

ЦЕНТРАЛЬНО-ЧЕРНОЗЕМНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АКАДЕМИИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ АДМИНИСТРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО «МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА» ЧЕРНОЗЕМЬЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
(21—28 января 1994 г.)

ВОРОНЕЖ — 1994

ЦЕНТРАЛЬНО-ЧЕРНОЗЕМНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АКАДЕМИИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

КОМИТЕТ ПО НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ АДМИНИСТРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ

НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО "МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА,
ИНФОРМАТИКА" ЧЕРНОЗЕМЬЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(21-28 января 1994 г.)

Воронеж-1994

УДК 539.214; 539.3; 539.375

Современные проблемы механики и математической физики: Тезисы докладов школы - Воронеж: ВГУ, 1994 г. - 120 с.

В сборнике представлены тезисы докладов, сделанных на школе "Современные проблемы механики и математической физики", проводимой Научно-исследовательским институтом математики при Воронежском государственном университете совместно с Саратовским государственным техническим университетом, Обществом "Математика, механика, информатика" Черноземья, Комитетом по науке и образованию администрации Воронежской области в рамках программы "Долговечность".

Доклады охватывают широкий спектр задач механики сплошных сред: нелинейная теория упругости и пластичности, вопросы устойчивости, динамики и разрушения сред с усложненными свойствами.

Решен ряд важных инженерно-технических задач, имеющих практическое значение. Существенное внимание уделено разработке аналитических и численных методов решения поставленных краевых задач.

Школа "Современные проблемы механики и математической физики" посвящена памяти известного ученого-механика Гавриила Семеновича Шапиро.

ОРГКОМИТЕТ

Председатель - Ивлев Д.Д., академик; сопредседатель - Петров В.В., академик; зам. председателя - Покорный Ю.В., профессор; зам. председателя - Спорыхин А.Н., профессор; Шермергор Т.Д., академик; Шемякин Е.И., академик; Дель Г.Д., профессор; Дободейч И.А., профессор; Ерхов М.И., профессор; Быковцев Г.И., профессор; Баскаков В.А., профессор; Толоконников А.А., профессор; Овчинников И.Г., профессор; Андрейченко К.П., профессор; Хапаев М.М., профессор; Зон В.А., профессор; Гончарова Г.А., доцент; Жучкова В.В., ст.науч. сотр.

О научной деятельности
доктора технических наук Гавриила Семеновича Шапиро
(1913-1961 гг.)

Научная деятельность Г.С.Шапиро первоначально была связана с развитием методов решения пространственных задач теории упругости методом академика Галеркина. Здесь Гавриилом Семеновичем решен ряд трудных задач для толстостенных пространственных конструкций. Уже эти результаты носят законченный классический характер. Докторская диссертация Гавриила Семеновича посвящена волновым задачам теории идеального упруго-пластического соударения стержней. В чрезвычайно простой и ясной постановке им показаны все особенности поведения волны разгрузки Рахматулина и представлено поведение стержней для различных граничных условий. По существу, в этой работе впервые были введены разрывные решения в теории идеальной пластичности. В дальнейшем научные интересы Гавриила Семеновича лежали в области теории пластичности. Ему принадлежит исчерпывающее исследование поведения упруго-пластического тупоугольного и остроугольного клина.

Исключительное значение имеет научно-организационная работа Гавриила Семеновича. При его непосредственном участии создан журнал "Механика", сборник переводов, реферативный журнал "Механика", осуществлен перевод монографий Прагера, Ходжа, Койтера и др.

Определяющую роль играл Гавриил Семенович в распространении идей прагерооской школы пластичности на семинаре кафедры теории пластичности МГУ под руководством А.А.Галина, Ш.Н.Работнова, Г.С.Шапиро. В последние годы Гавриил Семенович активно занимался теорией оптимального проектирования конструкций.

Д.Д.Ивлев.

УДК 539.3

Автомоеенко Н.А., Мяснянкин Ю.М. (Воронеж)
К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Рассматривается задача о предельном равновесии осесимметричных жесткопластических пластинок средней толщины. Теория пластинок строится на основе пространственных соотношений теории пластичности путем разложения искомым функций в ряды по малому параметру. За величину малого параметра принято отношение толщины пластинки к ее внешнему радиусу. Приравниванием в соответствующих уравнениях коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра, получены системы уравнений нулевого, первого и второго приближений. при условиях пластичности Мизеса и Треска.

Показано, что в нулевом приближении следует теория тонких пластин, причем гипотезы Кирхгоффа-Лява следуют автоматически.

Анализ первого и второго приближений показал, что касательные напряжения распределяются по толщине пластинки по линейному закону, а нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности пластины по квадратичному закону.

Получены поправки к величине предельной нагрузки, учитывающие толщину пластинки.

В качестве примера рассмотрено предельное равновесие свободно опертой пластины, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А. (Минск, БГУА)

Проводя интегрирование динамических уравнений Ламе символическим методом, представим компоненты перемещений упругого однородного изотропного слоя в виде операторов бесконечно высокого порядка от двух произвольных аналитических функций координат и времени. Аргументами полученных операторов являются произведения поперечной координаты слоя на плоские продольные операторы Даламбера. Часть граничных условий на границах слоя выполняется за счет произвола входящих в решение аналитических функций, а оставшиеся граничные условия выполняются заранее за счет вида функционалов операторной части решения.

Представляя, в частности, аналитические функции в виде неортогональных рядов по корням трансцендентных уравнений, можно получить однородные решения. Для определения коэффициентов разложения функций в неортогональные ряды была разработана новая теория, основанная на использовании псевдодифференциальных операторов специального вида. Применение этой теории позволяет строить решения некоторых классов задач теории упругости в явном виде, не оводя их, в частности, к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Наиболее полные результаты в этом направлении впервые получены и изложены в кандидатской диссертации автора.

УДК 539.374

Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. (Москва)
О ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В
СХОДЯЩИХСЯ БЕСКОНЕЧНЫХ КАНАЛАХ

Течение сплошной среды в сходящихся бесконечных каналах является классической и, на первый взгляд, простейшей задачей для любой модели материала. При применении модели идеального жесткопластического материала течение в сходящихся бесконечных каналах позволяет моделировать технологические процессы, подобные экструзии. Однако, имеющиеся решения таких задач содержат неточности, которые не позволяют дать приемлемую физическую интерпретацию результатов. А именно, на поверхности канала имеется область, в которой нормальное напряжение, действующее на инструмент, является положительным. Кроме того, как показано в настоящей работе, не существует автомодельного решения рассматриваемой задачи. В связи с этим в работе предлагается строить решение с областью отрыва материала от стенки канала. Отметим, что такие течения известны из экспериментальных работ.

В результате построено решение вблизи точки отрыва материала от стенки канала. Найдена связь с некоторыми интегральными характеристиками процесса.

УДК 539.374

Александров С.Е. (Москва)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВБЛИЗИ
ПОВЕРХНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО ТРЕНИЯ

Рассматривается модель идеального жесткопластического материала, подчиняющегося условию текучести Мизеса и ассоциированному закону течения. Течение материала предполагается произвольным пространственным.

При применении условия предельного трения предполагается, что на поверхности трения удельные силы трения равны пределу текучести материала при чистом сдвиге τ_s . Однако, из ассоциированного закона течения в этом случае при конечных значениях скоростей деформации следует, что течение является плоским, что противоречит исходным предположениям. В связи с этим следует считать, что некоторые компоненты тензора скоростей деформаций неограниченно возрастают (по величине) при приближении к поверхности трения. В этом случае некоторые уравнения ассоциированного закона течения приводят к неопределенности типа $0 \cdot \infty$. Раскрытие этой неопределенности дает возможность определить асимптотическое поведение проекций скорости вблизи поверхности предельного трения, которое необходимо учитывать при выборе кинематически возможного поля скоростей. В частности, касательная к поверхности трения компонента скорости

$$u_x = u_0 x^{1/2} + u_1 + \dots$$

где x — расстояние от поверхности трения. Такое поле скоростей дает возможность предсказать появление вблизи поверхности трения узкого слоя с высоким градиентом интенсивности скоростей деформаций сдвига, что подтверждается экспериментально.

УДК 517.927.2

Алероев Т.С. (Нальчик)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Строится оператор преобразования, переводящий решение уравнения

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} y - \{q(x) + \lambda\} y = 0 \quad (1)$$

в решение простейшего уравнения

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} y - \lambda y = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ - оператор дробного, в смысле Римана-Лиувилля, дифференцирования порядка $1 < \alpha \leq 2$.

Вводится оператор $\mathcal{D}^{-\alpha}$, обратный оператору, порожденному дифференциальным выражением (1) и начальными условиями

$$\mathcal{D}^{-\alpha} y|_{x=0} = 0, \quad \mathcal{D}^{1-\alpha} y|_{x=0} = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Доказана однозначность оператора $\mathcal{D}^{-\alpha}$, что дает возможность изучить обратные задачи для уравнения (1).

Здесь же показано, что решение $y(x, \lambda)$ задачи Коши

$$\mathcal{D}^{-\alpha} y|_{x=0} = h_0, \quad \mathcal{D}^{1-\alpha} y|_{x=0} = h_1$$

для уравнения (1) является целой функцией нулевого рода.

УДК 639.3

Алфутов Н. А., Дымков И. А., Черепанов Ю. Г. (Москва)

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Для расчетных оценок несущей способности металлокомпозитных элементов конструкций при температурно-силовых воздействиях необходимо располагать соотношениями, способными надежно экстраполировать результаты экспериментальных исследований реологических свойств материала при простых видах изотермического нагружения с постоянной скоростью на траектории нагружения и температурно-временные режимы общего вида.

Задача построения таких соотношений для анизотропных материалов далека от своего решения по той простой причине, что при использовании феноменологических моделей самого общего вида идентификация их параметров чрезвычайно затруднена, буквально, непомерным количеством и сложностью необходимых экспериментов.

Предлагается использовать для описания реологических свойств металлокомпозитов (в частности, при плоском, развивающемся в материале широкого класса конструкций, напряженном состоянии) структурно-феноменологический подход. В результате оказывается возможным не только получить пригодные для проведения проектировочных расчетов композитных конструкций соотношения, но и сформулировать требования, которым должны удовлетворять теории неадиабатического (с учетом деформаций ползучести) течения материалов.

Обосновывается форма и ориентация поверхности пластичности, выбор меры и гипотезы упрочнения (в том числе характер зависимости тензора активных напряжений от температуры и времени). Устанавливается связь пластических деформаций с деформациями ползучести.

Полученные соотношения использовались для расчетов по определению несущей способности тонкостенных металлокомпозитных элементов конструкций (в тех случаях, когда ее исчерпание происходит в результате потери устойчивости).

Результаты работы могут оказаться полезными при проектировании металлокомпозитных элементов конструкций.

УДК 539.374

Артемов М.А., Ивалев Д.Д. (Воронеж, Чебоксары)
О ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Рассматривается случай предельной пластической анизотропии для плоской задачи, когда условие пластичности зависит только от угла наклона главной оси напряжения к оси OX декартовой системы координат.

Для плоской задачи условие пластичности можно записать в виде $f(\sigma, \Sigma, \varphi) = 0$ (1)

где σ - первый инвариант тензора напряжений, Σ - второй инвариант дивизора напряжений, φ - угол, определяющий направление главной оси напряжения в ортогональной системе координат. Наличие угла в (1) и характеризует анизотропию материала. Различные виды условия (1) рассматривались в работах [1-3]. Здесь рассматривается случай

$$f(\varphi) = 0 \quad (2)$$

В случае (2) средю можно назвать "предельно анизотропной".

Через функции напряжений это условие записывается в виде

$$k \left[\frac{\sigma^2_{xx}}{\sigma_n^2} - \frac{\sigma^2_{yy}}{\sigma_y^2} \right] - 2 \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma_n \sigma_y} = 0, \quad k = \text{const} \quad (3)$$

Аналогичное уравнение получается для функции тока при определении компонент тензора скорости деформации из соотношений ассоциированного закона пластического течения. Уравнение (3) принадлежит к гиперболическому типу; его характеристиками являются две взаимно ортогональные прямые. Выражения для компонент напряжений и скоростей перемещений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_1(\xi) + a_2^2 \varphi, & \sigma_y &= f_2(\eta) + f_1(\xi) \\ \sigma_{xy} &= f_1(\xi) \sin \varphi + f_2(\eta) \cos \varphi, & u &= a_1(\xi) \sin \varphi + a_2(\eta) \cos \varphi \\ v &= a_1(\xi) + a_2(\eta), & \xi &= x + y \sin \varphi, \quad \eta = x - y \sin \varphi \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрена задача о адвализации гладкого штампа X полупространство σ рассматриваемыми свойствами

1. Фрейденталь А., Гейрантер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды. - М.: Наука, 1962. - 432 с.
2. Ивалев Д.Д. Теория идеальной пластичности. - М.: Наука, 1966. - 231б.
3. Саркисян М.С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел // Прикладная математика и механика. - 1960. - т. 24, вып. 6. - С. 1136-1139.

УДК 639.376

Асташкин В.И. (Самара).

СВЯЗАННЫЕ И НЕСВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛУЧЕСТИ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ.

Настоящая работа посвящена проблеме моделирования роста трещины в условиях ползучести. Накопление повреждений объясняется материальными соотношениями Работнова-Качалова

$$ds_{ij}/dt = (3/2)B(\sigma/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi \quad (1)$$

$$d\psi/dt = -A(\sigma_0/\psi)^m \quad (2)$$

где s_{ij} и σ_{ij} - компоненты тензоров напряжений в деформации, s_{ij} - дивектор тензора напряжений, $\sigma = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ - интенсивность напряжений, ω - параметр поврежденности ($\psi = 1 - \omega$ - параметр сплошности), $\sigma_0 = \alpha\sigma_{max} + \beta\sigma + (1 - \alpha - \beta)\mu_0$ - эквивалентное напряжение, $\alpha, \beta, B, n, A, m$ - константы материала.

В безусловной постановке задача, когда поврежденность в уравнениях (1) отсутствует, распределение напряжений у вершины трещины определяется решением Датчавасова-Равсы-Розенгрена для нелинейно-вязкого тела

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = (C^*/BI_n r)^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^*(r, \phi) \quad (3)$$

где C^* - контурный интеграл теории установившейся ползучести, I_n - константа, σ_{ij}^* - безразмерные функции.

В связанной постановке (1) - (2) решение можно представить в виде

$$\psi = \Psi(R, \phi, T) \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = (AC^*/BI_n v)^{1/(n+1-m)} \Sigma_{ij}(R, \phi, T) \quad (5)$$

где Ψ и Σ_{ij} - безразмерные функции от безразмерных переменных $R = r/r_0$, $\phi, T = tr/r_0$, $r_0 = (C^*/BI_n)^{1/(n-1)}(A/v)^{1/(n-1)}$, $p = m/(n+1)$, v - скорость роста трещины.

В работе выполнен асимптотический анализ поведения функций $\Psi(R, \phi, T)$ и $\Sigma_{ij}(R, \phi, T)$ при $R \rightarrow 0$. Полученные результаты показали, что в берем разннзичнейшей д прорессе ползучести трещины примыкает область полностью разрушенного материала, в котором с точностью до $O(R^2)$ выражения в сплошности нулевые. Такое решение принципиально отличается от решения (3) в безусловной постановке и является результатом учета влияния поврежденности на процесс ползучести. Полностью разрушенная область у берегов растущей трещины может быть интерпретирована как область микротрещины (microcracking), когда вдоль всей траектории развития магистральной трещины возникают ориентированно ориентированные к ней микротрещины.

УДК 62-50

Баландин Д. В. (Нижний Новгород)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОГО ОБЪЕКТА *1

Рассматривается задача о предельных возможностях управления колебаниями упругого объекта. Пространственное движение объекта описывается дифференциальным уравнением с частными производными. На объект действуют силы управления, сосредоточенные в заданных точках, и внешние возмущения. На возмущения наложено квадратичное интегральное ограничение. Ставится максиминная задача: для любого возмущения из указанного класса найти управление, минимизирующее квадратичный интегральный функционал, а затем определить максимальное значение функционала на всем классе возмущений. Такая постановка задачи может быть, в частности, интерпретирована как задача о предельных возможностях виброизоляции упругого объекта при защите его от возмущений из определенного класса. Предложен метод решения поставленной задачи и установлена ее связь с задачей оптимального управления по критерию минимума гарантированного результата. Показано, что минимум гарантированного результата не может быть меньше величины, найденной в задаче о предельных возможностях управления. Приведены численные примеры решения задач о предельных возможностях управления и о минимуме гарантированного результата для заданного упругого объекта. Эти примеры показывают, что в некоторых случаях величина гарантированного результата может достигать предельно возможного значения. Показано также, что гарантирующее оптимальное управление обладает свойством робастности, т. е. обеспечивает малую чувствительность функционала по отношению к вариациям параметров упругого объекта. Отмечается, что предложенный подход к исследованию предельных возможностей виброизоляции может оказаться перспективным при проектировании систем сейсмоизоляции зданий и сооружений.

*1. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16282).

УДК 539.3

Баскаков В.А., Кончакова Н.А., Россихин Д.А. (Воронеж)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ
ДЛЯ МОДЕЛИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ
С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

В различных областях техники стало необходимым моделирование процессов деформации элементов конструкций как процессов распространения волн. В данной работе рассматривается волновое деформирование упругих тел на базе нелинейной связанной теории термоупругости с конечной скоростью распространения тепла. Одним из постулатов теории служит нелинейное уравнение теплопроводности сравнительно общего вида, из которого могут быть получены известные варианты линейных и нелинейных уравнений теплопроводности. Остальные определяющие соотношения в лагранжевых переменных следуют из законов сохранения динамических величин и законов термодинамики. Функция внутренней энергии раскладывается при этом в ряд Тэйлора относительно начального состояния с удержанием квадратичных членов по деформациям и температуре. Все дифференциальные уравнения записаны в разрывах с использованием условий совместности для описания процесса распространения ударных волн и определения их скоростей. Получены также интегральные формы законов сохранения для уравнения теплопроводности и энергетического уравнения.

Из условий разрешимости исходной системы уравнений в разрывах следуют условия существования трех возможных ударных волн: квазипродольных, квазипоперечных и квазитепловых. Определены скорости их распространения, существенно зависящие от степени деформирования среды перед волной; линейные аналоги для несвязанной модели термоупругости совпадают с известными скоростями продольных, поперечных и тепловых волн. После разложения в ряд по интенсивностям получены коэффициенты разложения разрыва температуры и скоростей на фронтах. Исследования проводились с учетом искривления фронтов и лучей в рамках теории разрывных решений. В результате такого подхода становится возможным приступить к формулировке и решению различных краевых задач с помощью лучевых разложений за фронтами ударных волн.

УДК 517.9

Батаронов И.Л., Дежин В.В., Нечаев В.Н., Рошункин А.М. (Воронеж)
 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИСЛОКАЦИИ И КОГЕРЕНТНОЙ ДВОЙНИКОВОЙ ГРАНИЦЫ
 В ДИССИПАТИВНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Явление неупругости и пластичности на микроскопическом уровне связано с консервативным движением дефектов - дислокаций и когерентных двойниковых границ, динамика которого в значительной степени определяется диссипативными процессами, приводящими к торможению дефектов. Диссипативные свойства среды могут быть учтены в уравнениях движения путем включения в правую часть уравнений Лагранжа сил трения, являющихся производными по скоростям измененных обобщенных динамических координат системы q_i (т.е. компонент u_i вектора смещения точек среды и смещения ξ точек дефекта из равновесного положения \mathcal{D}):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

Диссипативная функция R для сплошной среды с дефектом имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} \int \eta_{iklm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') [u_{k,i}(\mathbf{r}) - s_{ik} \delta(\mathcal{D}) \xi]_{,t} [u_{m,i}(\mathbf{r}') - s_{im} \delta(\mathcal{D}') \xi]_{,t} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

где η_{iklm} - ядро линейного интегрального оператора, учитывающего пространственную дисперсию тензора вязкости, $s_{ik} \delta(\mathcal{D}) \xi$ - пластическая деформация среды при смещении дефекта, а индексе t означает временную переменную. Использование функции R в уравнениях (1) в последующем их фурье-образовании и исключением переменных u_i приводит к следующему выражению для фурье-образа функции Грина дефекта в диссипативной среде:

$$g(\mathbf{k}_+, \omega) = \left\{ \int [G(\mathbf{k}_+, 0, 0) - G(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-, \omega) - i\omega \eta_D(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-)] \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^r} \right\}^{-1}$$

Здесь \mathbf{k}_+ и \mathbf{k}_- - волновые вектора, соответственно параллельные и перпендикулярные статической конфигурации \mathcal{D} дефекта (линии дислокации или плоскости двойниковой границы), r - размерность пространства векторов \mathbf{k}_+ , $G(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \lambda_{iklm}^* s_{im} \lambda_{npq}^* s_{pq} k_k k_n$, $G_{ij} = [\lambda_{iklj}^* k_k k_l - \rho \omega^2 \delta_{ij}]^{-1}$ - фурье-образ функции Грина диссипативной среды без дефектов, $\lambda_{iklm}^* = \lambda_{iklm} - i\omega \eta_{iklm}(\mathbf{k})$, λ_{iklm} - модули упругости бездиссипативной среды, $\eta_D = \eta_{iklm}(\mathbf{k}) s_{ik} s_{lm}$, ρ - плотность среды, а $s_{ik} = n_i b_k$ для дислокации (n - вектор нормали к плоскости скольжения, b - вектор Бюргерса) и $s_{ik} = m_i s_k$ для двойниковой границы (m - вектор нормали к плоскости двойникования, s - вектор относительного сдвига при двойниковании).

УДК 519.31

Бекларян Л.А. (Москва)

О групповых особенностях дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа

В основе одного из важнейших современных подходов к исследованию уравнений с запаздывающим аргументом лежит трактовка Н.И. Красовским решения уравнения с запаздывающим аргументом как интегральной линии в расширенном фазовом пространстве $R \times C$. Вместе с тем, указанный подход не применим к уравнениям опережающе-запаздывающего типа, которые, в частности, возникают как уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи с запаздывающим аргументом.

Подход предлагаемый в [1], использует метод регуляризации краевых задач, который охватывает и уравнения опережающе-запаздывающего типа, определенные как на конечном интервале и полупрямой, так и на прямой R . При такой регуляризации, уравнения опережающе-запаздывающего типа образуют минимальное расширение класса обыкновенных дифференциальных уравнений. Для таких уравнений препятствием к наследованию всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений является отсутствие условия типа неравенства Гронуолла.

Для таких уравнений важнейшими задачами являются: описание структуры пространства решений; исследование условий гладкости решения; аппроксимация произвольного решения решениями максимальной гладкости; исследование стационарных, периодических и ограниченных решений.

Решение указанных задач тесно связано со структурой группы гомеоморфизмов прямой, порожденной функциями отклонения аргумента. Это приводит к необходимости классификации групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию [2], имеющая как самостоятельный интерес в теории групп так и приложение в анализе, геометрии, теории динамических систем.

Бекларян Л.А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. ДАН СССР. т.323. №4, 1991г. стр. 1033-1037.

Бекларян Л.А. Структура фактор-группы группы гомеоморфизмов R , сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов. Докл. РАН, т.331, №2, 1993г. стр.137-139.

УДК 517.95

Бободжанов А., Тулчиев О.Д. (Худжанд)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С КРАТНЫМ НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

В докладе обсуждается проблема построения регуляризованного асимптотического решения [1] сингулярно возмущенной задачи Коши

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + h(t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

при следующих ограничениях на спектр $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$:

- 1) $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t) \equiv \dots \equiv \lambda_k(t) \equiv \ell_j(t) \prod_{i=1}^j (t-t_i)^{d_i}$ ($\ell_j(t) < 0 \forall t \in [0, T]$);
- 2) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, i, j = \overline{k+1, n}$ ($\forall t \in [0, T]$);
- 3) $\lambda_j(t) \neq 0, \lambda_j(t) \neq \lambda_i(t), j = \overline{k+1, n}, i = \overline{1, k}$ ($\forall t \in [0, T]$);
- 4) $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq 0, j = \overline{k+1, n}$ ($\forall t \in [0, T]$).

При достаточной гладкости исходных данных (т.е. матрицы $A(t)$ и вектор-функции $h(t)$) развивается теория нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач метода регуляризации в условиях кратности (см. [1]) и неустойчивости спектра оператора $A(t)$. Эта теория позволяет обосновать асимптотическую сходимость формальных решений к точному и выявить ряд эффектов, обусловленных неустойчивостью и кратностью спектра $\{\lambda_j(t)\}$. В качестве одного из таких эффектов можно назвать эффект внутреннего пограничного слоя в окрестностях точек t_j неустойчивости. Этот пограничный слой индуцируется неоднородностью $h(t)$ задачи (1). Если функция $h(t)$ отсутствует, то будут отсутствовать и соответствующие внутренние пограничные слои. Кроме того, неоднородность может породить разрывные предельные режимы, причем (как это показывается в докладе) предельный режим задачи (1) не совпадает с ее предельным решением (т.е. с решением вырожденной системы $0 = A(t)y + h(t)$).

В докладе обсуждаются два подхода к решению поставленной проблемы: на основе классического метода регуляризации [1] и на основе метода нормальных форм [2].

1. Елисеев А.Г., Домов С.А. // Матем. сб. - 1986. - Т. 131 (173), № 4. - С. 544-557.

2. Елисеев А.Г., Сафонов В.Ф. Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений // Уч. пособие. М.: МЭИ, 1990. - 60 с.

УДК 517.927

Боровских А.В., Лазарев К.П. (Воронеж)
 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается плоская связная стержневая система, состоящая из стержней, шарнирно соединенных некоторыми концами и шарнирно закрепленных в остальных концах. Предполагается, что стержни натянуты и в положении равновесия находятся в одной плоскости. С этой системой удобно связывать геометрический граф Γ , состоящий из ребер (интервалов, совпадающих с упругой линией стержней в положении равновесия). Множеством внутренних вершин V назовем точки (шарниры), соединяющие несколько стержней, а множеством граничных вершин $\partial\Gamma$ назовем точки, в которых стержни шарнирно закреплены. Через $I(a)$ будем обозначать множество ребер, имеющих общую вершину a .

Малые отклонения от положения равновесия $u(x) (x \in \Gamma)$ описываются следующей задачей

$$(\rho u''')' - (q u')' = f, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$u|_x(a) = u|_y(a) \quad \forall a \in V, \quad \forall x, y \in I(a), \quad (3)$$

$$u''|_x(a) = 0 \quad \forall a \in V, \quad \forall x \in I(a), \quad (4)$$

$$\sum_{y \in I(a)} [(\rho u''')' - (q u')']|_y(a) = 0 \quad \forall a \in V. \quad (5)$$

Здесь $\rho(x)$ - жесткость при изгибе, $q(x)$ - сила натяжения, $f(x)$ - плотность распределения поперечных сил. Уравнение (1) выполняется на каждом ребре γ . Способ закрепления на границе дает условия (2), (3)-(5) - это условия согласования стержней во внутренних вершинах.

Пусть $q(x)$ и $\rho(x)$ имеют равномерно непрерывные производные соответственно до первого и второго порядка внутри каждого ребра, $\int_{\Gamma} \rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $q(x) \neq 0$ на каждом ребре и $f(x)$ непрерывна на Γ . В этих предположениях доказана однозначная разрешимость задачи (1)-(5), получено представление решения в интегральной форме с непрерывным ядром (функцией Грина), установлена положительность функции Грина на $(\Gamma \setminus \partial\Gamma) \times (\Gamma \setminus \partial\Gamma)$ для графа Γ без циклов. В последнем случае доказано существование простого ведущего положительного собственного значения и положительной на $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ собственной функции для спектральной задачи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИДИМОСТИ В ПРОМЫШЛЕННЫХ ДЫМАХ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МИ

Решение задачи оптического видения в промышленных дымах, как и в атмосферных аэрозолях других типов (облака, туманы и т.п.), сводится к решению интегродифференциального уравнения переноса оптического изображения. Его строгое решение в настоящее время пока не получено. Поэтому в модели видимости предпочтительнее использовать уравнение Кошмидера :

$$S_m = \ln \frac{1}{\epsilon} / \alpha(\lambda) \quad (1)$$

Уравнение связи между спектральным коэффициентом аэрозольного ослабления света $\alpha(\lambda)$ и весовой концентрацией имеют вид :

$$\alpha(\lambda) = C \frac{3}{4} \frac{\int_{z_2}^{z_1} z^2 K(x, m) f(r) dr}{\rho_a \int_{z_2}^{z_1} z^3 f(r) dr} \quad (2)$$

Фактор ослабления света одной частицей $K(x, m)$ рассчитывается по соотношениям теории Ми.

Аэрозоль представляется суперпозицией отдельных фракций, микроструктура $f(r)$ которой задается формулой :

$$f(r) = \sum_{i=1}^N f_i(r) = \sum_{i=1}^N A_i r^{\alpha_i} \exp(-\beta_i r^{c_i}), \quad (3)$$

где $A_i, \alpha_i, \beta_i, c_i$ - параметры i -ой фракции;
 N - число фракций.

Пространственная концентрация промышленных дымов определяется путем численного решения уравнения турбулентной диффузии совместно с гидродинамическими уравнениями, описывающими стационарный горизонтально-неоднородный пограничный слой атмосферы.

Численные результаты, полученные на основе использования вышеприведенной комплексной модели, согласуются с известными экспериментальными и расчетными данными.

К ВОПРОСУ ПРОГНОЗА ВИДИМОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ВОЗДУШНЫХ МАСС С УЧЕТОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ

Данная работа посвящена разработке прогностической модели видимости в различных типах воздушных масс, в основу которой положена однозначная связь метеорологической дальности видимости S_m со спектральным аэрозольным коэффициентом ослабления видимого излучения d_λ , в виде формулы Кошмидера :

$$S_m = \ln \frac{1}{\varepsilon} / d_\lambda \quad (1)$$

Здесь ε - пороговая чувствительность глаза; d_λ - коэффициент аэрозольного ослабления, определяемый модифицированной формулой Ангстрема:

$$d_\lambda = d_{0.53} [n_0 + n_1 \lambda^{-n_2}] \quad (2)$$

где n_0, n_1, n_2 - эмпирические коэффициенты, характеризующие "оптическую погоду" каждого типа воздушной массы, полученные в результате статистической обработки наблюдения за метеорологической дальностью видимости в конкретных типах воздушных масс; $d_{0.53}$ - коэффициент ослабления видимого света на длине волны $\lambda = 0,53$ мкм.

Измеряя с помощью спектрометра Гудина значения аэрозольного коэффициента ослабления $d_{0.53}$ и используя эмпирические коэффициенты n_0, n_1, n_2 для различных типов "оптической погоды", учитывая влияние относительной влажности воздуха на изменение оптических констант аэрозоля (n - коэффициента преломления и коэффициента поглощения χ), по формулам (2) и (1) можно определять и прогнозировать видимость в региональном масштабе.

УДК 539.3

Булатов С.Н. (Воронеж)

Соотношения теории конических оболочек произвольного очертания

Получена полная система геометрических, физических и статических уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние скошенных конических оболочек ненулевой гауссовой кривизны. В отличие от оболочек классических форм, исследующихся традиционными методами математической физики, в рассматриваемом случае коэффициенты уравнений являются функциями координат сложного вида и к задаче прочностного расчета добавляется задача построения и анализа геометрических свойств срединной поверхности. Последняя задача в работе аналитически и для любой гауссовой кривизны представлена в виде

$$x(z, \theta) = F(z) + K(z) \cdot x_0(\theta), \quad y(z, \theta) = K(z) \cdot y_0(\theta), \quad z = Z_1,$$

где $F(z)$ — опорная линия, $K(z)$ — коэффициент пропорциональности, $x_0(\theta)$, $y_0(\theta)$ — координаты точки опорного контура. Связь между деформациями и перемещениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \partial u_i / \partial x^j - \Gamma_{ij}^k u_k - b_{ij} \cdot \omega, \quad \gamma_i = \partial \omega / \partial x^i + b_{ji}^k u_k + \varphi_i, \\ \varepsilon_{ij} &= \partial \varphi_i / \partial x^j - \Gamma_{ji}^k \varphi_k, \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$N^{ik} = KE^{ikjS} \cdot \varepsilon_{js}, \quad M^{ik} = DE^{ikjS} \cdot \varepsilon_{js}, \quad Q^i = \kappa^2 K(1 - \mu) \cdot \gamma^i,$$

уравнения совместности деформаций

$$\partial \bar{\varepsilon}_2 / \partial x^1 - \partial \bar{\varepsilon}_1 / \partial x^2 = 0, \quad \partial \bar{\varepsilon}_2 / \partial x^1 - \partial \bar{\varepsilon}_1 / \partial x^2 + (\bar{\tau}_1 \times \bar{\varepsilon}_2) - (\bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon}_1) = 0,$$

уравнения статического равновесия

$$\begin{aligned} \partial(\sqrt{a} \cdot \bar{N}^i) / \partial x^i + \sqrt{a} \cdot \bar{q} &= 0, \\ \partial(\sqrt{a} \cdot \bar{M}^i) / \partial x^i + \bar{\tau}_i \times (\sqrt{a} \cdot \bar{N}^i) + \sqrt{a} \cdot \bar{m} &= 0 \quad i=1, 2 \end{aligned}$$

и граничные условия задачи

$$\bar{N} = A_i \bar{N}^i \cos(\nu, x^i), \quad \bar{M} = A_i \bar{M}^i \cos(\nu, x^i)$$

образуют замкнутую систему 25 уравнений с 25 неизвестными, описывающую напряженно-деформированное состояние данных оболочек. Естественно, решение данной задачи возможно лишь численно. В заключение следует отметить, что из полученных соотношений вытекают все частные случаи, известные из литературы, в том числе и скошенная некруговая коническая оболочка нулевой гауссовой кривизны.

Вельмиров П.А. (Ульяновск)

ДИНАМИКА ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН
С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Рассматривается класс задач о колебаниях вязкоупругих стареющих пластин, между которыми протекает идеальная несжимаемая жидкость. Пластины опираются на вязкоупругие стареющие основания и зажаты продольными силами. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, (x, y) \in H = \{(x, y) \in R^2: 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\} \quad (1)$$

$$\Delta(w_1) = P(\psi_t + U\psi_x), y=0, x \in (0, x_0) \quad (2)$$

$$\Delta(w_2) = -P(\psi_t + U\psi_x), y=y_0, x \in (0, x_0) \quad (3)$$

$$\psi_y(x, 0, t) = \dot{w}_1 + U w_1', x \in (0, x_0) \quad (4)$$

$$\psi_y(x, y_0, t) = \dot{w}_2 + U w_2', x \in (0, x_0) \quad (5)$$

$$\Delta(w) = M\ddot{w} + D(w'''' - \int_0^t R_1(t, \tau) w''''(x, \tau) d\tau) + N w'' + \beta_0(w - \int_0^t R_2(t, \tau) w(x, \tau) d\tau) + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \dot{w}''' + \beta_3 \dot{w}''', x \in (0, x_0) \quad (6)$$

В формулах (1)-(6) ψ - потенциал скоростей жидкости; x, y, t - декартовы координаты и время; $w_1(x, t), w_2(x, t)$ - прогибы пластин; U, P - скорость движения и плотность жидкости; $R_k(t, \tau)$ - ядра релаксации пластин и оснований; точка обозначает производную по времени t , штрих - по переменной x . На входе в канал ($x=0$) и на выходе из него ($x=x_0$) заданы или расход ψ_x , или давление $(\psi_t + U\psi_x)$, или потенциал ψ . Получены достаточные условия колебаний пластин, налагающие ограничения на суммарную меру релаксации $Q(t, \tau)$, коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования β_1, β_2 , а также на значение сжимающего усилия N . Последнее имеет вид

$$N < \beta_0 \lambda^{-2} - P \xi U^2 \lambda^{-1} + D \lambda^2 \min_{t \geq 0} [1 + Q(t, 0) - Q(t, t)] \quad (7)$$

где $\lambda = \lambda(x_0), \xi = \xi(y_0)$ - постоянные, зависящие от длины x_0 и ширины y_0 канала, а также от вида граничных условий при $x=0, x=x_0$.

УДК 517.929.7

Венеvitина С.С. (Воронеж)
 ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
 ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

В докладе рассматривается линеаризованная нестационарная задача о движении упругой среды, целиком заполняющей ограниченную область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, под действием массовых сил. Предполагается, что Ω обладает липшицевой границей $\partial\Omega$, состоящей из конечного числа гладких поверхностей. Граница $\partial\Omega$ разбита на две части S и Γ , на одной из которых равны нулю перемещения, а на другой отсутствуют напряжения.

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + F(t, x) \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\bar{u} = 0 \quad \text{на } S,$$

$$\tau_i(\bar{u}) = \sum_{k=1}^3 (\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) \alpha_k + \beta \text{div } \bar{u} \alpha_i = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (i=1,2,3), \quad (2)$$

и начальных условиях:

$$\bar{u}(0, x) = \bar{u}_0(x); \quad \frac{\partial \bar{u}(0, x)}{\partial t} = \bar{u}'_0(x) \quad (3)$$

где $\bar{u}(t, x)$ - перемещения; $f(t, x)$ - поле массовых сил; λ и μ - коэффициенты Ламе; $\rho(x)$ - плотность среды, которая в линеаризованной задаче считается не зависящей от t .

Задача о нахождении обобщенных решений системы (1)-(3) сводится к решению задачи Коши для операторного уравнения

$$B \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + A \bar{u} = f$$

где A - порождающий оператор гильбертовой пары $(H_{0,s}^1(\Omega); L^2(\Omega))$ (см. [1]), а B - оператор умножения на ρ .

Теорема. Если вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по t как функция со значениями в $L^2(\Omega)$ и функция $\rho(x)$ непрерывна в замыкании $\bar{\Omega}$, то при начальных условиях $\bar{u}_0 \in H_{0,s}^1(\Omega)$ и $\bar{u}'_0 \in L^2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3), удовлетворяющее энергетическому неравенству.

Отметим, что при доказательстве теоремы используется неравенство Гайнца (см. [2]).

Список литературы:

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

УДК 532.5 + 532.543

Вервейко Н.Д., Зиновьев Н.М. (Воронеж)
**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБЕ С ДИСКРЕТНЫМИ
 ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

Массовый расход и давление жидкости при неустановившемся ее движении в упругой трубе переменного сечения описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа [1]. При движении жидкости в трубопроводе предполагается, что все параметры гидролинии кусочно-постоянны и претерпевают разрыв в конечном числе дискретных точек. Условно разбив гидролинию на участки, границами которых являются точки разрыва входящих в уравнение функций либо внешние дискретные возмущающие факторы, приходим к задаче исследования движения жидкости с постоянными параметрами на каждом из участков.

Математическая задача сводится к решению краевой задачи для нелинейной системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами; граничными условиями которой во внутренних точках являются условия сопряжения. Первое из этих условий является следствием непрерывности течения — условие равенства массового расхода в точках разбиения. Второе условие сопряжения, полученное предельным переходом интегрирования исходного уравнения в окрестности разрыва коэффициентов уравнения, выражает равенство приращений в единицу времени сил давления. Полученная линеаризованная задача является нулевым приближением при исследовании расхода жидкости в канале переменного сечения.

Методика, разработанная в [2], [3], позволяет определить собственные частоты и собственные колебания гидролинии. При этом наличие в возмущающих массовых силах гармоник, совпадающих с собственными частотами, может привести к явлению резонанса и возникновению волн гидроудара или их усилению за счет внешних массовых сил.

1. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.
2. Кухта К.Я., Кравченко В.П. Нормальные фундаментальные системы в задачах теории колебаний. Киев: Наукова думка, 1973.
3. Кухта К.Я., Кравченко В.П. Нестационарные граничные задачи с непрерывно-дискретными параметрами. Киев: Наукова думка, 1978.

УДК 517.9

Виноградова Г. А. (Воронеж)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x, z, t)$, удовлетворяющей уравнению внутренних волн

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, z, t) \quad (1)$$

при $t > 0$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq z < 1$,
начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = U_1(x, z) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u|_{z=0} = u|_{z=1} = 0 \quad (3)$$

В работе [1] получено представление решения задачи (1)-(3) через функцию Грина.

В настоящей работе приводится результат исследования асимптотики при $t \rightarrow +\infty$ решения, в основе которого лежит получение асимптотической оценки для функции Грина.

Теорема. Пусть U_0, U_1, f - функции с компактными носителями, такие, что $|\Delta U_0| < c$, $|\Delta U_1| < c$, $|f| < c$, где c - некоторая постоянная. Тогда решение задачи (1)-(3) при $t \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$u(x, z, t) = \frac{1}{8N} \int_0^\infty \int_{R^2} f(x', z', t') \ln \left| \frac{\cos \frac{\pi}{2}(z-z')}{\cos \frac{\pi}{2}(z+z')} \right| dx' dz' dt' + \\ + \frac{1}{8N} \int_{R^2} \Delta U_1(x', z') \ln \left| \frac{\cos \frac{\pi}{2}(z-z')}{\cos \frac{\pi}{2}(z+z')} \right| dx' dz' + O(t^{-1/2})$$

Литература

1 Григорьев П. И., Яковлев В. А. К решению задачи Коши для уравнения внутренних волн в среде с жесткими границами // ЖТФ - 1986 - т. 56, вып. II - с. 2087-2090

УДК 539.374

Вульман С.А., Семькина Т.Д. (Воронеж)
ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РАСЧЕТА
НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматриваются цилиндрические оболочки, срединная поверхность которых отлична от круговой, а ее направляющая может быть описана в полярной системе координат в виде разложения в ряд по малому параметру δ

$$z(\theta) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n z^{(n)}(\theta) \quad (1)$$

Систему сил и моментов, действующих на элемент истинной оболочки, заменяем эквивалентной системой сил, действующих на элемент круговой цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \bar{R}^{(n)}, \\ \bar{M} &= \bar{M}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \bar{M}^{(n)} \end{aligned} \quad (2)$$

где \bar{R}_0, \bar{M}_0 - главный вектор и главный момент элемента круговой цилиндрической оболочки, $\bar{R}^{(n)}$ и $\bar{M}^{(n)}$ зависят от предыдущих приближений.

После подстановки (2) в уравнения равновесия для некруговой цилиндрической оболочки с учетом (1) получим уравнения для круговой цилиндрической оболочки, в которых для каждого n -го приближения члены, соответствующие поверхностной нагрузке, дополняются слагаемыми, полученными от предыдущих приближений.

Представляем перемещения в виде разложения в ряд по малому параметру δ , принимая в качестве нулевого приближения перемещение круговой цилиндрической оболочки. В кинематических соотношениях для n -го приближения при переходе к цилиндрической системе координат появятся слагаемые, зависящие от предыдущих приближений.

Граничные условия должны записываться с учетом (1) и (2).

Выражая в уравнениях равновесия \bar{R} и \bar{M} через перемещения, получим систему трех дифференциальных уравнений для каждого приближения в виде уравнений для круговой цилиндрической оболочки, где свободные члены зависят от предыдущих приближений.

Таким образом, решение для некруговой цилиндрической оболочки сводится к последовательным решениям для круговой цилиндрической оболочки, которые достаточно полно представлены в литературе.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ОБЛОЧЕК

В работе излагается новый подход к расчетам и проектированию гибких тонкостенных элементов конструкций, процесс эксплуатации которых, предполагает реализацию сложных нелинейных процессов деформирования, характеризующихся значительными скачкообразными изменениями геометрической формы, обусловленными бифуркационными эффектами - хлопками и перескоками.

Для целого ряда рассматриваемых элементов, даже решение прямой задачи является достаточно сложной проблемой, так как сводится к численному исследованию нелинейной краевой задачи, зависящей от некоторого внешнего параметра. Задача проектирования, в подавляющем числе случаев, решается посредством перебора вариантов. Для изделий массового производства, используется подход заимствованный из экспериментальных методов, конечной целью которого является построение необходимых для проектирования графиков или номограмм, которые, по существу, аппроксимируют проекции поверхности равновесных состояний в то или иное подпространство параметров системы.

Суть предлагаемого метода заключается в кусочно-гладком продолжении решения по поверхности (гиперповерхности) равновесных состояний, пока не будет найдена область, в которой совокупность значений внешних параметров отвечает заданным требованиям.

Подход использует аппарат теории катастроф и идеи методов погружения. При реализации процесса численного исследования используется стратегия последовательного исследования однопараметрических задач, принадлежащих многопараметрическому семейству в которое погружена анализируемая задача. Алгоритм численного исследования основан на использовании метода продолжения решения по параметру в сочетании с предложенным автором приемом "смены подпространства управляющих параметров".

Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется рядом конкретных примеров расчета и проектирования гибких упругих элементов коммутационных и исполнительных устройств, в форме тонкостенных пластин и оболочек.

УДК 639.4:624.042

Гарбуз Е.В., Гончарова Г.А. (Саратов)

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТРУБ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
С АКТИВНОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

При воздействии на элементы конструкций агрессивных внешних сред происходит изменение механических свойств материала, что в конечном итоге уменьшает их долговечность. Кроме того, механические нагрузки интенсифицируют процессы взаимодействия конструктивных элементов с агрессивной средой.

Рассмотрим задачу устойчивости толстостенной цилиндрической оболочки под воздействием механических нагрузок (внешнего и внутреннего давлений, продольных сил, изгибающих моментов) и агрессивной среды. Будем считать, что материал трубы нелинейно-упругий, а механические свойства материала зависят от концентрации среды C . Для учета воздействия среды в систему определяющих параметров кроме напряжений и деформаций включается концентрация среды в материале конструкции C . Поскольку в результате проникания среды концентрация C по толщине трубы распределяется неравномерно, материал становится неоднородным.

Для определения полей концентрации к системе уравнений, описывающей напряженно-деформированное состояние, добавляется уравнение массопереноса. В случае действия жидкой агрессивной среды в зависимости от свойств материала трубы возможно использование наряду с законом Фика и фильтрационное уравнение Дарси. Различные виды граничных и начальных условий позволяют производить расчеты при различных схемах воздействия среды.

Для определения долговечности используется теория накопления повреждений. Дополнительно вводится параметр поврежденности ω , ($0 \leq \omega \leq 1$), причем за момент разрушения принимается время, в которое $\omega = 1$. Для того, чтобы учесть влияние агрессивной среды на длительные характеристики материала, коэффициенты кинетического уравнения накопления повреждений считаем функциями от C . А поскольку уровень напряжений тоже влияет на долговечность, в кинетическое уравнение вводится некоторое эквивалентное напряжение $\sigma_{э.к.}$.

Таким образом, получается связанная система уравнений, решение которой позволяет определять напряженно-деформированное и поврежденное состояние.

УДК 517.95

Глушко А.В., Глушко Е.Г. (Воронеж)
 О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ
 ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В линеаризованной постановке данная задача состоит в нахождении в пространстве обобщенных функций медленного роста $S'(R_4)$ вектор-функции $\vec{V}(x, t)$; $\nabla p(x, t)$, где $\vec{V} = \{V_1, V_2, V_3\}^T$, равной нулю при $t < 0$, удовлетворяющей системе уравнений $(v, \vec{a} = (0, 0, \omega)^T$ - постоянные, $\delta(t)$ - функция Дирака):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V}, \vec{\omega}] - \nu \Delta \vec{V} + \nabla p = \delta(t) \vec{V}^0(x); \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad (1)$$

где $\vec{V}^0(x) = (V_1^0(x), 0, 0)^T$; $V_1^0(x) = 1$ при $|x| < R$; $V_1^0(x) = 0$ при $|x| > R$.

т.е. традиционное условие согласования $\text{div } \vec{V}^0(x) = 0$ не накладывалось. Решение задачи (1) выписано в явном виде с помощью обобщенного преобразования Фурье.

Доказано, что при $t \in [t_0, \infty)$, $\forall t_0 > 0, x \in R_3$ решение $(\vec{V}, \nabla p)$ задачи (1) есть бесконечнодифференцируемая ограниченная вектор-функция, стремящаяся к нулю при $t + |x| \rightarrow \infty$. При $t \rightarrow 0$ имеет место соотношение $\lim_{t \rightarrow 0} \|\vec{V}(\cdot, t) - \vec{u}^0(\cdot)\|_2 = 0$, где $\|\cdot\|_2$ - стандартная норма в $\mathcal{E}_2(R_2)$; $\vec{u}^0(x)$ - соленоидальная часть $\vec{V}^0(x)$:

$$\vec{u}^0(x) = F_x^{-1} [(s_2^2 + s_3^2) |s_1|^{-2}; -s_1 s_2 |s|^{-2}; -s_1 s_3 |s|^{-2}]^T * V_1^0(x).$$

Построенное решение единственно в классе обобщенных функций из $S'(R_4)$, регулярных по переменной x и стремящихся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. При $t \rightarrow \infty$ компоненты $V_k(x, t)$, $k=1, 2, 3$ имеют следующие асимптотики:

$$V_1(x, t) = (1/2)(\nu t)^{-3/2} (\omega t)^{-1} R^3 x^{-1/2} \sin \omega t + O(t^{-3})(1+|x|)^{-3},$$

$$V_2(x, t) = (\nu/16)(\nu t)^{-5/2} (\omega t)^{-1} x_1 x_2 x^{-1/2} \sin \omega t + O(t^{-4})(1+|x|)^{-3},$$

$$V_3(x, t) = (1/4)(\nu t)^{-3/2} (\omega t)^{-1} x_1 x_3 x^{-1/2} \sin \omega t + O(t^{-4})(1+|x|)^{-3},$$

где функции $O(t^{-3}), O(t^{-4})$, фигурирующие в остаточных членах допускают при $t \in [t_0, \infty), t_0 > 0, x \in R_3$ равномерные оценки $|O(t^{-k})| \leq C t^{-k}$, $k=3, 4$.

УДК 517.968.22

Гурьянова И.Э. /москва/

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
В ОБЩЕЙ ТРАКТОВКЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматривается уравнение вида

$$x(t) = f(t) + \int_{M(t)} K(t, s, x(s)) d\mu_s, \quad /1/$$

где $t \in \Omega$, Ω - связное локально компактное метрическое пространство; мера $\mu \leq \infty$ определена на борелевских множествах $A \subseteq \Omega$; функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $K: \Omega^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны; отображение $M: \Omega \rightarrow 2^\Omega$ удовлетворяет системе аксиом, на основе которой обобщается понятие "вольтерровости" интегрального уравнения.

Отображение M назовем нильстепенным, если $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall t \in \Omega, M^{n_0}(t) = \emptyset$ /под M^k понимается k -я итерация отображения M /.

Доказывается, что уравнение /1/ с нильстепенным отображением M имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью конечного числа итерации, а в общем случае, при определенных условиях, решение уравнения /1/ может быть построено методом последовательных приближений.

УДК 539.377:621.78

Дель Г.Д. (Воронеж)
АНИЗОТРОПИЯ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Уравнения пластического состояния ортотропных листовых материалов с анизотропным упрочнением при холодном многопереходном деформировании с промежуточными термообработками записываются в виде

$$\{\dot{\bar{E}}\} = \bar{E} ([\alpha] \{\sigma\} + \{S\}) / \bar{\sigma}$$

где $\{\dot{\bar{E}}\}$ - столбец скоростей деформации $\dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{E}_{xy}$; $\{\sigma\}$ - соответствующий столбец напряжений; $[\alpha]$ - матрица параметров анизотропии; $\{S\}$ - столбец добавочных напряжений, определяемых по Г.Бакхаузу:

$$S_x = \int_0^{\bar{E}} 45(1-\beta) \bar{\sigma} \varphi(\bar{E} - \bar{E}^*) (d^2 E_x / d\bar{E}^2) d\bar{E}^*, \dots$$

Здесь эквивалентная деформация $\bar{E} = \int \dot{\bar{E}} dt$ отсчитывается с момента предшествующей термообработки, функции $\beta(\bar{E})$; $\bar{\sigma}(\bar{E})$, $\varphi(\bar{E} - \bar{E}^*)$ являются характеристиками материала.

Эквивалентная скорость деформации

$$\bar{E} = (\{\dot{\bar{E}}\}^T [\beta] \{\dot{\bar{E}}\})^{1/2}$$

Элементы матрицы $[\beta]$ связаны с параметрами анизотропии.

Эквивалентное напряжение связано с параметром упрочнения

$$q = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{E}_k \prod_{j=k}^{i-1} \alpha_j + \bar{E}_i$$

где α_j - коэффициент эффективности термообработки после j -го перехода, \bar{E}_k - приращение эквивалентной деформации на k -ом переходе, уравнением

$$\bar{\sigma} = A (\epsilon_0 + q)^n (p + r \mu \cos 2\varphi)$$

Здесь A, ϵ_0, n, p, r - параметры материала, φ - угол между главной осью анизотропии и направлением наибольшей по абсолютному значению главной скорости деформации,

$\mu = (1 - \alpha) / \sqrt{3(1 + \alpha + \alpha^2)}$, где α - отношение главных скоростей деформации в плоскости листа.

Разработаны способы определения характеристик рассматриваемого материала. Исследуется устойчивость растяжения листов.

УДК 532.51

Дободейч И.А. (Воронеж)
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

1. Поток сжимаемой сплошной среды (с.с.с.), имеющий среднюю плотность ρ , может содержать n фракций плотностью ρ_i . Каждая фракция может двигаться так, что одна часть с парциальной плотностью $\rho_{1,i}$ будет иметь скорость $\vec{V}_{1,i}$, остальная, имеющая парциальную плотность $\rho_{2,i}$, будет иметь скорость $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)_i$. Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_1^n [\operatorname{div}(\rho \vec{V}_1) + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{V}_2)]_i = 0, \quad (1)$$

$$\rho_i = (\rho_1 + \rho_2)_i, \quad \rho = \sum_1^n \rho_i, \quad (2)$$

$$\sum_1^n (\rho \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t})_i = \sum_1^n (\rho F)_i + \operatorname{Div} \mathcal{P}, \quad (3)$$

где ρF - градиент объемных сил, отнесенных к единице объема.

2. Тензор напряжений с.с.с. в точке - \mathcal{P} определим используя следующую гипотезу (которая при $\alpha = \dot{S}_2 = 0$ сводится к реологическому закону И.Ньютона)

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + 2 \sum_1^n [\rho \nu (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) + \alpha \dot{S}_2]_i. \quad (4)$$

Здесь \mathcal{E} - тензорная единица; \mathcal{E} - скаляр; ν - коэффициент кинематической вязкости; \dot{S}_1 и \dot{S}_2 - скорость деформации с.с.с. при движении со скоростью \vec{V}_1 и \vec{V}_2 соответственно; $\alpha \dot{S}_2$ - составляющая тензора \mathcal{P} , обусловленная взаимодействием потока молей, имеющего ρ_2 и $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, с потоком молей, имеющим ρ_1 и \vec{V}_1 .

Согласно (4) с учетом гипотезы Стокса о давлении P

$$\mathcal{P} = \rho \nu \operatorname{div} \vec{V}_1 - P - \frac{2}{3} \sum_1^n [\rho \nu (\operatorname{div} \vec{V}_1 + \operatorname{div} \vec{V}_2) + \operatorname{div}(\alpha \dot{S}_2)]_i. \quad (5)$$

3. Если $(\alpha \dot{S}_2)_i$ обусловлена количеством движения, переносимым молями, имеющими параметры ρ_2 и $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ и пересекающими линии тока молей с параметрами ρ_1 и \vec{V}_1 , то

$$2 \cdot (\alpha \dot{S}_2)_x = -\rho_2 u_2 (u_1 + v_2 + w_2), \quad (6)$$

$$2 \cdot (\alpha \dot{S}_2)_z = -\rho_2 w_2 (u_1 + v_2 + w_2).$$

При $\rho_1 = 0$, стационарности \vec{V}_1 и пульсационном характере \vec{V}_2 это сводит (3)-(5) к уравнению Рейнольдса для турбулентного движения с.с.с. При $n=1$ $\alpha = \rho_2 = \vec{V}_2 = 0$ уравнения (3) и (5) сводятся к уравнениям Навье-Стокса. Для течения с.с.с. в трубопроводе - $n=1$ $v_1 = u_1 = v_2 = \partial w_2 / \partial y = 0$. Вслед за Шендтлем можно использовать

$$u_2 \sim \ell \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad (7)$$

а ℓ - трактовать как „Mischungsweg“ (путь смешения).

УДК 539.375

Дудукаленко Ю.Е., Спорькин А.Н. (Воронеж)
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ
МИКРОПОВРЕЖДЕНИЙ.

Рассматривается процесс деформирования, сопровождающийся микроразрушением. Разрушение определяется как потеря устойчивости процесса развития микроповреждений, приводящая к локализации процесса деформирования. В основу феноменологической модели положена непрерывная теория микроповреждений и закон деформирования, учитывающий рост податливости при образовании микротрещин. Потеря устойчивости интерпретирована начальными условиями образования макротрещины в поле статистически однородных микроповреждений. При кратковременных нагрузках фиксируется лишь максимальное разрушающее напряжение, тогда как падающий участок диаграммы можно изучить другими нагружениями, при которых в результате устойчивого накопления микроповреждений происходит приближение к меньшим критическим напряжениям. Показано, что эмпирические диаграммы с падающим участком напряжений при постоянной скорости деформирования могут соответствовать устойчивому процессу до момента достижения критических параметров. Эти параметры соответствуют состояниям, когда для кратковременных нагрузок не выполнен критерий Друккера.

Получено условие устойчивости в виде

$$a \frac{dF}{d\sigma_{ij}} \frac{dF}{dP_{ij}} + \frac{dF}{d\mu_{ijk1}} (1-a) \frac{dF}{d\sigma_{ij}} \frac{dF}{d\sigma_{kl}} \left(\frac{dF}{d\sigma_{mn}} \sigma_{mn} \right)^{-1} > 0$$

где F - функция напряжений, определяющая в пространстве σ_{ij} область обратимых процессов $F < 0$, и критические условия $F(\sigma_{ij}) = 0$ необратимого процесса деформирования; μ_{ijk1} - модуль упругой податливости; P_{ij} - деформационное упрочнение; a - константа материала.

УДК 539.374

Ерхов М.И. (Москва)

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ
ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

При действии на тела и системы высокоинтенсивных кратковременных нагрузок (типа взрывных, сейсмических и т.п.) особое значение приобретает оптимальное проектирование, поскольку в таких случаях велик расход материалов на изготовление изделий и возведение сооружений.

Принимается, что материал - идеально пластический; поскольку наличие упругих зон будет свидетельствовать об избытке материала, то используется жесткопластическая модель.

В основе теории лежит критерий оптимизации идеально пластических тел при действии высокоинтенсивных кратковременных нагрузок. Критерий основан на условии постоянства мощности диссипации внутренней энергии.

Дается формулировка задачи оптимального проектирования для общего случая идеально пластических тел при динамических нагрузках высокой интенсивности.

В качестве примеров применения теории рассматриваются задачи об оптимальном проектировании балок, оболочек с различными условиями пластичности при действии кратковременного "прямоугольного" импульса давления; задачи оптимизации сводятся к нелинейной краевой задаче, решаемой численно. Даны результаты расчетов.

УДК 539.375

Жучкова В.В. (Воронеж)

НАПРАВЛЕНИЕ РОСТА ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Рассматриваемая задача о локальном направлении роста трещины в анизотропном материале. Поскольку однонаправленный композитный материал состоит из помещенных в матрицу параллельных волокон, волокна могут быть как изотропными, так и анизотропными, то композит, в целом, представляется как анизотропная среда.

Пусть имеется бесконечное анизотропное тело в состоянии продольного сдвига. Пусть на бесконечности приложена сдвиговая нагрузка τ^{∞} . Задача о продольном сдвиге анизотропного тела сводится к такой же задаче для изотропного материала, если область поперечного сечения S' получается из области S аффинным преобразованием

$$x' = \alpha_1 + \beta_1 y; \quad y' = \beta_2 y.$$

где $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$; $\bar{\mu}_2 = \alpha_2 - i\beta_2$ - корни характеристического уравнения.

Пусть трещина получила виртуальное приращение под углом φ_0 к первоначальному направлению.

После ряда вычислений и преобразований приращение упругой энергии, приходящейся на единицу длины приращения трещины, если приращение трещины не коллинеарно ей самой имеет вид

$$\frac{\delta W}{\delta s} = \frac{5(\tau^{\infty})^2}{2} \operatorname{Im} \left(\mu_1 - \frac{G_0}{\mu_2} \right) \rho \sin^2 \varphi \left(\frac{1-B}{1+\theta} \right)^2$$

Трещина будет развиваться по направлению, вдоль которого высвобождающаяся упругая энергия будет максимальной. Рост трещины начнется, как только эта энергия достигает критической величины ρ_0 .

Получено уравнение для определения направления роста трещины. Показано, что в анизотропном материале трещина растет вдоль своего направления.

УДК 517.927

Завгородний М.Г., Сисоева А.О. (Воронеж)
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ
СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СТРУНЫ С ПРУЖИНОЙ

Рассмотрим на объединении интервалов $(0, \xi) \cup (\xi, 1)$ задачу:

$$(px')' = f \tag{1}$$

при краевых условиях и условиях согласования

$$x(0) - x'(1) = 0; \quad x(\xi + 0) = x(\xi - 0), \quad x'(\xi + 0) - x'(\xi - 0) = kx(\xi) \tag{2}$$

Задача (1), (2) моделирует малые упругие деформации струны с пружиной в точке ξ жесткости k . Левый конец струны закреплен, а правый - подвижен. Пусть $G(t, s)$ - функция Грина (см. [1]) задачи (1), (2) и пусть $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$. Положим $\alpha_{jk} = G(t_j, t_k)$ и рассмотрим матрицу $T_n = \| \alpha_{jk} \|$. Назовем характеристическим числом величину, обратную к некоторому собственному значению краевой задачи $(px')' = \lambda x$ при условиях (2).

Теорема 1. Для каждого характеристического числа μ найдется последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$ матриц T_n , сходящаяся к μ . Обратно, каждая предельная точка любой последовательности собственных значений $\{\lambda_n\}$ матриц T_n является характеристическим числом.

Теорема 2. Пусть μ^{-1} и x - собственное значение и собственная функция краевой задачи, λ_n и x_n - собственное значение и собственный вектор матрицы T_n . Пусть λ_n сходится к μ . Тогда из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся к x подпоследовательность и каждая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ имеет своим пределом собственную функцию x .

При доказательстве теорем существенным образом использовались результаты монографии [2].

Литература

1. Покорный В.В., Пенкин О.М. // Дифференциальные уравнения, 1989 - т. 25, №7 - с. 1141-1150.
2. Красносельский М.А. и др. / Приближенные решения операторных уравнений. М., 1969 - 455 с.

УДК 517.946

Зарубин А.Н. (Орел)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КРАЕВЫХ
ЗАДАЧАХ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА

В случае уравнений

$$L(u) = \alpha_1 U(x-\tau, y) + \beta_1 U(x, y-h),$$

$$R(u) = \alpha_2 |y|^m U(x-\tau, y) + \beta_2 |x|^n U(x, y-h),$$

где

$$L(u) = \operatorname{sgn}(y) U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y),$$

$$R(u) = \operatorname{sgn}(y) \cdot |y|^m U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y)$$

или

$$L(u) = \operatorname{sgn}(xy) \cdot U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y),$$

$$R(u) = \operatorname{sgn}(y) \cdot |y|^m U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn}(x) |x|^n U_{yy}(x, y),$$

$m, n, \tau, h, \alpha_1, \beta_1 = \text{const}$, изучаются вопросы разрешимости поставленных краевых задач в неограниченных смешанных областях, содержащих линии вырождения типа, в зависимости от граничных условий и вида областей. Получены формулы обращения интегрального преобразования, включающего как частный случай преобразование Ханкеля.

Зарубин В.С. (Воронеж)

ФОРМИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО ПЛАНА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СПЕЦИАЛИСТА

Построение оптимального по заданному критерию учебного плана представляет собой задачу, решение которой должно опираться на математическую модель учебного процесса, в основе которой лежит модель специалиста. На первом этапе строится дерево цел учебного процесса. Каждой цели ставится в соответствие один или несколько разделов учебного плана. Каждый раздел содержит, в свою очередь, определенное количество дисциплин, каждая дисциплина подразделяется на темы, подтемы. На основании дерева целей разрабатывается анкета, в пояснительной записке которой достаточно понятно излагается цель и процедура анкетирования, а также указывается, как измерять уровень качества по каждому показателю анкеты. В данном случае предпочтительней использовать балльную квалитметрическую шкалу.

Второй этап решения задачи заключается в проведении экспертного исследования и формирования матрицы экспертных оценок по видам подготовки, дисциплинам и узловым темам.

Последовательно усредняя и нормируя экспертные оценки определяем относительные веса целей:

- по j - той теме i -го вида подготовки

$$\bar{O}_{ij} = \frac{O_{ij}}{\sum_{j=1}^r O_{ij}}$$

- по i - му виду подготовки

$$\bar{O}_i = \frac{O_i}{\sum_{i=1}^r O_i}$$

где O_i - усредненная оценка по i -му виду подготовки,

O_{ij} - усредненная оценка по j -той теме.

По результатам определения нормированных весов целей определяется распределение времени

- по видам подготовки:

$$T_i = T_s \cdot \bar{O}_i$$

- по темам внутри вида подготовки:

$$T_{ij} = T_i \cdot \bar{O}_{ij}$$

где T_s - общий объем времени, выделенный на цикл профилирующих дисциплин в рамках учебного плана.

УДК 532.542

Знаменский В.А. (Воронеж)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ПО СЕЧЕНИЮ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ
ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В
ЖЕСТКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ

В различных областях науки и техники все большее значение приобретают исследования и расчеты нестационарных процессов.

Во многих случаях математические модели физических явлений, от которых зависит процесс, оказываются весьма сложными и непригодными для приложений.

В инженерных расчетах, связанных с гидродинамикой, обычно пользуются средними по сечению скоростями. В нестационарных течениях они являются функциями времени.

Сделав предположение о квазистационарном распределении скоростей по живому сечению потока и пользуясь выражением касательного напряжения на стенке трубы через среднюю скорость течения, можно упрощенно получить динамическое уравнение для определения средней скорости.

Для ньютоновской жидкости динамическое уравнение имеет простой вид

$$\frac{dw}{dt} + \frac{8\nu}{\alpha b^2} w = \frac{A}{\alpha \rho} \cos \omega t$$

где ν - кинематическая вязкость, b - радиус трубы, ρ - плотность жидкости, $A \cos \omega t$ - создает вынужденную пульсацию, $A = \text{const}$, α - поправочный коэффициент.

При установившихся колебаниях жидкости в рассматриваемом случае

$$w = \frac{8 A \nu b^2}{8(64 \nu^2 + \alpha^2 b^4 \omega^2)} \left(3 \cos \omega t + \frac{\alpha b^2 \omega}{8 \nu} \sin \omega t \right).$$

Найти среднюю скорость из известных в литературе решений, выраженных в функциях Кельвина, достаточно сложно.

Аналогично осуществляется вывод динамического уравнения для жидкости, подчиненной степенному реологическому закону.

УДК 539.4

Иванищева О.И.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРУШЕНИЯ СТРУКТУРНО АНИЗОТРОПНЫХ
МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается стохастически дефектный материал, обладающий свойством прочностной анизотропии, которая проявляется в имущественной ориентации дефектов. Последние представляют собой трещины со случайными геометрическими характеристиками, совместная плотность распределения которых задана [1] и зависит от коэффициента вытяжки [2]. Статистические характеристики разрушающей нагрузки определяются в плоском поле напряжений.

В результате преобразования двумерного закона распределения геометрических параметров трещин при использовании критерия разрушения для пластины с одним дефектом, получается закон распределения разрушающей нагрузки.

Алгоритм основан на разыгрывании разрушающей нагрузки методом исключения и определении ее минимального значения. После статистического моделирования предельных напряжений и использования закона больших чисел получаются оценки для моментов первых двух порядков.

Последние зависят от размеров пластины, вида нагружения и характеристики анизотропии.

Рассматриваемый алгоритм использует статистические методы вычисления интегралов [3] и позволяет автоматизировать выбор пределов интегрирования по сложным областям.

Установлено, что предварительная вытяжка материала ведет к увеличению математического ожидания разрушающей нагрузки при растяжении в направлении вытяжки и уменьшению этого математического ожидания при перпендикулярном или двухстороннем растяжении.

Л и т е р а т у р а .

1. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. Киев, Наукова думка, 1980.
2. Косичин Р.С., Романов О.Н. О несущей способности высокопрочных материалов после обработки, сопровождающейся образованием направленной структуры дефектов. - Физика и химия обраб. материалов, 1970, №5, с. 69-76.
3. Лебедев А.Н., Чернявский Е.А. Вероятностные методы в вычислительной технике. Москва, Высшая школа, 1986.

АСИМПТОТИКА НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Изучается вопрос об асимптотическом представлении на полуинтервале $J = [t_0, \infty)$ решений скалярного интегро-дифференциального уравнения

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t [K_0(t, \tau)x(\tau) + K_1(t, \tau)x'(\tau)] d\tau = f(t), t \geq t_0. \quad (1)$$

Устанавливаются достаточные условия типа немалости членов.

Все фигурирующие в настоящей работе функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$. Речь идет о решениях $x(t)$ уравнения (1) из класса $C^1(J, R)$ с любыми начальными данными в точке t_0 . Каждое такое решение уравнения (1) \exists и единственно. Применяется метод, изложенный в работе автора (Об одном новом способе изучения асимптотического представления решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения и их приложения, Ом, сент. 1993 г.: Тез. докл. республ. научн. конф. - Ом: Омск. гос. ун-т, 1993. - С. 42). Приведем один из простейших результатов. ТЕОРЕМА. Пусть

$$\begin{aligned} &\exists \text{ функция } W(t) > 0 \text{ такая, что: } W''(t) \in L^1(J, R), \\ &Q(t, \tau) \equiv K_1(t, \tau)W(\tau), Q(t, t_0) = Q_1(t) + Q_2(t), Q_1(t) > 0, \\ &Q_1(t) = O(1), (1-\alpha)Q_1(t) + W'(t) \geq \beta > 0 \quad (\alpha \in (0, 1)), \\ &Q_2(t) \geq 0, Q'_\tau(t, \tau) \geq 0, \exists \text{ функции } Q^*(t) \in L^1(J, R_+), \\ &Q^{**}(t) \in L^1(J, R_+) \text{ такие, что } Q'(t, t_0) \leq Q^*(t)Q_2(t), \\ &Q''_{t\tau}(t, \tau) \leq Q^{**}(t)Q'_\tau(t, \tau); \\ &W(t) \left[\int_{t_0}^t |K_0(t, \tau)W(\tau) + K_1(t, \tau)W'(\tau)| d\tau \right]^2 \in L^1(J, R_+). \end{aligned}$$

Тогда для любого решения $x(t)$ уравнения

$$x'(t) + \int_{t_0}^t [K_0(t, \tau)x(\tau) + K_1(t, \tau)x'(\tau)] d\tau = 0, t \geq t_0$$

справедливо асимптотическое представление $x(t) = W(t)O(1)$.

Таким образом, в этой теореме выявлено влияние интегрального члена на асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения $x'(t) = 0$. Аналогичное асимптотическое представление установлено для уравнения (1) и при более общих условиях. Отметим, что случай $W(t) = e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$ для некоторых классов уравнения вида (1) изучен в работах Н.В. Азбелева, Л.М. Березанского, В.В. Малыгиной, П.М. Симонова, А.В. Чистякова другим методом и при других условиях.

УДК 517.9

Калинина А.В., Морозов С.Ф., Угодчиков Н.А. (Н.Новгород)

"Некоторые вопросы математического моделирования
стационарных электромагнитных полей в неоднородных средах".

Рассматриваются краевые задачи для стационарной системы уравнений Максвелла в ограниченной области, заполненной неоднородной средой с непроводящими включениями. Формулируются разрешающие соотношения в виде вариационного принципа и устанавливаются теоремы о существовании и единственности решения в функциональных классах, определенных постановкой задачи, описание которых включает дополнительные линейные ограничения (солениoidalность магнитного поля, дифференциальные условия на непроводящих подобластях). Приводится эквивалентная формулировка, в которой свойство солениoidalности является автоматически выполненным свойством решения, что снимает проблему аппроксимации солениoidalности в дискретных моделях. Обсуждаются возможные алгоритмы и методы решения поставленной задачи, обеспечивающие реализацию ограничений на непроводящих подобластях. Приведенные подходы к математическому моделированию стационарных электромагнитных полей определяют возможные схемы построения дискретных моделей и алгоритмов, основанных на применении вариационных методов.

УДК 517.9

Калинин А.В., Угодчиков Н.А. (Н.Новгород)

"Моделирование двумерных стационарных
электромагнитных полей".

Рассматриваются краевые задачи для стационарной системы уравнений Максвелла в двумерных областях (плоская и осесимметричные постановки), с неоднородной структурой. Формулируются разрешающие соотношения в виде вариационных принципов с использованием описаний в терминах напряженностей магнитного и электромагнитного полей и в терминах векторного и скалярного потенциалов. Устанавливаются теоремы о существовании и единственности решений в функциональных классах, определенных постановкой задачи. Обсуждаются характерные особенности решения рассматриваемых задач в двумерных постановках.

Представленные формулировки задач обеспечивают возможность свести общую задачу к решению связанной системы задач, каждая из которых решается в соответствующей проводящей компоненте связности среды, что имеет значение при решении проблемы создания экономичных и эффективных численных схем, основанных на применении вариационных методов. дается альтернативные формулировки задач и алгоритмы решения.

УДК 532.545

Капбасов Ш. К., Макаров А. В. (Екатеринбург)
УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

В настоящей работе рассматривается устойчивость потоков суспензий и коллоидов, а также грубодисперсных систем в широком интервале характерных течению параметров, что стало возможным в рамках теории, предложенной в [1,2]. Нормальные и квазивязкие напряжения возникают в диспергированной фазе в результате переноса импульса между отдельными частицами исключительно через посредство окружающей жидкости и влиянием пульсаций на обмен средним импульсом в сдвиговом потоке суспензий и коллоидов, и в под влиянием случайных пульсаций сталкивающихся между собой частиц в системе крупных частиц.

В рассмотрении эффектов, обусловленные исчезновением свободного объема частиц при переходе к плотноупакованному состоянию найдены условия нейтральной устойчивости и исследованы характеристики возмущений с максимальным инкрементом нарастания в области неустойчивости в интервале умеренных и высоких концентраций частиц диспергированной фазы. Получены результаты о влиянии квазивязких напряжений и броуновского движения на стабилизацию потоков в указанном интервале концентраций, и дано естественное объяснение стабилизирующей роли броуновского движения частиц, существующего при переходе от суспензий к коллоидам. При усилении роли тепловых флуктуаций имеет место полная стабилизация неограниченного вертикального потока суспензий, достаточно близких к суспензиям нейтральной плавучести. Исследована устойчивость ограниченного однородного вертикального потока не слишком мелких частиц и рассмотрен известный масштабный эффект, связанный с феноменом возрастания неустойчивости при переходе от лабораторных к геометрически подобным промышленным установкам.

1. Бвенич И. А. Внутренние пульсации в потоках мелко-дисперсных суспензий // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1993. №3. С. 91-100.
2. Бвенич И. А., Капбасов Ш. К. Случайные пульсации в грубодисперсных газовазевях // Инженерно-физический журнал. 1993. Т. 65, №1. С. 46-56.

Качалкин Ю.В., Бобров В.Н. (г. Воронеж)

К РАСЧЕТУ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЕЙ НАПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ

Поведение флюгарки в воздушном потоке определяется воздействием аэродинамических сил и моментов, возникающих при ее обтекании, с учетом воздушной струи от ротоанемометра. Данная работа посвящена методике расчета указанных сил и моментов с целью определения направления воздушного потока. Задача решается вихревым методом в нелинейной постановке. Жидкость, обтекающая ротоанемометр и флюгарку, идеальная, несжимаемая. Влияние поверхности раздела учитывается методом зеркального отображения при условии, что поверхность раздела твердая и плоская.

Вихревое поле создается двумя основными системами: вихревой пеленкой от ротоанемометра и вихревой пеленой от флюгарки. Сворачивание вихревой пелены от флюгарки происходит с учетом полей возмущенных скоростей от ротоанемометра.

Решение данной задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно циркуляций поперечных при соединенных вихрей. После решения системы уравнений и определения циркуляций рассчитываются аэродинамические нагрузки на флюгарке с использованием теоремы Жуковского в "малом". Зная значения нагрузок на флюгарке, определяем характеристики их сечений и суммарные аэродинамические силы и моменты (I).

Следовательно, на основе выше изложенного представляется возможность численно рассчитать аэродинамические характеристики измерителей направления воздушных потоков в интересах динамики их движения.

Л и т е р а т у р а :

1. Белоцерковский С.М., Нист М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978

УДК 517.9 + 533.7

Кирьянов И.А., Засорин Ю.В. (Воронеж)

О ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВТ-УРАВНЕНИЯ

Рассматривается начально-краевая задача для пространственного нестационарного вязкого трансзвукового уравнения:

$$(1) \quad L u(t, x, y, z) = f(t, x, y, z); \quad (t, z > 0; x, y \in R);$$

где:

$$(2) \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

с условиями:

$$(3) \quad u|_{t=+0} = F(x, y, z); \quad (x, y \in R, z > 0);$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial z} |_{z=+0} = H(t, x, y); \quad (t > 0, x, y \in R);$$

$$(5) \quad u(t, x, y, z) = o(1), \quad (z \rightarrow \pm \infty).$$

Строится в явном виде функция Грина задачи (1)-(5). Также доказана корректная разрешимость задачи (1)-(5) в пространствах распределений умеренного роста.

УДК 517.9

Киприянов И.А., Иванов Л.А. (Воронеж)

О СИГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЯХ СОБОЛЕВА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть X вещественное банахово пространство, B - генератор непрерывной группы в X , обладающий тем свойством, что подгруппа, генерируемая $A = B^2$ является равномерно ограниченной. Через C обозначим генератор непрерывной группы (подгруппы) в $X : U_C(t)$. Мы предполагаем, что $A \cdot C = C \cdot A$ и $D(A^z) = D(C^z) = D$, для некоторых натуральных степеней z и z . Абстрактным сингулярным уравнением Соболева первого порядка называется уравнение, вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu}{t} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta C \frac{\partial u}{\partial t} = Au + f(t), t > 0, \quad (1)$$

где β - вещественный параметр, $\mu \geq 0$. Отметим, что при $\beta = 0$ уравнение совпадает с абстрактным уравнением Соболева первого порядка.

Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным данным $u(0) = \varphi, \varphi \in D$, мы свяжем с решением следующей задачи для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$E_{tt} + \frac{\mu+1}{t} E_t = AE + f(t), E(0) = \varphi, E_t(0) = 0. \quad (2)$$

Теорема. Решение $u(t)$ задачи Коши для уравнения (1) представляется в виде

$$u(t) = (I - \beta C) \int_0^{\infty} e^{-\sigma} u_C(\beta\sigma) \{ E(2\sqrt{t}\sigma, \varphi) \} d\sigma + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\sigma} u_C(\beta\sigma) \{ E(2\sqrt{t-\tau}\sigma, f(\tau)) \} d\sigma d\tau,$$

где $E(t, \varphi)$ решение задачи (2), интеграл понимается в смысле Римана.

Для конкретных реализаций с помощью полученного результата получаются формулы Кирхгофа для уравнений Соболева.

Киприянов И.А., Литманович О.Ю. (Зоронж)
 О НЕОСПИЛЛИРУЮЩИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
 НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ.

Пусть $Lx = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x$ - неоспиллирующий на $[a, b]$ дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами. нас интересует вопрос о распределении нулей обобщенных решений уравнения

$$Lx(t) = 0 \quad (t \neq \xi_i; a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < b). \quad (1)$$

Предполагается, что решения в каждой из точек ξ_i непрерывны вместе с производными $X^{(k)}(\cdot)$ до порядка $k = n - \delta_i - 1$ включительно. Число δ_i называется дефектом точки ξ_i для (1). Положим $\tilde{\delta} = \delta_1 + \dots + \delta_m$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого обобщенного решения уравнения (1) суммарная n -кратность всех его нулей не превосходит $n + \tilde{\delta} - 1$.

Если учесть, что размерность пространства обобщенных решений уравнения (1) равна $n + \tilde{\delta}$, то согласно теореме 1 это пространство при $k_0 = n + \tilde{\delta} - 1$ является T_{k_0} -пространством, т.е. любой его базис является системой Чебышева порядка k_0 .

При доказательстве теоремы 1 основной трудностью является отсутствие в каждой из точек ξ_i производных $X^{(k)}(\xi_i)$ при $k > n - \delta_i$. Преодолеть эту трудность методами стандартной теории обобщенных функций не удастся. Поэтому в точках ξ_i вместо таких производных мы вводим понятие обобщенных дифференциалов, определяемых с помощью приращений (величин скачков). На обобщенные в том смысле производные удается перенести понятие кратных нулей в точках ξ_i . Оказывается, что для каждого из обобщенных решений уравнения (1) значение L , трактуемое в терминах обобщенных дифференциалов, уже не является нулевой функцией, но имеет не более δ_i перемен знака в каждой точке ξ_i и не более $\tilde{\delta}$ перемен знака в целом на $[a, b]$. Последнее свойство позволяет установить необычный для классической теории факт.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q(t) \neq 0$ при всех $t \neq \xi_i$ ($i = 1, \dots, m$). Тогда следующие два высказывания эквивалентны:

а) $q(t)(t - \xi_1)^{\delta_1}(t - \xi_2)^{\delta_2} \dots (t - \xi_m)^{\delta_m} > 0$.

б) Для любого обобщенного решения дифференциального неравенства

$$q(t) Lx(t) > 0$$

суммарная n -кратность его нулей не превосходит $n + \tilde{\delta}$.

УДК 517.956.2

Киприянова Н.И. /Воронеж/

О РЕШЕНИЯХ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Известно [1], что функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_B u = -\lambda^2 u, \text{ где } \Delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k > 0),$$

может быть представлена как весовое среднее значение по полушару

$$u(y) \int_{\frac{|x| \leq r}{x_n > 0}} J_{\frac{n-k-1}{2}}(\lambda r) C_{n,k}(\lambda r) \int_x T_x^3 u(x) x_n^k dx,$$

откуда следует, что интеграл от такой функции по любому полушару, радиус которого принадлежит множеству $\{r: \lambda r\}$, где $\{r\}$ - множество нулей функции $J_{\frac{n-k-1}{2}}(\lambda r)$, равен нулю.

Рассмотрим уравнение $\Delta_B u = -\mu u$. Для решений этого уравнения, по схеме предложенной в [2], получен следующий результат.

Теорема. Пусть $u(x) \in W_2^k(\Omega_+^r)$. Тогда для того, чтобы

$$\int_{\substack{|x| \leq r \\ x_n > 0}} T_x^3 u(x) x_n^k dx = 0 \quad \text{для всех } r \in \{r\},$$

необходимо и достаточно, чтобы $u(x)$ почти всюду совпадала с решением уравнения $\Delta_B u = -\mu u$.

Литература.

1. Киприянова Н.И. Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифф. уравнения. -1985. -Т. XXI, № 11.
 2. Волчков В.В. Новые теоремы о среднем для решений уравнений Гельмгольца // Матем. сборник. -1993. -Т. 184, № 7.

УДК 539.376

Кирсанов М.Н. (Воронеж)

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВЫПУЧЛИВАНИЯ ПРИ
УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ТЕОРИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Особой точкой порядка N процесса деформирования назовем такое напряженно-деформированное состояние конструкции, при котором задание в качестве начального значения для возмущенного движения N -й производной по времени прогиба соответствует неограниченному росту прогиба и его низших производных в момент возмущения. Теория особых точек имеет один недостаток. Для материалов, ползущих с постоянной скоростью (без упрочнения) множество особых точек вырождается - критическое время равно нулю. Однако в практических расчетах часто используется именно такая аппроксимация кривых ползучести. Для того, чтобы в рамках упрощенной модели среды описать явление выпучивания с позиций теории особых точек, рассмотрим деформационную теорию с упрочнением, $\dot{p}p^\alpha = A\dot{\epsilon}^n$.

Из решения задачи для особой точки порядка N с помощью метода упругого эквивалента, пренебрегая упругой деформацией ($p = \epsilon$), получим значение относительной деформации в момент выпучивания $\epsilon_0 = (1/2)\epsilon_N^{1/2}(3\epsilon_N + n)^{1/2}n^{-3/4}$, где $\epsilon_0 = \epsilon_{22}^0/3$, $\epsilon_0 = 1.06n^{3/2}R^{-1/2}l^{-1}$ - критическая деформация упругой оболочки, параметр $\epsilon_N = \epsilon_N(\alpha)$ является корнем характеристического полинома, определяющего особые точки стержня [1]. Основой предлагаемого метода является характерная особенность зависимости $\epsilon_0(\alpha)$. В начале координат обнаруживается резкий скачок ϵ_0 от нуля до значения ϵ_* при $\alpha = \alpha_*$. Величина α_* значительно меньше погрешности измерения параметра упрочнения α , а при $\alpha > \alpha_*$ зависимость $\epsilon_0(\alpha)$ почти линейна. Продолжая прямую, аппроксимирующую эту часть кривой, до пересечения с осью ϵ_0 , получим значение ϵ_* , которое и будем использовать в решении. Интегрируя определяющее соотношение, имеем значения критического времени

$$t = 1.06 \epsilon_n^{3/2} / (A n^{\alpha} Q R / h)^n.$$

Решение хорошо согласуется с экспериментом. Из опыта [2] при $n = 3.28$, $A = 4.37 \cdot 10^{-6} (\text{Мпа})^{-3.28} \text{ час}^{-1}$, $R = 22.5 \text{ мм}$, $h = 1.5 \text{ мм}$, $l = 380 \text{ мм}$, $Q = 0.90 \text{ МПа}$ получено $t = 3.5 \text{ час}$. Для особой точки ϵ_0 найдем $\epsilon_* = 0.72$ и $t = 3.49 \text{ час}$.

Литература: 1. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д., МТТ. 1993. №3.

2. Локощенко А.М., Шестериков С.А., МТТ. 1985. №3.

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение $-(\bar{I} - \Delta^2)^{1/2} u(x) = h(x)$,

где $x \in R^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ - оператор Лапласа.

Это уравнение можно рассматривать как уравнение бесконечного

порядка, ибо $-(\bar{I} - \Delta^2)^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} C_{1/2}^m \Delta^{2m}$.

Обозначим $a_m = (-1)^{m+1} C_{1/2}^m > 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Разрешимость исходного уравнения исследуется в пространстве Соболева бесконечного порядка

$$W_{R^n}^{\infty} \{a_m, 2; (-\Delta)^m\} = \{u(x) \in C^{\infty}(R^n) : \dots$$

$$(-\Delta)^m u \in L_2, m = 0, 1, 2, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} a_m \| \Delta^m u \|_2^2 < \infty \},$$

которое соответствует данному уравнению. Введенное пространство

$W_{R^n}^{\infty} \{a_m, 2; (-\Delta)^m\}$ является нетривиальным. Тогда для любого

$h(x)$ из пространства, сопряженного к $W_{R^n}^{\infty} \{a_m, 2; (-\Delta)^m\}$ существует единственное решение $u(x) \in W_{R^n}^{\infty} \{a_m, 2; (-\Delta)^m\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\exp t^2 u(x) = h(x), x \in T^n.$$

Это уравнение тоже можно рассматривать как уравнение бесконечного

порядка, так как, по определению, $\exp \Delta^2 u(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Delta^{2m} \right) u(x)$.

Разрешимость этого уравнения изучается в классе периодических

функций $W_{T^n}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!}, 2; (-\Delta)^m \right\} = \{u \in C^{\infty}(T^n) :$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \| \Delta^m u \|_2^2 < \infty \}.$$

Показано, что рассматриваемое уравнение имеет единственное решение

в пространстве $W_{T^n}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!}, 2; (-\Delta)^m \right\}$ для любого $h(x)$

из сопряженного пространства.

УДК 539.3

Клещников В.Д.

Современные проблемы термомеханики .

Излагаются основные положения современной термодинамики. Обсуждается одно добавление, касающееся поведения сплошной среды в циклических процессах. Дается обобщенная трактовка условия термодинамического согласования и рассматриваются ограничения, накладываемые этим условием на определяющие соотношения ряда сред. Отмечается дефектность дифференциальных соотношений, разрешенных относительно напряжений и содержащих высокие производные от деформаций по времени. Доказывается гипотеза Гиббса относительно термодинамических параметров в ньютоновской вязкости. Для тел с конечным запоминанием истории деформирования указываются условия, когда все термодинамические объекты определяются заданием одной лишь свободной энергии. Приводится пример термодинамического дополнения тел типа Больцмана, представляющие частный случай тел с мгновенно-упругой реакцией. Упруго-пластические тела характеризуются как среды со слабой мгновенной реакцией. Указывается на различие по отношению к телам с мгновенно-упругой реакцией, а также общие их черты. Для частного случая - теории изотропного упрочнения удается произвести термодинамическое обоснование заданием одного термодинамического объекта - потенциала Гиббса. Таким образом получено, в частности, выражение для скорости некомпенсированного тепла. Доказывается справедливость известного постулата пластичности. Обсуждаются проблемы неадиабатической теории сплошных сред. Дается новая трактовка второго закона термодинамики для неоднородных процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17658)

УДК 539.3:539.4

Кожеватова В.М. /Саратов/

РАСЧЕТ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ
С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Под воздействием агрессивных сред в материале конструктивных элементов происходят физико-химические процессы, приводящие к неоднородному по сечению изменению упругих и пластических свойств, характеристик ползучести. В предложенной модели для описания деформирования и разрушения элементов конструкций в условиях водородной коррозии уравнение ползучести дополняется системой кинетических уравнений для структурных параметров: уравнением диффузии, описывающим распределение водорода по сечению конструктивного элемента уравнением накопления повреждений и уравнением химического взаимодействия, отражающим процесс изменения свойств материала.

Методика расчета конструктивных элементов с помощью предложенной модели основана на применении метода последовательного возмущения параметров. Возмущение ведущего параметра - времени подбирается таким образом, чтобы возмущения других параметров - поврежденности, параметра химического взаимодействия, напряжений, не превосходили некоторых значений, заданных в долях от предыдущих или предельных значений.

Исследуется поведение конструктивных элементов в условиях стационарных и нестационарных воздействий.

Приводится анализ результатов расчетов растягиваемого стержня при различной концентрации водорода в среде, также при ступенчатом изменении величин растягивающих напряжений и ступенчатом изменении концентрации водорода в среде.

Проведенное численное исследование поведения толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением водорода, позволило выявить основные закономерности изменения напряженно-деформированного состояния и длительной прочности при различной величине давлений водорода. Расчеты показали наличие характерных уровней допустимых безопасных давлений водорода.

Рассматривается возможность упрощения модели для некоторых конкретных случаев.

УДК 539.3

Козлов В.А. (Воронеж)

ЗАМКНУТЫЙ ВАРИАНТ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В отличие от традиционного подхода, опирающегося на сведение трёхмерной задачи к двумерной, основные статические и геометрические соотношения получены с позиции взаимодействия системы сил и моментов в пространственно-искривлённом двумерном континууме. В этом учитываются поперечные сдвиговые деформации и моментные составляющие, нормальные к срединной поверхности оболочки, что позволяет получить полное соответствие между статическими и геометрическими величинами и зависимостями. Исследование выполнено в пространственной косоугольной криволинейной координатной сетке.

Замкнутая система уравнений линейной теории оболочек представлена следующими выражениями:

1) векторные уравнения равновесия сил и моментов

$$(\sqrt{a} \bar{N}^i)_{,i} + \sqrt{a} \bar{q} = 0, \quad (\sqrt{a} \bar{M}^i)_{,i} + \bar{r}_i \times (\sqrt{a} \bar{N}^i) + \sqrt{a} \bar{m} = 0 \quad (I)$$

и статические граничные условия

$$\bar{N} = A_i \bar{N}^i \cos(\nu, \alpha^i), \quad \bar{M} = A_i \bar{M}^i \cos(\nu, \alpha^i);$$

2) геометрические соотношения, полученные на основе вариационного принципа Э.Рейсснера

$$\bar{\xi}_i = \bar{u}_{,i} + \bar{r}_i \times \bar{\varphi}, \quad \bar{\alpha}_i = \bar{\varphi}_{,i}.$$

Эти выражения из условий $\bar{\varphi}_{,12} = \bar{\varphi}_{,21}$, $\bar{u}_{,12} = \bar{u}_{,21}$ позволяют также вывести два векторных уравнения совместности деформаций

$$\bar{\alpha}_{2,1} - \bar{\alpha}_{1,2} = 0, \quad \bar{\xi}_{2,1} - \bar{\xi}_{1,2} + \bar{r}_1 \times \bar{\alpha}_2 - \bar{r}_2 \times \bar{\alpha}_1 = 0,$$

которые при замене $\bar{\xi}_i \leftrightarrow c_j \bar{M}^j$, $\bar{\alpha}_i \leftrightarrow c_j \bar{N}^j$ переходят в однородные уравнения, отвечающие (I);

3) соотношения упругости в скалярной форме

$$N^{ik} = KE^{ikjs} \xi_{js}, \quad Q^i = \kappa^2 K(1-\mu) \gamma^i, \quad M^{ik} = DE^{ikjs} \alpha_{js}, \quad P^i = \kappa^* D^* \lambda^i,$$

первые три из которых получены традиционным способом, а последнее записано на основе статико-геометрической аналогии и выражения для Q^i .

В представленных выше равенствах \bar{N}^i , \bar{M}^i - векторы сил и моментов; \bar{q} , \bar{m} - внешняя нагрузка; \bar{N} , \bar{M} - краевые силы и моменты; $\bar{\xi}_i$, $\bar{\alpha}_i$ - векторы тангенциальных деформаций и поворотов (изгиб и кручение); \bar{u} , $\bar{\varphi}$ - поступательное и вращательное смещения.

УДК 512.86:519.12

Колмыков В.А. (Воронеж)

СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФОВ ТИПА "ЦИКЛ" И УСТОЙЧИВОСТЬ
УГЛЕВОДОРОДОВ

Рассматривается известная квантово-механическая модель π -электронной системы углеводородов.

1. Склеим n экземпляров (H^1, H^2, \dots, H^n) двукорневого графа H (корни- α и β) в "цикл": $\alpha(H^k) = \beta(H^{k-1})$, $k \neq 1$, $\alpha(H^1) = \beta(H^n)$.

Полученный граф обозначим $C_n[H]$. Через $H(\lambda)$ обозначается характеристический многочлен графа H , $H_0(\lambda) = H_\alpha(\lambda) + H_\beta(\lambda) - \lambda H_{\alpha\beta}(\lambda)$ (индекс означает удаление вершины), $H_*(\lambda)$ - сумма многочленов графов, получающихся из H удалением всевозможных простых цепей с концами α и β .

2. ТЕОРЕМА 1. При тех λ , для которых $H_*(\lambda) \neq 0$ имеем $C_n[H](\lambda) = (H_*(\lambda))^n \cdot C_n(H_0(\lambda)/H_*(\lambda))$, для остальных λ имеем $C_n[H](\lambda) = (H_0(\lambda))^n$.

Доказательство. $C_n[H](\lambda)$ развернуть по формуле Швенка относительно α . Сумма по "глобальным" циклам равна $(H_*(\lambda))^n$, остальное свернуть до многочленов периодических графов типа "цепь" и применить лемму 2 из [1]. Наконец, полученную формулу применить к $C_n = C_n[P_2]$.

3. Граф называется устойчивым, если в его спектре нет нуля. Это соответствует устойчивости углеводорода, углеродную структуру которого описывает это граф.

Разобьем множество двукорневых графов на 6 классов, приписав им "периоды циклической неустойчивости":
1) $P(H) = 1$; если $H_0(0) = 2H_\alpha(0)$
2) $P(H) = k \in \{2, 3, 4, 6\}$, если $H_0(0)/H_*(0) = 2 \cos \frac{2\pi}{k}$;
3) $P(H) = \infty$ в остальных случаях.

ТЕОРЕМА 2. $C_n[H]$ неустойчив лишь при $n \in P(H)M$.

Доказательство. основано на знании всех рациональных корней $C_n(\lambda)$.

4. Если H - двудольный граф, то $P(H) \neq 3; 6$.

Доказательство основывается на неустойчивости двудольного графа с разномошными долями.

Литература

- [1] Колмыков В.А., Субботин В.Ф. Спектры периодических графов типа "цикл" и альтернирование устойчивости углеводородов. В кн.: Алгеб. методы в анализе и топологии. - Воронеж.-Воронеж, ун-т. - 1990, с124-129.

УДК 539.3

Коломовец А.А., Куцемако А.Н., (Саратов).

Динамическая и статическая устойчивость
несовершенной гибкой цилиндрической оболочки
при неравномерном внешнем давлении.

Исследуется устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки кругового сечения конечной длины с начальными несовершенствами шарнирно опертая по торцам. Материал оболочки предполагается упругим. Оболочка находится под действием неравномерного внешнего давления.

1. В динамической постановке поведение оболочки описываем уравнениями движения теории оболочек при конечных прогибах в смешанной форме [1].

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \varphi) + \nabla_k^2 \varphi - \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \varphi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \nabla_k^2 (w - w_0).$$

Граничные условия $w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \varphi=0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=0$, при $x=0, x=L$, (1.2)

Начальные условия $w=0, \frac{\partial w}{\partial t}=0$, при $t=0$. (1.3)

Составными частями алгоритма решения начально-краевой задачи (1.1)-(1.3) являются метод И.Г.Бубнова и метод Рунге-Кутты. В качестве критерия устойчивости используется критерий, изложенный в [1].

В работе показано влияние начальных неправильностей на динамические критические нагрузки.

2. В статической постановке критические нагрузки находятся в результате решения краевой задачи (2.1)-(2.2):

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \varphi) + \nabla_k^2 \varphi - \frac{q}{h}, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \varphi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \nabla_k^2 (w - w_0).$$

$$w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \varphi=0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=0. \quad (2.2)$$

Составными частями алгоритма решения задачи (2.1)-(2.2) являются метод И.Г.Бубнова и метод Ньютона-Канторовичи. Показано влияние начальных неправильностей на статические критические нагрузки.

Литература

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. -М.: "Наука", 1972. -432с.

Корзов Е. Н. (Боронеж)

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМЕМБРАНЫХ СИСТЕМ

Подходы физико-химической гидродинамики распространяются на селективно проницаемые мембранные системы, используемые для разделения жидких и газообразных смесей методами обратного осмоса и электродиализа.

Особенностью исследуемых систем является возможность существования внешнего электрического поля и наличие собственного заряда у отдельных компонент смеси. Мембраны представляют собой достаточно жесткие полимерные гомогенные и гетерогенные пленки, содержащие фиксированные электрические заряды и способны пропускать через себя растворитель и отдельные компоненты смеси. Движение смесей происходит при одновременном действии градиентов давления, электрического и химических потенциалов. Для учета специфики физико-химического взаимодействия компонент смеси с матрицей мембраны рассмотрение процессов электропереноса ведется одновременно с позиций электродинамики сплошных сред, термодинамики неравновесных процессов и физической химии мембран.

Выделены отдельные классы задач, охватывающие разнообразные виды существующих мембранных систем. К первой группе относятся задачи, связанные с развитием электродиффузионных процессов. Другую образуют задачи, характеризующие протекание мембранных процессов в условиях естественной конвекции. В третью группу включены задачи, позволяющие исследовать процессы переноса в мембранных каналах, в том числе содержащие специальные вставки. Последняя группа составляет задачи, возникающие при математическом моделировании систем с вращающейся мембраной.

Изучается роль таких факторов, как неизотермичность процессов, наличие химических реакций и объемного электрического заряда. Исследуется влияние внешнего электрического поля, внутренних источников тепла на движение и режим разделения смесей. Обсуждается вопрос оптимизации условий эксплуатации мембранных систем.

При решении указанных задач используются как аналитические, так и численные методы. Вычислительный эксперимент позволяет установить основные закономерности и особенности функционирования мембранных систем. С этой целью разработан и реализован комплекс программ для персональных ЭЕМ типа IBM PC.

Коробкин В.Д. (Воронеж)

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА УСИЛИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ПРИ КОНТАКТНОМ КАСАТЕЛЬНОМ НАПРЯЖЕНИИ

В работе [1] предложен метод решения задачи о течении жестко-пластического материала при контактном касательном напряжении, пропорциональном среднему нормальному давлению. Сущность метода заключается в следующем. Среднее нормальное давление выражают через среднее усилие деформирования из уравнения равновесия сил в проекции на соответствующую ось, например, для течения в сходящемся канале - на ось симметрии. Затем, подставляя это значение в энергетическое уравнение для кинематически возможного поля скоростей, определяют усилие деформирования.

Если на поверхностях контакта действует кулоново трение, то предельная нагрузка находится между предельной нагрузкой для той же системы сил при идеально гладких поверхностях контакта и соответствующей нагрузкой при спаянных поверхностях [2].

В данной работе показано, что при коэффициенте трения, отличном от нуля, усилие деформирования, полученное при контактном напряжении, пропорциональном среднему нормальному давлению на жесткой стенке, является верхней оценкой усилия деформирования для соответствующего коэффициента трения.

В качестве примера определена верхняя оценка усилия деформирования при контактном касательном напряжении, пропорциональном среднему нормальному давлению на жесткие стенки при течении жестко-пластического материала в конической матрице.

Литература:

- Беломятцев В.П., Коробкин В.Д. Пластическое напряженно-деформированное состояние материала при контактном касательном напряжении // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. Воронеж. 1992.
- Друкер Д. Вариационные принципы в математической теории пластичности. - Механика. 1959. N 6.

УДК 621.983.

Корольков В.И. (Воронеж)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА
РОТАЦИОННОЙ ВЫТЯЖКИ

Процесс ротационной вытяжки (РВ) заключается в локальном пластическом деформировании вращающейся осесимметричной заготовки. Этот способ обработки металлов дает возможность при сравнительно небольших энерго-силовых затратах достичь высоких степеней деформаций, что требует ведения процесса в весьма узком диапазоне допустимых параметров. Поэтому без математического моделирования сложно использовать все возможности металла и данного процесса.

Модель механики процесса РВ включает в себя модели материала, деформированного состояния и технологических отказов. Модель материала и частично модели отказов являются общими для процессов листовой штамповки. Моделирование деформированного состояния процесса РВ состоит в вычленении типовых элементов и описании поведения деформаций. Набор соответствующих элементов создает на данном этапе деформационную модель заготовки. На основе этой модели рассчитывается геометрия заготовки в любой момент формоизменения. Неразрывность деформаций между участками достигается итерационным "сплыванием". Таким образом удается расчленить решение сложной задачи на ряд более простых задач, решения которых достигаются разными методами. Здесь используется эмпирическое построение формул, аналитические и численные решения.

При проектировании технологического процесса РВ необходимо знать размеры исходной заготовки, число и геометрию переходов, инструмент и траектории его движения, режимы обработки. Поэтому модель технологического процесса РВ кроме модели механики включает в себя кинематическую модель и обширную информационную модель. Только при таком комплексном подходе к решению технологических задач возможно проектирование технологического процесса.

Крутов А.В. (Воронеж)
УРАВНЕНИЕ СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ ВЗАИМОГИБАЕМЫХ
КРИВЫХ

В целях получения эффективных способов описания движения предлагается моделировать его качением соприкасающихся кривых или поверхностей. Целесообразность такого представления особенно очевидна в случаях, когда необходимо осуществить движение, по сути представляющее собой обкатывание тел заданного профиля, как, например, при обработке поверхностей.

Пусть заданы две кривые: $\vec{r} = \vec{r}(\rho) = (x, y, z)$ в системе Σ и $\vec{\rho} = \vec{\rho}(q) = (\xi, \eta, \zeta)$ в системе Σ' , одну из которых, например $\vec{r} = \vec{r}(\rho)$, будем считать вместе с Σ неподвижной. Условием соприкосновения кривых является уравнение для траектории \vec{r}_i одной из точек $\vec{\rho}_i$ системы Σ' , перемещающейся вместе с кривой $\vec{\rho} = \vec{\rho}(q)$ как жесткое тело

$$(1) \quad \vec{r}_i = \vec{r} + A(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}),$$

где $A = A_3 A_2 A_1^{-1}$ - матрица поворота базиса Σ' - $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ относительно базиса Σ - $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, A_1, A_2, A_3 - матрицы поворота базисов: A_1, A_2 - базиса Френе подвижной кривой относительно Σ и базиса Френе неподвижной кривой, соответственно, A_3 - базиса Френе неподвижной кривой относительно Σ . В этом параметрическом уравнении траектории в качестве текущего, переменного параметра может быть выбран любой из параметров ρ или q кривых. При этом другой параметр должен быть выражен через выбранный из уравнения связи этих параметров, адекватно отражающего заданные условия соприкосновения и огибания, включающие взаимное положение базисов Френе кривых, скорость скольжения подвижной кривой.

С учетом представления скорости \vec{V} точки контакта в виде суммы относительной \vec{V}_r и переносной \vec{V}_e скоростей, будем иметь

$$(2) \quad \int_{\rho_1}^{\rho_2} \vec{\rho} dq = \text{Sgn}(\vec{r}' \vec{r}') \left[(1 - \delta_1) / (1 - \delta_2) \right] \cos(\beta; \vec{r}') \vec{r}' d\rho, \quad \delta_1 = \frac{(\vec{V}_r \vec{r}')}{r'^2}, \quad \delta_2 = \frac{(\vec{V}_e \vec{r}')}{r'^2}.$$

Величины $\text{Sgn}(\vec{r}' \vec{r}')$, δ_1, δ_2 и элементы матрицы A_2 взаимосвязаны и не могут задаваться произвольно, по крайней мере по знаку. Условием их согласования служат условия ортогональности матриц поворота, из которого для кривых, расположенных в одной плоскости, получаем (1) при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

$$(3) \quad \text{Sgn}(\vec{r}' \vec{r}') = \text{Sgn}[(\text{nn}(\vec{e}_1 \vec{e}_2) (\xi_1' \cdot \xi_1' - \eta_1' \cdot \eta_1'))], \quad \vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2,$$

где \vec{e}_1, \vec{e}_2 - орты главных нормалей кривых.

УДК 539.4:624.042

Кудамбергенов Н.Б. (Шымкент)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРОЗИОННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ В СТАЛЬНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Проблема обеспечения долговечности производственных зданий и сооружений, эксплуатирующихся в условиях воздействия агрессивной среды, является важной народнохозяйственной задачей. Особенно актуальна эта проблема для металлоемких отраслей промышленности (цветная и черная металлургия, химическая и нефтехимическая промышленность и др.), где коррозионный износ является определяющим фактором снижения надежности и долговечности конструкций зданий и сооружений.

В связи с изложенным важной задачей является разработка математических моделей, описывающих поведение элементов стальных конструкций с коррозионными повреждениями в условиях эксплуатации.

Коррозионные повреждения стальных строительных конструкций классифицируют на общие (равномерный износ) и локальные (местные повреждения).

В докладе будут представлены разработанные автором математические модели, позволяющие производить расчетную оценку эксплуатационной пригодности стальных конструкций промышленных зданий с коррозионными повреждениями различного характера.

Решение задачи ведется в следующих основных направлениях:

1. Разработка математических моделей, описывающих кинетику снижения эксплуатационных качеств антикоррозионной защиты металлоконструкций с расчетной оценкой их долговечности.
2. Математическое моделирование кинетики коррозионного износа стальных конструкций без антикоррозионной защиты.
3. Математическое моделирование коррозии защищенных стальных конструкций и прогнозирование их остаточного ресурса.
4. Разработка математических моделей, учитывающих изменение расчетных схем конструкций зданий, эксплуатирующихся в агрессивных средах.

Разработанные автором математические модели апробированы на результатах натурных обследований и экспериментальных исследований стальных конструкций промышленных зданий.

* Исследования проводились под руководством д.т.н., проф.
Сычаникова А.Г.

УДК 517.9

Кузнецов О. А. (Н. Новгород)
РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - u \int_{\Omega} g(x) u dx \quad (1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (2)$$

Здесь Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей Σ , $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u) + g(x)u$$

симметричный равномерно эллиптический оператор, функции $a_{ij}(x), \varphi(x)$ гладкие в Ω , $g(x)$ - непрерывная в Ω , $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$ - производная по конормали к границе Σ , выполняются условия

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Существует единственное решение задачи (1)-(2)

$u(x, t) \in C_2(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$, $\text{grad}_x u \in C(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$, которое может быть найдено в виде

$$u(x, t) = \left(\sum_{k=1}^m u_k(t) v_k(x) \right) \left(\sum_{k=1}^m u_k(t) \int_{\Omega} v_k(x) dx \right)^{-1}$$

где $u_k(t) = \varphi_k \exp(-\lambda_k t)$, $k = \overline{1, m}$, $(v_k(x))_{k=1}^m$ - система собственных функций оператора L , $(\lambda_k)_{k=1}^m$ - соответствующая ей система собственных значений, φ_k - коэффициенты Фурье функции φ по системе v_k .

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16240).

УДК 624.074.3

Кузнецов О. Р., Страшнова Н. А. (Саратов, СГТУ).

Кручение прямого призматического кессона с недеформируемым контуром поперечного сечения с учетом растяжимости его оси.

Рассматривается прямой замкнутый призматический кессон, находящийся под действием произвольной внешней крутящей нагрузки, с произвольными закреплениями его торцов (рис. 1). В соответствии с методом Власова В.З. расчета призматических оболочек продольные $U(z, s)$ и поперечные (вдоль контура) $V(z, s)$ перемещения представим в виде разложений:

$$U(z, s) = U_0(z) \varphi_0(s) + U_1(z) \varphi_1(s)$$

$$V(z, s) = V_0(z) \psi_0(s)$$

Аппроксимирующие функции перемещения точек контура приведены на рис. 2. Таким образом, рассматривается оболочка с жестким контуром поперечного сечения. В продольном направлении помимо деформации контура учитывается его доступное перемещение.

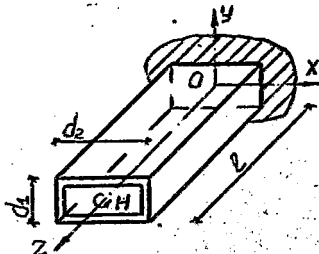


Рис. 1.

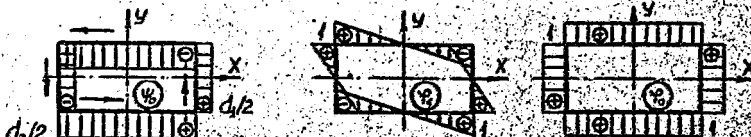


Рис. 2.

Зависимость между напряжениями и деформациями полагается линейной, а между деформациями и перемещениями - нелинейной. Независимые обобщенные перемещения $U_0(z), U_1(z), V_0(z)$ определяются из уравнений, которые получаются на основе принципа Лагранжа. Вариация потенциальной энергии, с учетом выбранной расчетной модели, записывается в виде:

$$\delta W = \int_0^l (N_1 \delta \epsilon_1 + N_2 \delta \epsilon_2 + S \delta \epsilon_{2\theta}) ds dz$$

Для линеаризации нелинейных уравнений применяется метод последовательных нагружений Петрова В.В. Полученная линейная краевая задача решается сведением к серии задач Коши с применением процедуры ортогонализации Годунова С.К.

Результаты численных исследований показывают, что учет растяжимости оси оболочки следует учитывать при сравнительно больших углах закручивания.

УДК 517.6

Кузнецова Е.В. (Воронеж)

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для задачи

$$\begin{cases} \dot{y} - A_{11}(t)y - A_{12}x = f_1(t) \\ \varepsilon \dot{x} - A_{21}(t)y - A_{22}x = f_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

с обобщенными краевыми условиями вида

$$Mz(0) + Nz(1) = 0 \quad (2)$$

где $y = (y^1, \dots, y^r)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $z = (y, x)$, $f = (f_1, f_2)$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, f$ - достаточно гладкие матрицы и вектор, M, N - постоянные $(r+n) \times (r+n)$ матрицы, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, строится коллокационная схема на основе комбинированных сплайнов 3-й степени на оптимальных сетках Δ бахваловского типа, содержащих 3 m отрезков.

Пусть E - пространство векторов, $E = \{u = (u^1, \dots, u^{r+n}), u^i(t) \Big|_{[t_{m-1}, t_{2m-1}]} \in S(\Delta, 3, 1) \Big|_{[t_{m-1}, t_{2m-1}]}; u^i(t) \Big|_{[0, t_m]} \in S(\Delta, 3, 2) \Big|_{[0, t_m]}; (i=1, \dots, r+n); Mu(0) + Nu(1) = 0\}$,

где $S(\Delta, p, k) \Big|_{[a, b]}$ - сужение пространства сплайнов степени p дефекта k на отрезок $[a, b]$.

Предполагается, что все требования Васильевой А.Б. и Есичевой В.А. относительно разрешимости задачи (1)-(2) выполнены, в том числе условие: собственные числа $\lambda_i(t), i=1, n$ матрицы $A_{22}(t)$ при всех t из отрезка $[0, 1]$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1(t) < \dots < \lambda_\ell(t) < 0 < \lambda_{\ell+1}(t) < \dots < \lambda_n(t), \quad 1 \leq \ell < n$$

Оказывается, что при этих же условиях разрешима и коллокационная задача, причем справедлива следующая оценка:

$$\|Az_\varepsilon(t) - u_m(t)\|_{C[0,1]} \leq C/m^4$$

где $z_\varepsilon(t)$ - решение задачи (1)-(2), C - постоянная, не зависящая от ε и m , $u_m \in E$ - решение коллокационной задачи.

Литература.

1. Блатов И.А., Стрыгин В.В. О методе сплайн-коллокаций четвертого порядка точности для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. матем. журнал. - 1993. - т. 33, №1. - с. 16-31

УДК 517.946

Кузнецова Н.А. (Воронеж)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

На вещественной полуоси $t \in (0, \infty)$ рассматривается вырождающаяся дифференциальное уравнение

$$\alpha^2(t)y''(t) + (\alpha^1(t) + iK\alpha(t)f(t))y'(t) - K^2c(t)y(t) = 0, \quad j=0,1, \quad (I)$$

содержащее числовой параметр $K > 0$. Коэффициенты $\alpha(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $c(t)$ достаточно гладкие на $(0, \infty)$ вещественные функции, удовлетворяющие условиям: $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$; $\alpha(t) > 0, t > 0$; $b(0) > 0$,

$$b^{(n)}(t) = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad f^{(n)}(t) = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad c^{(n)}(t) = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$n=1,2,3; \quad 4c(t) - f^2(t) > 0.$$

Теорема. При $K \geq K_0 > 0$, K_0 - достаточно велико, уравнение (I) имеет два линейно независимых решения $Y_{nj}(t)$, $n=1,2, j=0,1$, для которых справедливы асимптотические представления

$$Y_{nj}(t) = Y_{nj}^0(t, t_0, K)(1 + O(K^{-1})), \quad t_0 \in (0, \infty),$$

$$Y'_{nj}(t) = Y'_{nj}^0(t, t_0, K)P_{nj}(t, t_0, K)(1 + O(K^{-1}))$$

Решения $Y_{1j}(t)$, $j=0,1$, ограничены на любом интервале $(0, T_1)$

$T_1 > 0$; решение $Y_{20}(t)$ ограничено на любом луче (T_2, ∞)

$T_2 > 0$; решение $Y_{21}(t)$ ограничено на всей полуоси $(0, \infty)$

Функции $Y_{nj}^0(t, t_0, K)$ являются ВКБ-приближениями решений $Y_{nj}(t)$ при $t \in (0, \infty)$, $K \rightarrow \infty$ и также как функции $P_{nj}(t, t_0, K)$ выражаются в явном виде через коэффициенты исследуемого уравнения.

УДК 517.9

Ломакин В.В., Рощукин А.М. (Воронеж)
 ВКЛАД ДИСЛОКАЦИОННОГО АНЦИПИНГА В НЕЛИНЕЙНУЮ ПОДАТЛИВОСТЬ
 КРИСТАЛЛА

Как известно (см., например, [1]), под действием приложенного напряжения σ дислокация отрывается от закрепляющих ее примесей. Процесс такого отрыва при малых температурах происходит практически безактивационно и имеет катастрофический характер: для отрыва всей дислокационной петли длиной L_N от примесей достаточно ее отрыва хотя бы от одной из примесей. Такое явление, называемое анципингом, приводит к нелинейной зависимости от σ логарифмического декремента Δ кристалла и относительного изменения податливости $\Delta J/J$ (J - податливость кристалла без дислокаций). Приведенные впервые в [1] зависимости $\Delta(\sigma)$ и $\Delta J(\sigma)/J$ применимы только при малых напряжениях и большом числе n примесей на петле L_N . Полученное в [2] распределение длин l дислокационных сегментов $N(l, n, \sigma)$, справедливое при любых σ и n , а также учитывающее статистическую зависимость соседних пар дислокационных сегментов при их отрывах от примесей, позволяет обобщить результаты работы [1]. В итоге получаем

$$\frac{\Delta J(\sigma)}{J} = \Delta_N \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{[L_N/\Gamma_N]} \varphi_k(n, n\Gamma_N/\sigma) \right\} \quad (1)$$

Здесь $\Delta_N = 0,1$; $[L_N]$ - целая часть x ; Γ_N - характеристическое напряжение, начиная с которого происходит отрыв дислокационной петли L_N от примесей. Функции $\varphi_k(n, \nu)$, имеющие достаточно сложный вид, приведены в [2]. При $0 < \sigma < \Gamma_N$ согласно (1)

$$\frac{\Delta J(0)}{J} = \Delta_N \frac{6}{n^3} [n - 2 + e^{-n(n+2)}], \quad (2)$$

причем $\Delta J(0)/J = 6\Delta_N/n$ для $n \gg 1$ и $\Delta J(0)/J = \Delta_N(1-n)$ при $n \ll 1$. Для $\sigma \rightarrow \infty$ имеем $\Delta J(\sigma)/J = \Delta_N$. Таким образом, дислокационный анципинг может приводить к увеличению податливости на 10%.

1. Grandto A.V., Lücke K. // J. Appl. Phys., 1956, v. 27, p. 583.

2. Ломакин В.В., Рощукин А.М. // Изв. РАН. Сер. физ., 1993, т. 57, № 11,

Майорова С.П. (Воронеж)
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим в пространстве $C(a, b)$ интегральный оператор

$$(Bx)(t) = \int_a^b B(t, s) \frac{q(s) x(s)}{(s-a)^2 (b-s)^2} ds$$

с ядром $B(t, s)$, непрерывным по совокупности переменных и удовлетворяющим оценкам

$$Mg(t, s) \leq B(t, s) \leq Ng(t, s) \quad (a < t, s < b)$$

где M, N - положительные константы и $g(t, s)$ - функция Грина задачи $-x'' = f, x(a) = x(b) = 0$, т.е.

$$g(t, s) = \frac{1}{(b-a)} \begin{cases} (t-a)(b-s), & ast \leq s \leq b, \\ (s-a)(b-t), & as \leq st \leq b. \end{cases}$$

Для непрерывной на $[a, b]$ и строго положительной внутри (a, b) функции $q(t)$ предполагается существование констант $\alpha, \beta \in (0, 1)$ таких, что $q(t)(t-a)^{-\alpha}(b-t)^{-\beta} \in C(a, b)$.

Теорема 1. Пусть $x(t)$ - собственная функция оператора B .

Тогда для любых $\gamma, \delta \in (0, 1)$ функция $x(t)(t-a)^{-\gamma}(b-t)^{-\delta}$ принадлежит $C(a, b)$.

Теорема 2. Пусть $B(t, s)$ является ядром Келлога на (a, b) . Тогда оператор B имеет осцилляционный спектр.

Отметим в заключение, что теоремы 1, 2 позволяют установить осцилляционность спектра сингулярных задач с сильными особенностями

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = \lambda \frac{q(t)}{(t-a)^n (b-t)^n} x$$

при двухточечных и многоточечных краевых условиях типа Валле-Пуссена.

Автор выражает благодарность проф. Ю.В.Покорному за постоянную помощь в работе.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИДИМОСТИ В В УСЛОВИЯХ ПЫЛЬНОЙ БУРИ

В основу модели видимости положена система уравнений гидродинамики, описывающих пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности, полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии твердых частиц и система уравнений динамики ветропесчаного потока.

Путем совместного численного решения этого комплекса уравнений определяются вертикальные профили концентрации твердых частиц при развитии пыльной бури. Затем рассчитываются вертикальные профили оптической дальности видимости по соотношению

$S_m = 3,91/L(\lambda)$, где $L(\lambda)$ - спектральный коэффициент ослабления видимого излучения частицами пылевого аэрозоля на длине волны $\lambda = 0,55$ мкм. Коэффициент $L(\lambda)$ рассчитывается на основе теории Ми.

Результаты численного моделирования сравнивались с результатами натурального эксперимента. Сравнение результатов показано на рис. 1.



Рис. 1. Вертикальные профили концентрации твердых частиц
1 - по модели; 2 - по эксперименту.

УДК 531.303: 532.516: 531.01

Могилевич Л. И., Попов В. С. (Саратов)

ВЛИЯНИЕ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПОПЛАВКОВЫХ ПРИБОРОВ

Исследуется динамика и точность поплавковых приборов в конструкции которых, тонкая оболочка герметизирующая поплавок гидроузла, имеет технологические ребра жесткости.

Приведен вывод уравнений гидроупругости поплавковых приборов с учетом ребер жесткости, найдены силы и моменты действующие на абсолютно твердые торцевые диски поплавка со стороны подвеса, представляющего собой тонкий поддерживающий слой вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующий с тонкой упругой оболочкой герметизирующей поплавковой гидроузла. Уравнения динамики корпуса поплавка как упругой замкнутой цилиндрической оболочки типа Кирггофа-Лява выведены на основе вариационного принципа Гамильтона и записаны в безразмерных переменных.

Исследование динамики поплавковых приборов ведется с учетом гидродинамики поддерживающего и демпфирующего слоя жидкости и эффектов упругой податливости тонкой замкнутой цилиндрической оболочки с технологическими ребрами жесткости, герметизирующей гидроузла, как системы твердых, упругих и жидких тел. Используется подход Эйлера к составлению уравнений описывающих эти системы, с учетом связей между ними. При исследовании учитывается, что скорость течения жидкости окружающей поплавок, значительно меньше скорости звука в ней. Поэтому принята модель несжимаемой вязкой жидкости. Толщина корпуса поплавкового прибора достаточно велика, чтобы считать его абсолютно твердым.

Связанная нелинейная задача упругогидродинамики линеаризуется из-за малости перемещений поплавок относительно поплавоквой камеры и малости прогибов корпуса поплавка как упругой замкнутой цилиндрической оболочки. Для решения получающейся линейной задачи отбрасывается частное решение неоднородных линейных уравнений в виде гармонических функций по времени с коэффициентами, зависящими от координат. Общее решение соответствующего однородного уравнения не определяется и переходный процесс не исследуется, так как в колебательных системах (абсолютно твердые торцевые диски поплавка - обыкновенное дифференциальное уравнение; упругая замкнутая цилиндрическая оболочка - корпус поплавка - уравнения в частных производных) присутствует демпфирование, возникающее за счет слоя жидкости, окружающей поплавок. Наличие демпфирования приводит к тому, что переходный процесс затухает со временем, влияние начальных условий перестает со временем сказываться на динамических характеристиках. Следовательно, при процессах, более длительных, чем переходный, общее решение одно-однох уравнений и начальные условия можно отбросить с самого начала. Исследуется режим гармонических колебаний.

УДК 539.3

Морозов Н.Ф., Нарбут М.А. (Санкт-Петербург)

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ
С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Известно, что принцип Сен-Венана в упругих телах, имеющих форму клина или конуса (включая и полупространство), выполняется не всегда. Контрпример для полупространства был предложен Р.Миллесом. Решение плоской антисимметричной задачи статики для упругого клина при заданных напряжениях на боковых гранях замечательно тем, что для достаточно большого угла раствора клина асимптотика напряжений на больших расстояниях от вершины угла не согласуется с решением предельной задачи по Сен-Венану. Решение аналогичной задачи статики для антиплоского сдвига обладает указанным свойством уже при любых углах раствора. Представляет интерес вопрос об асимптотике решений соответствующих динамических задач.

В случае антиплоского сдвига решение динамической задачи можно построить при помощи интегралов Зоммерфельда. Асимптотика дальнего поля в этом случае согласуется с принципом Сен-Венана - соответствующий коэффициент в старшем члене асимптотики равен моменту внешних сил. Решение плоских задач динамики упругого клина представляется в виде суперпозиции решений двух более простых задач, допускающих разделение переменных в терминах волновых потенциалов. Анализ задачи о крутильных колебаниях конуса показывает, что и в этом случае решение удовлетворяет принципу Сен-Венана в его классической формулировке. Переход от гармонических колебаний к нестационарной задаче посредством интегрального преобразования Фурье показывает, что зависимость решения от момента внешних воздействий сохраняется всюду, за исключением поверхности разрыва - волнового фронта.

Мурлина Г.А. (Воронеж)
ПРОЕКТНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Решается задача проектирования оболочки, материал которой подчиняется условию пластичности Треска. Реализована математическая модель III отыскания характеристик пластичности и внутренних усилий с использованием метода конечных элементов в векторно-матричной форме. Нагрузка, действующая на оболочку, принимается осесимметрично распределенной и перпендикулярной к срединной поверхности. Для интенсивности нагрузки принимается линейное распределение на внутреннем и наружном краях элемента.

Получены функции, описывающие распределения искомых величин при условии, что в соприкасающихся точках двух соседних элементов значения характеристик пластичности одинаковы. Условие текучести составляется, как и в методе конечных разностей, для отдельных точек. Для иллюстрации решения оптимизационной задачи рассматривается коническая оболочка постоянной толщины из однородного пластического материала при различных условиях опирания. В результате решения получены оптимальные значения пластических сил.

1. Чирас А.А., Боркаускас А.Э., Каркаускас Р.П. Теория и методы оптимизации упругопластических систем. Стройиздат, Л., 1974. - 265 с.

УДК 517.925

НОЗДРУНОВ В.В. (г. Орел)

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СИСТЕМ НЕСКОЛЬКИХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

При исследовании динамики кристаллической решетки вблизи точки фазового перехода 2-го рода возникает система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} Y' = F(y, z) \\ Z' = G(y, z) \end{cases} \quad (1)$$

где F и G - полиномы относительно y и z [1].

Ставится задача нахождения дискретных групп эквивалентности [2], которые позволяют установить подобие моделей различных "бушей" (1) и "резонансов" (соизмеримость этих моделей).

Используются нелокальные преобразования вида

$$\begin{cases} y = u^{m_1} \cdot v^{n_1} \cdot u^{m_2} \cdot v^{n_2} \cdot u^{m_3} \cdot v^{n_3} \cdot u^{m_4} \cdot v^{n_4} \\ z = u^{k_1} \cdot v^{l_1} \cdot u^{k_2} \cdot v^{l_2} \cdot u^{k_3} \cdot v^{l_3} \cdot u^{k_4} \cdot v^{l_4} \\ x = A \cdot u^{r_1} \cdot v^{s_1} \cdot u^{r_2} \cdot v^{s_2} \cdot u^{r_3} \cdot v^{s_3} \cdot u^{r_4} \cdot v^{s_4} dt \end{cases} \quad (2)$$

В результате применения подстановки (2), с учетом условий:

- а). полиномиальная часть преобразования (2) по x не зависит от первых производных новых зависимых переменных;
- б). производная по t от x преобразования (2) есть моном; получаем определяющее уравнение, решения которого дают искомые преобразования эквивалентности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сахненко В.П., Чечин Г.М. Симметричные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // ДАН, 1993. - Т. 330, N 3. - с. 308-310.
2. Зайцев В.Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, 1988. - Т. 299, N 3. - с. 542-545.

УДК 519.8

Огарков Б.М., Огарков В.Б., Кухаренко С.П. (Воронеж)

О связи статических и геометрических уравнений в теории термоупругости неоднородных тел и оболочек, изготовленных из композиционных материалов.

Матрично-операторные соотношения, связывающие уравнения равновесия и соотношения Коши для пластин и пологих оболочек впервые были установлены А.С.Чирасом. Они заключаются в том, что статические уравнения могут быть получены из геометрических путем их транспонирования и наоборот. Дальнейшее развитие этой статико-геометрической аналогии было проведено А.Р.Рянищиным и Л.А.Розным.

В нашей работе впервые сформулирован принцип двойственной связи между уравнениями равновесия и соотношениями Коши, а также между уравнениями совместности деформаций и потенциалами усилий и моментов для общей линейной теории однородных и неоднородных оболочек переменной кривизны из композитных материалов.

Доказано, что все четыре группы уравнений равновесия, Коши, совместности деформаций и потенциалов усилий могут быть выражены через простые произведения матрицы-оператора уравнения равновесия и сопряженной к ней на фиксированную матрицу с заданными числовыми коэффициентами.

С использованием принципа двойственности выведена классическая статико-геометрическая аналогия теории оболочек А.Л.Гольденвейзера-В.В.Новожилова и сделано ее обобщение на матрично-операторную связь между потенциалами усилий и соотношениями Коши. Авторами проведено обобщение принципа двойственности на задачу термоупругости композитных тел, микронеоднородных сред и моментной теории упругости.

В качестве примера рассмотрена двухслойная цилиндрическая оболочка, изготовленная из древесных композитов на основе модифицированной древесины в условиях теплового воздействия. Проведен тепловой и силовой расчет оболочек и дано экспериментальное подтверждение (температура измерялась с помощью термопар).

УДК 539.4.

Олейников А.А., Поленов В.С. (Воронеж)
О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛА АКУСТИЧЕСКОЙ
ЭМИССИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ
НАПРЯЖЕНИЯМИ

Акустическая эмиссия (АЭ) возникает в результате быстрых структурных изменений в некоторых областях твердого тела, например, при пластическом сдвиге, дроблении, изменении атомной структуры, появлении микротрещины и т.п. Такие области можно назвать очагами эмиссии. Их можно представить в виде замкнутой и цилиндрической областей.

Происходящие структурные изменения чаще всего не нарушают макроскопической сплошности остального объема твердого тела. Однако, в пространстве вокруг очага возникают переменные по времени силы (скачок напряжений), действие которых и приводит к появлению акустических сигналов, регистрируемых датчиками приборов. По их спектру и интенсивности можно судить о величине области перестройки, трещины и возможности дальнейшей эксплуатации объекта.

Под волной скачка напряжений понимается однопараметрическая поверхность, распространяющаяся в неоднородном теле с предварительно напряженном состоянии, на которой перемещения непрерывны, а напряжения, скорости перемещений и, начальные напряжения терпят разрыв. Параметры среды и их градиенты непрерывны, плотность может терпеть разрыв.

Основные соотношения, определяющие процесс динамического деформирования неоднородной среды с начальными напряжениями, запишем в виде $\sigma_{ij} = \lambda(\vec{x})\epsilon_{kk}\delta_{ij} + \mu(\vec{x})\epsilon_{ij}$; $2\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i$ (1)
 $\nabla_i(\sigma_{in} - \rho u_n \dot{\epsilon}_{in}^0) = \rho \ddot{u}_n$ (2), где ϵ_{in}^0 - компоненты тензора начальных напряжений.

Применяя к (1), (2) теорию скачков, геометрические, кинематические и динамические условия совместности, получим уравнение, определяющее уровень интенсивности волны, в которое входят, как параметры среды, так и начальные напряжения, решение которого осуществляется методом последовательных приближений. Рассмотрены примеры применения полученных уравнений для задач АЭ в различных средах (однородная, слоисто-неоднородная, сферически-неоднородная).

Останина Т.В. «Пермь»

О ПОСТРОЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИИ ПРИ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

При разработке новых технологических процессов порошковой металлургии с применением нетрадиционных материалов (керамика) возникает необходимость в теоретическом и экспериментальном исследовании эффекта сверхпластичности.

В работе рассматривается явление структурной сверхпластичности. Разрабатывается подход к построению определяющих соотношений процесса в предположении, что возможными механизмами пластической деформации являются зернограничное проскальзывание и мартенситное превращение.

Для описания проскальзывания по границе зерна в локальном месте кристалла выбирается ортогональная система координат. Компоненты тензора напряжений в локальной и лабораторной системе координат связаны законом преобразования:

$$\tau_{ik} = \alpha_{pi} \alpha_{qk} \sigma_{pq} \quad (1)$$

Локальная система координат выбирается таким образом, чтобы при скольжении по границе зерна существовала только одна отличная от нуля компонента тензора скоростей деформации. Зависимость ее от соответствующей компоненты тензора напряжений полагается известной:

$$\beta_{21}^n = \tau_{21}^2 \alpha \Omega / 16 \alpha^2 k T, \quad (2)$$

где α - коэффициент зернограничной диффузии, Ω - вакансионный объем.

При определенных внешних условиях скорость зернограничного проскальзывания, определенная по уравнению (2), может увеличиваться. Однако увеличение скорости происходит до определенного момента, соответствующего превышению скорости генерирования зернограничных дислокаций над скоростью их аннигиляции. В этом случае происходит прекращение проскальзывания, что можно представить как появление противодействующих напряжений. В соотношение (2) могут входить также напряжения, вызванные наличием мартенситных включений в поликристалле. Полагается, что после прекращения проскальзывания происходит процесс релаксации противодействующих напряжений.

Для определения тензора макро-скоростей деформации предлагается стохастический подход.

Предложенная модель позволяет анализировать явление спонтанной локализации деформации при одноосном растяжении образца, т.к. в силу неоднородности распределения по объему образца включений мартенсита для определяющих соотношений элементов образца могут быть получены разные коэффициенты.

УДК 519.6 : 577.3

Павлов Д.А. (Москва)

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МОДЕЛИ
ВНУТРИКЛЕТОЧНОЙ ПОДВИЖНОСТИ**

Рассматривается математическая модель автоволновых течений протоплазмы в живых клетках с подвижностью амебонидного типа, сформулированная в [1]:

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(\nu(x) \nabla(\alpha(t)u + \beta(t)u_t + \gamma(t)p)), \\ p_t &= f_1(t, x, c)(p_m - p) - g_1(t, x)p, \\ c_t &= f_2(t, x, u)(c_m - c) - g_2(t, x)c, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x \in \partial \Omega} &= \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0, \quad t > 0, \\ u \Big|_{t=0} &= u_0(x), \quad p \Big|_{t=0} = p_0(x), \quad c \Big|_{t=0} = c_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

где u - смещение, p - активное давление, c - концентрация кальция.

Изучаются вопросы существования и единственности решения данной системы в различных функциональных классах, а также его непрерывной зависимости от начальных условий. Проводятся исследования устойчивости и сходимости проекционно-сеточных аппроксимаций непрерывной задачи, используемых при численном моделировании [2]. Идентификация параметров исходной системы проводится численно с помощью анализа линеаризованной модели. Компьютерный эксперимент с достаточной степенью точности воспроизводит пространственно-временные структуры рельефа поверхности клетки, такие как стоячие, бегущие и спиральные автоволны, которые наблюдаются в лабораторных опытах с плазмодием *Physarum polycephalum*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Teplov V.A., Romanovsky Yu.M., Latushkin O.A. A continuum model of contraction waves and protoplasm streaming in strands of *Physarum plasmodium* // BioSystems. 1991. V. 24. P. 269 - 289.
2. Павлов Д.А., Потапов М.М. Распределенная модель внутриклеточной подвижности и ее проекционно-разностная аппроксимация // Вестн. Моск. ун-та. - Сер. 15, Вычисл. Матем. и Киберн. (в печати)

УДК 539.3

Петров В. В., Перекрестов В. А., Семенов П. К.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Разрабатывается экспертная система оценки состояния железобетонных и металлических элементов конструкций с учетом реальных условий эксплуатации и выдачи комплекса конструктивно-технологических рекомендаций, предназначенных для их использования в проектах реконструкции и усиления.

По данным натурных обследований, проведенных экспертами, входящими в группу разработки, составлена библиотека термов характерных повреждений железобетонных и металлических конструкций, учитывающая дефекты геометрии элементов, структуры бетона и металла, механические повреждения, коррозию, повреждения защитного покрытия, повреждения соединений, отступления от проекта и т. п.

На основе использования содержания библиотеки, а также методов имитационного моделирования и принятия технических решений разработана база знаний для наполнения оболочки продукционной экспертной системы оценки состояния и долговечности строительных конструкций. Разработана программа расчета несущей способности типовых железобетонных элементов. Разработаны программы расчета геометрических характеристик типовых металлических прокатных профилей с учетом равномерной коррозии с целью расчетного определения снижения несущей способности и сравнения результатов расчета с данными экспертных оценок. В стадии разработки находится создание библиотеки термов и соответствующей базы знаний для синтеза структуры мероприятий по ремонту и инженерному усилению поврежденных элементов конструкций.

Результаты разработки найдут практическое применение при автоматизированной обработке данных натурального обследования строительных конструкций, эксплуатирующихся в агрессивной среде, при составлении проектов реконструкции и усиления поврежденных конструкций.

На ряде примеров демонстрируются возможности данной системы.

УДК 624.073

Петрунина Е.А., Кривошеин И.В., Носов А.К. (Саратов)
УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНЫМИ ПОВРЕЖДЕНИЯМИ

Предлагается методика расчета на устойчивость, позволяющая выявить существенное снижение величин критических нагрузок при наличии исходных или наведенных воздействием агрессивной среды местных повреждений в стержнях, занимающих до 1/10 доли их длины l .

Составлена система фундаментальных функций метода начальных параметров, описывающих продольно-поперечный изгиб стержней с упругими шарнирами, соответствующими местным локальным повреждениям и дефектам и имеющими жесткости $C_j = EJ_j / (\omega_j l_j)$.

Выведены формулы для реактивных усилий M_k, Q_k на концах поврежденных стержней, что позволяет вычислить параметры критических нагрузок стержневых систем по методу перемещений.

Построен алгоритм вычисления критических нагрузок $P_{кр}(t)$, учитывающий изменение во времени t физико-механических свойств материала лишь в местах локальных повреждений стержней. Интегральный параметр поврежденности $\omega(t_i, \xi_i)$ отражает степень деградации материала конструкции и определяется по данным натурного обследования конструкций и результатам специально поставленных экспериментов.

Предлагаемый алгоритм предусматривает введение локальной системы отсчета времени t_i для каждой i -ой точки поврежденного сечения стержня, позволяет учесть движение фронта деградации, вычислить глубину ее проникновения в материал стержня и перераспределение поля напряжений σ_i по поврежденному поперечному сечению стержня.

Получен ряд качественно новых результатов, некоторые из которых позволяют скорректировать классические представления об устойчивости стержневых систем с локальными дефектами.

В частности, доказано, что для определенных диапазонов изменения параметров величин и координат локальных повреждений реактивные усилия на концах поврежденных стержней отрицательны при положительных единичных смещениях.

Также показано, что в ряде случаев распространенное утверждение о незначительном влиянии местных повреждений стержней на величину критической нагрузки несостоятельно.

Покорная И.Ш. (Воронеж).

О СХОДИМОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА ДЛЯ
ОДНОЙ РАЗРЫВНОЙ ЗАДАЧИ.

При приближенном решении краевой задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений высокую эффективность показывает метод коллокации. Для обоснования этого метода требуется построение соответствующих асимптотических разложений и доказательство сходимости получающихся при этом асимптотических рядов.

Нас интересует задача ($x \in R^2$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр)

$$\varepsilon \dot{x} - A(t)x = d(t) \quad t \neq \zeta$$

с краевыми условиями

$$x^1(0) = x^2(1) = 0$$

где $d(t)$ - достаточно гладкая при всех $t \in [0, 1]$, матрица $A(t)$ имеет разрыв типа скачка в точке $t = \zeta$ ($0 < \zeta < 1$). В работе всегда рассматривается случай, когда при каждом $t \neq \zeta$ матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_1(t) < 0 < \lambda_2(t)$. Обозначим через $g(t)$, $h(t)$ соответствующие $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ собственные векторы матрицы $A(t)$. Будем предполагать, что $g(\zeta-0)$ и $g(\zeta+0)$ линейно независимые векторы, и $g^1(0) \cdot h^2(1) \neq 0$.

Случай непрерывной матрицы для такой задачи хорошо изучен. Для случая разрыва матрицы в точке $t = \zeta$ в работе [1] построено асимптотическое разложение. Доказательство сходимости асимптотических разложений обычно основывается на доказательстве специальных оценок функции Грина. В рассматриваемом случае функция Грина $G(t, s, \varepsilon)$ (матричная функция) имеет значительные особенности на пересечении диагонали $t = s$ с прямой $t = \zeta$ и $s = \zeta$. Детальный анализ этих особенностей позволяет установить наличие необходимых оценок, что приводит к обоснованию сходимости соответствующих асимптотических разложений. Заметим, что в этом разложении помимо погранслоев в окрестности точек $t=0$ и $t=1$ присутствуют и односторонние (левые и правые) погранслои в окрестности точки $t = \zeta$.

Литература.

1. Стрягин В.В., Покорная И.Ш. О внутренних пограничных слоях для уравнений с разрывными коэффициентами // Тез. докл. школы "Понрягинские чтения - IV" / Воронеж, 1993. - с. 178.

Покорный Ю.В. (Воронеж)

О СНЯТИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ КОНТИНУУМОВ

При анализе динамики существенно неоднородных сред главные проблемы, затрудняющие применение современных и классических методов, зачастую создаются на этапе моделирования. Сложная структура среды, описываемая с помощью идеальных систем координат, перекочевывает в виде существенных особенностей в соответствующие дифференциальные и интегральные уравнения, превращая классические по духу уравнения в чрезвычайно трудные для анализа математические объекты. Простейший пример: если у балки с заземленными концами где-то внутри утрачена изгибная упругость (усталость, излом или что-либо другое), то в соответствующем уравнении четвертого порядка, описывающем поперечные деформации, появляется существенная особенность, делающая задачу неклассической. Для этой задачи современные методы (теории обобщенных функций, теории погранслоев и пр.) позволяют установить результаты, лишь подтверждающие корректность модели. Хотя для этого примера не вызывают сомнений ни положительность функции влияния, ни гармонический характер малых колебаний, строгие доказательства этих свойств классическими методами оказываются весьма проблематичными.

Исследование разнообразных нестандартных задач, возникающих при описании поперечных деформаций сложносочлененных систем упругих континуумов, привело к осознанию удобства замены при дифференцировании и интегрировании элементов идеального пространства на элементы среды — дифференцировать и интегрировать по среде. Тогда аномалии среды остаются в дифференциалах и не искажают соответствующих уравнений. Вместо обычных производных $\frac{d^2 u}{dx^2}$ возникают относительные производные $\frac{d^2 u}{d\delta(x)}$, где $\delta(x)$ параметризует среду, а интегралы начинают истолковываться по Лебегу-Стилтьесу. Создаваемое таким образом дифференциальное исчисление позволяет вкладывать точный смысл в производные даже от разрывных функций, перенося на них весь необходимый арсенал математического анализа. Соответствующая теория обобщенных функций и производных оказывается более наглядной, чем по Шверцу-Соболеву, и более физической.

УДК 539.3

Полякова Л. Г. (Тольятти)

К РАСЧЕТУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

В современном производстве широкое распространение получили композитные материалы (КМ). Использование их направлено на удешевление и повышение эксплуатационной надежности конструкций.

В работе рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка из КМ с комплексным армированием стенки ориентированной и хаотичной арматурой, размещенной в соответствии с напряженным состоянием реальной конструкции.

Для теоретического описания работы материала использованы физические соотношения модели нелинейного ортотропного равномодульного материала, известные в механике сплошной среды. Проведена идентификация модели по результатам экспериментальных исследований позволяющая сделать вывод о пригодности модели для описания поведения КМ под нагрузкой.

На основе общей моментной теории деформирования оболочек построены уравнения осесимметричного деформирования оболочки из КМ. Для преодоления трудностей связанных с нелинейностью значений коэффициентов из-за разносопротивляемости КМ, в работе применяется метод последовательных возмущений параметров, сводящий решение сложной исходной задачи к расчету последовательности линейных неоднородных оболочек, нагруженных некой фиктивной нагрузкой, порождаемой изменением параметров задачи по определенной программе.

Иллюстрируются возможности методики последовательных возмущений параметров для поиска оптимального, в определенном смысле, проекта цилиндрической оболочки из композитного материала.

УДК 517.927.4

Прядиев В.Л. (Воронеж)

ОДНА НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$u'' = -p_j(x) f(u) g(u') \quad (x \in \Gamma) \quad (I)$$

($j = 1, 2$), в которых $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ - открытый геометрический связный граф (в соответствии с терминологией [1]), $p_j(\cdot)$ положительны и отделены от нуля, $g, \varphi \in \mathcal{F}$, где $\varphi(y) \triangleq f(y)/y$ ($y \neq 0$), $\varphi(0) = f'(0)$, а \mathcal{F} - класс положительных и непрерывных на \mathbb{R} функций, неубывающих на $(-\infty; 0]$ и невозрастающих на $[0; +\infty)$. Решение уравнения (I) ищется в классе гладких (в смысле [1]) функций.

Объединение циклов Γ (т.е. подмножеств Γ , гомеоморфных окружности) обозначим через χ . Путем графа Γ , соединяющем точки $a, b \in \Gamma$, ($\bar{\Gamma}$ - замыкание Γ), назовем граф $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такой, что $\partial \Gamma_0 = \{a; b\}$ ($\partial \Gamma_0 \triangleq \bar{\Gamma}_0 \setminus \Gamma_0$).

Теорема. Пусть $p_1(\cdot) > p_2(\cdot)$ на Γ . Пусть $y_1(\cdot)$ - решение уравнения (I), причем $y_1(\cdot) > 0$ на Γ , $y_2(\cdot) = y_1(\cdot)$ на $\partial \Gamma \setminus \{b\}$, где b - точка $\partial \Gamma$, и $y_2'(\cdot) \geq y_1'(\cdot)$ на $\partial \Gamma \setminus \{b\}$. Тогда для любого пути Γ_a графа Γ , соединяющего точки $a \in \partial \Gamma \setminus \{b\}$ и b , отношение $y_2(x)/y_1(x)$ возрастает при x , пробегаящим $\Gamma_a \setminus \chi$ в направлении "от a к b ".

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // ДУ. - 1989. - 25. № 7. - С. 1141-1150.

УДК 539.3

Ревуженко А.Ф. (Новосибирск)
ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ.
ПРИЛОЖЕНИЕ К ОПИСАНИЮ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Необходимость обобщения возникла из потребностей механики сплошной среды в использовании функций, разрывных на различных масштабных уровнях. В качестве элементарной разрывной "функции" от x вводится идеальный объект $E(x)$. Объект можно представить как специальный предел дробной части nx при $n \rightarrow \infty$. Определены все основные операции с объектом $E(x)$, а также с объектом и обычными функциями. Вводятся дополнительные операции локального дифференцирования на различных уровнях и интегрирования.

Показано, что $\max_x E(x)$ соответствует бесконечно малому числу нестандартного анализа. Выражения, содержащие $E(x)$ и обычные гладкие функции, позволяют описать классы функций с разрывами на различных масштабных уровнях.

Проводится обобщение на векторные поля. Рассмотрен пример описания кинематики пластической деформации. Разрывам соответствуют микропроскальзывания на различных масштабных уровнях, осреднению - обычные поля перемещений и компонент пластических деформаций.

ДК 518.5:66.011(075.8)

Ряжских В.И. (Воронеж)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ
КРИОГЕННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Одной из задач технологии эксплуатации криогенных систем является определение времени охлаждения криогенного трубопровода до заданной температуры и массы расходуемого при этом хладагента. Такая задача может быть решена, если имеются температурные поля хладагента и стенок трубопровода. Известные расчетные соотношения температурных полей получены в предположении, что трубопровод идеально теплоизолирован. В такой постановке модель не вполне адекватна.

Сформулирована математическая модель описания одномерных нестационарных безразмерных температурных полей с учетом тепловых потерь:

$$\partial W(X, \theta) / \partial \theta = -W(X, \theta) + a c Z(X, \theta) + a c + b - 1; \quad (1)$$

$$\partial Z(X, \theta) / \partial X = W(X, \theta) / a - Z(X, \theta) + 1/a - 1; \quad (2)$$

$$W(X, 0) = Z(0, \theta) = 0, \quad (3)$$

где a , b и c - известные константы.

Система (1)-(3) решена методом интегральных преобразований: температурное поле стенок трубопровода

$$Z(X, \theta) = \left\{ \frac{b+c-1}{a(c-1)} \exp[(c-1)\theta] - \frac{(c-1)a+b}{a(c-1)} \right\} [1 - \exp(-X)] - \\ - \exp(-X) \int_0^\theta \left\{ \frac{b+c-1}{a(c-1)} \exp[(c-1)\xi] - \frac{(c-1)a+b}{a(c-1)} \right\} \exp[-(\theta-\xi)] \times \\ \times J_1 [2\sqrt{cX(\theta-\xi)}] / \sqrt{(\theta-\xi)/(cX)} d\xi;$$

температурное поле хладагента

$$W(X, \theta) = 1 - \exp(-\theta) + \left\{ (ac+b-1) \exp(-\theta) + \frac{b+c-1}{c-1} \exp[(c-1)\theta] + \right. \\ \left. + \frac{c[(c-1)a+b]}{1-c} \right\} [1 - \exp(-X)] - \exp(-X) \int_0^\theta \left\{ (ac+b-1) \exp(-\xi) + \frac{b+c-1}{c-1} \times \right. \\ \left. + \exp[(c-1)\xi] + \frac{c[(c-1)a+b]}{1-c} \right\} \exp[-(\theta-\xi)] \cdot J_1 [2\sqrt{cX(\theta-\xi)}] / \sqrt{(\theta-\xi)/(cX)} d\xi.$$

где J_1 - функция Бесселя первого аргумента.

УДК 539.3

Сарбаев Б. С. (Москва)

НЕЛИНЕЙНО УПРУГИЕ СВОЙСТВА ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Для анализа эффектов нелинейного деформирования волокнистых композитных материалов предлагается использовать уравнения нелинейной упругости анизотропных сред. Развивается теория потенциальных тензоров линейных определяющих уравнений ортотропной среды. Монослой, являющийся простейшей математической моделью однонаправленного волокнистого композита, рассматривается как ортотропная нелинейно упругая среда при малых деформациях. Используется система прямоугольных декартовых координат, оси которых совпадают с осями симметрии среды. Выделяются шесть механизмов деформирования: три механизма деформирования растяжения-сжатия вдоль каждой из осей системы координат и три механизма деформирования чистого сдвига в координатных плоскостях. Потенциал удельной энергии упругой деформации можно строить исходя из характера взаимодействия указанных механизмов деформирования. Предлагается вариант такого потенциала, учитывающий особенности деформирования современных волокнистых композитов (стекло-, углепластиков и др.). Полученные определяющие уравнения позволяют описывать поведение, близкое к линейно упругому при растяжении в направлении вдоль волокон; существенно нелинейное при растяжении в направлении, перпендикулярном направлению укладки волокон, и при чистом сдвиге в плоскости армирования. Учитывается взаимодействие механизмов деформирования при растяжении в направлении, перпендикулярном направлению укладки волокон, и чистого сдвига в плоскости армирования. Описаны опыты, необходимые для определения материальных констант, исследован характер изменения коэффициентов Пуассона, выполнен анализ поведения материала при равном двухосном растяжении в плоскости армирования. Предсказанные эффекты деформирования подтверждены экспериментальными данными, заимствованными из литературных источников. Обсуждается возможность использования предложенных определяющих уравнений для компьютерного моделирования процессов деформирования слоистых композитов и конструкций, выполненных из них.

УДК 517.95

Сафонов В.Ф. (Москва), Гудичев О.Д. (Худжанд)

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ
ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Рассматривается система интегральных уравнений типа

$$\varepsilon \psi(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t,s) \psi(s) ds + h(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, $\mathcal{K}(t,s)$ - $n \times n$ -матричная функция, $h(t) = \{h_1, \dots, h_n\}$ известная вектор-функция, $\varepsilon > 0$ - малый параметр. При любых $\varepsilon \neq 0$ и непрерывных $h(t)$ и $\mathcal{K}(t,s)$ система (1) всегда имеет решение в классе непрерывных функций. Если же в (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим систему интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра. Ее разрешимость в классе непрерывных функций не всегда имеет место. Если, например, $h(0) \neq 0$, то вырожденная система не имеет на отрезке $[0, T]$ непрерывного решения. В этом случае говорят, что точка $t=0$ является особой для вырожденной системы.

В докладе показывается, что к особым точкам следует отнести также все точки отрезка $[0, T]$, для которых "диагональное" ядро $\mathcal{K}(t,t)$ вырожденно (т.е. $\det \mathcal{K}(t,t) = 0$). В окрестности особых точек возникают пограничные слои, описываемые (по терминологии С.А. Ломова) существенно особыми сингулярностями (см., напр. мер, [1]). В случае дифференциальных и интегродифференциальных систем существенно особые сингулярности выделяются спектром предельного оператора (см. [1]). В случае сингулярно возмущенного интегрального уравнения типа (1) такие сингулярности описываются не спектром предельного оператора, а "диагональным" ядром $\mathcal{K}(t,t)$ точнее: его спектром).

В докладе обсуждается проблема регуляризации сингулярно возмущенной системы (1). Выделяются случай стабильного спектра оператора $\mathcal{K}(t,t)$ и случай нестабильного спектра. И в том и другом случае разрабатывается алгоритм построения регуляризованных асимптотических решений задачи (1), дается его обоснование на основе разрабатываемой в докладе теории однозначной и нормальной разрешимости соответствующих итерационных систем.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

УДК 539.3

Ю. Т. Свиридов

ВОЗМОЖНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НАРУШЕНИЕМ СПЛОШНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ
СОПРЯЖЕНИЯ СЛОЕВ.

Рассмотрение новых подходов обусловлено практическими потребностями изготовления многослойных оболочек значительных размеров посредством спаивания или термореактивного склеивания слоев в печах с регулируемым давлением и температурой. Особенность таких технологических процессов состоит в том, что при малых толщинах оболочек-заготовок и малых исходных зазорах между ними термоупругие перемещения достаточно велики, и в определенных условиях оболочки-компоненты начинают взаимодействовать друг с другом, образуя зоны контакта. Как основное предположение принято, что при наличии межслойного контакта между оболочками, возникает продольное усилие, обусловленное кулановским трением. Развивающаяся зона контакта может состоять из подобластей двух типов: участок контакта со скольжением и участок полного контакта. Введение трения делает задачу нелинейной, что заставляет рассматривать всю историю нагружения.

Пусть система состоит из n тонких цилиндрических оболочек, коаксиально вставленных друг в друга с первоначальными зазорами Δ_i^0 . Толщины оболочек и зазоры считаются малыми, так что составную оболочку можно считать цилиндрической с радиусом R .

Между каждой смежной парой оболочек возможны три следующие состояния: зазор не выбран, зазор выбран и происходит относительное проскальзывание оболочек, зазор выбран, есть контактное давление p , но скольжения нет из-за равенства осевых перемещений.

Кроме этого, должны быть заданы два граничных условия на краях оболочек и условия сопряжения различных зон: непрерывность перемещений и осевых усилий в местах стыка зон. В такой постановке получены расчетные формулы и построены соответствующие алгоритмы для определения усилий и перемещений в различных зонах.

УДК 539.3

Семенов П. К., Перекрестов В. А.

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ИЗНОСА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Реальный износ здания или сооружения Σ определяется как наложение значений нормативного морального износа K_m и физического износа K_f .

Значение нормативного морального износа определяется по регламентированным нормам амортизационных отчислений в зависимости от срока эксплуатации сооружения и типа сооружения.

Физический износ определяется путем экспертных оценок и характеризует потерю несущей способности конструкции сооружения, происходящую в результате эксплуатации в условиях, отличных от нормальных. Процесс получения экспертных оценок опирается на применение технологии экспертных систем. Результаты и данные обследования преобразуются в форму, позволяющую ввести их в экспертную систему и обработать их, используя базы знаний. Затем по формуле:

$$\Sigma = (1 - (1 - K_m) \cdot (1 - K_f)) \cdot 100$$

вычисляется суммарный износ в процентах.

Для определения значения нормативного морального износа по имеющейся документации или по данным обследования определяются основные конструктивно-планировочные характеристики сооружения: размеры в плане; высота; этажность; тип; конструктивная схема; перечень основных несущих конструкций.

Для определения значения физического износа составляется укрупненная дефектная ведомость о состоянии и о снижении несущей способности основных несущих конструкций сооружения.

Конструктивно-планировочные характеристики и укрупненная дефектная ведомость составляют основу паспорта сооружения.

Наложение значения суммарного износа на балансовую стоимость сооружения дает значение остаточной стоимости сооружения.

Данная методика может быть использована при определении остаточной стоимости недвижимости при ее приватизации.

УДК 539.3 + 517.9

Сенатов С.И. (Красноярск)

Точные решения уравнений пластичности с условием отрыва.

Рассмотрим уравнения Д.Д.Ивлева, которые описывают предельное состояние материала при условии сопротивления отрыву. В кинематически определенном случае они имеют вид

$$\begin{aligned}4u_x v_y - (u_y + v_x)^2 &= 0, \\4v_y w_z - (v_z + w_y)^2 &= 0, \\4u_x w_z - (u_z + w_x)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Показано, что эти уравнения допускают, в смысле С.Ли, алгебру Ли L_{19} . В эту алгебру, в частности, входят три оператора гиперболического вращения

$$\begin{aligned}Z_1^+ &= y \partial_z + z \partial_y - v \partial_w - w \partial_v, \\Z_2^+ &= z \partial_x + x \partial_z - w \partial_u - u \partial_w, \\Z_3^+ &= x \partial_y + y \partial_x - u \partial_v - v \partial_u.\end{aligned}$$

Другие, известные автору, уравнения механики деформируемого твердого тела подобных операторов не допускают.

Наличие этих операторов позволяет, в частности, построить точные решения рассмотренных уравнений в гиперболической системе координат $\Gamma = \sqrt{(x^2 - y^2)}$, $\Theta = \text{Arctg } y/x$, $z = \bar{z}$, которая не является ортогональной!

Обсуждается физический смысл решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 93-013-167557.

УДК 539.4

Соколкин Ю.В., Чекалкин А.А., Бабушкин А.В. (Пермь)

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОРОШКОВЫХ КОМПОЗИТОВ В УСЛОВИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Решается задача прогнозирования долговечности изделий из порошковых материалов в условиях циклического нагружения. Используется структурно-феноменологический подход на основе моделей механики деформирования и разрушения микронеоднородных тел. Порошковый материал рассматривается как макроскопически изотропная структурно-неоднородная среда. Для описания процесса накопления усталостных повреждений на микро- и макроуровнях вводятся тензорные функции поврежденности. Численная реализация базируется на процедуре метода конечных элементов и статистическом моделировании неоднородных структур с хаотическим распределением микронеоднородностей, в том числе пористости с учетом статистического разброса размеров пор.

Исследовано соответствие математической модели процессу усталостного разрушения образцов низколегированной порошковой стали ПМ-100Н4М и порошкового пористого железа ОсЧ 6-2. Выполнены усталостные испытания партий образцов в условиях циклического изгиба и при циклическом кручении. Проведение двух серий независимых экспериментов позволяет провести расчет усталостных характеристик компонентов структуры материала на основе данных о долговечности при изгибе и сопоставить расчетные и экспериментальные кривые усталости для кручения. При анализе усталостного доведения порошкового железа учитывалось упруго-пластическое деформирование частиц порошка железа. Наблюдалось вполне удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных как по среднему значению, так и по величине статистического разброса усталостной долговечности образцов порошковых материалов. Исследовано влияние структурных параметров и условий нагружения на циклическую долговечность порошковых материалов в области малоциклового и многоциклового усталости.

УЛК 539.3 Опорыхин А.Н., Сумин А.И. (Водонез)

Теория и задачи устойчивости нелинейных сред при
наложенных конечных деформациях.

В динамической постановке исследуется устойчивость изотропных, однородных нелинейно-упругих и нелинейно-вязкоупругих сред по отношению к наложенным конечным возмущениям. При помощи вариационных уравнений метода Бубнова-Галеркина задача сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Для этой системы строится функция зависящая от амплитуд возмущений, которая при дополнительных ограничениях на амплитуды возмущений будет являться функцией Ляпунова. Невозмущенное состояние предполагалось однородным. Показано, что для нелинейно-упругого тела нулевое решение системы уравнений, соответствующее основному процессу деформирования может терять устойчивость при любом значении параметра нагрузки, если возмущения превысят определенную величину. Для нелинейно-вязкоупругого тела нулевое решение соответствующей системы уравнений будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений. Рассмотрены конкретные задачи устойчивости при наложенных конечных деформациях. Проведено сравнение с задачами решенными при помощи линеаризованных уравнений.

УДК 539.3

Спoryхин А.Н., Сумин В.А. (Воронеж)

К устойчивости кругового цилиндра из неоднородного нелинейно-упругого материала при конечном растяжении и кручении.

В динамической постановке рассматривается задача о потере устойчивости прямого кругового цилиндра из нелинейно-упругого материала, описываемого потенциалом Трелоара. Цилиндр подвергается равномерному простому кручению и растяжению в направлении параллельном оси цилиндра. Решение задачи нелинейной теории упругости в невозмущенном состоянии ищется с учетом эффектов второго порядка. При помощи вариационных уравнений метода Бубнова-Галеркина исследование линеаризованной задачи в возмущениях сводится к исследованию нулевого решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В качестве базисных функций в разложении возмущений перемещений были взяты известные решения при однородном невозмущенном состоянии. Из условия положительной определенности квадратичной формы с коэффициентами, зависящими от параметра нагрузки и поперечного размера сечения, находятся критические значения этих величин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ИТО И СТРАТОНОВИЧА В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе [1] рассмотрено продолжение алгебры обобщенных случайных процессов на $\tilde{\mathcal{R}}$, где $\tilde{\mathcal{R}}$ - расширение по Егорову вещественной прямой. Это продолжение наиболее эффективно для нигде не дифференцируемых функций (естественным примером являются почти все траектории броуновского движения). В стохастическом анализе часто рассматриваются уравнения, в которых дифференциал понимается либо в смысле Ито, либо в смысле Стратоновича. Введенная алгебра позволяет обобщить понятие этих стохастических дифференциалов естественным с позиций классического анализа образом.

Введем в рассмотрение величину

$$B_n^m(t, \omega) = \sum_{k=1}^m [B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2,$$

где $B_n(t, \omega) = (B \times \omega_n)(t, \omega)$, $\omega_n \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$,

$$\text{supp } \omega_n(x) \subset [-\frac{1}{n} - \lambda, \frac{1}{n} + \lambda], \int_{-\frac{1}{n} - \lambda}^{\frac{1}{n} + \lambda} \omega_n(x) dx = 1, \omega_n(x) = \frac{n}{2},$$

если $-\frac{1}{n} + \lambda < x < \frac{1}{n} - \lambda$, а λ - бесконечно мало по сравнению с $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{m}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При $h \in \mathcal{S}$ $B_n^m(t, \omega) \rightarrow 0$ равномерно по $t \in T$ для почти всех $\omega \in \Omega$. При $h \in I$ $B_n^m(t, \omega) \rightarrow t$ равномерно по $t \in T$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f \in C^1(\mathcal{R})$. Тогда в алгебре $\mathcal{G}(T, \Omega)$ найдутся такие элементы $F(t, \omega)$ и $G(t, \omega)$, что для $\forall (g_n(t, \omega)) \in \mathcal{G}(t, \omega)$ и $\forall (f_n(t, \omega)) \in F(t, \omega)$

$$g_n(t, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B(t, \omega), f_n(t, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(B(t, \omega))$$

$$\text{и } \sum_{k=1}^m f_n(t_{k-1}, \omega) [g_n(t_k, \omega) - g_n(t_{k-1}, \omega)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(B(x, \omega)) dB(x, \omega)$$

равномерно по $t \in T$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Если $h \in \mathcal{S}$, то интеграл понимается в смысле Стратоновича, если же $h \in I$, то интеграл понимается в смысле Ито.

Литература.

1. Лазакевич Н. В., Сташуденок С. П. Понтригинские чтения - IV. Тезисы докладов. Воронеж, 1993, с. 120.

УДК 531.36

Степанов А.В. (Керчь)

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИПШЦУ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В некоторой области $H \subseteq I \times \mathbb{R}^n$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x); f(t, 0) = 0, f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (I = [0, +\infty))$$

которая представима в виде

$$\dot{x}_s = \varphi_s(t, x_s) + g_s(t, x), s = 1, \dots, k, (x_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \sum n_s = n) \quad (2)$$

Здесь $\varphi_s: I \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$, а $g_s: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$.

Будем полагать, что для каждой изолированной подсистемы

$$\dot{x}_s = \varphi_s(t, x_s), s = 1, \dots, k \quad (3)$$

существуют функции $\xi_s(t, u_s) \in C[I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ и $V_s(t, x_s) \in C[I \times S_{\delta_s}, \mathbb{R}_+]$ - локально Липшицева по x_s ($V_s(t, 0) = 0$, $S_{\delta_s} = \{x_s : 0 \leq |x_s| < \delta_s\}$), удовлетворяющая условию

$V_s(t, x_s) \geq \varrho_s(|x_{s1}|)$, $\varrho_s(a) \in C[[0, \delta_s], \mathbb{R}_+]$, $\varrho_s(0) = 0$ ($\varrho_s(a)$ - строго монотонно возрастает с ростом a такая, что $\varrho_s^{-1}(a\varrho_s(a)) \leq a$, где $\varrho_s(a)$ - некоторая непрерывная функция: $\varrho_s(a) \geq 1$ при $a \geq 1$).

Если в $I \times S_{\delta_s}$ в силу (3) $\dot{V}_s(t, x_s) \leq \xi_s(t, V_s(t, x_s))$ и нулевое решение

$$\dot{u}_s = \xi_s(t, u_s), u_s(t_0) = u_{s0} \geq 0$$

устойчиво по Липшицу, то (3) устойчивы по Липшицу. При дополнительном предположении, что

$|g_s(t, x)| \leq \omega_s(t, |x|)$, $\omega_s(t, y) \in C[I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$, $\omega_s(t, 0) = 0$, а скалярное уравнение $\dot{u}_s = L_s \omega_s(t, u)$ устойчиво по Липшицу (L_s - постоянная Липшица), то же можно сказать об (1) в целом.

Особый интерес представляет случай, когда

$$(\alpha_{s1}(t) |x_{s1}|)^m \leq V_s(t, x_s) \leq (\alpha_{s2}(t) |x_{s1}|)^m,$$

где $\alpha_{s1}(t)$ и $\alpha_{s2}(t)$ - неотрицательные, непрерывные функции ($\alpha_{s1}(t_0) \leq \alpha_{s2}(t_0)$).

УДК 539.3

Сумин А.И. (Воронеж)

К вопросу о связи стохастичности и неустойчивости
для вязкоупругих сред.

Для вязкоупругих сред обсуждается связь между неустойчивостью и стохастическим поведением траекторий динамических систем. При изменении параметров системы поведение ее становится все более сложным и при определенных значениях этих параметров в системе возникает хаос. В диссипативных системах появляются инвариантные притягивающие множества - странные аттракторы. Рассматриваются вопросы нахождения размерностей аттракторов динамических систем, порождаемых уравнениями описывающими поведение вязкоупругих сред. При помощи показателей Ляпунова вычисляются динамические размерности аттрактора. В случае, если неизвестны уравнения динамической системы или нет возможности найти решения этой системы, вопрос может быть решен при помощи рядов экспериментальных наблюдений над динамической системой. При помощи таких рядов определяется область устойчивости отдельных параметров на аттракторе. В качестве критерия определения области устойчивости используется сумма положительных показателей Ляпунова, как определяющих скорость разбегания траектории системы.

УДК 539.375

Тамуж В.П., Петрова В.Е. (Рига, Воронеж)
РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРЕЩИНЫ
С ПОЛЕМ ПОВРЕЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Решение данной проблемы в рамках плоской теории упругости проводится на основе задач о взаимодействии магистральной трещины с прямолинейными микротрещинами. Используется метод сингулярных интегральных уравнений, решение которых ищется асимптотическим методом в виде ряда по малому параметру, равному отношению длин микро и макротрещины l/l_0 . Определяются неизвестные производные разрывов перемещений на линиях трещин, а затем по ним коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах макротрещины. Применяя этот метод к задачам термоупругости при воздействии теплового потока, перпендикулярного макротрещине, и для задач поперечного сдвига (сдвиговые усилия параллельны макротрещине) было получено, что при некоторых расположениях микродефектов появляются отрицательные КИН K_2 в вершинах макротрещины, а значит допускается "перехлест" краев трещины. Чтобы избежать этого, необходимо вводить в местах "перехлеста" зоны контакта берегов трещины и решать задачи с учетом возможного возникновения этих зон. При этом следует учитывать и возможное раскрытие микротрещин.

Задача в такой постановке также решается асимптотическим методом l/l_0 , но примененным к системе сингулярных интегральных уравнений, разделенных на действительную и мнимую части: отдельно для производных нормальных и сдвиговых скачков смещений. Было получено выражение для КИН K_2 в вершинах макротрещины, которое содержит неизвестную пока зону раскрытия трещины $[-c, c]$. Она определяется из условия отсутствия сингулярности в решении в граничных точках этой зоны, т.е. $K_2(\pm c) = 0$ [2]. Определив эту зону, вычисляем скорректированный КИН K_2 .

Литература.

1. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами // Механика композиционных материалов. - 1984. - N 1. - С. 42-50.
2. Гольдштейн Р.В., Литников Ю.В., Морозова Т.М. Равновесие системы разрезов при образовании на них областей налегания и раскрытия // ПММ. - 1991. - 55, N 4. - С. 672-678.

УДК 517.96

Тюрин В.М. (Липецк)

О НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Оценки коэффицивного типа играют важную роль в качественной теории краевых задач для дифференциальных операторов. Здесь рассматриваются коэффицивные неравенства во всем пространстве R^n , связанные с обратимостью (инъективностью) линейных операторов

$$P = \sum_{|J| \leq m} A_J D^J$$

где $A_J: R^n \rightarrow [X]$ сильно непрерывные ограниченные функции, X - банахово пространство, $[X]$ -пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X .

Обозначим C^{m+q} ($0 < q < 1$) пространство Гельдера функций $u: R^n \rightarrow X$ с нормой

$$\|u\|_{C^{m+q}} = \|u\|_{C^m} + \langle u \rangle_{\alpha, m}, \quad \langle u \rangle_{\alpha, m} = \sum_{|J|=m} \sup_{x \neq y} \frac{\|D^J u(x) - D^J u(y)\|}{|x-y|^q}$$

$W^m(L^p)$ - пространство Соболева функций $u: R^n \rightarrow X$ ($p > 1$)

Оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ назовем равномерно инъективным, если

$$\|u\|_{W^m(L^p)} \leq k \cdot \|Pu\|_{L^p}$$

Оператор $P: C^m \rightarrow C$ назовем ε -коэффицивным относительно полунормы $\langle u \rangle_{\alpha, m}$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{C^m} \leq \varepsilon \langle u \rangle_{\alpha, m} + d(\varepsilon) \|Pu\|_{C} \quad (u \text{ из пространства } C^{m+q})$$

с некоторой постоянной $d(\varepsilon) > 0$.

Аналогично определяется ε -коэффицивность оператора P в других функциональных пространствах, исследована их взаимосвязь. Приведем один результат.

Теорема. Из равномерной инъективности оператора $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ следует ε -коэффицивность оператора $P: C^m \rightarrow C$ относительно полунормы $\langle u \rangle_{\alpha, m}$.

УДК 539.3

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ДЕФОРМИРОВАННОЙ
УПРУГОЙ СРЕДЕ

Филатов Г.Ф.

Воронеж

Теория разрывов применяется для изучения закономерностей распространения поверхностей сильного разрыва в деформированной нелинейной упругой среде. Приводятся уравнения теории больших деформаций, наложенных на произвольное деформированное состояние упругой среды. В качестве независимых используются пространственные координаты, применяется тензор деформаций Альманси - Лагранжа и сопряженный ему обобщенный тензор напряжений. Характеристики напряженного и деформированного состояний представлены в виде рядов по компонентам вектора перемещений из промежуточного состояния в текущее.

Используется метод возмущений для анализа закономерностей распространения сингулярных поверхностей разрыва скоростей и напряжений. Предполагается, что конечное состояние получено из промежуточного в результате движения ударной волны - поверхности сильного разрыва. Для определения волнового вектора и скорости движения этой поверхности получена алгебраическая система уравнений. Решение этой системы отыскивается в виде степенных рядов.

Термодинамическое условие совместности, которое вытекает из требования выполнения на ударной волне законов термодинамики, в общем случае движения и деформации впереди ударной волны приводит к неравенству, содержащему компоненты волнового вектора, нормали, характеристики деформированного состояния впереди ударной волны и частные производные функции упругого потенциала. Рассмотрен вопрос о получении дополнительных неравенств, ограничивающих функцию упругого потенциала, на основе термодинамического условия совместности.

УДК 517.9

Филатов О.П. (Самара)

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Принцип усреднения для дифференциальных включений вида

$$\dot{z} \in H(t, z, \mu), \quad z(0) = z_0, \quad (1)$$

где $z \in R^{m+n}$, $t \in R_+$, $0 \leq \mu \leq \mu^0$, сведен к трем основным задачам аппроксимации сверху, снизу, взаимной на асимптотически большом промежутке $[0, 1/\mu^{-1}]$, $\mu \rightarrow 0$, по медленным переменным $x = \mu z$, где $\pi: R^{m+n} \rightarrow R^m$ - проектор, $\pi H(t, z, \mu) = \mu F(t, z, \mu)$, $F(t, z, \mu) \subset R^m$. Аппроксимирующие включения строятся в пространстве медленных переменных R^m и имеют вид

$$\dot{\xi} \in \mu F(t, \xi), \quad \xi(0) = \pi z_0,$$

где $F(t, \xi) \subset R^m$. Доказано, что основные достаточные условия, гарантирующие соответствующие аппроксимации в случае

$H(t, z, \mu) = \mu F(t, z, \mu) \times G(t, z, \mu)$, $F(t, z, \mu) \subset R^m$, $G(t, z, \mu) \subset R^n$, (см. [1, 2]), для дифференциальных включений (1) с правой частью

$H(t, z, \mu)$, не являющейся прямым произведением множеств $\mu F(t, z, \mu)$ и $G(t, z, \mu)$, можно использовать только в задаче аппроксимации

сверху. Дополнительным условием для таких задач является условие параметризации правой части, позволяющее свести задачу (I) к эквивалентной задаче с управлением

$$\dot{z} \in \mu F(u, t, z, \mu) \times G(u, t, z, \mu), \quad z(0) = z_0,$$

где управление $u = u(t)$ принадлежит некоторому классу U .

Приводятся примеры применения принципа усреднения к задачам естественного возмущения [3].

Литература

1. Филатов О.П., Хапаев М.М. О взаимной ε -аппроксимации системы дифференциальных включений и усредненного включения // Матем. заметки. 1990. Т. 47, в. 5. С. 127-134.
2. Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение дифференциальных включений с "быстрыми" и "медленными" переменными // Матем. заметки. 1990. Т. 47, в. 6. С. 102-109.
3. Филатов О.П. О движении гироскопа в неконтактном подвесе при многозначном возмущении - снования // Механика твердого тела. 1992. № 2. С. 18-24.

УДК 517.9

Филимонов А.М.

ТОЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО
АНАЛОГА ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ДИСЛОКАЦИИ
В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ПО ФРЕНКЕЛЮ - КОНТОРОВОЙ

Известно (см. например: Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. Л.: Наука, 1972, 424 с.) что исходной математической моделью в одномерной теории дислокаций в твердых телах по Френкелю - Конторовой является дифференциально-разностное (дифференциальное по t и разностное по j) уравнение

$$m\ddot{y}_j = s_{j+1} - s_j - \Phi(y_j) \quad (1)$$

где y_j - продольное перемещение j -го атома, имеющего массу m ; $s_j = F(\Delta_j)$, $\Delta_j = y_j - y_{j-1}$, причем функции $\Delta_j \rightarrow F(\Delta_j)$ и $y_j \rightarrow \Phi(y_j)$ заданы. Функция F моделирует связь между подвижными атомами рассматриваемого слоя, а функция Φ соответствует потенциалу притяжения со стороны атомов нижележащего слоя, который в первом приближении считается неподвижным.

Естественный континуальный моделью классического варианта теории (такой вариант возникает в случае $F(\Delta) = b\Delta$, $\Phi(y) = a \sin(cy)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) является уравнение sin - Гордона. Однако, можно рассматривать случай, когда в (1) обе функции F и Φ нелинейны, например: $F(\Delta_j) = b|\Delta_j|^{p \operatorname{sgn}(\Delta_j)}$, $\Phi(y_j) = a|y_j|^{p+1} \operatorname{sgn}(y_j)$. Тогда соответствующей континуальной моделью уравнения (1) будет уравнение:

$$\rho u_{tt} = \rho b |u_x|^{p-1} u_{xx} - a(p+1) |u|^p \operatorname{sgn}(u), \quad \rho > 0, b > 0, a > 0. \quad (2)$$

Оказывается, что для этого уравнения можно построить серии точных решений типа стоячих волн $u = \theta(t)\phi(x)$, где функции θ , ϕ являются периодическими решениями уравнений

$$\rho \theta'' + \lambda |\theta|^p \operatorname{sgn}(\theta) = 0, \quad b(|\phi(x)|^p \operatorname{sgn}(\phi'))^2 - a|\phi|^p \operatorname{sgn}(\phi) + \lambda \phi = 0, \quad \lambda > 0 \quad (3)$$

где $\lambda > 0$ - некоторый параметр, играющий роль собственного значения. Исследование (3) сводится к анализу некоторых абелевых интегралов. Аналогично может быть разобран случай $F(\Delta) = b|\Delta|^{p \operatorname{sgn}(\Delta)}$, $\Phi(y) = ay$.

УДК 512

Фомин В.И. (Тамбов)

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЫ
В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕСОВЫМИ НОРМАМИ

Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ($x \in C^n$) и $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ справедливы оценки

$$\|x\|_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}, \quad (1)$$

где

$$\|x\|_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} = \sum_{j=1}^n \mu_j |x_{i_j}|, \quad \|x\|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} = \sum_{j=1}^n \nu_j |x_{i_j}|;$$

$\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ - такая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$, что $|x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| \leq \dots \leq |x_{i_n}|$;

$$\mu_j = \alpha^{n-j} \cdot \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^{2n}}}; \quad \nu_j = \alpha^{n-j}$$

($j = 1, 2, \dots, n$), $\alpha = \sqrt{2} - 1$. Оценки (1) не улучшаемы на R^n (C^n) в классе весовых норм вида

$$\|x\|_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \sum_{j=1}^n \alpha_j |x_{i_j}|, \quad (2)$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Весовые нормы вида (2) введены в [1]. Для $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ при $p \in R$, $p > 2$ оптимальная верхняя оценка весовой нормой имеет вид

$$\|x\|_p \leq \|x\|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}, \quad (3)$$

где $\nu_j = \alpha^{n-j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\alpha = 2^{\frac{1}{p}} - 1$. Оценки (1), (3) уточняют соответствующие оценки из [2].

Литература

1. О весовых нормах в конечномерном пространстве / Фомин В.И. Тамбов. ин-т хим. машиностр. - Тамбов, 1992. - 7 с. - Библиогр. о назв. - Рус. - Деп. в ВИНТИ 25.01.93, № 153 - В - 93.
2. Об оптимальных оценках ℓ^p -нормы в R^n весовыми нормами / Фомин В.И. Тамбов. ин-т хим. машиностр. - Тамбов, 1992. - 4 с. - Библиогр. о назв. - Рус. - Деп. в ВИНТИ 02.03.93, № 513 - В - 93.

УДК 517.9

Халпаев М. М. (Москва)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСРЕДНЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ, КОМПОНЕНТЫ КОТОРЫХ МОГУТ БЫТЬ ИЗОТРОПНЫМИ.

Рассматривается периодическая среда, состоящая из изотропных материалов. Ясно, что геометрическое расположение компонент порождает анизотропию композитного материала. Для примера можно рассмотреть задачу определения эффективного коэффициента теплопроводности среды,

представленной на рисунке,

где коэффициенты

теплопроводности

подчиняются неравенству

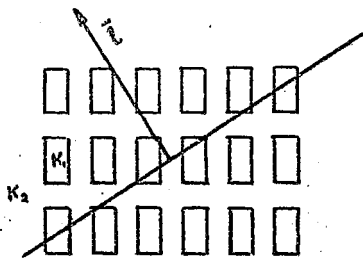
$$\lambda_2 > \lambda_1.$$

Ясно, что эффективный

коэффициент

теплопроводности зависит от

выбранного направления \vec{l} .



Дается определение эффективного коэффициента теплопроводности через стационарное тепловое поле. При этом подсчитывается тепловой поток между двумя параллельными плоскостями, ортогональными выбранному направлению, и берется отношение этого потока к разности средних температур на выбранных плоскостях. По определению, максимум этого отношения, когда переменными являются температуры на плоскостях, и принимается за искомый эффективный коэффициент.

Вообще говоря, численное определение введенного коэффициента будет связано с решением задачи Дирихле в полосе.

Но при некоторых направлениях эта задача упрощается и остается интегрирование по некоторой ячейке.

УДК 517.977.1

Хайлов Е.Н., Домогатская В.Б. (Москва)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ
БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В пространстве E^n рассматривается следующая билинейная система:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \lambda u(t)x(t) + bu(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \text{ п.в.}, \quad T > 0, \quad \lambda \neq 0$$

Для нее множество управляемости в начало координат $X(T)$ выпукло, компактно, а многозначное отображение $X(T)$ монотонно по включению и непрерывно в метрике Хаусдорфа. В случае линейной независимости векторов $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ выведен принцип максимума для экстремальных управлений, соответствующих граничным точкам множества $X(T)$. Показано, что каждое такое управление кусочно-постоянно, принимает значения -1 и $+1$ и имеет конечное число моментов переключения на отрезке $[0, T]$. Далее, для матриц A , имеющих вещественные собственные значения, получены оценки на число m переключений этих управлений. В частности, в случае вырожденной матрицы A доказано неравенство $m \leq n-1$. Затем, для таких матриц A установлено соответствие между векторами единичной сферы и моментами переключений всевозможных экстремальных управлений. Все эти факты позволяют, используя L -проблему моментов Маркова, построить аналитическую параметризацию всего множества управляемости $X(T)$ моментами переключения некоторых допустимых управлений.

С помощью полученных конструкций решение задачи оптимального быстродействия для системы (1) и так называемых регулярных начальных точек: x_0 может быть сведено к решению специальной задачи Коши относительно функций, характеризующих определенным образом время быстродействия и моменты переключения оптимального управления рассматриваемой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. код 93-011-16129.

Хомяков М.А. (Иркутск)

О РАЗЛОЖЕНИИ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ЛИ

Пусть $\lambda_1(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$ - функции, голоморфные в заданной области. Рядом Ли для функции $F(x_1, \dots, x_n)$, голоморфной в этой области называется функциональный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} L^m \cdot F(x_1, \dots, x_n), \quad \text{где} \quad L = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

- оператор Ли и $L^0 \cdot F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$.

Ряды Ли и обобщенные ряды Ли находят широкое применение при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений в частных производных типа С.В.Ковалевской, при канонических преобразованиях. Следует отметить, что в комбинаторном смысле рассмотрение обобщенных операторов Ли ни к чему новому не приводит т.к. они сводятся к обычным операторам Ли. Действительно,

$$L^x = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t; x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x_0, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $x_0 = t$, $\lambda_0(x_0, \dots, x_n) = 1$.

Для каждого $m \geq 1$ рассмотрим разложение

$$L^m = \sum_{|\alpha| \leq m} I_{\alpha}^m \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - векторы с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, суммирование осуществляется по всем наборам α , для которых $|\alpha| \leq m$, а I_{α}^m - некоторые полиномы относительно функций $\lambda_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ и их частных производных, которые называют полиномами Ли. Использование полиномов Ли сводит вычисление итераций оператора Ли к операциям дифференцирования.

В работе исследуются полиномы Ли, устанавливаются основные их свойства. Например, показывается, что для каждого $m \geq 1$ и всех $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, таких, что $|\alpha^1| + |\alpha^2| \leq m$,

$$\sum_{k=|\alpha^1|}^{m-|\alpha^2|} \binom{m}{k} I_{\alpha^1}^k I_{\alpha^2}^{m-k} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \\ \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \alpha_n^1 + \alpha_n^2 \\ \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \end{bmatrix} I_{\alpha^1 + \alpha^2}^m.$$

УДК 639.374

Цветков С. В. (Москва)

СООТНОШЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ
ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Рассматривается пластическое деформирование трансверсально изотропных материалов. Такой вид анизотропии является широко распространенным. По свойствам симметрии структуры трансверсально изотропные материалы делятся на пять классов. Обозначения по Шенфлису групп симметрии для этих пяти классов: C_{∞} , C_{2vh} , D_{∞} , C_{2v} , D_{2h} . Показано, как могут быть получены эти пять типов материалов в результате армирования изотропной матрицы различными видами волокон.

В деформационной теории пластичности зависимость тензора деформаций от тензора напряжений рассматривается в виде тензорной функции. Ортогональные преобразования, относительно которых эта функция инвариантна, образуют группу симметрии пластических свойств материала. Доказывается, что по симметрии пластических свойств трансверсально изотропные материалы разделяются на два класса. Для материалов симметрии структуры D_{2h} , D_{∞} , C_{2v} симметрия пластических свойств описывается группой D_{2h} . Для материалов C_{∞} , C_{2vh} симметрия пластических свойств описывается группой C_{2h} . Соответственно, получены два вида уравнений деформационной теории пластичности. Вывод основан на теории тензорных функций, при этом в качестве дополнительных тензорных аргументов принимались структурные тензоры для групп симметрии пластических свойств материалов.

Показано, что в случае, когда материал находится в упругой области симметрия деформативных свойств всех пяти классов трансверсально изотропных материалов описывается одной группой D_{2h} . Полученные в работе соотношения позволяют рассмотреть особенности пластического деформирования трансверсально изотропных материалов различных типов. Используемый для получения уравнений метод может быть распространен на случаи других типов анизотропии.

УДК 539.3

Чеботарев А.С. (Воронеж)

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В УПРОЧНЯЮЩЕМСЯ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ГРУНТЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Одним из важных направлений механики грунтов является их моделирование, а именно, построение моделей, учитывающих одновременно упругие, вязкие, пластические, дилатансионные и другие свойства. Предлагается модель упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела, учитывающего влияние необратимой сжимаемости и неоднородности. Условие предельного состояния материала определено в виде:

$$\varphi = \alpha \sigma_1 + \sqrt{(s_{ij} - c e_{ij}^p - 2 \dot{e}_{ij}^p)(s_{ij} - c e_{ij}^p - 2 \dot{e}_{ij}^p)} - k = 0$$

Принято, что полная деформация состоит из упругой и пластической. Причем, упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука. Геометрические соотношения Коши и уравнения равновесия представляют полную систему уравнений, описывающих деформированное состояние упруго-вязко-пластического грунта. Данная модель с большей степенью правдоподобия позволяет описать и исследовать представляющие интерес классы реальных явлений в мягких обводненных горных породах.

В рамках второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых докритических деформациях исследуется неустойчивость полупространства в упрочняющемся упруго-вязко-пластическом грунте с непрерывной неоднородностью, находящегося под действием однородного гравитационного поля и горизонтального сжатия вдоль оси Ox .

Принято, что прочностные характеристики уменьшаются экспоненциально с глубиной при постепенном переходе от твердых к жидким свойствам. Исследование устойчивости основного состояния выполнено в квазистатической постановке в случае плоской деформации. Получено характеристическое уравнение для определения функции давления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

УДК 517.9

Чегис И.А. /Москва/

ТЕОРЕМА О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЗАДАЧЕ О ВИХРЕВЫХ ТОКАХ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В работе [1] доказано, что потенциалы простого и двойного слоя $u(x)$ и $v(x)$ с плотностями $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}(S)$ и $\psi(x) \in C^{1,\alpha}(S)$ соответственно связаны с гармоническим потенциалом $U_0(x)$ поля, возбуждающего вихревой ток $\underline{J}(x)$ в области $V \subset R^3$, уравнением

$$\nabla u(x) - \nabla v(x) = k^2 \nabla U_0(x), \quad x \in V, \quad k^2 = i \mu \epsilon \omega \quad /1/$$

/Считаем, что все поля зависят от времени как $e^{-i\omega t}$ и ее не пишем/, а на границе S выполнено условие

$$\text{rot } \underline{J}(x) = \text{Grad } \psi(x) + \nabla u(x), \quad x \in S \quad /2/$$

В [1] из /1/ была получена система интегральных уравнений В данной работе доказано, что множество решений этой системы может быть запараметризовано функциями $g(x) \in C^{0,\alpha}(S)$, граничными значениями внутренней задачи Неймана

$$g(x) = \frac{\partial u_g(x)}{\partial n}, \quad x \in S \quad /3/$$

доказано, что плотности потенциалов в /1/ определяются функцией $g(x)$ однозначно /в смысле значений потенциалов/

$$\varphi(x) = \varphi_g(x), \quad \psi(x) = \psi_g(x) - \psi_0(x) \quad /4/$$

где φ_g плотность потенциала простого слоя в /3/, ψ_g, ψ_0 плотности потенциалов двойного слоя v_g и v_0 соответственно, таких что $v_g(x) = u_g(x)$, $v_0(x) = k^2 U_0(x)$, $x \in V$

Установлена связь между функцией $g(x)$ в /3/ и $U_0(x)$ в /1/.

Доказано, что

$$g(x) = \text{rot } \underline{J}, n = \lambda \varphi_0(x), \quad [\text{rot } \underline{J}, n] = (\lambda - 1) [\text{Grad } \psi_0, n], \quad \lambda = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}$$

где φ_0, ψ_0 плотности потенциала простого и двойного слоя для гармонической в области \bar{V} функции $v_0(x) = k^2 U_0(x)$, μ_1, μ_2 магнитные проницаемости среды V и $R^3 \setminus V$.

Численная процедура нахождения φ_0, ψ_0 по U_0 разработана в [2].

1. И. Чегис, Ж. вычисл. матем. физ. Т. 32, №7, 1992, С. 1046-1056.

2. И. Чегис, Ж. вычисл. и матем. физ. Т. 29, №12, 1989, С. 1904-1907.

УДК 539.3

Чиканова Н.Н., Ковалев А.В. (Воронеж)
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИИ В ПЛАСТИНЕ С
ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Основой успешной работы конструкций, испытывающих действие сжимающих нагрузок, является разработка эффективных методов их расчета на прочность. Особый интерес представляют составные пластинчатые элементы.

Как известно, для некруговых геометрических форм среди известных аналитических методов расчета наиболее эффективным является метод, основанный на применении аппарата теории функций комплексного переменного.

Решение задачи о концентрации напряжений в бесконечной упругой пластине с эллиптическим включением представляется как суперпозиция решений в двух областях: односвязной для бесконечной пластины с эллиптическим отверстием и двусвязной для центрально впрессованного в это отверстие эллиптического включения. В связи с этим были построены специальные функции комплексного переменного, конформно отображающие указанные области на внешность единичного круга и на кольцо соответственно. Сопряжение решений в двух областях осуществлялось при переходе на действительную плоскость с подбором характерного размера. Вычисление контурных интегралов выполнялось аналитически с использованием свойств интегралов Коши и теории вычетов. Дальнейшее решение получено по формулам Г.Б. Колосова-Н.И. Мусхелишвили.

Численные результаты представлены для конкретного материала сталь 3. Построены графики зависимости величины напряжений и перемещений от геометрии конструкции при изменяющемся параметре сжатия вдоль контура соединения деталей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ

УДК 536.7

Шаталов Ю.С., Лукашук С.Ю., Смыслов А.М., Маслова Л.И. (Уфа)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ДИФФУЗИИ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ

Процесс ионной имплантации моделируется уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_{\text{эфф}} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad 0 < x < L < \infty, \quad 0 < t < \bar{t} < \infty, \quad (C|_{t=0} = 0),$$

$$D_{\text{эфф}}(\tau) = \begin{cases} D_1, & 0 < x < l, \\ D_2, & l < x < L, \end{cases} \quad D_1 \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=l-0} = D_2 \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=l+0}, \quad C \Big|_{x=l-0} = C \Big|_{x=l+0}$$

Подобно тому, как это делалось при исследовании тепловых свойств материалов, получили следующие формулы для $D_{\text{эфф}}$:

$$D_1 = \frac{pL^2}{4 \operatorname{Arch}^2 \theta(p)}, \quad \theta(p) = \frac{C^*(0,p) + C^*(l,p)}{2C^*(l/2,p)} \quad (p > 0, L = \infty),$$

$$D_2 = D_1 \left[C^*(l,p) \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{D_1}} l - C^*(0,p) \right]^2, \quad C^*(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} C(x,t) dt.$$

$$D_1 = \frac{\beta_2 \alpha_{12} - \beta_1 \alpha_{22}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}, \quad D_2 = \frac{\beta_1 \alpha_{12} - \beta_2 \alpha_{11}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}, \quad \alpha_{1j} = \int_0^{\bar{t}} \alpha_1(t) \alpha_j(t) dt$$

$$\alpha_1(t) = \rho'(L) \int_0^t C(l,\tau) d\tau - \rho'(0) \int_0^t C(0,\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^L \rho''(x) C(x,\tau) dx d\tau,$$

$$\alpha_2(t) = \rho'(L) \int_0^t C(L,\tau) d\tau - \rho'(l) \int_0^t C(l,\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^L \rho''(x) C(x,\tau) dx d\tau,$$

$$\beta_1 = \int_0^{\bar{t}} \alpha_1(t) S(t) dt, \quad S(t) = \int_0^L \rho(x) c(x,t) dx, \quad \rho(0) = \rho(L) = 0,$$

$\rho(x)$ - весовая, достаточно гладкая, функция. Анализируются данные расчетов при имплантации ионов азота в титан. Изучаются и более совершенные модели.

УДК 621.565.931

Шацкий В.П. (Воронеж)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОДОИСПАРИТЕЛЬНЫХ
КОНДИЦИОНЕРОВ

Предлагается метод выбора оптимальных геометрических параметров воздухоохлаждавателей водоиспарительного принципа действия. Оптимальной понимается воздухоохлаждавательная установка, позволяющая поддерживать в охлаждаемом объеме регламентируемые параметры, характеризующаяся при этом либо минимальной материалоемкостью, либо минимальным потреблением энергии. Основными управляемыми геометрическими параметрами воздухоохлаждавателя являются параметры испарительной насадки, которые оказывают влияние на аэродинамическое сопротивление потокам воздуха, от которого зависит его расход, являющийся одним из главных факторов, влияющих на эффективность работы охлаждающей установки.

Для определения расхода при фиксированных силовых вентиляторных блоках с известными расходно-напорными характеристиками были построены нелинейные функциональные зависимости, аппроксимирующие справочные данные, связывающие потери давления в основных конструктивных элементах воздуховодного тракта охладителя со скоростью потоков обрабатываемого воздуха. С помощью этих зависимостей удалось определить расход воздуха как функцию от геометрических параметров насадки. Оптимальный выбор этих параметров производится только последовательным решением задач определения расхода воздуха и динамики изменения температуры и влажности в охладителе.

Последняя задача моделируется системами квазилинейных дифференциальных уравнений параболического типа, описывающих процессы тепломассопереноса в каналах испарительной насадки.

Строгая дифференцируемость отображений \mathcal{X} -пространств

Пусть $f: X \rightarrow X$, где X \mathcal{X} -пространство.

Для того, чтобы отображение $f: X \rightarrow X$ было строго (u, u) -дифференцируемо в т. $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы f было (u, u) -дифференцируемо в точке $x = a$ и отображение $x \rightarrow f(x) - f(a) - g(x-a)$ удовлетворяло следующему условию

$$|f(x) - f(a) - g(x-a)| \leq h(\epsilon_n) |x-a|, x \in M_{a, \epsilon_n u}$$

$$\lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \frac{h(\epsilon_n)}{\epsilon_n} = const \neq 0$$

где $h(\epsilon_n)$ - скалярная функция.

Подробнее см. [1] - [2].

Теорема 1. Если отображение $f: X \rightarrow X$ (u, u) -дифференцируемо в любой точке $x \in M_{a, \epsilon_n u}$ отображение $f'(x)$ удовлетворяет условию $|f'(x) - f'(a)| < \epsilon I$ при $|x-a| \leq \epsilon u$ где I - единица в \mathcal{X} ; тогда отображение f строго (u, u) -дифференцируемо в точке $x = a$.

Литература

1. Соболев В.И., Щербин В.М. О дифференцируемости отображений \mathcal{X} -пространств, ДАН СССР, 1975, т.225, № 5, 1020-1022.
2. Щербин В.М. Строгая дифференцируемость отображений \mathcal{X} -пространств и некоторые теоремы о локальной обратимости. УМН, 30, вып.4 (184), 1975, 269-270.

УДК 624.1.

Эбзов Я.А., Али-заде А.Н., Джафаров М.Д., Нагдиев А.О.
(Баку)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ,
КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ

Значительная часть строительных конструкций контактирует с грунтом. Такого типа граничные условия вносят дополнительную трудность в решение динамических задач расчета конструкций, особенно с учетом геометрической нелинейности, так как граничные условия могут зависеть от искомой величины и иметь нелинейный характер. Использование композиционных материалов в строительных конструкциях, приводит к необходимости учета их наследственных свойств, выраженных интегральными соотношениями. Таким образом, как следует из вышеизложенного, нелинейный динамический расчет вязкоупругих конструкций, контактирующих с грунтом, имеет практический интерес и является достаточно сложной математической задачей.

Для решения этой задачи в данной работе, предлагается динамический вариационный принцип, функционал которого имеет вид:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left\{ \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} u_{,j}^k u_{,k,l} - \frac{1}{2} \sigma^{ij} \epsilon_{ij}^y - \sigma^{ij} \epsilon_{ij}^B - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial t} \frac{\partial \dot{u}^l}{\partial t} \right\} dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_\sigma} \bar{T}^k \dot{u}_k ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_u} \bar{T}^k (\dot{u}_k - \dot{u}_k) ds dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_r} \frac{1}{2} K^{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j ds dt$$

где наряду с общепринятыми обозначениями имеем: точка означает дифференцирование по времени, ϵ_{ij}^B упругая составляющая общей деформации, ϵ_{ij}^y вязкая составляющая, S_σ часть поверхности на которой заданы поверхностные усилия \bar{T}^k , S_u часть поверхности, где задано перемещение \bar{u}_k , S_r часть поверхности по которой происходит контакт с грунтом. При этом предполагается, что грунт можно моделировать обобщенной Винклеровской моделью. Считая независимыми величинами \dot{u}_i , σ^{ij} , можно показать, что уравнения Эйлера составляют систему определяющих уравнений поставленной задачи. Особенность предложенного принципа в том, что определение приближенного стационарного значения J сводится к решению задачи Коши.

Юрьев А.Г. (Белгород)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ КОЛОНН,
СВЯЗАННЫХ ЖЕСТКИМ ДИСКОМ

Рассматривается изгибно-крутильная форма потери устойчивости пространственной системы однородных колонн, вершины которых шарнирно соединены жестким плоским диском, при действии вертикальной силы.

Первоначальное напряженное состояние определяется по формуле внецентренного сжатия применительно к брусу составного поперечного сечения, включающего различно ориентированные сечения колонн.

Возможное отклонение от положения равновесия системы колонн связывается с поступательным перемещением жесткого диска вдоль главных центральных осей составного сечения и вращательным перемещением вокруг вертикальной оси, являющейся геометрическим местом центров изгиба составного сечения.

Обращается внимание на то, что в случае пространственной системы колонн кручение диска, как и его поступательное перемещение вызывает только изгиб колонн.

В качестве добавок в отклоненном состоянии выступают проекции на оси поперечного сечения колонны нормальных напряжений, возникающих в ней в момент изгиба от перемещений жесткого диска. Для каждой колонны записываются дифференциальные уравнения изгиба в главных плоскостях. Их решения содержат в постоянных интегрирования три перемещения диска.

Условие существования отклоненного состояния является наличием решения системы трех однородных уравнений, записанных из условий равновесия диска. Входящие в них поперечные силы, передаваемые вершинами колонн на диск, содержат перемещения жесткого диска. Приравняв детерминант системы уравнений нулю, получим уравнение для определения критического значения силы.

При симметрии системы колонн происходит разделение неизвестных в системе уравнений с вероятностью появления чисто изгибной формы потери устойчивости.

На конкретном примере дан анализ зависимости критической силы от расположения, жесткостей и условий закрепления колонн.

УДК 534.1:538.56

Янин А.Л. (Воронеж)

ПОСТРОЕНИЕ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВСЕЙ ОСИ
РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача отыскания ограниченных на всей оси
решений для систем с малым параметром

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad t \in (-\infty; \infty), \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

где x, X - точки n -мерного евклидова пространства.
Предполагается, что правая часть $X(t, x)$ этой системы допускает
усреднение. Пусть $X(t, x)$ - тригонометрический полином по t .

Вместе с системой (1) рассматривается усредненная система

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{X}(y), \quad (2)$$

и исследуется случай, когда исходная система имеет "статическое"
решение, соответствующее точке равновесия $y = y_0, \bar{X}(y_0) = 0$.
Для исследования устойчивости этого решения были составлены
уравнения в вариациях.

Предполагается, что правая часть исходной системы удовлетво-
ряет следующим условиям:

1) функция $X(t, x)$ и ее частные производные по x до $(n-1)$ -го
порядка ограничены и равномерно непрерывны в области $t \in (-\infty, \infty)$
 $x \in D_0$ (D_0 - некоторая окрестность точки y_0).

2) пусть $\bar{X}_x(y_0) = A$, где A - некоторая постоянная матрица,
собственные числа которой не лежат на мнимой оси.

Доказано (с использованием методики [1]), что при достаточ-
но малых $\varepsilon > 0$ решения $x(t, \varepsilon)$ и $y(t, \varepsilon)$ задач (1) и (2) близки
на всей оси.

Литература

1. Стрыгин В.В. Об одной модификации метода усреднения при
отыскании высших приближений // Прикл. математика и механика. -
1984 - 48, №6, - С. 1042-1045.

УДК 539.3

Бабич И.Ю. (Киев)

ВНУТРЕННЯЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ СЛОИСТЫХ
ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЖАТИИ

Исчерпание несущей способности композитного материала (как конструкции) в микрообъеме, если оно не имеет локального характера в макрообъеме, приводит к разрушению и может быть вызвано различными статическими и динамическими процессами. Ниже будем предполагать, что исчерпание несущей способности в макрообъеме композитного материала происходит вследствие потери устойчивости в структуре материала (структурная, внутренняя неустойчивость) [1-2]. О применимости такого механизма разрушения при сжатии вдоль армирующих элементов однонаправленных слоистых материалов свидетельствуют экспериментальные данные [3].

Ниже рассмотрены вопросы о пределе прочности при сжатии слоистых материалов с ортотропными компонентами. Внутренняя неустойчивость изучается в рамках строгой модели кусочно-однородной среды с применением трехмерной линеаризированной теории упругой устойчивости. Изучены две моды внутренней неустойчивости (внутреннего разрушения) в случае ортотропных слоев наполнителя и связующего. Приведены кривые зависимости критической деформации и предела прочности от концентрации наполнителя. При достаточно малых концентрациях наполнителя внутреннее разрушение может происходить как в виде моды растяжения, так и по сдвиговой моде. Для конкретных композиций проведен количественный анализ зависимостей предела прочности от объемной доли волокон, полученных на основе трехмерной теории устойчивости и приближенных подходов.

1. Гузь А.Н. О построении теории прочности однонаправленных армированных материалов при сжатии. - Пробл. прочности, 1971, 3, № 3, с. 37-40.
2. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. - Киев: Наук.думка, 1990. - 632 с.
3. Розен Б. Механика упрочнения композиций. - В кн.: Волокнистые композиционные материалы. М.: мир, 1967, с.33-39.

УДК 539.3

Глаголева М.О., Толоконников Л.А. (Тула)

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ
ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Обсуждаются характеристики конечных деформаций тел вращения - удлинения и повороты главных материальных волокон. В частности, установлены соотношения между силами-моментами и перемещениями - углами поворотов торoidalных амортизаторов. Оказывается, силы и моменты пропорциональны комбинациям синусов углов поворотов и двойных углов поворотов, если при формировании сил и моментов учитывать изменения конфигурации поперечного сечения. Демонстрируется существование критических моментов или углов поворотов. Достижение их обеспечивает опрокидывание кольцевого линейно упругого амортизатора или дальнейший рост поворотов даже при уменьшении внешних нагрузок.

УДК 539.3

Пеньков В.Б. (Тула)

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Метод граничных представлений является развитием идей Н.И.Мусхелишвили в приложении к односвязным упругим, вязко-упругим, вязко-пластическим средам.

Построены представления функций Г.В.Колосова - Н.И.Мусхелишвили, позволяющие любую механическую величину на границе тела представить в форме комбинации краевых значений пары кусочно - аналитических функций. Любая пара линейных комбинаций основных механических величин на границе имеет форму матричной задачи Римана. Определитель матрицы - коэффициента имеет на границе постоянный модуль, равный единице. В случае смешанных граничных условий краевая задача Римана с разрывным матричным коэффициентом конструируется из типовых блоков - матриц с элементами из класса кусочно - рациональных. По построению решения краевой задачи эпюры механических величин на границе тела могут быть рассчитаны непосредственно по формулам граничного представления без восстановления комплексных потенциалов поля.

Благодаря универсальности функций одной и той же задаче Римана можно поставить в соответствие множество систем сингулярных интегральных уравнений: разнообразие зависит от того, относительно которой из пар механических соотношений на контуре сформулирована базовая задача Римана, имеющая непрерывный коэффициент с рациональными элементами и потому легко факторизуемая методом Н.П.Векуа. Общее решение базовой задачи и формулы Сохоцкого - Плешеля обуславливают переход к сингулярным уравнениям. Их полный индекс отличается от индекса исходной краевой задачи на величину индекса базовой задачи.

Выделены классы задач механики с "прозрачным" смыслом, решение которых можно записать потенциально в квадратурах. Метод обобщается на классы задач "о разрыве" поля. Он позволяет также проводить формализацию некоторых нелинейных проблем. Изложение метода сопровождается указанием на некоторые новые способы факторизации кусочно - непрерывных матричных коэффициентов задачи Римана.

УДК 539.374

Чуков А.Н. (Тула)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ СТЕРЖНЯ
С НАЧАЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ СТРУКТУРЫ

Анализируются последствия динамического нагружения стержня из материала, имеющего первоначальные дефекты структуры. Площе поперечного сечения стержня S . В сечении с координатой X_0 начальный момент времени находится N_0 пороговых дефектов площадью не менее S_0 каждый. К стержню прикладывается нестационарная растягивающая нагрузка $P(t)$. Изменение количества дефектов и площади дефекта во времени описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = k_1(\sigma - \sigma_1) H[\sigma - \sigma_1]; \\ \frac{dS}{dt} = k_2(\sigma - \sigma_2) H[\sigma - \sigma_2], \end{cases} \quad (1)$$

где σ_1, σ_2 - некоторые предельные значения напряжений, при достижении которых начинается рост количества дефектов и площади дефекта соответственно;

k_1, k_2 - экспериментально определяемые константы материала;
 $H[z]$ - единичная функция Хевисайда.

Изменение суммарной площади дефектов в фиксированном сечении стержня будет описываться уравнением:

$$dS_g(x,t) = S(x,t)dN(x,t) + N(x,t)dS(x,t). \quad (2)$$

После подстановки (1) в (2) получено интегродифференциальное уравнение типа Вольтерра второго рода относительно $S_g(x,t)$, решение которого представлено для некоторых частных случаев.

С

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомееенко Н.А.	4	Домогатская В.В.	102
Акимов В.А.	5	Дудукаленко Ю.В.	32
Александров С.Е.	6,7	Дымков И.А.	9
Алероев Т.С.	8	Ерхов М.И.	33
Али-заде А.Н.	III	Жучкова В.В.	34
Алфутов Н.А.	9	Завгородний М.Г.	35
Артемов М.А.	10	Зарубин А.Н.	36
Астафьев В.И.	II	Зарубин В.С.	37
Бабич И.Ю.	II4	Засорин Ю.В.	45
Бабушкин А.В.	89	Зиновьев Н.М.	23
Баландин Д.В.	12	Знаменский В.А.	38
Баскаков В.А.	13	Иванищева О.И.	39
Батаронов И.Л.	14	Иванов Л.А.	46
Бекларян Л.А.	15	Ивлев Д.Д.	10
Бободжанов А.	16	Искандаров С.	40
Бобров В.Н.	44	Калинин А.В.	41, 42
Борисов Н.И.	18, 19	Капбасов Ш.К.	43
Боровских А.В.	17	Качалкин Ю.В.	44
Булатов С.Н.	20	Киприянов И.А.	45, 46, 47
Вельмисов П.А.	21	Киприянова Н.И.	48
Веневитина С.С.	22	Кирсанов М.Н.	49
Вервейко Н.Д.	23	Кленина Л.И.	50
Виноградова Г.А.	24	Клюшников В.Д.	51
Воронов О.В.	18	Ковалев А.В.	107
Вульма, С.А.	25	Кожеватова В.М.	52
Гавришин С.С.	26	Козлов В.А.	53
Гарбуз Е.В.	27	Колмыков В.А.	54
Глаголева М.О.	II5	Коломоец А.А.	55
Гольдштейн Р.В.	6	Кончакова Н.А.	13
Гончарова Н.А.	27	Коржов Е.Н.	56
Глушко А.В.	28	Коробкин В.Д.	57
Глушко Е.Г.	28	Корольков В.И.	58
Гурьянова И.Э.	29	Кривошеин И.В.	77
Дежин В.В.	14	Крутов А.В.	59
Дель Г.Д.	30	Кудайбергенов Н.Б.	60
Джафаров М.Д.	III	Кузенков О.А.	61
Дободейч И.А.	31	Кузнецов О.Р.	62
		Кузнецова Е.В.	63

Кузнецова Н.А.	64	Рощупкин А.М.	14,65
Кухаренко С.П.	72	Ряжских В.И.	83
Кущемако А.Н.	55	Сарбаев Б.С.	84
Лазарев К.П.	17	Сафонов В.Ф.	85
Летунов В.Н.	19	Свиридов Ю.Т.	86
Литманович О.Ю.	47	Семенов П.К.	76,87
Ломакин В.В.	65	Семькина Т.Д.	25
Лукашук С.Ю.	108	Сенашов С.И.	88
Майорова С.П.	66	Смыслов А.М.	108
Макаров А.В.	43	Соколкин Ю.В.	89
Маслова Л.И.	108	Спорыхин А.Н.	32,90,91
Могилевич Л.И.	68	Сташуленок С.П.	92
Мокшин Г.Н.	67	Степанов А.В.	93
Морозов Н.Ф.	41	Страшнова Н.А.	62
Морозов С.Ф.	69	Сумин А.И.	90,94
Мурлина Г.А.	70	Сумин В.А.	91
Мяснянкин Ю.М.	4	Сысоев А.О.	35
Нагдиев А.О.	111	Толоконников Л.А.	115
Нарбут М.А.	69	Тамуж В.П.	95
Нечаев В.Н.	14	Туйчиев О.Д.	16,85
Ноздзунов В.В.	71	Тюрин В.М.	96
Носов А.К.	77	Угодчиков Н.А.	41,42
Огарков Б.И.	72	Филатов Г.Ф.	97
Огарков В.Б.	72	Филатов О.П.	98
Олейников А.А.	73	Филимонов А.М.	99
Останина Т.В.	74	Фомин В.И.	100
Павлов Д.А.	75	Хайлов Е.Н.	102
Пеньков В.Б.	116	Халаев М.М.	101
Петров В.В.	76	Хомяков М.А.	103
Петрова В.Е.	95	Цветков С.В.	104
Петрунина Е.А.	77	Чеботарев А.С.	105
Перекрестов В.А.	76,87	Чегис И.А.	106
Покорная И.Ю.	78	Чекалкин А.А.	89
Покорный Ю.В.	79	Черепанов Ю.Г.	9
Поленов В.С.	73	Чиканова Л.Н.	107
Полякова Л.Г.	80	Чуков А.Н.	117
Попов В.С.	68	Шаталов Ю.С.	108
Прядиев В.Л.	81	Шацкий В.П.	109
Ревуженко А.Ф.	82	Щербин В.М.	110
Россихин Ю.А.	13	Эзбов Я.А.	111

Юрьев А.Г.	112
Кферева И.В.	92
Янин А.Л.	113