D}(s,t)=\mathcal{D}(s)\times(-\infty<t<\infty)$ выполнены условия: 1) функция $\varphi \in C^{\infty}$, 2) ранг матрицы $\varphi_s(s,t)=\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)$ равен m, т.е. числу параметров.

III. Для матрицы $A(s,t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s,t),t,0)$ алгебраическая кратность собственного значения $\lambda=0$ равна m, а остальные n собственных значений удовлетворяют в $\mathcal{D}(s,t)$ условию $Re\lambda_i(s,t)<0$, $i=1,2,\dots,n$. Предполагается, что $\operatorname{rank} A(s,t)=n$ и m – кратному нулевому собственному значению соответствует m линейно независимых собственных векторов.

Теорема. Пусть в области $\Omega=\{(s,t,\varepsilon)|s\in\mathbb{R}^m, t\in\mathbb{R}, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$ выполняются условия I,II,III. Тогда существует такое ε_1, что $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$ и для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ уравнение (I) имеет интегральное многообразие медленных движений $x=P(s,t,\varepsilon)$, представленное в параметрическом виде с параметром $s\in\mathbb{R}^m$, оно единственно и движение по нему описано уравнением $\dot{s}=S(s,t,\varepsilon)$.

Исследуется вопрос, в каких случаях данное интегральное многообразие медленных движений является многообразием класса $C^r\,(r\ge 1)$ или имеет особенности (например, типа "сборка")

Литература. Л.И.Кононенко, В.А.Соболев. Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий // Сиб.мат.ж. – 1994, т.35, № 6, стр. 1264-1279.

УДК 539.3 КОРЕНСКИЙ С.А. (РОСТОВ-НА-ДОНУ)

Линеаризация граничных интегральных уравнений в обратных задачах дифракции для среды со свободной границей.

Исследуется обратная задача о восстановлении формы неоднородности в упругой среде. В качестве модели рассматриваются антиплоская задача теории упругости для полупространства с включением или полостью. На границе полупространства расположен осциллирующий источник, вызывающий колебания в среде. Обратная задача решается на основе информации о поле смещений, наблюдаемых (измеряемых) на границе полупространства. В силу наличия области геометрической тени (для задачи в полупространтстве) можно говорить о существенно некорректной обратной задаче.

Обратная проблема сведена к нелинейной системе операторных уравнений. Метод решения основан на линеаризации операторных уравнений в окрестности известного состояния относительно трех неизвестных функций. Одна из этих функций определяет степень отклонения известной формы от неизвестной. На основе линеаризованных уравнений организован итерационный процесс. При этом на каждом итерационном шаге решается прямая проблема с известной формой неоднородности и решается линейная система интегральных уравнений. Часть из этих уравнений нерегулярные, а остальные имеют гладкие ядра.

Представлены результаты численных экспериментов.

УДК 532.5:541.24 Коржов Е.Н. (Воронеж)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИАЛИЗА ДЛЯ КАНАЛОВ СО СПЕЙСЕРАМИ

Гидродинамическая теория электродиализа распространяется на случай каналов с прямоугольными выступами. В отличие от случая прямолинейных каналов, вектор скорости потока не ортогонален вектору напряженности электрического поля, и в уравнении движения помимо традиционных членов необходимо учесть плотность объемных сил электрической природы (кулоновская сила)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - grad\ P + \mu\ \nabla^2\ \vec{v} + \rho_e \vec{E} \qquad (1)$$

Здесь $\rho, \mu, \vec{v}$ -плотность, коэффициент вязкости, вектор скорости раствора; t -время; P -давление; ρ_e-объемная плотность электрического заряда; E -напряженность электрического поля. В случае его потенциальности $\vec{E} = - grad\ \varphi$, φ -электрический потенциал. Объемная плотность заряда определяется концентрацией ионов c_i

$$\rho_e = F \sum_{i=1}^{m} z_i c_i \qquad (2)$$

где F - постоянная Фарадея, z_i-зарядовое число ионов. Концентрация c удовлетворяет уравнению баланса компонентов смеси

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = - div\ \vec{N}_i \qquad (3)$$

Для определения плотности потока i-го компонента $\vec{N}_i$ можно воспользоваться законом Нернста-Планка-Эйнштейна

$$\vec{N}_i = - D_i grad\ c_i - \frac{z_i e}{kT} D_i c_i grad\ \varphi + c_i \vec{v} \qquad (4)$$

где D_i -коэффициент диффузии ионов i-го сорта; e, k, T -элементарный электрический заряд, постоянная Больцмана, абсолютная температура.

Для замыкания системы уравнений записывается уравнение Пуассона относительно электрического потенциала

$$\varepsilon\ \nabla^2 \varphi = - F \sum_{i=1}^{m} z_i c_i \qquad (5)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость.

На не экранированных поверхностях мембран с известной селективностью граничные условия имеют вид

$$S_i: \qquad z_i F N_i = \bar{n}_i j \qquad (6)$$

где $\bar{n}_i$-число переноса ионов i-го сорта через мембрану, j -величина плотности электрического тока в системе. На остальных участках внутренней поверхности канала ставятся условия отсутствия потоков.

Обращение операторов типа потенциала целого порядка с разностной характеристикой

УДК 517.983 Костецкая Г. С. (Ростов-на-Дону)

В работе рассматриваются операторы типа потенциала целого порядка α с разностной характеристикой

$$(K_a^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{R^n} \frac{a(x-t)\varphi(t)}{|x-t|^{n-\alpha}}\,dt\,, \quad 0<\alpha<n \qquad (1)$$

Характеристика $a(x)=a(r\sigma), r=|x|, |\sigma|=1$ предполагается достаточно гладкой по радиальной переменной r и угловой переменной σ и имеющей определенное поведение в начале координат.

Цель работы – построить обратный к (1) оператор в эллиптическом случае. Это обращение делается сначала на функциях Φ класса П.И.Лизоркина, а затем на функциях $\varphi\in L_p(R^n), 1<p<n, \alpha=1$.

Основной полученный результат заключается в том, что обратный к K_a^α оператор представим на образе $K_a^\alpha(\Phi)$ в виде суммы свертки с обобщенной функцией $\frac{\Omega_\alpha(x)}{|x|^{n+\alpha}}$, где $\Omega_\alpha(x)$ – разностная характеристика (стабилизирующаяся в нуле и ведущая себя как однородная функция на бесконечности), свертки с суммируемым ядром, композиции операторов свертки, сингулярного и единичного, а также некоторого дифференциального оператора.

При обратный оператор можно построить с помощью гиперсингулярного интеграла, а именно,

$$(K_a^1)^{-1}f = \mathbb{D}^1_{\Omega_1} * f + \widetilde{b_1(x')*f} + \widetilde{\left(\frac{|x|}{1+|x|^2}-1\right)b_1(x')}*f + \mu_1(x)*f,$$

где $\mathbb{D}^1_{\Omega_1}$ – гиперсингулярный интеграл первого порядка с характеристикой Ω_1, стабилизирующейся в нуле и на бесконечности, $f\in K_a^1(L_p), 1<p<n, \mu_1(x)\in L_1(R^n)$.

УДК 517.9 Кострюков С.А., Пунин Г.Е., Пешков В.В. (Воронеж)

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка (в общем случае, трехмерных и нестационарных) разработан пакет программ для персонального компьютера на базе процессора Intel 80386 и выше (операционная система MS DOS). Вычисления проводятся с помощью метода конечных элементов. Могут быть заданы произвольные граничные условия Дирихле и/или Неймана.

Данный пакет программ представляет собой совокупность программ, написанных на языке Си, согласованных по структуре данных. Пакет состоит из следующих основных блоков:

1) препроцессор – геометрическое описание, дискретизация области, задание граничных условий. Реализовано полуавтоматическое разбиение с использованием методов Делоне и блочной дискретизации. Может быть задано 10 различных типов конечных элементов, в том числе изопараметрические элементы 2-го порядка. Полное число степеней свободы ограничено числом 262140;

2) процессор – формирование и решение системы линейных уравнений, реализация итерационного процесса Ньютона и дискретизации во временной области. Из-за сильной разреженности основной матрицы системы введена специальная структура хранения ее элементов. Для решения систем линейных алгебраических уравнений используется метод сопряженных градиентов с предобусловленностью Холесского;

3) постпроцессор – обработка результатов, представление дискретных данных, полученных на предыдущем этапе, в удобном для пользователя виде (построение линий равных значений, графиков изменения величины, ее производных и др.);

4) вспомогательные и сервисные программы – специальный интерфейс для повышения эффективности и организации работы вычислительных блоков. Пакет выполнен в виде интегрированной среды. Организовано эффективное использование внешней памяти.

При проведении расчета некоторых методических задач достигнуто хорошее согласие с аналитическим решением. Возможность решения больших трехмерных задач на доступных персональных ЭВМ позволяет существенно расширить применение метода конечных элементов. Данный пакет может быть использован для моделирования нелинейных нестационарных процессов в электродинамике и механике сплошной среды.

УДК 531.36 Красильников П.С. (Москва)

О НОВЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1:3

Исследуется асимптотическая устойчивость системы с двумя степенями свободы в критическом случае двух пар чисто мнимых корней при резонансе 1:3. Известно, что задача алгебраически неразрешима [1]: в пространстве параметров модельной системы 3-го приближения поверхность, разделяющая классы асимптотически устойчивых и неустойчивых систем, трансцендентна. В работе [2] получены алгебраические критерии устойчивости (поверхность раздела содержит алгебраические куски).

Уравнения третьего приближения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{r}_j = 2a_{j1} r_1 r_j + 2a_{j2} r_j r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2^3}(a_j \cos\theta + b_j \sin\theta) \quad (j = 1,2) \\ \dot{\theta} = b_{11} r_1 + b_{12} r_2 + \sqrt{r_1^{-1} r_2^3}\,(b_1 \cos\theta - a_1 \sin\theta) + \\ \quad + 3\sqrt{r_1 r_2}\,(b_2 \cos\theta - a_2 \sin\theta) \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $r_j > 0$ – полярные координаты, θ – резонансный угол, a_{ij}, b_{ij}, a_j, b_j – действительные коэффициенты.

Построена функция Ляпунова, с помощью которой получены новые критерии устойчивости.

ТЕОРЕМА. Пусть $a_{11} \neq 0$ и при этом вещественное алгебраическое уравнение

$$G_0 k^5 + G_1 k^4 + G_2 k^3 + G_3 k^2 + G_4 k + G_5 = 0,$$

где G_j – функции параметров системы, не имеет положительных корней. Положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво, если $a_{11} < 0$ и неустойчиво, если $a_{11} > 0$.

Результаты теоремы сохранятся в полной системе.

Литература.

1. Хазин Л.Г., Шноль Э.Э. Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости//Докл. АН СССР, 1978, т.240, № 6, стр.1309-1311

2. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984

УДК 517.988

Крейн М.Н. (Липецк)

ГОМОМОРФИЗМ ГИЗИНА, ИНДУЦИРУЕМЫЙ НЕЛИНЕЙНЫМ ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ С -МНОГООБРАЗИЙ

Как указывалось в [I], при замене числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ бесконечномерной C^*-алгеброй A обычным образом определяется дифференцируемость нелинейных отображений конечномерных или бесконечномерных A-модулей, и, следовательно, определяются многообразия, моделируемые такими модулями.

Для конечномерных A-многообразий обобщается понятие отношения бордантности и на основе его строится градуированное кольцо бордизмов Ω^A_* и градуированные Ω^A_*-модули сингулярных бордизмов A-многообразия X $\Omega^A_*(X)$.

Пусть $f : X \to Y$ - дифференцируемое нелинейное отображение бесконечномерных A-многообразий, моделируемых гильбертовым A-модулем $l_2(A)$.

Определение. Назовём отображение f фредгольмовым, если его дифференциал в каждой точке области определения является фредгольмовым оператором в смысле [2].

Теорема. Фредгольмово (в смысле данного выше определения) отображение $f : X \to Y$ бесконечной гладкости индуцирует гомоморфизм Гизина

$$f^!: \ \Omega^A_*(Y) \to \Omega^A_*(X).$$

Для случая многообразий над числовыми полями аналогичный гомоморфизм был описан в [3].

Литература.

I. Крейн М.Н. Фредгольмовы C^*-многообразия. В кн.: XXVI Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж, 1994. с. 61.
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами. Изв.Акад.Наук, 43(1979), с.831-859.
3. Morava J.J. Fredholm maps and Gysin homomorphisms. - Proc. Sympos. Pure Math., A.M.S., 1970, v. 15, p. 135-156.

УДК 514.7+514.8+531.1 А.В.Крутов (Воронеж)

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ КРИВЫХ

Кинематическая трактовка основных характеристик кривых необходима для геометрического моделирования и исследования движения, а также может использоваться при кинематическом подходе к изучению кривых. Под скоростью $\mathbf{v}$ перемещения текущей точки кривой $\mathbf{r}=\mathbf{r}(p)$ при изменении ее параметра p и под угловой скоростью переменного вектора $\mathbf{a}=\mathbf{a}(p)$ и ортогональной ему плоскости или коллинеарной ему прямой понимаются векторные величины $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/|dp|$, $\mathbf{a}\times d\mathbf{a}/|dp|$.

Угловой скоростью объекта с матрицей поворота $A(p)$ его сопутствующего базиса будем называть вектор ω, координаты которого являются элементами кососимметрической матрицы $B=(dA/|dp|)A^{-1}=(b_{ij})$:

$$\omega_1=b_{32}=-b_{23},\ \omega_2=b_{13}=-b_{31},\ \omega_3=b_{21}=-b_{12}.$$

Для вектора Дарбу угловой скорости $\bar{\omega}$ натурального триэдра Френе кривой при изменении ее параметра p, для кривизны k, радиуса кривизны R, кручения $\varkappa$ и радиуса кручения æ будем иметь соотношения, отражающие их кинематический смысл

$$\bar{\omega}=\varkappa\bar{v}+k\bar{v}\times\bar{n},\ k=(\bar{\omega}\bar{\beta})/(\bar{v}\bar{\tau})=(\bar{\omega}\bar{v}\bar{n})/\bar{v}^2=R^{-1},\ \bar{v}=-R(\bar{\omega}\bar{n}\bar{\tau})\bar{\tau}=\text{æ}(\bar{\omega}\bar{\tau})\bar{\tau}=b\bar{\omega}-a\bar{\omega}\times\bar{n},$$

$$\varkappa=(\bar{\omega}\bar{\tau})/(\bar{v}\bar{\tau})=(\bar{\omega}\bar{v})/\bar{v}^2=b(\omega/v)^2=\text{æ}^{-1},\ \bar{\beta}=\bar{\tau}\times\bar{n},\ \bar{\tau}=(\bar{\tau}\bar{v})/|\bar{v}|,\ a=k/(k^2+\varkappa^2).$$

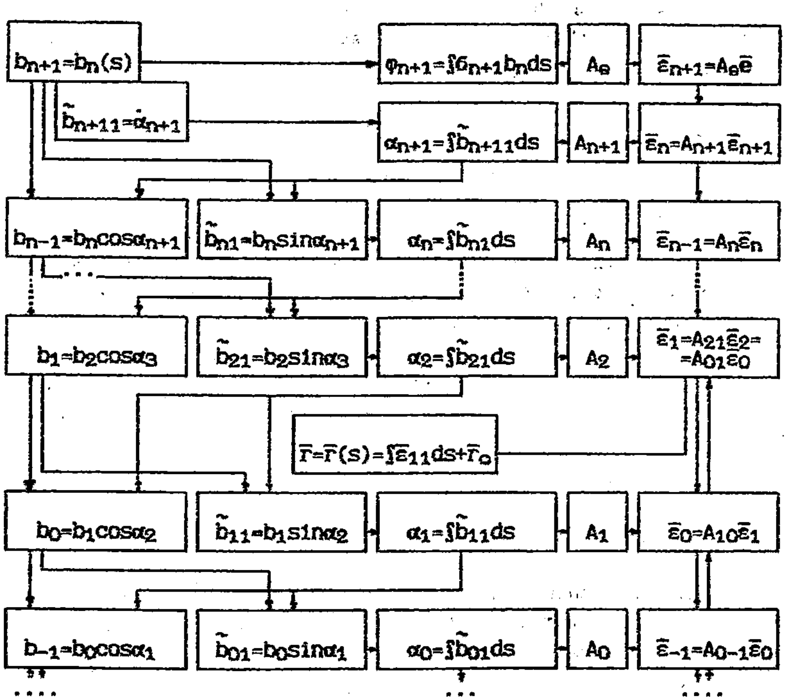
Определяемые таким образом кривизна и кручение хотя и являются кинематическими величинами, тем не менее не зависят от параметризации, в частности, от направления перемещения в ту или иную сторону вдоль кривой. В случае натуральной параметризации кривизна кривой представляет собой модуль составляющей или всегда неотрицательную проекцию вектора Дарбу на кинематический орт бинормали $(\mathbf{v}\times\mathbf{n})/v$, а также всегда неотрицательную проекцию на тот же орт или абсолютную величину угловой скорости касательной кривой или ее нормальной плоскости. Радиус кривизны в некоторой данной точке кривой есть расстояние от этой точки до оси кинематического винта нормальной плоскости, которая является также осью кривизны кривой в данной точке. Кручение кривой есть проекция вектора Дарбу на кинематический орт касательной $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ или проекция на тот же орт угловой скорости бинормали или соприкасающейся плоскости, а радиус кручения - параметр кинематического винта последних. При произвольной параметризации $\mathbf{r}=\mathbf{r}(p)$ будет фигурировать угловая скорость, приходящаяся на единицу линейной.

УДК 514.7+514.8+531.1

Крутов А.В. (Воронеж)

БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕНЕ

Суть алгоритма получения координатно-параметрических уравнений кривых различной категории сложности и его реализация /1/ становятся наиболее ясными с помощью следующей блок-схемы.



Литература:

1. Крутов А.В. Аналог натуральных и алгоритм построения координатно-параметрических уравнений базовых кривых одного класса// "Понтрягинские чтения - IY": Тезисы докладов школы. - Воронеж: ВГУ, 1993. - 220 с.

УДК 539.3 Крысько В.А., Кузнецов В.Н. (Саратов)

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Рассматривается задача определения величин напряжений p_x, p_y, S, действующих в серединной поверхности оболочки, при которых нелинейная система уравнений Маргерра-Власова и нелинейная система уравнений Тимошенко при граничных условиях, отвечающих защемлению или шарнирному закреплению по краям оболочки, имеет единственное (устойчивое) решение.

В направлении решения данной задачи на основании операторного подхода получен ряд результатов. В частности, доказаны теоремы:

Т е о р е м а 1 . Пусть величины p_x, p_y, S таковы, что линейный оператор А, действующий в пространстве

$H_c^2(\Omega)=\{w\in L_2(\Omega);\, w_{/\Gamma}=\frac{\partial w}{\partial n}{}_{/\Gamma}=0\}$ следующим образом:

$$Aw=\frac{D}{h}\Delta^2 w+\left(p_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+p_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

является положительно определенным. Тогда система уравнений Маргерра-Власова имеет единственное (устойчивое) решение в пространстве $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$.

Т е о р е м а 2 . Пусть величины p_x, p_y, S таковы, что линейный оператор А, действующий в пространстве

$H_c^2(\Omega)=\{w\in L_2(\Omega);\, w_{/\Gamma}=\frac{\partial w}{\partial n}{}_{/\Gamma}=0\}$ следующим образом:

$$Aw=-\frac{K_0^2(1-\mu)}{2}\Delta w-\frac{3K_0^4(1-\mu)^2}{h^2}w+$$
$$+\left(p_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+p_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right),$$

где K_0 – положительная константа, не превосходящая единицы, является положительно определенным. Тогда система уравнений Тимошенко имеет единственное (устойчивое) решение в пространстве $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$.

УДК 517.98 Кузнецова Е.В. (Воронеж)

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ 4-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу

$$\begin{cases} L_\varepsilon x \equiv \varepsilon \cdot dx/dt - A(t)x = g(t), \; 0<\varepsilon<<1, \; x\in \mathbb{R}^n & (1) \\ x^1(0)=\ldots=x^\ell(0)=x^{\ell+1}(1)=\ldots=x^n(1)=0, \; 1\le \ell<n & (2) \end{cases}$$

Предположим, что выполнены все условия Васильевой А.Б., в том числе условие $\lambda_1(t)<\ldots<\lambda_\ell(t)<0<\lambda_{\ell+1}(t)<\ldots<\lambda_n(t)$, $|\lambda_i(t)|\ge\lambda_0>0$ на собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$.

По методу Бахвалова Н.С. строим разбиение Δ отрезка $[0,1]$, содержащее $3m$ отрезков. Пусть $d(t)$ – непрерывно-дифференцируемая на $[0,1]$ функция вида

$$d(t)=\begin{cases} a_1-5/\varphi_1\cdot \exp[-\varphi_1\cdot t/(5\varepsilon)], & 0\le t\le t_m \\ a_2+t & t_m<t\le t_{2m} \\ a_3+5/\varphi_2\cdot \exp[\varphi_2(t-1)/(5\varepsilon)], & t_{2m}<t\le 1. \end{cases}$$

где $\varphi_1=\min|\lambda_i(0)|$, $\varphi_2=\min|\lambda_i(1)|$; $t_m=5\varepsilon|\ln\varepsilon|/\varphi_1$; $t_{2m}=1-5\varepsilon|\ln\varepsilon|/\varphi_2$ постоянная a_1 выбирается из условия $d(0)=0$, a_2 и a_3 подбираются так, чтобы $d(t)$ была непрерывна. Положим

$$\tau_i=\begin{cases} i\cdot d_1/m & i=0,\ldots,m \\ d_1+(d_2-d_1)\cdot(i-m)/m & i=m+1,\ldots,2m \\ d_2+(d_3-d_2)\cdot(i-2m)/m & i=2m+1,\ldots,3m \end{cases}$$

где $d_1=d(t_m)$, $d_2=d(t_{2m})$, $d_3=d(1)$. Узлы разбиения Δ определим как $t_i=d^{-1}(\tau_i)$. На сетке Δ введем пространство E векторов, удовлетворяющих условию (2), компоненты которых являются на $[0,t_m]$ и $[t_{2m},1]$ эрмитовыми сплайнами $S_{3,2}$, а на $[t_{m-1},t_{2m+1}]$ – сплайнами степени 3 дефекта 1 $S_{3,1}$.

Объединим в множество $\{\eta_i\}$ точки: узлы сетки t_k; $\xi_k=t_{k-1}+h_k/2$, $k=1,\ldots,m-2$; $\xi_{m-1}=t_m+h_{m+1}/2$; $\xi_m=t_{2m-1}+h_{2m}/2$; $\xi_k=t_{m+k+1}+h_{m+k+2}/2$, $k=m+1,\ldots,2m-2$. Особо выделим точки $\xi^{**}=t_{m-3}+2\cdot h_{m-2}/3$; $\xi^*=t_{2m+2}+2\cdot h_{2m+3}/3$. Приближенное решение $v_m\in E$ ищется в виде $v_m(t)=\sum\alpha_{ik}\cdot\bar e_k\cdot F_{ik}(t)$ из условий

$$\{L_\varepsilon v_m-g\}^i_{t=\eta_j}=0, \; i=1,\ldots,n; \; j=1,\ldots,5m-1;$$

$$\{L_\varepsilon v_m-g\}^i_{t=\xi^*}=0, \; i=1,\ldots,\ell; \; \{L_\varepsilon v_m-g\}^i_{t=\xi^{**}}=0, \; i=\ell+1,\ldots,n.$$

где $\bar e_k$ – единичный вектор по направлению k, F_{ik} – скалярные функции, построенные на основе стандартного базиса в пространствах $S_{3,2}$, $S_{3,1}$.

Имеет место равномерная сходимость 4-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА. Блатов И.А., Стрыгин В.В.//Сиб. мат. журн.-1993.-т. 34, №1.- с. 16-31.

УДК 517.9 Куликов Г.Г., Арьков В.Ю., Брейкин Т.В. (Уфа)

К ВОПРОСУ О ПЕРЕХОДЕ ОТ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К МОДИФИЦИРОВАННЫМ МОДЕЛЯМ МАРКОВА

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются традиционной формой описания динамических систем и находят широкое применение в теории автоматического управления. Рассматривается задача перехода от дифференциального уравнения к модифицированной модели Маркова. Показано, что дифференциальное уравнение n-го порядка, описывающее динамический объект с входной координатой u и выходной координатой x, может быть представлено в виде n- мерной матрицы переходных вероятностей P(u). Каждый элемент матрицы P(u) представляет собой вероятность перехода объекта из состояния $\{\frac{d^n x}{dt^n}, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dx}{dt}, x\}$ в состояние $\{x\}$ за время t под действием входного сигнала u. Если рассматривать дифференциальное уравнение как детерминированное, матрица переходов вырождается в единичную, т.е. вероятности переходов из одного состояния в другое строго определены и равны либо нулю, либо единице.

Реальные объекты подвержены случайным возмущениям внешней среды и случайным отклонениям параметров. Для стохастического объекта, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением, вероятности переходов становятся более "размытыми" по состояниям, а переход из одного состояния в другое носит случайный характер.

Модифицированную марковскую модель можно определить как непараметрическую форму описания системы. Наиболее наглядной аналогией является гистограмма - столбиковая диаграмма, представляющая собой непараметрическое описание функции плотности распределения случайной величины.

Такая форма описания свойств динамического объекта удобна при работе со стохастическими объектами, для их идентификации и оптимального управления ими.

Для практической реализации цифровых алгоритмов управления более подходящим является представление модели объекта в дискретной области, т.е. рассмотрение вероятностей переходов из состояния $\{x_i, \ldots, x_{i-N}\}$ в состояние $\{x_{i+1}\}$ при входном сигнале u_i.

Демонстрируется возможность однозначного перехода от описания динамических объектов дифференциальными уравнениями к описанию их с помощью модифицированной модели Маркова.

УДК 517.988.57 Кунаковская О.В.(Воронеж)

КОНЕЧНОМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ ТИПА ЛЕРЕ-ШАУДЕРА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Пусть U – открытое множество в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f: U \to \mathbb{R}$ – C^3-гладкая функция, обладающая свойствами: 1) $\Omega = f^{-1}((0,+\infty))$ – ограниченное непустое множество, 2) $W = \overline{\Omega} \subset U$, 3) $G = \operatorname{grad} f = -1_H + K_1$, где 1_H и K_1 – соответственно тождественный в H и вполне непрерывный операторы, 4) $f^{-1}(0)$ – регулярная линия уровня. Для C^2-гладкого оператора $F: U \to H$ типа Лере-Шаудера, $F = 1_H + K$, где K – вполне непрерывный оператор, в случае $0 \notin F(\partial W)$ авторами предложена конструкция краевого индекса $I_+(F)$, совпадающая с алгебраическим числом обобщенных собственных векторов $x \in \partial W$ $(F(x) = \lambda G(x), \lambda \in \mathbb{R})$ в случае конечного их числа ([1], там же см. локальные модификации этого понятия, а также другие обобщения). Схема введения инварианта $I_+(F)$ является аналогом конструкции степени Лере-Шаудера: $I_+(F) = I_+((1_H + P_m K)|W \cap H_n)$, где $n \geq m \geq N$ для достаточно большого N, $\{H_n\}_{n \geq 1}$ – флаг пространства H, $P_m: H \to H_m$ – линейная проекция. Для корректности такого определения установлено равенство знаков якобианов разностей локальных представлений

$$\operatorname{sign} \det D_u(f_2^{n+1} - f_1^{n+1}) = \operatorname{sign} \det D_u(f_2^n - f_1^n) \qquad (1)$$

в каждой точке трансверсального пересечения сферизаций графиков конечномерных аппроксимаций $-1_H + P_m K_1$, $1_H + P_m K$, суженных на $\partial W \cap H_{n+1}$ и на $\partial W \cap H_n$. Трансверсальные аппроксимации со свойством (1) получены с помощью аппарата векторных расслоений и трубчатых окрестностей подмногообразий.

Работа поддержана РФФИ - грант №94-01-00-413-А.

Литература

1. Borisovich Yu.G., Kunakovskaya O.V. Boundary indices of non-linear operators and the problem of eigenvectors // Methods and applications of global analysis.- Voronezh: Voronezh Univ. Press, 1993, 39-44.

УДК 517.929 Кунгурцева А.В. /Пермь/

МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ И РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть $\mathcal{D}$ – банахово пространство изоморфное $L_2 \times R^n$, $\mathcal{L}: \mathcal{D} \to L_2$ – линейный ограниченный оператор.

Предположим, что существует такой линейный ограниченный вектор-функционал $\ell_1: \mathcal{D} \to R^n$, что линейная краевая задача

$$\mathcal{L}x = z, \quad \ell_1 x = \alpha \qquad /1/$$

однозначно разрешима при любых $\alpha \in R^n$, $z \in L_2$ и $G: L_2 \to \mathcal{D}$ оператор Грина этой задачи, а X – фундаментальный вектор уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Кроме того, допустим, что квазилинейная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f(t,x), \quad \ell_1 x = \alpha \qquad /2/$$

однозначно разрешима при любом $\alpha \in R^n$ и решение непрерывно зависит от α. Обозначим $g = \|G\|_{L_2 \to L_2}$.

Предлагаемые ниже утверждения получены с помощью модифицированных теорем о разрешимости операторных уравнений с положительным по Минти-Браудеру оператором.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. существует константа $\gamma > 0$, что $\langle -Gz, z\rangle_{L_2} \geq \gamma \|Gz\|^2_{L_2}$;
2. существуют константы $m \geq 0$, $n < \gamma$, что для всех $u, v \in R^1$ и почти всех $t \in [a,b]$ выполнены неравенства

$|f(t,u) - f(t,v)| \leq m\,|u-v|$,

$[-f(t,u) + f(t,v)]\,[u-v] \leq n\,[u-v]^2$.

Тогда будет верна следующая оценка

$$\|z\|_{L_2} \leq \frac{2m}{\gamma - n}\sqrt{m^2 g^2 (2\gamma + m)^2 + 2(\gamma + m)(\gamma - n)}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{L_2}|\alpha| \equiv b_z|\alpha|,$$

где z решение уравнения $z = f(t, Gz + X\alpha)$, эквивалентного задаче /2/.

Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{L}x = f(t,x)$, $\ell_2 x = \varphi x$, /3/ где $\ell_2: \mathcal{D} \to R^n$ – линейный ограниченный вектор-функционал, $\varphi: \mathcal{D} \to R^n$ – непрерывный вектор-функционал.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если

1. $\det(\ell_2 X) \neq 0$;
2. существует константа $b_\varphi \geq 0$, что $\overline{\lim\limits_{\|u\|_{\mathcal{D}} \to \infty}} \dfrac{|\varphi u|}{\|u\|_{\mathcal{D}}} \leq b_\varphi$;
3. $\|(\ell_2 X)^{-1}\|\,(\|\ell_2\| \cdot b_z \cdot g + b_\varphi(b_z g + \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{\mathcal{D}}))) < 1$,

то задача /3/ имеет хотя бы одно решение.

Отметим, что теорема 2 дает условие разрешимости задачи /3/ и тогда, когда непосредственное применение схемы Шаудера к задаче /3/ невозможно, так как константа Липшица m может быть достаточно большой.

УДК 517.51

Лебедев В. В.

ОБ ИДЕМПОТЕНТАХ АЛГЕБРЫ L^p -МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФУРЬЕ

Хорошо известно, что всякий линейный ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор F в $L^p(G)$, где G — локально компактная абелева группа, представим в виде свертки с псевдомерой. Это означает, что для некоторой функции $f \in L^\infty(\Gamma)$, где Γ — двойственная группа, имеем:

$$(Fx)^\wedge = f \cdot \hat{x}, \quad \forall x \in L^p \cap L^2(G),$$

($\wedge$ — преобразование Фурье).

Пространство $M_p(\Gamma)$ всех таких функций, снабженное нормой

$$\| f \|_{M_p(\Gamma)} = \| F \|_{L^p(G) \to L^p(G)}$$

образует банахову алгебру относительно обычного умножения функций.

Классическим примером мультипликатора в $L^p(\mathbb{R})$ $(G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{R})$, является характеристическая функция 1_I интервала $I \subset \mathbb{R}$.

Автором совместно с А. М. Олевским установлено в некотором смысле обратное: если характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}$ принадлежит $M_p(\mathbb{R})$, то E обязано содержать интервал. Точнее: если $p \neq 2$, $1 < p < \infty$, и $1_E \in M_p(\mathbb{R})$, то E является открытым множеством (с точностью до множества меры нуль). В частности не существует нигде не плотного замкнутого множества положительной меры характеристическая функция которого принадлежала бы $M_p(\mathbb{R})$ при $p \neq 2$.

Аналогичные результаты имеют место на окружности $(\Gamma = \mathbb{T}, G = \mathbb{Z})$, т.е. для алгебры $M_p(\mathbb{T})$ мультипликаторов в $\ell^p(\mathbb{Z})$, а также в многомерных случаях.

УДК 517.9 Левицкий С.П., Полев В.А., Шульман З.П.

СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ БИНАРНОГО РАСТВОРА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматривается пленочное кипение полимерного раствора на вертикальной пластине в условиях свободной конвекции с учетом переменности коэффициентов переноса (вязкости раствора и коэффициента диффузии) в диффузионном пограничном слое. Ламинарное течение пара в пленке в пренебрежении инерционными силами описывается уравнением $g(\rho_2-\rho_1)+\mu_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (1), распределение температуры принимается линейным. Уравнения неразрывности, движения и диффузионного транспорта в приближении пограничного слоя имеют вид: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\rho_2\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right);\quad u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{D}\frac{\partial k}{\partial y}\right) \quad (2)$$

Здесь предполагается, что $\mu_2=\mu_2(k)$ и $\mathcal{D}=\mathcal{D}(k)$, зависимостью вязкости от скорости сдвига пренебрегается.

После введения функции тока ($u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$; $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$) к системе уравнений применяется однопараметрическая линейная группа преобразований $G_1=\{\bar{x}=a^{\alpha_1}x;\ \bar{y}=a^{\alpha_2}y;\ \bar{\psi}=a^{\lambda_1}\psi;\ \bar{k}=a^{\lambda_2}k\}$

Тогда требование конформной инвариантности относительно группы G_1 приводит к автомодельным переменным вида $\zeta=c\cdot y\cdot x^{-1/4}$

$$\psi=4\cdot\nu_0\cdot c\cdot x^{3/4}f(\zeta);\ \Phi(\zeta)=\frac{k-k_\infty}{k_\infty-k_0};\ c=\left(\frac{g(\rho_\infty-\rho_1)}{4\nu_0\cdot\rho_1}\right)^{1/4} \quad (3),$$

где ν_0 – кинематическая вязкость раствора, рассчитанная при некоторой определяющей концентрации. В переменных (3) получаем вместо исходных уравнений (2):

$$2(f')^2-3f\cdot f''=\left(\frac{\nu}{\nu_0}\cdot f''\right)' \quad (4)$$
$$3\nu_0\cdot f\cdot\Phi'+(\mathcal{D}\Phi')'=0$$

Численный анализ поставленной задачи проводился при стандартных краевых условиях с учетом нелинейности уравнения фазового равновесия жидкость–пар в предположении постоянства теплового потока на пластине. Полученные результаты позволяют оценить влияние диффузионного пограничного слоя на интегральную теплоотдачу.

УДК 517.982

Лепский А.Е. (Таганрог)

О ШВАРЦЕВОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ С БАЗИСОМ

Пусть E - пространство Фреше с базисом. Это пространство изоморфно пространству последовательностей комплексных чисел $\Lambda(P):=$ $:=\{(z_n)_n: \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|\cdot\omega_n^{(m)}<\infty \ \forall m\in\mathbb{N}\}$, где $P=\{\omega^{(m)}=(\omega_n^{(m)})_n\}$ - семейство неотрицательных последовательностей (весов) таких, что $\forall j\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N}\ :\omega_j^{(m)}>0$. Пусть $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ - множество всех финитных последовательностей $m=(m_j)_{j=1}^{\infty}$, где $m_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ - множество всех последовательностей комплексных чисел $(z_j)_j$. Для $z=(z_j)_j\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ и $m=(m_j)_j\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ определим мономы $z^m:=\prod_{j=1}^{\infty}z_j^{m_j}$. Введем также множество $L=\{(\alpha_k)_k : \alpha_k\in\mathbb{N},\ \alpha_{k+1}-\alpha_k\in\{0,1\}\ \forall k\in\mathbb{N},\ \alpha_k\nearrow\infty\}$. Будем говорить, что веса $P=(\omega^{(m)})_m$ удовлетворяют условию (А), если $\forall m\in\mathbb{N}$ найдутся последовательность $(\ell_k)_k\in L$, $\alpha<1/4$, $C>0$ такие, что $\omega_k^{(\ell_k)}\le C\cdot K^{\alpha}\cdot\omega_k^{(m)}$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Заметим, что любое монтелево пространство Фреше с базисом $E\approx\Lambda(P)$, где P удовлетворяет условию (А).

В работе [I] P.Boland и S.Dineen доказали, что мономы образуют абсолютный базис в пространстве функций $H(E)$, голоморфных на вполне ядерном пространстве E с базисом. В связи с этой работой R.Meise и D.Vogt поставили вопрос: для каких пространств E будет справедлив обратный результат ? S.Dineen и R.Timoney в [2] дали ответ на этот вопрос для монтелевых пространств с базисом. В данном сообщении, используя подход, развитый в [2], доказывается несколько более слабый результат, но для более широкого класса пространств Фреше с базисом.

<u>Теорема</u>. Пусть веса $P=(\omega^{(m)})_m$ удовлетворяют условию (А) и $E\approx\Lambda(P)$ - пространство Фреше с базисом. Тогда, если мономы образуют абсолютный базис в $(H(E),\tau_0)$, то E - шварцево пространство.

ЛИТЕРАТУРА

I. Boland P.J., Dineen S. Holomorphic functions on fully nuclear spaces, Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 311-335.

2. Dineen S., Timoney R.M. Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr, Studia Math., 94 (1989), N3, 227-234.

УДК 541.24:532.25

Листров Е.А. (г.Воронеж)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ РОТОРА РЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Исследуется приближенная электрогидродинамическая модель, которая описывает как стационарные, так и нестационарные вращения диэлектрического цилиндрического ротора в слабопроводящей жидкости в пространственно-периодическом электрическом поле при постоянном электрическом потенциале электродов. Модель описывает вращения диэлектрического ротора, имеющего внутри себя цилиндрическую эквипотенциальную поверхность, учитывает эффекты объемной и поверхностной проводимости, эффекты инерций вращающегося ротора, жидкости, электрического поля, учитывает вязкость жидкости и возникновение поверхностных электрических зарядов на поверхности ротора. Эта модель описывает электрогидродинамические процессы в реоэлектрическом двигателе цилиндрической конструкции [1].

Нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка, которая описывает нестационарные вращения ротора, кроме нулевого решения, допускает при определенных условиях ненулевое решение. Это решение описывает стационарное вращение ротора двигателя.

Первым методом Ляпунова определены условия ассимптотической устойчивости этого ненулевого решения. Показано, что эти условия являются одновременно необходимыми и достаточными условиями потери устойчивости нулевого решения.

Литература

1. Шульман З.П., Носов В.М. Вращение непроводящих тел в электрореологических суспензиях.-Препринт. Минск: ИТМО АН БССР, 1985. - С. 32-35.

УДК 541.24:532.25

Листров Е.А. (г.Воронеж)

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ЭФФЕКТ ГЕРЦА-КВИНКЕ

В [1] были получены необходимые и достаточные условия существования стационарного решения уравнений электрогидродинамики, которое описывает вращение диэлектрического шара в неограниченном пространстве слабопроводящей жидкости в однородном на бесконечности постоянном электрическом поле (эффект Герца-Квинке). В докладе результаты работы [1] обобщены на случай шара из идеально проводящего материала, заключенного в сферическую диэлектрическую оболочку. Получены необходимые и достаточные условия существования стационарного вращения шара в виде двух неравенств, найдены аналитические выражения для угловой скорости вращения шара и критической величины напряженности электрического поля. Показано, что только необходимое условие существования эффекта Герца-Квинке совпадает с аналогичным условием работы [1]. Проведено сравнение полученных результатов с результатом работы [2], в которой были получены необходимые и достаточные условия возникновения эффекта Герца-Квинке для металлического цилиндра в диэлектрической оболочке. Найдены преобразования, которые позволяют простым пересчетом параметров использовать анализ и выводы работы [2] в рассматриваемой задаче. Исследование проведено в связи с использованием в технике суспензий металлических шарообразных частиц в диэлектрических оболочках, а также для проведения расчетов реоэлектрических двигателей с шаровым ротором.

Литература

1. Симонова Т.С., Духин С.С. Теория вращения сферических частиц в постоянном электрическом поле. Коллоид. журнал. - 1973. - Т. 35. - № 5. - С. 918-921.

2. Листров Е.А. К расчету реоэлектрических преобразователей. Инж. - физ. журнал. - 1984. - Т. 46. - № 1. - С. 108-113.

Литманович О.Ю.

О НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lx \equiv x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x = f(t,x) \qquad (t \neq \xi_i) \tag{1}$$

с достаточно гладкими $p_i(t)$ и $f(t,x)$. В точках $a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_m<\xi_{m+1}=b$ рассмотрим краевые условия

$$x(\xi_i)=x'(\xi_i)=\ldots=x^{(\nu_i-1)}(\xi_i)=0 \qquad (i=\overline{0,m+1}) \tag{2}$$

Решения ищутся в классе $E(\xi,\Gamma)$ (см.[1]) функций, каждая из которых может иметь в точке ξ_i дефект не более γ_i. Предполагается, что сумма кратностей $|\nu|=\nu_0+\ldots+\nu_{m+1}$ и сумма дефектов $|\Gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_m$ связаны равенством $|\nu|=n+|\Gamma|$.

Введем в рассмотрение функцию $F(t,z)=V_1(t)\cdot f(t,z\cdot u_0(t))$, где

$$u_0(t)=(t-\xi_0)^{\nu_0}(t-\xi_1)^{\nu_1}\ldots(t-\xi_{m+1})^{m+1}$$

и

$$V_1(t)=(t-a)^{n-\nu_0}(t-b)^{n-\nu_{m+1}}\cdot\prod_{i=1}^{m}(t-\xi_i)^{\gamma_i}.$$

Мы предполагаем далее, что функция $F(t,z)$ при любом $t\in[a,b]$ не убывает по z и что, более того, она имеет ограниченный по z рост, т.е. существует такая суммируемая функция $\varphi(t)$, что

$$F(t,z+h)-F(t,z)\leq\varphi(t)\cdot h$$

при любых $z,h\geq 0$ и $t\in[a,b]$. Пусть $F(t,0)\geq 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть существует непрерывная и неотрицательная на $[a,b]$ функция $\hat{z}(t)$, для которой

$$\varphi(t)\cdot\hat{z}(t)\leq V_1(t)L(u_0(t)\cdot\hat{z}(t)) \qquad (a\leq t\leq b).$$

Тогда существует хотя бы одно решение задачи (1),(2) в $E(\xi,\Gamma)$.

Решение, определяемое этой теоремой, может быть получено монотонным итерационным процессом типа Чаплыгина, причем монотонность здесь будет в смысле полуупорядоченности, согласованной с функцией $u_0(t)$.

1. Литманович О.Ю. О переопределенной задаче Валле-Пуссена./Тез.докл. школы "Понтрягинские чтения - IV"// Воронеж, 1993. - с.121.

УДК 517.518.3+517.986.6 Лукашенко Т.П. (Москва)

СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ И ВСПЛЕСКИ

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – пространства с мерами μ и ν соответственно, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, U – унитарный оператор из $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$ в $\mathcal{H}$, а $S(h)$ – измеримое отображение почти всего $\mathcal{N}$ в $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$ и $0<\mathcal{K}=\int\limits_{\mathcal{N}}|S(h)|^2 d\nu(h)<+\infty$ почти всюду на $\mathcal{M}$, пусть $U_h[f]=U[f\cdot\bar{S}(h)]$.

Теорема. Для любой функции $f\in\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$ верны аналог равенства Парсеваля-Планшереля

$$\frac{1}{\mathcal{K}}\int\limits_{\mathcal{N}}\|U_h[f]\|^2_{\mathcal{H}}\,d\nu(h)=\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{M})}$$

и формула восстановления

$$f=\frac{1}{\mathcal{K}}\int\limits_{\mathcal{N}}U^{-1}[U_h[f]]\cdot S(h)\,d\nu(h),$$

где интеграл может пониматься или как интеграл Лебега по $\mathcal{N}$ от функции со значениями в $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$ или как интеграл Лебега по $\mathcal{N}$ от функции с параметром из $\mathcal{M}$ и в этом случае последнее равенство верно на $\mathcal{M}$ почти всюду.

Взяв $\mathcal{M}=\mathcal{N}=\mathbb{R}$, $\mu=\nu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $U[f]$ – преобразование Фурье f, $S(h)=\omega(x-h)$, где $\omega\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $0<\mathcal{K}=\|\omega\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}<+\infty$, получим теорему о разложении по всплескам Габора $\omega_{y,h}(x)=e^{2\pi i y x}\omega(x-h)$, см. [1, с. 317–318].

Аналогичное рассмотрение на топологических группах приводит к результатам, включающим в себя и результаты из [2].

Возможно построение и других систем разложения функций. Так если $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, μ, ν, $\mathcal{H}$ те же, что и выше, а $U[f]$ – преобразование Гильберта f, $S(h)=\vartheta(x-h)$, где $\vartheta\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $0<\mathcal{K}=\|\vartheta\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}<+\infty$, то получим теорему о разложении f по функциям $\vartheta_{y,h}(x)=\dfrac{\vartheta(x-h)}{y-x}$.

Литература

1. Gasquet C., Witomski P. Analyse de Fourier et applications. Paris: Hermann, 1990.

2. Лукашенко Т.П. Всплески на топологических группах// Известия АН, Сер. матем., 1994, 58, №3. С. 88–102.

Работа поддержана проектом РФФИ № 94-01-00417.

УДК 517.5 С.Ф.Лукомский (Саратов)

Сходимость почти всюду кратных рядов Уолша.

Если $n = \sum \varepsilon_k 2^k$, то положим $V(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| + \varepsilon_0$.

Определение 1. *Пусть дана бесконечная последовательность векторов с натуральными координатами*

$$\mathbf{n}_\nu = (n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots, n_{p_\nu}^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \ldots; \; n_i^{(\nu)} > n_{i+1}^{(\nu)}. \qquad (1)$$

Будем говорить, что последовательность векторов (1) *удовлетворяет условию сходимости, если существует* $s \in \mathbb{N}$ *такое, что если для координат векторов* $\mathbf{n}_{\nu_l}$ *выполняется неравенство*

$$n_{i_1}^{(\nu_1)} > n_{i_2}^{(\nu_2)} > \ldots > n_{i_s}^{(\nu_s)} \geq n_{j_s}^{(\nu_s)} > \ldots > n_{j_2}^{(\nu_2)} > n_{j_1}^{(\nu_1)}, \quad \text{то } s \leq \sigma.$$

Определение 2. *Пусть* $\Lambda = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *возрастающая последовательность натуральных чисел и пусть*

$$n_j = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(j) 2^k = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=k_{2l}}^{k_{2l-1}-1} 2^k \quad (k_l = k_l(j) > k_{l+1} = k_{l+1}(j)). \qquad (2)$$

Числу n_j *поставим в соответствие вектор* $\mathbf{n}_j = [k_l(j)]_{l=1}^{2s}$.

Будем говорить, что Λ *удовлетворяет условию сходимости, если соответствующая последовательность векторов* $\{\mathbf{n}_j\}$ *удовлетворяет условию сходимости.*

Теорема 1. *Если* Λ *удовлетворяет условию сходимости, то для любой* $f \in L(D^2)$ *частичные суммы* $S_{n,n}(f)$ $(n \in \Lambda)$ *сходятся к* f *п.вс.*

Теорема 2. *Если* $\sup\limits_{n \in \Lambda} v(n) < +\infty$ *и* Λ *не удовлетворяет условию сходимости, то существует* $f \in L(\mathrm{Log}^+ L)^{1-\varepsilon}(D^2)$ *при всех* $\varepsilon > 0$, *для которой* $S_{n,n}(f)(n \in \Lambda)$ *расходятся почти всюду.*

Теорема 3. *Если* $\sup\limits_{n \in \Lambda} v(n) < +\infty$, *то для любой* $f \in L(\mathrm{Log}^+ L)(D^2)$, *частичные суммы* $S_{n,n}(f)$ $(n \in \Lambda)$ *сходятся почти всюду.*

УДК 518.9 О.А.Малафеев,С.А.Немнюгин,Н.А.Тарасова (Санкт-Петербург)

ДИНАМИКА РАЗВИТИЯ ОТРАСЛИ С ЧИСТОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ

Рассматривается динамическая модель отрасли с чистой конкуренцией, где составляющие отрасль фирмы взаимодействуют между собой на основе конкурентной модели Курно. Описывая процесс производства продукта, получаем уравнение адаптации цен

$$\dot{p} = \gamma(X - \sum_{k=1}^{n} Q_k),$$

где $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i - сбыт продукта фирмой, Q_k - выпуск в единицу времени. Это уравнение решается для случая $n = 2$. Далее вводится стохастическая динамика внешних переменных модели, таких как p_m - цена материала, p_0 - индекс цен остальных товаров, Y - доход покупателей и строится трехкомпонентный стохастический процесс для перечисленных выше параметров. В этом случае изменение цены описывается стохастическим дифференциальным уравнением, для которого в некоторых случаях удается построить явное решение.

Далее в модели учитывается влияние запаса продукта и считается, что даже при равенстве сбыта и производства цены меняются при текущем уровне запаса S отличном от оптимального S^0. В этом случае

$$\dot{p} = \gamma(X - Q_1 - Q_2) + \lambda(S^0 - S),$$

$$\dot{S} = Q_1 + Q_2 - X.$$

Решая эту систему, получаем различные варианты решения в зависимости от параметров модели. В двухфакторной модели, когда выпуск продукта описывается производственной функцией Кобба-Дугласа, представляющей выпуск продукта как функцию капитала и труда в виде

$$Q = AL^{a}K^{(1-a)}$$

где K - капитал, $a \in (0,1)$, $A > 0$ - константа, исследуется проблема существования равновесия Курно.

Далее рассматривается проблема оптимизации полного дохода в течение определенного промежутка времени в терминах стохастического управления. Эта задача решается методами динамического программирования.

МАМЕДХАНОВ ДЖ.И. (Баку)

КОНСТРУКТИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАСС ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ.

В докладе исследуется проблема Дж.Уольша связанная с теоремами Джексона (прямая теорема) и Бернштейнна (обратная теорема), которые определяют конструктивную характеристику периодических функции из класса Гелдера порядка α $(0<\alpha<1)$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Проблема состоит в следующем:
каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять замкнутая кривая Г для того чтобы на ней для фукций $f(z)$ аналитических внутри Г и удовлетворяющих не Г условию Гелдера порядка α $(0<\alpha<1)$ были справедливы,замыкающие друг друга теоремы Джексона и Бернштейна

Обозначим класс таких замкнутых кривых через U. Пусть Φ отображает внешность единичной окружности γ_0 на внешность кривой Г, а Φ_1 внутренность γ_0 на внутренность Г.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если $\Gamma\in U$, то Г-стремляемые кривая.

Теорема 2. Если для замкнутой кривой Г функции Φ и Φ_1 принадлежат $H^1(\gamma_0)$ (класс Гелдера порядка 1), то $\Gamma\in U$.

Очевидно справедливо и обратное утверждение. Из этих утверждений непосредственно можно получить, что класс кривых U, пересекается с классом замкнутых гладких кривых C^1.

Отметим, что многие года, все исследователи работающих в этом направлении считали, что $U\in C^1$

УДК 517.9 Мамчуев А.М. (Карачаевск)

О РЕШЕНИЯХ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Изучаются решения линейного однородного операторного уравнения:

$$f(A)(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n(x) = 0 \qquad (1)$$

с целой характеристической функцией $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Структуру решений уравнения (1) описывает

<u>Теорема 1.</u> Пусть H – полное локально выпуклое пространство с бесконечной системой полунорм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$, определяющей топологию в H; A – линейный непрерывный оператор, действующий в H, имеющий порядок $\beta > 0$ и тип $\alpha < \infty$. Тогда каждое решение $x \in H$ уравнения (1), с целой характеристической функцией $f \in [1/\beta ; \frac{\beta}{2e^2\alpha})$ аппроксимируется корневыми векторами оператора A.

Для случая, когда известна собственная функция $f(\lambda)$, оператора A, имеет место

<u>Теорема 2.</u> Пусть в условиях теоремы 1, $f(\lambda)$ – собственная вектор-функция оператора A. Тогда каждое решение $x \in H$ уравнения (1), с целой характеристической функцией $f \in [1/\beta ; \frac{\beta}{2e^2\alpha})$ представляется в виде:

$$x = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\lambda_j|<r_m} \sum_{k=0}^{m_j-1} d_{jk} f^{(k)}(\lambda_j)$$

где d_{jk} – постоянные числа, $\{\lambda_j\}$ – нули характеристической функции, m_j – кратность нуля λ_j, а $r_m \to \infty$ – последовательность положительных чисел зависящая только от характеристической функции уравнения.

Полученные теоремы содержат в качестве частных случаев некоторые известные классические результаты А.О.Гельфонда и А.Ф.Леонтьева о решениях линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

УДК 517.5 МАНОВА Н.В. (НОВГОРОД)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^b \frac{f(x)}{x+y} \mathcal{K}\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right) dx = g(y),$$

где $y \in [0, b]$, $\mathcal{K}(k)$ – это полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = 2\sqrt{xy}/(x+y)$. Известно, что данное уравнение может быть сведено к уравнению

$$(Af)(y) \equiv \int_0^y \frac{ds}{(y^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} \int_s^b \frac{f(x)\,dx}{(x^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} = \tilde{g}(y).$$

Введём пространства: $C_{q(x)}[0, b]$ –непрерывных с весом $q(x) = \sqrt{b^2 - x^2}/x$ функций на $[0, b]$; $C^2_y[0, b]$ – дважды непрерывно дифференцируемых с весом функций на $[0, b]$. Нормы в этих пространствах заданы соответственно

$$\| f \|_{C_{q(x)}[0,b]} = \sup_x | q(x) \cdot f(x) |,$$

$$\| \psi \|_{C^2_y[0,b]} = \max_y |\psi(y)| + \sum_{i=1}^{2} \sup_y \left| \frac{\psi^{(i)}(y)}{y^i} \right|.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если оператор

$$A^{-1} \in \mathcal{L}\left(C^2_y[0, b], C_{q(x)}[0, b]\right),$$

то справедлива оценка

$$\| A^{-1} \| \le b.$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Иванова Н.В. Решение некоторого типа интегральных уравнений. –Деп. ВИНИТИ, №2923-83. Деп. – 29с.

УДК 517. Маркуш И.И., Бут Н.Л., Ризун В.И.
(Черновцы - Алчевск)

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается новый метод исследования дифференциальных уравнений (ДУ) - модифицированный метод вспомогательных функций (ММВФ). ММВФ основан на двух подходах в исследовании ДУ: введении в изучаемое ДУ вспомогательных функций и вспомогательных систем функций.

ММВФ обобщает результаты, полученные в [1], и позволяет решать такие задачи:

1. Построить новые классы ДУ, которые интегрируются в квадратурах (через элементарные и специальные функции).

2. Успешно исследовать ДУ с разрывными коэффициентами, но суммируемыми в соответствующем пространстве.

3. ММВФ дает возможность получить асимптотическое решение ДУ 2-го порядка. При этом все преобразования при получении решения ДУ тождественны, и используется только известное асимптотическое представление цилиндрических функций

$$Z_\nu(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi p}}\,\cos\left(p-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

4. Построены новые системы функций, при помощи которых эффективно находится решение ДУ (линейных, нелинейных), а также систем ДУ.

Эффективность ММВФ и его преимущество перед существующими методами заключается в том, что неизвестные коэффициенты C_i в решении-ряде $\sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(t)$ находятся из очень простых уравнений

$$c_i=\sqrt{a_i}\,,\quad (i=1,2,\dots),$$

где a_i - известные величины, которые зависят от коэффициентов исходного ДУ.

5. При помощи ММВФ удается представить решение ДУ в интегральной форме (интеграл Стилтьеса). Последнее дает возможность исследовать решение ДУ в целом.

1. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.

УДК 517.53 Махмудов А.М. (Махачкала)

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ ФУНКЦИЙ С БЛИЗКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ НАИМЕНЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Задача на сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций возник в теории функций достаточно давно. В явной форме эта задача была поставлена впервые С.Н.Мергеляном в начале 50-х годов. В 1955 году А.А.Гончаром был построен пример функции, равномерные наименьшие рациональные уклонения $L^\infty R_n(f,[-1,1])$ которой убывают к нулю быстрее любой наперед заданной скорости, в то время как наименьшие полиномиальные уклонения $L^\infty E_n(f,[-1,1])$ убывают к нулю сколь угодно медленно. В связи с подобными результатами возникла гипотеза, что всегда $L^\infty R_n(f,E) = o(L^\infty E_n(f,E))$ при $n\to\infty$, $E\subset\mathbb{C}$. В 1964 году Б.Боэм установил, что если равенство $L^\infty E_n(f,[-1,1]) = L^\infty R_n(f,[-1,1])$ имеет место для каждого натурального числа n, то функция $f(x)$ имеет вид $a\,T_k(x)+b$, где a и b – действительные постоянные, а $T_k(x)$ – полином Чебышева некоторой степени k. В 1967 году А.Л.Левин и В.М.Тихомиров показали, что всякая функция $f(z)$, непрерывная на $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}$ и аналитическая во внутренних точках D, для которой при всех номерах n выполняется равенство $L^\infty E_n(f,D) = L^\infty R_n(f,D)$, имеет вид $c\,z^m+d$, где m – целое неотрицательное, c и d – комплексные постоянные. В том же году Е.П.Долженко построил целую функцию f, для которой равенство $L^\infty E_n(f,D) = L^\infty R_n(f,D) > 0$ может выполняться почти для всех n. Рассмотрим следующую задачу: что можно сказать о функции $f\in L^p(E)$, если разность $L^p E_n(f,E) - L^p R_n(f,E)\to 0$ достаточно быстро при $n\to\infty$? В 1989 году автором было установлено, что если $f\in AL^p(D)$, $p>1$, $\rho = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{L^pE_n(f,D)-L^pR_n(f,D)}$, то $f(z)$ аналитически продолжается в круг $|z|<1/\rho$ и на границе этого круга имеет хотя бы одну особую точку.

В сообщении этот результат переносится на случай отрезка $[-1,1]$.

ТЕОРЕМА. Пусть $f\in L^p([-1,1])$, $p>1$,

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{L^pE_n(f,[-1,1]) - L^pR_n(f,[-1,1])} < 1.$$

Тогда $f(x)$ почти всюду на $[-1,1]$ является сужением некоторой функции $\tilde f(z)$, аналитической внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и с суммой полуосей $1/\rho$, имеющей на границе этого эллипса хотя бы одну особую точку.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f\in L^p([-1,1])$, $p>1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{L^pE_n(f,[-1,1]) - L^pR_n(f,[-1,1])} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{L^pE_n(f,[-1,1])}.$$

УДК 517.984

Мащенко П. К. (Ульяновск)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕКОТОРОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ

Пусть A - интегродифференциальный оператор вида

$$Ay = y^{(n)} + Ny^{(n)} \equiv y^{(n)}(x) + \int_0^1 N(x,t)y^{(n)}(t)dt, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций из $C^n[0;1]$, удовлетворяющих условиям

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (2)$$

Будем считать, что $n = 2S > 2$ - четно, -1 - регулярная точка оператора N, и его ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$\frac{\partial^k}{\partial t^k} N(x,t)$ - непрерывна в квадрате $[0,1]\times[0,1]$, $k=\overline{0,n}$;

$\varphi_k(x) \equiv (-1)^k \frac{\partial^{n-1-k}}{\partial t^{n-1-k}} N(x,t)\big|_{t=x} \in C^s[0,1]$, $k=\overline{0,n-1}$;

$\varphi_k^{(\nu)}(1) = 0$, $\nu = \overline{0,s-1}$;

$$\det\left\|\varphi_{k+s}^{(\nu)}(0)\right\|_{\nu,k=0}^{s-1} \neq 0, \quad \det\left\|\varphi_{k+s+1}^{(\nu)}(0)\right\|_{\nu,k=0}^{s-2} \neq 0.$$

Оператор (1), у которого вместо условий (2) заданы краевые условия, близкие, в известной мере, к регулярным, подробно изучен А. П. Хромовым. Условия (2) соответствуют предельному случаю нерегулярных краевых условий. В частности, у обыкновенного дифференциального оператора с условиями (2) отсутствуют собственные функции, его резольвента $R_\lambda = (A-\lambda E)^{-1}$, где E - единичный оператор, имеет экспоненциальный порядок роста по λ. "Возмущающий член" $Ny^{(n)}$ в операторе (1) в какой-то мере сглаживает воздействие нерегулярных условий (2).

Доказывается, что оператор A имеет счетную последовательность собственных значений λ_k $(k=\overline{1,\infty})$, и для $f \in C[0,1]$ равномерная норма $\|R_\lambda f\| = o(1)$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Lambda_\delta$, где Λ_δ - образ при отображении $\lambda = -\rho^n$ области, полученной из сектора $-\pi/n \le \arg\rho < \pi/n$ выбрасыванием δ - окрестностей точек $\rho_k = (-\lambda_k)^{1/n}$, $k=\overline{1,\infty}$. На основе этой оценки доказывается, что всякая функция из области определения оператора A разложима на $[0,1]$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций оператора A.

УДК 681.324:519.6

Меньших В.В., Скляров В.А., Субботин В.Ф. (Воронеж)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УВЕЛИЧЕНИЯ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ.

Наиболее существенно на сходимость (число, обратное числу ветвлений) метода ветвей и границ (МВГ) решения задачи минимизации длительности расписания выполнения совокупности взаимосвязанных операций оказывает оценка частичных решений. Известно, что чем больше значение оценки, тем больше сходимость метода [1]. Но оценка "частичного" решения не должна превышать значения P любого "полного" решения задачи, включающего это частичное решение. Как правило, в качестве оценки используется длина Q критического пути графа N информационных отношений между операциями. Предлагается новая оценка, определяемая следующим образом.

Обозначим $s_1,\dots,s_n$ такую последовательность операций, при которой дуги графа N направлены от младших членов последовательности к старшим; $T=(t_1,\dots,t_n)$ - вектор времен выполнения операций. Зафиксируем для каждой операции ее исполнителей i_k из множества исполнителей I. Рассмотрим операторы q_i в пространстве весов операций $V=(v_1,\dots,v_n)$ действующие по правилу :

$$q_i(v_i) = \begin{cases} v_i, \text{ если } i \neq j, \\ \max\limits_{i_k \in I} \Big(\sum\limits_{\substack{i_s=i_k \\ (s,i)\in N}} t_s + \min\limits_{\substack{i_s=i_k \\ (s,i)\in N}} v_s, \ \max\limits_{(s,i)\in N} (v_s+t_s) \Big). \end{cases}$$

Значение $M = \max\limits_{v_j \in V} (q_n \dots q_2 q_1(0)+T)$ является требуемой оценкой.

Теорема. $Q \leqslant M \leqslant P$.

Таким образом, использование оценки M всегда увеличивает сходимость МВГ.

В [2,3] предложена топологическая характеристика графа N - среднее количество R вершин в ярусах ярусно-параллельной формы графа. Осуществлен статистический эксперимент с целью определения эффективности использования предложенной оценки. Получены статистические зависимости оценок эффективности от параметров решаемой задачи и, в частности, от величины $R/|I|$.

1. Теория расписаний и вычислительные машины. /Под ред. Э.Г.Коффмана./ М.:Наука, 1984, 335с..

2. Агафонова Н.А., Меньших В.В.. Сравнение алгоритмов диспетчеризации для двухпроцессорной вычислительной системы. Автоматика и вычислительная техника, 1992, N 1, с.3-5.

3. Меньших В.В.. Использование жестких диспетчеров в двухпроцессорной вычислительной системе. Автоматика и вычислительная техника, 1993, N 3, с.76-78.

УДК 517.544 С.Р. МИРОНОВА (Казань)

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СЧЕТНОМ МНОЖЕСТВЕ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ

Пусть Γ_k, $k = \overline{1,\infty}$ простые замкнутые кривые, ограничивающие попарно не пересекающиеся области D_k^+ и сгущающиеся к конечной точке z_0, $\Gamma = \bigcup\limits_{k\geq 1} \Gamma_k$. В работе рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$K_0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)S_\Gamma\varphi(t) = f(t)\ , \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ – заданные на Γ гельдеровы функции, $\varphi(t)$ – искомая функция. Сингулярный интерал определяется формулой

$$S_\Gamma\varphi(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t)\ ,$$

где $\Phi(z)$ есть решение задачи о скачке

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \varphi(t)\ , \quad t \in \Gamma\ ,$$

$$\Phi^-(\infty) = 0\ , \qquad \Phi(z) = O\left(|z - z_0|^{-\gamma}\right)\ , \quad \gamma < 1\ .$$

Получены условия, при которых уравнение (1) имеет классическую картину разрешимости.

Кроме того, в работе исследуется союзное с характеристическим сингулярное интегральное уравнение

$$K_0'\psi \equiv a(t)\psi(t) - S_\Gamma(b\psi(t)) = h(t)\ .$$

Отметим, что ранее автором [1] рассматривались аналогичные уравнения на одной неспрямляемой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миронова С.Р. *Сингулярные интегральные уравнения на неспрямляемой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – №8. – С. 40–48.

УДК 519.3 Морозов С.Ф., Семенов А.В. (Нижний Новгород)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

Устанавливаются необходимые условия минимума (максимума) для одномерных вариационных функционалов со старшими производными (до порядка n) на классе функций, имеющих непрерывные производные порядка n во всей области определения за исключением конечного числа точек разрыва производных любого порядка k $(0 \leq k \leq n)$. Полученные необходимые условия экстремума вариационных функционалов содержат, как частные случаи, необходимые условия Размадзе А.М. [I], Циммермана В. [2], А.Кош [3].

Литература:

1. Razmadze A.M. Sur les Solutions Discontinues dans le Calcul des Variations // Math Ann.-1925.-Bd 94.-s 1-52.
2. Циммерман В. Разрывные линии в вариационном исчислении.-Одесса: Типография штаба округа, 1896.
3. A.Kósa. Notwendige Bedingungen für die diskontinuierlichen Lösungen von den Variationsproblemen n-ter Ordnung // Acta Math. Acad Sci. Hung. - 1960. - N 11 - s. 23-42.

УДК 517.51 Мулгачев М. П. (Москва)

Коэффициенты Фурье функций ограниченной вариации, не принадлежащих Lip 1

Известно, что коэффициенты Фурье функций ограниченной вариации имеют порядок $\underline{\underline{O}}(\frac{1}{n})$. Как впервые показал Ф. Рисс в работе [1], Существуют функции ограниченной вариации и непрерывные всюду, коэффициенты Фурье которых имеют точный порядок $\underline{\underline{O}}(\frac{1}{n})$.

Можно ли сказать то же самое про функции из BV, принадлежащие, скажем, Lip α, где $0 < \alpha < 1$? Во–первых, сразу заметим, что для функций из класса Lip 1 это неверно, так как они, будучи абсолютно непрерывными, имеют коэффициенты Фурье порядка $\bar{\bar{o}}(\frac{1}{n})$. Ответ на поставленный вопрос положителен, но, более того, мы покажем, что для любой функции f, не принадлежащей Lip 1, найдется функция $\bar{f}$ с модулем непрерывности не хуже, чем модуль непрерывности f, то есть $\delta(\bar{f}, h) = \underline{\underline{O}}(\delta(f, h))$ и коэффициенты Фурье которой не имеют порядок $\bar{\bar{o}}(\frac{1}{n})$. Для доказательства этого факта мы будем пользоваться так называемыми произведениями Рисса.

Рассмотрим бесконечные произведения

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}[1+\cos(n_\nu x)], \quad \text{где } \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \geq 3, \ \nu \in \mathbf{N}.$$

Так определенное бесконечное произведение имеет множество интересных свойств (см. [2]).

Литература

[1] Riesz F. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Function von beschränk ter Schwankung, Math. Z. 2(1918), 312–315.

[2] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*. Т. 1.

УДК 517.927

Мустафокулов Р. (Душанбе)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

Пусть Γ – открытый геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $J(\Gamma)$ – набор его внутренних, а $\partial\Gamma$ – граничных вершин и $\{\gamma_i\}$ – совокупность всех его ребер. Пусть $\Gamma_0=\Gamma\setminus J(\Gamma)$ и каждой вершине $a\in J(\Gamma)$ приписано положительное число $\varkappa$. Обозначим через $E(\Gamma)$ пространство функций $y\in C(\Gamma)\cap C^4(\Gamma_0)$, удовлетворяющих в каждой вершине $a\in J(\Gamma)$ условиям

$$y''(a)=0\ ,\ \sum_{i\in I(a)}\left[(\mu_i y_i'')'-\nu_i y_i'\right](a+0)+\varkappa(a)\,y(a)=0\ , \qquad (1)$$

где $I(a)$ – множество индексов ребер, примыкающих к a, $y_i(\cdot)$ есть сужение $y(\cdot)$ на γ_i, $u_i'(a+0)$ означает производную в направлении "от a", $\mu_i(\cdot)$ и $\nu_i(\cdot)$ неотрицательные на Γ функции.

Под дифференциальным уравнением четвертого порядка на графе Γ понимается соотношение

$$(py'')''(x)=f(x)\ , \qquad (2)$$

если его решения ищутся только в $E(\Gamma)$. Здесь $p(\cdot)$ достаточно гладкая на Γ_0 функция. Для уравнения (2) можно ставить краевые задачи заданием каких-нибудь краевых условий на $\partial\Gamma$, например,

$$y(b)-\alpha\{(py'')'-\nu y'\}(b-0)=0\ \ (\alpha\geq 0),\ \ y'(b-0)+\beta y''(b)=0\ \ (\beta\geq 0)\ . \qquad (3)$$

На основе принципа минимума потенциальной энергии показывается, что малая деформация системы стержней, связанных в виде плоского графа, описывается задачей (2),(3); в данном случае в условии (1) в качестве $\mu_i(a)$ выступает натяжение $p_i(a)$, а $\nu_i(a)$ означает реакцию на кручение i-го стержня в точке a. Условия (1) теперь выражают шарнирное соединение в точке a с коэффициентом упругости $\varkappa$ и равновесия сил, приложенных к шарниру.

Теорема. Пусть $p(x)\geq 0$ и $\nu(x)\geq 0$, причем $\nu(x)\not\equiv 0$ ни на одном ребре Γ. Тогда задача (1)-(3) невырождена.

Отметим, что утверждение теоремы сохраняется, если $\nu(a)=0$, но $\varkappa(a)>0$ для всех $a\in J(\Gamma)$. Если же $\varkappa(a)=0$, то задача однозначно разрешима лишь для графов типа пучка.

Из этой теоремы вытекает существование и единственность функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1)-(3), которая обладает всеми свойствами функции Грина скалярной задачи. Более того, в условиях теоремы функция $G(x,s)$ положительна внутри $\Gamma\times\Gamma$.

УДК 517. **Назаренко М. А.** (Москва)

О возможности наилучшего локального неглобального рационального приближения в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$

Рассмотрим задачу о локальном наилучшем рациональном приближении некоторого фиксированного элемента f банахова пространства над полем вещественных или комплексных чисел. Рациональную функцию $R_{m,n}(x) = P_m(x)/\prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_j x)$, степени (m,n) будем называть рациональной функцией локального наилучшего приближения, если для любого $\varepsilon > 0$, для любого набора $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такого, что $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| < \varepsilon$, и любого полинома Q_m степени не выше m выполнено соотношение

$$\left\| f(x) - \frac{P_m(x)}{\prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_j x)} \right\| \le \left\| f(x) - \frac{Q_m(x)}{\prod_{j=1}^{n}(1-\beta_j x)} \right\|.$$

В работе [1] с использованием методов численного эксперимента показано, что при достаточно большом α в пространстве $C[0,\alpha]$ у функции e^{-x} существует наилучшая локальная неглобальная рациональная аппроксимация в классе действительных рациональных функций с отрицательными полюсами. В статье [2] доказано, что в действительном пространстве Харди $H_{2,R}(V)$, при $V = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}$ существует некоторое подпространство функций f, которые ни при каком натуральном n не имеют наилучшей локальной аппроксимации рациональными функциями степени (n,n), не являющейся одновременно и глобальной.

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими в единичном круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ функциями $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$ с конечной нормой $\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2$.

Теорема. *Для любого натурального числа k существует функция $f \in H_2(\mathcal{D})$, рациональная аппроксимация степени $(k,1)$ которой дает наилучшее локальное неглобальное приближение.*

Литература

[1] Kaufman E. H., Taylor G. D. Uniform approximation with rational function having negative poles. // J. Approxim. Theory. 1978. 23(4). 364–378.

[2] Baratchart L., Wielonsky F. Rational approximation in the real Hardy space H_2 and Stieltjes integrals: A uniqueness theorem. // Constr. Approximat. 1993. 9(1). 1–21.

УДК 517.956 Назарова О. А. (Владимир)

Об одной задаче усреднения для системы уравнений Максвелла

В работах (1)-(2) доказан результат об усреднении для стационарной и нестационарной систем уравнений Максвелла с идеально-проводящими включениями.

Здесь приведем регуляризованную задачу, когда включение F_ε не является идеальным проводником. В таких задачах допускается, что диэлектрическая проницаемость велика (конечна), а магнитная мала.

Это значит, что диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость имеют соответственно вид:

$$\mathbb{C}_{\varepsilon,\delta} = \begin{cases} \mathbb{C}(\varepsilon^{-1}x) & на \quad \mathbb{R}^3 \setminus F_\varepsilon \\ \delta I & на \quad F_\varepsilon \end{cases},$$

$$\mathbb{A}_{\varepsilon,\delta} = \begin{cases} \mathbb{A}(\varepsilon^{-1}x) & на \quad \mathbb{R}^3 \setminus F_\varepsilon \\ \delta^{-1} I & на \quad F_\varepsilon \end{cases},$$

где I - единичная матрица, $0 < \delta < 1$.

Рассматривается задача

$$\operatorname{rot}\left(\mathbb{C}^{-1}_{\varepsilon,\delta} \operatorname{rot} u^{\varepsilon,\delta}\right) + \mathbb{A}_{\varepsilon,\delta} u^{\varepsilon,\delta} = f \quad в \quad \mathbb{R}^3.$$

Так наряду с геометрическим параметром ε появляется физический малый параметр δ. Соотношение между этими параметрами может быть любым. Поэтому естественно рассматривать задачу когда ε и δ стремятся к нулю независимо.

Сформулируем основной результат:

При $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ имеют место соотношения

$$u^{\varepsilon,\delta} \to u^0 \quad в \quad L^2(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{rot} u^{\varepsilon,\delta} \to \operatorname{rot} u^0 \quad в \quad L^2(\mathbb{R}^3),$$

где u^0 -решение усредненной задачи

$$\operatorname{rot}\left((\mathbb{C}^0)^{-1} \operatorname{rot} u^0\right) + \mathbb{A}^0 u^0 = f,$$

причем матрицы $\mathbb{C}^0$, $\mathbb{A}^0$-положительно определенные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 93-011-1720), ISF (Grant N NYV000).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Назарова О.А. Об одной задаче усреднения для системы уравнений Максвелла. Матем. заметки, 1988, Т.44, N2, с.279-281.

2. Жиков В.В., Назарова О.А. Задача об искуственном диэлектрике. Исследования качественных свойств решений краевых задач. Воронеж: Изд. Воронежского ун-та, 1991, с.18-27.

УДК : 517.518.456
517.986.62

Наумов Олег Петрович

Метод Пуассона-Абеля суммирования рядов Фурье по мультипликативным системам.

Пусть $p_n\ (n=1,2,\ldots)$ -натуральные числа,больше 1, $m_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ и $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n = 0,1,\ldots,p_n - 1\}$ - группа с операцией $\dot{+}$: $\{x_n\} \dot{+} \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \bmod p_n\}$.

Топология на G задается системой подгрупп-окрестностей нуля : $G_n = \{\{x_k\} \in G : x_k = 0 \ \text{ для } k \le n\}$.Отображение G на $[0,1]$ $x = \{x_n\} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}$ взаимооднозначно всюду,кроме точек $\frac{\ell}{m_n}$ $(\ell \ne 0, m_n)$.С отрезка $[0,1]$ переносятся понятия меры и интеграла.

$G^* = \{\chi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ -группа характеров группы G ([1]) с нумерацией : $\chi_0(x) \equiv 1$; $\chi_{m_k}(\{x_j\}) = \exp\left(\frac{2\pi i\, x_{k+1}}{p_{k+1}}\right)$ и $\chi_n(\{x_j\}) = \prod_{k=0}^{\infty} [\chi_{m_k}(\{x_j\})]^{a_k}$,

где $n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m_k$ и a_k - целые с условием $0 \le a_k < p_{k+1}$.

Пусть $A(\tau,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i(t) \cdot \tau^i$,где $0 \le \tau < 1$. (-ядро Абеля.)

Лемма 1.

Ряд Фурье по G^* суммируется методом Пуассона-Абеля для всех непрерывных на G функций тогда и только тогда,когда

$$\sup_{0 \le \tau < 1} \int_G |A(\tau,t)|\,dt < C ,$$

где C - положительная константа.

Лемма 2.

Если $\sup_j p_j = +\infty$,то для некоторого положительного числа $\mathcal{D}$

$$\int_G |A(\tau_s,t)|\,dt \ge \mathcal{D} \ln p_{k_s} ,$$

где $\tau_s = \exp\left(-\frac{1}{m_{k_s}}\right)$,а $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$: $p_{k_s} \to +\infty$ при $s \to +\infty$.

Теорема.

1.Если $\sup_j p_j < +\infty$,то ряд Фурье по G^* любой непрерывной на G функции равномерно суммируется методом Пуассона-Абеля.

2.Если $\sup_j p_j = +\infty$,то для любой точки из G есть непрерывная на G функция,ряд Фурье которой не суммируется методом Пуассона-Абеля в этой точке.

Литература:

1.Г.Н.Агаев и др."Мультипликативные системы функций ...".Баку.1981 г.

УДК 517.538 Ю.С.Налбандян (Ростов-на-Дону)

КРАТНЫЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ И АБСОЛЮТНЫЕ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НУЛЯ

H – полурефлексивное пространство Фреше с топологией, заданной набором норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$, $e(\lambda,0)$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ – собственные элементы линейного непрерывного в H оператора M и $\forall n\ \exists m$: $\sup\limits_{|\mu|\le 1}\|e(\lambda+\mu,0)\|_n\le A\|e(\lambda,0)\|_m$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ $(A>0)$; сильное сопряженное к H пространство топологически изоморфно пространству $E=\left\{f\in H(\mathbb{C})\mid \exists n: |f|_n:=\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{|f(\lambda)|}{\|e(\lambda,0)\|_n}<\infty\right\}$. Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k\ne\lambda_j$ при $k\ne j$, $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$; $P=\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $p_k\in\mathbb{N}$ и $\forall n\ \exists m$: $p_k\le B\|e(\lambda_k,0)\|_m\|e(\lambda_k,0)\|_n^{-1}$ $(B>0)$; $e(\lambda_k,\ell)$, $\ell\ge 1$ – присоединенные элементы ℓ-го порядка. Положим $\mathscr{E}(\Lambda,P):=\{e(\lambda_k,\ell)\}_{k=1,\,\ell=0}^{\infty\ \ p_k-1}$.

Следуя Ю.Ф.Коробейнику, будем говорить, что $\mathscr{E}(\Lambda,P)$ является абсолютно представляющей системой (АПС) в H, если для любого $x\in H$

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}a_{k,\ell}\,e(\lambda_k,\ell),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}|a_{k,\ell}|\,\|e(\lambda_k,\ell)\|_n<\infty,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Если $\mathscr{E}(\Lambda,P)$ –АПС в H, то имеет место представление

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}h_{k,\ell}\,e(\lambda_k,\ell),\quad \exists h_{k,\ell}\ne 0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}|h_{k,\ell}|\,\|e(\lambda_k,\ell)\|_n<\infty,\quad \forall n\in\mathbb{N}. \quad (1)$$

(т.е. в H существует абсолютное нетривиальное разложение нуля (АНРН) по $\mathscr{E}(\Lambda,P)$). Обозначим через W класс целых функций f конечного порядка, для которых λ_k – нули кратности p_k и справедлива оценка:

$$\forall n\ \exists m\mid\ |f(\lambda)|=O\left(\|e(\lambda,0)\|_m^2\|e(\lambda,0)\|_n^{-1}\right),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Если $\mathscr{E}(\Lambda,P)$ – АПС в H и $W\ne\varnothing$, то коэффициенты любого АНРН в H находятся для $k\in\mathbb{N}$, $\ell=0,1,\dots,p_k-1$ по формуле

$$a_{k,\ell}=\frac{1}{(p_k-\ell-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_k}\left[\pi(\lambda)L(\lambda)^{-1}(\lambda-\lambda_k)^{p_k}\right]^{(p_k-\ell-1)}, \quad (2)$$

где $\pi(\lambda)\not\equiv 0$ – некоторый мультипликатор E, а $L(\lambda)\in W$.

Приведены условия, при которых из существования АНРН вида (1)-(2), где $\pi(\lambda)$ – делитель E, следует, что $\mathscr{E}(\Lambda,P)$ – АПС в H, а также примеры конкретных пространств с совпадающими между собой и различными классами мультипликаторов и делителей E.

Работа выполнена при материальной поддержке Фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-242).

УДК 517.518 Нахман А.Д. /Тамбов/

СИЛЬНЫЕ СУММЫ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ

Пусть $\{P_\ell(x)\}$, $\ell=0,1,\ldots$ – ортонормированная на $[-1,1]$ с весом $\rho(x)$ система полиномов, $G=[-1,1]^n$, $f\in L^q_\tau(G)$, где $n=1,2,\ldots,q>1$ – фиксированы, $\tau(\mathbf{x})$ – произведение всех $\mathcal{P}(x_j)\rho(x_j)$, $j=1,\ldots,n$, а измеримая функция $\mathcal{P}(x)$ удовлетворяет условию $|P_\ell(x)|\le\mathcal{P}(x)$, $\ell=0,1,\ldots$, $x\in(-1,1)$.

Сильные суммы Валле-Пуссена, порожденные прингсхеймовскими частичными суммами $S_{\mathbf{k}}(f,\mathbf{x})$ разложений Фурье по системе $\prod_{j=1}^{n} P_{\ell_j}(x_j)$ определим в виде

$$U_{\widehat{m},\widehat{\mu}}(f;\mathbf{x};\sigma)=\Big(\frac{1}{\ell(\widehat{m},\widehat{\mu})}\sum_{\widehat{\mathbf{k}}\in\mathbb{B}(\widehat{m},\widehat{\mu})}|S_{\ell\mathbf{k}}(f,\mathbf{x})|^{\sigma}\Big)^{\frac{1}{\sigma}};\ \mathbf{x}\in G. \qquad /1/$$

Здесь $\widehat{\mathbf{k}}=(k_1,\ldots,k_N,k)$ – точки из множества $\mathbb{B}=\mathbb{B}(\widehat{m},\widehat{\mu})=\Big(\prod_{j=1}^{N}\{\mu_j,\ldots,m_j\}\Big)\times\{\mu,\ldots,m\}$ /каждая одномерная компонента $\mathbb{B}$ есть произвольный отрезок ряда чисел $0,1,2,\ldots$ /, $\ell(\widehat{m},\widehat{\mu})$ – количество всех таких точек, $\ell\mathbf{k}$ – n-мерный вектор $(\ell_1k_1,\ldots,\ell_Nk_N,\ell_{N+1}k,\ldots,\ell_nk)$, произвольное $\sigma>0$ и натуральные /произвольные/ числа $\ell_1,\ldots,\ell_N,\ldots\ell_n$ – фиксированы, $N\in\{0,\ldots,n\}$; для $N=0$ имеем в /1/ усреднения типа Марцинкевича

$$U_{m,\mu}(f,\mathbf{x};\sigma)=\Big(\frac{1}{m-\mu+1}\sum_{k=\mu}^{m}|S_{\ell_1k,\ldots,\ell_nk}(f,\mathbf{x})|^{\sigma}\Big)^{\frac{1}{\sigma}},$$

для $N=n$ – обычные прингсхеймовские /сильные/ суммы Валле-Пуссена.

Основным результатом сообщения является оценка сверху максимального оператора

$$U_*(f)=U_*(f;\mathbf{x};\sigma)=\sup_{\widehat{m},\widehat{\mu}}\Big(\ln\frac{m+2}{m-\mu+1}\Big)^{N-n}\cdot\Big(\prod_{j=1}^{N}\ln\frac{m_j+2}{m_j-\mu_j+1}\Big)^{-1}\cdot U_{\widehat{m},\widehat{\mu}}(f;\mathbf{x};\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\mathcal{P}(x_j)}$$

через стандартный максимальный оператор $M(|f|^{\tau})$ типа Харди-Литтлвуда с параметром $\tau\in(1,2]$, произвольно близким к единице.

При условии $\inf\limits_{x\in(-1,1)}\mathcal{P}(x)\rho(x)>0$ тогда имеет место оценка

$$\|U_*(f)\|_q\le C\|f\tau\|_q,\quad q>1,$$

в которой постоянная C зависит лишь от перечисленных выше фиксированных параметров.

Указанные результаты /установленные путем распространения некоторых идей Б.П.Осиленкера и др./ продолжают исследования автора /Докл. АН СССР, 1991, т.321, №3, с.474-477/ и могут быть применены в вопросах сильной суммируемости линейными методами кратных полиномиальных разложений Фурье.

УДК 536.248.2 Некравцев Е.Н., Мозговой Н.В., Фалеев В.В.
(Воронеж)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОГО ПОРИСТОГО СУБЛИМАЦИОННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Кинетика и механизм сублимации из пористых материалов в вакууме при непрерывной подаче жидкости позволяет установить существование трех фазовых областей [1]:

- область жидкой фазы, в которой поступающая в пористое тело вода переохлаждалась до температуры кристаллизации;
- область твердой фазы, где происходило затвердевание и переохлаждение кристаллов до температуры сублимации;
- область газообразной фазы, где происходило истечение сублимирующих паров из пористого скелета в вакуум.

Процессы, протекающие во всех трех фазовых областях, находятся в динамической связи. Если нарушается приток жидкости или изменяется глубина вакуума, то происходит углубление поверхности сублимации до тех пор, пока во всех трех фазах не наступит стационарный процесс.

Для математических описаний этих процессов привлекается замкнутая система дифференциальных уравнений в обобщенных переменных. Предполагая, что теплопроводность пара пренебрежительно мала по сравнению с теплопроводностью скелета, а также отсутствие температурных пульсаций в однороднонедеформируемой среде, система приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого строится с учетом граничных условий, отражающих физическую картину течения процесса сублимации в пористом теле и позволяющих определить поле температуры в сформированных в условиях вакуума зонах.

Результаты расчетов иллюстрируются на графиках.

Литература

1. Фалеев В.В., Мозговой Н.В., Гуренко В.П. О сублимации льда в условиях вакуума // ИФЖ, 1982, Т. 43, N 5, С. 854

УДК 517.988 Нечаева И.В. (Пермь)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ЛАНДЕСМАНА-ЛАЗЕРА

Рассмотрим квазилинейное операторное уравнение

$$\Lambda x = Fx \qquad (1)$$

с фредгольмовым оператором $\Lambda : X \to Y$ и вполне непрерывным оператором $F : X \to Y$; X и Y - банаховы пространства. Как известно, многие классы краевых задач допускают запись в виде уравнения (I) с необратимым оператором Λ - это так называемый резонансный случай уравнения (I). Известна серия результатов о разрешимости уравнения (I), которые в силу специфики предположений получили название теорем типа теоремы Ландесмана-Лазера [I].

Предлагаются новые признаки разрешимости, которые можно отнести к упомянутой серии результатов.

Введем обозначения $X_0 = Ker\Lambda$, P - проектор на $coker\Lambda$, D_R^n - шар радиуса R с центром в нуле пространства R^n, $deg(\varphi, 0, D_R^n)$ - степень отображения φ, $x_0 = (x_{01}, \ldots x_{0n})$ - выбранный базис в $Ker\Lambda$, $a \cdot x_0 = a_1 x_{01} + \ldots + a_n x_{0n}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$.

Сформулируем одно из утверждений

<u>Теорема</u>. Пусть выполнены условия:

1) существует число $R > 0$ такое, что для всех $x \in X$ и $a \in R^n$ таких, что $|a| \geq \|x\| + R$ выполнено условие $PF(a \cdot x_0 + tx) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$,

2) $deg(PF(a \cdot x_0), 0, D_{R_0}^n) \neq 0$ для всех $R_0 \geq R$,

3) $\overline{\lim\limits_{\|x\| \to \infty}} \dfrac{\|Fx\|}{\|x\|} = 0$.

Тогда уравнение (I) имеет хотя бы одно решение.

Литература.

1. Mawhin J. Landesman-Lazer's type problems for nonlinear equations // Conf. Sem. Math. Univ. Bari. - Bari, 1977. - № 147. - 150 p.

УДК 517.512.6 Новиков В.В. (Саратов)

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Результаты Д.Уотермана [I] о равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной Λ-вариации переносятся на случай тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам. Аналогичные утверждения получены также для функций ограниченной упорядоченной Λ-вариации.

Библиографический список

I. Waterman D. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math.- 1972.- V.44.- P.107-117.

УДК 517.5 Об одной модификации всплесков Добеши

Новиков И.Я. (Воронеж).

Пусть $N \in \mathbf{N} \cup 0$. Фильтром Добеши называют тригонометрический полином $d_N(\zeta) = 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{2N+1} h_N(l)e^{-il\zeta}$ с действительными коэффициентами $h_N(l)$, удовлетворяющий условию $| d_N(\zeta) |^2 = Q_N(\cos \zeta)$, где

$$Q_N(t) = \sum_{l=N+1}^{2N+1} \binom{2N+1}{l} \left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{2N+1-l}.$$

В [1] доказано, что всплеск $\psi^{D,N}$, определяемый равенством $\hat{\psi}^{D,N}(\zeta) = e^{-i\zeta/2}\overline{d_N(\zeta/2+\pi)}\prod_{l=2}^{\infty} d_N(\zeta 2^{-l})$ порождает в $L_2(\mathbf{R})$ ортонормированный базис $\{2^{j/2}\psi^{D,N}(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$.

Кроме того, существует константа $\lambda > 0$ такая, что $\psi^{D,N} \in C^{\lambda N}$.

Однако (см. [2]), локализованность всплесков $\psi^{D,N}$ ухудшается с повышением гладкости, так как соответствующая масштабирующая функция $\varphi^{D,N}$ стремится в норме $L_2(\mathbf{R})$ к масштабирующей функции всплесков Шеннона-Котельникова.

Конструкцию Добеши можно модернизировать. Пусть $a \in (0,1)$, $f_a(t)$ - бесконечно-дифференцируемая неотрицательная функция на [-1, 1], равная 0 при $t \in [-1, -a]$ и удовлетворяющая тождеству $f_a(t) + f_a(-t) = 1, \quad t \in [-1, 1]$. Рассмотрим тригонометрические полиномы $m_N^a(\zeta) = 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{N} h_N^a(l)e^{-il\zeta}$, $N \in \mathbf{N}$, с действительными коэффициентами $h_N^a(l)$, удовлетворяющие условию $| m_N^a(\zeta) |^2 = B_N^a(\cos\zeta)$, где

$$B_N^a(t) = \sum_{l=0}^{N} f_a\left(\frac{2l-N}{N}\right)\binom{N}{l}\left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{N-l}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если $a < (\ln 4 - \ln 3)/(\ln 4 + \ln 3)$, то всплеск $\psi^{a,N}$, определяемый равенством $\hat{\psi}^{a,N}(\zeta) = e^{-i\zeta/2}\overline{m_N^a(\zeta/2+\pi)}\prod_{l=2}^{\infty} m_N^a(\zeta 2^{-l})$ порождает в $L_2(\mathbf{R})$ ортонормированный базис $\{2^{j/2}\psi^{a,N}(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a < (\ln 4 - \ln 3)/(\ln 4 + \ln 3)$. Тогда существует константа $\mu > 0$ такая, что $\psi^{a,N} \in C^{\mu N}, N \in \mathbf{N}$.

Отметим, что всплески $\psi^{a,N}$ не теряют локализованности с повышением гладкости, так как соответствующая масштабирующая функция $\varphi^{a,N}$ стремится в норме $L_2(\mathbf{R})$ к масштабирующей функции всплесков Мейера.

Литература

1. I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909-998.
2. C.K.Chui, *Wavelets for precise time-frequency localisation*, Wavelet Workshop. Singapore (1994), 1-30.

УДК 517.98 Новиков С.Я. /Самара/

ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМАМИ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К УСТОЙЧИВЫМ

Вещественную функцию $s^{(r)}(\omega)$, $0 \le \omega \le 1$, для которой

$$\int_{[0,1]} e^{its(\omega)} d\omega = e^{-c|t|^r},\ c>0,\ 0<r\le 2,\ -\infty<t<\infty,$$

принято называть r-устойчивой. 2-устойчивая функция – это функция, имеющая нормальное или гауссовское распределение. Рассмотрим функцию $g^{(r)}(\omega)=\omega^{-1/r}$, $0<r<\infty$, $0<\omega\le 1$. При $0<r<2$ функции распределения $d_{s^{(r)}}(t)$ и $d_{g^{(r)}}(t)=t^{-r}$ имеют одинаковую асимптотику при $t\to\infty$, следовательно, в любом симметричном пространстве /СП/, содержащем эти функции /а это пространства, удовлетворяющие соотношению $E\supset L_{r,\infty}$/ имеем

$$\|\sum_n a_n s_n^{(r)}\|_E \approx \|\sum_n a_n g_n^{(r)}\|_E \approx (\sum|a_n|^r)^{1/r}$$

Здесь $s_n^{(r)}$, $g_n^{(r)}$ – последовательность независимых одинаково распределенных функций, $d_{g_n^{(r)}}(t)=d_{g^{(r)}}(t)$, $d_{s_n^{(r)}}(t)=d_{s^{(r)}}(t)$. Однако при $r\geqslant 2$ отмеченное сходство уже не имеет места. Если $s^{(2)}\in E$ для всех $E\supset G$, где G – замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_N, $N(u)=e^{u^2}-1$, и во всех таких E $[(s_n^{(2)})]$ изометрично ℓ_2, то $g^{(2)}\in E$ только для $E\supset L_{2,\infty}$ и порождает в этих пространствах не ℓ_2, а пространство Орлича последовательностей ℓ_M, где

$M(u)=u^2\ln(1+u^{-1})$. Для $r>2$ понятие r-устойчивой функции теряет смысл, в то время как функции $g_n^{(r)}\in E$ такие, что $E\supset L_{r,\infty}$ и порождают в этих пространствах гильбертово подпространство.

На полуоси $[0,\infty)$ заменой независимости на дизъюнктность получена

Теорема. Если $(g_n^{(r)})$ – последовательность дизъюнктных функций, одинаково распределенных с функцией $g^{(r)}$, то

$$\|\sum_n a_n g_n^{(r)}\|_E \approx (\sum_n|a_n|^r)^{1/r};\ E\supset L_{r,\infty}.$$

УДК 517.968

Новикова Л.В. / г.Ростов-на-Дону /

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Рассмотрим в некоторой окрестности S нуля пространства $\mathcal{B}$ отображение

$$u \longmapsto E_t u + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{N}_{t,k}(u) = E_t + \Phi(u), \ u \in S$$

где линейный оператор E_t определен следующим образом

$$E_t \hat{u}(\mu) = e^{i(\alpha-\mu)t} \hat{u}(\mu), \quad \alpha \in C, \ t \in [0,T]$$

В этом случае $E_t + \Phi = \mathcal{N}_t$ - оператор сдвига по траекториям уравнения

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A} u + \Psi(u) \qquad /1/$$

на время t.

Тогда для каждого вещественного t, удовлетворяющего неравенствам

$$\left| 1 - e^{i(\alpha t)k} \right| \geq \frac{1}{k^s} \qquad /2/$$

для некоторого $s > 1$ / мера множества чисел t, не удовлетворяющим неравенствам /2/, равна нулю / найдётся нелинейность $h_t \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ и окрестность S нуля пространства $\mathcal{B}$, такие, что $(I + h_t)^{-1} \circ \mathcal{N}_t \circ (I + h_t)(v) = E_t v$

где E_t - оператор сдвига на время t по траекториям линейного уравнения $\frac{dv}{dt} = \mathcal{A} v$.

При этом задача Коши для уравнения /1/ с начальными данными из S однозначно разрешима для $t \in (-\infty, +\infty)$, а нулевое стационарное решение уравнения /1/ устойчиво.

УДК 517.983 Ногин В.А., Сухинин Е.В. (Ростов-на-Дону)

О ДРОБНЫХ СТЕПЕНЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ L^p

Рассматриваются дробные степени оператора Шредингера $\kappa E+\Delta_x+i\partial/\partial t$, $\kappa=0,1$, где Δ_x - лапласиан в R^n. Дробные степени H_κ^α определяются в образах Фурье равенствами

$$(FH_\kappa^\alpha f)(\xi,\tau)=(\kappa+\tau-|\xi|^2+i0)^{\alpha/2}(Ff)(\xi,\tau),\ \alpha\in\mathbb{C}^1,\ f\in\Phi_{V_\kappa},$$

где Φ_{V_κ} - класс шварцевых функций, преобразования Фурье которых исчезают вместе со всеми своими производными на множестве $V_\kappa = \{(\xi,\tau)\in R^{n+1}: \tau-|\xi|^2=-\kappa,\ \kappa=0,1\}$. Для отрицательных дробных степеней (т.е. для дробных потенциалов) при $Re\,\alpha>0$ справедливо представление

$$H_\kappa^{-\alpha}f(x,t)=\int\limits_{R^{n+1}} h_\kappa^\alpha(y,\eta)f(x-y,t-\eta)\,dy\,d\eta\ ,\ f\in\Phi_{V_\kappa}, \tag{1}$$

где $h_\kappa^\alpha(y,\eta)=c_{n,\alpha}\eta_+^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\exp\left(i\kappa\eta+i\frac{|y|^2}{4\eta}\right),\ c_{n,\alpha}=e^{-\frac{(\alpha+n)\pi i}{4}}\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(4\pi)^{-n/2}$ (если $0<Re\,\alpha\leq n$, то интеграл (1) понимается в смысле регуляризации).

На функциях из $L^p(R^{n+1})$ оператор $H_\kappa^{-\alpha}$ трактуется в смысле свертки с ядром $h_\kappa^\alpha(y,\eta)$ в классе Φ'_{V_κ}:

$$\langle H_\kappa^{-\alpha}g,\omega\rangle\overset{def}{=}\langle g,h_\kappa^\alpha*\omega\rangle\equiv\langle g(x,t),\langle h_\kappa^\alpha(y,\eta),\omega(x+y,t+\eta)\rangle\rangle,$$

где $g\in L^p$, $\omega\in\Phi_{V_\kappa}$, $Re\,\alpha>0$. Получено явное выражение для положительных степеней H_κ^α, $Re\,\alpha>0$, на функциях $f(x,t)$ из пространств $H_{p,r}^\alpha=L^r\cap H_\kappa^{-\alpha}(L^p)$ дробных потенциалов Шредингера и дано описание пространств $H_{p,r}^\alpha$ в терминах аппроксимативных операторов ($1\leq p,r\leq 2$).

На функциях из Φ'_{V_κ} получено также выражение для положительных степеней в виде гиперсингулярных интегралов с обобщенными разностями.

УДК 517.9 Окулевич А.И.[1] /Москва/

МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача:

$$\begin{cases} \dot{x} = \langle f(x(t), u(t), t), \nu(t)\rangle, \ t \in [t_1, t_m],\ t_1 < t_m, \\ \mathcal{K}_1(p) \le 0,\ \mathcal{K}_2(p) = 0;\ \mathcal{J}[x,u] = \max\limits_{t_1 \le t \le t_m} \varphi(x(t),t) + \mathcal{K}_0(p) \to \min, \end{cases}$$

где $p = (t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m)$, $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{1,m}$, $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m$, а все функции удовлетворяют необходимым предположениям. Положим

$$H(x,u,t,\psi) = \langle f(x,u,t), \psi(t)\rangle,$$

$$l(p,c) = c_0 \mathcal{K}_0(p) + \langle c_1, \mathcal{K}_1(p)\rangle + \langle c_2, \mathcal{K}_2(p)\rangle.$$

Определение. Пара (x_0, ν_0) удовлетворяет принципу максимума, если существуют неравные одновременно нулю $c = (c_0, c_1, c_2)$, регулярная борелевская мера μ, непрерывная слева функция ограниченной вариации $\psi(t)$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\psi(t) = \int_t^{t_m} \frac{\partial H}{\partial x}(\tau)\,d\tau - \int_t^{t_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau)\,d\mu - \sum_{k=i+1}^{m} \frac{\partial l}{\partial x_k}(p,c),\ t \in (t_i, t_{i+1}],\ i = \overline{1,m-1};$$

$$\max_{u \in U} H(x_0(t), u, t, \psi) = H(x_0(t), u_0, t, \psi);$$

$$\max_{u \in U} H\Big(x_0(t_i), u, t_i, \frac{\partial l}{\partial x_i}(p,c)\Big) + \frac{\partial l}{\partial t_i}(p,c) = 0,\ i = \overline{1,m-1};$$

$$\max_{u \in U} H\Big(x_0(t), u, t_m, -\frac{\partial l}{\partial x_m}(p,c)\Big) - \frac{\partial l}{\partial t_m}(p,c) = 0;$$

$$\psi(t_1) = \frac{\partial l}{\partial x_1}(p,c);\ \psi(t_m) = -\frac{\partial l}{\partial x_m}(p,c);\ \psi(t_i+0) - \psi(t_i) = \frac{\partial l}{\partial x_i}(p,c) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_i)\mu(t_i);$$

$$c_0 \ge 0;\ c_1 \ge 0;\ \langle \mathcal{K}_1(p), c_1\rangle = 0.$$

С помощью метода, предложенного в [1], минимаксная задача сводится к задаче с фазовыми ограничениями и доказана

Теорема. Пусть в минимаксной задаче выполнены условия согласованности и управляемости и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \ne 0$ для всех пар (x,t), для которых $\varphi(x(t),t) + \mathcal{K}_0(p) = \mathcal{J}_0$. Тогда найдется оптимальная пара (x_0, ν_0) и число $\psi^0 \le 0$, удовлетворяющие соотношениям принципа максимума, в которых функция $H(x,u,t,\psi)$ заменяется функцией

$$H^0(x,u,t,\psi,\psi^0) = H(x,u,t,\psi) + \psi^0 \varphi(x,t),$$

и условию невырожденности

$$c_0 + \operatorname{meas}\{t : \psi(t) \ne 0\} > 0.$$

Литература

1. Арутюнов А.В., Зеркалов Л.Г., Силин Д.Б. Необходимые условия первого и второго порядков в минимаксной задаче оптимального управления.//Вестник МГУ, сер.15, выч. мат. и киберн.,1990,№3,60-67.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант № 94-01-00476.

УДК 517.518.475 **Окулов В. А.** (Москва)

Многомерный аналог теоремы Привалова

Пусть N — натуральное число. $T^N = (-\pi, \pi]^N$, M — множество $\{1, \dots, N\}$, $B \subseteq M$, $|B|$ — количество элементов в множестве B. Если заданы $|B|$ модулей непрерывности $\omega_j(\delta)$, $j \in B$, то будем обозначать через $H(\omega_j, j \in B, T^N)$ класс тех $f(\vec{x}) \in C(T^N)$, для которых

$$\forall j \in B \quad \omega_j(f, \delta) = \underline{O}[\omega_j(\delta)], \ \delta \to +0,$$

где $\omega_j(f, \delta)$ — частный модуль непрерывности по j-ой переменной функции $f(\vec{x}) \in C(T^N)$.

Через $\overline{f_B}(\vec{x})$ будем обозначать B-сопряженную к $f(\vec{x})$ функцию в смысле Чезари.

Доказан следующий многомерный аналог известной теоремы И. И. Привалова.

Теорема. Пусть $B \subseteq M$, $\omega_1(\delta), \dots, \omega_N(\delta)$ — модули непрерывности, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^\delta \frac{\omega_i(t)}{t}\, dt = \underline{O}[\omega_i(\delta)], \qquad \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega_i(t)}{t^2}\, dt = \underline{O}[\omega_i(\delta)]$$

для любого $i \in M$ и при $0 < \delta \le 1$. Тогда
а) если $f \in H(\omega_j, j \in M, T^N)$, то

$$\begin{aligned} \omega_j\left(\overline{f_B}, \delta\right) &= \underline{O}\left[\omega_j(\delta)\,|\log\delta|^{|B|-1}\right] \quad \text{при } \delta \to +0, \text{ если } j \in B, \\ \omega_j\left(\overline{f_B}, \delta\right) &= \underline{O}\left[\omega_j(\delta)\,|\log\delta|^{|B|}\right] \quad \text{при } \delta \to +0, \text{ если } j \notin B; \end{aligned}$$

б) существуют функции $f, g \in H(\omega_j, j \in M, T^N)$ такие, что

$$\begin{aligned} \omega_j\left(\overline{f_B}, \delta\right) &\ge C\omega_j(\delta)\,|\log\delta|^{|B|-1} \quad \text{при } 0 \le \delta \le \delta_0, \text{ если } j \in B, \\ \omega_j\left(\overline{f_B}, \delta\right) &\ge C\omega_j(\delta)\,|\log\delta|^{|B|} \quad \text{при } 0 \le \delta \le \delta_0, \text{ если } j \notin B, \end{aligned}$$

где C и δ_0 — положительные константы, не зависящие от δ.

УДК 517.5

Осиленкер Б.П./Москва/

РЯДЫ ФУРЬЕ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Пусть $\mathfrak{X}$ - банахово пространство с нормированным безусловным базисом $\{\vec{e}_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$. Тогда $\mathfrak{X}$ -значная измеримая вектор-функция $\vec{f}(x)$ есть последовательность измеримых скалярных функций $f_n(x)(n\in\mathbb{Z}_+)$ таких, что $\sum\limits_0^\infty f_n(x)\vec{e}_n\in\mathfrak{X}$ для каждого $x\in\mathbb{R}^1$. Для заданного веса $\omega(x)$ обозначим

$$L^2_\omega(\mathbb{R}^1,\mathfrak{X})=\{\vec{f},\ [\int_{\mathbb{R}^1}\|\sum_k f_k(x)\vec{e}_k\|_{\mathfrak{X}}\,\omega(x)dx<\infty\},$$

если $\omega(x)\equiv 1$, то соответствующее пространство обозначим через $L^2(\mathbb{R}^1,\mathfrak{X})$. Банахово пространство $\mathfrak{X}$ с безусловным базисом $\{\vec{e}_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$ называется UMD -пространством, если векторное преобразование Гильберта

$$H\vec{f}(x)=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^1}\vec{f}(y)\frac{1}{x-y}dy$$

ограниченно действует в $L^2(\mathbb{R}^1,\mathfrak{X})$ при некотором z, $1\le z<\infty$. Примерами UMD-пространств являются лебеговы пространства L^z,ℓ^z $(1<z<\infty)$, $L^z(\ell^s),\ell^s(L^z)(1<z,s<\infty)$, пространства Орлича L^Φ, когда Φ и Φ^* удовлетворяют Δ_2-условию.

Пусть $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$ - ортонормированная с весом $\rho(x)$ на промежутке $I=[-1,1]$ система полиномов n-ой степени с положительным старшим коэффициентом. Каждой вектор-функции

$$\vec{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)\vec{e}_j\in L^1_\rho(I,\mathfrak{X})$$

поставим в соответствие ряд Фурье

$$\vec{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f_j)p_k(x)\right)\vec{e}_j, \qquad /I/$$

где

$$c_k(f_j)=\int_I f_j(t)p_k(t)\rho(t)dt\quad(k,j\in\mathbb{Z}_+).$$

Для рядов Фурье векторнозначных функций изучены следующие вопросы:

1. линейные методы суммирования рядов Фурье /I/, задаваемые регулярной по Теплицу треугольной матрицей;
2. средние Пуассона-Абеля;
3. операторы обобщенного векторного сдвига.

Для весового пространства $L^z_\omega(I,\ell^s)$ $(1<z,s<\infty)$ получены весовые оценки для частных сумм ряда Фурье /I/.

УДК 517.9 Павлов И.В. (Ростов-на-Дону)

ПРОСТРАНСТВА МАРТИНГАЛОВ И ИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ

В первой части доклада будут рассматриваться мартингалы $(f_n, \mathcal{F}_n, P)$ с дискретным временем на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\bigvee_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. Введя в рассмотрение пространства мартингалов H_p (пространства Харди), BMO, $M_{\bar{p}}$ (пространства мартингалов со смешанной нормой с бесконечномерным вектором $\bar{p}=(p_1, p_2, \ldots)$ показателей суммируемости) и взяв за основу неравенства, характерные для норм этих пространств, мы сосредоточим внимание на следующих трех структурах $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$:

1) Простейшая структура : $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$; $\mathcal{F}_n$ порождена разбиением Ω на атомы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_n$ (т.е. при переходе от n к $n+1$ атом $B_n \in \mathcal{F}_n$ дробится на две части A_{n+1} и B_{n+1}, а остальные атомы остаются без изменения); $P(A_k)=2^{-k}$.

2) Диадическая структура : $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$; $\mathcal{F}_n$ порождена 2^n атомами, причем каждый атом из $\mathcal{F}_n$ содержит ровно два атома из $\mathcal{F}_{n+1}$ одинаковой вероятности.

3) Цилиндрическая структура : $\Omega = \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, $\mathcal{F} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$, $P=\prod_{k=1}^{\infty} P_k$, $\mathcal{F}_n = \{A^n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \Omega_k \mid A^n \in \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k\}$.

В пункте 1) мы дадим реализацию вышеназванных пространств в виде пространств числовых последовательностей, что позволит построить "живые" примеры мартингалов, входящих в одни пространства и не входящих в другие. В пункте 2) особое внимание будет уделено системам Радемахера, Хаара и Уолша, тесно связанным с диадической структурой σ-алгебр $\mathcal{F}_n$. В 3), взяв в качестве Ω бесконечномерный тор T^{∞}, мы оценим в $M_{\bar{p}}$ винеровскую меру на T^{∞} и получим бесконечномерные аналоги теоремы С.Л.Соболева для λ-потенциалов дробных степеней оператора Лапласа и потенциалов Бесселя.

Во второй части доклада будут рассмотрены соответствующие пространства мартингалов с непрерывным временем и непрерывными траекториями.

Результаты автора, включенные в доклад и связанные с пространствами $M_{\bar{p}}$, получены при поддержке РФФИ, грант № 94-01-01051-а.

Автор также выражает глубокую признательность проф. Е.М.Семенову за ценные советы, данные в процессе подготовки доклада.

УДК 517.9 Пальчиков А.Н. (Липецк)

ДОПОЛНЯЕМОСТЬ ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $T: G \to End X$ - сильно непрерывное ограниченное представление локально компактной абелевой группы G операторами из $End X$ - пространства эндоморфизмов, действующих в банаховом пространстве X. Оператор $A \in End X$, называется диагональным (относительно представления T), если он перестановочен со всеми операторами $T(g)$, $g \in G$, т.е. если $T(g) A T(-g) = A$ для любого $g \in G$. Наличие сильно непрерывного ограниченного представления T позволяет определить в алгебре $End X$ подалгебру $\mathfrak{U}_c = \mathfrak{U}_c(T) = \{A \in End X : T(g)A = AT(g)\}$ и назвать её подалгеброй диагональных (относительно T) операторов. Символом $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_1(T)$ обозначим подпространство операторов из $End X$, порожденное в равномерной операторной топологии операторами...

Теорема 1. Пусть X - слабо полное банахово пространство. Тогда банахова алгебра $End X$ является T-диагонализуемой, т.е. $End X = \mathfrak{U}_c + \mathfrak{U}_*$, причем $\mathfrak{U}_* \supset \mathfrak{U}_1$ и каждый оператор из $\mathfrak{U}_*$ есть слабый предел некоторой направленности операторов из $\mathfrak{U}_1$.

Построенное в теореме 1 разложение $End X = \mathfrak{U}_c + \mathfrak{U}_*$, вообще говоря неоднозначно.

Теорема 2. Пусть X - слабо полное банахово пространство, G - локально компактная абелева группа, $T: G \longrightarrow End X$ - сильно непрерывное ограниченное представление и M - дополняемое в X, инвариантное относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$ подпространство из X. Тогда существует проектор $P_0 \in End X$, коммутирующий со всеми $T(g)$, и такой, что $M \subset Ran P_0 \subset w\text{-}cl.M$ ($Ran P_0$ - множество значений проектора P_0, $w\text{-}cl.M$ - слабое замыкание M в X).

Утверждение типа теоремы 2 позволяет установить недополняемость подпространств банаховых пространств, в которых действует сильно непрерывное ограниченное представление локально компактной абелевой группы, сводя этот вопрос к более простому вопросу отсутствия проектора на исследуемое подпространство, коммутирующего с операторами представления. При этом расширяется область применимости соответствующих результатов о дополняемости, принадлежащих У. Рудину и Х. Розенталю.

УДК 539.3

Паксютова Е.В.
(Саратов)

РАСЧЁТ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ КРУГЛЫХ И ГОФРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН С УЧЁТОМ НАВЕДЁННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА

Рассматривается задача расчёта напряженно-деформированного состояния и долговечности тонкостенных конструкции, взаимодействующих с коррозионно-активной средой. Разрушение конструкции вызывается не только приложенными к ней нагрузками, но и протекающими во времени сложными физико-химическими процессами, развивающимися в объёме материала.

В основу расчётов положена математическая модель, предложенная в /I/. Предполагается, что под воздействием агрессивной среды в материале конструкции с течением времени развивается наведённая неоднородность.

Для аппроксимации диаграммы деформирования используется кубическая зависимость

$$\sigma_i = E\,\varepsilon_i\left(1-\frac{4}{27}\,\omega^2\,\varepsilon_i^2\right) \qquad \text{где} \quad \omega(r,z,t)=\omega_0+F(r,z)\cdot g(t)$$

функция повреждаемости материала, $F(r,z)$ – функция пространственных координат, учитывающая влияние деформированного состояния, $g(t)$ – функция времени. Удерживая два первых члена разложения $F(r,z)=\sum\limits_{m=0}^{N} a_m\,\varepsilon_i^{2m}$, получим зависимость

$$\omega=\omega_0+(a_0+a_1\varepsilon_i^2)\cdot g(t)$$

где ω_0 – значение параметра ω в нейтральной среде;

$a_0,\ a_1$ – коэффициенты, определяемые экспериментально.

Получены уравнения гибких круглых пластин и пологих оболочек вращения с учётом наведённой неоднородности материала.

Для решения нелинейной двухточечной краевой задачи используется метод параллельной пристрелки в сочетании с поэтапной процедурой возмущения длины отрезка интегрирования, позволяющей в необходимых случаях автоматизировать поиск координат точек пристрелки.

Численная реализация алгоритма проводилась на примерах расчёта гибких нелинейно-упругих круглых и гофрированных пластин, жестко защемлённых по контуру.

Литература

I. Петров В.В. Построение модели взаимодействия тонкостенных конструкций с агрессивной средой и метод её анализа// Работоспособность материалов и элементов конструкций при воздействии агрессивных сред./ Саратов. политехн. ин-т. - Саратов, 1986. - с. 5-8.

УДК 514.74

Паринов М.А. (Иваново)

О ГРУППАХ СИММЕТРИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ КОНФОРМНО-ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И КОНФОРМНО-СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пусть на аналитическом многообразии M четной размерности N задано аналитическое ковекторное поле A_α, невырожденное в следующем смысле: внешний дифференциал от 1-формы $A = A_\alpha dx^\alpha$ (потенциальной структуры) есть невырожденная 2-форма $F = dA$ (симплектическая структура). Тогда, как известно [1], группа G_A преобразований многообразия M, сохраняющих структуру A, конечномерна, причем $\dim G_A \le N(N+1)/2$.

<u>Определение</u>. Преобразование $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^1,\dots,x^N)$ многообразия M назовем конформно-потенциальным, если

$$A_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \sigma A_\alpha \tag{1}$$

для некоторого числа $\sigma > 0$. Множество таких преобразований обозначим G_A^c; очевидно, что это локальная группа и $G_A \subset G_A^c$.

<u>Теорема</u>. Группа G_A^c для невырожденной аналитической потенциальной структуры A на многообразии M конечномерна и $\dim G_A^c \le$ $\le [N(N+1)/2] + 1$. При этом максимальная размерность достигается для поля, представимого в некоторых координатах в виде

$$A_\alpha = c_{\alpha\nu} x^\nu, \quad c_{\alpha\nu} = -c_{\nu\alpha} = const, \ \det c_{\alpha\nu} \ne 0. \tag{2}$$

<u>Замечание</u>. Если в формуле (1) под σ понимать скалярную функцию $\sigma(x)$, то группа так определенных преобразований будет бесконечномерной. Однако, ограничение постоянными σ естественно ввиду следующего обстоятельства. Если $F = dA$, то $G_A \subset G_F$ (G_F – группа преобразований, сохраняющих симплектическую структуру F). Определяя конформно-симплектические преобразования аналогично (1), обозначая их множество через G_F^c и накладывая требование $G_A^c \subset G_F^c$, приходим с необходимостью к условию $\sigma = const$ в формуле (1).

Литература

1. Паринов М.А. О группе, определяемой невырожденным векторным полем. – Иваново, 1979. – 11с. – Деп. в ВИНИТИ 18.10.79, № 3608-79.

УДК 517.9 А.И.Пастухов (Воронеж)

ОЦЕНКА ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Пусть X - комплексное банахово пространство и $EndX$ - алгебра линейных ограниченых операторов, действующих в X. Символом $l_p, p \in [1, \infty]$ обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей векторов из X, суммируемых со степенью p (ограниченых при $p = \infty$). Рассматривается оператор $A \in End\, l_p$ вида

$$(Ax)(n) = A_n x(n+1), n \in Z, x \in l_p, A_n \in EndX.$$

который называется оператором взвешенного сдвига. В условиях приведенных далее теорем предполагается обратимость оператора $I - A$.

Теорема 1. *Оператор $I - A$ представим в виде*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k \in Z} B_k S(k),$$

где $S(k)$ - оператор сдвига в l_p вида $(S(k)x)(n) = x(n+k), x \in l_p, k, n \in Z$, и B_k - оператор умножения на ограниченую последовательность из $EndX$.

Теорема 2. *Для норм операторов $B_k \in EndX, k \in Z$ имеют место следующие оценки*

$$||B_k|| \le \frac{2M}{(1 + \frac{1}{2M})^{k-1}}, k > 0;$$

$$||B_k|| \le \frac{2M}{(1 - \frac{1}{2M})^{k-1}}, k < 0;$$

$$||B_k|| \le M, k \in Z,$$

где $M = ||(I - A)^{-1}||$.

Кроме того, для любого $q \in [1, \infty]$ оператор $I - A$ обратим в l_q и норма его обратного допускает оценку

$$||(I - A)^{-1}|| \le 8M^2 - M + 1.$$

УДК 517.968.22 Перловская Т.В. (Воронеж)

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА С ДВУМЯ ОСОБЕННОСТЯМИ

Исследуется уравнение

$$x^{n+1}u(x)=\int_0^x \rho(x,t)K(x,t)u(t)\,dt \quad (0\le x\le T) \tag{1}$$

где u(x) - искомая функция со значениями в банаховом пространстве E; $\rho(x,t)$ такая положительная однородная нулевой степени функция, что $\varphi(s)=\rho(1,s)$ суммируема на [0,1]; $K(x,t)(0\le t\le x\le T)$ операторно-значная функция гладкости N+1>n, имеющая все частные производные до порядка n - 1 включительно, равные в точке (0,0) нулю, и частные производные n-го порядка, не все равные нулю.

Для случая n = 0 и $\rho(x,t)\equiv 1$ уравнение (1) рассматривалось С.Г.Крейном и И.В.Сапроновым.

При исследовании существенно используются свойства операторного пучка

$$Q_\lambda - I=\int_0^1 s^{\lambda-1}\varphi(s)\sum_{\alpha+\beta=n} K^{\alpha\beta}s^{\beta}\,ds \tag{2}$$

где $K^{\alpha\beta}$- коэффициенты формулы Тейлора для ядра K(x,t) в точке (0,0).

В предположении, что пучок (2) имеет характеристическое число λ, которому соответствует собственный вектор, имеющий цепочку присоединенных $\{f^i\}_{i=1}^h$, и при некоторых дополнительных условиях, одним из которых является неравенство $N>|||K|||\cdot\max_{0\le s\le 1}\|\varphi\|+n-\lambda-1$ доказывается существование h + 1 решений уравнения (1).

Более сложным является случай, когда у пучка (2) имеется два характеристических числа λ и $\bar\lambda$, отличающиеся на целое число K. При этом предполагается, что числа $\bar\lambda+i\ (i=\overline{1,N-n})$ и $\lambda+j\ (j=\overline{1,K-1})$ не являются характеристическими для пучка (2). Доказывается существование $\sum_{q=1}^{q_1}(h_q+1)$ решений уравнения (1), где q_1 число собственных векторов, отвечающих характеристическому числу λ.

УДК 517.925.51 Перов А.И. (Воронеж)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ

Пусть S обозначает $(n-1)$- мерный симплекс в R^n, состоящий из вероятностных векторов; $L\subset R^n$-подпространство векторов с нулевой суммой координат; $\mathfrak{N}$-совокупность квадратных $n\times n$ матриц N для которых $L\subseteq \ker N$. Через R^n_α обозначим нормированное пространство с α-нормой: $\|x\|_0=\max\limits_i |x_i|$ при $\alpha=0$ и $\|x\|_\alpha=(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^{1/\alpha})^\alpha$ при $0<\alpha\leq 1$.

Рассмотрим однородную дискретную марковскую цепь $x(t+1)=Mx(t)$ $(t=0,1,\ldots)$, где $M=(m_{ij})$-марковская матрица [1].

Теорема 1. Эргодический случай имеет место тогда и только тогда, когда при соответствующем выборе нормы в R^n имеет место неравенство $\min\{\|M-N\|:N\in\mathfrak{N}\}<1$. Если $q=\|M-N\|<1$, то справедливы оценки

$\|x(t)-y(t)\|\leq q^t\|x(0)-y(0)\|$ для любых $x(0),y(0)\in S(t=1,2,\ldots)$, (1)

$|\lambda|\leq q$ для любого отличного от единицы собственного значения матрицы M. (2)

На этом пути могут быть получены различные конкретные условия эргодичности.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из условий

(0) $$q = \max_i \sum_{j=1}^{[n/2]}(\tilde m_{ij}-\tilde m_{i,n-j+1})<1,$$

где квадратные скобки означают целую часть числа, а $\tilde m_{ij}$-это, записанная в невозрастающем порядке последовательность m_{ij} (при каждом фиксированном i);

(α) $$q=(|m_{ii}-u_i|+(\sum_{j\neq i}|m_{ij}-u_i|)^{1-\alpha}(\sum_{j\neq i}|m_{ji}-u_j|)^{1/\alpha})<1$$

при некоторых неотрицательных $u_1,\ldots,u_n$;

(1) $$q=1-(d_1+\ldots+d_n)<1,\text{ где } d_i=\min m_{ij}.$$

Тогда имеет место эргодический случай и справедливы оценки (1) для α-нормы разности решений и оценки (2) для собственных чисел матрицы M. С помощью [2] и [3] аналогичные результаты получены и для непрерывных цепей Маркова.

Литература.

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва, Наука, 1969, 368 с.
2. Перов А.И., Глушко Е.Г., Белкина С.А. Непрерывные периодические марковские цепи. Деп. в ВИНИТИ, № 4344-83, 40 с.
3. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. Москва, Наука, 1985, 256 с.

УДК 517.938 Перов А.И. (Воронеж)

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачу периодической оптимизации

$$J\{u(\ ),x(\ )\}=(1/\omega)\int_0^{\omega} g(u,x)dt \to \max,$$

$$\dot{x}=f(u,x),\ 0\le t\le\omega,\ x(0)=x(\omega);\ (1/\omega)\int_0^{\omega} u(t)dt=u^0,$$

где $\omega>0$ и $u^0\in R^m$ заданы, а векторная функция f и скалярная функция g дважды непрерывно дифференцируемы, на практике часто заменяют задачей стационарной оптимизации

$$g(u,x) \to \max \text{ при условии } f(u,x)=0,\ u=u^0,$$

относящейся к математическому программированию.

Пусть $f(u^0,x^0)=0$, где $x^0\in R^n$. Полагая $u(t,\varepsilon)=u^0+\varepsilon v(t)$, где ε-малый параметр, находим периодическое решение $x(t,\varepsilon)=x^0+\varepsilon y(t)+\varepsilon^2 z(t)\ldots$ уравнения $\dot{x}=f(u,x)$. Предполагается, что спектр матрицы $\partial f(u^0,x^0)/\partial x$ не пересекается с мнимой осью. Пусть $J(\varepsilon)=J\{u(\ ,\varepsilon),x(\ ,\varepsilon)\}$. Показывается, что $J(\varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $J'(0)=0$ (если среднее значение v_0 функции $v(t)$ равно нулю). Основной результат состоит в нахождении $J''(0)$ в терминах коэффициентов Фурье v_k возмущения $v(t)$.

Например, если $m=n=1$, то ($\varkappa=2\Pi/\omega$)

$$(1/2)J''(0)=(g_{uu}-\frac{g_x}{f_x}f_{uu})(1/2\omega)\int_0^{\omega}v^2(t)dt+\left[-2(g_{ux}-\frac{g_x}{f_x}f_{ux})f_u f_x+(g_{xx}-\frac{g_x}{f_x}f_{xx})f_u^2\right]\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^2/(\varkappa^2k^2+f_x^2)$$

(все частные производные вычислены в точке (u^0,x^0)), откуда просто выводятся условия положительности второго дифференциала (т.е. эффективности периодической оптимизации) при соответствующем образом выбранном возмущении $v(t)$ (даже если (u^0,x^0) давало решение задачи стационарной оптимизации).

Отметим, что приведенная выше формула отличается от аналогичного результата в [1] с.57, куда, по-видимому, вкралась неточность.

Работа поддержана областным грантом по математике.

1. Пухликов А.В. Асимптотически периодические системы.I.Автоматика и телемеханика, 1993, №5, с.52-60.

УДК 518:512.25 Перов А.И. (Воронеж)

ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ АДАМАРА ИЛИ БРАУЭРА

Пусть $A=(a_{ij})$ – квадратная матрица размерами $n \times n$ и с ненулевыми диагональными элементами. Введем обозначения

$$p_i = \sum_{j=1} |a_{ij}| , \quad \varepsilon_i = p_i / |a_{ii}| \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что выполнены условия Адамара

$$0 \leqslant \varepsilon < 1 \qquad i=1,2,\dots,n \tag{2}$$

или условия Брауэра

$$0 \leqslant \varepsilon_i \varepsilon_j < 1 \quad i=j; \quad i,j=1,2,\dots,n \tag{3}$$

Пусть B диагональная матрица, по диагонали которой стоят числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Известно, что

$$\prod_{i=1}^{n} (1-\varepsilon_i) \leqslant |\det A/\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1+\varepsilon_i) \tag{4}$$

для матрицы, удовлетворяющей условиям Адамара. Нижняя оценка в (4) была доказана А.М. Островским (1937); верхняя (даже в более сильной форме) была установлена Прайсом (1951).

Нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия Адамара (2) или условия Брауэра (3). Тогда справедливы оценки

$$\prod_{i=1}^{[n/2]} (1-\varepsilon_{(2i-1)}\varepsilon_{(2i)}) \leqslant |\det A/\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{[n/2]} (1+\varepsilon_{(2i-1)}\varepsilon_{(2i)}), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \dots, \varepsilon_{(n)}$ – это записанная в невозрастающем порядке последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, а квадратные скобки означают целую часть числа. Указанные оценки являются точными.

Литература.

1. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и её приложения. Москва, ИЛ, 1960, 172 с.

2. Перов А.И. Оценки элементов обратных матриц в условиях Адамара и Брауэра. Тезисы докладов 26-й Воронежской зимней математической школы. Воронеж, изд-во ВГУ, 1994, с.73.

УДК 517.929

Плаксина В.П. (г. Пермь)

К ВОПРОСУ О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ.

Пусть линейный оператор $\mathcal{L} : W^2 \to L$ определен равенством $\mathcal{L}x=\ddot{x}+Tx$, где $T: C\to L$ - вольтерров u-ограниченный оператор, W^2 - банахово пространство функций, производная которых абсолютно непрерывна на $[a,b]$ [1], C - банахово пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, L - банахово пространство суммируемых на $[a,b]$ функцмй. Отметим, что такой оператор $\mathcal{L}$ допускает непрерывное расширение на пространство $W^2S(m)$ - пространство непрерывных функций, производная которых конечна на $[a,b]$ и абсолютно непрерывна на промежутках $[c_i,c_{i+1}[$, $i=0,\dots,m-1$ и $[c_m,b]$, $a=c_0<c_1<\dots<c_{m+1}=b$ [1].

Будем говорить, что $[a,b]$ - промежуток s_0-неосциляции решений уравнения $\mathcal{L}x=0$ $(\mathcal{L}: W^2\to L)$, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет не более одного нуля на отрезке $[a,b]$, считая кратный нуль дважды. Будем говорить, что $[a,b]$ - промежуток s_1-неосциляции решений уравнения $\mathcal{L}x=0$ $(\mathcal{L}: W^2S(1)\to L)$, если $[a,b]$ является промежутком s_0-неосциляции для решений x из пространства W^2 и любое решение $x\in W^2S(1)$ имеет не более одного нуля на отрезках $[a,c_1]$ и $[c_1,b]$, считая кратный нуль дважды. $[a,b]$ - промежуток s_m-неосциляции решений уравнения $\mathcal{L}x=0$ $(\mathcal{L}: W^2S(m)\to L)$, если $[a,b]$ является промежутком s_{m-1}-неосциляции для решений x из пространства $W^2S(m-1)$ и любое решение $x\in W^2S(m)$ имеет не более одного нуля на отрезках $[c_i,c_{i+1}]$, $i=0,\dots,m$, считая кратный нуль дважды.

Отметим, что s_1-неосциляция оператора $\mathcal{L}$ обеспечивает отрицательность функции Грина краевой задачи $\mathcal{L}x=f$, $x(a)=0$, $x(b)=0$ в пространстве W^2 [1], а s_m-неосциляция гарантирует наличие осцилляционных свойств [2] у первых m собственных функций соответствующей задачи о собственных значениях.

Получены эффективные признаки s_1 и s_2-неосциляции.

ЛИТЕРАТУРА. 1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 С.

2. Боровских А.В., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. Об осцилляционных спектральных свойствах разрывных краевых задач. //ДАН. 1994. Т.335. N4. С.409-412.

Покорная И.Ю. (Воронеж)

О МЕТОДЕ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ РАЗРЫВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.

Рассматривается задача ($x \in R^2$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр)

$$\varepsilon \dot{x} - A(t)x = f(t) \quad , \quad t \neq \tau \tag{I}$$

в случае, когда матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t)$ достаточно гладкие на $[0,\tau]$ и $[\tau,1]$. Система (I) рассматривается при краевых условиях

$$x^1(0) = x^2(1) = 0 \tag{2}$$

Нас интересует обоснование метода коллокации для построения приближенного решения задачи (I),(2) в классе кубических сплайнов дефекта один. Подобный вопрос в случае непрерывной матрицы $A(t)$ ранее рассматривался в [2], где применялся метод развитый в [1] для параболических сплайнов. Особенность, рождаемая разрывом матрицы $A(t)$ в точке $t=\tau$ вынуждает при построении аппроксимирующих сплайнов пользоваться специальными сетками бахваловского типа, для чего предварительно проводится анализ этих особенностей методом пограничных функций. Обоснование метода погранфункций сделало необходимым проведение подробного анализа функции Грина задачи (I),(2).

В конечном итоге для случая $m\varepsilon|\ln\varepsilon| \ll \gamma$ удалось показать, что коллокационный кубический сплайн $u(t)$, аппроксимирующий решение задачи (I),(2) $x(t)$ удовлетворяет оценке

$$\| u(t) - x(t) \|_{C[0,1]} \leq \frac{c}{m^3}$$

где c , γ - положительные константы, не зависящие от ε и m , m - число узлов разбиения.

Литература.

I. Блатов И.А.,Стрыгин В.В. Сходимость метода сплайн-коллокации на оптимальных сетках для сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференц. уравнения.-1988.-24, №II. - С. 1977-1987.
2. Стрыгин В.В., Блатов И.А., Покорная И.Ю. Метод коллокации решения сингулярно возмущенных краевых задач с помощью кубических сплайнов// Украинский мат. журнал. -1994.- 46, №4. - С. 4II-4I7.

УДК 317.927

Ю. В. Покорный (Воронеж)

О ПЕРВООБРАЗНЫХ ПО ДРОБНЫМ МЕРАМ

Пусть $x(\cdot)$ – непрерывна на $[a,b]$ всюду, кроме точки ξ $(a<\xi<b)$. Если $x(\xi-0)\neq x(\xi+0)$, то даже для гладкой (кроме $t=\xi$) функции $x(t)$ дифференцирование ее в точке ξ требует обобщенного подхода. При этом стандартные методы теории Соболева–Шварца игнорируют собственное значение $x(\cdot)$ в точке $t=\xi$. Можно ли предложить процедуру дифференцирования такой функции, допускающую обращение в виде интегрирования такого, которое улавливало б у исходной функции значение $x(\xi)$ даже в том случае, если $x(\xi)$ отлично как от $x(\xi-0)$, так и от $x(\xi+0)$? И чтобы для соответствующего интеграла был верен аналог формулы Ньютона–Лейбница? В описанной ситуации ответ положителен, если использовать производную по мере, в качестве которой взять любую строго монотонную на $[a,b]$ функцию $\mu(t)$ такую, что $\mu(\xi-0)<\mu(\xi)<\mu(\xi+0)$. В качестве производной $dx/d\mu$ в точке ξ у нас возникнет набор

$$\frac{dx}{d\mu}(\xi-0),\ \frac{x(\xi)-x(\xi-0)}{\mu(\xi)-\mu(\xi-0)},\ \frac{x(\xi+0)-x(\xi)}{\mu(\xi+0)-\mu(\xi)},\ \frac{dx}{d\mu}(\xi+0),$$

т.е. помимо естественных левой и правой производных $\frac{dx}{d\mu}(\xi-0)$, $\frac{dx}{d\mu}(\xi+0)$ у нас возникает еще два промежуточных несобственных значения. Обратная процедура интегрирования осуществляется интегралом типа Дарбу–Стильтьеса по $d\mu$.

Описанные процедуры распространяются на случай, когда подлежащая дифференцированию функция $x(\cdot)$ принимает в точке разрыва ξ не одно, а несколько промежуточных значений, что требует привлечения меры, соответствующим образом раздробленной в точке ξ, и, естественно, распространения на подобный случай интеграла по этой мере. Необходимость подобных конструкций возникает при анализе некоторых реальных моделей математической физики. Разработка теории многозначного дифференцирования приводит в основном к результатам, вполне аналогичным классической теории. Своеобразные нюансы возникают при сравнении функции с ее же производной, поскольку в точках разрыва они оказываются объектами разной природы. Это накладывает отпечаток как на формулу интегрирования по частям, так и на анализ дифференциальных и интегральных уравнений.

УДК 517.9 Покровский А.А. /Санкт-Петербург/

ГОЛОВНЫЕ ВОЛНЫ КАК РЕЗОНАНСЫ В СХЕМЕ ЛАКСА-ФИЛЛИПСА.

Известно, что схема Лакса-Филлипса [1] даёт строгую теоретико-операторную интерпретацию резонанса - как собственного значения диссипативного оператора, связанного с матрицей рассеяния. Оказывается, что этот подход применим к рассеянию в слоистых средах, где скорость акустической волны зависит только от глубины. Рассмотрим волновое уравнение:

/1/ $$u_{tt}(\vec{x},y)=\frac{1}{\rho(y)}\Delta u(\vec{x},y),\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^{n-1},\quad y\geqslant -h,$$

где u - акустический потенциал, ρ - плотность акустической среды заполняющей полупространство $y\geqslant -h$. Предполагается, что при $y>0$ $\rho(y)=\rho_\infty=const$. Можно также рассматривать рассеяние акустических волн на тонкой пластине [2], расположенной в плоскости $y=0$.

Теорема 1. Пусть волновое уравнение $u_{tt}=\frac{1}{\rho_\infty}\Delta u$, $u|_{y=0}=0$ задает свободную динамику. Тогда для соответствующей пары генераторов в гильбертовом пространстве начальных данных с конечной энергией [1] существует матрица рассеяния S^t, совпадающая с коэффициентом отражения.

Теорема 2. При нечётном n для системы /1/ в подпространстве рассеянных волн существуют единственные уходящее и приходящее подпространства $D_\pm$ [1] такие, что $\forall f_\pm\in D_\pm$ имеем $[U(t)f_\pm](\vec{x},y)=0$ при $|\vec{x}|^2+y^2\leqslant\frac{1}{\rho_\infty}t^2,\ t>0$.

Теорема 3. Матрица рассеяния S^6, построенная по подпространствам $D_\pm$, имеет вид $S^6=S_+S_-$, где $S_\pm$ - аналитические на физическом и унитарные на вещественной оси оператор-функции, т.ч. $S^t=S_+S_-^{-1}$.

Теорема 4. Резонансы Лакса-Филлипса, соответствующие полюсам на нефизическом листе, описывают все головные волны в системе /1/ /известные в акустике, сейсмологии и радиофизике [3] /.

Теорема 5. Подпространство $D_+\oplus D_-$ состоит из всех причинных начальных данных. Полюса S_+ и S_- соответствуют двум возможным способам нарушения причинности.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. P.D.Lax, R.S.Phillips. Scattering Theory. New York, Academic Press, 1967.

[2]. А.В.Баданин, А.А.Покровский. О модели подкрепленной ребром пластины. Вестник СПбГУ. Сер.4, вып.3 /№18/, с.94-97 /1994/

[3]. Л.М.Бреховских. Волны в слоистых средах. М., 1957.

УДК 517.51 **Покровский А. В.** (Москва)

Об одном эквивалентном определении классов Гельдера–Зигмунда в многомерных областях

Пусть G — область в $\mathbf{R}^n$. Для целого $m \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ через $C^{m,\alpha}_{loc}(G)$ обозначается класс m раз непрерывно дифференцируемых в G функций $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, m–ые производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α на каждом компактном подмножестве G, а через Z^m_{loc}, $m > 0$ — класс $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций, $(m-1)$–ые производные которых удовлетворяют условию Зигмунда на каждом компактном подмножестве G, то есть, если K — компакт в G, то $|f_\alpha(x+h) - 2f_\alpha(x) + f_\alpha(x-h)| \leq M(K, f)\, h$ как только x, $(x+h)$, $(x-h)$ принадлежат K, $|\alpha| = m-1$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}^+$, $f_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$, M — величина, зависящая от K и f.

Если P — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\beta > 0$, то через $U^\beta(P, G)$ обозначим класс таких локально интегрируемых в G функций f, что для любого замкнутого шара радиуса r с центром в точке y, $B = B(r, y) \subset G$, выполнено условие $\inf_g \{\int_B |f(x) - g(x)|\, dx\} \leq M(G, f)\, r^{n+\beta}$, где инфимум берется по всем слабым решениям g уравнения $Pg = 0$, определенных в областях $G(g) \supset B$, а M не зависит от B. $U^\beta_{loc}(P, G)$ обозначает класс таких функций f, что $f \in U^\beta_{loc}(P, G')$ для любой области G', компактно принадлежащей G.

Теорема. Пусть P — однородный эллиптический оператор порядка l, $l \in \mathbf{N}$, с постоянными коэффициентами, $0 < \beta < l$. Если $f \in U^\beta_{loc}(P, G)$, то f может быть единственным образом так переопределена на множестве n–мерной лебеговой меры нуль, что:

а) в случае натурального β функция f принадлежит классу $Z^\beta_{loc}(G)$;

б) в случае нецелого $\beta = m + \alpha$, $m \in \mathbf{Z}^+$, $0 < \alpha < 1$, функция f принадлежит классу $C^{m,\alpha}_{loc}(G)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–01–00236) и Международного научного фонда (грант NCF000).

УДК 539.3

Полякова Л.Г. (Тольятти)

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

В работе приводятся результаты численных исследований напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки из композитного материала(КМ), свойства которого описаны моделью нелинейного разномодульного ортотропного материала и идентифицированы по результатам экспериментальных исследований проведенных автором.

Дифференциальные уравнения описывающие работу оболочки в условиях осесимметричного загружения не имеют аналитического решения. Для их реализации использован метод возмущения по параметру с двумя возмущающими параметрами: внешняя нагрузка и параметры диаграмм деформирования КМ.

На первом этапе расчетов был проведен анализ влияния параметров расчетной схемы (начального приближения, заданной точности, числа точек разбиения оболочки по высоте) на результаты расчетов. В дальнейшем, конструкция оболочки оптимизировалась в процессе последовательного нагружения по програме расчета, когда на каждом шаге по нагрузке велось сравнение расчетных напряжений в соответствующих зонах высоты оболочки с предельно допустимыми.

Для поиска оптимальной конструкции оболочки проведены расчетные исследования влияния высоты загрузки оболочки на ее напряженно-деформированное состояние.

УДК 531.383: 532.516: 531.01

Попов В.С. (Саратов)

ТОЧНОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЛАВКОВЫХ ПРИБОРОВ ПРИ ВИБРАЦИИ.

Рассматриваются поплавковые гироскопические приборы в конструкции которых тонкая упругая цилиндрическая оболочка, герметизирующая поплавковый гироузел, имеет переменную толщину и (или) технологические ребра жесткости. Ребра жесткости представляют собой шпангоут с разрывами.

Исследование точности поплавковых приборов проведено с учетом динамики абсолютно твердых торцевых дисков поплавка и ротора гиромотора, гидродинамики поддерживающего и демпфирующего слоя вязкой несжимаемой жидкости, окружающей гироузел и эффектов упругой податливости оболочки переменной толщины и (или) с ребрами жесткости, герметизирующей гироузел, как системы твердых, жидких и упругих тел.

Исследована математическая модель поплавковых приборов представляющая собой системы уравнений гидроупругости и уравнений движения абсолютно твердых тел.

Определены силы и моменты, действующие на абсолютно жесткие торцевые диски поплавка, со стороны тонкого поддерживающего и демпфирующего слоя вязкой несжимаемой жидкости через упругую цилиндрическую оболочку переменной толщины и (или) с ребрами жесткости.

Решение связанной нелинейной задачи гидроупругости и динамики твердых тел находится методом возмущений. За малые параметры приняты относительная толщина сдавливаемого слоя жидкости и относительная амплитуда колебаний торцевых дисков.

Одночленное разложение по относительной амплитуде колебаний торцевых дисков приводит к линеаризации задачи. Эта задача решается в режиме установившихся гармонических колебаний и определяет динамические характеристики приборов.

Второй член разложения по малой относительной амплитуде определяет вибрационную погрешность приборов (возмущающие моменты).

Найдены постоянные составляющие инерционного момента и возмущающего момента обусловленного действием жидкости и упругими эффектами цилиндрической оболочки переменной толщины и (или) с ребрами жесткости позволяющие определить дрейф нуля.

Проведенный вычислительный эксперимент показал:

- при круговой вибрации основания, к которому крепится прибор, уменьшение дрейфа нуля по сравнению с известными результатами в случае оболочки без технологических ребер жесткости;

- при линейной косой вибрации основания влияние ребер падает с ростом частоты, а при очень большой частоте вибрации снижается до нуля.

УДК 536.24 Портнов В.В., Дроздов И.Г. (Воронеж)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПОРИСТЫХ СТРУКТУРАХ

Известно, что пористое охлаждение является одним из перспективных методов теплозащиты для различного рода теплоиспользующей и теплогенерирующей аппаратуры. При этом теоретический анализ теплового состояния пористых элементов возможен только для случаев ламинарного движения теплоносителя и при использовании плоскопараллельной модели течения охладителя.

Дифференциальное уравнение, описывающее двумерное температурное поле в пористых структурах при равенстве температуры теплоносителя и матрицы в криволинейных ортогональных координатах (давление - P и функция тока - Ψ), имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial P^2} + A\frac{\partial^2\Theta}{\partial \Psi^2} - B\frac{\partial\Theta}{\partial P} = 0,$$

где Θ - безразмерная температура охладителя; A и B - безразмерные комплексы, учитывающие теплофизические свойства охладителя и пористой матрицы.

В данной работе решение уравнения отыскивается в области, имеющей вид квадрата. Заменяя частные производные конечными разностями для каждого i,j-го узла сетки, получим зависимости для определения температуры внутри исследуемой области в форме

$$\Theta_{i,j} = \Theta_{i+1,j}\frac{\Delta\Psi^2}{D} + \Theta_{i-1,j}\frac{\Delta\Psi^2 - A\Delta P\Delta\Psi^2}{D} + \Theta_{i,j+1}\frac{B\Delta P^2}{D} + \Theta_{i,j-1}\frac{B\Delta P^2}{D},$$

где $D = 2\Delta\Psi^2 + 2B\Delta P^2 + A\Delta P\Delta\Psi^2$; ΔP и $\Delta\Psi$ - расстояние между узлами сетки по осям P и Ψ соответственно.

Вместе с тем значения температуры на границах области определяются с привлечением граничных условий третьего рода.

1. Фалеев В.В., Дроздов И.Г., Портнов В.В. О тепловом состоянии пористой среды в условиях нелинейной фильтрации охладителя // Дисперсные потоки и пористые среды: Тр. Первой Российской национ. конф. по теплообмену. М:, МЭИ, 1994. Т. 7. С. 229-234.

УДК 517.9

Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. (Воронеж)

К ВОПРОСУ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НА СЕТЯХ

В качестве примера рассматривается сеть-пучок S с $M+m+1$ ветвями, имеющим $M+1$ входов, m выходов и узел ξ :

$$S=\left(\bigcup_{i=0}^{M+m}\gamma_i\right)\cup\{\xi\}\ ,\ \gamma_i=(-\infty,\xi),\ i=0,1,\dots,M\ ,\ \gamma_i=(\xi,\infty)\ ,\ i=M+1,M+2,\dots,M+m.$$

Обозначим через $C^{(n)}$ совокупность всех функций $y(x)$, $x\in S$ имеющих непрерывные производные до n -го порядка включительно на каждой из ветвей γ_i и определим дифференциальное выражение

$$\ell(y)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)\,y^{(k)},\quad y\in C^{(n)},$$

Под дифференциальным уравнением $\mathcal{L}y=f$ на сети S будем понимать уравнение

$$\ell(y)=f\ ,\quad f\in C\ ,\quad x\in\gamma_i\ ,$$

и соотношения

$$\ell_i\left(y_j(\xi),y_j'(\xi),\dots,y_j^{(n-1)}(\xi);\ j=\overline{0,M+m}\right)=0,\quad i=\overline{1,\mathcal{H}},$$

где

$$y_j(\xi)=\lim_{\substack{x\to\xi\\(x\in\gamma_j)}}y^{(k)}(\xi)\ ,\quad k=0,1,\dots,n-1\ .$$

Для модельной ситуации

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_M+\mathcal{H}_m\ ,\qquad \mathcal{H}_M=\sum_{i=1}^{M}\mathcal{H}_{M,i}\ \ (\mathcal{H}_M\geq M),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{i,j}^{k}\,y_i^{(k)}(\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{i,0}^{k}\,y_0^{(k)}(\xi)\ ,\quad j=\overline{1,\mathcal{H}_{M,i}}\ ,\ i=\overline{1,M},$$

$$\sum_{j=0}^{M+m}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{i,j}^{k}\,y_i^{(k)}(\xi)=0\ ,\quad i=\overline{\mathcal{H}_{M+1},\mathcal{H}},$$

рассматриваются вопросы структуры решения однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}y=0$

УДК 517.54

Прохоров Д.В. (Саратов)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О КОЭФФИЦИЕНТАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В решении экстремальных задач теории аналитических функций все более широкое применение находят методы оптимизации, основанные на параметрическом или интегральном представлении классов функций. В теории однолистных функций дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\,\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w\Big|_{t=0} = z, \quad 0 \le t \le \log M,$$

осуществляет параметрическое представление класса S^M голоморфных и однолистных в единичном круге функций f, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ $|f(z)|<M$. Особенно законченные результаты получаются при интегрировании уравнения Левнера на коротком отрезке, то есть для M, близких к 1. С помощью второй вариации удается показать, что тело коэффициентов в этом случае оказывается выпуклым во многих направлениях. Следовательно, для широкого класса линейных функционалов необходимое условие экстремума становится и достаточным, что позволяет находить оценки конкретных коэффициентных выражений.

Для класса B голоморфных в единичном круге функций $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$, $0<|f(z)|<1$, известно представление с помощью семейства дифференциальных уравнений типа Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\,\frac{e^{iu}+z}{e^{iu}-z}, \quad w\Big|_{t=0} = 1, \quad 0 \le t \le T,$$

зависящего от параметра z. Управления $u=u(t)$ параметризуют класс $B(T)=\{f\in B:\ a_0=e^{-T}\}$. В экстремальных задачах на классе $B(T)$ применимы классические методы теории оптимального управления. Они позволяют, в частности, получить асимптотические оценки коэффициентов при T, близких к 1 или к 0.

УДК 517.5 Рамазанов А.-Р.К. /Махачкала/

О РЯДАХ ФУРЬЕ ПО НЕСИММЕТРИЧНО ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ПОЛИНОМОВ

Для функции $f(x)$ и знакочувствительного веса $\rho(x)=(\rho_-(x),\rho_+(x))$ положим $(f,\rho)(x)=f^+(x)\rho_+(x)-f^-(x)\rho_-(x)$, $x\in(a,b)$; $f^+(x)=max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=(-f(x))^+$.

Пусть $L_{2,\rho}(a,b)$ – линейное пространство всех измеримых функций $f(x)$, $x\in(a,b)$, для которых конечен интеграл $(f,g)_\rho:=\int_a^b f(x)(g,\rho)(x)\,dx$ при $(g,g)_\rho<\infty$; оно полное относительно $\|f\|=sup\{|(f,g)_\rho|:(g,g)_\rho\le 1\}$.

Систему функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\dots$ $(x\in(a,b))$ назовем ортонормированной справа /соответственно, слева/ с весом $\rho(x)$, если $(\varphi_n,\varphi_n)_\rho=1$ и $(\varphi_n,\varphi_m)=0$ при $n>m$ /соответственно, при $n<m$ /, $n,m=0,1,\dots$.

При некоторых естественных ограничениях на вес $\rho(x)$ существуют две последовательности полиномов $\{P_n(x)\}$ и $\{Q_n(x)\}$ $(deg\,P_n=deg\,Q_n=n)$, которые образуют ортонормированные соответственно справа и слева системы с весом $\rho(x)$.

Каждый $Q_n(x)$ имеет n различных нулей на (a,b), что позволяет построить квадратурные формулы типа Гаусса, которые дают сходящийся процесс для непрерывных на $[a,b]$ функций.

Определим коэффициенты Фурье функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ по системе $\{P_n(x)\}$ равенствами: $a_0=(f,P_0)_\rho$, $a_n=(f,P_n)_\rho-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(P_k,P_n)_\rho$, $n\ge 1$.

Эти коэффициенты, вообще говоря, не обладают свойством минимальности в $L_{2,\rho}(a,b)$.

Теорема I. Если для числовой последовательности $c_0,c_1,\dots$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(P_n,g)_\rho$ сходится равномерно по $g(x)$ с $(g,g)_\rho\le 1$, то существует $f\in L_{2,\rho}(a,b)$, для которой $c_n=a_n$ $(n=0,1,\dots)$, причем $(f,g)_\rho=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(P_n,g)_\rho$ при $(g,g)_\rho<\infty$.

Вполне аналогичное утверждение имеет место для биортогональных систем $\{\varphi_n(x),\psi_n(x)\}$ в пространстве интегрируемых с квадратом функций.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $S_n(x,f)$ – частная сумма ряда Фурье по системе $\{P_n(x)\}$, $E_n(f)$ – наименьшее уклонение $f(x)$, $x\in[a,b]$, в равномерной метрике $\|\cdot\|_C$ от алгебраических полиномов степени не выше n, $M=(\int_a^b max\{\rho_+(x),\rho_-(x)\}dx)^{1/2}$, то

$$\|f-S_n(\cdot,f)\|_C\le E_n(f)\prod_{k=0}^{n}(1+M\|P_k\|_C),\ n=0,1,\dots.$$

УДК 517.94 Расулов А.Б. (Душанбе)

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Через $\mathcal{D}^+$ обозначим конечную область ограничивающий гладким замкнутым контуром L. $\mathcal{D}^-$ -внешняя область по отношению к области $\mathcal{D}^+$, содержащая бесконечно удаленную точку.

В областях $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ рассмотрим обобщенную задачу Коши-Римана с сингулярным многообразием вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} + \frac{A(z,\bar z)}{a(z)\bar z + b(z)} w + \frac{B(z,\bar z)}{a(z)\bar z + b(z)} \overline{w} = \frac{f(z,\bar z)}{a(z)\bar z + b(z)} \qquad (1)$$

где $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $w(z,\bar z) = u(x,y) + i v(x,y)$ функции $A(z,\bar z)$, $B(z,\bar z)$, $f(z,\bar z)$ являются непрерывными функциями переменного z, $\bar z$.

Если через E_0^+, E_0^- и E_0^γ обозначим множество нулей функции $a(z)\bar z + b(z)$ соответственно в областях $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$ и на границе L, то $E_0 = E_0^+ \cup E_0^- \cup E_0^\gamma \neq \emptyset$.

В настоящей заметке для системы (I) в областях $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ найдены интегральные представления, зависящий от одной произвольной аналитической функции, причем в некоторых случаях решение системы (I) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма со слабой особенностью.

Для ряда случаев с помощью весовых функций поставлены задача типа линейного сопряжения [I], задача типа Гильберта и ряд других задач; они сведены к аналогичным известным задачам теории аналитических функций. Кроме того, для некоторых случаев исследована задача Римана-Гильберта с бесконечным индексом [2].

Литература

I. Раджабов Н., Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений эллиптического типа с сигулярным многообразием. Дифференц. уравнения. Т.25, №7, 1989 с.1279-1281.

2. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. Наука, 1986, 240с.

УДК 517.95 + 517.97

Рахимов М.Р. (Ашгабат)

К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть $A(t)$ обозначает линейный неограниченный оператор, имеющий $\forall t\in[0,\infty)$ плотную область определения $\mathcal{D}(A(t))$ и область значений в гильбертовом пространстве H такой, что при произвольных непрерывных функциях $x(t)\in\mathcal{D}(A(t)), y(t)\in H$ $\forall t\in[0,\infty)$ форма $(A(t)x(t),y(t))$ является непрерывной функцией от $t\in[0,\infty)$.

Определим класс функций $B_2^1(0,\infty;H)$, состоящий из произвольных непрерывных функций $x(t)\in\mathcal{D}(A(t))$, $\forall t\in[0,\infty)$ таких, что $x\in W_2^1(0,\infty;H)\cap C^2(0,\infty;H)$. Положим $B_2(0,\infty;H)=L_2(0,\infty;H)\cap C^1(0,\infty;H)$. Пусть задано непрерывное отображение $f(t,x(t),y(t),u(t))$ такое, что $f(t,0,0,0)=0$;
$$(0,\infty)\times B_2^1(0,\infty;H)\times B_2(0,\infty;H)\times B_2(0,\infty;H)\to L_2(0,\infty;H)\cap C[0,\infty;H).$$

Рассмотрим динамическую систему:
$$\ddot{x}(t)-A(t)x(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)); \tag{1}$$
$$x(0)=x_0\in\mathcal{D}(A(0)),\ \dot{x}(0)=x_1 \tag{2}$$
где $x_1\in H$ такой, что абстрактная задача Коши (1),(2) при каждом управлении $u\in B_2(0,\infty;H)$ имеет решение из $B_2^1(0,\infty;H)$.

Сформулирована задача синтеза оптимального управления, доставляющее минимум неотрицательному функционалу
$$J[t_0,u(t)]=\int_{t_0}^{\infty}\Omega(t,w(t),u(t))dt,\quad w(t)=\{x(t),\dot{x}(t)\}. \tag{3}$$

Задача синтеза (1)-(3) изучена также на конечном отрезке времени и при различных квадратических критериях качества [1]. Доказано достаточное условие оптимальности. Методами динамического программирования и спектрального разложения [2] построено замкнутое решение проблемы синтеза в классе обобщённых решений. Изучены дифференциальные свойства функционала Беллмана. Доказано, что функционал Беллмана в классе обобщённых решений не является дифференцируемым по Фреше. Тем не менее методом конечномерной аппроксимации доказана оптимальность получаемого управления. Дано обоснование метода динамического программирования и установлена его связь с принципом максимума С.Л.Понтрягина.

1. Egorov A.I., Rachimov M., Lect. notes in comp science, 27, Springer-verlag, Berlin-New York, 1975, 178-183.
2. Ильин В.А., ДАН СССР, 1983, т. 273, № 5, с. 1048-1053

УДК 517.958

Розанова О.С.

ОБ ОБРАЗОВАНИИ РАЗРЫВА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СКОРОСТИ ВЕТРА В МОДЕЛИ СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

Рассмотрим в качестве модели свободной атмосферы систему уравнений, заданную в слое $\mathcal{D}_{F_0H}$, заключенном между геоидом F_0, от которого отсчитывается высота, и модельной границей атмосферы H, совпадающей с одним из геоидов:

$$\begin{aligned}(v^i)'_t &= -v^\alpha \nabla_\alpha v^i + 2\varepsilon^{i}_{\cdot jk} v^j w^k - \nabla^i \Phi - \frac{\nabla^i p}{\rho}; \quad i=1,2,3, \\ \rho'_t &= -\nabla_\alpha(\rho v^\alpha); \quad S'_t = -v^\alpha \nabla_\alpha S; \quad p = R\rho T.\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь (x^1, x^2, x^3) и ε_{ijk} - локальные криволинейные координаты и дискриминантный тензор $\mathcal{D}_{F_0H}$, а также w^i и $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ - контравариантные компоненты векторов угловой скорости вращения Земли и скорости ветра соответственно, ρ - плотность, p - давление, S - энтропия, Φ геопотенциал, T - температура, R - универсальная газовая постоянная.

ТЕОРЕМА. Пусть метрический тензор многообразия $\mathcal{D}_{F_0H}$ таков, что $a_{ij}=0\ (i \neq j)$, $a_{33}=a_{33}(x^3)$, $\partial a_{ii}/\partial x^3 \geq 0$. Пусть также при граничных условиях "непротекания" и в предположении гидростатического равновесия при $t \geq 0$ выполнено условие

$$\int_{\mathcal{D}_{F_0H}} (v^3, v^3)\rho\, dV \geq \varepsilon > 0, \quad \varepsilon = const > 0.$$

Тогда, если для первоначально гладкого решения системы (1) при $t=0$ справедливо требование

$$F(0) = \int_{\mathcal{D}_{F_0H}} a_{33}\rho x^3 v^3\, dV > 0,$$

то вертикальная составляющая скорости ветра теряет исходную гладкость за время $t_0 \leq 2EMh^2/\varepsilon F(0)$, где M и E - сохраняющиеся в системе (1) величины массы и энергии, $|x^3| \leq h$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае стандартных сферических координат метрический тензор удовлетворяет условиям теоремы, и оценку можно улучшить $t \leq Mh^2/F(0)$.

УДК 517.9

Розов Н.Х., Сушко В.Г. (Москва)

Барьерные функции и предельные решения некоторых бисингулярных задач.

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon x''' + p(t)x'' + q(t)x' + r(t)x = f(t), \quad a < t < b, \tag{1}$$

$$x'(a) = a_1, \quad x(b) = b_0, \quad x'(b) = b_1, \tag{2}$$

в предположениях: 1) функция $p(t)$ имеет единственный нуль $\tau \in (a,b)$, $q(\tau) > 0$; 2) хотя бы одна из функций $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $f(t)$ имеет точку разрыва I-го рода $\theta \in (a,b)$, $\theta \neq \tau$, а на отрезках $[a,\theta]$, $[\theta,b]$ они бесконечно дифференцируемы. Допустим, что при $\tau < \theta$ решение уравнения

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = f(t), \tag{3}$$

не имеет сопряженных точек на отрезке $[\theta,b]$.

Теорема. Пусть выполнены указанные предположения. Пусть, кроме того, $p(t)\operatorname{sign}(t-\tau) < 0$ на отрезке $[a,\theta]$ при $t \neq \tau$. Тогда существует решение задачи (1),(2), стремящееся к один раз дифференцируемому в точке $t = \theta$ решению уравнения (3), удовлетворяющему краевым условиям $y'(a) = a_1$, $y(b) = b_0$.

Аналогичные утверждения справедливы для всех случаев чередования знаков функции $p(t)$ и взаимного расположения точек θ, τ. Результат обобщается на случай произвольного числа точек типа τ, θ.

Русак В.Н. Агафонова Н.К. (Минск)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ И РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C[a,b]$ пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ с обычным определением нормы. Будем рассматривать конечные разности порядка $r+1$ с шагом τ

$$\Delta^{\tau}_{r+1} f(x) \overset{def}{=} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C^{\nu}_{r+1} f(x+\nu\tau),$$

и обозначим через $W^r \Omega_M,\ r \in N,$ классы функций из пространства $C[a,b]$, которые подчинены условию

$$\int_a^{b-(r+1)\tau} \left| \Delta^{\tau}_{r+1} f(x) \right| dx \le M\tau^{r+1},\ \forall \tau > 0 \tag{I}$$

Пусть $R_n(f)$ и $E_n(f)$ есть соответственно наилучшие рациональные и полиномиальные приближения функции $f(x) \in C[a,b]$. Тогда имеется двухсторонняя оценка для порядка наилучшей рациональной аппроксимации.

$$\sup_{f \in W^r \Omega_M} R_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1},\ r \in N, \tag{2}$$

на каждом классе $W^r \Omega_M,\ r \in N$.

Если $f^{(m)}(x) \in W^r \Omega_M$, то вместо (2) выполняется соотношение.

$$\sup_{f^{(m)}(x) \in W^r \Omega_M} R_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1+m},\ r \in N,\ m \in N$$

Будут обсуждаться также наилучшие рациональные аппроксимации на некоторых других классах, в частности полученных заменой мажоранты $M\tau^{r+1}$ в правой части (I) на $M\tau^{r+1} \ln \tau$.

В заключение заметим, что во всех рассматриваемых случаях точный степенной порядок наилучших полиномиальных приближений $E_n(f)$ на классах на единицу больше точного порядка наилучших рациональных приближений.

В. С. Рыхлов , С. Г. Сучков , В. И. Филиппов (Саратов)

Об области устойчивости системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для устройств с Джозефсоновскими контактами.

Использование уникальных свойств контактов Джозефсона (КД) позволяет создавать миниатюрные устройства для измерительной и приемнопередающей аппаратуры . В последнее время исследуются системы из большого числа контактов , но при этом важнейшей проблемой становится обеспечение их фазовой синхронизации , что при наличии естественного технологического разброса параметров контактов является сложной задачей .

Представляет практический интерес найти область минимального рассинхронизма высокочастотного тока КД Поэтому , следуя авторам работы [1] , будем исследовать решения системы уравнений :

$$\beta_c \ddot{\varphi}_{k,i} + \dot{\varphi}_{k,i} = \frac{1}{\beta_L}\Big[-\beta_L \sin(\varphi_{k,i}) - (-1)^k \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_j}(-1)^i \varphi_{j,i} + \beta_L(1-\ell_k) i_g - (-1)^k 2\pi(\Phi_{ext}-n) \qquad (1)$$

, где $\ell_k = 0.5$, $n = 0$; $k,i = 1,2$; $N_j = 2$;

β_c , β_L , Φ_{ext} – параметры , $\beta_c \in [0,5]$, $\beta_L \in [0,10]$, $\Phi_{ext} \in [0,0.5]$.

Суть метода состоит в представлении решения системы (1) в виде $\varphi_{i,k} = \varphi_i + \eta_{i,k}$; $i,k = 1,2$, где $\eta_{i,k} \to 0$ при $t \to \infty$. Это позволяет свести задачу к исследованию устойчивости линейной системы . Далее численно исследуются решения линейной системы с помощью теории флоке . В результате при нулевых начальных условиях получена следующая область устойчивости решений системы (1)

$$0.2 < \beta_c < 0.4 \quad ; \quad 7.5 < \beta_L < 10.0 \quad ; \quad 0.1 < \Phi_{ext} < 0.5 .$$

Мы проверяли наш метод для более простой ситуации ,как в работе [2] , и получили аналогичный , как в [2] , результат .

1]M.Darula, P.Spidel, F.Busse, E.Heinz and S.Benaska , Arrays of Josephson junction closed into a superconducting loop as a source of coherent radiation , ISES'93 , Boulder , Colorado USA , Aug. 11-14 . 1993.

[2]P.Hadley , M.R.Beasley , K.Wiesenfeld , Phase locking of Josephson junction arrays , Appl. Phys. Lett. 52(19) May 1988 .

УДК 517.51 Сабурова Т.Н.

Об универсальных рядах по базисам типа Фабера-Шаудера

Многих авторов занимал вопрос представления измеримых на $[0,1]$ функций (функций класса М) рядами $\sum a_n f_n(x), \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, где $\{f_n(x)\}$ - та или иная система почти везде конечных функций из класса М. Ульянов П.Л.,Талалян А.А., Кротов В.Г., Гоффман, Зинк и ряд других математиков решали такого рода задачи для системы Фабера-Шаудера.

В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении функций класса М универсальными рядами по базису типа Фабера-Шаудера (БТФШ) $\{\varphi_n(x)\}$,порожденного функцией $\varphi(x)$ (см. [1]).При этом, следуя терминологии [2], будем говорить, что ряд $\sum a_n\varphi_n(x), \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ является U_2^-, U_3- универсальным, если он универсален в классе М в смысле сходимости почти всюду (п.в.) соответственно относительно частичных рядов и перестановок. Для удобства изложения будем также говорить, что ряд $\sum a_n\varphi_n(x), \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ обладает свойством (А), если $\sum(a_n+|a_n|)\varphi_n(x)/2=+\infty$ п.в. и $\sum(a_n-|a_n|)\varphi_n(x)/2=-\infty$ п.в.

Справедлива следующая

Теорема. Если $\varphi(x)$ - выпуклая вверх функция, то для ряда $\sum a_n\varphi_n(x), \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$: $(A)\Longleftrightarrow U_2\Longleftrightarrow U_3$.

Заметим, что используя ряд других теорем, можно эффективно строить такого рода универсальные ряды.Кроме того все сказанное выше остается справедливым для систем, построенных по образцу БТФШ, без предположения их базисности в $C[0,1]$.

Литература

[1]Сабурова Т.Н. О базисах в $C[0,1]$типа Фабера-Шаудера// Теория функций и приближений (Тр. 3-й Сарат.зимней школы, 1986г.) Саратов,1988.Часть 3.-С.44-46.

[2]Кротов В.Г. Представление измеримых функций рядами по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды//Изв. АН СССР сер. матем.- 1977.-Т.41,№ 1.-С.215-229.

УДК 517.956 Савченко Ю.Б. (Воронеж)

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p

В полосе $E_n^{0,1} = \{(x,t) \mid x \in E_{n-1},\ 0 < t < 1\}$ рассматривается уравнение

$$Lu - \lambda u \equiv Au + Bu - \lambda u = f(x,t),\ f(x,t) \in L_p(E_n^{0,1}), \tag{1}$$

здесь $A \equiv A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $B \equiv B(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\nu|+k=2m} b_{\nu k} D_x^\nu D_{\alpha,t}^k$,

$b_{\nu k}$ – постоянные комплексные коэффициенты.

$D_{\alpha,t} = i\alpha^{1/p'}(t)\frac{\partial}{\partial t}\alpha^{1/p}(t)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p > 1\right)$ – "весовая" (см. [1]) производная, $\alpha(t)$ – достаточно гладкая на $[0, 1]$ "весовая" функция, обращающаяся в нуль вместе со своей производной при $t = +0$ и при $t = 1-0$: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = \alpha(1-0) = \alpha'(1-0)$, $\alpha(t) > 0$ при $t \in (0,1)$; $B(\xi,\eta) \neq e^{i\theta}|B(\xi,\eta)|$ при $|\theta| < \pi - \theta_B$, $0 \le \theta_B < \pi$ и при любых $(\xi,\eta) \in E_n$.

Для уравнения (1) задаются граничные условия

$$u|_{t=0} = u|_{t=1} = 0. \tag{2}$$

Исследуется разрешимость задачи (1) - (2).

Доказано существование единственного "сильного" решения задачи в пространствах $L_p(E_n^{0,1})$. При доказательстве используется метод Гривара - Да Прато (см. [1]).

Литература.

1. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи// Мат. анализ,- М., 1985.- С. 125-218 - (Итоги науки и техники/ ВИНИТИ: т. 23).

УДК 517.988

Сапронов Ю.И. (Воронеж)

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Известно, что современная компьютерная технология привела к созданию нового инструментария для получения математических знаний. Важнейшей компонентой этого инструментария является визуализация процесса математических исследований. В частности, при изучении нелинейных уравнений можно выводить на принтер или экран монитора различные графические образы, позволяющие наглядно демонстрировать решения и их поведение.

В проблеме бифуркации экстремалей выявление таких геометрических характеристик как количество экстремалей, их индексы Морса, гомологии поверхностей уровня, типы бифуркационных диаграмм и т.п., можно осуществлять на основе конечномерных редукций по схемам Пуанкаре, Ляпунова-Шмидта и Морса-Ботта к ключевым функциям. Если количество ключевых переменных не больше трех, то график ключевой функции (в случае одной или двух ключевых переменных) и её линии (поверхности) уровней (в случае двух или трех ключевых переменных) дают полную информацию о бифурцирующих экстремалях исходного функционала. В случае четырех и более ключевых переменных соответствующую информацию можно получать из рассмотрения двумерных сечений графиков и поверхностей уровня ключевой функции.

В этой связи представляется актуальной задачей исследование областей нелокального существования ключевых функций [1-3].

Литература: 1. Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах// Математические заметки. 1991. Т.49, вып.1. С.94-103.

2. Sapronov Yu. I. Smooth Marginal Analyszis of Bifurcation of Extremals// Geometry in Partial Differential Equations. World Scientific publishing. Co. Pte. Ltd. 1994. P.345-375.

3. Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в теории изгиба тонких упругих пластин// Понтрягинские чтения - V. Тез. докл. Воронеж, ВГУ. 1994. С.37.

УДК 517.9

Г.А.Свиридюк, А.А.Ефремов (Челябинск)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА СОБОЛЕВА

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, оператор $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а оператор $M:\operatorname{dom}M\subset\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ линеен, замкнут и плотно определен. В предположении сильной (L,p)-секториальности оператора M [I] исследуется задача минимизации функционала качества

$$J(u)=\int_0^\tau \|z(u)-z_0\|^2_{\mathfrak{X}^1}ds+\int_0^\tau\langle Nu,u\rangle_{\mathfrak{G}}ds$$

для линейного операторного дифференциального уравнения

$$L\dot{x}=Mx+y\ ,\quad \ker L\neq\{0\}. \qquad (1)$$

Поскольку в данном случае уравнение (I) расщепляется на сингулярную и регулярную части

$$R\dot{x}^0=x^0+y^0\ ,\quad \dot{x}^1=Tx^1+y^1, \qquad (2)$$

где оператор R нильпотентен степени не выше p, а оператор T секториален, то функционал качества J тоже должен быть расщеплен в сумму $J=J^0+J^1$, где J^0 – функционал качества для сингулярной, а J^1 – для регулярной частей (2) соответственно.

Задача оптимального управления регулярной частью (2) решается стандартно [2].

ТЕОРЕМА. Пусть $y^0\in W_2^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{X}^0)$, причем

$$x_0^0=-\sum_{q=0}^{p}R^q y^{0(q)}(0).$$

Тогда существует единственное сингулярное оптимальное управление.

Полученный результат позволит в будущем рассмотреть задачи оптимального управления для полулинейных уравнений типа Соболева [3].

Литература

I. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т.49,№4. С.47-74.

2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.-М.:Мир, 1972.

3. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальными операторами // А&а , 1994. Т.6,№2. С.216-237.

УДК 517.9

Свиридюк Г.А., Келлер А.В. (Челябинск)

ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА С ОТНОСИТЕЛЬНО p-СЕКТОРИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, оператор $M:\mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут, $\mathrm{dom}M$ плотна в $\mathfrak{U}$. Рассмотрим линейное уравнение типа Соболева [1]

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1}$$

К случаю необратимости оператора L, в частности, $\ker L \neq \{0\}$, удается редуцировать задачи, возникшие в приложениях [2], там же ставится вопрос о неустойчивости решений уравнения (1). В связи с этим вводится в рассмотрение экспоненциальная дихотомия.

Пусть $\rho^L(M)$ L-резольвентное множество оператора M. Если оператор M (L,p)-секториален [1], то $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Тогда уравнение (1) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \quad L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существуют аналитические в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta - \frac{\pi}{2}\}$ и равномерно ограниченные разрешающие полугруппы уравнений (2).

Пусть $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ – L-спектр оператора M.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор M (L,p)-секториален и существует $\omega \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \leq \mathrm{Re}\,\mu \leq \omega\}$. Тогда решения уравнений (2), лежащие в инвариантных пространствах [1], имеют экспоненциальную дихотомию.

В качестве примера, демонстрирующего существование такой неустойчивости рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u, \tag{3}$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости. Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметры среды. Сведем (3) к (1):

$$L = \lambda - \Delta \qquad M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2.$$

Пусть λ_1 – (отрицательное, однократное) максимальное собственное значение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ.

ТЕОРЕМА 3. При любом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор M L-секториален, и при $\lambda < \lambda_1$ решения уравнения (3) имеют экспоненциальную дихотомию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т.49, № 4.С.47-74.
2. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгеб. и анал. 1994. Т.6, № 2.С.216-237

УДК 517.9.

Г.А.Свиридюк, М.В.Климентьев (Челябинск)

Рассмотрена задача Коши

$$u(0) = u_0 \qquad (1)$$

для операторного полулинейного уравнения типа Соболева

$$L\dot{u} + M(u) = 0 \qquad (2)$$

заданного в банаховых пространствах, с S-монотонным и сильно коэрцитивным оператором $M: \mathcal{U}_M \to \mathcal{U}_M^*$. Раннее она рассматривалась с применением метода компактности [1]. Наш подход состоит в использовании теории Комуры и метода фазового пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathcal{U}_M$ называется фазовым пространством уравнения (2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathfrak{P}$;

(ii) при любом u_0 из некоторого плотного в $\mathfrak{P}$ множества $\overset{o}{\mathfrak{P}}$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Пусть $\ker L \in \operatorname{dom} M$. Введём пространства $\mathcal{U}_M^1 \equiv (I-P)[\mathcal{U}_M]$ и $\mathfrak{Z} \equiv \{u \in \mathcal{U}_M : PM(u) = 0\}$, где символом P обозначено сужение на пространство $\mathcal{U}_M$ и расширение на пространство $\mathcal{U}_M^*$ ортопроектора $\tilde{P}: \mathfrak{F} \to \ker L$.

ТЕОРЕМА множество $\tilde{\mathfrak{P}}$ есть фазовое пространство уравнения (2), являясь банаховым многообразием C^k-диффеоморфным пространству $\mathcal{U}_M^1$ всюду, за исключением, быть может, точки ноль.

Рассмотрены начально-краевые задачи

$$u(x,0) = u_0, \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \quad u(x,t) = 0, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \qquad (3)$$

для обобщённого фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta) u_t - \Delta(|u|^{p-2} u) + f = 0, \; p \geq 2 \qquad (4)$$

и для диффузионного уравнения Девиса

$$(\lambda - \Delta) u_t - (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i}) u_{x_i} + f = 0 \qquad (5)$$

Задачи (4), (3) и (5), (3) редуцированы к задаче (2),(1) (построены конкретные реализации пространств и операторов из абстрактной схемы в обеих случаях), установлена их однозначная разрешимость для любых начальных данных из определённых плотных подмножеств построенных фазовых пространств уравнений (4) и (5).

Литература

1. Свиридюк Г.А. Одна задача для обобщённого фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Матем. 1989. №2. С.55-62.

УДК 517.5 Севастьянов Е.А. (Москва)

ОБ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВАХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДЛЯ СИСТЕМ ЧЕБЫШЕВА

Для любой системы Ф функций, определенных на некотором множестве E, анулятором этой системы N(Ф,E) называется множество всех точек из E, в которых все функции системы обращаются в нуль. Очевидно, что E\N(Ф,E) – это максимально широкое подмножество множества E, на котором *конечная* система Ф может быть системой Чебышева (Т-системой).

О п р е д е л е н и е. Пусть Ф – конечная система функций, непрерывных на множестве E. Множество $F\subset E$ назовем *Т-устранимым* для системы Ф, если из того, что Ф – система Чебышева на E\F, следует, что она является системой Чебышева на E\N(Ф,E).

Т е о р е м а. *Пусть F – некоторое непустое подмножество отрезка* $\Delta=[a,b]$. *Для того, чтобы F было Т-устранимым множеством для каждой конечной системы непрерывных на* Δ *функций, необходимо и достаточно, чтобы F было нигде не плотным и не содержало концов* Δ.

Это утверждение находит приложения в вопросах единственности элемента наилучшего приближения при равномерных аппроксимациях со знакочувствительным весом $p(x)=(p_-(x),p_+(x))$, компоненты которого обращаются в 0 в некоторых точках x.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-01-00236).

УДК 517.5 Седлецкий А.М. (Москва)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Объектом доклада являются целые функции

$$F(z)=\int_{\mathbb{R}} e^{izt}\exp(-a|t|^{\alpha})f(t)\,dt,\quad a>0,\ \alpha>1, \qquad (1)$$

где $f\in L^p$, $1\le p\le\infty$. Спрашивается, какими интегральными свойствами (во всей плоскости) обладает функция (1) ? И наоборот, какие интегральные свойства целой функции $F(z)$ влекут её представимость в виде (1) ?

Изучение этих вопросов начато в статьях [1,2].

Пусть $1/\alpha+1/\beta=1$, $K(\beta,a)=\beta^{-1}(\alpha a)^{-\beta/\alpha}$. Через $A^p(\beta,a)$ обозначаем пространство целых функций $F(z)$ с нормой

$$\left\|F(x+iy)(1+|y|)^{(1-3/p)(1-\beta/2)}\exp\left(-K(\beta,a)|y|^{\beta}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},\quad 1\le p\le\infty.$$

Основной результат доклада в упрощённой форме выглядит так:

1) при $2\le p\le\infty$ оператор (1) действует ограниченно из $L^p(\mathbb{R})$ в $A^p(\beta,a)$,

2 если $F\in A^p(\beta,a)$, $1\le p\le 2$, то справедливо представление (1), причём оператор $F\to f$ действует ограниченно из $A^p(\beta,a)$ в $L^p(\mathbb{R})$.

Даются применения этих фактов к вопросам полноты и минимальности взвешенных систем экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-205).

Литература

1. Zalik R., Abuabara Saad T. Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms // J. Math. Anal. and Appl. 1987. V.126. P. 483-493.

2. Sedletskii A.M. Theorems of Paley-Wiener-Pitt's type for Fourier transforms of rapidly decreasing functions // Integral Transforms and Special Functions. 1994. V. 2, №2. P. 153-164.

УДК 517.51 Симонова И.Э., Симонов Б.В. (Волгоград)

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ $E_p(\mathcal{E})$

Пусть L_p ($1\le p<\infty$)-пространство 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$; L_p ($p=\infty$)-пространство 2π-периодических непрерывных функций с нормой $\|f\|_p=\max\{|f(x)|, 0\le x\le 2\pi\}$; $E_n(f)_p$ -наилучшее приближение $f(x)\in L_p$ при помощи тригонометрических полиномов порядка не больше n ; $\omega_\alpha(f,t)_p$ ($\alpha>0$)-модуль гладкости порядка α (не обязательно целого) функции $f(x)$ из L_p , т.е.

$$\omega_\alpha(f,t)_p=\sup_{|h|\le t}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}f(x+(\alpha-n)h)\right\|_p;$$

$E_p(\mathcal{E})$ -класс функций $f(x)\in L_p$, для которых $E_n(f)_p\le \mathcal{E}_n$, где $0\le \mathcal{E}_{n+1}\le \mathcal{E}_n$ $(n=0,1,2,\dots)$, $\mathcal{E}_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

Пусть, далее, $\lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\Delta\lambda_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n,\ \Delta^2\lambda_n=\Delta(\Delta\lambda_n);\ W(p,\lambda,\beta)=\{f\in L_p:$$
$$\exists f_{\lambda,\beta}\in L_p,\ f_{\lambda,\beta}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(a_n(f)\cos(nx+\beta\pi/2)+\right.$$
$$\left.+b_n(f)\sin(nx+\beta\pi/2)\right)\};\ W(p,\lambda,\beta)H_p^\alpha[\varphi]=\{f\in W(p,\lambda,\beta):$$
$$\omega_\alpha(f_{\lambda,\beta},1/(n+1))_p=\underline{\underline{O}}(\varphi_{n+1}),\ \varphi_n\downarrow 0,\ \varphi_{n+1}(n+1)^\alpha\uparrow(n\uparrow\infty)\}.$$

Утверждение. Пусть $1\le p\le\infty$; $\theta=\min(p,2)$ при $1\le p<\infty$; $\theta=1$ при $p=\infty$; $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$-неубывающая последовательность положительных чисел такая, что 1) $\Delta^2\lambda_n\le 0$ или 1') $\Delta^2\lambda_n\ge 0$ и $\Delta\lambda_n\ll\Delta\lambda_{2n}$.

Тогда

$$E_p(\mathcal{E})\subset W(p,\lambda,\beta)\Leftrightarrow C_1\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{n+1}^\theta-\lambda_n^\theta)\mathcal{E}_n^\theta+C_2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n n^{-1}\mathcal{E}_{n-1}<\infty;$$

$$E_p(\mathcal{E})\subset W(p,\lambda,\beta)H_p^\alpha[\varphi]\Leftrightarrow\Big\{(n+1)^{-\alpha\theta}\sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu^\theta\nu^{\alpha\theta-1}\mathcal{E}_{\nu-1}^\theta+$$

$$+C_1\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\lambda_{\nu+1}^\theta-\lambda_\nu^\theta)\mathcal{E}_\nu^\theta+C_2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\lambda_\nu\nu^{-1}\mathcal{E}_{\nu-1}\Big\}^{1/\theta}=\underline{\underline{O}}(\varphi_{n+1}),$$

где $C_1=1$, $C_2=0$ при $1<p<\infty$; $C_1=|\cos\frac{\beta\pi}{2}|$, $C_2=|\sin\frac{\beta\pi}{2}|$ при $p=1,\infty$.

Замечание. При $1<p<\infty$ утверждение справедливо и при менее жестких ограничениях на последовательность $\{\lambda_n\}$, а именно, условия 1) и 1') можно заменить следующим: $\lambda_{2n}\ll\lambda_n$.

УДК 517.52 Скворцов В.А., Королева М.П. (Москва)

РЯДЫ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ, СХОДЯЩИЕСЯ К ФУНКЦИЯМ, ИНТЕГРИРУЕМЫМ ПО ДАНЖУА

Для большинства классических ортогональных систем, включая тригонометрическую систему, системы Уолша и Хаара, известно, что если ряд по такой системе сходится всюду к суммируемой функции, то он является рядом Фурье-Лебега этой функции. Для всех упомянутых систем этот результат обобщается на случай узкого интеграла Данжуа (эквивалентного интегралу Перрона). Сложнее обстоит дело в случае широкого интеграла Данжуа. Для одних систем (систем Хаара и Уолша) соответствующее обобщение возможно (А.Г.Арутюнян), для других (тригонометрическая система) строится противоречащий пример (В.А.Скляренко).

В настоящей работе эти вопросы рассматриваются для рядов по мультипликативным системам Прайса, обобщающим систему Уолша и представляющим собой частный случай мультипликативных систем Виленкина. Система Прайса является определенным образом упорядоченной группой характеров группы $\prod_{j=0}^{\infty} Z(p_j)$, где $p_j > 1$, $j = 0, 1, \ldots$

Известно (Н.А.Бокаев, В.А.Скворцов), что если частные суммы $S_n(x)$ ряда по системе Прайса с коэффициентами, стремящимися к нулю, всюду на $[0,1)$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{n\to\infty} S_{m_n}(x) = f(x) \qquad (1)$$

где $m_n = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$, а f – всюду конечная функция, интегрируемая в смысле узкого интеграла Данжуа, то данный ряд является рядом Фурье-Данжуа по системе Прайса.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. Существует ряд по системе Прайса при $p_j = 3$, $j = 0, 1, \ldots$, с коэффициентами, стремящимися к нулю, для которого всюду на $[0,1)$ выполнено соотношение (I), с некоторой функцией f, интегрируемой в смысле широкого интеграла Данжуа, но который не является рядом Фурье-Данжуа функции f.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд по системе Прайса, определяемой ограниченной последовательностью $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, сходится всюду на $[0,1)$, кроме, быть может, некоторого счетного множества, к функции f, интегрируемой в смысле широкого интеграла Данжуа, то этот ряд является рядом Фурье-Данжуа функции f.

Скляднев П.С., Фарберович О.В. (Воронеж)

РАСЧЕТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА.

В последние годы значительно возрос интерес к новым численным методам, используемым в самосогласованных расчетах полных энергий и энергетических спектров легких атомов и молекул. Один из таких методов - метод конечных элементов (МКЭ), ранее известный в основном по своим применениям в электротехнике и в технических расчетах статических и динамических нагрузок. Интенсивные вычисления, предпринятые с помощью МКЭ, продемонстрировали, что этот метод является мощным инструментом в руках исследователя для достижения высокоточных результатов.

Авторами был проведен сравнительный анализ различных конечно-элементных базисных функций. Показано, что для квантово-механических расчетов наиболее подходящими являются конечно- элементные базисные функции высоких порядков. С помощью серендиповых конечных элементов проведены тестовые расчеты полных энергий и электронных спектров легких гомоядерных молекул с циллиндрической симметрией. В случае иона молекулы водорода H_2^+ расхождение полученных авторами результатов с аналитическими расчетами, составило менее $8 \cdot 10^{-8}$ атомных единиц.

УДК 517.5

Смирнов О.И. (Тула)

ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(T^m)$ "УГЛОМ"

Пусть $T^m=T^{m_1}\times\ldots\times T^{m_n}=[0,2\pi)^m$, $m_1+\ldots+m_n=m, m_i\in\mathbb{N}$, $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $x_i\in T^{m_i}$,

$$E_{\bar{R}}(f,T^m)_p=\inf_{C_{\mu_s}}\|f(\bar{x})-\sum_{s=1}^{n}\sum_{|\mu_s|<R_s} c_{\mu_s}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_n)e^{i\mu_s x_s}\|_p$$

– величина наилучшего приближения функции $f\in L_p(T^m)$, $1\le p<\infty$ "углом" порядка $\bar{R}=(R_1,\ldots,R_n)$, $R_i>0$, $\bar{t}=(t_1,\ldots,t_n)$, $t_i\in T^{m_i}$, $\bar{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $0<\delta_i\le\pi$,

$$\bar{\Delta}_{\bar{t}}f(\bar{x})=\Delta_{t_m}\ldots\Delta_{t_1}f(x_1,\ldots,x_m),\qquad \omega(\bar{\delta},f,T^m)_p=\sup_{|t_i|\le\delta_i}\|\bar{\Delta}_{\bar{t}}f(\bar{x})\|_p$$

– модуль непрерывности функции $f\in L_p(T^m)$. Точную константу $K_{pq}(\bar{\tau}_m/\bar{R},\bar{R},T^m)$, $\bar{\tau}_m/\bar{R}=(\tau_{m_1}/R_1,\ldots,\tau_{m_n}/R_n)$ в неравенстве

$$E_{\bar{R}}(f,T^m)_p\le K_{pq}(\bar{\tau}_m/\bar{R},\bar{R},T^m)\omega(\bar{\tau}_m/R,f,T^m)_q$$

назовем константой Джексона-Потапова. М.К.Потаповым впервые было рассмотрено приближение "углом". Он же получил и первые теоремы Джексона. С.А.Пичугов вычислил константу Джексона-Потапова в $L_2(T^2)$

$$K_{22}((\pi/R_1,\pi/R_2),(R_1,R_2),T^2)=1/2,$$

перенеся тем самым одномерный результат Н.И.Черныха на случай приближения "углом". Многомерная точная теорема Джексона в $L_2(T^m)$, установленная В.А.Юдиным, также может быть перенесена на случай приближения "углом":

$$K_{22}((2q_{m_1}/R_1,\ldots,2q_{m_n}/R_n),\bar{R},T^m)=2^{-n/2},$$

где q_{m_i} – первый положительный нуль функции Бесселя $J_{(m_i/2)-1}(x)$.

Опираясь на результаты В.И.Иванова мы доказываем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. *Если* $1\le p<2$, $m_i\in\mathbb{N}$, $m=m_1+\ldots+m_n$, $R_i>0$, $\bar{R}=(R_1,\ldots,R_n)$, *то константа Джексона-Потапова*

$$K_{pp}((4q_{m_1}/R_1,\ldots,4q_{m_n}/R_n),\bar{R},T^m)=1/2^{n(1-1/p)}.$$

УДК 539.3 Соболь Б.В. (Ростов-на-Дону)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Рассматривается двумерная задача теории упругости для ограниченной области $|\xi| \leq h$, $a \leq \eta \leq b$ в произвольной ортогональной системе координат. Предполагается, что компоненты вектора перемещений и их нормальные производные терпят разрыв на некотором отрезке вдоль одной из координатных линий $\xi = \xi^*$:

$$[u_i]_{(\xi^*+0,\eta)}^{(\xi^*-0,\eta)} = \chi_i(\eta); \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right]_{(\xi^*+0,\eta)}^{(\xi^*-0,\eta)} = \psi_i(\eta); \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \quad (i=1,2),$$

причем, две из этих четырех функций считаются известными, а две другие - подлежащими определению.

Решение задачи строится в виде тригонометрических разложений по переменной ξ, коэффициенты которых выражаются через искомые функции традиционными соотношениями. При реализации решений принятого вида в определяющих уравнениях удается учесть разрывы рассматриваемых функций в разложениях $\partial u_i / \partial \xi$, $\partial^2 u_i / \partial \xi^2$. В результате рассматриваемая задача сводится к последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из гармоник. Очевидно, граничные условия задачи на координатных линиях $\eta = a$, $\eta = b$ предварительно должны быть представлены в виде соответствующих разложений. Суммирование полученных частных решений последовательности краевых задач позволяет удовлетворить двум заданным условиям вдоль линии разрыва. Таким образом, в общем случае описанный алгоритм позволяет свести задачу к системе двух интегральных уравнений второго рода относительно разрывов рассматриваемых функций, подлежащих определению.

В качестве примеров рассмотрены две задачи об исследовании напряженно - деформированного состояния в толстостенной трубе, ослабленной внутренним разрезом, при различных условиях нагружения.

При разработке метода использованы идеи обобщенного метода интегральных преобразований Г.Я. Попова, более эффективного в аналогичных задачах для неограниченных и полуограниченных областей. Следует также заметить, что данный метод может быть обобщен для решения трехмерных задач.

УДК 517.518

Сосновская О.Г.,Чистяков В.Ф.(г.Иркутск)

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ИНДЕКСА ДВА

Рассматриваются методы регуляризации для начальной задачи

$$Dx := A(t)x' + B(t)x = f, \ a < t < b, \qquad (1)$$

$$x(a) = c, \qquad (2)$$

где $A(t), B(t)$ - $(n * n)$ - матрицы, $x = x(t)$ - n - мерная искомая вектор-функция, $f = f(t), c$ - n - мерные заданные вектор-функция и виктор. Предполагается, что $\det A(t) = 0$ на отрезке $[a,b]$ и существует оператор $L[y] = C_0(t)y + C_1(t)(d/dt)y + \ldots C_K(t)(d/dt)^K y$, где $C_j(t)$ - непрерывные на $[a,b]$ матрицы, $j = 0,1,\ldots k$, со свойством $LDx = x' + L[B(t)]x$ для любой достаточно гладкой вектор-функции x. Минимально допустимое k называется индексом системы (1). Как известно [1], задача (1),(2) некорректна. В докладе рассматриваются методы "возмущения" Ю.Е.Бояринцева и регуляризации А.Н.Тихонова.

То есть, системе (1) ставятся в соответствие система

$$[\ A(t) + eB(t)\ ]v' + B(t)v = f, \ a < t < b, \ e > 0, \qquad (3)$$

и функционал

$$J[u] = e\|u\|_L^2 + \|A(t)u' + B(t) - f\|_L^2, \ u(a) = c, \qquad (4)$$

где $\|\cdot\|_L$ -норма в $L_2[a,b]$.

Теорема 1. Пусть 1) решение задачи (1),(2) существует; 2) $A(t)=A$ - постоянна, $B(t), f \in C^2[a,b]$; 3) индекс системы (1) $k \leq 2$. Тогда, начиная с некоторого $e < e_0$ и $[A(t) + eB(t)]^{-1} \in C^2[a,b]$, причем

$$\|x(t) - v(t)\|_{C[a+d,b]} < Ke,$$

где x, v - решения задач (1),(2) и (3),(2), $K = \mathrm{const}$, $d = O(e)$. На отрезке $[a+d,b]$ определен "погранслой" типа $\exp(-(t-a)/e)/e^2$. При регуляризации по Тихонову условие $A(t)=\mathrm{const}$ можно снять. Справедлива оценка $\|x(t) - u^*(t)\|_L^2 < Ke^{1/4}$, $u^*(t)$: $J[u^*] = \min J[u]$

ЛИТЕРАТУРА

1. Численные методы решения сингулярных систем / Ю.Е.Бояринцев, В.А.Данилов, А.А.Логинов,В.Ф.Чистяков. - Новосибирск:Наука,1989.

УДК 539.3

Спорыхин А.Н. , Сумин В.А. (Воронеж)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРА ПРИ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Рассматривается задача о потере устойчивости круговым цилиндром из однородного, изотропного, несжимаемого,нелинейно-упругого материала, когда цилиндр подвергается конечному растяжению с коэффициентом λ и кручению с коэффициентом Ψ. Образующие цилиндра параллельны оси z, а плоские торцы определяются уравнениями z=0, z=l.

В докритическом состоянии перемещения нелинейно зависят от координат и раскладываются в ряд Маклорена до второго порядка включительно:

$$\overset{0}{U}{}^{i} = \varepsilon V^{i} + \varepsilon^{2} W^{i}$$

Компоненты перемещения V^i соответствуют классической теории упругости при отсутствии объемных сил и имеют вид [1] . W^i - компоненты перемещения соответствующие классической теории упругости с объемными силами, они являются решениями уравнения равновесия (в невозмущенном состоянии).

После наложения на систему конечных возмущений, были получены компоненты тензора напряжения, зависящие от координат и параметров нагрузки λ и ψ .

При помощи вариационных уравнений метода Бубнова-Галеркина задача сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. для которых строится функция Ляпунова. Критерием устойчивости является положительная определенность данной функции.

Построены графические зависимости амплитуды возмущений от ψ и λ. Проведено сравнение с задачей решенной, при помощи линеаризированных уравнений.

Литература:

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды // Москва; Мир, 1965.

УДК 517.52.75 Степанянц С.А. (Москва)

УСЛОВИЯ ТАУБЕРОВА ТИПА, СВЯЗЫВАЮЩИЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО И РИССА

В данной работе будет рассмотрено некоторое обобщение тауберовых условий, а именно $T_Q(P)$- условие (где Q и P - некоторые методы суммирования рядов). Пусть для последовательностей действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ введено некоторое условие R. Будем говорить, что условие R является $T_Q(P)$- условием, если любой ряд $\sum a_n$, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R, будет суммируем и методом Q. В качестве Q и P будем рассматривать методы суммирования Чезаро (C, r) и методы суммирования дискретными средними Рисса, которые мы будем обозначать (Rd, r), с различными действительными r; $r \geqslant 0$. Определения и основные свойства методов Чезаро можно найти в [1, § 5.4, 5.5, 5.7]; методов Рисса в [2], [3]..

В работе [5] для последовательностей с неотрицательными членами автором были введены условия (D, r), $r \geqslant 0$, являющиеся обобщением некоторого рассматриваемого в [4] тауберова условия (в наших обозначениях это условие есть в точности условие (D, 0)).

Последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ (где $c_n \geqslant 0$ для всех n) удовлетворяет условию (D, r) (запись $\{c_n\} \in$ (D, r)), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $\lambda > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такие, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda \quad \text{и} \quad \sum_{n_k < \nu < n_{k+1}} c_\nu \left(n_{k+1} - \nu\right)^r < \varepsilon \cdot n_k^r \quad \text{для любого } k.$$

Условия (D, r) связаны следующим образом. Если $\{c_n\} \in$ (D, r), то $\{c_n\} \in$ (D, s), где $s > r \geqslant 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 1. Пусть r и s - фиксированные действительные числа, причем $s \geqslant r \geqslant 0$ и пусть $\{c_n\} \in$ (D, r). Тогда $a_n = \underline{\underline{O}}(c_n)$ является $T_{(C,r)}((Rd, s))$ - условием.

Приводимые ниже теоремы 2 и 3 являются следствиями теоремы 1.

Следует отметить, что утверждение теоремы 3 при r=0 содержится в [4]; при r - целых, $r \geqslant 1$ в [5].

Теорема 2. Пусть r и s - фиксированные действительные числа, причем $s > r \geqslant 0$ и пусть $\{c_n\} \in$ (D, r). Тогда $a_n = \underline{\underline{O}}(c_n)$ является $T_{(Rd,r)}((Rd, s))$ - условием.

Теорема 3. Пусть r и s - фиксированные действительные числа, причем $s > r \geqslant 0$ и пусть $\{c_n\} \in$ (D, r). Тогда $a_n = \underline{\underline{O}}(c_n)$ является $T_{(C,r)}((C, s))$ - условием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
2. Riesz M. Sur la sommation des series de Dirichlet //Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 149 (1909), 18-21.
3. Riesz M. Sur l'equivalence de certaines methodes de sommation // Proc. London Math. Soc., (2), 22 (1923), 412-419.
4. Lorentz G.G. Tauberian theorems and tauberian conditions // Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), N 2 , 226-234.
5. Степанянц С.А. Теоремы тауберова типа для методов суммирования Чезаро // Вестн. Моск. универ. Мат. Мех. 1993, N 2, 40-44.

УДК 517.544 Е.В.СТРЕЖНЕВА (Казань)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается следующая внешняя смешанная ОКЗ теории аналитических функций по параметру x для двусвязной области в случае полигона:

НАЙТИ

- *бесконечную двусвязную область D_z (вообще говоря, многолистную) с кусочно гладкой границей, расположенную в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, и*
- *аналитическую в этой области функцию $w(z)$, непрерменую вплоть до границы и конформно отображающую область D_z на заданную конечную двусвязную область D_w с кусочно ляпуновской границей в плоскости комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$,*

если известно, что граница L_z области D_z состоит из двух замкнутых не пересекающихся между собой жордановых линий: L_z^1 и L_z^2, внутренности которых не имеют общих точек. Контур L_z^1 представляет собой ломанную, содержащую $n-1$ прямолинейных звеньев, а L_z^2 есть гладкая кривая. На контуре L_z^2 заданы значения функции $w(z)$ в виде двух однозначных ветвей, непрерывно переходящих друг в друга, представляющих собой функции параметра x – абсциссы точки L_z^2, которые определяют замкнутую кривую Ляпунова L_w^2. Кроме того, в неявном виде $F(\varphi, \psi) = 0$ задана замкнутая кривая Ляпунова L_w^1, которая охватывает кривую L_w^2. Контуры L_w^1 и L_w^2 образуют границу области D_w. На кривой L_w^1 заданы образы A_j вершин ломаной L_z^1, кроме того, известен образ w_∞ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ области D_z в окрестности которой справедливо разложение $w(z) = w_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots$, $c_{-1} \neq 0$

Кривые L_z^1 и L_z^2 неизвестны, но для ломаной L_z^1 задаются внутренние по отношению к области D_z углы при ее вершинах – $\alpha_j\pi$, а также угол наклона первого звена к вещественной оси – $\eta_1\pi$.

Данная задача решается способом, обощающим метод, указанный в статье [1], с привлечением аппарата теории эллиптических функций. Получены условия разрешимости и интегральное представление решения рассматриваемой смешанной ОКЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В. К решению обратной смешанной краевой задачи // Труды семинара по краевым задачам.– Казань: КГУ, 1992.– Вып. 27.– С. 95–117.

УДК 512.86: 519.12 Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. (Воронеж)

К ВОПРОСУ О ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОКСТЕРА

Пусть G – конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер с произвольной фиксированной нумерацией вершин. Поставим ему в соответствие матрицу смежности $A=(a_{ij})$ $i,j=\overline{1,n}$ (n – число вершин графа) и построим набор матриц-отражений σ_i $(i=\overline{1,n})$ по правилу: в единичной матрице i -я строка заменяется на строку $(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ii-1},-1,a_{ii+1},\dots,a_{in})$. Произведение всех отражений, взятых по одному разу в каком-либо порядке, называется преобразованием Кокстера (ПК). Без ограничения общности можно считать, что ПК $C=\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_2\sigma_1$.

В [2] была изучена жорданова форма ПК деревьев.

ТЕОРЕМА. I. Если λ_0 – собственное значение ПК, то $\frac{1}{\lambda_0}$ – собственное значение ПК. 2. Комплексные собственные значения ПК принадлежат единичной окружности. 3. Вещественные собственные значения принадлежат $\{-1\}\cup R_+$. 4. Собственным значениям ПК, отличным от I, соответствуют жордановы клетки размеров IxI. 5. Собственному значению ПК $\lambda_0=1$ соответствуют жордановы клетки размеров 2x2. 6. Максимальное по модулю собственное значение ПК положительное, простое, а соответствующий ему собственный вектор имеет положительные координаты.

Для произвольных графов теорема нарушается, известны [I] контрпримеры к утверждению 5. Метод доказательства теоремы для деревьев, предложенный в [2], существенно использует специфические свойства деревьев. В [3] был предложен подход, с помощью которого удалось доказать утверждение I для произвольных графов.

В докладе ставятся открытые вопросы, близкие к теореме, обсуждаются подходы к их доказательству, которые связаны с применением теории ганкелевых и теплицевых матриц и форм, методов спектральной теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой, теории операторов в пространствах с конусом или клином и т.д.

Литература

I. Гриненко Е.Н., Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. О спектральных свойствах преобразований Кокстера и устойчивости рассинхронизированных систем. Деп. в ВИНИТИ 26.05.92, № 1748-В92. 2. Субботин В.Ф., Стекольщик Р.Б.,Функц. анализ и его приложения, 1978, т.12, вып.I, с.84-85. 3. Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. Аналог формулы Швенка для характеристического многочлена преобразований Кокстера. Деп. в ВИНИТИ 3.I.85, № 82-85.

УДК 517.9 Сукачева Т.Г. (Новгород)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – бирасщепляющий [1], $M \in C^{\infty}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$; функция $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$. Исследуется разрешимость задачи Коши

$$u(0) = u_0 \qquad (1)$$

для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева

$$L\dot{u} = M(u) + f. \qquad (2)$$

С помощью подхода, предложенного в [2], доказана теорема, дающая условия локальной однозначной разрешимости задачи (1), (2).

В качестве приложения полученных абстрактных результатов рассматривается задача Коши-Дирихле для системы уравнений

$$\begin{cases} (1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{\ell=1}^{K} \beta_\ell \nabla^2 w_\ell - \bar{p} + f, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot v), \\ \dfrac{\partial w_\ell}{\partial t} = v + \alpha_\ell w_\ell, \quad \alpha_\ell \in \mathbb{R}_-, \quad \ell = 1,2,\dots,K \end{cases} \qquad (3)$$

при нестационарном свободном члене $f = f(x,t)$. Система (3) моделирует движение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта порядка $K > 0$ [3].

Заметим, что ранее нами другим способом [4] рассматривалась задача Коши-Дирихле для системы (3) в предположении, что свободный член $f = (f_1, \dots, f_n)$, характеризующий внешнее воздействие на жидкость, не зависит от времени.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера// УМН. 1977. Т. 32, № 4. С. 3-54.
2. Свиридюк Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева// Изв. РАН, сер. матем. 1993. Т. 57, № 3. С. 192-207.
3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта// Труды МИАН. 1988. Т. 179. С. 126-164.
4. Сукачева Т.Г. Исследование фазовых пространств полулинейных сингулярных уравнений динамического типа. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новгород: НовГПИ, 1990.

УДК 539.3

:УМИН А.И. (ВОРОНЕЖ)

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД ПРИ НАЛОЖЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В динамической постановке исследуется устойчивость изотропных, однородных нелинейно-упругих и нелинейно вязкоупругих сред при наложенных конечных деформациях. После наложения на основной процесс деформирования конечных возмущений, линеаризации полученных уравнений не производится. Возмущения перемещений представляются в виде рядов по собственным функциям, относительно которых предполагается, что они являются решениями линеаризированных задач и удовлетворяют геометрическим граничным условиям для задач при малых возмущениях. При помощи вариационных уравнений метода Бубнова-Галеркина задача сводится к исследованию нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Для этой системы строится функция, зависящая от амплитуд возмущений перемещений, которая при определенных ограничениях на величины начальных возмущений будет функцией Ляпунова для полученной системы уравнений. Показано, что для нелинейных сред нулевое решение системы уравнений, соответствующее основному процессу деформирования, может потерять устойчивость при любом значении параметра нагрузки, если возмущения превысят определенный предел. Показывается зависимость между модулем возмущений и параметром нагрузки. Найденная цепочка бифуркационных значений для амплитуд возмущений перемещений позволяет найти размерность странного аттрактора исходной динамической системы. Знание размерности странного аттрактора для динамической системы дает возможность вычислить размерность пространства в которое вложен странный аттрактор, а следовательно и решить вопрос о количестве членов в ряде Бубнова-Галеркина, в который раскладываются возмущения перемещений. Приводятся графические зависимости, связывающие минимальное значение возмущения и параметр нагрузки, а также зависимость размерности странного аттрактора от величины параметра нагрузки.

Сумин В.И.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ ВНЕВЕДОМСТВЕННОЙ ОХРАНЫ МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХ ВНУТРЕННИХ ДЕЛ

Ограниченность классического подхода к моделированию данных, заключающегося в том, что универсальность моделей распространяется только на организационные системы, а структура деятельности подразделений вневедомственной охраны (ВО). министерства внутренних дел (МВД) представляет из себя интеграцию организационных и технических подсистем. Следовательно при построении информационных систем для подразделений ВО МВД необходимо использовать нетрадиционные подходы при проектировании таких систем на базе новых информационных технологий, позволяющих разрабатывать системы с более универсальным использованием данных.

Снижение стоимости ПК позволили размещать прикладные программы и данные на них. Это явилось стимулом к созданию распределенных баз данных. Учитывая тот факт, что отдельные организационные структуры районного отдела ВО МВД располагаются в различных зданиях и решают разные задачи, целесообразно проектировать информационные системы на основе распределенных баз данных.

Для многоуровневой системы Управление-районные отделы ВО МВД, тем более целесообразно использовать распределенные базы данных. При проектировании информационных систем в подразделениях ВО МВД следует придерживаться следующих основных направлений:

Размещение данных - данные необходимо кластеризировать.

Автоматическое распараллеливание обработки - пользователь должен формировать только транзакцию.

Управление потоками данных - программное обеспечение осуществляет выполнение операции в узле сети и передачу данных в другой узел.

Методы восстановления данных - обеспечивают работоспособность при отказе узлов сети.

Сумин В.И., Поклонов В.В.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ ВНЕВЕДОМСТВЕННОЙ ОХРАНЫ МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХ ВНУТРЕННИХ ДЕЛ

В районных отделах вневедомственной охраны (ВО) министерства внутренних дел (МВД) в соответствии с их организационной структурой целесообразно использовать распределенные информационные системы. Проектировать такие информационные системы оптимальнее на основе распределенных баз данных. Это обеспечит сотрудникам районного отдела ВО МВД возможность управляемого доступа и независимость обращения к данным, распределенным в сети ЭВМ.

Учитывая тот факт, что компьютерные системы только начинают внедряться в деятельность подразделений ВО МВД, базируясь на принципе доминирования содержательной стороны управления над технической, целесообразно проводить проектирование всей многоуровневой информационной системы и разрабатывать математические модели с нижних уровней структуры ВО и заканчивать верхними уровнями.

Учитывая важность информационных потоков на пункте централизованной охраны районного отдела ВО МВД, основу вычислительного процесса которого представляет нечисловая обработка данных, целесообразно организовывать ассоциативный процесс поиска данных в базах данных. Как показывают исследования наибольший эффект ассоциативного поиска достигается с использованием машин баз данных.

Основным ключом в базах данных на пункте централизованной охраны районного отдела ВО МВД является номер объекта т.е. нет ключей синонимов. Это позволяет организовать хеширование индификаторов с наилучшей функцией хеширования. Функция хеширования представляет собой таблицу номеров объектов и физических адресов. В среднем для крупных пунктов централизованной охраны районных отделов ВО МВД такая таблица занимает объем 45 Кбайт, что позволяет держать ее в оперативной памяти ПК.

УДК 517.9

Сухочева Л.И. (Воронеж)

О МАТРИЦАХ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

Говорят, что матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}$ имеет доминирующую главную диагональ, если для $i=1,2,\dots,n$ $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Как известно, каждый линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве представляется в заданном базисе в виде матрицы. Из того, что одно из таких представлений является матрицей с доминирующей главной диагональю, вообще говоря, не следует, что матрицы этого оператора в других базисах будут обладать этим свойством.

В связи с этим представляет интерес следующая задача: описать положительные операторы, матрицы которых в произвольном ортонормированном базисе будут иметь доминирующую главную диагональ.

Теорема 3. Пусть $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (соотв. $A: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$) симметрический положительный оператор, λ_{min} и λ_{max} соответственно наименьшее и наибольшее его собственные значения. Тогда матрицы этого оператора имеют доминирующую главную диагональ в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{R}^n$ (соотв. $\mathbf{C}^n$) тогда и только тогда когда, выполнено условие:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} < 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}\ .$$

Это исследование выполнено при частичной поддержке Международного Научного Фонда, грант N2P000.

УДК 517.95

Ж.О.Тахиров (Ташкент)

ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Работа посвящена исследованию некоторых классов задач со свободной границей для уравнения теплопроводности. Основной моделью для выделения этого класса задач послужила задача об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду [1]. Класс задач, включающих задачу об ударе стержня, был исследован в работах [2,3], при условии первой и второй краевых задач на известной части границы. Весьма существенно, что в постановке исследуемой задачи нет начального условия (область выполнения уравнения "выходит" из начала координат).

Требуется найти функции $u(x,t)$, $s(t)$ такие, что $s(t)$ непрерывна на отрезке $0 \le t \le T$, $s(0)=0$, $s(t)>0$, функция $u(x,t)$ в $D=\{(x,t): 0<x<s(t),\ 0<t\le T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),$$

непрерывна в $\bar{D}$, имеет непрерывную производную $u_x(x,t)$ в $\bar{D}\setminus(0,0)$ и удовлетворяет условиям

$$u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = f(t),$$

$$u_x(s(t),t) = 0,$$

$$u(s(t),t) = u_0 + \int_0^t q(s(\eta),\eta)\,d\eta .$$

Доказана теорема единственности решения. Для доказательства существования решения рассматривается задача при наличии начального условия на отрезке $[0,\ell]$. А потом задача редуцируется к эквивалентной задаче типа Стефана. Установлены равномерные по ℓ априорные оценки для решения. На основе полученных оценок осуществляется предельный переход при $\ell \to +0$. Выведена двухсторонняя оценка для неизвестной границы и установлена её монотонность.

1. Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю. ПММ, 1962. Т.26, вып.3. С.497-502.
2. Кружков С.Н. ПММ, 1967. Т.31, вып.6. С.1009-1020.
3. Якубов С. В сб.ДСС, вып.43. Новосибирск, 1979. С.178-183.

УДК 517.9 Ткачёв Д.Л. (Новосибирск)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КВАДРАНТЕ

В области $R_+^3 = \{(t,x,y) \mid t>0, x>0, y>0\}$ исследуется следующая смешанная задача:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(t,x,y); \tag{1}$$

$$u_x = a\cdot u_t + b u_y, \quad x=0; \tag{2}$$

$$u_y = \alpha u_t + \beta u_x, \quad y=0; \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \ u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad \text{где } a>|b|,\ \alpha>|\beta| \tag{4}$$

(т.е. выполнено равномерное условие Лопатинского), а функции $f(t,x,y)$ $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – финитны.

Пусть $V(t,y) = u(t,y)$, $y\geq 0$; $V(t,y)=0$, $y<0$; $z(t,x)=u(t,x)$, $x\geq 0$, $z(t,x)=0$, $x<0$. Тогда проблема (1)-(4) сводится к решению задачи Римана с условием сопряжения:

$$V_0^+(s,\lambda) = \frac{(\sqrt{\lambda+s^2}+as+b i\sqrt{\lambda})(i\sqrt{\lambda}-\alpha s-\beta\sqrt{\lambda+s^2})}{(\sqrt{\lambda+s^2}+as-b i\sqrt{\lambda})(-i\sqrt{\lambda}-\alpha s-\beta\sqrt{\lambda+s^2})} V_0^-(s,\lambda) + h(s,\lambda), \tag{5}$$

а $V_0^+(s,\lambda) = \lim_{\varepsilon\to+0} V(s,\lambda+i\varepsilon) = \hat{V}(s,\sqrt{\lambda})$, $V_0^-(s,\lambda) = \hat{V}(s,-\sqrt{\lambda})$ ($\hat{V}(s,\lambda)$ обозначает образ функции $V(t,y)$ при преобразовании Фурье–Лапласа, $h(s,\lambda)$ связана с данными задачи).

Если индекс задачи (5) $\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\Delta \arg \frac{(\sqrt{\lambda^2+s^2}+as+bi\lambda)(i\lambda-\alpha s-\beta\sqrt{\lambda^2+s^2})}{(\sqrt{\lambda^2+s^2}+as-bi\lambda)(-i\lambda-\alpha s-\beta\sqrt{\lambda^2+s^2})}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty} = 0$,

например, а $0 \leq \frac{\Delta}{2\pi} - \varkappa < \frac{1}{2}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(s,\lambda)2\lambda\, d\lambda}{X^+(s,\lambda)} = 0$, где $X(s,\lambda)$ – каноническое решение (5), то справедлива

<u>Теорема.</u> Решение $u\in W_2^1(R_+^3)$ задачи (1)-(4) имеет интегральное представление

$$u(t,x,y) = \frac{\theta(t-\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}} \underset{t,x,y}{*} f(t,x,y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\theta(t-\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}} \underset{x,y}{*} \varphi(x,y)\right] + \frac{\theta(t-\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}} \underset{x,y}{*} \psi(x,y) - \left(\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial t}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\theta(t-\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}} \underset{t,y}{*} V(t,y)\right] - \left(\frac{\partial}{\partial y}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\theta(t-\sqrt{x^2+y^2})}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}} \underset{t,x}{*} z(t,x)\right],$$

причем $V(t,y)$ и $z(t,x)$ находятся явным образом.

УДК 517.518.8 Томилин А. В. (Москва)

Интерполяция замкнутыми параметрическими квадратичными сплайн-кривыми гладкости C^2 на плоскости

Для данного множества точек $\Delta = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_i \in \mathbf{R}^2$, $f_i \neq f_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, $f_{n+1} = f_1$, $n \geq 3$, координатное представление замкнутой параметрической интерполяционной сплайн-кривой степени 2 имеет вид:

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [t_1, t_{n+1}], \qquad t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}, \qquad p(t_i) = f_i.$$

При $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$x(t) = a_{0i} + a_{1i}t + a_{2i}t^2, \qquad y(t) = b_{0i} + b_{1i}t + b_{2i}t^2, \qquad a_{ki}, b_{ki} \in \mathbf{R}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Класс таких кривых гладкости C^2 (по натуральному параметру) без самопересечений для данного множества точек Δ будем обозначать $Q(\Delta)$.

Для того,чтобы класс $Q(\Delta)$ был не пуст,необходимо выполнение условия (A): Δ — упорядоченное множество вершин выпуклого многоугольника. Это условие не является достаточным для непустоты $Q(\Delta)$.

Пусть выполнено условие (A), $\Delta = \{f_1, \ldots, f_n\}$, γ_i — внешние углы при вершинах f_i, $1 \leq i \leq n$. Тогда верны теоремы 1 и 2.

Теорема 1 (существование) *Если $\gamma_i + \gamma_{i+1} < \pi$, $1 \leq i \leq n$, $\gamma_{n+1} = \gamma_1$, тогда $Q(\Delta) \neq \emptyset$.*

Если сумма хотя бы одной пары соседних внешних углов больше или равна π, то класс $Q(\Delta)$, вообще говоря,может быть пуст.

Теорема 2 (единственность) *Если $\gamma_i \leq \varphi_0$, $\varphi_0 = \arcsin(\sqrt{3}/3)$, $1 \leq i \leq n$, то класс $Q(\Delta)$ состоит из единственной сплайн-кривой.*

Теорема 3 *Пусть дана гладкая плоская замкнутая кривая с естественной параметризацией:*

$$f(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, S], \qquad x(s) \in C^r[0, S], \qquad y(s) \in C^r[0, S],$$

$$x_{(i)}(s)|_{s=0} = x_{(i)}(s)|_{s=S}, \qquad y_{(i)}(s)|_{s=0} = y_{(i)}(s)|_{s=S},$$

$$i = 0, 1, \ldots, r, \qquad r = 2 \text{ или } 3$$

Предположим,что кривизна кривой f отделена от нуля. Тогда для упорядоченного набора Δ точек кривой f с достаточно малым диаметром h класс $Q(\Delta)$ состоит из единственной интерполяционной сплайн-кривой p и $\rho(f, p) = O(h^r \omega(f^{(r)}, h))$; где ρ — расстояние Хаусдорфа, ω — модуль непрерывности.

Замечание. Теорема 3 верна также при $r = 1$, при этом в ее формулировке необходимо заменить условие на кривизну условием: кривая f ограничивает строго выпуклую область.

Аналогичные задачи рассматривал ранее для непериодического случая Р.Щабак [1].

Литература:

[1] Schaback R. Interpolation with piecewise quadratic visually C^2 Bézier polynomials // J. Computer Aided Geometric Design. 1989. 6. P. 219–233.

УДК 517.983

Трофимов В.П. (Воронеж)

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯХ С КОНЕЧНОМЕРНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассматриваются голоморфные в открытом связном множестве G m- мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ оператор-функции $A(z)$, где при каждом $z^o \in G$ линейный ограниченный оператор $A(z^o)$ действует из банахова пространства E в банахово пространство F. Будем предполагать, что в области G имеется хотя бы одна точка z^*, для которой существует ограниченный оператор $A^{-1}(z^*)$, определенный на всем пространстве F.

Пусть задано множество $\mathcal{V}$ со следующими свойствами:

1. Множество $\mathcal{V}$ состоит из троек $(\mathcal{U}, M_z, d_z)$, где $\mathcal{U} \subset G$ - связное открытое множество, M_z - голоморфная оператор-функция, d_z - голоморфная скалярная функция, определенные в $\mathcal{U}$ и $d_z \not\equiv 0$.

2. Если $(\mathcal{U}^{(1)}, M_z^{(1)}, d_z^{(1)})$, $(\mathcal{U}^{(2)}, M_z^{(2)}, d_z^{(2)}) \in \mathcal{V}$ и $\mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)} \neq \varnothing$, то $M_z^{(1)} d_z^{(2)} = M_z^{(2)} d_z^{(1)}$ на $\mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)}$.

3. Объединение всех множеств $\mathcal{U}$, для которых множеству $\mathcal{V}$ принадлежат тройки $(\mathcal{U}, M_z, d_z)$, совпадает с G.

Совокупность всевозможных множеств $\mathcal{V}$ обозначим через $\mathcal{W}(G)$.

Пусть $\mathcal{V}^{(1)}$ и $\mathcal{V}^{(2)}$ принадлежат $\mathcal{W}(G)$. Множества $\mathcal{V}^{(1)}$ и $\mathcal{V}^{(2)}$ будем называть эквивалентными, если $\mathcal{V}^{(1)} \cup \mathcal{V}^{(2)} \in \mathcal{W}(G)$.

Фредгольмовой оператор-функцией с конечномерным вырождением назовем любой класс эквивалентности из $\mathcal{W}(G)$, для которого в каждой тройке $(\mathcal{U}, M_z, d_z)$ оператор-функция M_z представима в виде $M_z = d_z S_z + T_z$, где S_z, T_z - голоморфные в $\mathcal{U}$ оператор-функции, причем оператор S_z - фредгольмов, а T_z - конечномерный для любого $z \in \mathcal{U}$.

Установлено, что множества характеристических точек фредгольмовой оператор - функции с конечномерным вырождением произвольной конечной или бесконечной кратности (минимальной кратности по направлениям) являются аналитическими множествами в области G.

Найдены достаточные условия существования голоморфного в G собственного вектора, соответствующего характеристической точке конечной кратности фредгольмовой оператор-функции с конечномерным вырождением.

УДК 517.51 Трынин А.Ю. Саратов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Пусть h и H – произвольные действительные числа, q – непрерывная функция ограниченной вариации на $[0,\pi]$. Обозначим через $U_n(x)$ – n – ую собственную функцию задачи Штурма – Лиувилля

$$U''(x) + [\lambda - q(x)]U(x) = 0, \tag{1}$$

$$U'(0) - hU(0) = 0, \tag{2}$$

$$U'(\pi) + HU(\pi) = 0, \tag{3}$$

а через $0 < x_{1,n} < \ldots < x_{n,n} < \pi$ – нули $U_n(x)$. Тогда оператор, введенный Г.И. Натансоном,

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \tag{4}$$

обладает интерполяционным свойством Лагранжа. В [1] получен критерий равномерной сходимости внутри $(0,\pi)$ процесса (4) к непрерывной функции f.

Возникает вопрос об устойчивости задачи интерполирования в зависимости от параметров задачи (1) – (3). Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для любого положительного ε найдется такое $\tilde{h}$ или $\tilde{H}$) : $|\tilde{h} - h| < \varepsilon$ ($|H - \tilde{H}| < \varepsilon$) и непрерывные функции f_1 и f_2, что

$$
\begin{array}{ll}
L_n^{SL}(f_1, x) \rightrightarrows f_1(x) & \text{внутри } (0,\pi), \\
\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\tilde{L}_n^{SL}(f_1, x_1)| = \infty & \text{для некоторой } x_1 \in (0,\pi), \\
\text{и } \tilde{L}_n^{SL}(f_2, x) \rightrightarrows f_2(x) & \text{внутри } (0,\pi), \\
\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |L_n^{SL}(f_2, x_2)| = \infty & \text{для некоторой, } x_2 \in (0,\pi),
\end{array}
\tag{5}
$$

где волна обозначает процесс (4) для соответствующей задачи Штурма – Лиувилля (1) – (3).

ТЕОРЕМА 2. Для любого положительного ε найдется такой потенциал $\tilde{q}$: $\int_0^{\pi} |\tilde{q}(x) - q(x)| dx < \varepsilon$ и непрерывные функции f_1 и f_2, что справедливы соотношения (5).

ЛИТЕРАТУРА

Трынин А.Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Деп. в ВИНИТИ 26.04.91. № 1763 – В91. Саратовский ун – т. 1991. 32 с.

УДК 517.95. Тюрин В.М. (Липецк)

КОЭРЦИТИВНОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО ШАУДЕРА В $\mathbb{R}^n$ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ P

Примем следующие обозначения: X – банахово пространство; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей; $C^m = C^m(\mathbb{R}^n, X)$ – нормированное пространство функций $u: \mathbb{R}^n \to X$, непрерывных и ограниченных вместе с производными $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| \le m$ (α – мультииндекс, $m \in \mathbb{N}$); нормированное пространство $C^m(\Omega) = C^m(\Omega, X)$ определяется аналогично пространству $C^m(\mathbb{R}^n, X)$; $C^{m+\gamma}$ ($C^{m+\gamma}(\Omega)$) – нормированное пространство Гёльдера, состоящее из функций $u \in C^m$ ($C^{m+\gamma}(\Omega)$), у которых производные $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| = m$ непрерывны по Гёльдеру с показателем $\gamma \in (0, 1)$; L^p – пространство Лебега сильно измеримых функций $u: \mathbb{R}^n \to X$ ($1 \le p < \infty$); $W^m(L^p)$ – пространство Соболева, состоящее из функций $u \in L^p$, обобщённые производные $D^\alpha u$ ($|\alpha| \le m$) которых принадлежат L^p .

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P = \sum A_\alpha(x) D^\alpha \quad (|\alpha| \le m).$$

Коэффициенты $A_\alpha: \mathbb{R}^n \to Hom(X, X)$ непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ , а при $|\alpha| = m$ функции A_α постоянны.

Неравенство

$$\|u\|_{W^m(L^p)} \le c_1 \|u\|_{L^p} + c_2 \|Pu\|_{L^p} \quad (u \in W^m(L^p))$$

означает E – коэрцитивность оператора $P: W^m(L^p) \to L^p$ ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$). Если существует постоянное $\Lambda > 0$ такая, что

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}} \le \Lambda(\|u\|_C + \|Pu\|_{C^\gamma}) \quad (u \in C^{m+\gamma}),$$

то будем говорить о неравенстве Шаудера для оператора $P: C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ в $\mathbb{R}^n$. Аналогично определяется неравенство Шаудера для оператора $P: C^{m+\gamma}(\Omega) \to C^\gamma(\Omega)$ в области Ω .

Теорема. Если оператор $P: W^m(L^p) \to L^p$ E – коэрцитивен и существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в которой для оператора $P: C^{m+\gamma}(\Omega) \to C^\gamma(\Omega)$ справедливо неравенство Шаудера, то в $\mathbb{R}^n$ также имеет место неравенство Шаудера для оператора $P: C^{m+\gamma} \to C^\gamma$.

Приводятся примеры и следствия из теоремы.

Е. Е. Урнышева

Пространства с радиально-сферической смешанной нормой.

Тезисы.

Рассматриваются пространства $L^{rad}_{p_2}(L^{ang}_{p_1}) = L_{p_1,p_2}(R^n)$, определяемые радиально-сферической смешанной нормой

$$\|f\|_{p_1,p_2} = \left\{ \int\limits_0^\infty \rho^{n-1} \left(\int\limits_{S^{n-1}} |f(\rho\sigma)|^{p_1} d\sigma \right)^{p_2/p_1} d\rho \right\}^{1/p_2}.$$

дается ряд основных свойств пространств $L^{rad}_{p_2}(L^{ang}_{p_1})$. Доказывается, что $L^{rad}_{p_2}(L^{ang}_{p_1})$ есть банахово пространство и что имеют место обобщенное неравенство Минковского и неравенство Гельдера, а также результат, известный как обращение неравенства Гельдера. В пространстве $L^{rad}_{p_2}(L^{ang}_{p_1})$ плотны множества простых функций, радиально-сферических простых функций при $1 \le p_i \le \infty$ $(i=1,2)$ и множество финитных бесконечно дифференцируемых функций с носителем вне начала координат при $1 \le p_i < \infty$ $(i=1,2)$.

Устанавливается "изотропное" интерполяционное неравенство

$$\|f\|_{p_1,p_2} \le (\|f\|_{p_1^1,p_2^1})^\theta (\|f\|_{p_1^2,p_2^2})^{1-\theta},$$

где $1/p_i = \theta/p_i^1 + (1-\theta)/p_i^2$, $i=1,2$, $0 \le \theta \le 1$, и "анизотропное" интерполяционное неравенство

$$\|f\|_{p_1,p_2} \le (\|f\|_{p_1^1,p_2^1})^{\theta_1} (\|f\|_{p_1^2,p_2^2})^{\theta_2} (\|f\|_{p_1^3,p_2^3})^{\theta_3},$$

где $1/p_i = \theta_1/p_i^1 + \theta_2/p_i^2 + \theta_3/p_i^3$ $(i=1,2)$, $\theta_k \ge 0$, $k=1,2,3$, $\sum\limits_{k=1}^3 \theta_k = 1$, на основе которых получаются "изотропный" и "анизотропный" варианты интерполяционной теоремы Рисса-Торина.

В качестве приложения доказывается аналог теоремы Хаусдорфа-Юнга для преобразования Фурье в $L^{rad}_{p_2}(L^{ang}_{p_1})$, где $1 \le p_2 \le p_1 \le \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 \ge 1$.

УДК 517.9

УСКОВА Н.Б. (ВОРОНЕЖ)

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Под обусловленностью вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малому изменению входных данных.

Пусть $A:D(A)\subset H\to H$ –линейный самосопряженный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, λ –изолированная точка спектра $\sigma(A)$ оператора A, являющаяся простым собственным значением и e –соответствующий собственный вектор. Рассмотрим оператор $\tilde{A}:D(A)\subset H\to H$, являющийся возмущением исходного оператора, причем $\tilde{A}$ не обязательно сопряжен и $B=A-\tilde{A}$ является ограниченным оператором. При условии $\|B\|\cdot d_\lambda^{-1} < 0.25$, где $d_\lambda = \mathrm{dist}\left[\{\lambda\},\sigma(A)\setminus\lambda\right]$ оператор $\tilde{A}$ имеет изолированное собственное значение λ и пусть $\tilde{e}$ –соответствующий собственный вектор. В численном анализе мерой близости векторов e и $\tilde{e}$ обычно считают величины $|\sin\varphi|$, $|\mathrm{tg}\varphi|$, где угол φ определяется из равенства

$$\cos\varphi = \frac{|(e,\tilde{e})|}{\|e\|\cdot\|\tilde{e}\|}$$

С применением метода подобных операторов [1] доказана

Т е о р е м а . При сформулированных выше предположениях справедливы оценки

$$\sin\varphi < 1.4\cdot\|(A-\tilde{A})e\|\cdot d_\lambda^{-1},$$

$$\mathrm{tg}\varphi < 1.4\cdot\|(A-\tilde{A})e\|\cdot d_\lambda^{-1}$$

Л и т е р а т у р а

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов: Учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского университета. 1987. -164с.

УДК 536.244 Фалеев С.В., Наумов А.М., Самохвалов В.В. (Воронеж)

ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН В ПОРИСТЫХ СТРУКТУРАХ

Известно, что течение охладителя в пористых структурах носит сложный характер, поскольку при охлаждении теплонапряженных поверхностей на практике часто приходится использовать фазовый переход "жидкость-пар" [1]. Наличие зон "жидкость, жидкость-пар, пар" в пористом теле еще более усложняет постановку и решение такого рода задач. В данной работе разработана математическая модель, описывающая течение процессов тепломассопереноса в трех зонах.

Особое внимание уделяется положению зоны "жидкость-пар" относительно геометрии пористой структуры. Обоснование и решение этой полуобратной задачи базируется на предпосылках [1] и решении системы уравнений теплопереноса в пористой структуре в координатах (давление-функция тока) в виде однозначной зависимости $T = F(p)$ для трех зон: "жидкость, жидкость-пар, пар", в частности, для зоны "жидкость-пар" (зона кипения теплоносителя) было получено:

$$k\left[\frac{1}{2}\left(P_{кр}^2 - P_н^2\right) + P_{кр} - P_н\right] = \left[D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1\right] \times$$

$$\times \ln\left|\frac{D - T_н}{D - T_{кр}}\right| + \left[D^3 + 4D^2 + 6D + 4\right]\left[T_н - T_{кр}\right] - \left[\frac{1}{2}D^2 + 2D + 3\right] \times$$

$$\times\left[T_{кр}^2 - T_н^2\right] - \frac{1}{3}\left[D + 4\right]\left[T_{кр}^3 - T_н^3\right] - \frac{1}{4}\left[T_{кр}^4 - T_н^4\right].$$

где k, D – постоянные; $P_{кр}$, $P_н$, $T_{кр}$, $T_н$ – давление и температура на граничных изотермах зоны кипения теплоносителя.

Использование полуобратного метода решения задач пористого охлаждения позволяет определить положение зоны кипения относительно геометрии пористого тела.

1. Фалеев С.В., Самохвалов В.В., Дроздов И.Г. О полуобратной задаче тепломассопереноса в пористом клине // Труды 2-й Международной конференции: Идентификация динамических систем и обратные задачи. –Санкт-Петербург: ИТМиО, 1994. С. С-7.I – 7.7.

УДК 517.9

Федоров В.Е. Челябинск

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА С ОТНОСИТЕЛЬНО p-РАДИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут, $\overline{\operatorname{dom} M} = \mathfrak{U}$. Редуцируем уравнение типа Соболева

$$L\dot{u} = Mu$$

к паре эквивалентных ему уравнений

$$(\alpha L - M)^{-1} L\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} Mu \qquad (1)$$

$$L(\alpha L - M)^{-1}\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f \qquad (2)$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$ [1].

Положим $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k L - M)^{-1} L$, $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{k=0}^{p} L(\mu_k L - M)^{-1}$, $\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathfrak{U}^1 = \overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}$, $\mathfrak{F}^1 = \overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)}$.

ТЕОРЕМА. Пусть оператор M является сильно (L,p)-радиальным справа (слева), т.е.

(i) $\forall \mu \in \mathbb{R}\ (\mu > 0) \Rightarrow \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in \mathbb{R}\ (\mu > 0)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\|(\mu L - M)^{-1}\| \leq |P(\mu)|) \wedge (\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|\} \leq K \cdot \prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k^n$

(здесь $P(\mu)$ – многочлен степени не больше p)

(iii) $(\mu_0 > 0, \dots, \mu_p > 0, \lambda > 0) \Rightarrow \|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} Mu\| \leq \dfrac{\mathrm{const}(u)}{\lambda \prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k}$ $\forall u \in \operatorname{dom} M$

(существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\| \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{\lambda \prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}).$$

Тогда

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1)$;

(ii) существует равномерно ограниченная, сильно непрерывная полугруппа $\{U^t : t \geq 0\}$ $(\{F^t : t \geq 0\})$ уравнения (1) ((2));

(iii) $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$ – фазовое пространство [2] уравнения (1) ((2)).

Автор считает своим долгом выразить глубокую и искреннюю благодарность Свиридюку Георгию Анатольевичу за постоянные консультации и ценные советы.

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т.49,№4. С.47–74.
2. Свиридюк Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами // ДАН 1994. Т.337,№5. С.581–585.

УДК 539.3

Филатов Г.Ф. (Воронеж)

ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изучаются возможные типы поверхностей разрыва скоростей, напряжений и их любых производных в деформированной упругой среде. Получены общие соотношения, связывающие характеристики напряженного и деформированного состояний, скорости распространения, интенсивность поверхностей разрыва. Расчет основан на использовании модифицированного аналога метода Маслова В.П. Построен ряд возмущений по разрывам различного порядка, получены уравнения, управляющие поведением этих разрывов в упругой среде при конечных деформациях. Анализ этих уравнений позволяет следить за изменением каждой особенности решения в процессе распространения поверхности сильного разрыва, взаимном влиянии скачков производных различного порядка. В рамках теории упругости второго порядка изучено влияние различных упругих постоянных и предварительной деформации на закономерности поведения разрывов различных порядков. Проанализированы возможности использования полученных соотношений для анализа сингулярных поверхностей в нелинейном упругом теле, поведение которого зависит от вида деформированного состояния.

УДК 517.51 Филиппов В. И. (Саратов)

О системах функций , образованных сжатиями и сдвигами одной функции из Lp.

Последнее время имеется большой интерес к системам функций вида

$$\{\varphi_{k,n}\}_{k,n\in Z} = \{\varphi(2^k x - n)\}_{k,n\in Z} \qquad (1)$$

где $\varphi(x) \in L^p(R^s)$. Из систем такого вида , при дополнительных ограничениях на образующую функцию $\varphi(x)$ и строятся всплесковые ОН базисы и рамки [1]. Авторами [2] исследовался вопрос : при каких минимальных ограничениях на образующую функцию $\varphi(x)$ система вида (1) будет системой представления в Lp , т. е. возможно представление элементов из Lp(R^s) в виде ряда по системе (1) , сходящегося в метрике Lp .

Получен следующий результат

<u>Теорема</u> . Пусть $\varphi(x) \in L^p(R^s),\ p \geq 1$, $\int_{R^s} \varphi(x)dx \neq 0$ тогда система $\{\varphi_{k,n}\}_{k,n\in Z} = \{\varphi(2^k x - n)\}_{k,n\in Z}$ является системой представления в Lp(R^s).

Заметим , что в работе [2] требуется дополнительное ограничение на образующую функцию $\varphi(x)$, принадлежащую Lp(R^s) , p>1 .

Литература.

[1] Daubechies I. ,Ten lectures on wavelets . SIAM Philadelphia, 1992.

[2] Filippov V.I. , Oswald P. , Representation in Lp series of translates and dilates of one function . J. appr. th.(to appear).

УДК 512

Фомин В.И. (Тамбов)

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ ГЁЛЬДЕРОВА И ВЕСОВЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $p \in R$, $p \geqslant 2$; E^n_p – действительное или комплексное n – мерное арифметическое пространство с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

$\mathcal{X} = \{ \varkappa = (\varkappa_j)_{j=1}^n \in E^n \mid 0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n \}$;

для фиксированного $\varkappa \in \mathcal{X}$ $E^n_\varkappa$ – n – мерное арифметическое пространство с нормой

$$\|x\|_\varkappa = \sum_{j=1}^n \varkappa_j |x_{i_j}| \qquad (I)$$

для $x = (x_i)_{i=1}^n$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ – такая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$, что $|x_{i_1}| \leqslant |x_{i_2}| \leqslant \ldots \leqslant |x_{i_n}|$ (норма вида (I) введена в [I] и называется весовой нормой); $\alpha = 2^{\frac{1}{p}} - 1$; $q = \frac{p}{p-1}$; $\nu(p) = (\nu_j(p))_{j=1}^n$, $\nu_j(p) = \alpha^{n-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; $\mu(p) = (\mu_j(p))_{j=1}^n$,

$$\mu_j(p) = \alpha^{n-j} \cdot \left(\frac{1-\alpha^q}{1-\alpha^{qn}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема. Константы вложений $E^n_{\nu(p)} \hookrightarrow E^n_p$, $E^n_p \hookrightarrow E^n_{\mu(p)}$ равны единице, т.е. справедливы неравенства

$$\|x\|_{\mu(p)} \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_{\nu(p)}, \qquad (2)$$

каждое из которых хотя бы при одном ненулевом x обращается в равенство, и эти неравенства нельзя улучшить в классе весовых норм вида (I).

Нижняя оценка в (2) устраняет неточность, допущенную автором в [2].

Литература

I. О весовых нормах в конечномерном пространстве / Фомин В.И. Тамбов. ин-т хим.машиностр. – Тамбов, 1992. – 7 с. – Библиогр. 0 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 25.01.93, № 153-В93.

2. Фомин В.И. Об оптимальной нижней оценке ℓ^p – нормы в конечномерном пространстве весовой нормой // Тез.докл. школы "Понтрягинские чтения – У", 25 – 29 апреля 1994г. – Воронеж, ВГУ, 1994. – С.145.

УДК 517.9 Хаиров А.Р. /Махачкала/

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НУЛЕЙ У ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕКТОР-МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\mathcal{T}_n(m)$ – линейное подпространство алгебраических многочленов степени не выше n от m переменных; $N = \dim \mathcal{T}_n(m)$, $m_n = \dim \mathcal{T}_n(m) - \dim \mathcal{T}_{n-1}(m)$, $\varphi_n(x) = [\varphi_{n1}(x)\, \varphi_{n2}(x) \ldots \varphi_{nm_n}(x)]'$ (штрих означает транспонирование) столбцевой вектор, компонентами которого являются линейно независимые многочлены степени n; $U(x)$, $V(x)$ – линейные формы; $\rho(x)$ – неотрицательная в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ весовая функция;

$\mathcal{A}_{ij} = \int_{\mathcal{D}} \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)' dx$, $\mathcal{A}_{ij}(u) = \int_{\mathcal{D}} \rho(x) u(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)' dx$ – матрицы размера $m_i \times m_j$; $\mathcal{A} = \| \mathcal{A}_{ij} \|$, $\mathcal{A}(u) = \| \mathcal{A}_{ij}(u) \|$ – матрицы порядка N.

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ можно преобразовать в ортонормальную в области $\mathcal{D}$ по весу $\rho(x)$ последовательность $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ вектор-многочленов:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x) P_n(x) P_k(x)' dx = \Delta_{nk},$$

где Δ_{nk} – нулевая матрица размера $m_n \times m_k$ при $n \neq k$, матрица порядка m_n при $n = k$.

Под нулем вектор-многочлена мы понимаем общий нуль всех его компонент.

Максимально возможное число нулей у $P_{n+1}(x)$ равно N. Мы приводим условия существования у $P_{n+1}(x)$ ровно N нулей.

Теорема. Для того чтобы $P_{n+1}(x)$ имел N нулей, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{A}(u) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(v) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}(u)$$

при любых линейных формах $U(x)$ и $V(x)$.

Следствие. Если $\varphi_n(x) = P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то

$$\mathcal{A}(u) \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(v) \mathcal{A}(u)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $P_{n+1}(x)$ имел ровно N нулей.

Можно показать, что последнее условие равносильно равенству

$$\Lambda_n(u) \Lambda_n(v)' = \Lambda_n(v) \Lambda_n(u)', \quad \Lambda_n(u) = \int_{\mathcal{D}} \rho(x) u(x) P_n(x) P_{n+1}(x)' dx.$$

УДК.517.948.32 Хвощинская Л.А.(Минск)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ

Рассматривается задача нахождения функции $\Phi(z)$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1,1]$, по краевому условию

$$\Phi^+(-x) = a_k \Phi^+(x) + b_k \Phi^-(x) + f(x), \quad x \in L_k, \quad k = 1,2, \tag{1}$$

где $L_1 = (-1,0)$, $L_2 = (0,1)$, a_k, b_k – комплексные постоянные, $b_k \neq 0$, $a_1 a_2 \neq 1$, $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \neq 0$, $f(x) \in H(L_1 \cup L_2)$. Решение ищется в классе функций, ограниченных в окрестностях точек $0, \pm 1$ и исчезающих на бесконечности.

С помощью новой неизвестной вектор-функции $\Psi(z) = (\Phi(z), \Phi(-z))$ задача (I) сводится к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и тремя особыми точками $0, \pm 1$:

$$\Psi^+(x) = A_k \Psi^-(x) + F_k(x), \quad x \in L_k, \quad k = 1,2, \tag{2}$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} a_2 b_1 & b_2 \\ b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} a_1 b_2 & b_1 \\ b_2 & a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1 - a_1 a_2,$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} f(x) + a_2 f(-x) \\ a_1 f(x) + f(-x) \end{pmatrix}, \quad F_2(x) = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} a_1 f(x) + f(-x) \\ f(x) + a_2 f(-x) \end{pmatrix}.$$

Решение задачи (2) построено на основании предыдущих результатов автора и выражается через элементарные (при $b_1 = -b_2$) или гипергеометрические функции.

Установлено, что в выбранном классе функций задача (I) имеет единственное решение при выполнении одного условия разрешимости. Решение и условие разрешимости получены в явном виде.

УДК 517.5 Холщевникова Н.Н. (Москва)

О множествах единственности для регулярных методов суммирования

Множество $E\subset[0,2\pi)$ называется множеством единственности, если из сходимости ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (1)$$

к нулю на множестве $[0,2\pi)\setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Если множество единственности для регулярного метода суммирования определить аналогичным образом, заменив сходимость на суммируемость ряда, то для метода суммирования Абеля-Пуассона пустое множество, а для метода Чезаро (С,1) одна точка не будут множествами единственности. В связи с этим определение дается следующим образом:

Множество $E\subset[0,2\pi)$ называется множеством единственности для регулярного метода суммирования, если из суммируемости ряда вида (1), со сходящимися к нулю коэффициентами, к нулю на множестве $[0,2\pi)\setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

При таком определении для методов суммирования Абеля-Пуассона и Римана счетное множество является множеством единственности. Всякое множество единственности регулярного метода суммирования является множеством единственности. Если метод суммирования T_2 сильнее T_1 (т.е. всякая последовательность, суммируемая T_1, суммируется и к тому же значению методом T_2), то всякое множество единственности для метода T_2 будет также множеством единственности для T_1. Рассмотрим вопрос о том, когда множество единственности будет им и для регулярного метода суммирования. И.И.Привалов доказал, что замкнутое множество единственности является множеством единственности для метода суммирования Абеля-Пуассона. Известно, что это верно и для метода Римана. Зигмунд и Марцинкевич построили регулярный метод суммирования, для которого пустое множество не является множеством единственности. Справедлива следующая

Теорема. Пусть E множество единственности типа F_σ и G_δ одновременно. Если T регулярный метод суммирования, для которого пустое множество является множеством единственности, то множество E будет множеством единственности для этого метода.

Работа поддержана грантом РФФИ N94-01-00417

УДК 517.5

Я.М.Цейтлин

Плотные подпространства линейного пространства.

Самарский государственный аэрокосмический университет.

Пусть L - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ - поле действительных или комплексных чисел, и пусть $\bar{L}$ - линейное подпространство алгебраически сопряженного к L пространства L^*, причем $\bar{L}$ разделяет L. Тогда, если существует $\bar{L}_0$ - линейное подпространство $\bar{L}$, разделяющее L и разделяемое L_0, то будем говорить, что L_0 плотно в L относительно $\bar{L}$.

<u>Предложение 1</u>. L_0 плотно в L относительно L^* тогда и только тогда, когда $\dim L \leqslant 2^{2^{\dim L_0}}$, если L не конечномерно.

<u>Предложение 2</u>. Если размерность L счетна, то любое его бесконечномерное подпространство плотно в L относительно всякого $\bar{L} \subset L^*$, разделяющего L.

Пусть $\mathbb{K}^X$- алгебра, состоящая из всех функций, определенных на X и принимающих значения из $\mathbb{K}$.

<u>Предложение 3</u>. Пусть L_0- подалгебра с единицей алгебры $\mathbb{K}^X$, тогда, если L_0 разделяет X, то оно плотно в $\mathbb{K}^X$ с топологией поточечной сходимости.

<u>Предложение 4</u>. Сепарабельность $\mathbb{K}^X$ в топологии поточечной сходимости равносильна тому, что мощность X не более континуума.

При этом $\mathbb{K}^X$ может содержать и несепарабельные подалгебры, хотя замкнутые подалгебры все сепарабельны.

<u>Определение</u>. Пусть L - линейное пространство, а L_0 его линейное подпространство и $\bar{L} \subset L^*$, причем $\bar{L}$ разделяет L. Тогда, если $\bar{L}_0 \subset L_0^*$ и сужение функционалов из $\bar{L}$ на L_0 определяет биективное отображение $\bar{L}$ на $\bar{L}_0$, то $\bar{L}$ назовем продолжением $\bar{L}_0$ на L.

<u>Предложение 5</u>. Пусть L_0 - подалгебра $\mathbb{K}^X$, разделяющая X, а $L \supset L_0$ - линейное подпространство $\mathbb{K}^X$. Тогда, если $X \subset \bar{L}_0 \subset L_0^*$, то существует продолжение $\bar{L}_0$ на L.

THE EXISTENCE THEOREM AND THE NUMERICAL SOLUTION SCHEME IN EDDY CURRENT PROBLEM

I.Chegis, Institute of Radioengineering, Electronics and Automation, 117454, Moscow, Vernadskogo 78, Russia

The main result in the scheme of the solution of the eddy current problem proposed in[1],[2] is a split theorem for Maxwell's equations. This theorem may be formulated as follows. Let 1) V be a bounded domain in R^3 with a sufficiently smooth boundery S, $S \in C^2$, 2) $\underline{Ho}(x)$ be a known harmonic field

$$\underline{Ho}(x) = \nabla\ Uo(x) \quad \text{and} \quad \Delta Uo(x) = 0\ ,\ x \in V \tag{1}$$

(the time-dependence of all fields is as $e^{-i\omega t}$ and is omitted) 3) Maxwell's equations

$$\mathrm{rot}\ \underline{J}(x) = k^2\ \underline{H}(x),\ \mathrm{rot}\ \underline{H} = \underline{J}(x),\ k^2 = i\omega\mu\sigma\ ,\ x \in V \tag{2}$$

have the solution $\underline{J}(x)$ which satisfies the following conditions

$$\mathrm{div}\ \underline{J}(x) = 0,\ x \in V\ ;\quad (\ \underline{J}(x), \underline{n}(x)\ ) = 0,\ x \in S \tag{3}$$

and belongs to the following class of smoothness

$$\underline{J}(x) \in C^2(V) \cap C^{0,\alpha}(\overline{V})\ ,\ \mathrm{rot}\ \underline{J}(x) \in C^{0,\alpha}(\overline{V}) \tag{4}$$

Then two scalar functions exist on S - $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}(S)$, $\psi(x) \in C^{1,\alpha}(S)$, these functions are the potential densities of the single and double layer $u(x)$ and $v(x)$ respectively such that inside the region V the following equations hold

$$\nabla\ u(x) - \nabla\ v(x) = k^2 \underline{Ho}(x)\ ,\ \Delta \underline{J}(x) = -k^2 \underline{J}(x),\ x \in V \tag{5}$$

while on the surface S the boundary condition for rot$\underline{J}$ holds

$$\mathrm{rot}\ \underline{J}(x) = \mathrm{Grad}\ \psi(x) + \nabla_{-} u(x)\ ,\ x \in S \tag{6}$$

In the paper [4] the following results are obtained. a). It is derived the exact formulas for the solution of the integral eqs. for the potential densities in eq.(5) over the densities $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ of the simple and double layer potentials representing the harmonic function $Uo(x)$ in eq.(1) and magnetic permeabilities μ & μ_1 of the domain V & $R^3 \setminus V$. b). It is shown that the numerical prosedure elaborated in [3] allows us to calculate $\varphi(x)$, $\psi(x)$, rot$\underline{J}(x)$ on S eq.(6) over the function $Uo(x)$. c). It is proved provided the hypothesis 1),2) of the split theorem that the solution of the Maxwell set (2), satisfying eqs.(3), exists among the functions of the smoothness class (4).

References

1. I.Chegis, Proc.TEAM Conf. Sorrento, pp.261-264(1991)
2. I.Chegis, J.Comput.Maths Math.Phys., V.32, No7, pp929-939(1992)
3. I.Chegis, J.Comput.Maths Math.Phys., V.29, No6, pp213-216(1989)
4. I.Chegis, J.Comput.Maths Math.Phys., V.34, No7, pp.1053-66(1994)

УДК 536.24

Четвертакова С.Л. (Воронеж)

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕГРЕВ ДЛЯ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В СЛАБОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРАХ ПОЛИМЕРОВ

Известно, что характерной особенностью кривых фазового равновесия среды жидкость-пар для полимерных растворов в координатах T, k является наличие почти плато в области достаточно малых содержаний полимера ($k_* \le k_o < 1$). Тогда для значений k_o в этом интервале можно определить $\widehat{Ja_o}$ такое, что при $1 < Ja_o < \widehat{Ja_o}$ диффузионное торможение при росте паровых пузырьков не проявляется.

Значение предельного перегрева $\widehat{\Delta T_*}$ оценивается при условии достаточно малого изменения диффузии D в интервале (k_R; k_o).

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_*} = \left[1 - C_{2p}\,l^{-1}(1-k_R)\sqrt{Le}\left(\frac{\partial T_s}{\partial k}\right)_{k=k_o}\right]^{-1}$$

$$\Delta T = T_{20} - T_s(k_R); \qquad \Delta T_* = T_{20} - T_s(k_o)$$

где k_R, k_o – поверхностная и обьемная концентрации;

c_{2p} – теплоемкость;

l – интенсивность парообразования;

Le – число Льюиса.

Проведен численный расчет динамики и тепломассообмена парового пузырька в слабоконцентрированном перегретом растворе полимера. Полученные результаты позволяют показать проявление диффузионных и термодинамических особенностей растворов высокомолекулярных соединений при росте паровых пузырьков в условиях обьемного перегрева.

УДК 539.3

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМЫХ СЛОИСТЫХ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВОВ

Чеботарев А.С.
(Воронеж)

В рамках второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых докритических деформациях, исследуется неустойчивость деформирования сжимаемых слоистых массивов в упруго-вязко-пластических средах. Чередующиеся слои (наполнителя и связующего) - упрочняющиеся, упруго-вязко-пластические, описываются соотношениями :

условием предельного состояния материала

$$\Phi = \alpha\sigma_1+[(s_{ij}-ce^p_{ij}-\eta\dot{e}^p_{ij})(s_{ij}-ce^p_{ij}-\eta\dot{e}^p_{ij})]^{1/2}-2^{1/2}k=0$$

зависимостью между тензором скоростей пластических деформаций и напряжениями:

$$\dot{e}^p_{ij} = \lambda_0 d\Phi/d\sigma_{ij}+\psi(\dot{\sigma}_1) \ ; \ \psi(\sigma_1) = d\varphi/d\sigma_1 \ ; \ \varphi(\sigma_1)-e^p_1=0 \ -$$

функция объемного нагружения , λ_0 - скалярный множитель.

Принято , что полная деформация состоит из упругой и пластической , при этом упругая деформация связана с напряжениями законом Гука.

$$\sigma_{ij} = \lambda e^e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e^e_{ij} \ ; \quad e_{ij} = e^e_{ij}+e^p_{ij}$$

Здесь λ,μ - параметры Ламе , c - коэффициент упрочнения , k - предел текучести , η - коэффициент вязкости, α - скорость дилатансии.

Массив сжат вдоль оси Ox_3 усилиями интенсивности q.

Исследуется случай плоской деформации в плоскости x_1Ox_3. Рассмотрены две формы потери устойчивости : форма потери устойчивости первого и второго рода. Получены характеристические уравнения для определения критических нагрузок . Численные результаты выполнены для случая $\varphi(\sigma_1) = (\sigma_1/k)^{1/n}$, для песчаных $n=1$ (рыхлый песок) , $n=5$ (плотный песок) слоистых массивов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

УДК 517.956 Чернышов А.Д.

Краевая задача о колебаниях треугольной области

Рассматривается задача о колебаниях треугольной области для системы дифференциальных уравнений без начальных условий

$$\Delta U_i=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}U_j+b_{ij}U_{jt}+c_{ij}U_{jtt}\right),\ i=1,2,..,n\ ,\ (1)$$

где Δ –оператор Лапласа. Функции $U_i(x,y,t)$ зависят от двух геометрических координат (x,y) и времени t. Граничные условия на границе Γ области треугольника могут быть заданы первого, второго или третьего типов

$$U_i|_\Gamma=A_i\cos\omega t\ ,\ \partial U_i/\partial n|_\Gamma=q_i\cos\omega t\ ,$$

$$\alpha_0 U_i-\partial U_i/\partial n=T_i\cos\omega t\ ,$$

где ω –частота внешних воздействий.

Вначале строится геометрически одномерное решение системы (1), затем применяется специальный метод суперпозиций полученных одномерных решений. Возможности метода позволяют получить решения задачи для области правильного треугольника в виде конечных сумм специально построенных аналитических функций – одномерных решений.

Затем анализируются условия возникновения резонанса. В случае граничных условий первого или второго типа резонанс наступает при выполнении равенства $\lambda_j=(i)2k\pi/h\ ,\ k=1,2,\dots$,

где h –высота треугольника, λ_j –один из характеристических корней для системы уравнений (1). Для граничных условий третьего типа резонанс возникает при выполнении условия

$$\lambda_j=(i)\nu\ ,\ ctg\frac{1}{2}\nu h=\frac{\nu}{3\alpha_0}-\frac{2\alpha_0}{3\nu}\ .$$

УДК 517.518

В.Ф.Чистяков (г.Иркутск)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$F(x', x, \int_a^t K(t,s,x(s))ds,\ t) = 0,\quad a-e < t < a+e,\ e > 0 \qquad (1)$$

где $F: U \to R^n$, $U \subseteq R^n * R^n * R^n * T \to R^n$, $T = [a-e, a+e]$, $x = x(t)$ - n - мерная искомая вектор-функция, $K: T * T * R^n \to R^n$.

Вектор-функция $F(p,x,y,t)$ дважды дифференцируема, а вектор-функция $K(t,s,x)$ просто дифференцируема в своих областях определения. Предполагается, что

$$\det \partial F / \partial p \equiv 0 \quad \text{в} \quad U \qquad (2)$$

и на решение системы (если оно существует) наложено условие

$$x(a) = c \qquad (3)$$

где с - заданный вектор.

Частными случаями системы (1), удовлетворяющей условию (2) являются алгебро-дифференциальные и алгебро-интегральные системы. Введем обозначения

$$\partial F / \partial p = A,\quad \partial F / \partial x = B,\quad \partial F / \partial y = C,\quad \partial F / \partial t = D$$

Теорема 1. Пусть 1) существует вектор b такой, что четверка $h=(b,c,0,a) \in U$ и

$$F(h) = 0$$

$$\operatorname{rank} A(h) = \operatorname{rank} (A(h)\ \ B(h)b+C(h)K(a,a,c)+D(h));$$

2) $\operatorname{rank} \partial F(p,x,y,t)/\partial p = \mathrm{const}$ в окрестности h;

3) ненулевой многочлен $L(z) = \det[zA(h)+B(h)]$ удовлетворяет критерию "ранг-степень", т.е. $\deg L(z) = \operatorname{rank} A(h)$. Тогда существует отрезок $[a-d,a+d] \subseteq T$, $d > 0$, на котором определено решение задачи (1),(3) $x(t)$, причем $x'(a)=b$.

Условия теоремы обеспечивают применимость широкого класса неявных разностных методов для решения задачи (1),(3). В докладе указаны примеры, когда нарушение условий влечет расходимость.

УДК 517.9 Чубурин Ю.П.(Ижевск)

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Функцию $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ назовём предельно периодической (п.п.) по переменным x_1, x_2 если существует последовательность непрерывных функций $V_n(x)$, $n=1,2,\dots$, периодических по x_1, x_2, равномерно стремящаяся к $V(x)$ при $n \to \infty$. Это равносильно представлению V в виде абсолютно сходящегося в смысле $\|\cdot\|_\infty$ ряда: $V = \sum\limits_{n=1}^{\infty} W_n$, где W_n – непрерывные периодические по x_1, x_2 функции с периодами $T_1^{(n)}, T_2^{(n)}$, причём $T_j^{(n+1)}$ делятся без остатка на $T_j^{(n)}$, $j=1,2$.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$H\psi = (-\Delta + V)\psi = E\psi, \tag{I}$$

где V – п.п. потенциал по x_1, x_2, причём соответствующие функции W_n (эквивалентно V_n) экспоненциально убывают по $|x_3|$. Пусть $\Omega_n = (0, T_1^{(n)}) \times (0, T_2^{(n)}) \times \mathbb{R}$; $K_n \subset C(\Omega_n) \cap L^\infty(\Omega_n)$, $n=1,2,\dots$ – компактные множества. Обозначим через $\sigma(H)$ спектр оператора H.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\int_{\Omega_1} U(x)\,dx < 0$. Существуют такие $\varepsilon_n > 0$, $n=1,2,\dots$, что если $\varepsilon \le \varepsilon_1$, $W_1 = \varepsilon U$, $\|W_n\|_\infty \le \varepsilon_n$ и $W_n \in K_n$, $n=2,3,\dots$, то для $E = \min \sigma(H)$ существует решение $\psi \ne 0$ уравнения (I) такое, что $|\psi|$ – п.п. функция по x_1, x_2.

ТЕОРЕМА 2. Существуют такие $\varepsilon_n > 0$, $n=1,2,\dots$, что если $\|W_n\|_\infty \le \varepsilon_n$ и $W_n \in K_n$, $n=1,2,\dots$, то для плотного подмножества $E \in \sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ существует решение $\psi \ne 0$ уравнения (I) такое, что $|\psi|$ – п.п. функция по x_1, x_2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть W_{n+1}, $n \ge 1$ выбираются так, чтобы

$$\max_{p=2,\infty} \left\| \sqrt{W_1 + \dots + W_{n+1}} - \sqrt{W_1 + \dots + W_n} \right\|_{L^p(\Omega_{n+1})} \le \varepsilon_{n+1},$$

где $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(W_1, \dots, W_n)$ достаточно малы. Тогда уравнение (I) для почти всех $E > 0$ имеет не стремящееся к нулю при $|x_3| \to \infty$ решение ψ такое, что $|\psi|$ – п.п. функция по x_1, x_2.

Если V экспоненциально убывает по $|x_3|$, то решение ψ в теоремах I,2 также экспоненциально убывает по $|x_3|$.

Чугунова М. В. (Ульяновск)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА.

С обратными задачами спектрального анализа, т. е. задачами восстановления линейного оператора по тем или иным его спектральным характеристикам, связаны многие задачи определения физических параметров недоступных непосредственному измерению. В теории колебаний струны с системой грузов на конце возникает краевая задача на конечном интервале (0,1) вида:

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad (1)$$
$$y(0)=\theta(\lambda)y'(0), \quad (2)$$
$$y(l)=hy'(l), \quad (3)$$

где $q(x)$-непрерывная функция, а $\theta(\lambda)$ – произвольная рациональная функция с неотрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости или же бесконечная константа.

В отличие от классической регулярной задачи Штурма-Лиувилля, система собственных функций краевой задачи (1,2,3) является квазиортогональной.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma_1(\theta,\lambda)$ класс спектральных функций распределения краевой задачи вида (1,2,3) с потенциалом $q_1(x)$ и всевозможными краевыми условиями вида (2,3), а $\sigma_2(\theta,\lambda)$ класс спектральных функций распределения задачи с потенциалом $q_2(x)$, тогда если для каких-то $\rho_1(\lambda)\in\sigma_1$ и $\rho_2(\lambda)\in\sigma_2$ имеет место равенство $\rho_1(\lambda)=c\rho_2(\lambda)$, то из этого следует, что $q_1(x)=q_2(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ_n – это занумерованные собственные значения краевой задачи (1,2,3), а $1/\alpha_n$-скачки спектральной функции распределения $\rho(\lambda)$, тогда имеют место асимптотические формулы

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi}{l}(n-m)+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad m=\deg\theta(\lambda)$$
$$\alpha_n=\frac{l}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Решена задача восстановления $q(x)$ и $\theta(\lambda)$ по спектральным характеристикам λ_n и α_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штраус А. В. О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси. // Изв. АН СССР. Сер. мат. -1956. т. 20-с. 783-792

2. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. // ДАН СССР. -1950. -т. 72-с. 457-460

УДК 539.3 Шагивалеева Е.К., Федоров М.В., Овчинников И.Г. (Саратов)

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Под влиянием агрессивной среды механические свойства композиционных материалов изменяются, что приводит к изменению напряженно-деформированного состояния конструкций даже при неизменной внешней нагрузке.

Для того, чтобы не допустить возникновения опасных состояний, нужно уметь анализировать поведение конструкций в процессе взаимодействия с внешней средой, иметь модели деформирования материала в агрессивной среде.

В докладе рассматривается модель деформирования композиционного материала с учетом физико-химического воздействия агрессивной среды. Считается, что агрессивная среда проникает в материал по механизму активированной диффузии, а затем взаимодействует с материалом, вызывая его деструкцию.

Кинетика проникания среды описывается уравнением диффузии, а взаимодействие материала с агрессивной средой - уравнениями химического взаимодействия.

В качестве модели материала использована модель нелинейного ортотропного разномодульного материала. Функции, аппроксимирующие диаграмму деформирования при растяжении и сжатии в различных направлениях, считаются зависящими от параметра химического взаимодействия. Влияние этого параметра учитывается с помощью функции влияния или с помощью зависимости коэффициентов модели от параметра химического взаимодействия. Разработана методика идентификации модели по результатам экспериментальных исследований.

УДК 517.53 Шамоян Ф.А. (Брянск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть G открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, X некоторое топологическое пространство аналитических в G функций, в котором множество всех многочленов от z всюду плотно, причем $zX \subset X$ и функционалы $\Phi_\zeta(f) = f(\zeta)$, $\zeta \in G$, $f \in X$ непрерывны в X.

Определение. Скажем, что функция $f \in X$ слабо обратима в X, если существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n f = 1,$$

при этом сходимость имеет место в топологии пространства X.

Отметим, что понятие слабой обратимости теснейшим образом связано с вопросами приближения многочленами в весовых пространствах гомоморфных функций (см. [1], [2], [3]). В докладе будут приведены примеры банаховых пространств X аналитических в круге функций, в которых существуют функции f, такие, что $\frac{1}{f} \in X$. В тоже время f не является слабо обратимым элементом пространства X. Этим дается ответ на вопросы поставленные ранее Н.К.Никольским [3] и А. Шильдсом [4]. Кроме того будут приведены критерии слабой обратимости в весовых пространствах целых функций.

Литература.

1. М.В.Келдыш. Sur l'approximation en moyenne par polynomes des functions d'une. Variable complexe, Мат. сб., 1945, 16(58), 1–20.
2. В.И.Смирнов, Н.А.Лебедев. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М. Наука, 1964.
3. Н.К.Никольский. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. Труды мат. института им. В.А.Стеклова, Т.СХХ, 1974.
4. A.L. Shields. Cyclic vectors in spaces of analytic functions, Lecture Note in Math, 1984, 1043.

УДК 517.5 Шевченко Ю.А.

ОБ ОСОБЫХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧКАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Основываясь на понятии пористости, введенном Е.П.Долженко в 1964 году [1], дадим следующее определение: множество E в метрическом пространстве X называется непрерывно равнопористым, если существуют такие два числа $p>0$ и $\varepsilon_0>0$, что для любого $\varepsilon<\varepsilon_0$, $\varepsilon>0$, и любой точки $x\in E$ в ε-окрестности x найдется открытый шар радиуса δ, свободный от точек множества E, и $\delta/\varepsilon\geqslant p$. Обозначим через $MB(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$ и $MBC(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$ метрические пространства всех ограниченных (непрерывных ограниченных) отображений f из открытого единичного шара $\mathcal{D}^n$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ $(n\geqslant 2, m\geqslant 1)$ с равномерной метрикой. Обозначим через $E_1(f)$ множество всех особых точек Багемила для f [2].

ТЕОРЕМА 1. У типичного ограниченного отображения $f\in MB(\mathcal{D}^2,\mathbb{R}^m)$ множество $E_1(f)$ всюду плотно на Γ^2 - границе $\mathcal{D}^2$.

Для любой точки $\zeta\in\Gamma^n$ обозначим через $C(f,\zeta)$ предельное множество отображения f при произвольном стремлении к ζ из $\mathcal{D}^n$. Положим $C(f,\zeta,\varepsilon)=\bigcup C(f,\xi)$ - объединение по всем $\xi\in\Gamma^n$, при $0<|\xi-\zeta|<\varepsilon$; $C_B(f,\zeta)\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{C(f,\zeta,\varepsilon)}$. Обозначим через $E_2(f)$ множество всех таких точек $\zeta\in\Gamma^n$, что $C(f,\zeta)\neq C_B(f,\zeta)$.

Прямым обобщением одного из результатов работы [3] является

ТЕОРЕМА 2. У произвольного отображения $f:\mathcal{D}^n\to\mathbb{R}^m$ множество $E_2(f)$ не более, чем счетно $(n\geqslant 1, m\geqslant 1)$.

ТЕОРЕМА 3. У типичного отображения f из $MB(\mathcal{D}^n;\mathbb{R}^m)$ (или из $MBC(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$) множество $E_2(f)$ всюду плотно на Γ^n.

Положим $C_S(f,\zeta)=\bigcup_{\varepsilon>0}\left(\bigcap_{0<|\xi-\zeta|<\varepsilon}C(f,\xi)\right)$; $E_3(f)\overset{\text{def}}{=}\{\zeta\in\Gamma^n: C(f,\zeta)\neq C_S(f,\zeta)\}$.

ТЕОРЕМА 4. У произвольного отображения $f:\mathcal{D}^n\to\mathbb{R}^m$ множество $E_3(f)$ является множеством 1-й категории по Бэру типа F_σ.

ТЕОРЕМА 5. У типичного отображения f из $MB(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$ (или из $MBC(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$) множество $E_3(f)$ имеет полную $(n-1)$-мерную меру.

В теоремах 1, 3, 5 множества нетипичных отображений являются счетными объединениями непрерывно равнопористых множеств в метрических пространствах $MB(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$ и $MBC(\mathcal{D}^n,\mathbb{R}^m)$.

1. Долженко Е.П. Граничные свойства аналитических и гармонических функций. Диссертация, МГУ, М., 1964, стр. 1-266.

2. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41 (1955), pp. 379-382.

3. Collingwood E.F. Cluster sets of arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 46 (1960), pp. 1236-1242.

УДК 517.928 Щепакина Е.А. (Самара)

ТРАЕКТОРИИ-УТКИ В ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

Исследуется вопрос существования траекторий-уток в трехмерном пространстве.

Определение. Траектория системы (1)

$$\varepsilon\dot{x} = f(x,y,a);$$
$$\dot{y} = g(x,y,a), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^2, \ a \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

называется траекторией-уткой, если она проходит непрерывным образом вдоль медленной кривой вначале вдоль устойчивого участка, а затем вдоль неустойчивого участка, причем оба раза проходятся расстояния порядка единицы.

Рассматривается система

$$y' = Y(x,y,z,a,\varepsilon),$$
$$\varepsilon z' = 2xz + Z(x,y,z,a,\varepsilon), \qquad (2)$$

где $Y(x,y,z,a,\varepsilon)$ и $Z(x,y,z,a,\varepsilon)$ определены, непрерывны в некоторой области

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{R}, \ |a| < v, \ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0] \}$$

Доказаны теоремы существования траекторий-уток системы (2) для некоторого значения скалярного параметра a и построены асимптотические разложения этих траекторий.

Системы типа (2) используются для моделирования теплового взрыва в инертных пористых средах. При этом медленными переменными являются температура инертной фазы и концентрация реагирующего вещества. Температура реакционной фазы является быстрой переменной. Значение a, отвечающее рождению утки, используется для вычисления критических условий теплового взрыва.

УДК 517.52 Щербаков В.И. (гор. Жуковский Московской области)

Пусть $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$, $m_n = \prod_{k=0}^{n} p_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \text{ где } a_k \text{ и } s \text{ – целые с } 0 \leq a_k < p_{k+1} \text{ и } m_s \leq n < m_{s+1} \quad (1)$$

а любое число $x \in [0,1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \text{ где } x_k \text{ – целые с } 0 \leq x_k < p_k \quad (2)$$

Если x – $\{p_n\}$ –рационально, то существует два представления по формуле (2), одно из которых – конечно (то есть $x_k = 0$ для $k > n$). Конечное представление числа $\frac{\ell}{m_n}$ обозначим за $\frac{\ell}{m_n}$, а бесконечное – за $\frac{\ell}{m_n}-$. Таким образом, отрезок $[0,1]$ перешёл в группу последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1\}$ с операцией $\dotplus$: $\{x_n\} \dotplus \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \bmod p_n\}$.

Положив $\frac{\ell}{m_n}- < \frac{\ell}{m_n}$, с $[0,1]$ на G переносятся упорядочивание точек, а также мера и интеграл Лебега.

Подгруппы $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G \mid x_k = 0 \text{ для } k \leq n\} = [0, \frac{1}{m_n}-]$ образуют систему окрестностей нуля в G. Таким образом, в G определены понятия предела (в том числе и пределов справа и слева) и непрерывности.

Рассмотрим систему функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$\psi_0(x) \equiv 1$; $\psi_{m_k}(x) = \exp\left(\frac{2\pi i \ell}{p_{k+1}}\right)$, если $x \in \left[\frac{\ell}{m_{k+1}}, \frac{\ell+1}{m_{k+1}}-\right]$, $\ell = 0, 1, \ldots, m_{k+1} - 1$, $k = 0, 1, \ldots$

$\psi_n(x) = \prod_{k=0}^{s} \left(\psi_{m_k}(x)\right)^{a_k}$, где a_k и s определяются по формуле (2).

Это – полная ортонормированная система функций (называемая системой Прайса). Имеет место следующая

<u>теорема</u>: Ряд Фурье по системе Прайса расходится во всякой неустранимой точке разрыва первого рода.

В.М.Щербин

О ВЫСШИХ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К-ПРОСТРАНСТВ

В статье [2] дается определение относительно равномерной производной отображений К- пространств.

В настоящей заметке доказывается теорема о высших производных сложных отображений.

По поводу терминологии К-пространств см. [I]

<u>Теорема</u>

Пусть $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$

O – непрерывные отображения;

X, Y, Z – $\mathcal{K}$ – пространства

а) Если отображение $f: X \to Y$ n раз (u, V_i)-дифференцируемо в $x=a$, а отображение $g: Y \to Z$ (V_i, W_i) n раз дифференцируемо в точке $b=f(a)$

$\overline{V_i} \geq |f^{(i)}(a)|u + V_i$, $i=1,2,\dots,n$; $u \in X^+ \setminus \{0\}$

$V_i, \overline{V_i} \in Y^+_{i-1} \setminus \{0\}$, $W_i \in Z^+_{i-1} \setminus \{0\}$; $Z = Z_0$; $Z_1 = H_0(Y \to Z)$

Тогда сложная функция $h = g \circ f$ n раз $(u, \overline{W_i})$ дифференцируема в $x=a$, где

$\overline{W_i} \geq |g'(b)| V_i + W_i$; $\overline{W_i} \in Z^+_{i-1}$; $Z_k = H_0(Y, Z_{k-1})$

б) Если f и g принадлежит к классу $C^{(n)}$, то $h = g \circ f$ принадлежит к классу $C^{(n)}$.

Литература

I. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.М., 1961.

2. Соболев В.И.,Щербин В.М. О дифференцируемости отображений простаанств. ДАН СССР.1975.т.225. № 5. 1020-1022.

УДК 517.92

Шитов И.Н. / Санкт-Петербург /

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для сингулярно возмущенной системы

$$\varepsilon\, dx/dt = X_0(t/\varepsilon, t, x, z) + \varepsilon X_1(t/\varepsilon, t, x, z),$$

$$\varepsilon\, dz/dt = Z_0(t/\varepsilon, t, x, z) + \varepsilon Z_1(t/\varepsilon, t, x, z)$$

рассматривается краевая задача $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(T) = x_{2T}$, $z_1(0) = z_{10}$, $z_2(T) = z_{2T}$, где $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$. Предполагается, что присоединенная система $(t = const)$

$$dx/d\tau = X_0(\tau, t, x, z), \quad dz/d\tau = Z_0(\tau, t, x, z)$$

имеет интегральное многообразие S: $z = \mathcal{F}(\tau, t, x)$, которое является гиперболическим в нормальном направлении [1].

Как известно, в этом случае для любого лежащего на S решения $x = x_s(\tau, t)$, $z = z_s(\tau, t)$ присоединенной системы существует состоящее из экспоненциально притягивающихся к $x_s(\tau, t)$, $z_s(\tau, t)$ при $\tau \to \infty$ решений многообразие S^+ и состоящее из экспоненциально притягивающихся к $x_s(\tau, t)$, $z_s(\tau, t)$ при $\tau \to -\infty$ решений многообразие S^-. Положим $S_0^+ = S^+ \cap \{\tau = 0\}$, $S_T^- = S^- \cap \{\tau = T/\varepsilon\}$ и будем предполагать, что $\dim z_1 = \dim S_0^+$, $\dim z_2 = \dim S_T^-$.

Асимптотика решений краевой задачи строится в виде

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(t, \varepsilon) + Q x(t, \varepsilon), \quad z = \bar{z}(t, \bar{x}, \varepsilon) + \Pi z(t, \varepsilon) + Q z(t, \varepsilon),$$

где $\bar{x}$, Πx, Qx, $\bar{z}$, Πz, Qz представляют собой некоторые разложения по степеням ε; $\Pi x, \Pi z$ и Qx, Qz имеют погранслойный характер при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ соответственно.

Полученные результаты обобщают известные результаты работ [2,3] для условно устойчивого случая.

Литература.

1. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику.–М.: Мир, 1975. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем.–М.: Наука, 1973. 3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.–М.: Изд-во МГУ, 1978.

УДК 517.43

Эктов Ю.С.
(Воронеж)

ОБ ОПЕРАТОРАХ С $\mathcal{J}$-НЕПРЕРЫВНЫМ ЯДРОМ

Пусть $\sigma(x)$ – вещественная функция ограниченной вариации на $[a,b]$, $\omega(x)$ – полная вариация $\sigma(x)$ на $[a,x]$. Множество точек изменения функции $\sigma(x)$ обозначим E_σ.

Линеал $\mathcal{L}_\sigma$, элементами которого являются классы $\hat{\varphi}$ гильбертова пространства $H=L^2_\omega[a,b]$, порожденные непрерывными на $[a,b]$ функциями $\varphi(x)$, есть банахово пространство по отношению к норме $\|\hat{\varphi}\| = \max\limits_{x\in E_\sigma} |\varphi(x)|$ [1]. Всякий функционал $\Phi(\hat{\varphi}) \in \mathcal{L}_\sigma^*$ может быть представлен интегралом $\Phi(\hat{\varphi}) = \int_a^b \varphi(x)\, d\tau(x)$, где $\tau(x)$ – функция ограниченной вариации с $E_\tau \subset E_\sigma$.

Интегральный оператор $\hat{K}$: $\hat{K}\hat{\varphi} = \widehat{K\varphi}$, $(K\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x,s)\varphi(s)\, d\sigma(s)$ в случае непрерывной (по совокупности переменных) функции $\mathcal{K}(x,s)$ обладает $\mathcal{J}$-непрерывным ядром [2] ($A_*\Phi = \widehat{\int_a^b \mathcal{K}(x,s)\, d\tau(s)}$), то есть 1) $A_*\Phi \in \mathcal{L}_\sigma$ $(\forall \Phi \in \mathcal{L}_\sigma^*)$; 2) каждая слабо сходящаяся последовательность функционалов (Φ_n) преобразуется оператором A_* в $\mathcal{L}_\sigma$-сходящуюся. Этот результат был получен совместно с И.С.Иохвидовым. Если же функция $\mathcal{K}(x,s)$ ограничена на $[a,b]\times[a,b]$ и раздельно непрерывна по каждой переменной при фиксированном значении другой, то оператор $\hat{K}$, вообще говоря, не имеет $\mathcal{J}$-непрерывного ядра, хотя условие $A_*\Phi \in \mathcal{L}_\sigma$ выполняется и в этом случае.

Пример. Пусть $\mathcal{K}(x,s) = \dfrac{sx}{s^2+x^2}$ при $s^2+x^2 \neq 0$, $\mathcal{K}(0,0)=0$, $(x,s) \in [0,1]\times[0,1]$ и $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset E_\sigma$.

Тогда последовательность функционалов $\Phi_n = \int_0^1 \varphi(s)\, d\tau_n(s)$, где $\tau_n(s) = 0$ при $s \in [0, \frac{1}{n}]$ и $\tau_n(s) = 1$ при $s \in (\frac{1}{n}, 1]$, слабо сходится к функционалу $\Phi = \int_0^1 \varphi(s)\, d\tau(s)$, где $\tau(0)=0$ и $\tau(s)=1$ при $0 < s \le 1$. В то же время $\|A_*\Phi_n - A_*\Phi\| = \frac{1}{2}$ $(\forall n)$.

1. Иохвидов И.С., Эктов Ю.С. Разложение итерированных ядер σ-неотрицательного ядра по системе фундаментальных функций.-Воронеж, 1985, № 5481-85, Деп., 27 с.

2. Эктов Ю.С. Вполне непрерывные операторы в $\mathcal{J}$-пространствах с двумя нормами.-Тр.НИИ мат.Воронеж.ун-та, 1975, вып.20.- С.57-64.

УДК 624.1.

Зюбов Я.А., Али-заде А.Н., Джафаров М.Д.,
Нагиев А.О.. Ширинов Н.Н. (Баку)

О ВЛИЯНИИ ПРОЦЕССА ПОВРЕЖДАЕМОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под динамическими характеристиками подразумеваются характеристики колебательного процесса вызванного кратковременным, по сравнению со сроком эксплуатации конструкции, приложенном силы, меняющегося во времени. Такого типа задачи встречаются при расчете сейсмической устойчивости конструкций расчете надежности конструкций при случайных динамических нагрузках и т.д.

При этом предполагается, что конструкция до момента приложения нагрузки эксплуатировалась, т.е. в ней накопился некоторый объем повреждений. Целью данной работы явилось установление взаимосвязи между объемом накопленных повреждений и динамическими характеристиками.

В данной работе приводится система уравнений, описывающих процесс накопления повреждений в растянутой конструкции. При этом предлагается, что процесс повреждаемости взаимосвязан с процессом ползучести протекающем в конструкции.

При этом задаче предполагается статической. Эти уравнения позволяют определить мгновенные механические характеристики конструкции, в частности, модуль упругости. При этом предполагается, что мгновенная характеристика является упругой, в виду малости приложенной нагрузки и краткосрочности её воздействий.

Знание мгновенных упругих характеристик по известным формулам позволяет пересчитать динамические характеристики конструкций. Для общего случая выписывается система уравнений движения упругого тела на основе которой можно определить ту или иную динамическую характеристику.

Данная методика апробирована при определении собственной частоты, предварительно растянутого шарнирно-опертого стержня. Установлена зависимость собственной частоты от параметров эксплуатации, т.е. от приложенной силы и моментом времени от начала накоплений повреждений до рассматриваемого момента.

УДК 517.956 Янушаускас А.И. (Иркутск)

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Задача о наклонной производной для регулярных в полупространстве

$$x_{n+1} > 0$$

гармонических функций с граничным условием

$$a(X)\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} + l(u) = f(X), \quad l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$X = (x_1, \dots, x_n),$$

заданным на границе полупространства, эквивалентна псевдодифференциальному уравнению первого порядка

$$a(X)J(u) + l(u) = f(X), \tag{1}$$

Сопряженное для (1) уравнение имеет вид

$$J(av) - l^{*}(v) = g(X), \quad l^{*}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_i v) \tag{2}$$

и только членами нулевого порядка отличается от союзного уравнения

$$aJ(v) - l(v) = h(X).$$

Подействовав на (1) союзным оператором, получим

$$L(u) + l(a)J(u) + aR(u) = \omega(X), \tag{3}$$

где R(u)- псевдодифференциальный оператор не выше первого порядка, а

$$L = \Delta + l^2,$$

где D- оператор Лапласа. Главная часть имеет вид

$$L(u) + l(a)J(u) = \omega(X), \tag{4}$$

причем характер разрешимости (3) от (4) отличается только фредгольмовостью. Уравнение (4) заменяет уравнение Фредгольма, возникающее в процессе регуляризации одномерных сингулярных уравнений.

Теорема. Отличное от постоянной решение однородного уравнения, соответствующего (4), не может достигать ни минимума ни максимума в тех точках, в которых

$$l(a) > 0.$$

Теорема. Если в (4)

$$l(a) > 0$$

всюду и

$$\omega(X) \geq 0,$$

то уравнение (4) не имеет ограниченных во всем пространстве решений.

Завгородний М.Г., Кулаев Р.Ч. (Воронеж)

О ПРОСТОТЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ.

В докладе обсуждается вопрос простоты собственной частоты плоской стержневой системы следующего вида. К стержню $\gamma_0=[a_0,b_0]$, с жестко закрепленными концами, шарнирно присоединены стержни $\gamma_i=[a_i,b_i]$ $(i=\overline{1,n})$ в точках a_i. Свободные концы b_i закреплены шарнирно. Допускается присоединение к одной и той же точке a_i нескольких стержней $\gamma_j(j=\overline{1,m})$. В этом случае $a_j=a_i$.

Малые упругие деформации вышеуказанной стержневой системы описывает следующая краевая задача

$$(pu'')''=f, \qquad (1)$$

$$u(a_0)=u'(a_0)=u(b_0)=u'(b_0)=0, \quad u(b_i)=u''(b_i)=0 \quad (i=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

Под решением уравнения (1) понимается функция u, непрерывная на всем объединении Г отрезков $\gamma_i(i=\overline{0,n})$, удовлетворяющая уравнению (1) везде внутри Г за исключением точек a_i, а в точках a_i - условиям согласования

$$u_0'(a_i-0)=u_0'(a_i+0),$$

$$(p_0u_0'')(a_i-0)-(p_0u_0'')(a_i+0)=k_iu_0'(a_i) \quad (k_i<0), \quad u_i''(a_i)=0,$$

$$(p_0u_0'')'(a_i-0)-(p_0u_0'')'(a_i+0)+\sum_{j=1}^{n}(p_ju_j'')'(a_j)=0.$$

Здесь через $u_i(\cdot)$ обозначено сужение функции $u(\cdot)$ на отрезок γ_i, а через k_i-суммарная жесткость кручения стержней γ_i, присоединенных к стержню γ_0 в точке a_i. Кроме того полагаем, что $p_j(a_i)=0$, если $a_i\neq a_j$

Рассмотрим на Г задачу на собственные значения

$$(pu'')''=\lambda u \qquad (3)$$

Теорема. Пусть при $\lambda=\lambda_0$ задача (3),(2) имеет решение $u(\cdot)$, не имеющее нулей в точках a_i. Тогда любое другое решение $v(\cdot)$ задачи (3),(2) при $\lambda=\lambda_0$ пропорционально $u(\cdot)$ на всем Г $(v=Cu)$. Т.е. геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна единице.

Полученная теорема аналогична известному факту [1] о простоте собственных значений системы струн.

Литература.

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах./ДУ,1989.-Т.25,№7-С.1141-1150.

Завгородний М.Г., Лелецкая И.Ж., Чулюкова Л.А. (Воронеж)

О СПЕКТРЕ КРЕСТООБРАЗНОГО ПУЧКА СТЕРЖНЕЙ

Рассматривается плоский четырехзвенный пучок Г стержней с общей вершиной a и с закрепленными остальными концами. Предполагается, что стержни γ_1, γ_3 лежат на одной прямой и перпендикулярны двум другим стержням γ_2 и γ_4. Вариационными методами показано, что малые упругие деформации, вызванные силой интенсивности f, перпендикулярной плоскости равновесия пучка, описывает следующая задача

$$(pu'')''=f, \qquad u_{|\partial\Gamma}=u'_{|\partial\Gamma}=0 \tag{1}$$

Уравнение (1) выполняется везде на объединении Г отрезков $\gamma_i(i=\overline{1,4})$, кроме точки a. Обсуждаются условия "согласования" решения u уравнения (1) в точке a в зависимости от вида соединения стержней. В частности установлены следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть все стержни спаяны. Тогда условия согласования имеют следующий вид

$$u_i= u_1 \ (i=2,3,4); \qquad (p_1u_1'')'+(p_2u_2'')'-(p_3u_3'')'-(p_4u_4'')'=0; \tag{2}$$

$$u_1' = u_3' \qquad u_1''- u_3'' =\mathrm{k}\, u_1'; \tag{3}$$

$$u_2' = u_4' \qquad u_2''- u_4'' =k\, u_2'; \tag{4}$$

Здесь через u_i обозначен односторонний предел функции u вдоль стержня γ_i; k и k суммарные коэффициенты жесткости кручения стержней γ_2,γ_4 и γ_1,γ_3, соответственно.

Лемма 2. Пусть стержни γ_1,γ_3 спаяны, а γ_2, γ_4 присоединены к ним шарнирно. Тогда условия (2),(3) сохраняются, а (4) заменяются следующими

$$u_2'' = u_4'' = 0$$

Для указанных условий согласования описана структура спектра задачи

$$u^{(4)}=\lambda u, \qquad u_{|\partial\Gamma}=u'_{|\partial\Gamma}=0$$

В обоих случаях спектр состоит из последовательности собственных значений вида $\lambda_k=-(\frac{\pi}{\sigma}k+O(\frac{1}{k}))^4$, где σ–сумма длин всех стержней.

УДК 519.687:37 Зарубин В.С. (Воронеж)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СПЕЦИАЛИСТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

В Воронежской высшей школе МВД России было проведено экспертное исследование, в результате которого построены динамические модели специалистов шести должностей вневедомственной охраны, на которые могут быть распределены выпускники школы. Коэффициенты относительной важности элементов дерева целей подготовки специалистов по охранной деятельности формировались путем нормировки средних значений экспертных оценок. Совокупность таких коэффициентов по видам подготовки, дисциплинам и узловым темам для конкретной должности может быть определена как динамическая модель специалиста этой должности.

Зная объемы времени, выделяемые в учебном плане на спецподготовку и имея модель специалиста определяется наполнение типового учебного плана. Становится возможным в рамках традиционных АОС осуществлять тестирование выпускников по дисциплинам, видам подготовки на соответствие их реальных знаний уровням модели. По результатам тестирования выпускники ранжируются по уровню их реальных знаний с выдачей рекомендаций по желательному замещению должности выпускником школы. Для слушателей факультета повышения квалификации проводится входное тестирование на соответствие их знаний уровню должностной модели и по результатам тестирования слушатели разбиваются на три группы по уровню их знаний: сильные, средние и слабые. Для каждой из групп формируется свой план подготовки и по результатам обучения проводится выходное тестирование слушателей с выдачей характеристики соответствия занимаемой должности.

Система контроля представляется в виде экспертной системы, в которой дедуктивный вывод решений основывается на представлении в базе знаний экспертных знаний и множества возможных ответов, которые представляются нечетким подмножеством. Возможные ответы слушателей проецируются на принятую трехуровневую информационную структуру. Предъявленному ответу присваивается некоторая функция принадлежности, которая распознает принадлежность к одной из 3-х групп уровней знаний. Следующий этап определяет принятие решений по выработке рекомендаций по изменению стратегии обучения

Таким образом интеллектуализация процесса принятия решении на информационной базе динамически ее изменяет и приводит к более эффективному обучению и повышению уровня знаний.

УДК 517.51

О ФУНКЦИЯХ С ЗАДАННЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ *)

П.А.Бородин

Пусть $E_n(f)$ и $R_n(f)$, $n=0,1,\ldots$ - наименьшие равномерные уклонения вещественной функции $f\in C[a,b]$ соответственно от вещественных полиномов и рациональных функций степени не выше n. Последовательности $\{E_n(f)\}$ и $\{R_n(f)\}$ монотонно убывают к 0 при любой функции f. Для полиномиальных уклонений это свойство оказывается также достаточным: согласно теореме С.Н.Бернштейна /см. [1]/, $\forall\{a_n\}: a_n\searrow 0\ \exists f: E_n(f)=a_n,\ n=0,1,\ldots$.

В случае рациональной аппроксимации вопрос о существовании функции с заданными уклонениями до сих пор остается открытым. Известно следующее: 1/ для любой строго убывающей к 0 последовательности $\{a_n\}$ найдется /комплекснозначная/ функция f с $R_n(f)=a_n, n=0,1,\ldots$ /уклонения берутся от <u>комплексных</u> рациональных функций; см. [2]/ и 2/ для всякой последовательности $a_n\searrow 0\ \exists f: R_{3n}(f)=E_{3n}(f)=a_n,\ n=1,2,\ldots$ /см. [3]/.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При любых целых $m>n>k\geq 0$ и любых $a\geq b\geq c\geq 0$

$$\exists f:\ R_k(f)=a,\ R_n(f)=b,\ R_m(f)=c.$$

Кроме вопроса существования, интересен также вопрос о единственности функции с заданными уклонениями. Здесь заведомо следует "факторизовать" по возможным преобразованиям графика функции: например, на отрезке [0,1] уклонения функций $f(x)$, $f_1(x)=f(x)+c$, $f_2(x)=-f(x)$, $f_3(x)=f(1-x)$ одинаковы. Исчерпывается ли этим все множество функций с заданной последовательностью уклонений? Оказывается, не всегда:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Любые два полинома 2 степени с равными полиномиальными уклонениями получаются друг из друга указанными преобразованиями. Для полиномов 3 степени это уже неверно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: [1].Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.1949.; [2] Пекарский А.А.//Известия АН Беларуси,сер. физ.-матем. наук,1994,№1,С.23-26; [3] Долженко Е.П.//Мат.заметки,Т.1,№3,С.313-320.

---

*) Работа поддержана РФФИ /проект 93-01-00236/ и ISF/грант NCF000/.

УДК 517.956
Богатова В.П. /Воронеж/

ПЛОХО ПОСТАВЛЕННЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В области $R^{++}_{n+1} = \{(t,x,y) \mid 0<t<\infty, x\in R_{n-1},\ 0<y<\infty\}$ рассматривается начально-краевая задача

$$\mathcal{A}(\partial_t, D_x, D_{\alpha y}, \partial_y)V = \mathcal{F}(x,y) \qquad (1)$$

$$B_j(\partial_t, D_x, \partial_y)V\big|_{y=0} = \mathcal{G}_j(t,x),\quad 1\le j\le \varkappa \qquad (2)$$

$$\partial_t^{\mu} V\big|_{t=0} = \Phi_{\mu}(x,y),\quad \mu=0,1,\dots,\ell-1 \qquad (3)$$

Оператор $\mathcal{A}$ - линейный, дифференциальный, вырождающийся по пространственной переменной y - содержит производные, по X и весовые производные по $D_{\alpha y}$ по y до порядка $2m$, производные ∂_t по t до порядка $\ell<2m$, невесовые производные ∂_y по y до порядка $K<2m$.

Главная часть символа оператора

$$\mathcal{A}_0(p,\xi,\eta,z) = \sum_{r\mu+|\delta|+\nu+q\beta=2m} a_{\mu\delta\nu\beta}\, p^{\mu}\xi^{\delta}\eta^{\nu}z^{\beta},\quad r=\frac{2m}{\ell},\quad q=\frac{2m}{K}$$

есть многочлен по z, имеющий K комплексных корней $z_j(p,\xi,\eta)$, $(\xi,\eta)\in R_n$, $p\in Q_{\pi/2} = \{p \mid p\in \mathbb{C}, |\arg p|<\pi/2, |p|>0\}$.

Если число граничных условий $\varkappa$ не совпадает с числом χ z-корней многочлена $\mathcal{A}_0$, лежащих в левой полуплоскости, то задача (1)-(3) "плохо" поставлена.

При $\varkappa>\chi$ задача (1)-(3) называется переопределенной, при $\varkappa<\chi$ - недоопределенной.

Для переопределенной задачи разыскивается аппроксимационное решение, т.е. функция, дающая минимальную невязку с правой частью при подстановке в уравнение и точно удовлетворяющая граничным и начальным условиям. Для недоопределенной задачи в качестве решения ищется функция, ближайшая к заданной.

С помощью формулы Грина, прямого и обратного преобразований Лапласа задача (1)-(3) в обоих случаях $(\varkappa>\chi,\ \varkappa<\chi)$ сводится к коэрцитивной в соответствующих функциональных пространствах.

Applications of Equivariant Degree to Problems in Bifurcation Theorv

Wieslaw Krawcewicz
University of Alberta (Canada)
Univerity of Würzburg (Germany)

We will present an analytical definition of the recently developped by K. Gęba, W. Krawcewicz, and J. Wu, the equivariant degree theory for a compact Lie group G. We will discuss several applications of this equivariant degree to the following problems:

- (1) Generic Approximation and Branching Lemma for Bifurcation Problems;
- (2) Applications of Equivariant Degree to Steady-State Bifurcation with $SO(3)$ symmetries;
- (3) Hopf Bifurcation with Symmetries for Functional Differential Equations.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ