Воронежский государственный университет

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Тезисы докладов конференции
26 - 29 апреля 1995 г.

75 ЛЕТ
Марку Александровичу
КРАСНОСЕЛЬСКОМУ

Воронеж - 1995

УДК 517.9

"Современные методы нелинейного анализа" : Тезисы докладов конференции. - Воронеж: ВГУ, 1995. - 102 с.

В сборнике представлены тезисы докладов конференции, посвященной 75-летию Марка Александровича Красносельского, которая была проведена Воронежским госуниверситетом.

Тематика: функциональный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, теория управления.

ОРГКОМИТЕТ:

Председатель - Гусев В.В., Алгазинов Э.К., Покорный Ю.В., Садовский Б.Н., Скляднев С.А., Юргелас В.В.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Председатель - Садовский Б.Н., сопредседатель - Ишлинский А.Ю., Ильин В.А., Куржанский А.Б., Кузнецов Н.А., Борисович Ю.Г., Бобылев Н.А., Перов А.И., Стрыгин В.В.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА - ФАУЛЕРА

Асташова И. В. (Москва)

Рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} - p(x)|y|^k \operatorname{sign} y = f(x), \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $k>1$, $p(x)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty, \tag{2}$$

$f(x)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| \leq Ae^{-x}, \quad A = \mathrm{const}, \tag{3}$$

и однородное дифференциальное уравнение

$$z^{(n)} - p(x)|z|^k \operatorname{sign} z = 0, \tag{4}$$

где $n \geq 2$, $k>1$, $p(x)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию (2).

Изучается вопрос об асимптотической эквивалентности решений уравнений (1) и (4) при $x \to +\infty$. Именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть функции $p(x)$ и $f(x)$ в уравнениях (1), (4) удовлетворяют условиям (2) и (3), а $y(x)$ - решение уравнения (1), такое, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Тогда существует такое решение $z(x)$ уравнения (4), что

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-x}), \quad x \to +\infty.$$

Замечание. Отметим, что в случае $n = 2$ и $p(x)=p_0=\mathrm{const} > 0$ стремящиеся к нулю решения $z(x)$ уравнения (4), определенные на интервале $[x_0, +\infty)$, можно получить в явном виде. Это решения $z = 0$ или

$$z = \pm\left(\frac{2(k+1)}{(k-1)^2 p_0}\right)^{1/k-1} \cdot (x-x)^{-2/k-1},$$

что позволяет получить точную асимптотику решений уравнения (1), стремящихся к нулю при $x \to +\infty$.

Литература

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1990.

ON A VIBROSOLUTION TO A DIFFERENTIAL EQUATION IN VECTOR DISTRIBUTION

Basin M.V. (Moscow)

Let us consider a differential equation in vector distribution

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) + b(x,u,t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

where $x \in R^n$, functions $f(x,u,t) \in R^n$, $b(x,u,t) \in R^{n\times m}$ are piecewise continuous in x,u,t, $u(t) = (u_1(t),\dots,u_m(t)) \in R^m$ is a bounded variation function which is nondecreasing in the following sense: $u(t_2) \geqslant u(t_1)$ as $t_2 \geqslant t_1$, if $u_i(t_2) \geqslant u_i(t_1)$ for all $i=1,\dots,m$.

A solution to an equation (1) is defined as a vibrosolution [1], i.e. as a unique limit of absolutely continuous solutions to pre-limiting equations (1) corresponding to absolutely continuous non-decreasing approximations of a function $u(t)$. Solutions to pre-limiting equations (1) are regarded as conventional ones to ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides in the sense of Filippov [2]. A vibrosolution is expected to be a function discontinuous at discontinuity points of a function $u(t)$.

Theorem 1. Let the following conditions hold.

1) functions $f(x,u,t)$, $b(x,u,t)$, $\partial b(x,u,t)/\partial x$, $\partial b(x,u,t)/\partial t$ are piecewise continuous in x,u,t and their continuity domains are locally connected;

2) functions $f(x,u,t)$, $b(x,u,t)$ satisfy the one-side Lipschitz condition in x [2].

A unique vibrosolution to the equation (1) exists if and only if an $n\times m$-dimentional system of differential equations in differentials

$$d\xi/du = b(\xi,u,s), \quad \xi(\omega) = z, \qquad (2)$$

is solvable inside a cone $K = \{u \in R^m\colon u_i \geqslant \omega_i,\ i=1,\dots,m\}$ with arbitrary initial values $\omega \in R^m$, $\omega \geqslant u(t_0)$, $z \in R^n$, and $s \geqslant t_0$.

Sinse a vibrosolution is a discontinuous solution to the equation (1) it is helpful to design an equation with a measure which enables us to compute jumps of a vibrosolution at discontinuity points of a function $u(t)$. This completely determines the behaviour of a vibrosolution.

Theorem 2. Let the conditions of the theorem 1 hold. Then a solution to an equivalent equation with a measure

$$dx(t) = f(x,u,t)dt + b(x,u,t)du^c(t) +$$
$$+ \sum_{t} G(x(t_i-),u(t_i-),\Delta u(t_i),t_i)dX(t-t_i), \quad x(t_0)=x_0,$$

coincides with a vibrosolution to the equation (1), if $G(z,v,u,s) = \xi(z,v,v+u,s) - z$, where $\xi(z,v,u,s)$ is a solution to the system (2); $u^c(t)$ is a continuous component of a non-decreasing function $u(t)$, $\Delta u(t_i) = u(t_i+) - u(t_i-)$ is a jump of a function $u(t)$ at t_i, t_i are discontinuity points of a function $u(t)$, $X(t-t_i)$ is a Heaviside function.

References

1. Krasnoselskiy M.A., Pokrovskiy A.V. Systems with hysteresis. - Springer-Verlag, Berlin et al, 1989.
2. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand sides. - New-York: Kluwer, 1988.

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕМОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В банаховых прострастваx с конусами приводятся признаки существования решений нелинейных уравнений с разрывными немонотонными операторами.

Пусть X, Y - вещественные банаховы пространства с конусами $K_x \subset X$ и $K_y \subset Y$.

Определение. Назовем оператор $A: M \subset X \to Y$ положительно (отрицательно) K_x-идущим в точке $x_0 \in M$, если для любой возрастающей последовательности $(x_n) \subset M$: $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$, $x_0 = \sup (x_n)$ из $Ax_n \geqslant 0$ $(Ax_n \leqslant 0)$ следует $Ax_0 \geqslant 0$ $(Ax_0 \leqslant 0)$.

Определение. Назовем оператор $A: M \subset X \to Y$ положительно (отрицательно) вполне K_x-идущим в точке $x_0 \in M$, если для любой цепи $\mathfrak{N} \subset M$, $x_0 = \sup \mathfrak{N}$ из $Ax \geqslant 0$ $(x \in \mathfrak{N})$ $(Ax \leqslant 0$ $(x \in \mathfrak{N}))$ следует $Ax_0 \geqslant 0$ $(Ax_0 \leqslant 0)$.

Теорема 1. Пусть

1) конус $K_x \subset X$ вполне h-экстремален;

2) оператор $A: M \subset X \to Y$ отрицательно вполне K_x-идет на (0)-замкнутом множестве M;

3) существует элемент $x_0 \in M$, такой, что $Ax_0 < 0$;

4) для любого элемента $x \in M$, $x \geqslant x_0$, такого, что $Ax < 0$, существует элемент $x' \in M$, $x' > x$, такой, что $Ax' \leqslant 0$;

5) множество всех $x \in M$, $x \geqslant x_0$, таких, что $Ax \leqslant 0$, ограничено сверху.

Тогда существует элемент $x_* \in M$, $x_* > x_0$, такой, что $Ax_* = 0$.

Теорема 2. Пусть

1) конус $K_x \subset X$ h-экстремален и h-счетного типа;

2) оператор $A: M \subset X \to Y$ отрицательно K_x-идет на (0)-замкнутом множестве $M \subset X$;

3) выполняются условия 3)-5) теоремы 1.

Тогда существует элемент $x_* \in M$, $x_* > x_0$, такой, что $Ax_* = 0$.

О ПОЛНОТЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ОПЕРЕЖДАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Бекларян Л. А. (Москва)

Исследуется скалярное уравнение

$$Ax = x(t) - \sum_{i=1}^{s} a_i x(t+h_i) = 0, \qquad (1)$$

где $t \in R$, $h_i \in R$; $h_{i+1} > h_i$, $i=\overline{1,s}$.

Определим множество функций на R

$M_0 = \{e^{pt}: Ae^{pt}=0\}$, $M_j = \{t^j e^{pt}: t^{j-1}e^{pt} \in M_{j-1}; At^j e^{pt}=0\}$, $j=1,2,\ldots$,

$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$; $\hat{M}$ - линейная оболочка M.

Обозначим через $\bar{B}$ отрезок $(a + \min(h_1,0),\ b + \max(h_s,0))$, если $B=(a,\ b)$; полупрямую $(a + \min(h_1,0),\ +\infty)$, если $B=(a,\ +\infty)$; прямую R, если $B = R$.

Теорема. Пусть абсолютно непрерывноя функция $x(t)$, определенная на $\bar{B}$, для почти всех $t \in B$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда функция $x(t)$ на $\bar{B}$ принадлежит замыканию $\hat{M}$ в $L_2^{loc}(\bar{B})$ (топология в $L_2^{loc}(\bar{B})$ задается системой полунорм $\|f\|_K = \int_K |f|dt$, где $k \subset \bar{B}$ произвольный компакт).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований N 94-01-01513-а.

Литература

1. Бекларян Л.А. К теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. //Ж. Успехи математических наук, т.49, N 6, 1994.

ОБ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОДНОЗНАЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Берёзкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. (Гродно)

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(x' - x^2)x'' = a_0 x''^2 + a_1 xx'x'' + a_2 x^3 x'' + a_3 x'^3 + a_4 x^2 x'^2 + \\ + a_5 x^4 x' + a_6 x^6 + a_7 x'^2 x''/x + a_8 x'^4/x^2. \qquad (1)$$

Найдем условия, при которых решения уравнения (1) однозначны. Уравнение (1) заменим системой

$$x' = x^2 u, \quad (u-1)u'' - a_0 u'^2 + p(u)xu' + g(u)x^2 = 0, \qquad (2)$$

где

$$p(u) = (6-4a_0-a_7)u^2-(a_1+6)u-a_2,$$

$$g(u) = (6-4a_0-2a_7-a_8)u^4 - (2a_1+a_3+6)u^3 - (2a_2+a_4)u^2 - a_5 u - a_6.$$

Лемма 1. Для однозначности решений системы (2) необходимо, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

$$p(1) = 0, \quad g(1) = 0; \qquad (3)$$

$$a_0 = 1, \quad g(1) = 0, \quad p(1)(p'(1)+1) + g'(1) = 0. \qquad (4)$$

При условии (3) уравнение (1) изучено в [1].

Пусть имеет место (4).

Лемма 2. Для однозначности решений уравнения (1) необходимо, чтобы

$a_7 = 1 + (\mu-1)/n, \quad a_8 = (1/n-1)(1+\mu/n), \quad \mu=0,1, \quad n$ - целое или ∞, $n\neq 0$.

Обозначим $A = 2-2a_7-a_8$, $B = 2-a_7$, $M_k = 1 + p(\lambda_k)/\lambda_k(\lambda_k-1)$, $N_k = g'(\lambda_k)/\lambda_k^2(\lambda_k-1)$, $k = \overline{1,m}$, где $\lambda_k \neq 0, 1$, λ_k - корни многочлена $g(u)$, m - число этих корней.

Лемма 3. Для однозначности решений системы (2) необходимо, чтобы корни уравнения

$$r^2 - M_k r + N_k = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

были целыми, различными, неравными 0. При этом должны быть выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{N_k} = \frac{1}{A}, \quad m = \overline{1,3}, \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k}{N_k} = \frac{B+1}{A} - \frac{p(1)}{g'(1)}, \quad m = 2,3,$$

$AN_1N_2N_3 = -l^2$, l - натуральное число. Если $A = 0$, то необходимо $g(u) \equiv 0$.

Далее доказывается достаточность приведенных условий.

Литература

1. Мартынов И.П. //Дифференциальные уравнения, 1985, т.21, N 6, с. 937 - 946.

NUMBER OF SITES VISITED BY N LEVY PARTICLES IN 1D LATTICE

Berkolaiko G. (Voronezh), Havlin S. (Ramat-Gan),
Larralde H. (Cambrige), Weiss G. (Bethesda)

Consider N particles initially at the origin on a 1-dimentional lattice. Each particle can make at each time step a Levy flight, i.e., an l-length jump with probability $p(l) \propto l^{-(1+\alpha)}$. We study the mean number of distinct sites, $\langle S(N,t) \rangle$, visited by these particles after t steps. We present asymptotic results for $\langle S(N,t) \rangle$ for $N \to \infty$ and for $t \to \infty$ separately.

For $\alpha<2$ the probability to be at the lattice site r at the step t can be approximated by the stable law $p_t(r) \propto t|r|^{-(1+\alpha)}$. For $\alpha>2$ we approximate the probability distribution to be at site r at the step t by the Gaussian law: $p_t(r) \propto t^{-1/2}\exp(-r^2/t\sigma^2)$. However, this form is valid for small r only, while for large r the best approximation has the stable law form: $p_t(r) \propto t|r|^{-(1+\alpha)}$, similar to the case $\alpha<2$. Therefore, if the number of particles is large we can consider the stable law as the distribution law on the most important for our consideration part of lattice.

Under this assumption we obtained the following results, as $N \to \infty$

$$\langle S(N,t)\rangle \propto N^{1/(1+\alpha)} t^{1/\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

On the other hand, for $t \to \infty$ the function $S(N,t)$ is mainly affected by the Gaussian distribution and one gets [1]:

$$\langle S(N,t)\rangle \propto \sqrt{t \ln N}, \qquad \alpha > 2.$$

Thus, we have two different regimes for the function $\langle S(N,t)\rangle$. We have also obtained some estimations for the step number t and the number of particles N for crossover between different regimes to occur.

For other values of α we have following results:

$$\langle S(N,t)\rangle \propto N^{1/(1+\alpha)} t^{1/\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2, \quad \text{for } N,\ t \to \infty,$$

$$\langle S(N,t)\rangle \propto N^{1/(1+\alpha)} t^{2/(1+\alpha)}, \quad \alpha < 1, \quad \text{for } t \text{ fixed},\ N \to \infty.$$

The above results are supported by extensive computer simulations.

References

1. Larralde H., Trunfio P., Havlin S., Stanley H.E., Weiss G.H. Number of distinct sites visited by N random walkers.// Phys. Rev. A 45 (1992), no.10, 7128-7138.

О КОРРЕКТНОСТИ И УСРЕДНЕНИИ В СИСТЕМАХ С ОБЫКНОВЕННЫМИ И ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Бигун Я.И. (Черновцы)

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием, встречающаяся в системах автоматического регулирования, инерциальной навигации и др., вида

$$\frac{dv}{dt} = g(t, u(t), u(t-\sigma), v(t), v(t-\Delta)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x, u, u_\sigma, v, v_\Delta).$$

Здесь $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_n)$, $v = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_n)$, $\sigma(t)$ и $\Delta(t)$ - ограниченные функции при $t>0$, $v_\Delta = v(t-\Delta)$; $g(t, u, u_\sigma, v, v_\Delta)$ - функционал аргументов u, u по переменной x. Элементы диагональной матрицы $D(t,x)$ - действительные и различные функции.

В работе получены следующие результаты:

1. Установлены условия существования и единственности обобщенного решения системы (1) с кусочно непрерывными начальными функциями, заданными при $t\leqslant 0$, в области $0\leqslant t\leqslant T$ и ограниченной характеристиками, выходящими из точек $(0,a)$, $(0,b)$.

2. В случае зависимости f и g от параметра λ, по которому они интегрально непрерывны в точке $\lambda\in\Lambda$, являющейся граничной для Λ, доказана непрерывная зависимость от параметра в точке $\lambda=\lambda_0$.

3. Дано обоснование метода усреднения по времени t на промежутке $[0,\ L/\varepsilon]$ для системы вида (1), в которой $f=\varepsilon f_1(t,x,u,u_\sigma,v,v_\Delta)$, $g=\varepsilon g_1(t,x,u,u_\sigma,v,v_\Delta)$, $D=\varepsilon D_1(\tau,x)$, $\tau=\varepsilon t$, $\varepsilon>0$ - малый параметр.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Биркин А.Д. (Новосибирск)

В последнее время для численного расчета стационарных газодинамических течений с успехом используется метод установления. При этом стационарное решение ищется как предел при $x\to\infty$ решения нестационарной задачи. Поэтому с точки зрения обоснования метода установления возникает необходимость исследования нестационарной задачи на исходном, дифференциальном уровне.

На сегодня известен ряд результатов о существовании локально по времени классических решений нестационарных газодинамических задач с краевыми условиями на ударной волне и твердой стенке и об исследовании устойчивости предельного стационарного решения в линейной постановке. Оказывается, что в ряде случаев подобные результаты можно перенести на квазилинейный уровень.

Рассмотрены два газодинамических примера (в одномерном случае): задача о плоском поршне и задача об обтекании кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки и получен, такой результат: находясь в условиях локальной теоремы о существовании классического решения указанных задач, можно продолжить решение гладким образом на весь бесконечный интервал времени; показано также, что при $t\to\infty$ решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим течения газа.

О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Блатова В. В. (Воронеж)

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L_\varepsilon x \equiv \varepsilon x' - A(t)x = f(t), \quad x=(x^1,\dots,x^n)^T \in R^n, \quad 0<\varepsilon\ll 1, \tag{1}$$

$$x^1(-1)=x^2(-1)=\dots=x^k(-1)=x^{k+1}(1)=\dots=x^n(1)=0. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$, $f(t)$ - достаточно гладкие матричная и векторная функции. Предположим, что для собственных значений матрицы $A(t)$ при любом $t\in[-1,1]$ выполнены неравенства

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_k(t) < 0 < \lambda_{k+1}(t) < \dots < \lambda_n(t).$$

Пусть $B^{-1}AB = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_n(t))$, $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, где B_{11} - $(k\times k)$-матрица, причем

$$\det B_{11}(-1)\cdot\det B_{12}(-1)\cdot\det B_{21}(-1)\cdot\det B_{22}(-1) \neq 0.$$

В сделанных предположениях задача (1)-(2) имеет при достаточно малых $\varepsilon>0$ единственное решение с двумя экспоненциальными погранслоями. Обозначим это решение $x_\varepsilon(t)$.

Пусть m - натуральное число, Δ: $-1=t_{-m}<t_{-m+1}<\dots<t_m=1$ равномерное с шагом $h=1/m$ разбиение отрезка $[-1,1]$. Обозначим через $S(\Delta,2,1)$ пространство параболических сплайнов дефекта 1 на сетке Δ. Пусть

$$E(\varepsilon,m) = \{U = s(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i(-1)\exp(\lambda_i(-1)(-t-1)/\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i(1)\exp(\lambda_i(1)(t-1)/\varepsilon), \quad s(t)\in S(\Delta,2,1), \quad \alpha_i \in R^n,$$

$u^1(-1)=u^2(-1)=\dots=u^k(-1)=u^{k+1}(1)=\dots=u^n(1)=0\}$ - пробное галеркинское пространство, $F(\varepsilon,m)=L_\varepsilon E(\varepsilon,m)$ - тестовое галеркинское пространство.

Метод Галеркина решения задачи (1) состоит в отыскании такого $x_\varepsilon(t)\in E(\varepsilon,m)$, что для любого $y_m(t)\in F(\varepsilon,m)$

$$(L_\varepsilon x_m,\ y_m) = (f,\ y_m), \tag{3}$$

где $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в $(L_2[-1,1])^n$.

Теорема. Найдутся такие числа $c>0$, $\varepsilon_0>0$, m - натуральное, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $m\geq m_0$ задача (3) имеет единственное решение $x_m(t)$, и справедливы оценки

$$\|x_m - x_\varepsilon\|_{C[-1,1]} \leqslant C(\varepsilon+h^2).$$

INVESTIGATION AND SOLUTION OF THE PAIR OF OPERATOR EQUATIONS

Blyumin S.L., Milovidov S.P. (Lipetsk)

Let R be an associative operator ring.

Definition [1]. The operator $A \in R$ is called von Neumann regular if an operator $A^{-} \in R$ exists such that $AA^{-}A = A$.

Theorem. The pair of two-sided operator equations [2]

$$A_i \times B_i = C_i, \quad i = 1,2,$$

on the assumption that individual solvability conditions [3]

$$A_i A_i^{-} C_i B_i^{-} B_i = C_i, \quad i=1,2,$$

are fullfiled for each equation and operators A_i, B_i, $i=1,2$, $K = A_2 - A_2 A_1^{-} A_1$, $L = B_2 - B_1 B_1^{-} B_2$ are regular, is compatible iff the following condition is satisfied:

$$Q - KK^{-}Q - QL^{-}L + KK^{-}QL^{-}L = 0,$$

$Q = C_2 - A_2 A_1^{-} C_1 B_1^{-} B_2$.

The general solution of the compatible pair is the set of operators

$$X = A_1^{-} C_1 B_1^{-} + (K^{-} - A_1^{-} A_1 K^{-})QB_2^{-} + A_2^{-}Q(L^{-} - L^{-} B_1 B_1^{-}) - (K^{-} - A_1^{-} A_1 K^{-})\times$$
$$\times Q(L^{-} - L^{-} B_1 B_1^{-}) + W - A_1^{-} A_1 W B_1 B_1^{-} - (K^{-} - A_1^{-} A_1 K^{-})KWB_2 B_2^{-} - A_2^{-} A_2 WL(L^{-} -$$
$$- L^{-} B_1 B_1^{-}) + (K^{-} - A_1^{-} A_1 K^{-})KWL(L^{-} - L^{-} B_1 B_1^{-}) - (K^{-} - A_1^{-} A_1 K\ )A_2 A_1^{-} A_1 WLB_2^{-} -$$
$$- A_2^{-} KWB_1 B_1^{-} B_2 (L^{-} - L^{-} B_1 B_1^{-}) + (K^{-} - A_1^{-} A_1 K^{-})(A_2 A_1^{-} A_1 WL + KWB_1 B_1^{-} B_2)(L^{-} -$$
$$- L^{-} B_1 B_1^{-}),$$

where $W \in R$ is any operator.

References

1. Neumann J.von. On regular rings.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1936, vol.22, 707-713.

2. Mitra S. A pair of simaltaneous matrix equations.//Lin. Alg. &

Appl., 1990, vol.131, 107-123.
3. Blyumin S.L., Milovidov S.P. Investigation and solution of matrix equations over associative rings.//Comp. Maths & Math. Phys., 1994, vol.34, N 2, 133-142.

NIELSEN NUMBER IN NONLINEAR PROBLEMS

Borisovich A.Yu., Kucharski Z., Marzantowicz W. (Gdansk)

Topological characteristics such as Leray index, Leray-Schauder degree, Lefschetz number, Krasnoselskii vector field rotation and others are used traditionally in mathematical physics in order to prove the existence of solutions to nonlinear equation. In this work we use Nielsen numbers which allows us to solve an existence problem and to receive the lower estimate of solutions number under the defined topological conditions.

In a finite-dimentional case for a map from a compact topological space X into itself the topological characteristic, Nielsen number was introduced and investigated in 20-th years by J.Nielsen ([1],[2]) and by F.Wecken [3] under the condition that the fundamental group of the space X is nontrivial $\pi_1(X)\neq 0$. After that it was modified and showed its power in applications (see the survey by B.Jiang [4] for example). In the 70-th the Nielsen number theory was constructed for maps in noncompact spaces as well (see e.g. K.Scholz [5]). In 1990 some generalization of the Nielsen Number was given also by R.Dobrenko and Z.Kucharski [6]. But there are still few applications to differential and integral equations of mathematical physics. We know two works by R.Brown [7] and one more recent by M.Fečkan [8].

This work contains some applications of Nielsen Theory to nonlinear integral equations, dynamical systems and oder differential equations. We use the a priori estimations and the function cones like in the M.A.Krasnoselskii book [9].

References

1. Nielsen J. Uber die Minimalzahl der Fixpunkte bei Abbildungstypen der Ringflachen.// Math. Ann., 82 (1921),83-93.
2. Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweise-

itigen Flachen (Parts 1,2,3). // Acta Math. 50,53,58 (1927, 1929, 1932), 189-358, 1-76, 87-167.
3. Wecken F. Fixpunktklassen (Parts 1,2,3).//Math. Ann. 117,118 (1941,1942), 659-671,216-234,544-577.
4. Jiang B.J. Lectures on Nielsen fixed point theory.//Contemporary Mathematics, 14(1983).
5. Scholz K. The Nielsen fixed point theory for non-compact spaces. // Rocky Mountain J. Math. 4(1974), 81-87.
6. Dobrenko R., Kucharski Z. On the generalization of the Nielsen Numbers.// Fundamenta Mathematica 134(1990), 1-14.
7. Brown R. Nielsen fixed point theory and parametrized differential equations.// Contemporary Mathematics 72 (1988),33-46.
8. Feckan M. Nielsen fixed point theory and nonlinear equations.// J. Differential Equations 106(1993),312-331.
9. Borisovich A., Kucharski Z., Marzantowicz W. Nielsen number as the lower estimate for the number of solutions of a certain system of nonlinear integral equations.//Applied Aspects of Global Analysis New Development in Global Analysis series, Voronezh University Press, 1994,3-11.
10. Krasnoselskii M.A. Nonlinear integral operators, 1960.

ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Борисович Ю.Г. (Воронеж)

Рассматривается следующая динамическая система с управляющей функцией $u(t)$:

$$g(x(t),\dot{x}(t)) = f(t,u(t),x(\alpha(t)),\dot{x}(\beta(t))),\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1}$$

и векторной функциональной связью

$$l(u(\cdot),x(\cdot),\dot{x}(\cdot)) = 0. \tag{2}$$

Здесь искомая пара $(u(t),x(t))\in U^d\times AC([0,1],R^n)$, где $U^d\in L^\infty([0,1],R^m)$ - конечномерное подпространство размерности d, l: $(L^\infty)^m\times(AC)^n\times(L^1)^n \to R^k$ - ограниченное и вполне непрерывное отображение, f удовлетворяет условиям Каратеодори, условию Липшица по переменному $\dot{x}$ с константой $c<1/2$, g - с произвольной (по $\dot{x}$). Сдвиги аргумента $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат классу $C^0[0,1]$, $0<\alpha(t)$, $\beta(t)\leqslant t\leqslant 1$, β_- - монотонная функция. Проблема разрешимости сводится к операторному уравнению

$$A(u,x) = G(u,x), \tag{3}$$

где

$$A,G:\ (L^\infty)^m\times(AC)^n \to (L^1)^n\times R^k,$$

$$A(u,x)=(g(x(t),\dot{x}(t)),0),$$

$$G(u,x)=(f(t,u(t),x(\alpha(t)),\dot{x}(\beta(t))),l(u,x,\dot{x})).$$

При $d \geqslant k-n$ устанавливается (при дополнительных условиях) фредгольмовость, собственность оператора A с индексом $q=d+n-k \geqslant 0$ и A-уплотняемость оператора G на ограниченной области $\Omega \subset U^d \times (AC)^n$. Определяется и вычисляется топологический индекс пересечения $\gamma(A,G)$ из класса бордизмов F^q Элворти-Тромба. Условие $\gamma\neq 0$ (нулевому классу $\tilde{F}^q$) приводит к достаточным условиям существования решения $(u,x) \in \Omega$ уравнения (3), т.е. решения $(u(t),x(t))$ системы (1)-(2). В ситуации "общего положения" и гладкости операторов A, G при $\gamma\neq 0$ имеется многообразие M^q решений. Развит принцип конечномерной редукции для вычисления $\gamma(A,G)$. Рассмотрен случай наличия симметрии в системе (1)-(2).

Работа выполнена при поддержке фондов РФФИ (грант N 94-01-00413) и ISF (Сорос) (грант N RJ 2000).

Литература

1. Borisovich Yu.G. Topological Characteristics in Non-linear Problems of Geometry, Optimization and Mathematical Physics.// Applied Aspects of Global Analysis.- Voronezh Univ. Press,1994, pp.11-30.
2. Borisovich Yu.G. Global Analysis and the Solvability of Nonlinear Controllable Systems.//Methods and Applications of Global Analysis. - Voronezh University Press, 1993, pp. 28-38.

О СТАТИСТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Брук В.М., Коломоец А.А. (Саратов)

Стохастическая система уравнений Кармана, которую удобно использовать для определения наиболее вероятной формы равновесия пластинки, защемленной по контуру, может быть записана в виде дифференциально-операторного уравнения в пространстве $L_2(H;0,T)$ $(T<\infty)$ с левой частью $Mu = u'' + Au + AB(u,B(u,u))$, где A – самосопряженный оператор в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H, $A \geqslant \gamma E$ $(\gamma>0$, E – тождественный оператор), A^{-1} вполне непрерывен, B: $H_{1/2}\times H_{1/2} \to H_{1/2}$ – билинейный непрерывный оператор, форма $(B(u,v),w)_{H_{1/2}}$ не зависит от порядка аргументов u, v, $w \in H_{1/2}$ ($H_\alpha(-\infty<\alpha<\infty)$ – гильбертова шкала, порожденная A).

Пусть F, μ – независимые вероятностные меры на $\mathfrak{B}(L_2(H;0,T))$ и $\mathfrak{B}(H_{1/2}\times H)$ соответственно ($\mathfrak{B}(\Omega)$ – борелевская б-алгебра на Ω), причем

$$\int_{L_2(H;0,T)} \|f\|^2_{L_2(H;0,T)} dF(f) < \infty, \quad \int_{H_{1/2}\times H} \|h\|^2_{H_{1/2}\times H} d\mu(h) < \infty.$$

Через Z, L обозначаются пространства $Z = L_2(H_j;0,T) \cap C^1(H_{-1/2};0,T)$, $(j<1/2)$, $L=\{u\colon\ u \in L_2(H_{1/2};0,T),\ u'' \in L_2(H_{-1/2};0,T)\}$ с нормами

$$\|u\|_Z = \|u\|_{L_2(H_j;0,T)} + \|u\|_{C^1(H_{-\frac{1}{2}};0,T)},$$

$$\|u\|_L = \|u\|_{L_2(H_{1/2};0,T)} + \|u''\|_{L_2(H_{-1/2};0,T)}.$$

Теорема. Существует вероятностная мера P на (z) со свойствами: 1) $P(L)=1$; 2) $P(M^{-1}\omega_1)=F(\omega_1)$, $P(\gamma_0^{-1}\omega_2)=\mu(\omega_2)$ для всех $\omega_1 \in \mathfrak{B}(L_2(H;0,T))$, $\omega_2 \in \mathfrak{B}(H_{1/2}\times H)$, где $\gamma_0 u = \{u(0),u'(0)\}$, $u \in Z$;

3) $\int_Z [\|u\|_L + \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|^2_{H_{1/2}} + \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|u'(t)\|^2_H] dP(u) < c.$

По аналогии с [1] меру P можно назвать статистическим решением для уравнения с левой частью Mu, соответствующим правой части F и начальной мере μ. Отметим, что уравнения Кармана с "белым шумом" в правой части рассматривались в [2].

Литература

1. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. – М.: Наука, 1980.

2. Чуешов И.Д.// Матем. сборник, 1983, т.122, N 3, 291-312.

ON THE TRIVIAL SOLUTION OF VOLTERRA HOMOGENEOUS INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

Bulatov M.V. (Irkutsk)

Consider the system

$$\int_0^t K(t-s)x(s)ds = 0, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$K(t-s)$ be the real analitic $(n{\times}n)$-matrix,

$$\det K(0) = 0.$$

We denote by

$$A_i = K^i(0), \quad i=0,1,\dots,r.$$

Theorem. Let for for some r the condition

$$\deg \det\Big(\sum_{j=0}^{r} \lambda^j A_{r-j}\Big) = r\cdot \operatorname{rank} A_0$$

is satisfied. Therefore (1) has only the trivial solution.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЛЕБАТЕЛЬНО УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Бурд В.Ш., Каракулин В.А. (Ярославль)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0x + \Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j(t)\Big)x + \frac{1}{t^{1+\delta}} F(t)x, \tag{1}$$

где A_0 – постоянная квадратная матрица порядка n, $A_j(t)$ ($j = 1,\dots,k$) и $F(t)$ – квадратные матрицы порядка n, элементами которых являются тригонометрические многочлены с произвольным набором частот, $0 < k\alpha \leqslant 1$, $\delta > 0$.

Ставится задача об асимптотике решений системы (1) при $t \to +\infty$. С помощью обратимой при достаточно больших t замены переменных система (1) преобразуется в более простую систему

$$\frac{dy}{dt} = A_0y + \Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^{j\alpha}} B_j(t)\Big)y + \frac{1}{t^{1+\delta_1}}F_1(t)y, \tag{2}$$

где B_j ($j=1,\dots,k$) – постоянные матрицы, $\delta_1>0$, а матрица $F_1(t)$ обладает теми же свойствами, что и матрица $F(t)$. Асимптотика решений системы (2) может быть получена с помощью метода L-диагонализации. В ряде важных случаев система

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{B_j}{t^{j\alpha}} \right) x$$

оказывается интегрируемой.

В качестве примера рассматривается адиабатический осциллятор

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + \frac{\sin \lambda t}{t^{\alpha}}\right) x = 0, \qquad (3)$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, λ - вещественный параметр. Уравнение (3) исследовалось во многих работах. Была получена асимптотика решений уравнения (3) при $\alpha \geqslant 1/2$. Предлагаемый метод дает возможность построить асимптотику решений уравнения (3) при $\alpha < 1/2$ и определить все точки параметрического резонанса уравнения (3).

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

Бут Н.Л., Ризун В.И., Сухинин В.В. (Алчевск)

Известно [1-3], что успешное решение краевых задач математической физики во многом зависит от метода, позволяющего эффективно находить решение соответствующего дифференциального уравнения. Кроме того, найденное решение ММВФ должно удовлетворять заданным краевым условиям.

В настоящей работе предлагается новый подход к решению краевых задач математической физики, основанный на ММВФ [4,5]. Сущность этого подхода заключается в нахождении решения исходного дифференциального уравнения с ускоренной скоростью сходимости. Это достигается при помощи построенной новой системы функций. В состав этой системы функций входят вспомогательные параметры, выбор которых обусловлен удовлетворением найденного решения соответствующим краевым условиям. Предложенный вариант ММВФ иллюстрируется на конкретных примерах, в которых дифференциальные уравнения могут иметь в качестве коэффициентов разрывные, но суммируемые функции в пространстве Гильберта.

Литература

1. Гахов Ф.Л. Краевые задачи. - М.: Физматгиз, 1963. - 639 с.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. - М.: Наука, 1989. - 334 с.
3. Беллман Р., Калата Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. - М.: Мир, 1968. - 183 с.
4. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных объектов. - Киев: ИСИО, 1994. - 409 с.
5. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Бырдин А.П., Борисович О.Ю. (Воронеж)

В докладе рассматривается обобщение задачи, возникающей при изучении динамических процессов в нелинейной наследственной механике сплошной среды. Математическая модель такой задачи описывается уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(u) = 0, \tag{1}$$

где A - нелинейный оператор, представимый в подобных задачах интегральным рядом Вольтерра, либо аппроксимируемый полиномом Вольтерровских интегралов. В данной работе предполагается, что оператор A в уравнении (1) является нелинейным аналитическим по Фреше оператором A: $U \to U$, $a(0) = 0$, где U - некоторая открытая область банахова пространства E:

$$A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(u, \dots, u), \tag{2}$$

где $\tilde{A}_n$ (n=1,2...) - ограниченный степенной оператор, A_n - соответствующий ему полилинейный симметрический оператор, а ряд (2) регулярно сходится.

Выделен класс операторов A, для которых показано, что если существует такой оператор $B: U \to U$, $B(u,\cdot)\circ B(u,v) = A'(u,v)$, где операторы линейны по второму аргументу, A' - производная Фреше, то функция u будет являться решением уравнения (1), если является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - B\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Для оператора A, представимого операторным многочленом, показано, что B является аналитическим по Фреше оператором

$$B(u) = \sum_{k-1}^{\infty} B_k(u), \tag{3}$$

где члены операторного ряда определяются уравнениями

$$A_1'(u) = B_1^2(u), \quad A_n'(u) = \sum_{m-1}^{n} \sum_{l_1+\ldots+l_m=n} \widetilde{B}_m(B_{l_1}(u), \ldots, B_{l_m}(u)).$$

Получены оценки регулярной сходимости ряда (3) в случаях, когда $\|B_1\| < 1$, либо $\|B_1^{-1}\| < 1$.

STOCHASTIC LYAPUNOV FUNCTIONS CONSTRUCTION

Valeev K.G., Arutina O.L. (Kiev)

It is investigating the stability of the zero solution of the system of nonlinear differential equations

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t), \zeta(t)), \qquad F(t, 0, \zeta) \equiv 0, \tag{1}$$

where $\zeta(t)$ is semi-marcovian random process taking finite number of states $\theta_1, \ldots, \theta_n$ with intensities q_{ks} of jump from state θ_s into state θ_k.

If t_j ($j=0,1,2,\ldots$; $t_0=0$) are sequential jumps of random process $\zeta(t)$, then with $t_j \leqslant t < t_{j+1}$, $\zeta(t) = \theta_s$ it is supposed

$$F(t, X(t), \zeta(t)) \equiv F_s(t-t_j, X(t)).$$

It is assumed that the system of differential equations

$$\frac{dX(t)}{dt} = F_s(t, X(t)) \quad (s=1,\ldots,n)$$

has a solution in Cauchy form $X(t) = N_s(t, X(0))$ $(s=1,\ldots,n)$.

Stochastic Lyapunov functions defining stability of solutions of system (1)

$$v_s(X) = \int_0^\infty \langle w(t,X(t),\zeta(t)) \mid X(0)=X, \zeta(0)=\theta_s \rangle dt \quad (s=1,\dots,n), \qquad (2)$$

are introduced.

The system of functional equations

$$v_s(X) = \int_0^\infty \phi_s(t) w_s(t,N(t,X))dt + \sum_{l=1}^{n} \int_0^\infty q_{ls}(t) v_l(N_s(t,X))dt,$$

$$\phi_s(t) = \int_t^\infty \sum_{k=1}^{n} q_{ks}(t)dt \quad (s=1,\dots,n) \qquad (3)$$

for functions $v_s(X)$ $(s=1,\dots,n)$ was obtained. Properties of monotone positive operators were used to construct and find existense and uniqueness conditions for functions $v_s(X)$ $(s=1,\dots,n)$ and to develop numeric-analitical methods for investigation of stability of the solution of the system (1).

О МЕТОДЕ ВОЛНОВОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Васильев В. Б. (Новгород)

Пусть $A(\xi)$, $\xi \in R^m$, - символ псевдодифференциального оператора A, удовлетворяющий условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2,$$

где c_1, c_2 - положительные постоянные.

Обозначим

$$C_+^a = \{x \in R^m:\ x_m > a|x'|,\ x'=(x_1,\dots,x_{m-1}),\ a>0\}, \quad \overset{*}{C}{}_+^a = \{x \in R^m,\ ax_m > |x'|\}.$$

Под волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно C_+^a понимается его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

где сомножитель $A_{\neq}(\xi)$ должен обладать следующими свойствами: $A_{\neq}(\xi)$ определен, вообще говоря, лишь на множестве $R^m \setminus \{x \in R^m:\ a^2 x_m^2 = |x'|^2\}$; $A_{\neq}(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в трубчатую область чатую область $T(\overset{*}{C}{}_+^a) = R^m + i\overset{*}{C}{}_+^a$ над конусом $\overset{*}{C}{}_+^a$, причем это продолжение удовлетворяет оценке

$$|A_{+}^{\pm 1}(\xi+i\tau)| \leqslant c(1+|\xi|+|\tau|)^{\pm ϰ}, \qquad \forall\, \tau \in \overset{*}{C}{}_{+}^{a}.$$

Аналогичными свойствами должен обладать сомножитель $A_{-}(\xi)$ (с заменой конуса $\overset{*}{C}{}_{+}^{a}$ на $-\overset{*}{C}{}_{+}^{a}$ и $\pm ϰ$ на $\pm(\alpha-ϰ)$). Число $ϰ$ называется индексом волновой факторизации.

Волновая факторизация символа позволяет получить полную картину разрешимости псевдодифференциального уравнения

$$PAu = f$$

в шкале пространств H^s Соболева-Солодецкого, где P - оператор сужения на C_{+}^{a}, f задана в C_{+}^{a}, решение u ищется в классе $H^s(C_{+}^{a})$.

Класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно богат. Несмотря на отсутствие в общем случае явной конструкции волновой факторизации, можно указать алгоритм, как "подправить" произвольный эллиптический символ, однородный степени α и бесконечно дифференцируемый в $R^m\setminus\{0\}$, чтобы получить символ, допускающий волновую факторизацию.

Наконец, отметим, что метод волновой факторизации - это не что иное, как многомерное обобщение хорошо известного метода Винера - Хопфа.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Вельмисов П.А. (Ульяновск)

Исследуется динамическая и квазистатическая устойчивость вязкоупругих стареющих тел (стержней, пластин, оболочек), находящихся во взаимодействии с потоком идеального газа, при различных режимах обтекания (дозвуковом, трансзвуковом, сверхзвуковом). Решение задач основано на построении "смешанных" функционалов типа Ляпунова для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. В качестве примера приведем постановку задачи о движении газа в канале с деформируемыми стенками

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + (V^2-a^2)\varphi_{xx} + (\gamma+1)V\varphi_x\varphi_{xx} - a^2\varphi_{xx} = 0, \quad (x,y) \in s,$$

$$L_1(w_1) + \rho(\varphi_t+V\varphi_x)_{y=0}, \quad L_2(w_2) = -\rho(\varphi_t+V\varphi_x)_{y=y}, \quad x \in (0,x_0),$$

$$\varphi_y(x,0,t) = \dot{w}_1+Vw_1', \quad \varphi_y(x,y_0,t) = \dot{w}_2+Vw_2', \quad x \in (0,x_0),$$

$$L_k(w_k) = M_k\ddot{w}_k(x,t) + \{D_k[w_k''(x,t)-\int_0^t Q_k(x,\tau,t)w_k''(x,\tau)d\tau] + \varepsilon_k\dot{w}_k''(x,t)\}''+$$

$$+ [P_k w_k'(x,t)]' + \beta_k[w_k(x,t) - \int_0^t V_k(x,\tau,t)w_k(x,\tau)d\tau] -$$

$$- [\ {}_k w_k'(x,t)]' + \gamma_k\dot{w}_k(x,t) + g_k(x,t,w_k,\dot{w}_k), \quad k = 1,2.$$

Здесь x, y - декартовы координаты; t - время; $\varphi(x,y,t)$, $w_k(x,t)$ - искомые функции; $\gamma, V, a, \rho, x_0, y_0$ - постоянные; $M_k, D_k, \varepsilon_k, P_k, \beta_k, \ {}_k, \gamma_k$ - заданные функции переменных x, t; $g_k(x,t,w,\dot{w})$ - нелинейные составляющие реакций оснований; $s = \{(x,y): 0<x<x_0, \ 0<y<y_0\}$; индексы x, y, t обозначают частные производные; штрих и точка обозначают частные производные по x и t соответственно. Граничные условия при $x = 0$, $x = x_0$ и начальные условия при $t = 0$ устанавливаются в процессе решения задачи.

В качестве примера задачи на исследование квазистатической устойчивости может быть также приведена указанная выше задача. В этом случае следует опустить все производные по t, предполагая в то же время, что все искомые и заданные функции зависят от t, а в выражениях $L_k(w_k)$ присутствуют интегральные члены.

ON AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING OF QUASI-LINEAR PARABOLIC SECOND ORDER EQUATIONS

Vikhtenko E.M., Zarubin A.G. (Khabarovsk)

Let us consider the problem

$$\frac{\partial u}{dt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$$+ a(x,t,u,\nabla u)u = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \psi_0(x) \ (x\in\Omega), \quad u(x,t) = \psi_1(x,t), \ (x,t)\in S, \qquad (2)$$

where Ω is a bounded domain in R^n, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $T < \infty$, $S=\partial\Omega\times[0,T]$, $\partial\Omega$

is a suffitiantly regular boundary.

We investigate such iteration process for solving the problem (1)-(2)

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u^{k+1}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t,u^k,\nabla u^k) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x_i} +$$

$$+ a(x,t,u^k,\nabla u^k) u^{k+1} = f(x,t), \qquad (3)$$

$$u^k(x,0) = \phi_0(x) \ (x \in \Omega), \ u^k(x,t) = \phi_1(x,t), \ (x,t) \in S, \ k=0,1,\ldots \qquad (4)$$

and Rothe method

$$\frac{v^{k+1} - v^k}{\tau} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v^{k+1}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t,v^k,\nabla v^k) \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x_i} +$$

$$+ a(x,t,v^k,\nabla v^k) v^{k+1} = f(x,t_{k+1}), \qquad (5)$$

$$v^0(x) = \phi_0(x), \quad v^k(x) = \phi_1(x,t_k) \quad (x \in \partial\Omega). \qquad (6)$$

Under specific conditions for $f(x,t)$ and for nonlinear rate of grouwth of $a(x,t,u,\nabla u)$, $a_i(x,t,u,\nabla u)$ convergence theorems for methods (3)-(4) and (5)-(6) are proved and convergence rate estimates are established.

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В ГИСТЕРЕЗИСНЫХ СИСТЕМАХ

Владимиров И.Г., Черноруцкий В.В. (Москва)

Рассматривается система автоматического управления с двумерным люфтом в контуре обратной связи:

$$\dot{x} = Ax + By, \qquad z = Cx, \qquad (1)$$

$$\dot{y} = \left((V_Z(z-y))^T \dot{z}\right)^+ V_Z(z-y), \qquad (2)$$

где $A, B, C \in R^{2\times2}$ - постоянные матрицы; $V_Z(\zeta)$ - единичная внешняя нормаль к выпуклому компакту $Z \subset R^2$ для граничной точки $\zeta \in \partial Z$ и нулевой вектор для внутренней точки $\zeta \in \mathrm{int} Z$; $(\cdot)^+$ - неотрицательная срезка числа. Начальные условия должны удовлетворять соотношению $y(0) - Cx(0) \in Z$.

В вырожденном случае, когда Z состоит из нулевой точки, уравнения (1)-(2) описывают линейную систему, которая асимптотически устойчива, если $A + BC$ - гурвицева матрица. В общем случае, последнее условие достаточно лишь для диссипативности нелинейной системы (1)-(2).

Если при этом матрица A антигурвицева, то можно указать условие, обеспечивающее неустойчивость множества положений равновесия рассматриваемой системы, при выполнении которого происходит "самовозбуждение" колебаний. Условие состоит в том, что при любом $N \in R^2$, $|N| = 1$, спектр матрицы $A + BNN^TC$ не пересекается с некоторым конусом на комплексной плоскости, строящимся по спектру матрицы A.

Так, например, если Z - единичный шар, $-B = C = I$ (I - единичная матрица), $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $0<a<1$, $b>0.5$ и $a(2b + \sqrt{4b^2-1}) > b$, то указанное выше условие заведомо выполняется. При этом все решения (кроме стартующих из положений равновесия) асимптотически приближаются к некоторому периодическому, которое можно выписать в явном виде.

Если же в приведенном выше примере положить $b=0$, то, хотя спектральное условие "самовозбуждения" колебаний и не выполняется, однако можно утверждать, что почти все решения асимптотически приближаются к одному из двух предельных циклов системы (1)-(2), расположенных центрально симметрично.

В общем случае, при выполнении условий диссипативности и "самовозбуждения" колебаний, качественное поведение положительных полутраекторий может иметь довольно сложную структуру.

Работа поддержана грантом РФФИ N 93012884.

ОСОБЕННОСТЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВЫХ ТОЧЕК

Галич И.А., Галич В.А., Муганлинский С.Г. (Алчевск)

В пространственной постановке рассмотрена задача о характере особенности в напряженно-деформированном состоянии двухслойной цилиндрической оболочки, контактируемой по торцевой поверхности с однослойной цилиндрической оболочкой. На поверхностях контакта предполагается равенство соответствующих напряжений и перемещений. Слои оболочки выполнены из изотропных материалов.

Путем введения в окрестности угловых точек локальной системы координат получены трансцендентные уравнения, корни которых описывают порядок возрастания напряжений и перемещений при подходе к угловым точкам [1].

Знание особенности решения в окрестности угловых точек позволяет эффективно получить численное решение краевой задачи для оболочки с наперед заданной точностью [2].

С использованием принципа аргумента построен и реализован на ЭВМ алгоритм нахождения корней названных трансцендентных уравнений.

Литература

1. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.// Прикл. мат. и мех., 1967, 31, вып. 1, с.178-186.
2. Космодашианский А.С., Галич В.А., Горохов К.И. Смешанная задача теории упругости для изотронного цилиндра.// Доклады АН УССР, сер.А, N 10, 1986, с. 36-38.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\lambda x = B(x) + f$ С ПОЛУАДДИТИВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Галкина В.А. (Ставрополь)

Доклад посвящен нелинейным уравнениям второго рода вида

$$\lambda x = B(x) + f \tag{1}$$

с нелинейным и монотонным оператором $B(x)$, определенным на элементах конуса K.

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с уравнением вида (1) с оператором $B(x)$, который не обладает одновременно двумя свойствами (монотонностью и положительностью) относительно данного конуса, но, тем не менее, для которых можно указать два конуса K и K_1 ($K \subset K_1$), таких, что $B(x)$ оставляет инвариантным "узкий" конус K и монотонен относительно "широкого" конуса K_1.

В этой ситуации (при некоторых естественных дополнительных условиях) удается доказать существование решения, принадлежащего "узкому" конусу.

Другой важной чертой доклада является то, что в нем установлено свойство непрерывности положительных полуаддитивных монотонных операторов. Ранее это свойство было известно лишь для линейных положительных операторов (Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.), т.е. результаты доклада расширяют сферу приложений методов теорий уравнений второго рода на случай нелинейных уравнений.

Кроме того, результаты доклада позволяют устанавливать эффективные оценки значений параметра λ, при которых уравнение (1) имеет решение в К при условии, что $f \in K$.

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Гончарова Г. А., Гарбуз Е. В. (Саратов)

При решении задач о напряженно-деформированном состоянии и долговечности элементов конструкций, работающих при воздействии агрессивных сред, механических нагрузок и температурных полей, как составная часть решается задача теплопроводности.

Исследуется метод получения асимптотических разложений функций, являющихся решениями краевых задач, построенных для многослойных областей в безразмерном виде, с введением малого параметра.

Начальные и краевые условия для построенной системы задаются в зависимости от специфики решаемой задачи, причем последние могут быть как линейными, так и нелинейными. На границах раздела компонентов задаются условия их сопряжения, учитывающие "полный" и "неполный контакт".

Исследуемый метод основан на асимптотическом анализе при помощи модифицированного метода Лапласа интегральных представлений функций, являющихся решениями построенной системы, использующих соответствующие матрицы Грина. Для записи интегральных представлений этих матриц используется метод граничных интегральных уравнений, разработанный для решения задач о пограничном слое в нестационарных температурных полях твердых тел в Московском педагогическом институте. При нахождении асимптотики матрицы Грина и при нахождении асимптотики решения краевой задачи существенно используются соответствующие интегральные уравнения, которые, в свою очередь, учитывают нелинейные граничные условия.

Полученные таким образом асимптотические разложения температурной задачи могут использоваться при решении комплексной задачи, указанной в начале.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЛАДКИХ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП КОКСТЕРА В ТЕРМИНАХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Гохман А.О. (Воронеж)

Пусть W - конечная группа Кокстера, действующая в R^n, а $p(x)=(p_1(x),\dots,p_n(x))$ - базис в алгебре W-инвариантных полиномов. Всякая функция $f(x)$ класса $C^k(R^n)^W$ (т.е. инвариантная относительно W) представима в виде $f(x)=F(p(x))$, где имеет место падение гладкости F по сравнению с f, причем гладкость F обычно также описывается в терминах C^r. В [1] для этой цели были предложены классы анизотропной гладкости $C^{\mu,k}$, $\mu \in R^n_+$, $k \in N$, где имеется в виду непрерывность производных $D^\alpha F$ при $(\alpha,\mu) < k$. Для случая $W = B_n$ в [1] были получены оценки гладкости F в принципе недостижимые в терминах классов C^r.

Выясняется, что анизотропность гладкости F имеет место и в классическом случае $W = S_n$. Пусть $\varkappa(x)$ - максимальное число совпадающих в x координат x_i, $\varkappa_0(x)$ и $\varkappa_1(x)$ - соответственно максимальное число совпадающих нулевых и ненулевых координат. При $W = S_n$ роль базиса p играет набор σ элементарных симметрических функций. Через M_m обозначим подмножество $\sigma(R^n)$, состоящее из точек, σ-прообразы которых имеют $\varkappa(x) < m$. При $f \in C^{km}(R^n)^{S_n}$ функция F принадлежит классу $C^k(M_m)$, причем в терминах C^r эта оценка точна в каждой точке M_m. Через L_m обозначим ту часть $\partial\sigma(R^n)$, для σ-прообразов x точек которой $m = \varkappa_0(x) > \varkappa_1(x)$. Пусть $\Sigma_m = M_{m-1} \cup L_m$, $m=2,\dots,n$. Через $C^{k+\alpha}$ будем обозначать классы Гельдера. Имеет место

Теорема. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{(km-1)+1}(R^n)^{S_n}$, но не принадлежит классу $C^{km}(R^n)$, тогда $F(\sigma) \in C^{(m-1,\dots,m-1,m),km-1}(\Sigma_m)$, но $F(\sigma) \notin C^k(\Sigma_m)$.

На дополнении $M_m \backslash \Sigma_m$ анизотропный характер гладкости функции F не наблюдается.

Заметим, что явление, подобное описанному, имеет место и для теорем деления в случае классов конечной гладкости.

Литература

1. Гохман А.О.// Функ. ан. и его прил., 1994, т.28, N 4.

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОБЛОЧНОЙ ПОШАГОВОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И ПАКЕТЕ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ "ANC"

Гриненко А.О., Петрова Л.П. (Воронеж)

Разработан пакет прикладных программ ANC, предназначенный для анализа нелинейных электрических цепей. Пакет используется на компьютерах IBM с ОЗУ не менее 640 Кб, графическими адаптерами VGA, EGA, CGA, Hercules и под управлением MS DOS версии не ниже 3.30.

Пакет основан на алгоритме поблочной пошаговой линеаризации, который может включать в себя различные численные схемы типа методов Рунге - Кутты, Розенброка, Куртиса - Хиршфельдера, Гира, Адамса и т.п. ([1],[2]). Основная линейная алгебраическая система готовится на каждом шаге подпрограммами, обслуживающими различные типы физических и функциональных блоков. Результатом работы каждой из таких подпрограмм является частичная линейная алгебраическая система, построенная по одному из перечисленных выше методов. Объединенная линейная система решается затем методом Гаусса и в случае необходимости все вычисления данного шага итерируются для получения большей точности - это соответствует взятию нескольких итераций в методе Ньютона.

В пакете реализован удобный графический интерфейс создания электрических схем и их последующего модифицирования. Ввод осуществляется в диалоговом режиме, с использованием стандартного интерфейса Turbo Vision. Схемы отображаются на экране в виде, привычном для пользователя. После того, как будут нарисованы блоки, заданы их параметры, нарисованы связи между блоками, схема может быть сохранена на диске и в дальнейшем модифицирована. Готовая электрическая схема расчитывается аналитической частью пакета.

Создание пакета частично финансировалось НИАТ (г.Москва).

Литература

1. Чуа Л., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электрических схем. - М.: Энергия, 1980. - 638 с.

2. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. - М.: Наука, 1979. - 208 с.

ОБРАЩЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург)

Рассматривается способ обращения системы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве X

$$dx/dt = f(t,x) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = C(t)x, \qquad (1)$$

где $t \in [0,1]$, $x, x_0 \in X^n$, $f(t,x) \in X^n$, $u(t), y(t) \in X^m$, $B(t) \in R^{n\times m}$, $C(t) \in R^{m\times n}$, $m \leqslant n$, в смысле построения системы управлений вида (1), восстанавливающей функцию $u(t)$ по определяемой системой (1) функции $y(t)$ и известным x_0, $f(t,x)$, $B(t)$, $C(t)$ с целью решения краевой задачи или задачи синтеза оптимального управления.

Теорема. Если матричные функции $B(t)$ и $C(t)$ абсолютно непрерывны, $\det C(t)B(t) \neq 0$, функция $u(t)$ измерима и интегрируема на $[0,1]$ по Лебегу, оператор-функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости на интервал $[0,1]$ решения задачи Коши (1), то в качестве обратной системы при $m < n$ можно взять следующую систему уравнений в банаховом пространстве X

$$\frac{dv}{dt} = Q^{-1}(t)N(t)\Big(f(t, M(t)v + B(t)P^{-1}(t)y(t)) - \frac{dM(t)}{dt}v -$$

$$- \frac{dB(t)}{dt}P^{-1}(t)y(t)\Big), \qquad v(0) = Q^{-1}(0)N(0)x_0,$$

$$u(t) = -P^{-1}(t)C(t)\Big(f(t, M(t)v + B(t)P^{-1}(t)y(t)) - \frac{dM(t)}{dt}v\Big) +$$

$$+ P^{-1}(t)\Big(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dC(t)}{dt}B(t)P^{-1}(t)y(t)\Big),$$

а в случае $m = n$ функция $u(t)$ устанавливается по формуле

$$u(t) = -B^{-1}(t)f(t, C^{-1}(t)y(t)) + P^{-1}(t)\Big(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dC(t)}{dt}C^{-1}(t)y(t)\Big),$$

где $N(t)$ - $(n-m)\times m$-матрица, $M(t)$ - $n\times(n-m)$-матрица с абсолютно непрерывными элементами, удовлетворяющими условиям

$$N(t)B(t) = 0, \quad C(t)M(t) = 0, \quad \det N(t)M(t) \neq 0,$$

и где

$$P(t) = C(t)B(t), \quad Q(t) = N(t)M(t), \quad v \in X^{n-m}.$$

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Даймонд Ф. (Брисбейн), Клоеден П. (Джилонг),
Козякин В., Покровский А. (Москва)

Компьютерное моделирование динамических систем содержит дискретизации, в которых из-за конечности машинной арифметики вместо континуальных пространств состояний возникают конечные пространства состояний. Основные характеристики хаотических динамических систем весьма сложным образом зависят от параметров как исходной непрерывной системы, так и ее дискретизации. Чтобы описать и проанализировать соответствующие статистические характеристики необходимы адекватные феноменологические модели. В докладе предлагается такая модель для семейства отображений $x \to 1 - |1 - 2x|^l$, $x \in [0,1]$, $l > 2$. Приводятся также результаты компьютерного моделирования.

Пусть f - некоторое хаотическое отображение. Это означает, в частности, что траектории экспоненциально чувствительны к начальным условиям и ведут себя "случайно". В результате, трудно надеяться получить сколько-нибудь содержательную информацию из анализа поведения индивидуальных траекторий. Тем не менее, существует богатая качественная теория таких динамических систем в терминах их статистических свойств, таких, как инвариантные меры Синая-Рюэля-Боуэна. Роль инвариантных мер Синая-Рюэля-Боуэна определяется тем фактом, что такие меры описывают свойства индивидуальных траекторий с почти любыми (по отношению к мере Лебега) начальными условиями.

При анализе пространственных дискретизаций таких систем возникают интересные вопросы. Многие разумные компьютерные реализации таких систем могут трактоваться как детерминированные отображения φ некоторого множества L в себя. Центральная проблема заключается в том, что такие дискретизации также чрезвычайно чувствительны к начальным условиям и возмущениям, но при этом каждая траектория пространственной дискретизации финитно-периодична и, таким образом, не является случайной как в случае непрерывных систем. Следовательно, основные характеристики дискретизаций должны быть каким-то образом связаны с их циклами. Можно указать несколько таких характеристик: 1) максимальная или средняя длина циклов дискретизации, 2) пропорция начальных точек $\xi \in L$, итерации которых "сваливаются" в очень короткие циклы, 3) типичная длина переходного процесса - непериодической части траектории со случайными начальными условиями.

Нам неизвестны нетривиальные статистические характеристики, которые бы удовлетворительно описывали поведение дискретизаций в той же мере, как это делается инвариантными мерами Синая-Рюэля-Боуэна. Как оказалось, чтобы получить осмысленные результаты необходим еще один уровень усреднения - вместо того, чтобы рассматривать поведение системы со случайно выбранными начальными условиями, следует рассматривать ансамбли дискретизаций некоторого отображения на различных решетках. При этом вместо инвариантных мер Синая-Рюэля-Боуэна удается детально исследовать некоторые другие характеристики. Конечно, такие характеристики должны быть достаточно "робастны" в некотором разумном смысле.

Принципиальный вопрос, следовательно, может быть сформулирован так: предложить феноменологическую модель дискретизации, которая позволила бы предсказать статистические характеристики, указанные выше в терминах исходного отображения и/или установить связи между различными характеристиками.

Как представляется авторам, ответить на поставленный вопрос можно в терминах введенного в докладе понятия случайного отображения с единственным поглощающим центром.

Работа была поддержана грантом Австралийского исследовательского Совета А 9813 2690, а также грантом РФФИ 93-0100884.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Денисов В.С. (Витебск)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \psi(y) + f(x),$$
$$\dot{y} = g(x), \qquad (1)$$

обобщающая систему нелинейных колебаний, где $\psi(y)$ - нечетная монотонно возрастающая функция и $\psi(y) \to \infty$ при $y \to \infty$. При выполнении обобщенных условий Гурвица

$$xf(x) < 0, \quad xg(x) < 0, \quad x \neq 0 \qquad (2)$$

система (1) не имеет предельных циклов. В докладе рассмотрен случай нарушения условий (2), например, $f(x) > 0$ на интервале (x_1, x_2), где $x_1 > 0$. С помощью функции Ляпунова

$$V(x,y) = \int_0^y \psi(s)ds + \int_0^x -g(s)ds$$

и теоремы Пуанкаре-Бендиксона найден ряд достаточных условий существования по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла, окружающего одну особую точку - начало системы коорвинат. Указана вертикальная полоса изменения x, в которой расположен предельный цикл.

Если $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} y^{2i-1}$, где $a_{2i-1} \in R$ и $a_{2n-1} > 0$, то при дополнительных условиях, наложенных на поведение функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to \infty$, показано существование хотя бы одного устойчивого предельного цикла, окружающего неустойчивый предельный цикл. Методом сближения интегральных кривых при выполнении условия $f'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant x_2$ доказана единственность устойчивого предельного цикла, имеющего точки вне полосы $-x_2 \leqslant x \leqslant x_2$.

Summary

In this report the sufficient conditions are given for existence at least one unstable limit cycle surrounding unstable one.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЯВНЫХ СИСТЕМ ТИПА БРИО И БУКЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Димитриев О.М., Самкова Г.Е. (Одесса)

Рассматривается система полуявных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Брио и Буке второго порядка

$$t\dot{y} = Py + F(t, y, \dot{y}), \tag{1}$$

где $P \in R^{2\times2}$, $F: (-\Delta,\Delta) \times R^2 \times R^2 \to R^2$, $0 < \Delta$ - постоянная; вектор-функция F голоморфна в начале координат и ее разложение в окрестности начала координат не содержит свободных и линейных членов. Исследуются вопросы существования и асимптотического поведения неголоморфных решений системы (1), исчезающих вместе со своими производными при $t \to +0$.

Формальные неголоморфные решения системы (1) ищутся в виде

$$y = \sum_{\substack{k+l=2 \\ l\geq1}}^{\infty} \frac{a_{kl}t^l}{(a + b\ \ln t)^k}, \quad a_{kl} \in R^2, \quad a, b \in R_+. \tag{2}$$

Доказано, что коэффициенты a_{kl} при $k+l = 2$ определяются из алгебраических систем двух уравнений второго порядка, а коэффициенты a_{kl} при $k+l > 2$ определяются из линейных неоднородных систем второго порядка, причем матрицы этих систем зависят от a_{k+l} при $k+l > 2$ и коэффициентов при членах второго порядка в разложении функции F. При этом на каждом шаге коэффициенты a_{lk}, $k+l > 2$ либо определяются однозначно, либо представляют собой одно- или двухпараметрические семейства.

Получены достаточные условия существования решений системы (1), исчезающих вместе с $\dot{y}$ при $t \to +0$, асимптотически равных при $t \to +0$ отрезкам ряда (2). Исследованы вопросы о числе таких решений.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Дробченко Е.Ю. (Воронеж)

Рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} + A(x) \ni f(t, x)\ . \tag{1}$$

Предполагается, что A - многозначный максимальный монотонный оператор в R^n [1], причем

$$\sup_{|x|\leq m} \min_{y\in Ax} |y| < M(m);$$

$f: R\times R^n \to R^n$ - непрерывная по совокупности переменных функция.

Решением включения (1) называется локально абсолютно непрерывная функция $x = x(t)$, удовлетворяющая (1) почти всюду.

Теорема 1. Для любых $t_0 \in R$, $x_0 \in D(A)$ существует такое $h=h(t_0,x_0)>0$, что на отрезке $[t_0, t_0+h]$ включение (1) имеет решение, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0 . \tag{2}$$

Теорема 2. Пусть существуют $x_1 \in D(A)$ и $H>0$, при которых для всех $x \in R^n$ таких, что $|x| \geqslant H$, выполнено неравенство

$$(x-x_1,\ f(t,x)-f(t,x_1)) \leqslant L(|x-x_1|^2),$$

где функция $L: [H,+\infty)\to(0,+\infty)$ непрерывна и для любого $K \in (0,+\infty)$ $\int^{+\infty} \frac{dz}{L(z) + K\sqrt{z}} = +\infty$ ([2], с.26).

Тогда любое решение задачи (1)-(2) при любых $t_0 \in R$, $x_0 \in D(A)$ продолжимо на $[t_0,+\infty)$.

Литература

1. Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. - Amsterdam-London-New York: North-Holland, 1973. - 183p.

2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1966. - 331с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Дубовицкий В.А. (Москва)

Рассматривается экстремальная задача

$$J(\mu) = \| \int_Y a(y)d\mu(y) - z \| \to \min, \quad \mu \in M(Y). \tag{1}$$

Здесь Y - метрический компакт, a: $Y \to Z$ - непрерывное отображение из Y в гильбертово пространство Z, z есть вектор Z, $M(Y)$ - совокупность неотрицательных мер Радона на Y. Минимум в (1) называется оптимальным интегральным представлением (ОИП) вектора z на компакте Y с ядром a. Если ядро $a(y)$ отделено от 0, т.е. $0 \notin \overline{co}\ a(y)$, то существует непустое слабо компактное множество $D(a,z)$ решений (1) и возникает вопрос о его устойчивости относительно возмущений a, z. Актуальность этой проблемы обусловлена тем, что ОИП является формализацией понятия неотрицательного обобщенного решения линейного интегрального уравнения первого рода. Эта формализация в естественном смысле снимает проблему некорректности этих уравнений. Наиболее общий результат об устойчивости выражается следующей теоремой.

Теорема. Пусть $a_n \to a^0$ равномерно и $z_n \to z^0$ слабо * в Z. Тогда $D(a_n, z_n) \to D(a^0, z^0)$.

Сходимость множеств $D(a, z)$ понимается в смысле сходимости компактов. Аналитически типичная структура минимума (1) и устойчивость ОИП описывается в терминах функционала хаусдорфова уклонения графиков (гистограмм) мер. Эти результаты составляют теоретическую базу приложений, использующих восстановление неотрицательных обобщенных решений интегральных уравнений первого рода. Численное решение (1) сводится к минимизации квадратичного функционала высокой размерности на конусе неотрицательных векторов. Как показала наша практика, редукция интегральных уравнений к ОИП (метод гистограмм) является эффективным средством решения обратных задач спектроскопии. Уникальной особенностью ОИП является их нечувствительность к белому шуму в "экспериментальном" векторе z и непрерывная зависимость ошибки восстановления от систематической ошибки математической модели, т.е. нормы уклонений a, z. Для сильно некорректных обратных задач метод гистограмм служит альтернативой традиционной технике регуляризации.

О МНОГООБРАЗИЯХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Дымарский Я.М. (Луганск)

Исследуется семейство периодических краевых задач

$$u'' + p(x)u + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(2\pi), \quad u(0) = u'(2\pi)$$

с непрерывными 2π-периодическими потенциалами p. Пусть P - банахово пространство потенциалов, E_n $(n=0,1,\dots)$ - множество собственных функций и семейства, имеющих номер n [1]. E_n состоит из 2π-периодических функций класса C^2, которые имеют $2n$ устойчивых нулей x_i на $[0,2\pi]$, причем $u''(x_i) = 0$ и существует $u'''(x_i)$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. E_1 - гладкое тривиальное расслоение над $S^1 \times (0,2\pi)$, слой которого $\pi^{-1}(x_1,\ x_2-x_1)$ - банахово полупространство положительных на $(x_1,\ x_2)$ функций $u \in E_1$.

Т. к. потенциал p определяется собственной функцией u с точностью до константы, то определено множество $\mathcal{E}_1 \subset E_1$ тех собственных функций, которым соответствуют вырожденные потенциалы, т.е. такие p, для которых краевая задача имеет двукратное собственное значение $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ [1]. Множество вырожденных потенциалов обозначим $\mathcal{P}_1$.

Теорема 2. $\mathcal{E}_1$ - гладкое тривиальное подрасслоение E_1 коразмерности 1, слой $\pi^{-1}(x_1,\ x_2-x_1)$ которого определяется уравнением

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\int\limits_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} + \int\limits_{x_2+\varepsilon}^{x_1+2\pi-\varepsilon}\right)\frac{dx}{u^2} - \frac{2}{\varepsilon(1/(u'(x_1))^2 + 1/(u(x_1))^2)}\right) = 0.$$

Теорема 3. $\mathcal{P}_1$ - гладкое тривиальное банахово подмногообразие P коразмерности 2, тривиально вложенное в P.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М., 1951.

О СЛАБОЙ v-УСТОЙЧИВОСТИ РОСТКА АНАЛИТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Зачепа В.Р. (Воронеж)

Рассматривается аналитическая деформация

$$\Phi(x,\varepsilon) = 0 \qquad (1)$$

аналитического уравнения

$$F(x) = 0,$$

где

$$F:\ (R^{n+p},0) \to (R^n,0),\quad \Phi(x,\varepsilon_0) \equiv F(x),\quad \Phi(0,\varepsilon) = 0,\quad \varepsilon \in R^k.$$

Предполагается, что $M = \Phi^{-1}(0)\setminus(0 \times R^k)$ - неособое многообразие.

Пусть $F_1(x) = \Phi(x,\varepsilon(x))$. Росток отображения F в нуле называется слабо v-устойчивым относительно деформации (1), если для любого $\varepsilon(x) \in C^1$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ и $\partial\varepsilon(0)/\partial x = 0$ ростки $F^{-1}(0)$ и $F_1^{-1}(0)$ в нуле гомеомрфны, а ростки $F^{-1}(0)\setminus 0$ и $F_1^{-1}(0)\setminus 0$ в нуле диффеоморфны, либо одновременно пусты.

Вводится условие AT, характеризующее примыкание многообразий M и $0 \times R^k$. Это условие является более слабым, чем известное условие Уитни A и еще более слабым, чем введенное автором ослабленное условие Уитни A^* (ослабление состоит в том, что предел N пространств нормалей к M берется вдоль последовательности $(x_i, \varepsilon_i) \to (0, \varepsilon_0)$, удовлетворяющей условию $\|\varepsilon_i - \varepsilon_0\| = o(\|x_i\|)$, и требуется, чтобы $N \cap (0 \times R^k) = 0$.

Теорема. Перечисленные ниже условия эквивалентны.

1. Росток отображения F в нуле слабо v-устойчив относительно деформации (1).

2. В точке $(0, \varepsilon_0)$ выполнено условие AT.

3. Для любого $\varepsilon(x) \in C^1$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\partial\varepsilon(0)/\partial x = 0$, росток множества особых решений уравнения $\Phi(x, \varepsilon(x)) = 0$ состоит из одной точки $x = 0$.

Из этого результата получаются новые признаки слабой v-определенности гладких ростков в квазиоднородной и ньютоново-однородной фильтрациях.

О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Зеликова В. А., Обуховский В. В. (Воронеж)

Пусть $A(t)$ и $B(t)$, $t \in I = [0,1]$ соответственно $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы с измеримыми коэффициентами; $F\colon I \times R^n \times R^m \to R^n$ - мультиотображение типа Каратеодори с выпуклыми компактными значениями, такое, что

$$\lim_{u,x\to 0} \frac{|F(t,x,u)|}{|x| + |u|} = 0$$

равномерно по $t \in I$.

Пусть $Sol_F(u)$ - множество траекторий управляемой системы

$$x'(t) \in A(t) + B(t)u(t) + F(t, x(t), u(t)), \quad t \in I,$$

$$x(0) = 0,$$

соответствующих выбранному управлению $u \in L^\infty(I, R^m)$, и для $U_0 \subset L^\infty(I, R^m)$ пусть

$$R_F(T, U_0) = \{x(T): x \in Sol_F(u), \quad u \in U_0\} -$$

множество достижимости. Для линейного случая $F \equiv \{0\}$ множество достижимости обозначим $R_0(T, U_0)$.

С помощью методов теории топологической степени доказывается следующее

Утверждение. Пусть $V \subset L^{\infty}(I, R^m)$ - линейное подпространство. Тогда существует $T_0 \in (0, 1]$ такое, что для каждого $T \in (0, T_0)$, если

$$0 \in \text{int } R_0(T, V),$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \in \text{int } R_F(T, \{u \in V: |u| < \varepsilon\}).$$

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Зубова С.П. (Воронеж)

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$[A + A_1(t, \varepsilon)]dx/dt = B(t, \varepsilon)x(t, \varepsilon), \quad t \in [0, T],$$

где A, $A_1(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ - линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, A - замкнутый фредгольмовский оператор с нулевым индексом, $\overline{D(A)} = E_1$; $A_1(t, \varepsilon) \rightrightarrows 0$ при $\varepsilon \to 0$; $B(t, \varepsilon)$ равномерно ограничен.

Оператор, стоящий при производной, может быть обратимым.

Находится многообразие в E_1, в котором задача Коши однозначно разрешима, рассматриваются решения исходного уравнения с начальными условиями из этого многообразия.

Строится алгебраическое уравнение ветвления, с помощью которого определяются порядки сингулярностей асимптотических разложений решения задачи Коши.

Выясняются условия, при выполнении которых в задаче наблюдается явление погранслоя.

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1969. - 527 с.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Зюкин П. Н. (Воронеж)

Рассматривается система дифференциальных кравнений

$$\varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dx} + B(x)y_\varepsilon = \bar{0}, \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $B(x)$ - жорданова клетка порядка r с непрерывным на $[0,1]$ собственным значением $\lambda(x)$, $\bar{0}$ - нулевой вектор комплексного r-мерного векторного пространства. Пусть при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ выбрано одно решение $y_\varepsilon(x)$ системы (1).

Теорема 1. Пусть число $c \in [0,1]$ таково, что

$$\int_c^x \mathrm{Re}\,\lambda(t)dt \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0,1]. \tag{2}$$

Пусть такое c единственно на $[0,1]$ и

$$\mathrm{Re}\,\lambda(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]\cap(c-\delta,\ c+\delta)\setminus\{c\},\quad \delta > 0. \tag{3}$$

Тогда для равномерной по $x \in [0,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ системы (1) к $\bar{0}$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$y_{\varepsilon,n}(c) = o\left(\frac{1}{\max\limits_{x\,[0,1]}\left\{\left|\frac{c-x}{\varepsilon}\right|^n\cdot\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_c^x \mathrm{Re}\,\lambda(t)dt\right)\right\}}\right) \tag{4}$$

при $\varepsilon \to 0$ для всех $n = \overline{1,r}$ (n - номер компоненты вектора $y_\varepsilon(c)$.

Теорема 2. Пусть числа $c_k \in [0,1]$, $k = \overline{1,r}$, различны и для любого из них выполнено условие (2) при $c = c_k$. Пусть k_0 - целое число, $1 \leqslant k_0 \leqslant r$. Тогда для равномерной по $x \in [0,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ системы (1) к $\bar{0}$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы $y_{\varepsilon,n}(c_k) = o(\varepsilon^{n-1})$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $n = \overline{1,r}$.

Теорема 3. Пусть на $[0,1]$ имеется всего m различных чисел c_k, $k = \overline{1,m}$, удовлетворяющих условиям (2), (3) при $c = c_k$, и $1 < m < r$. Пусть $c_k \in [\alpha_k,\beta_k] \subset [0,1]$ и $[\alpha_k,\beta_k] \cap [\alpha_i,\beta_i] = \varnothing$ при $k \neq i$. Тогда для равномерной по $x \in [0,1]$ сходимости решений $y_\varepsilon(x)$ системы (1) к

$\bar{0}$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы для любого k, $k = \overline{1,m}$, выполнялись условия (4) при $c = c_k$ и при замене отрезка $[0,1]$ отрезком $[\alpha_k, \beta_k]$.

ON THE BEHAVIOR OF LYAPUNOV PERIODIC ORBITS UNDER NON-CONSERVATIVE PERTURBATIONS

Ivanov A.P. (Moscow)

The system

$$\dot{x} = F(x) + \varepsilon G(x,\varepsilon), \quad x \in R^{2n}, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1}$$

is considered. For $\varepsilon = 0$ (i.e. in the absence of perturbations) it is supposed to have a family of periodic orbits $\Pi(h)$ in the vicinity of the origin, h is a parameter. These orbits form smooth invariant two-manifold in the phase space R^{2n}. The problem is: does this manifold persist under perturbation? In the hyperbolic case, the answer is known to be positive. We examine general case, when eigenvalues might belong to an imaginary axis. The wellknown example is Lyapunov families in Hamiltonian systems; note that perturbations are, generally speaking, of non-conservative (for instance, dissipative) nature. The following result is proved.

Theorem. Suppose that for any $h \in [h_1, h_2]$ the periodic solution $\Pi(h)$ has only two Floquet multipliers equal to unit. Then the invariant two-manifold persists under small perturbations of class C_1.

The phase portrait on this manifold is governed by the Melnikov-type function $M(h)$, which can be calculated as certain path integral of perturbations along $\Pi(h)$: the zeroes of this function correspond to limit circles, which are stable provided $M(h)$ changes its sign from plus to minus and unstable otherwise.

The results are applied to the analysis of periodic orbits in Celestial mechanics with the account of small enviromental forses.

This work is supported by the Russian Fund of Fundamental Researches, the project No. 93-013-17228.

О СПЕКТРАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ, ЭКВИВАРИАНТНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ОКРУЖНОСТИ

Израилевич Я. А. (Воронеж)

Пусть X - ориентируемое многообразие с конечно порожденными группами гомологий $H_*(X;Z)$, на котором действует группа $G = S^1$ с множеством неподвижных точек F. Пусть Φ: $X \to X$ - непрерывное отображение, эквивариантное относительно действия G, $\Phi|_F$: $F \to F$ - его сужение на F, а Φ_*: $H_*(X;C) \to H_*(X;C)$ и $(\Phi|_F)_*: H_*(F;C) \to H_*(F;C)$ - соответсвующие эндоморфизмы групп гомологий.

Тогда спектр эндоморфизма $(\Phi|_F)_*$ содержится в спектре эндоморфизма Φ_*.

Доказательство основано на аналогичном включении, полученном Р. С. Адамовой и автором для действий конечных циклических групп простого порядка и обобщающем известные неравенства Э. Флойда; в доказательстве используются конечность числа типов орбит рассматриваемого действия и формула универсальных коэффициентов.

Исследование эквивариантных отображений и векторных полей проводилось геометрическими методами (М. А. Краносельский и др.) и гомологическими методами (П. Смит и др.) в связи с вычислением степени эквивариантного отображения; эти результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. Г. Борисовича, Т. Н. Фоменко, автора и других.

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ)

Ирклиевский В. Д., Ризун В. И. (Алчевск)

Рассмотрим уравнение

$$Au = f \qquad (1)$$

с линейным оператором A из области определения $D(A) \in L_p((0,1),E)$ (пространство Банаха L_p над пространством E) [1] и с заданным элементом $f \in R(A)$ (область значений оператора A).

Пусть операторное уравнение (ОУ) (1) с линейным оператором A из линеала $D(A)$ банахова пространства $L_p((0,1),E)$ в банахово пространство $L_q((0,1),F)$ имеет единственное решение. Тогда для решения ОУ (1) применим ММВФ [2, 3], согласно которому возьмем систему элементов, построенную в [2,3]

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \varphi_i = \varphi_i(t), \quad t \in [0,1] \tag{2}$$

из D(A).

Ищем приближенное решение ОУ (1) в виде первых элементов (2):

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n^k \varphi_k. \tag{3}$$

Используя [2],[3], нетрудно доказать следующие утверждения.

Теорема 1. Имеет место соотношение

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n^k \varphi_k \to u.$$

Теорема 2. Коэффициенты a_n^k в (3) находятся из системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k [u_k, u_j] = A_j, \quad A_j = [A, u_j], \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Литература

1. Талдыкин А.Т. Элементы прикладного функционального анализа. - М.: Высшая школа, 1982. - 383 с.

2. Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. Математические методы исследования движения сложных подвижных объектов. - Киев: ИСИО, 1994. 409 с.

3. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.

НОРМА ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В L И L^1

Калитвин А.С. (Липецк)

Пусть T и S - множества с σ-конечными непрерывными лебеговыми мерами μ и ν, I, J - интегралы Лебега по множествам T и S соответственно, $c = c(t,s)$, $l = l(t,s,\tau)$, $m = m(t,s,\sigma)$, $n = n(t,s,\tau,\sigma)$ - измеримые по совокупности переменных функции, t, $\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, а K - оператор с частными интегралами вида

$$(Kx)(t,s) = c(t,s) + Il(\tau,s)d\mu(\tau) + Jmx(t,\sigma)d\nu(\sigma) + $$
$$+ IJnx(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma). \tag{1}$$

В [1] доказано, что действующий из банахова идеального пространства (БИП) X с носителем $T \times S$ в БИП Y с носителем $T \times S$ оператор K непрерывен, обладает действующим из двойственного пространства Y' в двойственное пространство X' двойственным оператором, который при естественных условиях (регулярность, например) совпадает с транспонированным оператором

$$(K^{*}y)(t,s) = cy(t,s) + Il(\tau,s,t)y(\tau,s)d\mu(\tau) +$$

$$+ Jm(t,б,s)y(t,б)d\nu(б) + IJn(\tau,б,t,s)y(\tau,б)d\mu \times \nu(\tau,б), \qquad (2)$$

а регулярность K равносильна действию из X в Y оператора

$$(|K|x)(t,s) = |c|x(t,s) + I|l|x(\tau,s)d\mu(\tau) +$$

$$+ J|m|x(t,б)d\nu(б) + IJ|n|x(\tau,б)d\mu \times \nu(\tau,б). \qquad (3)$$

Из (2)-(3) и регулярности непрерывных в L^{∞} линейных операторов вытекает

Теорема. Если оператор K действует в L^{∞} или в L^{1}, то

$$\|K\|_{\infty} = \| |c| + I|l|d\mu(\tau) + J|m|d\nu(б) + IJ|n|d\mu \times \nu(\tau,б) \|_{\infty},$$

$$\|K\|_{1} = \| |c| + I|l(\tau,s,t)|d\mu(\tau) + J|m(t,б,s)|d\nu(б) +$$

$$+ IJ|n(\tau,б,t,s)|d\mu \times \nu(\tau,б) \|_{\infty}. \qquad (4)$$

При $c(t,s) \equiv 1$ из (4) вытекает равенство $\|I + A\| = 1 + \|A\|$, где A - оператор (1) с нулевой функцией $c(t,s)$. Для компактных операторов A в пространстве C последнее равенство изучалось И.К.Даугаветом, для интегральных операторов - Г.Я.Лозановским, а для широкого класса трамбующих операторов - М.А.Красносельским. Отметим, то формулы (4) используются при применении метода Ньютона-Канторовича к уравнениям Урысона с частными интегралами.

Литература

1. Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. On the theory of partial integral operators.// J. Integral Eq. Appl., v.3, N 3, 1991, 351-382.

ОБ ОПЕРАТОРАХ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Калитвин А.С., Глотов С.Н. (Липецк)

Пусть T, S - ограниченные замкнутые множества конечномерных пространств. В пространстве C непрерывных на $\Delta = T\times S$ функций рассмотрим оператор Урысона с частными интегралами:

$$Kx(t,s) = \int_T l(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau + \int_S m(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma +$$
$$+ \int_T\int_S n(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \qquad (1)$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега, а функции $l(t,s,\tau,u)$, $m(t,s,\sigma,u)$, $n(t,s,\tau,\sigma,u)$ определены на $\Delta\times T\times R$, $\Delta\times S\times R$, $\Delta\times\Delta\times R$ соответственно и удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема. Пусть $(a(t,s,\omega,u),\omega)\in\{(l(t,s,\tau,u),\tau),\ (m(t,s,\sigma,u),\sigma),\ (n(t,s,\tau,\sigma,u),\ (\tau,\sigma))\}$. Если при любом $h > 0$ выполнены условия:

1. $|a(t,s,\omega,u)| \leqslant R_h^a(t,s,\omega)$ $(|u|\leqslant h)$, где $R_h^a(t,s,\omega)$ - измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int_\Omega R_h^a(t,s,\omega)d\omega < a(h) < \infty \quad (0 < h < \infty);$$

2. $$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{s\in S\\ t\in T}}\int_\Omega \max_{\substack{|u_i|\leqslant h\\ |u_1-u_2|\leqslant\delta}} |a(t,s,\omega,u_1) - a(t,s,\omega,u_2)|d\omega = 0;$$

3. $$\lim_{(t,s)\to(t_0,s_0)}\int_\Omega \max_{|u|\leqslant h} |a(t,s,\omega,u) - a(t_0,s_0,\omega,u)|d\omega = 0$$

для любой точки $(t_0,s_0)\in\Delta$, то оператор K действует в C, непрерывен и ограничен.

Заметим, что условия действия, непрерывности, ограниченности и другие свойства операторов Урысона с частными интегралами в квазинормированных идеальных пространствах рассматривались в [1].

Литература

1. Поволоцкий А.И., Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. - Ленинград: РГПУ им. А.И.Герцена, 1991.

ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Калитвин А.С., Фролова Е.В. (Липецк)

Через I, J обозначим интегралы Лебега по отрезкам $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно. Пусть $g = g(\varphi,t,s)$, $l = l(\varphi,t,s,\tau)$, $m = m(\varphi,t,s,б)$, $n = n(\varphi,t,s,\tau,б)$ – измеримые по совокупности переменных $\varphi \in U$, $t,\tau \in [a,b]$, $s,б \in [c,d]$ функции, где U – конечный или бесконечный промежуток в R,

$$\varkappa=\varkappa(t,s,\tau,б) = \begin{cases} 1, & \tau>t>a,\ б>s>c \text{ или } \tau>t=a,\ б>s>c, \\ , & \tau<t, \text{ или } б<s,\ \tau=t=a, \text{ или } б=s=c, \end{cases}$$

$$\varkappa_1=\varkappa(t,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau>t>a \text{ или } \tau>t=a, \\ 0, & \tau<t \text{ или } \tau=t=a, \end{cases} \qquad \varkappa_2=\varkappa(s,б) = \begin{cases} 1, & б>s>c \text{ или } б>c=a, \\ 0, & б<s \text{ или } б=c=a. \end{cases}$$

Оператор-функцию $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $L_s(C)$ линейных операторов с частными интегралами определим равенством

$$K(\varphi)x(t,s) = gx(t,s) + Ilx(\tau,s)d\tau + Jmx(t,б)dб + IJnx(\tau,б)d\tau dб.$$

Теорема 1. $K(\varphi)$ сильно-непрерывна в пространстве $L(C)$ линейных непрерывных на $C([a,b]\times[c,d])$ операторов в том и только в том случае, когда непрерывны функции

$$B(\varphi,t,s) = g + Ild\tau + Jmdб + IJnd\tau dб,$$

$$B_\xi(\varphi,t,s) = \int_a^\xi [(g+Jmdб)\varkappa_1 + (\xi-\tau)(l+Jndб)]d\tau,$$

$$B_\eta(\varphi,t,s) = \int_c [(g+Ild\tau)\varkappa_2 + (\ -б)(m+Ind\tau)]dб,$$

$$B_{\xi\eta}(\varphi,t,s) = \int_a^\xi\int_c^\eta [g\varkappa + (\xi-\tau)l\varkappa_2 + (\eta-б)m\varkappa_1 + (\xi-\tau)(\eta-б)n]d\tau dб,$$

и на каждом ограниченном подмножестве своей области определения ограничена функция

$$\gamma(\varphi,t,s) = |g| + I|l|d\tau + J|m|dб + IJ|n|d\tau dб. \qquad (2)$$

Теорема 2. Если при каждом фиксированном φ выполнены условия (1) и функция (2) ограничена в смысле теоремы 1, то $K(\varphi)$ непрерывна по норме операторов $L(C)$ тогда и только тогда, когда функция $c(\varphi,t,s)$ равномерно относительно (t,s) непрерывна по φ и

$$\sup_D \operatorname{mes}\{w:\ |z(\varphi,t,s,w) - z(\varphi',t,s,w)| > \theta\} \to 0,$$

$$\sup_D \int_\Omega |z(\varphi,t,s,w) - z(\varphi',t,s,w)|dw \to 0, \text{ при } \varphi \to \varphi',\ \operatorname{mes}\Omega \to 0;$$

здесь $D = [a,b]\times[c,d]$, $(z,w) \in \{(l,\tau),\ (m,б),\ (n,(\tau,б))\}$.

БИФУРКАЦИОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

Камачкин А.М. (Санкт-Петербург)

Объектом исследования является математическая модель системы автоматического управления

$$\dot X = AX + BF(б) + Ke^{\alpha t}\sin(\omega t+\varphi),\quad б = (C,X), \tag{1}$$

где X - n-мерный вектор, A - (n×n) постоянная вещественная матрица; B, K, C - n-мерные постоянные вещественные векторы; F(б) - двухпозиционное реле с гистерезисом с пороговыми числами l_1, l_2 $(l_1<l_2)$ и двумя выходными значениями m_1, m_2 $(m_1<m_2)$, причем петля гистерезиса в координатах (F,б) обегается против хода часовой стрелки (нелинейная функция F(б) описывает, например, пространственное запаздывание управляющих механизмов); α, ω, $\varphi \in R$, $\omega = 2\pi/T$, где T - период внешнего синусоидального воздействия на систему (1).

Если известно, что в системе (1) существует по крайней мере один вынужденный периодический режим с периодом $T_в = k\cdot T$, где k - целое положительное число, и двумя точками переключения в фазовом пространстве, то задачу выделения в пространстве коэффициентов системы (1) области, гарантирующей невозможность возникновения в системе (1) нежелательных с точки зрения практических приложений режимов, таких как неустойчивые режимы, биения и странные аттракторы, можно свести к исследованию пространства параметров системы трансцендентных уравнений относительно τ_1 и τ_2 $(\tau_1 + \tau_2 = T_в)$, где τ_1 и τ_2 - времена переходов изображающей точки в фазовом пространстве с одной поверхности переключения $(C,X) = l_i$ $(i = 1,2)$ на другую. Например, в простейшем частном случае, когда $n = 2$, $\alpha = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in R$, где λ_1 и λ_2 собственные числа матрицы A, трансцендентная система уравнений сводится к уравнению:

$$q = \sin[(\omega\tau_1 + \varphi) + \operatorname{arctg}(\omega/\lambda_2)],$$

где q- константа, вычисляемая, если известны значения параметров исходной системы (1) и задано число $T_в$, при этом должно выполняться условие $|q| < 1$. В многомерном пространстве параметров системы трансцендентных уравнений строятся бифуркационные поверхности, переход через которые соответствует изменению числа периодических режимов исходной системы (1) или изменению свойств этих режимов.

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НУЛЕЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Киприянов И. А., Мешков В. З. (Воронеж)

Пусть $P(x,D)$ обозначает линейный эллиптический оператор с C^∞ -коэффициентами в области G евклидова пространства R^n. Как и обычно, будем говорить, что функция $u(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка больше или равного k, если $u(x) = O(|x-x_0|^k)$ при $x \to x_0$. Далее, будем говорить, что для оператора $P(x,D)$ выполняется сильное условие единственности, если уравнение $P(x,D)u = 0$ не обладает нетривиальными решениями, имеющими нуль бесконечного порядка в некоторой точке $x_0 \in G$. Наконец, пусть E - линейное подпространство в R^n, а $E^\perp$- его ортогональное дополнение. Конической ε-окрестностью пространства E мы будем называть множество точек $\{x \in R^n,\ x = e + e^\perp$, где $e \in E$, $e^\perp \in E^\perp\}$, таких, что $|e^\perp| < \varepsilon|e|$.

Теорема. Пусть $P(x,D)$ - линейный эллиптический оператор порядка m с C^∞-коэффициентами в области $G \subset R^n$, для которого выполняется сильное условие единственности, а $u(x)$ - решение уравнения $P(x,D)u = 0$. Пусть, кроме того, N_m обозначает множество нулей решения u порядка большего или равного m. Тогда

1. Хаусдорфова размерность множества N_m меньше или равна, чем $n-2$.

2. Если $x_0 \in N_m$, то существует конечное число плоскостей размерности $n-2$, проходящих через точку x_0 так, что для любого $\varepsilon > 0$ множество N_m вблизи точки x_0 лежит в конических ε-окрестностях этих плоскостей.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПСЕВДООБРАТНОГО ОПЕРАТОРА J-ДРОБЬЮ

Кирчей И.И., Пасечник Т.В. (Львов)

Для любого оператора A получено дробно-рациональное представление псевдообратного оператора A^+. Коэффициенты этого оператора находятся покомпонентно с помощью j-дроби вида:

$$A^+ = -\frac{1}{\beta_2 -}\,\frac{\beta_2\beta_3}{(\beta_3+\beta_4) -}\,\frac{\beta_4\beta_5}{(\beta_5+\beta_6) -}\cdots,$$

где

$$\beta_{k+1} = \frac{(-1)^k}{\beta_1\ldots\beta_k}\left(A^k b + Q_{k,1}A^{k-1}b + \ldots + Q_{k,[k/2]}A^{k-[k/2]}b \right),$$

$$Q_{j,l} = Q_{j-1,l} + \beta_j Q_{j-2,l-1}, \quad Q_{j,0} = 1, \quad Q_{2,1} = \beta_2,$$

$[x]$ - целая часть числа x, A^s - итерационное ядро оператора A.

Теорема. Для сходимости данной цепной дроби достаточно выполнения условия

$$\left| \frac{\beta_{2m+1}/\beta_{2m+2}}{(1+\beta_{2m-1}/\beta_{2m})(1+\beta_{2m-2}/\beta_{2m-1})} \right| < \frac{1}{4}.$$

Это условие является следствием применения к j-дроби достаточного признака Ворпитского.

Кроме того, доказано, что для матричного случая записанная выше дробь конечна и имеет не более чем 2n этажей.

Такой алгоритм нахождения псевдообратного оператора устойчив к ошибкам округления, работает с плохообусловленными матрицами и легко распараллеливается. Ряд численных экспериментов подтвердил эффективность данного метода.

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИПОЛИНОМОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЭКСПОНЕНТЫ

Кирьянен А.И. (Санкт-Петербург)

Рассмотрим квазиполином первого порядка относительно экспоненты $H(z) = Q(z)\exp(-hz)$, где $h > 0$, а P и Q - полиномы с вещественными коэффициентами, причем степень P больше степени Q. Пусть эти полиномы не имеют общих мнимых корней, а все вещественные корни функции

$F(w) = |P(iw)|^2 - |Q(iw)|^2$ - простые. Если функция $F(w)$ имеет несколько положительных вещественных корней $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_m$, то с ростом h корни квазиполинома $H(z)$ через точки $\pm iw_k$ при нечетном k переходят из левой полуплоскости в правую, а при четном k - наоборот.

Рассмотрим квазиполином второго порядка относительно экспоненты $H(z) = P(z) + Q(z)\exp(-hz) + S(z)\exp(-2hz)$, где степень полинома P больше степеней полиномов Q и S и все три полинома одновременно не имеют общих мнимых корней. Введем функцию $F(w) = G^2(w) - G_1^2(w) - G_2^2(w)$, где

$$G(w) = |P(iw)|^2 - |S(iw)|^2 = P_r^2 + P_i^2 + S_r^2 + S_i^2,$$

$$G_1(w) = Q_r(P_r - S_r) + Q_i(P_i - S_i), \quad G_2(w) = Q_r(P_i + S_i) - Q_i(P_r + S_r).$$

Пусть все вещественные корни $F(w)$ - простые.

Как и в предыдущем случае, если функция $F(w)$ не имеет вещественных корней, то квазиполином $H(z)$ либо устойчив независимо от величины запаздывания, либо неустойчив. Если функция $F(w)$ имеет два вещественных положительных корня w_1, w_2, то корни квазиполинома $H(z)$ через точки $\pm iw_1$, $\pm iw_2$ переходят из левой полуплоскости в правую и устойчивость квазиполинома теряется. Если у функции $F(w)$ есть три вещественных положительных корня, то направление перехода корней квазиполинома $H(z)$ через комплексно сопряженные точки $\pm iw_2$ меняется на противоположное. Т.е. пара корней $\pm iw_1$, первоначально перешедшая в правую полуплоскость, возвращается обратно в через точки $\pm iw_2$. Аналогичная картина будет происходить с корнями $\pm iw_3$, $\pm iw_4$ и т.д.

Квазиполиномам $H(z)$ соответсвуют линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. Приведенные утверждения позволяют строить в пространстве коэффициентов области асимптотической устойчивости, а также стабилизировать линейные системы управления обратной связью, зависящей только от предыстории.

ON LIMIT SETS OF TRAJECTORIES OF SOLUTIONS OF ASYMPTOTICALLY AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PLANE

Klebanov B.S. (Moscow)

We present a series of results proved in [1] on the sets mentioned in the title. The results are obtained in the framework of an axiomatic theory of solution spaces of ODEs suggested by V.V.Filippov. The Poincaré-Bendixson type theorem listed below is a corollary to a more general result on limiting equations.

Consider planar differential equations

$$y' = f(t, y), \qquad (1)$$

$$y' = g(y), \qquad (2)$$

where $f(t,y)$ is continuous and $g(y)$ is locally Lipschitz continuous, $y \in R^2$. Suppose $f(t,y) \to g(y)$ as $t \to \infty$, uniformly in y for y in compact sets.

Theorem. Let ω be the ω-limit set of a forward bounded solution of (1). Assume that the equilibria of (2) are isolated. Then ω is the union of periodic orbits of (2), equilibria of (2), and orbits of (2) connecting these equilibria.

The above theorem generalizes the theorem of L.Markus [2] who assumed that ω contains no equilibria of (2). The theorem gives an answer to the problem posed in [3]. The problem was answered independently in [4].

Copies of the preprint [1] are available from the author (e-mail kleb@ium.ac.msk.su).

References

1. Klebanov B.S. On asymptotically autonomous differential equations in the plane. - Preprint 94/27, University of Birmingham, 1994.
2. Marcus L. Asymptotically autonomous differential systems.// Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol.3, Ann. of Math. Stud. 36, Princeton Univ. Press, N.J., 17-29.
3. Thieme H.R. Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations.// Journ. Math. Biol. 30(1992), 755-763.
4. Benaim M., Hirsch M.w. Asymptotic pseudotrajectories, chain reccurent flows and stochastic approximations. - Preprint, University of California at Berkeley, 1994.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Колмановский В.Б., Полякова М.В. (Москва)

Для исследования устойчивости нулевого решения функционально-дифференциальных уравнений с последействием используется процедура, основанная на втором методе Ляпунова, сущность которого состоит в том, что искомый функционал Ляпунова получается путем преобразований функции Ляпунова, построенной для вспомогательного, специальным образом сконструированного обыкновенного уравнения без последействия. Для ФДУ вида

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}F_i(t,x(t-h_i)),\quad t>t_0,\quad h_i>0,\quad x\in R^n,\quad x_{t_0}=\phi\colon\ (-\infty,0]\to R^n, \qquad (1)$$

где $x\in R^n$, и для фиксированного t функция $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in(-\infty,0]$, функционалы F_i: $[t_0,\infty)\times R^n\to R^n$ - непрерывны, $F_i(t,0)=0$ и удовлетворяют локальному условию Липшица по второму аргументу, функция ϕ: $(-\infty,0]\to R^n$ - непрерывна, с помощью указанной процедуры доказано, что нулевое решение уравнения (1) глобально асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство

$$\alpha>\sum_{i=1}^{m}L_i\sum_{j=1}^{m}L_j h_j .$$

Здесь $\alpha=-\sup\limits_{t\geq t_0,\,x\in D}\gamma[f(t,x)]>0$, $L_i=\sup\limits_{t\geq t_0,\,x\in D}\|f_i(t,x)\|_1$, $i=\overline{1,m}$,

где $f_i(t,x)$ и $f(t,x)$ - матрицы Якоби функционалов F_i и всей системы соответственно, $\gamma[f(t,x)]$ - логарифмическая норма матрицы $f(t,x)$:

$$\gamma[f(t,x)]=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{1}{\Delta}\left(\|I+\Delta f(t,x)\|_1-1\right).$$

С использованием той же процедуры доказана глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия системы

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t-h_1),\ldots,x(t-h_m)),\quad t>t_0,\quad h_i>0,\quad x\in R^n,\quad i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

где функционал F: $[t_0,\infty)\times R^n\times\ldots\times R^n\to R^n$ - непрерывен, $F(t,0,\ldots,0)=0$ и удовлетворяет локальному условию Липшица по $2,\ldots,m$ аргументам, при прежних начальных условиях, если выполняется

$$\alpha>L\sum_{i=1}^{m}L_{yi}\sum_{j=1}^{m}h_j .$$

где все постоянные определяются аналогично предыдущему случаю.

Итак, с помощью процедуры конструирования функционалов Ляпунова для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием получены условия устойчивости для диссипативных систем общего вида (1) и (2).

ОДНО РЕККУРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ГРАФОВ

Колмыков В. А. (Воронеж)

Пусть дан граф G (мы рассматриваем только неориентированные графы без петель и кратных ребер) с r ребрами и r других графов $\{G_k\}$. В каждом графе G_k зафиксируем две вершины (два корня). Удалим из G одно ребро и вместо него вклеим граф G_1 так, чтобы его корни отождествлялись соответственно с двумя вершинами бывшего ребра. Затем проделаем то же и с стальными ребрами и остальными двухкорневыми графами. Конечно, полученный граф зависит от способа Λ, которым мы производим замены ребер и ориентируем процесс вклейки. Более того, Λ сопоставляет каждой паре смежных вершин (u, v) двухкорневой граф G^{uv} с упорядоченными корнями. Полученный граф обозначим $G\Lambda\{G_k\}$.

Для всякого графа H обозначим через H_u граф, полученный из H удалением вершины u, $H(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы смежности графа H, $H_{(uv)}(\lambda)$ - сумму характеристических многочленов графов, полученных из H удалением всевозможных простых путей, соединяющих u с v.

Зафиксируем некоторую нумерацию вершин в G. Пусть i - номер вершины v. Положим

$$m_{ii} = \Sigma\, G_u^{uv}(\lambda)/G_{uv}^{uv}(\lambda) - \lambda(\deg v - 1)$$

(сумма по всем вершинам u, смежным с v),

$$m_{ij} = -\, G_{(uv)}^{uv}(\lambda)/G_{uv}^{uv}(\lambda)$$

(j - номер вершины u). Матрицу (m_{ij}) обозначим $M_G\Lambda\{G_k\}$.

Теорема.

$$(G\Lambda\{G_k\})(\lambda) = [\ \Pi G_{uv}^{uv}(\lambda)\ ]\cdot \det M_G\Lambda\{G_k\}$$

(произведение по всем неупорядоченным парам смежных вершин u, v).

СОПРЯЖЕННЫЙ ГОМОМОРФИЗМ ГРАФОВ КАК ОПЕРАТОР В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР

Колмыков В. А., Боровских А. В. (Воронеж)

Одним из основных понятий, позволяющих изучать алгебраические характеристики графов, является понятие гомоморфизма как отображения, сохраняющего отношения. Простейший гомоморфизм - "склеивание" двух вершин графа в одну. Ниже обсуждаются свойства порожденных гомоморфизмом преобразований в пространствах $R^{v(G)}$ вершинных функций и $M(G)$ реберных мер (определение см. в [1]).

Гомоморфизм графов A: $G_1 \to G_2$ - это отображение $v(G_1)$ в $v(G_2)$ соответствующих вершин такое, что из (u смежна с v) следует либо (Au смежна с Av), либо $Au = Av$.

Если u', $v' \in G_2$ смежны, то прообразом $A^{-1}(l)$ ребра $l = u'v'$ называется множество ребер $\{r = uv \mid Au=u',\ Av=v'\}$.

Гомоморфизм A: $G_1 \to G_2$ индуцирует два сопряженных линейных оператора:

$$A^*:\ R^{v(G_2)} \to R^{v(G_1)}, \qquad (A^*f)(u) = f(Au),$$

$$A^*:\ M(G_2) \to M(G_1), \qquad (A^*\mu)(\overrightarrow{uv}) = \mu(\overrightarrow{AuAv})$$

Пространство функций и пространство мер связаны операцией дифференцирования.

Определение. Дифференцирование D: $R^{v(G)} \to M(G)$ - операция, ставящая в соответствие функции f меру $\mu = Df$: $Df(\overrightarrow{uv}) = f(u) - f(v)$.

Теорема 1. $A^*(Df) = D(A^*f)$.

Определение. Носитель $\operatorname{supp}\mu$ меры μ - это множество ребер, на которых $\mu \neq 0$.

Теорема 2. $\operatorname{supp} A^*\mu = A^{-1}\operatorname{supp}\mu$.

Будем обозначать через $Reg(L)$ множество регулярных мер [1] с носителем в L.

Теорема 3. $A^*Reg(L) \subseteq Reg(A^{-1}L)$.

Для подпространства $S \subseteq M(G)$ положим $\operatorname{supp} S = \bigcup\limits_{\mu\in S} \operatorname{supp}\mu$.

Существенной частью $Ess\ L$ множества ребер L назовем подмножество ребер $L' \subseteq L$, концы которых лежат в разных компонентах графа $G\backslash L$. Теорема 3 позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 4. $\operatorname{supp} Reg(L) = Ess\ L$.

Литература

1. Боровских А.В., Колмыков В.А. Интегрирование по дискретным мерам на графах. // Тез. докл. школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы математики и механики", Воронеж, 1995, с. 49.

ФОРМА КАРТАНА-ТИТЦА НА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ КУБАХ

Колмыков В.А., Купцов В.С., Субботин В.Ф. (Воронеж)

Рассматриваются конечные графы Кокстера ([1], с.24), являющиеся деревьями, все веса ребер которых равны 3.

Квадратичная форма B_G, связанная с графом G, определена в [1], с.113.

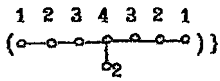
Для натуральных n и m положим:

$$K_{(n,m)} = \{x \in Z^s \mid n \leqslant x_i \leqslant m \ \forall i\}, \quad l(K) = m/n.$$

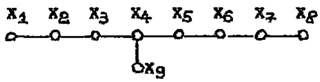
Трехлистником $Z_{p,q,r}$ $(0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r)$ называется граф-звезда с тремя лучами длины p, q, r.

Теорема. Если $3,5 \leqslant l(k) \leqslant 4$, $3 \leqslant q \leqslant r$, то $B_{Z_{1qr}}|_K > 0 \Leftrightarrow q=r=3$. Доказательство основано на трех леммах.

Лемма 1. $3,5 \leqslant l(k) \leqslant 4 \Rightarrow B_{Z_{133}}|_K > 0$.

Доказательство: $B_{Z_{133}} \geqslant 0$, нулевой конус $B_0 = \{\lambda \cdot ($ 

$)\}$.

Взвешивание графа Z_{134} 

сокращенно обозначается $x = (x_1, x_2, \dots, x_9)$.

Лемма 2. $\forall\, n \in N\ \exists\, x \in K(2n,7n)$ такой, что $B_{134}(x) = 0$.

Доказательство: $x = (2n, 3n, 5n, 7n, 5n, 4n, 3n, 2n, 3n)$.

Лемма 3. $\forall\, n \in N\ \exists\, x \in K(2n+1,7n+4)$ такой, что $B_{134}(x) < 0$.

Доказательство: а) $x = (2n+1, 3n, 5n, 7n, 5n, 4n, 3n, 2n+1, [3,5n])$ для $n \geqslant 9$. б) Для $n \in \{1,2,\dots,8\}$ имеем:

$n = 1$, $x = (3,5,8,11,8,6,4,3,5)$, $B = -1$,
$n = 2$, $x = (5,9,13,18,15,12,9,5,9)$, $B = -6$,
$n = 3$, $x = (7,13,19,25,21,17,12,7,12)$, $B = -12$,
$n = 4$, $x = (9,17,25,32,26,20,14,9,16)$, $B = -20$,
$n = 5$, $x = (11,21,30,39,32,25,18,11,20)$, $B = -30$,
$n = 6$, $x = (13,24,35,46,38,30,22,13,23)$, $B = -42$,
$n = 7$, $x = (15,21,35,47,35,28,21,15,24)$, $B = 0$,
$n = 8$, $x = (17,24,40,54,40,32,24,17,28)$, $B = -2$.

Литература

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. - М.: Мир, 1972.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

Колмыков В. А., Субботин В. Ф. (Воронеж)

Оператор L: $C^1_{(a,b)} \to C^0_{(a,b)}$ (пространства непрерывно дифференцируемых и непрерывных функций на (a, b)) называется экстремальным, если выполнено условие: $\forall f\ \forall x$ (x - строгий максимум или минимум для $f \Rightarrow (Lf)(x) = 0)$.

Теорема. (L - линейный экстремальный оператор) $\Rightarrow L(f)=L(id)f'$. Эта теорема была доказана в [1]. Мы предлагаем другое доказательство, использующее оператор интегрирования.

Определение. Для $c \in (a, b)$ положим

$$J_c\colon C^0_{(a,b)} \to C^1_{(a,b)}, \quad J_c(f) = \int\limits_c^x f(t)dt.$$

Множество нулей $\{x|\ f(x) = 0\}$ и смен знака $\{x|\ \exists\ \varepsilon>0\ (x-\varepsilon < y_1 < x < y_2 < x+\varepsilon) \Rightarrow f(y_1)f(y_2) < 0\}$ функции f обозначим N_f, SN_f.

Лемма 1. (L - экстремальный опертор, $A = L\circ J_c) \Rightarrow (\forall f\ SN_f \subset N_{Af})$.

Лемма 2. Если A: $C^0 \to C^0$ - линейный оператор, то

$$A = A(1)I \overset{1}{\longleftrightarrow} (\forall f\ N_f \subset N_{Af}) \overset{2}{\longleftrightarrow} (\forall f\ SN_f \subset N_{Af})$$

Доказательство. 1 следует из $(f_1(x_0) = f_2(x_0) \Rightarrow Af_1|_{x_0} = Af_2|_{x_0}) \Rightarrow (\forall g\ \forall x_0\ Ag|_{x_0} = A(g(x_0)\cdot 1)|_{x_0} = g(x_0)A(1)|_{x_0})$. 2 следует из $\forall f\ \forall x \in N_f\ \exists g, h\ (x \in SN_g \wedge x \in SN_h \wedge f = g+h)$.

Лемма 3. Если L - линейный экстремальный оператор, то

$$L\circ J_c = L(id)I.$$

Правого обратного для J_c не существует. Постараемся решить уравнение $L\ J_c\ X = L$ в классе линейных операторов. $L\circ J_c\circ X = L \Leftarrow J_m(J_c X - I) \subseteq \operatorname{Ker} L \Leftarrow J_m(J_c \circ X - I) = \{const\} \Leftarrow J_c\circ X = I + \varphi U$ (здесь φ - какой-либо функционал, U: $C^1 \to C^0$, $U(f) \equiv 1) \Leftarrow (X = D,\ \varphi = -\delta_c$ - функционал Дирака).

Итак, $L = L\circ J_c\circ D = A(id)D$.

Литература

1. Колмыков В. А., Субботин В. Ф. Оператор, находящий экстремумы. Тезисы Воронежской мат. школы "Понтрягинские чтения - 5", 1994, с. 73.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕРАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Коломоец А. А. (Саратов)

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка конечной длины, шарнирно опертая по торцам, нагруженная статическим неравномерным внешним давлением. Оболочка имеет начальные несовершенства, образующие случайное однородное гауссово поле.

В качестве исходных принимаются уравнения теории пологих оболочек при конечных прогибах в смешанной форме (кинематическая модель Кирхгофа-Лява) [1].

$$\frac{D}{h}\nabla^4(w-w_0) = L(w,\Phi) + \nabla_k^2\Phi + \frac{q}{h},$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}\left[L(w,w) - L(w_0,w_0)\right] - \nabla_k^2(w-w_0). \qquad (1)$$

Граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \qquad (2)$$

w_0 - начальный прогиб.

Применяется метод моделирования, основанный на разложении случайного поля в ряд Фурье. Спектральная плотность поля $w_0(x,y)$ известна. Реализации случайного поля моделируются методом Монте-Карло.

Решая задачу (1)-(2), получаем реализацию напряженно-деформированного состояния оболочки. Задача (1)-(2) решается с применением метода И.Г.Бубнова в высших приближениях и метода Ньютона-Канторовича. Находим критическую нагрузку для каждой реализации. Статистические характеристики критической нагрузки получаются осреднением по ансамблю. По найденным моментам критической нагрузки находим плотность ее распределения.

Литература

1. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. - М.:Гостехиздат,1956. - 419 с.

УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КВАНТОВЫХ СРЕДНИХ

Кондратьева М.Ф., Белов В.В. (Москва)

Пусть $\bar{A} = \Psi|\hat{A}|\Psi$ - среднее значение оператора $\hat{A}$ по состоянию $\Psi(x,t)$, $x \in R^N$, уравнения Шредингера $i\hbar\dot{\Psi} = \mathcal{H}(\hat{x},\hat{p})\Psi$, $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$.

Согласно теореме Эренфеста (1927 г.), эволюция средних $\bar{x}(t)$ и $\bar{p}(t)$ операторов координат $\hat{x}$ и импульсов $\hat{p}$ в случае квадратичного гамильтониана описывается соответствующими уравнениями классической механики.

Для задач с неквадратичным и, более того, матричным (K×K) гамильтонианом $\mathcal{H}(\hat{x},\hat{p})$, нами получена [1,2,3] бесконечномерная система ОДУ относительно средних $\hat{x},\hat{p}$ и набора операторов $\hat{\eta}$. В качестве такого набора выбран базис в пространстве $Mat_K\mathbb{C} \otimes U(W_N)$, где $U(W_N)$ - универсальная обертывающая алгебры Гейзенберга-Вейля. Здесь алгебра W_N порождена специальными, зависящими от времени t операторами $\hat{I}$, $\hat{x} - \bar{x}(t)\hat{I}$, $\hat{p} - \bar{p}(t)\hat{I}$, где $\hat{I}$ - тождественный оператор. Полученную систему можно записать в гамильтоновой форме $\dot{\bar{\eta}} = \{\bar{\eta}, H(\bar{\eta})\}$. Соответствующая скобка Пуассона $\{,\}$ вырождена и является суммой стандартной скобки на R^{2N} по переменным $(\bar{x},\bar{p})$ и обобщенной скобки Дирака по остальным переменным.

Формулы вычисления функции Гамильтона $H(\bar{\eta})$ и скобки Дирака по символу (x,p) зависят от выбранного упорядочения и приведены в [2,3].

Существует класс специальных состояний, локализованных в окрестности классической траектории. Для таких состояний рассмотрена возможность аппроксимации бесконечной системы семейством конечных систем, параметризованным порядком M приближения по параметру $\hbar \to 0$. Низшая точность (M = 0) дает уравнения классической механики.

Решения полученных систем определяют среднее произвольного оператора с символом $A(x,p) \in Mat_K\mathbb{C}$ с соответствующей точностью по $\hbar$, что эквивалентно вычислению среднего по приближенным $\mathrm{mod}(\hbar^{(M+1)/2})$ состояниям Ψ уравнения Шредингера. Изучение полученных систем ОДУ является отдельной задачей. Исследование системы при M = 2 для одномерного ангармонического осциллятора (K = 1, N = 1) проведено в [4].

Литература

1. Багров В.Г., Белов В.В., Кондратьева М.Ф. Квазиклассическое приб-

лижение в квантовой механике. Новый подход.// ТМФ 98:1(1994), 48-55.
2. Белов В.В., Кондратьева М.Ф. Гамильтоновы системы уравнений для квантовых средних.// Матем. заметки 56:6 (1994), 27-39.
3. Белов В.В., Кондратьева М.Ф. Уравнения относительно квантовых средних для матричных гамильтонианов.// Матем. заметки (1995, в печати).
4. Садов С.Ю. О динамической системе, возникшей из одной конечномерной аппроксимации уравнения Шредингера.// Матем. заметки 56:3 (1994), 118-133.

СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Конюхова Н.Б. (Москва)

Система n нелинейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) рассматривается на полубесконечном интервале $T \leqslant t < \infty$. При $t \to \infty$ задаются предельные значения искомых функций или условия ограниченности решения. Приводятся локальные и нелокальные теоремы существования и единственности решения таких сингулярных задач Коши, причем входящий в ФДУ оператор необязательно должен быть вольтерровым. Формулируются достаточные условия неединственности решения - существования n-параметрического семейства решений, удовлетворяющих заданным условиям на бесконечности. Частными случаями рассматриваемых систем являются системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с несуммируемой особенностью по независимой переменной в конечной или бесконечно удаленной начальной точке, в том числе с отклоняющимся аргументом, системы интегродифференциальных уравнений и др. Развиваемое направление стимулировано, в частности, теми задачами, которые возникают при изучении устойчивых многообразий решений как целого для вырождающихся систем ОДУ, при постановке и исследовании сингулярных краевых задач для таких систем и обосновании методов переноса граничных условий, или движущихся линейных многообразий, для их численного решения. Сингулярные задачи Коши представляют и самостоятельный математический интерес.

Литература

1. Конюхова Н.Б.// ДАН СССР, 1987, т. 295, N 4, 798-801.

2. Конюхова Н. Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. // Сообщ. по прикл. матем. - М.: ВЦ АН СССР, 1988. - 66 с.
3. Конюхова Н. Б. // Дифференц. уравнения (в печати).

О РЕДУКЦИИ ФАЗОВОГО ПОТОКА ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Красильников П. С. (Москва)

Исследуется задача о сведении фазового потока нелинейной интегрируемой системы к фазовому потоку линейных уравнений. Показано, что если исходная нелинейная система

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^r, \quad x \in R^n \tag{1}$$

допускает интегральный базис F_j: $R^n \to R^1$, $j = 1,\dots,n-1$, то приведение системы (1) к виду

$$\dot{y} = \mu(y)(Ay + B),$$

где A, B - постоянные матрицы, $\mu(y)$ - скалярный множитель, имеет место в том случае, когда искомая замена переменных $x \to y$ удовлетворяет "условию редукции", т.е. отображает интегральный базис $\{F_j(x)\}$ уравнений (1) в интегральный базис $\{G_j(y)\}$ уравнений $\dot{y} = Ay + B$.

Подробно исследованы случаи $n = 2, 3$. В качестве примеров рассмотрены задачи о редукции фазовых потоков модельных гамильтоновых систем при резонансах 1:2, 1:3, уравнений движения твердого тела в случае Эйлера-Пуансо, уравнения Дюффинга, уравнения движения проводника с током.

О СВОЙСТВАХ ПРЕДПУЧКА SC^r-ФУНКЦИЙ

Кунаковская О. В. (Воронеж)

Пусть (X, S) - SC^r-многообразие [1, 2]. Семейство функций $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\rho}$ $\subset SC^r(X)$ будем называть SC^r-разбиением единицы, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом носителей функций φ_α и если $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ для каждой точки $x \in X$. Будем говорить, что X допускает SC^r-разбиение единицы, если для любого открытого покрытия $\{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{Z}}$ многообразия X существует SC^r-разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in p}$ такое, что носитель каждой функции φ_α содержится в некотором множестве $V_в$. Банахово пространство E будем называть SC^r-гладким, если существует SC^r_e-функция g: $E \to R$, $r \geqslant 2$, с ограниченным непустым носителем.

Теорема 1. [1,2] Пусть (X,S) - хаусдорфово SC^r-многообразие со счетной базой, моделируемое SC^r-гладким банаховым пространством E $r \geqslant 2$. Тогда а) X допускает SC^r-разбиение единицы; б) для $f \in C^0(X,R)$ и $p \in C^0(X,R)$, $p > 0$, существует SC^r-функция g, аппроксимирующая f в тонкой топологии, т.е. $|g(x) - f(x)| < p(x)$ для любого x X; в) если A и B - два замкнутых непересекающихся множества в X, то существует SC^r-функция f: $X \to [0,1]$ такая, что $f = 0$ в некоторой окрестности A и $f = 1$ в некоторой окрестности B.

Анализ конструкции SC^r-структур позволил связать их со свойствами пучков. Как показано в [2], для любого SC^r-многообразия X и произвольного $r \geqslant 2$ функтор SC^r является предпучком с базой X и созначениями в категории алгебр над полем R.

Теорема 2. [2] Пусть (X,S) хаусдорфово SC^r-многообразие со счетной базой, моделируемое SC^r-гладким банаховым пространством, $r \geqslant 2$. Тогда пучок $\widetilde{SC^r}$ ростков SC^r-функций над X является тонким.

Литература

1. Kunakovskaya O.V. On properties of some klasses of smooth functions on Banach spaces and manifolds.//Methods appl. of global analysis. - Voronezh Univ. Press, 1993. - p.81-93.

2. Кунаковская О.В. О некоторых классах гладких функций на банаховых многообразиях.// Деп. в ВИНИТИ 11.04.94, N 864-В94, 28 с.

3. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. - М.: ИЛ, 1961. - 320 с.

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Кущев А.Б. (Воронеж)

Рассмотрим дифференциальное уравнение пятого порядка

$$x^{(5)}+a_4x^{(4)}+a_3x^{(3)}+a_2x''+a_1x'+f(x)+\varphi(t,x,x',x'',x^{(3)},x^{(4)}) = 0,$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ непрерывны по совокупности переменных, а функция $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \varphi(t, X)$ ω-периодична по t. Мы будем также предполагать, что

$$K_1 < \frac{f(x)}{x} < K_2 \;\; (|x|>R,\; k_1 k_2 > 0) \quad \text{и} \quad \lim_{\|X\|\to\infty} \frac{\sup\limits_t \varphi(t, X)}{\|X\|} = 0.$$

Анализ вынужденных колебаний будем проводить методом направляющих функций, предложенным М.А.Красносельским и его учениками. Для соответствующей системы строятся правильные направляющие функции вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" (в отличие от функций Ляпунова-Лурье они не обязательно знакопостоянны), с помощью которых доказывается существование ω-периодических решений исходного уравнения при выполнении одного из следующих условий:

(1) $a_1 > 0$, $a_3 \leqslant 0$; (2) $a_3^2 - 4a_1 < 0$; (3) $k_1 a_2 \leqslant 0$, $k_1 a_4 \geqslant 0$;

(4) $a_2^2 - 4k_1 a_4 < 0$ при $k_1 > 0$ или $a_2^2 - 4k_2 a_4 < 0$ при $k_2 < 0$.

С помощью принципа родственности полученные результаты распространяются на аналогичное уравнение пятого порядка с запаздывающим аргументом.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975. - 512 с.

2. Кущев А.Б. О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений пятого порядка. - Воронеж, 1988. Рукопись деп. в ВИНИТИ 3.08.1988 N 6203-В 88. - 10 с.

3. Кущев А.Б. О вынужденных колебаниях одного класса нелинейных систем пятого порядка. - Воронеж, 1991. Материалы научно-технической конференции, посвященной 60-летию ВИСИ.

КОНЕЧНОМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ SG-УРАВНЕНИЯ

Левченко О.Н. (Елец)

Известно [1], что для синус-уравнения Гордона $u_{xt} = \sin u$ при (ω_1, ω_2)-периодических краевых условиях

$$u(x, t) = u(x+\omega_1, t) = u(x, t+\omega_2)$$

(с произвольными ω_1, ω_2) существует решение вида $u(x, t) = \varphi(2(x/\omega_1 -$

$t/\omega_2)$), где φ – периодическое решение (периода 2) интегрируемого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varphi_{ss} + \lambda\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

в котором $s = 2(x/\omega_1 - t/\omega_2)$, $\lambda = \omega_1\omega_2/4$. Известно также, что решения периода 2 уравнения (1) в свою очередь разыскиваются как решения этого же уравнения при краевых условиях

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) при условиях (2) задает экстремали функционала

$$V(x.\lambda) = \int_0^1 \Big(\frac{\dot\varphi^2}{2} + \lambda(\cos\varphi - 1)\Big)ds.$$

При $\lambda < 4\pi^2$ исследование этого функционала сводится к изучению поведения функции (ключевой)

$$W(\xi,\lambda) = 4\lambda k^2 \int_0^1 (cn^2(\sqrt{\lambda}\, s;k) - 1/2)ds,$$

наследующей топологические свойства этого функционала [2,3]. Скалярная переменная ξ связана с параметром соотношением $\sin(\xi/2) = k\, sn(\sqrt{\lambda} s/2;\ k)$, где $sn(v;k)$ – эллиптический синус. При ограничении $\lambda < ((n+1)\pi)^2$ исследование V сводится к изучению явно заданной ключевой функции на R^n.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976.
2. Левченко О.Н. Маргинальный анализ равновесия эйлерова стержня.//Тезисы 6-ой Межвузовской научной конференции молодых ученых. – Липецк, 1992, с.170.
3. Levchenko O.N., Sapronov Yu.I. Morse-Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rood.//Methods and Appl. of Global Analysis. – Voronezh Univ. Press, 1993, p.95-100.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж)

Система уравнений нестационарной тепловой конвекции одного из классов микроструктурных жидкостей в плоском вертикальном канале с различной температурой стенок $y = -1$, $y = 1$ имеет вид

$$\partial T/\partial t = d\partial^2 T/\partial y^2 \quad (1); \quad \partial \nu_z/\partial t = a\partial^2 \nu_z/\partial y^2 - k^2(\nu_z + 2^{-1}\partial v_x/\partial y) \quad (2)$$

$$\partial v_x/\partial t = \partial^2 v_x/\partial y^2 + 2b\partial \nu_z/\partial y + g(t)T. \quad (3)$$

Здесь - $T(y,t)$, $v_x(y,t)$, $\nu_z(y,t)$ - соответственно температура, скорость течения, проекция угловой скорости микровращения на ось z - искомые функции, $g(t)$ - нестационарное ускорение силы тяжести; a, b, d - положительные постоянные. Показано, что система уравнений (2)-(3) преобразованием

$$v_x^{\cdot} = \tilde{v}_x - 2bk^{-2}\partial\tilde{\nu}_z/\partial y; \quad \nu_z = \tilde{\nu}_z - 2^{-1}\partial\tilde{v}_x/\partial y \quad (4)$$

расщепляется на отдельно решаемые уравнения теплопроводности с источниками, вид которых определяется решениями уравнения (1). Это позволяет использовать известные группы симметрий и автомодельные решения [2] для построения в общем случае неавтомодельных решений исходной системы (1)-(3). В частности, при $q = q_0 = \mathrm{const}$, $T = y$ система распадается на три уравнения теплопроводности без источников

$$\partial v/\partial t = a\partial^2 v/\partial y^2; \quad \partial \nu/\partial t = \partial^2 \nu/\partial y^2; \quad \partial T/\partial t = d\partial^2 T/\partial y^2, \quad (5)$$

для которых автомодельные решения, в частности, тепловые полиномы, хорошо известны [2]. В (5) переменные $v(x,t)$, $\nu(x,t)$ связаны с $\tilde{v}_x$, $\tilde{\nu}_z$ соотношениями

$$\tilde{v}_x = v - g_0(ac)^{-1}y^3; \quad \tilde{\nu}_z = (\nu - g_0 C^{-1}y^2)\exp(-k^2 t). \quad (6)$$

Уравнения (5) соответствуют классу задач нестационарных конвективных течений в постоянном поле силы тяжести между двумя вертикальными изотермическими плоскостями с разными, но постоянными температурами. Нестационарность течений создается ускоренно движущимися плоскостями. В частном случае неподвижных плоскостей из (5) следует решение [1].

Литература

1. Мигун Н.П., Прохоренко П.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурных жидкостей. - Мн.: Наука и техника, 1984. - 264 с.

2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОЧВ

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж)

В теплофизической модели [1] для расчета температурных волн, возникающих в почве вследствие суточного вращения Земли, используется уравнение теплопроводности вида

$$x^n\,\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \phi(\omega t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + Q(x,t), \qquad (1)$$

где n, m - постоянные, ω - угловая скорость вращения Земли; ϕ - заданные функции.

Найдены группы [2] симметрий уравнения (1) для различных комбинаций n, m, Q, ϕ, возможные варианты автомодельных переменных; получены соответствующие им обыкновенные дифференциальные уравнения. Например, при $n-m = k$, $Q = 0$ автомодельное решение имеет вид

$$T(x,t) = \left(\int_0^t \phi(\omega\tau)d\tau\right)^{\lambda} \varphi(\eta), \qquad \eta = x\left(\int_0^t \phi(\omega\tau)d\tau\right)^{-1/(2+k)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d^{\ 2}} + \frac{d\varphi}{d}\left(m + \frac{1}{2+k}\ ^{2+k}\right) - \varphi\lambda\ ^{1+k} = 0,$$

где λ - произвольная постоянная.

В частности, при $m=n=1$, $Q=0$ уравнение (1) имеет алгебру Ли L^3 операторов, базис которой

$$a_1 = (0,1,0), \quad a_2 = (\hat{x}, 2\hat{y}, 0), \quad a_3 = [-4\hat{x}\hat{y}, -4\hat{y}^2, (\hat{x}^2+2\hat{y})\hat{z}],$$

где через $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ обозначены

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{y} = \int_0^t \phi(\omega\tau)d\tau, \qquad \hat{z} = T(x,t)\cdot\sqrt{x}.$$

Получены тепловые полиномы и ряд других точных решений.

Литература

1. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. - М.: Наука, 1986. - 352 с.

2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ В МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Лусников А.В. (Москва)

Изучаются многоконтурные системы управления, динамика которых описывается системой уравнений

$$L_i(p)x_i = M_i(p)f_i(t, x_1(t), \ldots, x_N(t), x_1(t-h_1), \ldots, x_N(t-h_N)). \quad (1)$$

Функции $f_i(t, x_1(t), \ldots, x_N(t), y_1, \ldots, y_N)$ не обязательно непрерывны по фазовым переменным x_i, y_i. Предполагается, что эти функции ограничены, обладают свойством T-периодичности по t и не убывают по всем фазовым переменным $x_1(t), \ldots, x_N(t), y_1, \ldots, y_N$. Предполагается, что существуют и строго положительны отвечающие T-периодической последовательности единичных импульсов импульсно-частотные характеристики (ИЧХ) всех линейных звеньев с передаточными функциями $W_i(p) = M_i(p)/L_i(p)$.

Предлагаются условия существования у системы (1) T-периодических режимов без промежутков скольжения.

Для формулировки основного результата вводится в рассмотрение квадратная матрица $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,N}$, элементами которой являются числа 0 и 1. При этом $a_{ij} = 1$, если и только если функция $f_i(t, x_1(t), \ldots, x_N(t), y_1, \ldots, y_N)$ строго возрастает хотя бы по одной из переменных x_j, y_j. Последовательность

$$a_{i_1 i_2},\ a_{i_2 i_3},\ \ldots,\ a_{i_k i_1}$$

ненулевых элементов матрицы a_{ij} образует дорожку невырожденности, если $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3, \ldots, i_k \neq i_1$ и среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$ есть все числа $1, \ldots, n$.

Теорема 1. Если у матрицы A есть дорожка невырожденности, то у системы (1) есть по крайней мере одно T-периодическое решение без промежутков скольжения.

Существующие в силу теоремы 1 решения при почти всех t являются точками непрерывности правых частей по фазовым переменным, поэтому они являются правильными с смысле М.А.Красносельского - А.В.Покровского решениями.

Теорема 1 доказана при помощи общих методов, развитых М.А.Красносельским и автором и существенно использующих методы теории конусов М.Г.Крейна.

О ВЫЖИВАЮЩИХ ТРАЕКТОРИЯХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Маренкова С.Ю., Обуховский В.В. (Воронеж)

Пусть X и Z - сепарабельные банаховы пространства состояний и управлений соответственно; $K \subset X$ - непустое замкнутое множество и $T_K(x)$ - касательный конус Булигана в $x \in K$. Множество K называется приглаженным, если мультиотображение $x \to T_K(x)$ полунепрерывно снизу.

Рассматривается управляемая система (f,U) с последействием и обратной связью

$$x'(t) = F(t, x_t, u(t, x_t)), \quad \text{п.в. } t \in [0,T],$$

$$u(t, x_t) \in U(t, x_t), \quad t \in [0,T],$$

где $x_t \in \mathscr{C} = C([-\tau, 0]; X)$, $x_t(\Theta) = x(t+\Theta)$. Предполагается, что отображение динамики f: $[0,T] \times \mathscr{K}_K \times Z \to X$, где $\mathscr{K}_K = \{\varphi \in :\varphi(0) \in K\}$, удовлетворяет условиям Каратеодори и афинно по последнему аргументу. Мультиотображение обратной связи U: $[0,T] \times \mathscr{K}_K \to Z$ имеет выпуклые замкнутые значения, измеримо и полунепрерывно снизу по второму аргументу. Пусть множество K приглажено и выполняется следующее условие тангенциальности: для п.в. $t \in [0,1]$ и всех $\varphi \in \mathscr{K}_K$ найдутся $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и $r > 0$ такие, что для каждого $\tilde{\varphi} \in \mathscr{K}_K$, $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta$ выполнено

$$\gamma B_X \subset f(t, \tilde{\varphi}, U(t, \tilde{\varphi}) \cap rB_Z) - T_K(\tilde{\varphi}(0)),$$

где B_X и B_Z - единичные шары в пространствах X и Z соответственно.

Тогда при некоторых дополнительных условиях существует управление u: $[0,T] \times \mathscr{K}_K \to Z$ типа Каратеодори, удовлетворяющее условию обратной связи $u(t,\varphi) \in U(t,\varphi)$ и такое, что любая соответствующая траектория $x(\cdot)$ системы (f,U) с произвольным начальным значением $\varphi_0 \in \mathscr{K}_K$ является выживающей, т.е.

$$x(t) \in K \quad \text{для всех } t \in [0,1].$$

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ММВФ) В ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Маркуш И.И. (Ужгород), Ризун В.И. (Алчевск)

В теории сложных систем (ТСС) [1-3] большую роль играют методы, основанные на декомпозиции исходной системы. Но декомпозиция системы связана с преобразованиями, которые требуют (с вычислительной стороны) большой предварительной работы. Кроме этого, преобразования эти возможны лишь при выполнении определенных условий для их успешной реализации [1-3].

В настоящей работе предлагается один подход исследования сложных систем, основанный на ММВФ [3-4].

Сущность этого подхода заключается в том, что он позволяет исследовать сложные системы, минуя процедуру декомпозиции исходной системы. Это достигается благодаря введению новых систем функций, которые обладают свойством базиса Н. Бари в пространстве Гильберта $L_2(J)$.

Предложенный подход иллюстрируется на примерах, которые часто встречаются в ТСС.

Кроме этого, в настоящей работе изложен метод построения сложных систем, обладающих заданным качеством.

Литература

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. - Киев: Наук. думка, 1990. - 269 с.

2. Митропольский Ю. А., Лопатин А. К. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. - Киев: Наук. думка, 1988. -271 с.

3. Ирклиевский В. Д., Ризун В. И. Математические методы исследования движений сложных подвижных объектов. - Киев: ИСИО, 1994. - 409 с.

4. Ризун В. И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение. - Киев: ЦБНТИ, 1991. - 331 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Митин С. П. (Владимир), Солдатов А. П. (Новгород)

Для эллиптической системы

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0, \qquad x \in D,$$

с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in R^{l\times l}$ рассматривается обобщенная смешанная задача

$$(d_1 u)(x) = f_1(x), \qquad (d_2 \delta u)(x) = f_2'(x), \qquad x \in \Gamma,$$

где δ является граничной конормальной производной $\Sigma\, a_{ij} n_i \partial u/\partial x_j$, штрих означает производную по длине дуги, а d_1 и d_2 представляют собой прямоугольные матрицы-функции порядков соответственно $r \times l$ и $(l-r) \times l$, причем целочисленная величина $0 \leqslant r \leqslant l$ кусочно-постоянна на границе Γ области D.

В работе показывается, что при некоторых предположениях условия разрешимости этой задачи в классической постановке [1] можно описать как условия ортогональности к решениям формально сопряженной задачи. Основное предположение заключается в том, чтобы слабое (в $L_2(D)$) решение этой однородной задачи совпало с сильным.

Для классической смешанно-контактной задачи плоской теории упругости [2] аналогичный вопрос был изучен в [3].

Литература

1. Солдатов А.П.//Изв. РАН. Сер. матем. 1992, т.56.

2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., 1966. N 3, с.566-604.

3. Митин С.П., Солдатов А.П.//Дифференц. уравнения. 1993, т.29, N 3, с.885-889.

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Молчанов А.П., Морозов М.В. (Москва)

Рассматривается класс нелинейных непрерывных (дискретных) систем с периодическими ограничениями на матрицу линейной части. Предполагается, что система имеет нулевое решение, а значения функций, определяющих нелинейную часть системы, принадлежат некоторым множествам, изменяющимся во времени по заданным периодическим законам.

Для указанного класса нестационарных систем рассматривается задача робастной устойчивости. Под робастной устойчивостью понимается асимптотическая устойчивость нулевого решения каждой системы из рассматриваемого класса систем.

Показано, что задача определения условий робастной устойчивости для изучаемого класса систем сводится к задаче асимптотической устойчивости нулевого решения дифференциального (разностного) включения с периодической по времени многозначной правой частью, структура которой определяется исходной системой.

При анализе асимптотической устойчивости дифференциального (разностного) включения используется метод функций Ляпунова. С помощью этого метода установлен критерий робастной устойчивости в форме условий существования периодической по времени, квазиквадратичной функции Ляпунова, строго убывающей на решениях исследуемой системы. Выделены также и другие классы периодических функций Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия робастной устойчивости, и установлен алгебраический критерий робастной устойчивости в форме условий разрешимости системы матричных уравнений специального вида.

Работа выполнена в рамках проекта 94-01-00787а, финансируемого Российским фондом фундаментальных исследований.

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА УСЛОВИЙ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДОГО МАТЕРИАЛА В ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕЛЬЧИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Муганлинский С.Г., Галич В.А. (Алчевск)

Расчет условий разрушения материала в рабочей полости динамической измельчительной машины имеет большое значение на ранней стадии проектирования новой машины, когда замысел изобретения облекается в конкретную кинематическую схему рабочих органов.

Аналитическое описание процесса разрушения совокупности частиц материала в рабочей полости динамической измельчительной машины может основываться на решениях следующих задач:

1. Выбор физической модели совокупности измельчаемого материала, соответствующей конкретной кинематической схеме рабочих органов машины.

2. Постановка и решение задачи о напряженном состоянии совокупности измельчаемого материала в принятой ее физической модели.

3. Аналитический расчет условий разрушения отдельного материала под действием расчитанного силового поля.

В данной работе предлагается реализация такого подхода к расчету условий разрушения материала применительно к каждой вибрационной измельчительной машине. При этом в качестве физической модели совокупности материала в виде сыпучей среды, обладающей сцеплением и внутренним сухим трением. На основе использования дифференциальных уравнений движения сыпучей среды и известного закона движения поверхности рабочей полости машины была поставлена широкая краевая задача для расчета напряженного состояния совокупности материала. Для одного из упрощенных случаев было получено решение этой задачи. Для расчета условий разрушения отдельного куска материала была также поставлена краевая задача расчета коэффициента интенсивности напряжений на берегах трещины, существование которой предполагается. Для решения этой задачи был использован метод конечных элементов.

ПОЗИТИВНАЯ ОБРАТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

Мустафокулов Р. (Душанбе)

На графе Г рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv (py'')'' - (qy')' = f, \tag{1}$$

где во внутренних вершинах $a \in J(\Gamma)$ предполагаются выполненными условия связи

$$y_i(a) = y_j(a), \quad y_i''(a) = 0 \quad (i,j \in I(a)),$$

$$\sum_{i\in I(a)} \alpha_i(a)[(p_i y_i'')' - q_i y_i'](a+0) + æ(a)y(a) = 0 \quad (\alpha_i(a) \geqslant 0) \tag{2}$$

(здесь $I(a)$ - множество индексов ребер γ_i, примыкающих к вершине a, и $æ(a)$ - соответствующее этой вершине неотрицательное число), а в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$ - краевые условия типа

$$\alpha(b)[(py'')'-qy'](b-0) - æ(b)y(b) = 0 \quad (\alpha \geqslant 0,\ æ > 0),$$

$$\beta(b)y''(b) + \delta(b)y'(b-0) = 0 \quad (\beta \geqslant 0,\ \delta \geqslant 0;\ \beta+\delta > 0). \tag{3}$$

Предположим, что $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ на Г, причем $q_i(x) \neq 0$ на каждом ребре γ_i. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma \backslash J(\Gamma)$. В этих предположениях задача (1)-(3) является однозначно разрешимой при любой правой части $f \in C(\Gamma_0)$, т.е. существует обратный оператор L^{-1}, действующий из $C(\Gamma_0)$ в $C^4(\Gamma)$. Стандартным образом проверяется, что этот оператор может быть представлен в виде интегрального

$$(L^{-1}f)(\cdot) = \int_{\Gamma} G(\cdot,s)f(s)ds, \tag{4}$$

где функция $G(\cdot,\cdot)$, определенная на $\Gamma\times\Gamma$, называется функцией Грина задачи (1)-(3) на графе Γ.

В докладе показывается, что функция $G(\cdot,\cdot)$ знакопостоянна и, более того, порождаемый ею интегральный оператор (4) обладает свойством усиленной знакорегулярности по конусу $K(\Gamma)$ неотрицательных функций в $C(\Gamma)$.

Мы назовем задачу (1)-(3) позитивно обратимой, если любые ее два нетривиальные решения $y(\cdot)$, $z(\cdot)$ при $f(\cdot) \geqslant 0$ соизмеримы по конусу $K(\Gamma)$.

Теорема. Если $f(x) \geqslant 0$ $(x \in \Gamma_0)$, то задача (1)-(3) позитивно обратима, а ее функция Грина $G(\cdot,\cdot)$ строго положительна на Γ и удовлетворяет неравенствам

$$y_0(x)z_1(s) \leqslant G(x,s) \leqslant y_0(x)z_2(s),$$

где $y_0(x)$ - решение краевой задачи (1)-(3) при $f(x) \equiv 1$, а $z_i(s)$ $(i=1,2)$ - положительные, суммируемые на Γ функции.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Павленко В.Н. (Челябинск)

Рассматривается первая краевая задача

$$Lu \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} = -g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega\times(0,T)$ (Ω - ограниченная область в R^n с границей S класса C^2), где дифференциальный оператор L равномерно параболический и его коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ вместе с их обобщенными производными первого порядка принадлежат $L_\infty(Q_T)$, Γ_T - параболическая граница цилиндра Q_T, функция $g\colon Q_T\times R \to R$ равна разности суперпозиционно измеримых функций $g_1(x,t,u)$ и $g_2(x,t,u)$, неубывающих по u на R для почти всех $(x,t) \in Q_T$. Сильным решением задачи (1)-(2) называется функция $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > 1$, след которой на Γ_T равен нулю, удовлетворяющая почти всюду на Q_T уравнению (1).

Теорема. Предположим, что

1) существует семейство гиперповехностей $\{S_i,\ i\in U\}$ в R^{n+2}, $S_i = \{(x,t,u) \in R^{n+2} | u = \phi_i(x,t),\ (x,t)\in Q_T\}$, $\phi_i \in W^{2,1}_{1,loc}(Q_T)$, U конечно или счетно, таких, что для почти всех $(x,t) \in Q_T$, неравенство $g_1(x,t,u-) < g_1(x,y,u+)$ влечет существование $i \in U$, для которого $u = \phi_i(x,t)$ и либо $(L\phi_i(x,t) + g_1(x,t,u-) - g_2(x,t,u))(L\phi_i(x,t) + g_1(x,t,u+) - g_2(x,t,u)) > 0$, либо $L\phi_i(x,t) + g(x,t,\phi_i(x,t)) = 0$;

2) для почти всех $(x,t) \in Q_T$ верна оценка

$$|g_i(x,t,u)| \leqslant k|u| + b(x,t) \qquad \forall\, u \in R,$$

где k - положительная константа, $b \in L_2(Q_T)$, $i=1,2$.
Тогда задача (1)-(2) имеет сильное решение, принадлежащее $W^{2,1}_2(Q_T)$.

Данная теорема обобщает основной результат работы [1].

Литература

1. Павленко В.Н. О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью.// Дифференциальные уравнения, 1991, т.27, N 3, с.520-526.

СЛОЖНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

Рассматриваемые импульсные системы осуществляют преобразование конечного множества ординарных последовательностей δ-функций ξ_j, $j=\overline{1,M}$, в множество таких же последовательностей ζ_i, $i=\overline{1,N}$. Последовательность $\xi_j = \sum_k \delta(t-t_j^k)$ называется ординарной, если $t_j^{k+1} - t_j^k \geqslant \tau_0 > 0$. Система состоит из N подсистем, $i=\overline{1,N}$. Каждая подсистема содержит линейный оператор A_i: $\{\xi_j\}_1^M \to \eta_i$, действующий по формуле $\eta_i = \sum_j a_{ij}(t)\xi_j/M$, и нелинейный оператор B_i: $\eta_i \to \zeta_i$, определяемый уравнениями

$$\dot{u}_i = b_i(u_i,t) + \eta_i(t); \quad \dot{y}_i = g_i(y_i,u_i); \quad u_i(0) = u_i^0; \; y_i(0) = y_i^0, \quad (1)$$

и условиями для нахождения моментов t_i^k: $\beta_i(u_i(t_i^k-0)) = y_i(t_i^k-0)$ или $\beta_i(u_i(t_i^k-0)) > y_i(t_i^k-0) > \beta_i(u_i(t_i^k+0))$; разрыв $y_i(t)$ задан условием $y_i(t_i^k+0) = \alpha_i(u_i(t_i^k+0))$. Функции α_i, β_i, b_i, g_i гладкие, $g_i > 0$.

Множество $\zeta_i = \sum_k \delta(t-t_i^k)$, $i=\overline{1,N}$ на каждом интервале $(t, t+\Delta)$ длиной Δ разделяется на два подмножества: $\mathbb{N}_0(\Delta)$ - множество "молчащих" подсистем ($\zeta_i(t, t+\Delta) = 0$), и дополнительное к нему множество "активных" подсистем $\mathbb{N}_1(\Delta)$, $\zeta_i(t, t+\Delta) \geqslant 1$, $i \in \mathbb{N}_1(\Delta)$. При $\Delta < \tau_0$ моменты t_i^k, $i \in \mathbb{N}_1(\Delta)$ называются Δ-синхронными, множество $\mathbb{N}_1(\Delta)$-множеством синхронизации.

Две или более таких систем могут быть соединены последовательно так, чтобы выходной сигнал первой системы являлся входным сигналом второй. В этом случае можно рассматривать Δ-синхронные множества каждого уровня и их преобразования в составной (или "многослойной") системе.

Системы, соединенные между собой, могут содержать обратные связи, если множество выходных последовательностей одной из систем является множеством входных последовательностей какой-либо системы одного из предыдущих уровней. Простейшим случаем обратной связи является одна система, у которой $M = N$, $\xi_j = \zeta_j$, $j=\overline{1,N}$. Для такой системы найден алгоритм вычисления Δ-синхронного множества при больших N. Для симметричной системы с обратными связями найдена асимптотика при $N \to \infty$.

О СИЛЬНО ВЫПУКЛОМ АНАЛИЗЕ

Половинкин Е.С. (Долгопрудный)

Доклад посвящен изучению свойств сильно выпуклых множеств, т.е. таких множеств, каждое из которых представимо в виде пересечения шаров одного радиуса. Сильно выпуклые множества изучались в монографии М.А.Красносельского и А.В.Покровского "Системы с гистерезисом", где показано, что сильно выпуклые множества обеспечивают хорошие свойства систем с гистерезисом. Также сильно выпуклые множества изучались в работах A.Plis, Jr.Lojasiewicz, H.Frankowska, C.Olech при исследовании выпуклости множеств достижимости нелинейных управляемых систем. В работе Г.Е.Иванова и Е.С.Половинкина (см. Доклады РАН, т.340, N 2, 1995) получен второй порядок сходимости альтернированных сумм Понтрягина к альтернированному интегралу при сильно выпуклом терминальном множестве.

В докладе говорится о полученных автором новых качественных свойствах сильно выпуклых множеств, связанных с линейными операциями и пределами сильно выпуклых множеств, для которых показано, что они не выводят из класса сильно выпуклых множеств. Введено понятие сильно выпуклой R-оболочки, исследованы ее свойства. Получены оценки расстояния по Хаусдорфу между сильно выпуклыми оболочками с различными радиусами для одного и того же множества. Получен аналог теоремы Каратеодори, в котором утверждается о совпадении сильно выпуклой R-оболочки компактного множества из R^n с совокупностью всех сильно выпуклых R-оболочек не более чем $n + 1$ точек данного компактного множества. Для компактного множества введено понятие сильно крайней точки радиуса R, принадлежащей множеству крайних точек этого множества. Получено обобщение теоремы Крейна-Мильмана о совпадении сильно выпуклого множества радиуса R, отличного от шара радиуса R, с сильно выпуклой R-оболочкой замыкания сильно выпуклых крайних точек радиуса R данного множества. Исследованы вопросы теории приближения выпуклых множеств многогранными и сильно выпуклыми аппроксимациями, как внешними, так и внутренними (для телесных компактов) с указанием оценок погрешности предложенных аппроксимаций в зависимости от мелкости разбиения сетки.

Основные результаты доклада изложены в работах [1-3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00771а).

Литература

1. Половинкин Е.С. О свойствах сильно выпуклых множеств.//Сб. Моделирование процессов управления и обработки информации. Изд. МФТИ, 1994, с.182-189.

2. Половинкин Е.С. О выпуклых и сильно выпуклых аппроксимациях множеств.//Доклады РАН, 1995 (в печати).

3. Polovinkin E.S. On strongly convex sets.//Phystech-journal, N 2, 1995.

К ТЕОРИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

Ратыни А.К. (Киев)

Задача

$$Lu = -\lambda u + f(x) \quad (x \in D), \qquad u(x) - u(бx) = \varphi(x) \quad (x \in S), \qquad (A)$$

где $Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$, рассматривается в следующих предположениях.

(а) D – ограниченная область R^n с границей S класса C^2;

(б) a_{ji}, b_i, $c \in C_\alpha(D) \cap C(\bar{D})$, λ – числовой параметр (все величины вещественны);

(в) матрица $\{a_{ij}\}$ положительно определена в D;

(г) б – однозначное непрерывное по Гельдеру отображение S на множество $бS \subset \bar{D}$;

(д) множество $\omega \equiv бS \cap S$ состоит из конечного числа k точек, $k \geqslant 1$;

(е) существуют числа a, b, γ и функция v такие, что: $0<a<1$, $b>0$, $\gamma>0$, $v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, $v(x) = 0$ на ω, $v(x) > 0$ и $(Lv)(x) \leqslant -1$ в D, $v(бx) \leqslant av(x)$ и $v(x) \geqslant br^\gamma(x)$ на S, где $r(x)$ – расстояние от x до ω.

Собственными числами (с.ч.) задачи (А) назовем такие значения λ, при которых (А) с $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ имеет нетривиальные решения в $C^{\vee}_{2+\alpha}(D)$ (определения этого подпространства $C_{2+\alpha}(D)$ и пространства $H^{\vee}(S)$, используемого ниже, дано в статье автора в журнале "Известия вузов. Математика", 1994, N 11).

При выполнении условий (а)-(е) справедливы утверждения 1, 2, 3. В их формулировке $s_1,\ldots,s_m$ – б-циклы множества ω $(1 \leqslant m \leqslant k)$.

1. Существует такое с.ч. λ_0 задачи (А), что $\lambda_0 > 0$ и λ_0 меньше любого другого с.ч. (А).

2. При $\lambda = \lambda_0$, $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ задача (А) в $C_{2+\alpha}(D)$ имеет в точности m линейно независимых решений, из которых только одно принадлежит $C^{\vee}_{2+\alpha}(D)$.

3. Если $\lambda = \lambda_0$, $f \in C_\alpha(D)$, $\varphi \in H^{\vee}(S)$, $\sum_{x \in s_i}\varphi(x) = 0$ $(i=1,\ldots,m)$, то задача (А) имеет решения в $C_{2+\alpha}(D)$.

НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ НОВОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рачинский Д.И. (Москва)

Изучается одноконтурная система управления, динамика которой описывается уравнением

$$L\,\frac{dx}{dt} = M\,\frac{d}{dt}[f(x) + u(t)]. \tag{1}$$

Здесь $L(p)$, $M(p)$ - многочлены с постоянными коэффициентами степеней l и $m < l$ соответственно; обратная связь $f(x)$ непрерывна; внешнее воздействие $u(t)$ является T-периодической функцией времени. Предлагаются условия нового типа существования в рассматриваемой системе управления T-периодиеских вынужденных колебаний.

Если от уравнения (1) перейти к классической (по Калману) системе дифференциальных уравнений первого порядка в пространстве состояний, то условия, используемые в докладе, не обеспечивают свойство М. А. Красносельского-А. И. Перова невозвращаемости траекторий. Этот неприятный факт не позволяет применить общий метод направляющих функций М. А. Красносельского, разработанный им совместно с учениками и коллегами (А. И. Перовым, Е. А. Лившицем, Ж. Мовеном, А. В. Покровским и др.). В связи с этим предлагаются направляющие функции нового типа; основная их особенность заключается в том, что они многолистны.

Использование нового класса направляющих функций позволило получить достаточные признаки существования T-периодических решений уравнения (1) в условиях, когда многочлен $L(p)$ имеет на мнимой оси одну пару простых корней $\pm 2k\pi i/T$ (что соответствует резонансному случаю), а обратная связь допускает оценку $|f(x)| \leqslant \alpha + \beta|x|$, где β достаточно мало.

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЗВЕННОГО РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

Родкина А. Е.

Рассматривается однозвенный робот-манипулятор, состоящий из абсолютно твердого стержня длины l и массы M, одним концом шарнирно связанного с неподвижным основанием, а на другом имеющим схват с грузом массы m [1]. К оси шарнира приложен управляющий момент u. Ось шарнира перпендикулярна плоскости движения. Уравнения движения имеют вид

$$L^2 m_1 \ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + gL(m+M/2)\sin\varphi = u,$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \quad m_1 = m + M/3,$$

где φ - шарнирный угол, $\alpha > \alpha_0 \geqslant 0$ - коэффициент вязкого трения.

Одной из важных задач управления, связанных с манипуляционными роботами, является задача стабилизации, т.е. построение такого управления u, при котором $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$.

В настоящей работе предлагается формировать управление с помощью интегральных регуляторов, содержащих нелинейности и учитывающих случайный фактор, в форме

$$u = -A\varphi - \alpha(t,\varphi_t^{-\infty}) + б(t,\varphi_t^{-\infty})\dot{W}_t,$$

где $\dot{W}_t$ - белый шум, A - положительно определенная матрица, $\varphi_t^{-\infty}(s) = \varphi(s)$, $s \in (-\infty, t]$,

$$|\alpha(t,\varphi_t^{-\infty})|^2, \quad |б(t,\varphi_t^{-\infty})|^2 \leqslant \int_0^{\infty} g(s)L\left(|\varphi(t-s)|^2\right)\alpha^2(s)ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} e_j L\left(|\varphi(t-\Delta_j(t))|^2\right)\alpha^2(t-\Delta_j(t)),$$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} e_j$, $\int_0^{\infty}\alpha^2(s)ds$, $\int_0^{\infty}|g(s)|ds < \infty$, L(u) имеет рост на бесконечности порядка ulnu.

Литература

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. - М.: Высшая школа, 1989. - 447 с.

ЗАДАЧА С НЕСВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НА ИЗВЕСТНОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

Рузиев Ш.Н. (Ташкент)

Постановка задачи. Найти пару функций u(x,t), s(t) таких, что непрерывно дифференцируемая функция s(t) определена при $0 \leqslant t \leqslant T$, $s(0) = c > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leqslant H$, функция u(x,t) в области

$$D = \{(x,t)\colon 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T\}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad (x,t) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant c, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \alpha u(x_0,t), \quad 0\leqslant x_0\leqslant c, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{3}$$

$$u(s(t),t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

а также условию на неизвестной границе

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция, H, c, α - постоянные.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi(x) \geqslant 0$. Тогда $0 < \dot{s}(t) \leqslant H$.

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, c_1, c_2 - начальные данные и $(u_1(x,t), s_1(t))$, $(u_2(x,t), s_2(t))$ - соответствующие решения задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x)$, $c_1 \geqslant c_2$, тогда $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$, $s_1(t) \geqslant s_2(t)$.

Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Садов С.Ю. (Москва)

Рассматривается уравнение движения спутника относительно центра масс (В.В.Белецкий, 1959)

$$\frac{d^2(2\upsilon)}{dt^2} + \mu\frac{(1 + e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3}\sin(2\upsilon-2\nu) = 0, \qquad -\pi < \upsilon \leqslant \pi. \tag{1}$$

При значениях параметра e (эксцентриситета орбиты), не близких к 1, уравнение (1) подробно изучено аналитическими и численными методами в работах В.А.Сарычева и соавт. (1977-80) и других авторов. Известно, что при любых значениях e, μ уравнение (1) имеет хотя бы одно нечетное периодическое решение. Границы областей устойчивости нечетных периодических решений, за исключением прямой $\mu = 0$, являются границами областей существования несимметричных (не являющихся нечетными) периодических решений, впервые обнаруженных А.Д.Брюно (1976).

Мы рассматриваем область значений параметров $|\mu| \ll 1$, $e \to 1$, в которой численное исследование связано с трудностями ввиду сингулярности уравнения (1) при $e = 1$, $\upsilon = \pi$, и находим в этой области асимптотику указанных границ - бифуркационных кривых. Для этого применяем метод осреднения, впервые использованный при изучении уравнения (1) Ф.Л.Черноусько (1963). Нахождение асимптотики бифуркационных кривых требует вычисления как минимум трех членов осредненного уравнения. Формулы для этих членов представляют собой кратные интегралы, зависящие от параметра e и имеющие особенности при e = 1. Для вычисления асимптотики таких интегралов развит метод, состоящий в факторизации подинтегральных выражений как функций комплексного переменного, т.е. в представлении их в виде произведения двух функций, одна из которых имеет особенность вблизи единичной окружности вне ее, а другая - вблизи единичной окружности внутри нее. При e = 1 эти особенности сливаются в точке, лежащей на единичной окружности.

Найденных асимптотик первых трех членов осредненного уравнения оказалось достаточно для удовлетворительного согласования получающейся асимптотики бифуркационных кривых с численными результатами А.Д.Брюно и В.Ю.Петровича (1994).

Литература

1. Садов С.Ю. Анализ функции, определяющей устойчивость вращения почти симметричного спутника.//Препринт Ин-та прикл.матем.84(1994).
2. Садов С.Ю. Коэффициенты осредненного уравнения колебаний спутника.// Препринт Ин-та прикл. матем.,27(1995).

О КВАЗИПОТОКАХ

Садовский Б.Н. (Воронеж)

Изучена функция $y = \gamma_s^t x$ $(s, t \in R;\ x, y \in R^n)$, называемая квазипотоком и обладающая в приближенном варианте основными свойствами оператора сдвига по траекториям дифференциального уравнения [1]. Доказана теорема, позволяющая в некоторых случаях строить модель эволюционного процесса (вообще говоря, негладкого) в виде квазипотока.

Квазипоток определяется тремя свойствами: 1) $\gamma_t^t x = x$; 2) $|\gamma_s^t x - \gamma_s^t x_1| \leqslant e^{L|t-s|}|x-x_1|$ ($|x|$ - некоторая норма в R^n, $L>0$ - параметр); 3) $|\gamma_u^t \gamma_s^u x - \gamma_s^t x| \leqslant [(e^{L|t-s|}-1)/L]\omega(|t-u|)$ (ω - функциональный параметр, $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$). С квазипотоком ассоциируется транзитный квазипоток $\gamma[A]_s^t x$, соответствующий разбиению $A=\{x_n:\ n \in Z\}$,

$x_{n+1} > x_n$ вещественной оси конечного диаметра $dA = \sup \{x_{n+1} - x_n :\ n \in Z\}$: если u - ближайшая к s из точек множества A, лежащих строго между s и t, то, по определению, $\gamma[A]_s^t x = \gamma[A]_u^t \gamma_s^u x$; если же таких точек вообще нет, то транзитный квазипоток совпадает просто с квазипотоком.

Теорема. При $dA \to 0$ транзитный квазипоток равномерно относительно t из любого отрезка стремится к потоку $g_s^t x$, обладающему свойствами: 1) $g_t^t x = x$; 2) $|g_s^t x - g_s^t x_1| \leqslant e^{L|t-s|}|x - x_1|$; 3) $g_u^t g_s^u x = g_s x$. При этом справедливо неравенство

$$|\gamma[A]_s^t x - g_s^t x| \leqslant [(e^{L|t-s|} - 1)/L)]\omega(dA).$$

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1966. - 331 с.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Сапронов Ю.И. (Воронеж)

В 1978 году вышла работа [1], в которой было дано описание вариационной версии локальной редуцирующей процедуры Ляпунова-Шмидта. Позже появились глобальные варианты этой версии, и впоследствии, в рамках общей теории конечномерных редукций для гладких экстремальных задач на банаховых многообразиях [2], произошло их соединение с глобальной редуцирующей схемой Морса-Ботта из вариационной теории геодезических.

Историческим предшественником конечномерно редуцирующих схем была локальная схема понижения размерности в конечномерных экстремальных задачах, созданная А.Пуанкаре [3].

Конечномерные редукции позволяют, с одной стороны, осуществлять построение и развитие теории фредгольмовых особенностей гладких функционалов, а с другой стороны, они дают эффективное средство для изучения конкретных систем с бесконечным числом степеней свободы через анализ конечномерных систем. Такое сведение позволяет, в частности, разрабатывать алгоритмы визуализации, с помощью которых можно выводить на принтер или экран монитора графические образы, дающие наглядную информацию о существовании и бифуркации экстремалей и о метаморфозах поверхностей уровней.

Доклад посвящен описанию ряда результатов, полученных при изучении потери устойчивости некоторых упругих систем с особенностями типа двумерной сборки и при попытках глобализовать эти результаты. Соответствующие графические образы получены на основе пакета программ, изготовленного доцентом С.М.Семеновым. Пользуясь случаем, автор выражает ему глубокую благодарность за предоставление этого пакета.

Литература

1. Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной задаче исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления.//ДАН СССР, 1978, т.240, N 3, с.530-533.

2. Sapronov Yu.I. Smooth Marginal Analysis of Bifurcation of Extremals.//Geometry in Partial Differential Equations. World Scientific publishing. Co. Pte. Ltd. 1994. P.345-375.

3. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. - М.: Наука, 1972.- 100 с.

КОРРЕКТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Семенов М.Е. (Воронеж)

В работе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t,x,u) \tag{1}$$

с условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,x)|_{x \in \partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

где $x \in \Omega$, Ω - выпуклое множество из R^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция $f(t,x,u)$ предполагается гладкой, T-периодической по t и удовлетворяющей глобальному условию Липшица по третьему аргументу. Ниже приводятся достаточные условия существования у задачи (1)-(2) устойчивого по начальным данным T-периодического решения.

Теорема. Пусть функция $f(t,x,u)$ не убывает по u и удовлетворяет условию

$$\lim_{|u| \to \infty} f(t,x,u)u^{-1} = 0, \tag{3}$$

тогда задача (1)-(2) имеет по крайней мере одно устойчивое по начальным данным Т-периодическое решение.

Приведем схему доказательства теоремы. Задача о существовании устойчивых Т-периодических решений эквивалентна задаче о существовании устойчивых неподвижных точек у оператора U^T, сопоставляющего начальному условию $u_0(x)$ решение задачи (1)-(2) в момент времени $t=T$. В условиях теоремы оператор U^T оказывается монотонным по конусу неотрицательных функций, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega$. Условие (3) обеспечивает существование у оператора U^T инвариантного конусного отрезка и применимость метода челночных итераций [1] для доказательства существования и построения неподвижных точек оператора U^T.

Литература

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Уравнения с разрывными нелинейностями.//ДАН СССР, 1979, т.248, N 5.

РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ ВИРТУАЛЬНЫХ ТРУБОК ТЕЧЕНИЯ

Сербина Л.И., Толпаев В.А.

Во многих задачах теории фильтрации требуется рассчитать величину фильтрационного потока Q в односвязной области ABCD, на границе AB и CD которой заданы постоянные значения φ_1 и φ_2 потенциала скорости фильтрации. На границе AD функция тока $\psi = 0$, а на границе BC $\psi = Q$, где Q - отыскиваемая величина потока жидкости. Здесь φ и ψ - действительная и мнимая части комплексного потенциала $W = W(Z)$ исследуемого фильтрационного потока, который является аналитической функцией переменного $Z = X + IY$. Далеко не всегда для решения сформулированной задачи удается применить метод конформных отображений. В работе прилагается приближенный аналитический метод для расчета величины фильтрационного потока Q. Он основан на том, что в области G вводится однопараметрическое семейство кривых $\alpha = \alpha(x,y,t)$, параметра t, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. $\alpha(x,y,0)$ совпадает с границей AD области G.
2. $\alpha(x,y,t)$ совпадает с границей BC области G.
3. Семейство линий $\alpha(x,y,t)$ можно рассматривать в качестве линий тока какого-то другого, более простого, течения, топологически эквивалентного исследуемому потоку.

4. Для трубки тока в этом более простом течении, ограниченной линиями $\alpha(x,y,t)$ и $\alpha(x,y,t+dt)$, удается просто рассчитать величину расхода жидкости dQ по формуле:

$$dQ = F[\alpha(x,y,t),\varphi_1,\varphi_2]dT$$

Эта формула зависит от конкретного задания области G, т.е. от конкретно рассматриваемой задачи фильтрации.

Суммируя расходы жидкости по дифференциально узким трубкам тока, для расхода Q получили выражение

$$Q = \int_0^T F[\alpha(x,y,t),\varphi_1,\varphi_2]dt. \qquad (1)$$

Если семейство кривых $\alpha(x,y,t)$ жестко задано, то формула (1) дает приближенное значение для Q. Однако семейство кривых $\alpha(x,y,t)$ можно задавать и с некоторой долей неопределенности. Тогда из формулы (1) будем получать Q как функцию нескольких переменных, или же Q будет функционалом, зависящим от каких-то функций параметра t. В этих случаях для расчета Q требуется предварительно найти максимум интеграла (1).

Описанная методика была применена для расчета расхода жидкости в области прямоугольной формы. Были сделаны конкретные расчеты и проведено в отдельных случаях сравнение с точным аналитическим решением.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ Ф.И.ФЕДОРОВА

Скоробогатько В.Я., Мякинник О.О. (Львов)

Система уравнений Ф.И.Федорова является универсальной матричной формой для нелинейных уравнений, описывающих самодействующие и взаимодействующие поля. В предположении разрешимости относительно одной из производных рассмотрим для этой системы задачу Коши

$$E_{(n)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} A_k\frac{\partial\vec{B}}{\partial x_k} + \vec{A}_{-1} + A_0\vec{B} + \vec{B}^*C\vec{B}, \qquad (1)$$

$$\vec{B}^*(0,x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) \qquad (2)$$

(здесь $\vec{B}^* = (B_1,B_2,\ldots,B_n)$; $\vec{A}_{-1}$ - столбик свободных членов, A_0, A_k,

$k=\overline{1,s}$ - квадратные числовые матрицы размера $n \times n$, C - кубическая числовая матрица размера $n \times n \times n$). При помощи соответствующим образом подобранной для (1) алгебры альтернионов [1] задаче (1)-(2) можно поставить в соответствие задачу

$$E_{(nm)} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_k \frac{\partial \vec{Z}}{\partial x_k} + \Gamma_0 \vec{Z} + \Gamma \vec{\Phi}, \tag{3}$$

$$\vec{Z}^*(0,x) = (\varphi_1(x)\vec{\Phi}, \varphi_2(x)\vec{\Phi}, \ldots, \varphi_n(x)\vec{\Phi}) \tag{4}$$

($\vec{Z}^* = (B_1\vec{\Phi}, B_2\vec{\Phi}, \ldots, B_n\vec{\Phi})$; числовые матрицы и числовой столбик $\bar{\Phi}$, входящие в систему, имеют размерность m, которая определяется числом образующих выбранной алгебры альтернионов - $m = 2^{k/2}$, k - число образующих алгебры). В системе (3), имеющей размерность $nm \times nm$, квадратичность распределена между функцией $\vec{B}^*(t,x)$ и столбиком $\vec{\Phi}$. К задаче (3)-(4) можно применить операционный метод, основанный на обобщенном методе разделения переменных [2]. На решение задачи (1)-(2) $\vec{B}(t,x)$ получен функциональный полином высокого порядка.

Литература

1. Мякинник О.О. Нахождение элементарных решений системы уравнений Ф.И.Федорова.//ДАН Украины, N 11(1994), 45-50.

2. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. - Киев: Наукова думка, 1993.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Слиденко А.М. (Воронеж)

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений тепломассообмена с учетом диссипации и химической реакции

$$\frac{d\bar{U}}{\partial t} - \nu\Delta\bar{U} + \sum_{k=1}^{n} U_k \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} + \operatorname{grad} P = \bar{\xi}_1 T + \bar{\xi}_2 \Theta,$$

$$\operatorname{div} \bar{U} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T + \sum_{k=1}^{n} U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = a_1(1-\theta)e^{-b/T} + \nu \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \alpha\Delta\theta + \sum_{k=1}^{n} U_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = a_2(1-\theta)^{-b/T}, \qquad t \in (0,\tau],\ x \in \Omega,$$

$$\bar{U}(t,x) = 0, \quad T(t,x) = 0, \quad \theta(t,x) = 0, \qquad t \in [0,\tau],\ x \in S,$$

$$\bar{U}(0,x) = \bar{U}_0(x), \quad T(0,x) = T_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x), \qquad x \in \Omega. \qquad (1)$$

Здесь Ω – открытая, ограниченная область пространства R^n ($n=2,3$) с границей S; $\bar{U}(t,x)$ – искомая, $\bar{U}_0(x)$ – заданная вектор-функции, $T(t,x)$, $\theta(t,x)$ – искомые и $T_0(x)$, $\theta_0(x)$ – заданные скалярные функции; $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ – заданные векторы в R^n; ν, λ, α, a_1, a_2, b – положительные постоянные.

В случае, если $\bar{U}_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $n=3$ и $\bar{U}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $n=2$, $T_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\theta_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задача (1) имеет единственное решение на отрезке $[0,t_0]$, где $t_0 \in [0,\tau]$. Установлены оценки решения в норме $L_2([0,\tau], W_2^2(\Omega))$ и оценки первых производных по времени в норме $L_2([0,\tau], L_2(\Omega))$.

Исследование проводилось методом дробных степеней операторов, который ранее применялся в работах [1], [2].

Литература

1. Соболевский П.Е. О нестационарных уравнениях гидродинамики для вязких несжимаемых жидкостей.//ДАН 125, 1, 45 (1959).

2. Васильев В.В. Об одной системе, описывающей процесс конвекции в вязкой несжимаемой жидкости.//ДЕП 217-79.

ТРАЕКТОРИИ-УТКИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Соболев В.А. (Самара)

В последние годы в математической литературе довольно часто стал встречаться достаточно необычный термин - "траектория-утка". Траектории-утки или "французские утки" представляют собой траектории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, содержащие устойчивый и неустойчивый участки медленного движения. "Утиная охота" стала в последние годы весьма популярной в среде математиков, а основным "оружием" охоты является аппарат нестандартного анализа. В математической литературе довольно широко распространено мнение, что утки открыты при помощи нестандартного анализа, являются одним из его наиболее ярких достижений, и использование нестандартного анализа облегчает знакомство с теорией уток и релаксационных колебаний. При этом считается, что траектории-утки представляют собой весьма экзотический и редкий объект "охоты". Все это представляется нам достаточно спорным.

По опыту общения со специалистами по прикладной математике у нас сложилось мнение, что использование языка нестандартного анализа скорее отпугивает, чем привлекает желающих освоить теорию уток. В то же время, по нашему мнению, основным препятствием на пути освоения этой теории является методически неудачный выбор базовой модели, в качестве которой рассматривается уравнение Ван-дер-Поля, записанное в виде сингулярно возмущенной системы на плоскости. При определенных условиях в системе возникают "циклы-утки", действительно напоминающие по форме летящую утку. Представляется более удобным в качестве базовой рассматривать простую модель, в которой траектория-утка будет не циклом, а ограниченным решением и сводить задачу о существовании траекторий-уток к задаче о возмущении устойчиво-неустойчивых медленных ограниченных решений. В качестве "оружия" охоты при этом используется принцип сжатия.

В докладе рассматриваются математические модели физических, химических, биологических и экономических систем, в которых возникают траектории-утки.

THE CONSTRUCTION OF STABILITY REGIONS FOR TRIANGULAR POINTS IN THE THREE-BODY PROBLEM WITH RESISTANCE

Sokolovskaja V.V. (Moscow)

The restricted three-body problem has well-known solutions, called Lagragian or triangular libration points. These points are the relative equilibria positions in the reference frame, uniformly rotating with the primaries. The necessary condition of stability is known to be $\mu < \mu^* = 0.0385\ldots$, $\mu = m_2/m_1$. We discuss the stability problem in the presence of small enviromental resistance of the form

$$F = -\varepsilon V f(V) g(r_1), \qquad \varepsilon \ll 1,$$

where V is the absolute velocity of the satellite, r_1 - the distance from the Sun, f and g - certain functions.

According to the general theory of perturbations, triangular points do not vanish for $\varepsilon \neq 0$ but only displace slightly. The stability depends on three parameters: μ and derivatives of functions f and g which are calculated in the equilibria position. According to these values, triangular points might be asymptotically stable or unstable.

The numerical analysis of stability is implemented and corresponding regions in the parameter space are constructed.

This work is supported by the Russian Fund of Fundamental Researches, the project No. 93-013-17228.

АНАЛОГИ ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТАТИКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Стеценко В.Я. (Ставрополь)

В математической экономике важную роль играют четыре принципа четырех лауреатов Нобелевской премии по экономике - Леонтьева, Хикса, Ле-Шателье и Самуэльсона.

Каждый из этих принципов утверждает о соответствующих свойствах линейной алгебраической системы вида $x = Ax + f$ с неотрицательной матрицей A и с неотрицательным вектором f свободных членов (модель Леонтьева). Естественно возникает вопрос: в какой степени эти принципы имеют развитие на более общие уравнения (линейные интегральные уравнения, краевые задачи для уравнений математической физики, операторные уравнения с положительным относительно конуса K оператором A, нелинейные системы алгебраических уравнений, нелинейные интегральные уравнения и др.).

Оказывается, что на этом пути можно получить не только полные аналоги этих принципов для перечисленных типов уравнений, но и даже существенно уточнить утверждения этих принципов в первоначальной классической постановке. Полученные на этом пути результаты в частности позволяют дать оценку относительной погрешности

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \ (\equiv \delta(x))$$

приближенного решения $\tilde{x}$ уравнения $x = Ax + f$ через относительную невязку $\|\Delta f\|/\|f\|$ $(\equiv \delta(f))$ этого уравнения, где $\Delta f = \tilde{x} - (A\tilde{x}+f)$ (речь идет об оценках вида $\delta(x^*) \leqslant q\delta(f)$ с постоянной $q \leqslant 1$, при этом верхняя граница для q эффективно вычисляется через доступные "измерению" характеристики оператора А). Интересно также и то, что аналоги этих принципов справедливы и для более широкого класса уравнений $x = Bx + f$ с неположительной матрицей B (в частности, для модели Леонтьева-Форда, учитывающей вредное влияние производства на окружающую среду и активное воздействие отдельных "отраслей" на оздоровление среды).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что имеет место аналогия между законами физики и экономики.

ОПЕРАТОРНЫЕ АНАЛОГИ МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С ИНВЕСТИЦИЯМИ

Стеценко В.Я., Бутова С.Б. (Ставрополь)

В докладе рассматривается система уравнений

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \alpha_i \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} + f_i(t), \qquad (1)$$

где t - параметр, h - фиксированная постоянная, $a_{ij} \geqslant 0$, α_i $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - заданные числа, $f_i(t) > 0$ - заданная функция. Нас интересует вопрос о существовании и единстсвенности неотрицательного решения $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ этой системы. При $x_i = 0$ $(i = 1, 2, .., n)$ эта система переходит в модель Леонтьева межотраслевого бааланса, а при $\alpha_i \geqslant 0$ ей можно придать смысл модели с инвестициями, направленными на приращение выпуска.

Если в (1) перейти к пределу при $h \to 0$, то, предполагая существование соответствующего предела, мы получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \alpha_i \frac{dx_i}{dt} + f_i(t), \qquad (2)$$

Предполагая, что $f_i(t) = f_i^0 e^{\lambda t}$, где f_i^0 - заданные числа, выясним, имеет ли система (2) решение вида $x_i(t) = x_i^0 e^{\lambda t}$, т.е. решение, темп роста которого равен темпу роста внешнего потребления $f_i(t)$, иными словами, сбалансированно растущее решение. Ответ на этот вопрос содержит следующая

Теорема. Пусть технологическая матрица (a_{ij}) продуктивна. Тогда при всех достаточно малых $\alpha_i\lambda$ $(i=\overline{1,n})$ система (2) имеет единственное неотрицательное решение, растущее сбалансированно с программой внешнего потребления $\{f_i^0,\ e^{\lambda t}\}$.

При этом указываются явные оценки на величины $\alpha_i\lambda$, обеспечивающие существование сбалансированного растущего решения.

В докладе рассматривается еще одна экономико-математическая модель

$$\frac{dA}{dt} = W_0 - \int_0^t \frac{dA(\tau)}{d\tau} f(t-\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

представленная интегро-дифференциальным уравнением, для которого установлены достаточные условия существования неотрицательного решения, получены оценки для этого решения и указан метод построения приближений (по недостатку и по избытку) к этому решению.

СТРОГИЕ ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ЛИНЕЙНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Стеценко В.Я., Семин А.П. (Ставрополь)

Пусть A - линейный положительный оператор, действующий в банаховом пространстве E, полуупорядоченном конусом K. Тогда, как известно, при достаточно широких предположениях из неравенства

$$Au_0 < \lambda_0 u_0, \tag{1}$$

где u_0 - фиксированный ненулевой элемент конуса K, следует строгая оценка сверху $r(A) < \lambda_0$ для спектрального радиуса оператора A.

В этой связи естественный интерес представляет вопрос об оценке "зазора" между величиной чисел λ_0 и $r(A)$, знание (или хотя бы оценка снизу величины "зазора") которой позволяет сразу ухудшить оценку спектрального радиуса сверху.

Эта идея положена в докладе в основу получения строгих оценок для $r(A)$ не только сверху, но и снизу. Соответствующий метод базируется на следующей лемме.

Лемма. Пусть l_1, l_2 такие элементы сопряженного конуса K, что для собственного вектора l_0 оператора A^* выполняется неравенство

$$l_1 \leqslant l_0 \leqslant l_2. \tag{2}$$

Тогда из неравенства (1) следует неравенство

$$\lambda_0 - \frac{l_2(v_0)}{l_1(u_0)} \leqslant r(A) \leqslant \lambda_0 - \frac{l_1(v_0)}{l_2(u_0)}, \tag{3}$$

где $v_0 = \lambda_0 u_0 - Au_0$.

Пользуясь разработанным авторами методом получения приближений l_1, l_2, l_0, удовлетворяющих неравенству (2), мы получаем возможность иметь двусторонние оценки для $r(A)$ вида (3). Этот прием приводит к достаточно точным оценкам спектрального радиуса, важное значение которых в теории линейных уравнений общеизвестно.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Стрыгин В.В. (Воронеж)

Хорошо известны трудности, которые возникают при численной реализации краевых задач, решения которых имеют большие градиенты в некоторых областях определения решения.

В докладе предлагаются методики разбиения области для адаптации сетки. Предлагаются различные варианты метода Галеркина и метода коллокаций, которые дают приближения 2-го, 3-го и 4-го порядка точности равномерно по малому параметру в С-норме. Рассматриваются эллиптические и параболические уравнения с малым параметром при старшей производной. Даются схемы второго порядка точности на оптимальных сетках.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сумин В.И., Чернов А.В. (Нижний Новгород)

Признаки квазинильпотентности связываются обычно с тем или иным понятием вольтерровости операторов [1,2]. Мы используем определение вольтерровости [3], являющееся многомерным обобщением известного определения А.Н.Тихонова. Пусть $\Pi \subset R^n$ -фиксированный компакт, Σ - б-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Π. Линейный положительный оператор (л.о.о.) $F[\cdot]$: $L_p(\Pi) \to L_p(\Pi)$ назовем вольтерровым на системе T, если $\forall\ H \in T$: $X_H F[X_{\Pi\setminus H}] = 0$, где X_H - характеристическая функция H. Класс операторов, вольтерровых на системе T, обозначим через V(T). Обозначим через B(F) объединение всех систем $T \subset \Sigma$ со свойством $V(T) \ni F$. Элементы системы B(F) естественно называть вольтерровскими множествами оператора F. Ниже рассмотрим важный для приложений [4] случай $p = q = \infty$. Пусть $\delta > 0$. Упорядоченную по вложению систему $\{H_0,\dots,H_k\} \subset B(F)$, $H_0 = \varnothing$, $H_k = \Pi$, назовем [4] вольтерровской δ-цепочкой оператора F, если $\|X_{H_i\setminus H_{i-1}} F[X_{H_i\setminus H_{i-1}}]\|_{L_\infty(\Pi)} < \delta$, $i=\overline{1,k}$.

Лемма 1. Если положительный л.о.о. F: $L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ таков, что

$$\forall\ \delta > 0\ \exists \text{ вольтерровская } \delta\text{-цепочка оператора } F, \qquad (1)$$

то спектральный радиус F равен нулю.

Условие (1) можно назвать обобщенным условием Андо (ср. [1]). Назовем F-вольтерровской оболочкой (F-вольтерровской тенью) множества $M \subset \Pi$ пересечение всех замкнутых (соотв., объединение всех открытых) множеств из B(F), содержащих M (соотв., содержащихся в $\Pi\setminus M$). Разность F-вольтерровских оболочки и тени M обозначим M[F]. Пусть

$$D(t,r) = \{\tau \in \Pi \mid \|t-\tau\| \leqslant r\}, \quad t \in \Pi, \quad r > 0,$$

$$\Phi_F(r) = \sup_{t\ \Pi} \|X_{D(t,r)[F]} F[X_{D(t,r)[F]}]\|_{L_\infty(\Pi)}.$$

Лемма 2. Пусть F: $L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ - положительный л.о.о. Если $\Phi_F(r) \to 0$ при $r \to +0$, то условие (1) выполнено.

Сформулированный признак удобен для конкретного использования в задачах математической физики. Рассматриваются примеры.

Литература

1. Забрейко П.П.//Литовский матем. сб., 1967, т.7, N 2, с.281-287.

2. Забрейко П.П., Ломакович А.Н.//Украинский матем. журнал, 1990, т.42, N 9, с.1187-1191.

3. Сумин В.И.//ДАН СССР, 1989, т.305, N 5, с.1056-1059.

4. Сумин В.И.Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч.1.- Н.Н.:Изд.ННГУ,1992.

ОБ ОДНОЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Тахиров Ж.О. (Ташкент)

В настоящее время теория задач со свободной границей значительно расширилась по нескольким направлениям. Например, раньше изучались, в основном, задачи для параболических и эллиптических уравнений. А недавно появились гиперболические задачи со свободной границей, которые возникают в приложениях (см., напр., [1]).

В работе [2] И.И.Данилюк указал, что задачи для смешанных уравнений являются одним из нерешенных вопросов теории задач со свободной границей.

Задача. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ требуется найти функцию $s(t)$, $s(0) = 0$, $s(t) > 0$, $t \in (0,T)$ и решения $u(x,t)$, $v(x,t)$ уравнений

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t), \quad s(t) < x < t, \quad 0 < t < T,$$

удовлетворяющие условиям

$$u(0,t) = f(t), \quad u_x(s(t),t) = v_x(s(t),t) = 0,$$

$$\alpha u(s(t),t) + \beta v(s(t),t) = \int_0^t q(s(\eta),\eta)d\eta, \quad v(t,t) = \varphi(t).$$

Так как область выполнения уравнения "выходит" из начала координат (нет начального условия), то свойства его решений и методы доказательства их существования существенно зависят от порядка согласования краевых данных в точке (0,0).

Доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи. Исследованы некоторые свойства решений.

Литература

1. Friedman A., Hu Bei.//Math. Anal. and Appl., 1989, v.138, No.1, p.249-279.

2. Данилюк И.И.//УМН. 85, т.40, вып.5, с.133-185.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

Тхай В.Н. (Москва)

Исследуются периодические движения обратимых систем. Показано, что теорема Хейнбокла-Страбла (Heinboklel-Strable, SIAM J. 1965. Vol.13. N2) дает необходимые и достаточные условия существования симметричного периодического движения. Приводятся обобщения этой теоремы, наиболее существенным из которых представляется обобщение на случай тора.

Эти теоремы применяются для решения задачи о продолжении по параметру периодического движения. Симметричные периодические движения в типичной ситуации принадлежат семейству и, следовательно, типичный является неизолированный по Пуанкаре случай. Показано, что в классе обратимых систем задача решается только порождающей системой и в неизолированном случае.

Классический пример, где без учета свойства обратимости не удается доказать возможность продолжения периодического решения по параметру, дает ограниченная задача трех тел. В этой задаче впервые строгое доказательство существования периодических решений 2 сорта по Пуанкаре получено только в 1937 г. (Uno T., Jap. J. Aston. Geophys. Vol.15. N1/2). В докладе показано, как строятся симметричные периодические орбиты в различных вариантах ограниченной задачи трех тел (плоская, пространственная, круговая, эллиптическая, движение в окрестности одного из основных тел) с использованием предложенной теории продолжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (09401-01674а).

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Тюрин В.М. (Липецк)

Пусть X - банахово пространство. Дифференциальный оператор

$$P = \Sigma A_\alpha(x)D^\alpha, \qquad |\alpha| \leqslant m \in N,$$

где A_α: $R^n \to \mathrm{Hom}(X, X)$ - непрерывные ограниченные функции, называется равномерно эллиптическим оператором в R^n, если существует такая постоянная $\varkappa > 0$, что

$$\varkappa\|h\||\xi|^m \leqslant \|\Sigma A_\alpha(x)\xi^\alpha h\|, \qquad |\alpha| \leqslant m$$

для любых ξ, $x \in R^n$, $h \in X$.

Обозначим через F одно из нормированных пространств C =

$C(R^n, X)$, $L^p = L^p(R^n, X)$, $M^p = M^p(R^n, X)$ (пространство Степанова). Нормированное пространство $W^m(F)$ состоит из функций $u \in F$, имеющих производные $D^\alpha u \in F$ $(|\alpha| \leqslant m)$.

Оператор P: $W^m(F) \to F$ назовем коэрцивным E-оператором, если существуют такие постоянные $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, что

$$\|u\|_{W^m(F)} \leqslant k_1 \|u\|_F + k_2 \|Pu\|_F$$

для любой функции $u \in W^m(F)$.

Теорема 1. Если оператор P: $W^m(F) \to F$ является коэрцивным E-оператором, то оператор P равномерно эллиптичен в R^n.

Следствие. Из равнометной инъективности (обратимости) оператора P: $W^m(F) \to F$ следует равномерная эллиптичность оператора P в R^n.

Неравенство

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}} \leqslant \Lambda(\|u\|_C + \|Pu\|_{C^\gamma}), \qquad \Lambda > 0,$$

где C^γ, $C^{m+\gamma}$ - пространства Гельдера, называется неравенством Шаудера для оператора P: $C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$.

Теорема 2. Пусть старшие коэффициенты A_α $(|\alpha| = m)$ оператора P постоянны, а остальные - равномерно непрерывны по Гельдеру. Тогда из оценки Шаудера для оператора P: $C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ следует равномерная эллиптичность оператора P в R^n.

О КОНСТАНТАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть $p \in R$, $p \geqslant 2$; l^n - действительное или комплексное n-мерное арифметическое пространство; l^n_p, l^n_∞, l^n_1, $l^n_{\nu(p)}$, $l^n_{\mu(p)}$ - это l^n, снабженное для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствующей нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad \|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_{\nu(p)} = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(p) |x_{i_j}|, \qquad \|x\|_{\mu(p)} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j |x_{i_j}|, \qquad (1)$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ - такая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$, что

$$|x_{i_1}| \leqslant |x_{i_2}| \leqslant \ldots \leqslant |x_{i_n}|, \qquad \nu_j(p) = a^{n-j},$$

$$\mu_j(p) = a^{n-j}\left(\frac{1 - a^q}{1 - a^{qn}}\right)^{1/q}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$a = 2^{1/p} - 1, \quad q = p/(p - 1).$

Показано, что константы вложений

$$l_1^n \subsetneq l_{\nu(p)}^n \subsetneq l_p^n \subsetneq l_{\mu(p)}^n$$

равны единице, а константа вложения $l_{\mu(p)}^n \subsetneq l_\infty^n$ задается формулой

$$C_{\infty,\mu(p)} = \left(\frac{1 - a^{qn}}{1 - a^q}\right)^{1/q}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_{\mu(p)} = \|x\|_\infty$.

Нормы вида (1) введены в [1].

Литература

1. Фомин В.И. О весовых нормах в конечномерном пространстве. - Тамбов: Ин-т хим.машиностр., 1992. - 7 с. Деп. в ВИНИТИ 25.01.93, N 153-В93.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

Фролова О.И. (Воронеж)

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая работу обобщенной электрической машины ([1], с.28):

$$L_1\frac{dI_c}{dt} + L_m e^{j\varphi}\frac{dI_p}{dt} + r_1 I_c + j\omega L_m e^{j\varphi} I_p = U_c,$$

$$L_m e^{-j\varphi}\frac{dI_c}{dt} + L_2\frac{dI_p}{dt} - j\omega L_m e^{-j\varphi} I_c + r_2 I_p = U_p,$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_c, \qquad M = L_m \mathrm{Re}[je^{j\varphi} I_p I_c^*],$$

где U_c, U_p - напряжения, I_c, I_p - токи статора и ротора машины; r_1, r_2, L_1, L_2 - сопротивления и индуктивности статора и ротора; L_m -

коэффициент взаимоиндукции; J - момент инерции; ω и φ - угловая скорость и угол поворота ротора; M и M_c - электромагнитный момент и момент сопротивления машины.

В предположении, что $M_c \geqslant 0$, изучаются условия существования идеальных режимов работы электрической машины в качестве двигателей, типы которых задаются следующим образом: асинхронный - $U_c = U_m e^{j\theta t}$, $U_p = 0$; синхронный - $U_c = U_m e^{j\theta t}$, $U_p = U_0(1+j)$; постоянного тока - $U_c = U_0(1+j)$, $U_p = U_m e^{-j\varphi}$, $U_0 > 0$, $U_m > 0$, $\theta > 0$. Под идеальными режимами данных типов двигателей называются соответственно решения вида: $I_c = Ae^{j\theta t}$, $I_p = Be^{j(\theta-\beta)t}$, $\varphi = \beta t$, $0<\beta<\theta$; $I_c = Ae^{j\theta t}$, $I_p = B$, $\varphi = \theta t+\alpha$; $I_c = A$, $I_p = Be^{-j\theta t}$, $\varphi = \theta t+\alpha$, где $A, B \in \mathbb{C}$, $\theta>0$, $0<\alpha<2\pi$.

Теорема. Для существования идеальных режимов асинхронного, синхронного двигателей и двигателя постоянного тока необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соответственно неравенства:

$$\text{a)}\quad M_c \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{U_m^2 L_m^2}{\sqrt{(\theta^2\Delta^2+r_1^2L_2^2)(r_1^2+\theta^2L_1^2)}+r_1\theta L_m^2}, \quad \Delta = L_1L_2 - L_m^2;$$

$$\text{b)}\quad M_c \leqslant \frac{\sqrt{2}\,U_0L_m}{r_2^2(r_1^2+\theta^2L_1^2)}\left(U_m r_2\sqrt{r_1^2+\theta^2L_1^2} - \sqrt{2}\,U_0L_m\theta r_1\right);$$

$$\text{c)}\quad M_c \leqslant \frac{\sqrt{2}\,U_0L_m}{r_1^2(r_2^2+\theta^2L_2^2)}\left(U_m r_1\sqrt{r_2^2+\theta^2L_2^2} - \sqrt{2}\,U_0L_m\theta r_2\right).$$

Литература

1. Сипайлов Г.А., Кононенко Е.В., Хорьков К.А. Электрические машины. - М.: Высшая школа, 1987. - 287 с.

УСТОЙЧИВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Черевко И.М. (Черновцы)

Рассматривается система дифференциально-функциональных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)y(t),$$

$$\varepsilon\,\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\Delta}^{0}[d\eta(t,\theta)]y(t+\varepsilon\theta) + \int_{\Delta}^{0}[d\tau(t,\theta)]x(t+\varepsilon\theta), \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$, A, B - $(n\times m)$-матрицы, (t,θ), $\tau(t,\theta)$-матрицы размерностей $m\times m$, $m\times n$ соответственно, элементы которых являются функциями ограниченной вариации по θ и непрерывны по t.

Пусть при $t \geqslant 0$ все корни характеристического уравнения

$$\det\left(\lambda E - \int_{-\Delta}^{0}[d\tau(t,\theta)]e^{\lambda}\right) = 0$$

удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -2\mu < 0$.

Доказано, что в этом случае система (1) имеет асимптотически устойчивое интегральное многообразие вида $y(t) = P(t,\varepsilon)x(t)$. Изучен вопрос о поведении решений системы (1) в окрестности интегрального многообразия. Получены условия, при которых имеет место принцип сведения об устойчивости решений системы (1).

Используя принцип сведения, показано, что из экспоненциальной устойчивости тривиального решения укороченной системы

$$\varepsilon\,\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\Delta}^{0}[d\eta(t,\theta)]y(t+\varepsilon\theta)$$

и вырожденной системы (1) (при $\varepsilon = 0$) следует экспоненциальная устойчивость тривиального решения исходной системы (1).

Исследуется задача приближенного построения интегрального многообразия системы (1) в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра ε.

DUCK-TRAJECTORIES IN THREE-DIMENSIONAL COMBUSTION MODEL

Shchepakina E. A. (Samara)

In this paper we consider thermal explosion problem for a gaseous mix situated in an inert dust of porous medium. We are assuming that temperature and phase-to-phase heat exchange are spatually uniform. The dimensionless model in this case has the form

$$\gamma\dot{\theta} = \phi(\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta-\theta_c) - \delta_1(\theta-\theta_1), \qquad (1)$$

$$\gamma_c\dot{\theta}_c = \alpha(\theta-\theta_c) - \delta_2(\theta_c-\theta_2), \qquad (2)$$

$$\dot{\eta} = \phi(\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right). \qquad (3)$$

The initial conditions are

$$\eta(0) = 0, \quad \Theta(0) = \Theta_c(0) = 0. \tag{4}$$

We use the following dimensionless variables here: - depth of conversion, Θ, Θ_c - dimensionless temperature of the reactant phase and the inert one. The small parameter β, γ characterize the physical features of the reactant mexture. Parameter α characterizes the initial state of the system. Parameter γ_c characterizes the physical features of the inert phase. Depending on its value the reaction either changes into the slow regime, or into the explosive one. The finding of critical value of α is our task.

The following cases are examined: $\phi(\eta) = 1 - \eta$-the first-order reaction, $\phi(\eta) = (1 - \eta)$ - the autocatalytic case.

Modellihg of critical regimes and determination of the critical value of the parameter α is carried out by the integral manifolds method and the duck-trajectories technique. Thus, critical value of parameter α in the autocatalytic case with $\delta_1 = \delta_2 = 0$ is given by the asymptotical formula

$$\alpha^* = \frac{1 - \beta\Theta_{00}^2}{2 + \sqrt{4+\gamma_c^{-2}}} e^{\Theta_{00}} \left[1 - \gamma\left(\frac{1}{2}\gamma_c^{-2} + -\gamma_c^{-1}\left(2 + \sqrt{4+\gamma_c^{-2}}\right) + \phi(\gamma_c)\right)\right],$$

$$\phi(\gamma_c) = \sqrt[4]{4+\gamma_c^{-2}}\sqrt{2+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}}, \qquad \Theta_{00} = \frac{1}{2}\left(\gamma_c^{-1} + \sqrt{4+\gamma_c^{-2}}\right).$$

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПРОСТРАНСТВА l_p

Юргелас В. В. (Воронеж)

С помощью техники, основанной на установлении специальных тождеств (их следствиями являются, в частности, классические неравенства Гельдера, Минковского), изучены некоторые вопросы геометрии пространств l_p с четным p.

Пусть Φ_α - дуальное отображение пространства l_p, отвечающее масштабной функции $\mu(t) = t^\alpha$: $\langle \Phi_\alpha(x), x\rangle = \|x\|_{l_p}^{\alpha+1}$, $\|\Phi_\alpha(x)\|_{l_q} = \|x\|_{l_p}^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$; здесь ζ, x - значение линейного непрерывного функционала $\zeta \in l_q$ на элементе $x \in l_p$. Получен точный вид функции φ, для которой имеет место равенство

$$\langle \Phi_{p-1}(x) - \Phi_{p-1}(y),\ x - y \rangle = \varphi(\|x - y\|)$$

для любых $x,\ y \in l_p$.

Определим операцию нелинейного проектирования в l_p следующим образом: каждому вектору $x \in l_p$ поставим в соответствие вектор $\mathfrak{P}(x)$ из подпространства $L \subset l_p$, $p = 2k$, $k \geqslant 1$, для которого

$$\|x - \mathfrak{P}(x)\|_{l_p} = \inf \|x - u\|_{l_p} \quad (u \in L).$$

Теорема. Справедлива оценка

$$\|\mathfrak{P}(x)\|_{l_p} \leqslant 2^{1-1/(p-1)} \|x\|_{l_p} .$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Заказ 145 от 24.04.95 г. Тир. 200 экз. Офсетная лаб. ВГУ.