ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ ШКОЛЫ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

г. Воронеж, 25 января — 3 февраля 1993 г.

ВОРОНЕЖ 1993

УДК 517.53; 517.98; 517.54; 517.97

Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании: Тезисы докладов школы. — Воронеж: ВГУ, 1993. — 155 с.

В сборнике представлены тезисы докладов, сделанных на Воронежской математической школе, проводимой совместно с Математическим институтом имени В. А. Стеклова и Московским государственным университетом. Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем теории и функционального анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих приложений в математическом моделировании, уравнений математической физики, математической теории оптимального управления.

Оргкомитет благодарит фонд «Математика» и НПК «Гермес и К°» за финансовую поддержку.

Абдыкалыков А. Д. (Алма-Ата)

ОБ ОЦЕНКЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Известные результаты об оценках норм тригонометрических полиномов распространены на случай тригонометрических интегралов

$$\tau_n(f,x)=\int_0^\infty K_n(t)\,f(x+t)\,dt,$$

где

$$K_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^n \lambda_n(\xi)\cos\xi t\,d\xi,$$

$\lambda_n(\xi)$ -ограниченная функция, обладающая определённой гладкостью,

$$\lambda_n(0)=1,\quad \lambda_n(\xi)=0,\ \ \xi>n.$$

Теорема. Если

$$\int_0^\infty \left|\frac{d\lambda_n(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \le C \quad (C>0,\ C=const)$$

равномерно по n , то

$$\int_0^\infty |K_n(t)|\,dt \ge C\left|\int_0^n \left(\frac{d\lambda_n(t)}{dt}\right)^2 \ln(t+1)\,dt + \int_0^n\int_0^n \frac{d\lambda_n(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\lambda_n(\eta)}{d\eta}\cdot\ln\frac{\xi+\eta+1}{|\xi-\eta|}\,d\xi\,d\eta\right|$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bugrov Ja. S. On linear summation methods of Fourier series // Analysis Math. 1979. T. 5. F. 2. P. 119-133.

Агаханов С.А., Загиров Н.Ш. (Махачкала)

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ПРИ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Известно (/1/), что для функции $\sigma(x)=\mathrm{sign}\,x$ частные суммы ряда Фурье $S_n(\sigma,x)$ дают явление Гиббса. Здесь мы показываем, что последовательность тригонометрических полиномов $T_n(\sigma,x)$ (определение $T_n(\sigma,x)$ см. ниже) тоже дают явление Гиббса.

Пусть $p=1,2,\dots$; $N=2p+1$; $h=\frac{\pi}{N}$; $t_k=2kh$, $k=0,\pm1,\dots,\pm p$. Каждой функции $f(x)$, заданной на $(-\pi,\pi)$ сопоставим вектор $\bar f=(f_{-p},\dots,f_p)$, $f_k=f(t_k)$. Положим $(f,g)=\sum_{k=-p}^{p} f_k g_k$, $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$, $u_0(x)=\frac{1}{\sqrt N}$, $u_i(x)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos ix$, $v_i(x)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sin ix$ ($1\le i\le p$). Имеет место следующая лемма (см. /2/, /3/).

ЛЕММА 1. $\|u_0\|^2=N$, $\|u_i\|^2=\|v_i\|^2=\frac{N}{2}$, $(u_i,u_j)=(v_i,v_j)=(u_i,v_j)=0$, $1\le i,j\le p$

Для любой $f(x)$ будет $\bar f=\sum_{k=0}^{p}(a_k(f)\bar u_k+b_k(f)\bar v_k)$, где $a_k(f)=(\bar f,\bar u_k)$, $b_k(f)=(\bar f,\bar v_k)$, $e_n^2(f)\overset{def}{=}\inf_{c_k,d_k}\|\bar f-\sum_{k=0}^{n}(c_k\bar u_k+d_k\bar v_k)\|^2=\sum_{k=n+1}^{p}(a_k^2(f)+b_k^2(f))$, $n<p$ (при $n=p$, $e_n(f)=0$). Положим $T_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k(f)u_k(x)+b_k(f)v_k(x))$. В дальнейшем речь пойдёт о функции $\sigma(x)$.

ЛЕММА 2. Для $p=1,2,\dots$; $1\le n\le p$ будет

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{p+4}{n+4}-1}\le e_n(\sigma)\le\sqrt{6}\sqrt{\frac{p}{n}-1}$$

СЛЕДСТВИЕ. Соотношения $e_n(\sigma)\to 0$ и $\frac{n}{p}\to 1$ равносильны.

ЛЕММА 3. $a_k(\sigma)=0$, $0\le k\le p$, $b_k(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{N}}\frac{\cos kh-(-1)^k}{\sin kh}$, $1\le k\le p$.

СЛЕДСТВИЕ. $T_n(\sigma,x)=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kh-(-1)^k}{\sin kh}\sin kx$

Известно (/1/), что $S_n(\sigma,x)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin kx$. Если положить $h_k=\frac{2}{N}\frac{\cos kh-(-1)^k}{\sin kh}-2\frac{1-(-1)^k}{\pi k}$, то $\rho(x,N,n)\overset{def}{=}T_n(\sigma,x)-S_n(\sigma,x)=\sum_{k=1}^{n}h_k\sin kx$ и имеет место

ЛЕММА 4. $|h_k|\le\frac{2}{N}$, $1\le k\le n$; $|\rho(x,N,n)|\le 2\frac{n}{N}$, x – любое.

Из второй оценки в лемме 4 (так как суммы $S_n(\sigma,x)$ дают явление Гиббса в точке $x=0$) вытекает результат работы /4/: При $\frac{n}{N}=o(1)$, $n\to\infty$, последовательность $T_n(\sigma,x)$ даёт явление Гиббса.

ЛЕММА 5. При $\frac{n}{N}\to\frac{1}{2}$ будет $T_n(\sigma,t_{2\nu}-h)\to\lambda_\nu\overset{def}{=}\frac{1}{\pi}\left(4\sum_{k=0}^{2\nu}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{2}{4\nu+1}\right)$. Отсюда $\lambda_1>1$.

Из леммы 5 следует наличие явления Гиббса для $T_n(\sigma,x)$ при $\frac{n}{N}\to\frac{1}{2}$.

ЛЕММА 6. При каждом фиксированном $\lambda>0$ равномерно относительно $0<y<\frac{1}{2}$ будет $T_n\left(\sigma,\frac{\lambda y\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{y\pi}\mathrm{ctg}\,t\,\sin\lambda t\,dt+\bar{o}(1)$

Из леммы 6 следует наличие у $T_n(\sigma,x)$ явления Гиббса и при $\frac{n}{N}\to y\in(0,\frac{1}{2})$.

/1/. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3, М. (1970)

/2/. Волков Е.А., Численные методы, "Наука" (1987)

/3/. Агаханов Сейфи А., Поведение полиномов построенных методом наименьших квадратов, Махачкала (1991), 3.

Ахоркин В.И. /Воронеж/

К СУЩЕСТВОВАНИЮ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНУСНОМ ОТРЕЗКЕ

Пусть X, Y - вещественные банаховы пространства с конусами K_x и K_y, соответственно. Если $y_1 \in K_y$, а $y_2 \in -K_y$ или наоборот, то будем говорить, что элементы y_1 и y_2 противоположного включения. Положим $E_A^-(\bar{x}) = \{x \in X \mid Ax \le A\bar{x}\}$, аналогично $E_A^+(\bar{x}) = \{x \in X \mid Ax \geq A\bar{x}\}$.

Определение. Оператор $A: X \to Y$ назовем S-непрерывным снизу в точке $\bar{x}$, если для любого $E \subset E_A^-(\bar{x})$ такого, что $\bar{x} = \sup E$ или $\bar{x} = \inf E$ следует, что $A\bar{x} = \sup AE$. Соответственно, оператор A S-непрерывен в точке $\bar{x}$ сверху, если для любого $E \subset E_A^+(\bar{x})$ такого, что $\bar{x} = \sup E$ или $\bar{x} = \inf E$ следует, что $A\bar{x} = \inf AE$. A S-непрерывен в точке $\bar{x}$, если он одновременно S-непрерывен снизу и сверху в этой точке.

Теорема I. Пусть выполняются условия:

I/ оператор $A: X \to Y$ S-непрерывен на $\langle x_0, y_0 \rangle$;

2/ Ax_0, Ay_0 противоположного включения;

3/ конус K_x сильно миниэдрален;

4/ для любых $x_1, x_2 \in \langle x_0, y_0 \rangle$, таких, что $x_1 < x_2$ и Ax_1 и Ax_2 противоположного включения, существует $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ такой, что $Ax \in K_y \cup (-K_y)$.

Тогда уравнение $Ax = 0$ имеет решение в $\langle x_0, y_0 \rangle$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

I/ оператор A непрерывен на $\langle x_0, y_0 \rangle$;

2/ элементы Ax_0 и Ay_0 противоположного включения;

3/ существует путь γ / $\gamma: [\alpha, \beta] \to X$ /, соединяющий x_0 и y_0, с носителем в $\langle x_0, y_0 \rangle$ такой, что

$$A(\gamma(t)) \in K_y \cup (-K_y) \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда уравнение $Ax = 0$ имеет решение в $\langle x_0, y_0 \rangle$.

Теорема 3. Пусть

I/ оператор A непрерывен на $\langle x_0, y_0 \rangle$;

2/ Ax_0 и Ay_0 противоположного включения;

3/ для некоторого α: $0 < \alpha < 1$ и любых $x', x'' \in \langle x_0, y_0 \rangle$, $x' < x''$ таких, что Ax' и Ax'' противоположного включения, следует, что существует $\bar{x} \in \langle x_0, y_0 \rangle$, удовлетворяющий условиям: $A\bar{x} \in K_y \cup (-K_y)$ и $\|x' - \bar{x}\|, \|\bar{x} - x''\| \le \alpha \|x' - x''\|$;

4/ конус K_x правилен. Тогда найдется $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ такой, что $Ax_* = 0$.

Азизов Т.Я., Сухочева Л.И. (Воронеж)

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Пусть $\mathcal{H}$ - бесконечномерное гильбертово пространство, в котором действуют ограниченные самосопряженные операторы A, B, C.

Оператор-функцию L :

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C \qquad (I)$$

называют самосопряженным операторным пучком.

Основной обьект исследования - операторные пучки, коэффициенты которых удовлетворяют дополнительным требованиям: $A \in \gamma_\infty$, $B = B_1 + B_2$, где $|B_1| \gg 0$, $B_2 \in \gamma_\infty$, $0 \in \rho(B)$.

Доказано, что пучку L (I) можно поставить в соответствие самосопряженный в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ оператор, "отражающий спектральные свойства L" и дана точная оценка для $\varkappa$.

Установлено, что если оператор B в пучке (I) не представим в виде $B = B_1 + B_2$, где $|B_1| \gg 0$, а $B_2 \in \gamma_\infty$, то существуют такие A и C, что пучку (I) нельзя поставить в соответствие самосопряженный оператор в $\Pi_\varkappa$, отражающий спектральные свойства этого пучка.

Невещественный спектр пучка L (I) состоит из конечного числа нормальных собственных значений, а конечные точки сгущения спектра такого пучка совпадают с точками сгущения спектра ограниченного оператора $-B^{-1}C$.

Получены критерии дважды полноты жордановых цепочек пучка L в пространстве $\mathcal{H}$ и необходимое и достаточное условие существования в $\mathcal{H}$ двух базисов Рисса составленных из "так называемых" (c,d)-отрицательных, (c,d)-нейтральных, (c,d)-положительных корневых векторов L .

С помощью вариационных формул исследован вопрос о расположении на плоскости спектра семейств пучков

$$L_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda(I - \varepsilon Q) + C, \text{ где}$$

$$A > 0,\ C \geq 0,\ Q = Q^*,\ A, C, Q \in \gamma_\infty,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Айгубов С.З. (Махачкала)

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для уравнения

$$L_0 u(t) \equiv D_t^2 u(t) - \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=0}^{m} A_{kj}(t) S_{h_{kj}(t)} D_t^k u(t) = f(t), \quad t > t_0, \qquad (1)$$

где $h_{00}(t) \equiv 0$, $h_{kj}(t) \geq 0$, $A_{kj}(t) \in \mathcal{L}_0(X, Y)$ - множество ограниченных операторов из X в Y, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,1}$,

$$\lim_{t\to\infty} A_{kj}(t) = A_{kj}, \quad \lim_{t\to\infty} h_{kj}(t) = h_{kj},$$

$A_{kj} \in \mathcal{L}_\infty(X, Y)$ - множество вполне непрерывных операторов из X в Y, обобщается теорема I [1]. Обозначения и определения см. в [1].

Теорема. Каждое решение уравнения (I) ограничено и устойчиво при выполнении следующих условий:

а) $A_{kj} \in \mathcal{L}_0(Y, Y) \cap \mathcal{L}_\infty(X, Y)$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,1}$,

$\|A_{kj}(t) - A_{kj}\|_Y \cdot |t - h_{kj}(t)| \leq C_0(1+|t|)^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, $t > t_0 > -\infty$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,1}$;

б) резольвенты $R_p(\lambda)$, $R_0(\lambda, t)$ регулярны в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$, $\|\lambda^k R_p(\lambda)\|_X = O(1)$, $\|\lambda^k R_0(\lambda,t)\|_X = O(1)$, $k=\overline{0,1}$

$\|\lambda^2 R_p(\lambda)\|_Y = O(1)$, $\|\lambda^2 R_0(\lambda,t)\|_Y = O(1)$, $|\lambda| \to \infty$, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, $t > t_0$,

$$\sup_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left\| \frac{d}{d\lambda}(\lambda R_p(\lambda,t)) \right\|_X < \infty, \quad \sup_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left\| \frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 R_p(\lambda)) \right\|_Y < \infty,$$

$$\sup_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left\| \frac{d}{d\lambda}(\lambda R_0(\lambda,t)) \right\|_X < \infty, \quad \sup_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left\| \frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 R_0(\lambda,t)) \right\|_Y < \infty;$$

в) $(1+|t|^s)\|f(t)\|_Y \in L_2(t_0, \infty)$, $s > 1/2$;

г) $$\sup_{t>t_0} \int_{t+h_{kj}}^{\varphi_{kj}^{-1}(t)} \tau^{2s} \chi_{A_{kj}}(\tau^{-(\sigma+1)}) |h_{kj}(\tau) - h_{kj}| < \infty, \quad \sigma > 0, \quad \varphi_{kj}(t) \equiv t - h_{kj}(t),$$ $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{0,1}$.

Литература

I. Р.Г.Алиев. Об устойчивости решения уравнений с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве. ДУ.№4. т.23.1987. с.555-568.

Альбрехт П. В. (Москва)

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПОЧТИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ $W^r H\omega$

Пусть $K = W^r H\omega = \{f \in C^r[a,b] : \omega(f^{(r)}; \delta) \le \omega(\delta)\}$, $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, $Y = \mathcal{P}_n$ – пространство многочленов степени не выше $n \geq 1$, $P : K \to Y$ – оператор метрической проекции. П. В. Галкин [1] и А. В. Колушов [2] установили порядки модуля непрерывности $\omega(P; \delta)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$P_x^{\varepsilon} x = \{y \in Y : \|x - y\| \le \rho(x, Y)(1+\varepsilon)\},$$

$$P_+^{\varepsilon} x = \{y \in Y : \|x - y\| \le \rho(x; Y) + \varepsilon\}.$$

Мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой $M : K \to Y$ ($A : K \to Y$) назовем такое однозначное отображение, что $\forall \varepsilon$ $Mx \in P_x^{\varepsilon} x$ ($Ax \in P_+^{\varepsilon} x$). Через $h(x_1, x_2)$ обозначим хаусдорфово расстояние между графиками функций x_1, x_2.

ТЕОРЕМА. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая мультипликативная ε-выборка $M : K \to Y$ и аддитивная ε-выборка $A : K \to Y$, что для любых x_1, x_2

$$\|Mx_1 - Mx_2\| \ll \min\{\delta/\varepsilon, \omega(P; \delta)\}$$

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \ll \min\{\delta\omega(P; \varepsilon)/\varepsilon, \omega(P; \delta)\}$$

где $\delta = \|x_1 - x_2\|$ при $r \geq 1$ и $\delta = h(x_1, x_2)$ при $r = 0$.

Отметим, что порядковые оценки в теореме являются точными по δ и ε для $r \geq 1$ и для классов Гельдера ($r = 0$; $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$).

Литература

1. Галкин П. В. О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций // Мат. заметки.– 1971. – Т. 10, № 6. – С. 601. 614.
2. Колушов А. В. Задача корректности наилучшего приближения // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, № 3. – С. 351–360.

аль-Обейд А. (Воронеж)

О КОЛИЧЕСТВЕ ЗОН ЗНАКОПОСТОЯНСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СЕТИ

Рассматривается краевая задача

$$-(pu')'+qu=\lambda ru \quad (x\in\Gamma), \quad u|_{\partial\Gamma}=0, \qquad (1)$$

которая понимается в смысле [1], и в которой

$$\Gamma \triangleq \bigcup_{i=1}^{m} (b_i;a],$$

где $a, b_1, \ldots, b_m$ - различные точки из $\mathbb{R}^n$; λ - вещественный спектральный параметр.

Пусть Λ - спектр задачи (1), а N - объединение спектров M_i задач

$$-(pu')'+qu=\lambda ru \quad (x\in(b_i;a]), \; u(b_i)=0=u(a) \qquad (2_i)$$

$(i=\overline{1,m})$.

Теорема 1. Если $\lambda_\ell\in\Lambda\setminus N$, то количество зон знакопостоянства соответствующей собственной функции задачи (1) равно

$$\sum_{j=0}^{\ell} k_j,$$

где k_j - геометрическая кратность j-ого собственного значения задачи (1).

Теорема 2. Пусть $\lambda_\ell\in N$, Пусть $I_1\triangleq\{i=\overline{1,m}\,|\,\lambda_\ell\in M_i\}$. Тогда максимально возможное количество зон знакопостоянства собственной функции задачи (1), отвечающей λ_ℓ, равно

$$\sum_{i\in I_1} S_i,$$

где S_i - количество зон знакопостоянства собственной функции задачи (2_i), отвечающей λ_ℓ.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // ДУ. - 1989. - 25, № 7. - С. 1141-1150.

Арбузов С. П., Сербулов Ю. С., Астанин Н. И.
(г. Воронеж)

Планирование процесса поставок мясного сырья как задача выбора и распределения однородных ресурсов

Процесс планирования поставок сырья является важным этапом функционирования любого мясоперерабатывающего предприятия (МП), так как от качества его реализации во многом зависит эффективность работы данного предприятия. Он заключается в таком распределении по объемам и во времени поставок сырья, чтобы при этом МП могло выполнить свои цели, связанные с производством готовой продукции.

Как правило, реализация подобных процессов связана с тем, что объектом исследования в ресурсной задаче является сложная двухуровневая производственная система, характеризующаяся иерархической структурой, у которой в качестве подсистемы верхнего уровня (центра) выступает МП, а в качестве подсистем нижнего уровня - поставщики сырья. Основная причина возникающих при этом трудностей заключается в том, что в процессе решения ресурсной задачи поставщиками сырья; с одной, - и МП, с другой стороны, преследуются разные цели, что приводит к возникновению таких ситуаций, когда не удается соблюсти интересы одного или нескольких участников данного планируемого процесса, не ущемляя интересы других его участников. Поэтому при организации данного процесса важная роль отводится формированию таких процедур оптимального поиска решений, которые бы обеспечили согласованность этих решений как по целям поставщиков сырья, так и по целям МП.

Дополнительную сложность в решении этой задачи составляет также то, что при планировании функционирования МП на этапе поставки сырья обычно отдельно выделяют процессы календарного и оперативного планирования поступления ресурсов. Что приводит к необходимости декомпозиции общей ресурсной задачи на два вида частных задач и реализации двухуровневого процесса оптимизации.

Данные соображения учитывались при разработке автоматизированной системы планирования поступления ресурсов на МП. Эта система реализована в операционной среде MS-DOS, применяемой в компьютерах типа IBM PC. При ее разработке использован язык высокого уровня ФОРТРАН версии 5.0 (фирма Microsoft).

Арутюнян Р.В. (Москва)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Рассматриваются представления некоторых классов аналитических функций в ряд Фурье по классическим ортогональным многочленам в соответствующих канонических областях. В докладе изложены следующие вопросы:

1. Неравенства для функций Якоби второго рода.
2. Оценки скорости максимальной сходимости ряда Фурье-Якоби на сегменте ортогональности.
3. Неравенства для функций Лагерра второго рода.
4. Весовые оценки остатка ряда Фурье-Лагерра на полуоси.
5. Неравенства для функций Эрмита второго рода.
6. Весовые оценки остатка ряда Фурье-Эрмита на всей оси.

Часть вышеупомянутых результатов раннее была опубликована в работах автора [3-5].

Литература:

1. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. 2-е изд. - М.: Наука, 1979. - 416 с.

2. Pusev P. Analytic functions and classical orthogonal Polynomials. - Sofia: Publ. house of the Bulg. Acad. of Sciences, 1984. - 135 p.

3. Арутюнян Р.В. О максимальной сходимости рядов Фурье-Якоби. ДАН. Арм. ССР. - 1983. - Т. 27. N 2. - с. 56-59.

4. Арутюнян Р.В. Оценка скорости максимальной сходимости рядов Фурье-Лагерра. Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1988 г. - с. 12-15.

5. Арутюнян Р.В. Ряды Фурье-Эрмита для аналитических функций в канонической областях. Теория функций и приближений. Изд. Сарат. ун-та, часть 2. - 1990 г. - с. 28-30.

Астанин Н.И., Матвеев М.Г., Сербулов Ю.С., Никитин Б.Е.

(г. Воронеж)

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Разработанная модель представляет собой концептуальную структуру для единого понимания непрерывно-дискретного производства перерабатывающих предприятий. В модели четко очерчена функциональная область таких предприятий, показаны взаимосвязи с внешней средой (поставщики сырья, автотранспорт, торговля), поставлены задачи интеграций производственной системы управления. В этих рамках определены I3 функциональных групп, таких как, например, общее руководство, финансы, планирование, управление производством, поставками сырья и др.

Структура производственных функций автоматизированного перерабатывающего предприятия представляется трехуровневой моделью, включающей предприятие, производство и основное производство. Модель последнего уровня предполагается четырехуровневой.

Обобщенная модель функционирования перерабатывающего предприятия предполагает, что процессы производства представляются в виде потоков (материальных, информационных и т.п.). Взаимодействие между потоками возможно как по вертикали, так и по горизонтали трехуровневой модели, причем не предполагается, что каждый производственный процесс соотносится со всеми потоками. Так, например, процессы уровня предприятия не содержат ввод/вывод материала; процессы основного производства не содержат функции выдачи команд и ввода состояний.

Как информационные объекты, так и материалы (ресурсы) поступают в общий процесс и покидают его. Преобразование материалов (ресурсов) производится согласно соответствующей информации, которая, в свою очередь, также подвергается преобразованию. Материалы (ресурсы) до и после преобразования (однократного или многократного) транспортируются, контролируются, хранятся. В это же время определенные элементы соответствующей информации подвергаются аналогичной обработке. В процессе управления информация о состоянии постоянно контролируется и по мере необходимости выдаются команды управления.

Асташкин С.В. (Самара)

О связи параметра функтора вещественного метода интерполяции с его значением на паре симметричных пространств

Как известно, в качестве параметров вещественного метода интерполяции достаточно брать банаховы идеальные пространства E двусторонних числовых последовательностей, интерполяционные относительно пары $\bar{\ell}_\infty = (\ell_\infty, \ell_\infty(2^{-k}))$, $\|(a_k)\|_{\ell_\infty(2^{-k})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}|a_k|$ (все определения см. в [1]).

Теорема 1. Пусть X - симметричное пространство на $(0,\infty)$, $X = (L_1, L_\infty)^{\mathcal{K}}_E$, $\ell_\infty \not\subset E$.

Тогда $\|\sigma_{2^k}\|_{X\to X} \asymp 2^k \|P_{-k}\|_{E\to E}$ $(k\in\mathbb{Z})$,

где $\sigma_t x(s) = x(s/t)$ - оператор растяжения в X, а $P_k(a_j) = (a_{j+k})$ - оператор сдвига в E.

Из теоремы 1 получаем следующие формулы для вычисления индексов Бойда симметричного пространства X : $\alpha_X = 1 - \nu_E$, $\beta_X = 1 - \mu_E$,

где $\mu_E = \frac{1}{\ln 2} \lim_{k\to-\infty} \frac{\ln\|P_k\|_{E\to E}}{k}$, $\nu_E = \frac{1}{\ln 2} \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\|P_k\|_{E\to E}}{k}$.

Теорема 2. Пусть φ_0 и φ_1 - вогнутые функции на $(0,\infty)$, $\delta_{\varphi_0} < \gamma_{\varphi_1} \le \delta_{\varphi_1} < 1$, и симметричное пространство X строится вещественным методом с параметром E по паре пространств Марцинкевича:

$$X = (M(t/\varphi_0), M(t/\varphi_1))^{\mathcal{K}}_E .$$

Тогда $a = (a_k) \in E \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{K}(\varphi_0^{-1}(t), \varphi_1^{-1}(t), a; \bar{\ell}_\infty) \in X$.

В случае $\delta_{\varphi_0} < \alpha_X \le \beta_X < \gamma_{\varphi_1}$ последнее доказано в [2].

Теорема 2, в частности, даёт возможность использовать в качестве параметров вещественного метода пространства, интерполяционные относительно пары пространств Марцинкевича.

[1] Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V.1. P.349-515.
[2] Асташкин С.В., Овчинников В.И. Функториальный подход к интерполяции операторов слабого типа//СМЖ.1991.Т.32,№3.С.12-23.

Ахметов М.У. (Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается импульсная система, имеющая вид

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t,x),\quad t\neq\tau_i+t_i(x),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i+t_i(x)}=B_i x+I_i(x), \tag{1}$$

где $x=colon(x_1,\dots,x_n)$, $A(t)$ – равномерно ограниченная на R и непрерывная матрица размера $n\times n$, B_i, $i=0,\pm1,\dots$ последовательность постоянных, ограниченных в совокупности $n\times n$ матриц таких, что $det(E+B_i)\neq0$, $f: R\times R^n\to R^n$ непрерывная по t и удовлетворяющая по x условию Липшица функция, $I_i: R^n\to R^n$, $i=0,\pm1,\dots$ – последовательность, которая при всех $i=0,\pm1,\dots$ относительно x удовлетворяет условию Липшица. Поверхности разрыва такие, что существует число $\theta\in R$, $\theta>0$, для которого при всех i справедливо соотношение $\tau_{i+1}-\tau_i\geq\theta$, последовательность $t_i(x)$ равномерно по i и x ограниченная и удовлетворяет условию Липшица по x. Предполагается, что линейная однородная система, соответствующая (I), экспоненциально дихотомична.

В отличие от [1], где рассматривался вопрос о существовании локальных интегральных поверхностей, исследуется задача о существовании интегральных поверхностей, которые являются неограниченными. Это стало возможным в результате предположения новых дополнительных условий о поверхностях разрыва. Эти условия естественны для реальных процессов, где выбор фиксированных моментов импульсного воздействия испытывает исчезающие и стабилизирующиеся с увеличением $\|x\|$ возмущения.

Исследуются дифференциальные свойства интегральных поверхностей, условия асимптотической устойчивости положения равновесия. На такие системы распространяется принцип сравнения.

I. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О методе сведения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения, 1990.-Т. 44.- № I.- С. 5-II.

Балашов Л.А., Дрейзин Ю.А., Мельников М.С. (Москва)

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ БЛИЗОСТИ

Определение. Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t) \in C(0,\infty)$. Тогда

$$\tau_\theta(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{t>0} \frac{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|}{\sup\limits_{t\theta^{-1} \le y < t\theta} (|\varphi_1(y)| - |\varphi_2(y)|)}, \quad \theta > 1,$$

называется τ_θ –близостью φ_1 и φ_2.

Пусть $x(t) \in R^N$, $0 \le t < \infty$, –решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -Lx, \tag{1}$$

где L –строго положительный самосопряженный оператор в R^N, спектр которого принадлежит промежутку $[m, M]$, $0 < m \le M < \infty$, и не имеет кратных точек. При этих предположениях имеет место

Теорема. Пусть $x(t)$ –решение уравнения (1). Тогда для любого $\delta > 0$ существует функция $\tilde{x}(t)$ такая, что $\tau_\theta(x(t), \tilde{x}(t)) < \delta$ и $\tilde{x}(t)$ принадлежит подпространству R^N, размерность которого не зависит от N.

Балашова Г.С. (Москва)

О СООТНОШЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В заметке рассматриваются пространства

$$W^\infty\{a_n,p,r\}_{(R)} \equiv \{u(x)\in C^\infty(R): \sum_{n=0}^{\infty} a_n\|u^{(n)}(x)\|_r^p<\infty\}, \qquad (1)$$

где $a_n\ge 0$ – последовательность чисел, $1\le p<\infty$, $r\ge 1$, $\|\cdot\|_r$ – норма в пространстве Лебега $L_r(R)$.

Ю.А. Дубинским показано, что пространство (1) нетривиально тогда и только тогда, когда радиус сходимости R_a ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$ больше нуля.

При изучении условий вложения

$$W^\infty\{a_n,p,r\}_{(R)} \subset W^\infty\{c_n,p,r\}_{(R)} \qquad (2)$$

естественно различать случаи $R_a<\infty$ и $R_a=\infty$.

1. Если $R_a<\infty$, то для последовательности $M_n=a_n^{-1}$ введем регуляризацию $M_n^c=(n^{-n}M_n)^c n^n$, $n=1,2,\dots$, где $(n^{-n}M_n)^c$ – выпуклая регуляризация посредством логарифмов (в.р.п.л.) последовательности $n^{-n}M_n$. Пусть n_i – последовательность основных индексов при в.р.п.л. этой последовательности.

Теорема 1. Пусть $R_a<\infty$ и $a_n^{(1)}=(M_n^c)^{-1}$, если $\sup(n_{i+1}-n_i)=K$, в противном случае $a_n^{(1)}=\max\{a_n,(M_n^c)^{-1}v_n(i)\}$, $n_i\le n\le n_{i+1}$, $v_n(i)$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $\sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} v_n(i)\le K$ для всех n, то

$$W^\infty\{a_n,p,r\}_{(R)}=W^\infty\{a_n^{(1)},p,r\}_{(R)} \qquad (3)$$

и для вложения (2) достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n(a_n^{(1)})^{-1}=K<\infty. \qquad (4)$$

2. Если $R_a=\infty$ и n_i – основные индексы при в.р.п.л. последовательности $M_n=a_n^{-1}$, то верна

Теорема 2. Пусть $R_a=\infty$ и $a_n^{(1)}=(M_n^c)^{-1}$, если $\sup(n_{i+1}-n_i)=K$, в противном случае $a_n^{(1)}=\max\{a_n,(M_n^c)^{-1}v_n(i)\}$, $n_i\le n\le n_{i+1}$, где $v_n(i)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 1, то верно (3) и для вложения (2) достаточно выполнения условия (4). При этом вложение (2) всюду плотное.

Теорема 3. Для любых чисел $b>0$ и $p\ge 1$ и любых последовательностей v_n' и v_n'', удовлетворяющих условиям $v_n\ge 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n<\infty$, $\lim_{n\to\infty} v_n^{1/n}=1$, пространства $W^\infty\{b^n v_n',p\}_{(R)}$ и $W^\infty\{b^n v_n'',p\}_{(R)}$ совпадают.

Теорема 4. Пусть $b>0$, $p\ge 1$, последовательность $v_n\to\infty$ и $v_n^{1/n}\to 1$ при $n\to\infty$ произвольны. Тогда для любой функции из $C^\infty(R)$ имеет место одно из соотношений

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|u^{(n)}(x)\|_p^p}{b^n v_n}=0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|u^{(n)}(x)\|_p^p}{b^n v_n}=\infty.$$

Батчаев И.М. (Карачаевск)

ИНТЕГРАЛ КОШИ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть Γ - простая замкнутая жорданова кривая, разбивающая плоскость $\mathbb{C}$ на области G^+ и G^-, $\infty \in G^-$; функция $f(z)$ принадлежит классу Гельдера $H^\nu(\Gamma), \nu\in(0,1]$; $d(\Gamma)=\dim\Gamma$ - сеточная размерность Γ, $1\le d(\Gamma)\le 2$, $d=d(\Gamma)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \dfrac{\log_2 m_k(\Gamma)}{k}$, где $m_k(\Gamma)$ - число квадратов сетки M_k, пересекающая Γ, M_k - квадраты вида $Q_{m,n}=\{\xi=x+iy : m<2^k x<m+1, n<2^k y<n+1\}$, $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$; $\widetilde{f}(\xi)$ - продолжение Уитни для функции $f(\xi)$.

Назовем интегралами типа Коши аналитические функции $\Phi^+(z)\in A(G^+)$, $\Phi^-(z)\in A(G^-)$ и сингулярным интегралом $-S_f(t)$, где

$$\forall z\in G^+,\ \Phi^+(z)\stackrel{def}{=}\widetilde{f}(\infty)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^-}\frac{\widetilde{f}_{\bar\xi}(\xi)}{\xi-z}\,d\sigma_\xi,\quad d\sigma_\xi=dx\,dy. \quad {}^{*)}$$

$$\forall z\in G^-,\ \Phi^-(z)\stackrel{def}{=}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^+}\frac{\widetilde{f}_{\bar\xi}(\xi)}{\xi-z}\,d\sigma_\xi,\quad \forall t\in\Gamma,\ S_f(t)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\widetilde{f}_{\bar\xi}(\xi)}{\xi-t}\,d\sigma_\xi,$$

где G^+ имеет положительную, а G^- отрицательную ориентации.

Теорема 1. Если $f\in A(G^+)H^\nu(\overline{G^+})$, $\nu>d-1$, то

$\forall z\in G^+,\ \Phi^+(z)=f(z),\ \Phi^-(z)=0$

$\forall z\in G^-,\ \Phi^-(z)=-f(z)+f(\infty),\ \Phi^+(z)=f(\infty),\ f\in A(G^-)H^\nu(CG^+)$.

Теорема 2. Если $f\in H^\nu(\Gamma)$, $\nu\in(\frac{d}{2},1]$, то

1) $\exists\,\Phi^+(t)=\lim\limits_{z\to t}\Phi^+(z),\ \exists\,\Phi^-(t)=\lim\limits_{z\to t}\Phi^-(z),\ \Phi^+(t)+\Phi^-(t)=S_f(t)$

2) $S_f: H^\nu(\Gamma)\to H^\mu(\Gamma),\ 0<\mu<\dfrac{2\nu-d}{2-d}<1.$

Далее, при a, b, $f\in H^\nu(\Gamma)$, $\nu\in(\frac{d}{2},1]$, $a^2(t)-b^2(t)\neq 0, \forall t\in\Gamma$ характеристическое $a(t)\varphi(t)+b(t)S_\varphi(t)=f(t)$ и союзное $a(t)\varphi(t)-S_{b\varphi}(t)=f(t)$ сингулярные уравнения сводятся к краевой задаче Римана, рассмотренной в работах Б.А.Каца для жордановых областей.

*) $\dfrac{\partial}{\partial\bar\xi}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$; $\xi=x+iy$

Бахтин И.А. (Воронеж)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Топологическими и конусными методами доказываются признаки существования периодических решений для некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно старшей производной.

Приведем один из них.

Теорема. Пусть функция $f(t,x,q,s)$

1) непрерывна по совокупности переменных $t,x,q,s\in(-\infty,\infty)$;
2) является периодической периода $2\omega>0$ по переменной t;
3) нечетна по совокупности переменных t,x,s:

$$f(-t,-x,q,-s)=-f(t,x,q,s);$$

4) неотрицательна в области $[0,\omega]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,0]$;
5) существует число $\ell\in(0,1)$, такое, что в области

$$[0,2\omega]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,0]$$

для любых $s_1,s_2\in(-\infty,0]$

$$|f(t,x,q,s_1)-f(t,x,q,s_2)|\le \ell|s_1-s_2|;$$

6) существуют числа r,R: $0<r<R$, такие, что

$$f\left(\frac{\omega}{2},R,0,-\frac{R}{\omega^2}\right)\ge\frac{R}{\omega^2},\quad f\left(\frac{\omega}{2},r,0,-\frac{r}{\omega^2}\right)<\frac{r}{\omega^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

имеет в C^2 по крайней мере одно периодическое периода 2ω, положительное в интервале $(0,\omega)$ решение $x=x(t)$ с

$$\max_t|x''(t)|\in(r,R).$$

Белинский Э.С. (Донецк)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Рассматриваются граничные значения функций из классов Харди $H^p(\mathbb{T})$ в единичном круге $|z|<1$ и их средние Рисса

$$\sigma_m^{\alpha,k}(f)=\sum_{j=1}^{m}\left(1-\left(\frac{j}{m}\right)^k\right)^{\alpha}\hat{f}(j)e^{ijx}$$

порядка k (k - целое) с показателем $\alpha\geq 0$ (при $\alpha=0$ имеем частичные суммы). Найден точный порядок приближения функции средними Рисса с критическим показателем при суммировании сильными логарифмическим методом.

Теорема I. Пусть $0<p\leq 1$, $\alpha=\frac{1}{p}-1$. Для любой $f\in H^p(\mathbb{T})$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\|f-\sigma_j^{\alpha,2}\|_{H^p}\asymp\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}E_j(f;H^p),$$

где $E_j(f;H^p)$ - наилучшее приближение f полиномами степени не выше j.

Получено представление K-функционала пары $(H^p,H^{p,2})$ через приближение средними Рисса с показателем выше критического. Ранее было известно представление через модуль непрерывности (П.Освальд).

Для периодических функций многих переменных рассмотрен K-функционал пары $(L^p,W^{p,2})$, где $W^{p,2}$ - пространство функций с доминирующей смешанной производной ($1<p<\infty$). Найдено представление через приближение функции средними Рисса по "ступенчато-гиперболическим крестам". Описаны пространства, получаемые вещественным методом.

Литература.

1. Chen G. Jiang Y. Lu Sh. Strong approximation of Riesz means at critical index on $H^p(\mathbb{T})$. $(0<p\leq 1)$ Appr. Theory and Appl. 1989. v. 5. 39-48.
2. Oswald P. On some approximation properties of real Hardy spaces $(0<p\leq 1)$. J. Appr. Theory. v. 40, 1984. pp. 45-65.

Белов А.С. (Иваново)

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ

В докладе предполагается обсудить некоторые свойства и примеры тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами и, в частности, вопросы, связанные со следующими доказанными автором утверждениями :

1. Теорема. Пусть при некотором натуральном n частные суммы тригонометрического ряда удовлетворяют условию $S_m(x) \geq 0$ при всех x и $m = 1, \ldots, n$. Тогда справедлива (неулучшаемая) оценка $\max\limits_x S_n(x) \leq 4\, a_0\, n^{1-\alpha}$, где $\alpha = 0{,}308\ldots$ — единственный корень уравнения $\int\limits_0^{3\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt = 0$.

2. Теорема. Пусть n — натуральное число и пусть
$$M(n) = \min\left\{-\min_x \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) : a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1\right\}.$$
Тогда
$$M(n) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k^2 & \text{при } n = 2m-1, \\ \frac{1}{2} C_m^2 + \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k^2 & \text{при } n = 2m, \end{cases}$$
где $C_k = 2^{-2k} (k!)^{-2} (2k)!$ и минимум реализуется на единственном экстремальном полиноме.

3. Утверждение. Пусть бесконечное число частных сумм некоторого тригонометрического ряда неотрицательны и есть такое натуральное число q, что все, кроме конечного числа, коэффициенты, номера которых кратны q, равны нулю. Тогда этот ряд является рядом Фурье некоторой неотрицательной ограниченной функции.

4. Теорема. Пусть невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $a_{2n+1}\sqrt{n+1} \geq a_{2n+2}\sqrt{n+2}$ при всех $n \geq 0$ и $a_0 > 0$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot \cos(kx) > 0$ при всех $x \in [0, \pi)$ и $n \geq 0$.

Если же, кроме того, выполнено условие $a_{2n} = a_{2n+1}$ при $n \geq 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) > 0$ при всех $x \in (0, \pi)$ и нечетных $n \geq 1$, и всех $x \in (0, \pi n/(n+1)]$ и четных $n \geq 1$.

Белоусов В.А. (Саратов)

СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ниже $\{T(t): t\in R^n\}$ – многопараметрическая равностепенно непрерывная группа (операторов) класса C_0 на отделимом локально выпуклом секвенциально полном (в теореме 2 – полном) комплексном линейном топологическом пространстве X. Обозначим $\mathcal{P}$ семейство всех инвариантных относительно операторов $T(t)$ полунорм, непрерывных на X; $\mathcal{P}$ порождает исходную топологию пространства X. α-ую ($\alpha>0$) степень инфинитезимального оператора, соответствующего разности $-\Delta_t:=I_X-T(t)$ обозначим $(-A_t)^\alpha$. Для $x\in\mathcal{D}(A^\alpha)\ (=\bigcap_{t\neq 0}\mathcal{D}((-A_t)^\alpha))$ и $q\in\mathcal{P}$ положим

$$\Omega_{\beta,q}(\delta,A^\alpha x):=\sup_{\|t\|=1}\sup_{0<h\le\delta} q((-\Delta_{ht})^\beta(-A_t)^\alpha x),\ \Omega_{\beta,q}(\delta,A^0 x)=:\Omega_{\beta,q}(\delta,x).$$

Обозначим $B_\sigma(=B_\sigma(T))$ [1] класс всех $x\in X$, для которых:

(а) $T(t)x$ как функция параметра t продолжима на $\mathbb{C}^n$ до целой функции (обозначим это продолжение $T_x(\xi)$, $\xi\in\mathbb{C}^n$);

(б) $\forall\varepsilon>0$ множество $\{(exp(-(\sigma+\varepsilon)\|\Im\xi\|))T_x(\xi):\xi\in\mathbb{C}^n\}$ ограничено в X.

Класс B_σ замкнут линейно и топологически. Положим $\inf_{g\in B_\sigma} q(x-g)=:\mathcal{E}_{\sigma,q}(x)$, $q\in\mathcal{P}$. Прямые теоремы о связи конструктивных характеристик $\mathcal{E}_{\sigma,q}$ со структурными $\Omega_{\beta,q}$ приведены в [2]. Следующие теоремы 1 и 2 представляют собой соответствующие обратные теоремы.

Теорема 1. При $\beta>0$

$$\Omega_{\beta,q}(\delta,x)\le C(\beta)(\delta^\beta\int_0^\sigma u^{\beta-1}\mathcal{E}_{u,q}(x)\,du+\mathcal{E}_{\sigma,q}(x))\quad(\sigma,\delta>0;\ q\in\mathcal{P}),$$

где константу $C(\beta)$ можно считать зависящей только от β.

Теорема 2. Пусть $\alpha>0$. Если для каждой полунормы $q\in\mathcal{P}$ величина $u^{\alpha-1}\mathcal{E}_{u,q}(x)$ как функция от u суммируема на полуоси, то $x\in\mathcal{D}(A^\alpha)$ и при $\beta>0$

$$\Omega_{\beta,s}(\delta,A^\alpha x)\le C(\alpha,\beta)(\delta^\beta\int_0^\sigma u^{\alpha+\beta-1}\mathcal{E}_{u,s}(x)\,du+\int_\sigma^{+\infty}u^{\alpha-1}\mathcal{E}_{u,s}(x)\,du),$$

где $\delta>0$, $s\in\mathcal{P}$. Константу $C(\alpha,\beta)$ можно считать зависящей лишь от α и β.

Отметим "смыкание" теорем 1,2 с прямыми теоремами [2].

Библиографический список

1. Белоусов В.А. Пространства, связанные с n-параметрической группой операторов, и приближение по ним // Сарат. ун-т. Саратов, 1981. Деп. в ВИНИТИ 18.09.81, № 4519.

2. Белоусов В.А. Приближения в локально выпуклых пространствах и структурные характеристики дробных порядков. – В кн.: Математика и ее приложения. Саратов, 1991, вып. 2, с. 30-34.

Белоусова Е.П. (Воронеж)

Об эффекте Ляпунова для линейных управляемых периодических систем

Рассматривается периодическая краевая задача

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t), \quad x(0) = x(\omega),$$

где матричные функции $A(t)$, $B(t)$ и векторная функция $v(t)$ измеримы и суммируемы на $[0,\omega]$; $x(t)$ – абсолютно непрерывная векторная функция со значениями в R^n; управление $u(t)$ является измеримой векторной функцией, определенной на $[0,\omega]$ и принимающее значения из компактного (замкнутого и ограниченного) множества $\Omega \subset R^m$.

Предполагается, что однородная задача

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x(\omega)$$

не имеет решений, удовлетворяющих краевому условию, кроме нулевого.

Пусть $x(t)$ – произвольное периодическое решение исходной системы, отвечающее допустимому управлению $u(t)$. Множеством достижимости $K(\tau)$ назовем совокупность точек $x(\tau)$ периодических траекторий в R^n, где τ – фиксированный момент времени из $[0,\omega]$.

Т е о р е м а 1. Если Ω выпуклое компактное множество в R^m, то множество достижимости $K(\tau)$ является выпуклым, компактным множеством в R^n, непрерывно зависящим от τ.

Т е о р е м а 2. (эффект Ляпунова). Если Ω компактное множество в R^m (выпуклость этого множества не предполагается), то множество достижимости $K(\tau)$ является выпуклым, компактным множеством в R^n, непрерывно зависящим от τ. Более того, если Ω заменить выпуклой оболочкой $H(\Omega)$ и через $K_H(\tau)$ обозначить множество достижимости для исходной системы, рассматриваемой для управлений $u(t)$ со значениями в $H(\Omega)$, то $K(\tau) = K_H(\tau)$, при любом τ из $[0,\omega]$.

Л и т е р а т у р а

Э.Б. Ли, Л. Маркус "Основы теории оптимального управления", Москва, "Наука", 1972.

Беляев А.Г. /Москва/

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПЕРИОДИЧЕСКИ ПЕРФОРИРОВАННОМ МЕЛКИМИ ПОЛОСТЯМИ ТОРЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЛЕЖИТ НА СПЕКТРЕ

В тезисах изложен основной результат §I работы [I].

Пусть T_ε – замкнутое множество ненулевой гармонической ёмкости, содержащееся в единичном кубе $Q \subset \mathbb{R}^N_\xi$ и зависящее от малого параметра ε ; λ_ε – первое собственное значение для оператора Лапласа в $Q \setminus T_\varepsilon$ с условием периодичности на ∂Q и условием Дирихле на ∂T_ε ; $\lambda_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $W_\varepsilon(\xi)$ – соответствующая первая собственная функция, нормированная так, что её среднее значение на Q равно единице; T^ε – множество, полученное из T_ε продолжением по периодичности на всё $\mathbb{R}^N_\xi$ и гомотетией с коэффициентом δ , где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Положим $w^\varepsilon(x) = W_\varepsilon(x/\delta(\varepsilon))$ и продолжим эту функцию по периодичности на всё $\mathbb{R}^N_x$. Рассмотрим обобщённую задачу Дирихле на перфорированном торе $\Omega \setminus T^\varepsilon$, $\Omega = (0,d)^N$:

$$-\Delta u^\varepsilon = f \text{ в } \Omega \setminus T^\varepsilon, \; u^\varepsilon = 0 \text{ на } T^\varepsilon, \; u^\varepsilon \in H^1_{per}(\Omega), \; f \in L^2(\Omega).$$

Здесь d всегда кратно δ . Угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначим среднее значение функции на Ω . Рассмотрим ещё одну задачу:

$$-\Delta u^0 = f - \langle f \rangle \text{ в } \Omega, \quad u^0 \in H^1_{per}(\Omega).$$

<u>Теорема.</u> Предположим, что $\lambda_\varepsilon / \delta(\varepsilon)^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$u^\varepsilon - \frac{\delta(\varepsilon)^2}{\lambda_\varepsilon}\left[w^\varepsilon \langle f \rangle - \langle f (w^\varepsilon - 1) \rangle \right] \xrightarrow[H^1_{per}(\Omega)]{w} u^0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

<u>Пример.</u> Пусть $T_\varepsilon = \{\xi \in Q : \varepsilon^{-1}(\xi - \xi_0) \in T, \; \xi_0 \in Q\}$, тогда

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{N-2} \operatorname{cap} T + O(\varepsilon^{N-1}) \quad \text{для} \quad N \geq 3.$$

Кроме того $1 - W_\varepsilon(\xi)$ в первом приближении представляет собой гармонический потенциал множества T .

Если $f \in H^s_{per}(\Omega)$ то можно показать, что

$$\delta(\varepsilon)^{-s}(\lambda_\varepsilon)^{-1/2} \langle f (w^\varepsilon - 1) \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

[I] Беляев А.Г., Чечкин Г.А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда предельная задача неразрешима.// статья представлена в Матем. сб. в 1992 г.

ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНОГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ НА "ТОЛСТЫХ" МНОЖЕСТВАХ

Е.И.Бережной /Ярославль/

Пусть Q единичный куб в R^n с обычной мерой Лебега, X симметричное пространство на Q, $\psi(\tau)$ фундаментальная функция симметричного пространства X. Для функции $f: Q\to R$ определим модуль непрерывности в пространстве X

$$\omega_X(f,h) = \sup\{\|f(t+h)-f(t)|X\|: |\delta|<h\},$$

где $|\delta| = |\delta_1|+\dots+|\delta_n|$ норма в R^n.

Теорема. Пусть $f\in X$ и $\omega_X(f,h)\le ch^\alpha$ $/0<\alpha<1/$. Пусть последовательность $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_i\downarrow;\quad \lim_{i\to\infty}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}=1;\quad \sum\varepsilon_i<\varepsilon.$$

Тогда существует множество w с мерой меньше ε такое, что выполнено следующее соотношение: для $t,s\in Q\setminus w$ положим $d=|t-s|$, $i=[\log_2 d]+1$; тогда верно неравенство

$$|f(t)-f(s)|\le c(\varepsilon)\frac{d^\alpha}{\psi(\varepsilon_i)},$$

где константа $c(\varepsilon)$ зависит лишь от ε.

Таким образом, равномерный модуль непрерывности у функции f на $Q\setminus w$ ухудшается по сравнению с модулем непрерывности в симметричном пространстве X. Причем это ухудшение зависит лишь от фундаментальной функции пространства X.

Отметим, что теорема неусиляема и имеет аналог для случая, когда $\omega_X(f,h)$ есть просто вогнутая функция /необязательно степенная/.

В случае $X=L^p$ и $n=1$ эта задача разобрана К.И.Осколковым.

Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А.

ОБ АНАЛИЗЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В [1] предложен алгоритм для проведения анализа особых точек решений нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на предмет выявления у нее свойства Пенлеве. Один из шагов алгоритма рекомендует игнорировать те корни z резонансного уравнения, для которых $Re(z) < 0$. Однако такое требование искусственно ограничивает возможности исследования аналитических свойств решений. При анализе особенностей решений можно использовать следующие утверждения.

Теорема 1. Для наличия свойства Пенлеве у нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения необходимо, чтобы все корни z соответствующего резонансного уравнения были различными целыми числами.

Теорема 2. Для наличия свойства Пенлеве у нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо, чтобы все элементарные делители соответствующей резонансной матрицы были простыми, а ее собственные значения были целыми числами.

Эти теоремы можно доказать с помощью метода малого параметра Пенлеве. Приведем примеры.

1) $w''^2 + 12ww'w'' + 8w^3w'' - 12w^2w'^2 - 16w'^3 = 0$

2) $2w''^2 + 33ww'w'' + 27w^3w'' - 45w^2w'^2 - 49w'^3 = 0$

Все решения первого уравнения однозначны, а второго нет. Для этих уравнений имеем соответственно:

1) $z_1 = -1$, $z_2 = -2$; общее решение: $w = (z-z_0)^{-1} + h(z-z_0)^{-2}$,

2) $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$; общее решение: $w = (z-z_0)^{-1} + h(z-z_0)^{-\frac{3}{2}}$.

Особое решение: $w = \frac{8}{9}(z-z_0)^{-1}$.

В 1) и 2) z_0, h - произвольные постоянные.

Литература: 1 M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur. // J. Math. Phys. 21 (4), 1980 P 715-721.

Бобочко В. Н. /Кировоград/

СИЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается задача

$$L_\varepsilon U(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 U''(x,\varepsilon) + [x\,q(x) + \varepsilon^\alpha q(x)]U(x,\varepsilon) = h(x),$$
$$U(0,\varepsilon) = A(\varepsilon), \quad U'(0,\varepsilon) = B(\varepsilon) \qquad /1/$$

при $\varepsilon \longrightarrow +0$, $x \in [0, l]$.

При $\alpha \geqslant 3$ задача /1/ изучена достаточно хорошо/см. [1] /, работы Дородницына А.А., Лангера Р., Федорюка М. В., Ломова С. А. и другие. Если $0 < \alpha < 3$, то задача /1/, особенно в действительной области, изучена слабо.

В данной работе проиллюстрированы особенности исследования задачи /1/ при $\alpha = 2$. Показано, что в этом случае слагаемое $\varepsilon^2 q(x)\, U(x,\varepsilon)$ не является второстепенным, как это было при $\alpha = 3$. Наряду с слагаемым $x\,q(x)\,U(x,\varepsilon)$, второе слагаемое $\varepsilon^2 q(x)\, U(x,\varepsilon)$ тоже существенно влияет на структуру асимптотики решения задачи /1/.

Точку $x = 0$ при $0 < \alpha < 3$ будем называть сильной точкой поворота уравнения /1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобочко В. Н. Сингулярно возмущенная задача Коши с точкой поворота.// Матем. физ. и нелин. мех.- 1991.- вып. 16 /50/.- С. 68-74.

Богатырев Б.М., Шинкарик Н.И. (Тернополь)

ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА-ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

В настоящее время в связи с широким применением композиционных материалов в технике, технологии, строительстве, а также среди многочисленных технических задач, возникающих при конструировании машин и проектировании инженерных сооружений возникла необходимость в изучении температурных полей и упругих напряжений в телах, состоящих из нескольких материалов, имеющих разные физико-механические характеристики, а также важное место занимают расчеты элементов на кручение и вопросы концентрации напряжений. Математическая модель того или иного процесса, представляющая собой систему дифференциальных уравнений в частных производных при наиболее общих условиях контакта в точках сопряжения требует математического аппарата для получения точного решения в явной форме.

Авторами получены гибридные интегральные преобразования Лежандра-Фурье, сформулированы и доказаны теоремы о наличии основного тождества интегрального преобразования дифференциального оператора, позволяющего применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих сингулярных задач математической физики неоднородных структур. На примере (кручения неоднородного упругого слоя высоты h с круговым отверстием радиуса R_0, составленного из двух материалов:

$$G(r) = \begin{cases} G_1(r) \equiv G_{10} r^{-3} \operatorname{sh} r, & r \in (R_0, R_1) \\ G_2(r) \equiv G_{20} r^{-3}, & r \in (R_1, \infty) \end{cases}$$

неоднородные участки которого спаянные между собой, нижняя грань $z=0$ слоя неподвижно закреплена, верхняя грань $z=h$ нагружена усилиями $\tau_{z\theta} = f(r)$, а поверхность $r=R_0$ свободная от внешних воздействий) предложена логическая схема применения гибридного интегрального преобразования Лежандра 2-го рода-Фурье для решения достаточно широкого класса сингулярных задач математической физики неоднородных структур. При этом решения задач выписываются в замкнутой форме, удобной для использования их в инженерных расчетах.

Братусь А.С., Посвянский В.П. (Москва)

Оптимальный выбор расположения актьюаторов в задаче о стабилизации системы, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных

В данной работе рассматривается задача о выборе оптимального управления с целью стабилизации динамической системы к заданному моменту времени. Система описывается гиперболическим дифференциальным уравнением четвертого порядка, что позволяет изучать математические модели для широкого класса упругих механических систем. Моделирование управляющих воздействий осуществляется заданием управляющих функций в конечном числе точек системы, в дальнейшем называемых актьюаторами (actuator).

Изучается задача об оптимальном выборе как самих управляющих воздействий, так и положений актьюаторов. Предложен общий метод решения подобных задач, основанный на построении специальной функции Грина. С помощью модального анализа задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Показано, что оптимальный выбор положений актьюаторов связан с проблемой оценки в пространстве С собственных функций для самосопряженных краевых задач соответствующих эллиптических операторов.

В качестве примера рассмотрена задача о гашении энергии колебаний упругой пластины. Получены выражения для вариации решения по положениям актьюаторов. Найдены точки оптимального расположения актьюаторов. Исследована зависимость их расположения от узловых линий собственных функций.

Бригадин И.И. (Воронеж)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ОБЪЕКТА ТИПА "СКЛАД"

Рассмотрены материальные потоки разнородных элементов на входе в систему "Склад". При этом предполагается, что эти потоки являются Пуассоновскими с известными интенсивностями λ_i независящими от времени. Для случая двух потоков система дифференциальных уравнений относительно вероятности того, что к моменту времени τ число этих элементов на объекте составит n_1 и n_2 такова:

$$\frac{dP_{00}(\tau)}{d\tau} = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{00}(\tau) \; ; \tag{1}$$

$$\frac{dP_{n_10}(\tau)}{d\tau} = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{n_10}(\tau) + \lambda_2 P_{n_1-1\,0}(\tau); \tag{2}$$

$$\frac{dP_{0n_2}(\tau)}{d\tau} = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{0n_2}(\tau) + \lambda_1 P_{0n_2-1}(\tau); \tag{3}$$

$$\frac{dP_{n_1n_2}(\tau)}{d\tau} = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{n_1n_2}(\tau) + \lambda_1 P_{n_1n_2-1}(\tau) + \lambda_2 P_{n_1-1\,n_2}(\tau); \tag{4}$$

$$P_{00}(0)=1 \; ; \tag{5}$$

$$P_{n_1n_2}(0)=0 \; . \tag{6}$$

Решение системы (I) - (6) получено с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной τ. Найденное выражение для $P_{n_1n_2}(\tau)$ обобщено на любое число материальных потоков. Определены математическое ожидание и дисперсии для потоков, по которым может быть выработана стратегия о необходимом и достаточном количестве элементов в системе "Склад".

Бродовский В.Г.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + Q(t)y(t) + q(t),$$
$$\dot{y}(t) = f\{t, x(t), y(t), x[h(t)], y[h(t)], \dot{y}(t), \dot{y}[h(t)]\}, \quad t\in[0,1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{N}[\alpha_i x(\tau_i) + \beta_i y(\tau_i)] = \ell \tag{2}$$

для искомых функций $x:[0,1]\to E_m$, $y:[0,1]\to E_n$, где E_m, E_n - евклидовы пространства размерности соответственно m, n; $\ell\in E_{m+n}$; α_i, β_i - постоянные матрицы, P, Q - матрицы с непрерывными элементами соответствующих размерностей; $h:[0,1]\to E_1$, $q:[0,1]\to E_m$ - непрерывные функции.

Делается попытка получить достаточные условия существования решений задачи (1),(2). Используются идеи и методика, предложенные в работе [1]. Предполагается, что вектор-функция f с неотрицательными компонентами непрерывна по совокупности своих аргументов, удовлетворяет условию Липшица относительно двух последних, имеет определённый рост по y, существует матрица Грина для соответствующей однородной задачи. Подходящим образом подобранной заменой исходная задача приводится к некоторому эквивалентному функциональному уравнению

$$v = Fv, \tag{3}$$

где оператор F, действующий в конусе неотрицательных непрерывных функций $v:[0,1]\to E_n$, оказывается суммой вполне непрерывного и уплотняющего операторов. Комбинированное применение принципа Шаудера и соответствующей теоремы для уплотняющих операторов [2] позволяет установить существование хотя бы одного решения уравнения (3), а тем самым и рассматриваемой задачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бакельман И.Я., Красносельский М.А. Об одном признаке разрешимости двухточечной краевой задачи.//Вестник ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон. 1961. Вып.3, №13. С.161-162.

2. Садовский Б.Н. Об одном принципе неподвижной точки. //Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т.I, вып.2.С.74-

Брук В.М., Коломоец А.А. (Саратов)

О СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

На отрезке $[0,T]$ $(T<\infty)$ рассматривается уравнение

$$u''+Au+AB_1(u,B(u,u))=g(t), \qquad (1)$$

где A – самосопряженный оператор в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H, $A\geq\gamma E$ $(\gamma>0$, E – тождественный оператор), A^{-1} вполне непрерывен, $B: H_{1/2}\times H_{1/2}\to H_{-1/2}$ – билинейный непрерывный оператор, причем форма $(B(u,v),w)_{H_{1/2}}$ не зависит от порядка аргументов $u,v,w\in H_{1/2}$ (здесь $\{H_\alpha\}$ – гильбертова шкала пространств, порожденная A), $g\in L_2(H;0,T)$.

Через Z, L – обозначаются "пространства"

$$Z=L_2(H_j;0,T)\cap C^1(H_{-1/2};0,T) \quad (j<1/2),$$

$$L=\{u: u\in L_2(H_{1/2};0,T),\ u''\in L_2(H_{-1/2};0,T)\}$$

с нормами

$$\|u\|_Z=\|u\|_{L_2(H_j;0,T)}+\|u\|_{C^1(H_{-1/2};0,T)},$$

$$\|u\|_L=\|u\|_{L_2(H_{1/2};0,T)}+\|u''\|_{L_2(H_{-1/2};0,T)}.$$

Пусть μ – вероятностная мера, определенная на $\mathcal{B}(H_{1/2}\times H_{1/2})$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{H_{1/2}\times H}\|v\|^2 d\mu(v)<\infty$ ($\mathcal{B}(\Omega)$ – борелевская σ-алгебра пространства Ω). По аналогии с [1] введем определение.

Статистическим решением уравнения (1), соответствующим начальной мере μ, называется вероятностная мера P на $\mathcal{B}(Z)$ со свойствами: 1) существует такое замкнутое множество $W\subset L$, состоящее из решений (1), что $P(W)=1$; 2) $P(\gamma_0^{-1}\omega)=\mu(\omega)$ для всех $\omega\in\mathcal{B}(H_{1/2}\times H)$, где $\gamma_0 u=\{u(0),u'(0)\}$; 3) $\int[\|u\|_Z+\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u(t)\|^2_{H_{1/2}}+\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u'(t)\|^2_H]dP(u)<C$.

Теорема. При сделанных выше предположениях существует статистическое решение уравнения (1).

К уравнению (1) сводится, например, система уравнений Кармана. Отметим, что уравнения Кармана с "белым шумом" в правой части и случайными начальными условиями рассматривались в [2].

Литература

1. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. "Наука", М. 1980.

2. Чуешов И.Д. Матем. сборник, 1983. Т.122, № 3. С.291-312.

Неравенства Ландау-Колмогорова.
Факты, вычислительные эксперименты, гипотезы.

А.П.Буслаев

1.Неравенства Ландау-Колмогорова (НЛК). A– матрица $m*m$, $x \in R^m$, $\|x\|_p^* := \|x\|_{l_p^m}$, $0 < k < n, k, n \in N, \alpha \in I = [0,1]$,

$$L(x) = \|A^{n-k}x\|_q \|A^n x\|_p^{-\alpha} \|x\|_r^{\alpha-1} \qquad (1)$$

Решение экстремальной задачи

$$L(x) \to \sup \qquad (2)$$

называется точной константой в НЛК. К задаче (1)-(2) приводит дискретизация функционального варианта НЛК при различных краевых условиях. Так, например, НЛК для периодических функций имеет дискретный аналог, где $\alpha = (n - k)/n$, $a_{11} = (2m-1)/2m$, $a_{12} = (2m-3)/(2m), \cdots, a_{m1} = 1/2m, \cdots, a_{2m1} = (1-2m)/(2m)$.

Обсуждаются некоторые свойства (1)-(2).

2.Вычислительные эксперименты.Рассматривается отображение Пуанкаре:

$$|x^{(s+1)}|^{r-1} sgn(x^{(s+1)}) = \gamma_s grad F(x^{(s)}), \qquad (3)$$

где $F(x) = \|A^{n-k}x\|_q \|A^n x\|_p^{-\alpha}$, γ_s– нормировочная константа, которая определяется из условия $\|x^{(s+1)}\|_r = 1$.

Для различных начальных условий $x^{(0)}$, $m = 1500$, $A = a_{ij}$ на PCAT-486 получены

а) компьютерный аналог таблицы Колмогорова. Отметим, что (T) отличается от соответствующего оригинала не более, чем на 1 процент.Ошибка убывает с ростом $n - k$.

б) зависимость констант Ландау-Колмогорова от аргументов

$$0 < p^{-1} < 1, 0 < r^{-1} < 1, nq^{-1} = (n-k)p^{-1} + kr^{-1}$$

(G) подтверждает гипотезу об обобщенном НЛК

Буслюк Д.В., Горбузов В.Н. (Гродно)

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ СИСТЕМ ДАРБУ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Для автономной дифференциальной системы Дарбу n-го порядка

$$\dot{x} = \left\{a + M(x)E\right\} x^T, \tag{I}$$

где $\dot{x} = colon\left[\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right]$, $a = \|a_{ij}\|$ - квадратная матрица порядка n, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, E - единичная матрица, $M(x)$ - однородная функция относительно $x = \left[x_1, \ldots, x_n\right]$, рассматриваются возможности существования предельных циклов.

Исследуется вид кривых, являющихся предельными циклами (I), в зависимости от однородной функции $M(x)$.

Например, система

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + x_1\overset{*}{M}(x),\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_2\overset{*}{M}(x),$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 - x_4 + x_3\overset{*}{M}(x),\ \dot{x}_4 = x_3 - x_4 + x_4\overset{*}{M}(x),$$

где $\overset{*}{M}(x) = \sqrt{\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^3}$, с алгебраическими правыми частями имеет как алгебраический $x_1^2 + x_2^2 = 0,\ x_3^2 + x_4^2 = 1$, так и трансцендентный предельный цикл $x_3^2 + x_4^2 = 0,\ \rho^{-3} =$

$$= \frac{3}{4}\, e^{6\varphi}\left[1 - e^{-12\pi}\right]^{-1}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2(2 + \sin 2\tau)^3}\, e^{-6\tau}\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\varphi}\sqrt{2(2 + \sin 2\theta)^3}\, e^{-6\theta}\, d\theta\right\},\ \text{где } x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi.$$

В то же время система

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 + x_1\overset{\dagger}{M}(x),\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 - x_3 + x_2\overset{\dagger}{M}(x),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_3\overset{\dagger}{M}(x),$$

с, вообще говоря, трансцендентными правыми частями, где $\overset{\dagger}{M}(x) = \left[2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{\beta}$, β - некоторое действительное ненулевое число, имеет алгебраический предельный цикл $x_1 = 0,\ x_2^2 + x_3^2 = 2^{1/\beta}$ при любом действительном ненулевом β, в том числе и иррациональном.

Бут Н.Е., Рисун В.И. / Алчевск /
[illegible]

О БАЗИСНОСТИ ОДНОЙ НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА $L_2(J)$

Обобщая результаты исследований [I], рассмотрим систему функций /СФ/ в $L_2(J)$

$$\left\{ \varphi_i(t) \right\}_1^{\infty} \qquad /I/$$

где $\varphi_i(t) = x_1^2(t) \prod^{i} x_k(t)$, $x_1(t) = \exp(-\int Q\,dt)$, [illegible] $m \geq 2$ [illegible]

$x_2(t) = ch^{-1}\alpha_1 f_1(t)$, $x_3(t) = ch^{-1}\alpha_2\, th\,\alpha_1 f_1, \ldots$

$$x_m(t) = ch^{-1}\alpha_{m-1}\, th\,\alpha_{m-2}\, th \ldots th\,\alpha_1 f_1(t),$$

$$x_{m+1}(t) = \sigma_1(t)\, ch^{-1}\alpha_m\, th\,\alpha_{m-1} \ldots th\,\alpha_1 f_1, \ldots,$$

$$x_{m+k}(t) = \sigma_k(t)\, ch^{-1}\alpha_{m+k-1}\, th\,\alpha_{m+k-2}\, th \ldots th\,\alpha_1 f_1, \ldots$$

$$f_1(t) = \int x_1\, dt;$$

$Q_1(t)$ - суммируемая функция $\forall t \in J$ / $J = [0;1]$ /, $\alpha_i - const$. СФ $\{\sigma_k^2(t)\}_1^{\infty}$ ограничена в совокупности, а элементы $\sigma_k(t)$ выбраны так, что ряд $\sum_{i=m+1}^{\infty} \rho_i^2$ сходится, где $\rho_i = \int_0^1 (\psi_i(t) - \varphi_i(t))^2 dt$, а $\{\psi_i(t)\}_1^{\infty}$ - некоторая полная ОН СФ.

Имеют место следующие свойства СФ /I/.

Теорема I. СФ /I/ полная в $L_2(J)$.

Теорема 2. СФ /I/ минимальна.

Теорема 3. СФ /I/ - система функций Фишера-Рисса.

Теорема 4. СФ /I/ - базис Бари [2].

I. Рисун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.- Киев: ЦНТИ, 1991.- 321 с.

2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- М.: Наука, 1965.- 448 с.

Васильева Н.С. (Одесса)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(t)|y|^{1-\lambda_i}|y'|^{\lambda_i} \operatorname{sgn} y, \qquad (1)$$

где $\alpha_i \in \{-1,1\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ $(i,j=1,\dots,n)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – непрерывно дифференцируемые функции $(\omega \leq +\infty)$.

Положим $p_0(t) \equiv 1$, $\lambda_0 = 2$,

$$\mathfrak{J} = \{(i,j) : i \neq j,\ i,j \in \{0,\dots,n\}\}.$$

Функции $f_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i=1,\dots,n)$ назовем асимптотически сравнимыми при $t \to \omega$, если для любых $k,m \in \{1,\dots,n\}$ существует /конечный или бесконечный/ предел

$$\lim_{t\to\omega} \frac{f_k(t)}{f_m(t)}.$$

Исследуется случай, когда для каждой фиксированной пары $(i,j) \in \mathfrak{J}$ функции

$$\varphi_s(t) = p_s(t)\left(\frac{p_j(t)}{p_i(t)}\right)^{\frac{\lambda_s-1}{\lambda_i-\lambda_j}}, \quad s=0,\dots,n,$$

являются асимптотически сравнимыми при $t \to \omega$. При этих и некоторых дополнительных ограничениях на функции p_i $(i \in \{0,\dots,n\})$ устанавливается, что каждое правильное решение уравнения (1) допускает при $t \to \omega$ одно из следующих асимптотических представлений

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = [c + o(1)] \qquad (2)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \left|(1-\lambda_i)\int_{A_i}^{t} p_i(s)\,ds\right|^{\frac{1}{1-\lambda_i}}[\nu_i + o(1)],\quad i \in \{0,\dots,n\} \qquad (3)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \left(\frac{p_j(t)}{p_i(t)}\right)^{\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}}[c_{ij} + o(1)],\quad (i,j) \in \mathfrak{J}, \qquad (4)$$

где c_{ij}, c – отличные от нуля постоянные, $\nu_i = \operatorname{sgn}\left(\alpha_i(1-\lambda_i)\int_{A_i}^{t} p_i(s)\,ds\right)$, предел интегрирования A_i равен либо 0, либо $+\infty$. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия существования решений уравнения (1) каждого из указанных выше типов (1)-(4).

Вельмисов П.А. (Ульяновск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ

Рассматривается плоская линейная задача о колебаниях вязкоупругой стареющей пластины на вязкоупругом стареющем основании, разграничивающей две части канала

$$V_1=\{(x,y): 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le y_0\},\quad V_2=\{(x,y): x_0\le x\le x_*,\ 0\le y\le y_0\},$$

заполненные идеальной несжимаемой жидкостью:

$$-\rho_1\varphi_{1t}(0,y,t)=P_1^*(t),\quad -\rho_2\varphi_{2t}(x_*,y,t)=P_2^*(t)$$

$$\varphi_{ky}(x,0,t)=\varphi_{ky}(x,y_0,t)=0,\quad \varphi_{1x}(x_0,y,t)=\varphi_{2x}(x_0,y,t)=\frac{\partial w(y,t)}{\partial t}$$

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mathcal{D}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\int_0^t\frac{\partial Q_1(t,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial^4 w(y,\tau)}{\partial y^4}d\tau\right)+N(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+\beta_0\left(w-\int_0^t\frac{\partial Q_2(t,\tau)}{\partial\tau}w(y,\tau)\,d\tau\right)+\beta_1\frac{\partial w}{\partial t}+\beta_2\frac{\partial^5 w}{\partial y^4\partial t}+\beta_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial t}=$$

$$=-\rho_1\varphi_{1t}(x_0,y,t)+\rho_2\varphi_{2t}(x_0,y,t).$$

Здесь φ_1, φ_2 – потенциалы скоростей жидкости, удовлетворяющие уравнениям Лапласа в областях V_1, V_2; $w(y,t)$ – прогиб пластины, жестко защемленной в подвижные элементы; $P_1^*(t)$, $P_2^*(t)$ – законы изменения давления на концах канала; ρ_1, ρ_2, M, $\mathcal{D}$, β_0, β_1, β_2 – неотрицательные, а β_3 – неположительная константы. Решение задачи отыскивается в виде разложений по полной системе функций $\{\cos\lambda_n y\}$, $\lambda_n=n\pi/y_0$, $n=0\div\infty$, с коэффициентами, зависящими от x, t (для φ_1, φ_2) и от t (для w, $w=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\cos\lambda_n y$), и приводится к исследованию интегро-дифференциальных уравнений для $W_n(t)$, $n=0\div\infty$. На основе построения функционалов Ляпунова получены условия устойчивости решений этих уравнений, налагающие ограничения на сжимающее усилие $N(t)$ и на меры релаксации Q_1, Q_2.

Виноградова Г.А. (Воронеж)

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН.

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения внутренних волн, т.е. уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

$0<z<1$, $x \in R$, $t>0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{z=0}=u\big|_{z=1}=0 \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=0 \; ; \; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x,z) \qquad (3)$$

Получены асимптотические оценки при $t \to +\infty$ решения задачи (1) - (3). В частности справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi(x,z) \in C_0^4(R^2)$, тогда $u \in C^2(R^2)$ и является ограниченной функцией. Кроме того, при $t \to +\infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$u(x,z,t)=\frac{1}{8\pi}\int_{R^2}\Delta\varphi(x,z)\ln\left|\frac{\cos\pi(z-z')}{\cos\pi(z+z')}\right|dx\,dz+$$

$$+O(t^{-1/2})$$

Витюк А.Н. (Одесса)

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ R -РЕШЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть $(E^n, \|\cdot\|)$ – евклидово пространство с нулевым элементом θ; $comp E^n (conv E^n)$ – пространство непустых и компактных (выпуклых и компактных) подмножеств E^n с метрикой Хаусдорфа $d(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$u_{xy}(x,y) \in F(x,y,u(x,y),\lambda) \tag{I}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in I=[0,a],$$
$$u(0,y)=\psi(y),\ y\in J=[0,b],\ \varphi(0)=\psi(0),\ G=I\times J. \tag{2}$$

Под решением дифференциального включения (I) понимаем абсолютно непрерывную функцию $u: G\to E^n$, которая почти всюду на G удовлетворяет (I).

Пусть многозначное отображение $F: G\times E^n\times\Lambda\to conv E^n$, $\Lambda\in comp E^m$ непрерывно по x, y, u, λ, удовлетворяет условию Липшица по u и $d(F(x,y,u,\lambda),\{\theta\})\le M$. Через $R(x,y,\lambda)$ обозначим R -решение, порожденное дифференциальным включением (I) и пусть λ_0 – предельная точка Λ.

Доказано, что при указанных предположениях относительно F для любого $\eta>0$ существует $\delta(\eta)>0$ такое, что для $\lambda\in\Lambda$ и $\|\lambda-\lambda_0\|\le\delta(\eta)$ при $(x,y)\in G$

$$d(R(x,y,\lambda),R(x,y,\lambda_0))\le\eta.$$

Это утверждение используется для обоснования принципа усреднения для дифференциального включения $u_{xy}\in\varepsilon^2 F(x,y,u)$ ($\varepsilon>0$ – малый параметр) с краевыми условиями (2).

Гайдукевич А.П., Горбузов В.Н. (Гродно)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Для автономных дифференциальных систем второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y) \tag{I}$$

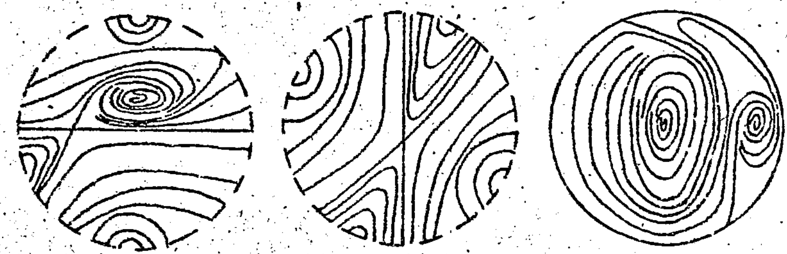
введено понятие топологической эквивалентности по траекториям на проективной плоскости. Иллюстрируется атласом с тремя картами (x,y), (u,z), (v,z) на фазовых плоскостях системы (I) и систем, полученных из (I) посредством преобразований Пуанкаре.

Например, система

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \left[5 - 10^{-13}\right] x - y + \left[15 + 8\,10^{-52} - 9\,10^{-13}\right] x^2 - 10^{-200}xy - x^3 - x^2y, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[25 + 8\,10^{-52} - 9\,10^{-13}\right] xy - x^2y - xy^2$$

имеет атлас



Здесь картами являются круги Пуанкаре, на которых изображены фазовые портреты системы (2) в плоскостях (x,y), (u,z), (v,z), соответственно.

УДК 517.927.6

Гареева Т.М. (Воронеж)

О Т-РЕГУЛЯРНЫХ НАБОРАХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $(C^n[a,b])^*$.

В работе [1] была выяснена общая природа условий разрешимости типа В.И.Ильина-Е.И.Моисеева для нелокальных краевых задач. Выделен класс так называемых Т-регулярных наборов функционалов в $C^*[a,b]$. Набор $\{\ell_i\}_1^n$ из $C^*[a,b]$ называется Т-регулярным, если он ортогонален любой Т-системе порядка $n-1$ на $[a,b]$. Для краевых задач с неосциллирующими операторами Т-регулярные краевые условия гарантируют невырожденность.

В [1] изучены условия Т-регулярности совокупности интегральных функционалов вида

$$\ell_i(x) = \int_a^b \alpha_i(t)x(t)d\sigma(t) \qquad (i=\overline{1,n})$$

и многоточечных вида

$$\ell_i(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}x(\xi_j) \qquad (i=\overline{1,n}\ ;\ m\geq n).$$

В настоящей работе изучается Т-регулярность набора функционалов, содержащих не только значения функции в точках, но и значения производных, т.е. набора из $(C^n[a,b])^*$.

Теорема. Рассмотрим набор функционалов

$$\ell_i(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(-1)^j \mathcal{D}_j x(a) \qquad (i=\overline{1,p}\ ;\ m\geq p), \qquad (1)$$

где $A = \|\alpha_{ij}\|$ - числовая матрица,

$$\mathcal{D}_0 x = \vartheta_0(\cdot)x,\ \mathcal{D}_j x = \vartheta_j(\cdot)\frac{d}{dt}(\mathcal{D}_{j-1}x), \qquad (j=\overline{1,m}),$$

$\vartheta_j(\cdot)$ - гладкие и положительные функции.

Для того, чтобы набор функционалов (1) был Т-регулярным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\|\alpha_{ij}\|$ имела ранг p и все ненулевые миноры порядка p имели одинаковый знак.

Литература.

1. Покорный Ю.В., Лазарев К.П., Гареева Т.М.// Диф. уравнения.- 1989.-Т.25,№8.-С.1321-1332.

2. Ильин В.А., Моисеев Е.И.// Докл. АН СССР.-1986.-Т.291,№3.- С.534-539.

Глушакова Т.Н. (Воронеж)

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ, НА БАЗЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ.

В работе И.А. Блатова, В.В. Стрыгина (Сходимость метода сплайн-коллокации на оптимальных сетках для сингулярно возмущенных краевых задач// Дифференциальные уравнения.- 1988.- т.24, №II.- с.1977-1987) рассматривается метод сплайн-коллокации для линейной задачи при условии, что коэффициенты не зависят от малого параметра $\mathcal{E}$. В настоящем докладе обобщаются результаты на случай, когда коэффициенты содержат особенности типа "погранслоя".

На отрезке $[-1,1]$ рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} Lx \equiv \mathcal{E}\dot{x} - A(t,\mathcal{E})x = f(t,\mathcal{E}) \\ x^1(-1,\mathcal{E}) = \ldots = x^k(-1,\mathcal{E}) = x^{k+1}(1,\mathcal{E}) = \ldots = x^n(1,\mathcal{E}) = 0 \end{cases},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ - малый положительный параметр.

Предполагается, что:

1) матрица $A(t,\mathcal{E})$ и вектор $f(t,\mathcal{E})$ - функции класса $C^3[-1,1]$, причем для матрицы $A(t,\mathcal{E})$ справедливо представление

$$A(t,\mathcal{E}) = \bar{A}(t) + \Pi A(\tau_1) + QA(\tau_2) \quad \left(\tau_1 = \frac{t+1}{\mathcal{E}},\ \tau_2 = \frac{t-1}{\mathcal{E}}\right),$$

где $\Pi A(\tau_1), QA(\tau_2)$ - матричные функции типа погранслоя,

2) $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \ldots < \lambda_k(t) < 0 < \lambda_{k+1}(t) < \ldots < \lambda_n(t)$ для любых $t \in [-1,1]$, где $\lambda_i(t)$ - собственные значения матрицы $\bar{A}(t)$.

Для таких систем предлагается метод сплайн-коллокации и доказывается равномерная по малому параметру оценка погрешности порядка $1/m^2$ (где m - число узлов сетки).

Гончарова Г.А., Гарбуз Е.Б. (Саратов)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ В СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ

В данном сообщении рассматривается задача построения и идентификации моделей поведения пластин и оболочек, работающих в сложных условиях, то есть при воздействии механических нагрузок, коррозионных сред, температурных полей. При идентификации моделей используются экспериментальные данные по длительной прочности, полученные при испытании на растяжение тонкостенных трубчатых образцов и испытании на изгиб прямоугольных пластин в инертной и интересующей исследователя среде.

Для учета влияния коррозионной среды рассматриваются две основные группы зависимостей. Первая - основана на введении параметра δ, характеризующего глубину разрушенного слоя. Конкретных дифференциальных уравнений для этого параметра может быть несколько, в зависимости от конкретной задачи.
Вторая группа зависимостей строится для специально введенного параметра коррозионной поврежденности, изменяющегося от I до Ψ_p в момент разрушения. Конкретных дифференциальных уравнений для этого параметра может быть так же несколько.

Для оценки влияния механических нагрузок используется теория накопления повреждений Ю.Н.Работнова.

Влияние температурных полей учитывается с помощью соотношений теплопроводности.

При построении моделей расчета учитывается, что все процессы, протекающие в материале конструкций тесно взаимосвязаны.

Для определения всех коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения задачи разработана специальная методика и программы расчета, позволяющие в режиме диалога производить оценку коэффициентов по экспериментальным данным, и, кроме того, выбирать конкретные соотношения для параметров, учитывающих различные воздействия, исходя из простоты и удобства определения коэффициентов, при сохранении точности получаемых результатов.

Горбузов В.Н. (Гродно)

АВТОМОРФНОСТЬ ОДНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для дифференциального уравнения в частных производных

$$F\left[D^{m}_{z_1} w, \ \dots \ , D_{z_n} w, \ w, \ z_1, \ \dots \ , z_n\right] = 0, \qquad (\mathrm{I})$$

где функция F представима абсолютно сходящимся степенным рядом по своим аргументам в некоторой области комплексного пространства, рассматривается возможность построения однозначных решений посредством автоморфизмов X конечного расширения $\mathfrak{R}$ поля $\mathbb{C}$.

Теорема. *Пусть дифференциальное уравнение (I) самосопряжено при автоморфизме X конечного расширения $\mathfrak{R}$ поля $\mathbb{C}$ и имеет:*

а) целое решение $w=f(z)$;

б) целое трансцендентное решение $w=u(z)$ конечного порядка $\operatorname{ord} u(z)=\rho$;

в) целое трансцендентное решение $w=v(z)$ типа $\operatorname{typ} v(z)=\Omega$ при конечном ненулевом порядке $\operatorname{ord} v(z)=\rho$ по отношению к норме $P(z)=$ $=\sup\limits_{1\le j\le n} |z_j|$;

г) однозначное решение $w=g(z)$.

Тогда это уравнение (I) имеет X- сопряжённое:

а) целое решение $w=f_{(X)}(z)$;

б) целое трансцендентное решение $w = u_{(X)}(z)$ порядка $\operatorname{ord} u_{(X)}(z)=\rho$;

в) целое трансцендентное решение $w=v_{(X)}(z)$ типа $\operatorname{typ} v_{(X)}(z)=\Omega$ и порядка $\operatorname{ord} v_{(X)}(z)=\rho$ по отношению к той же норме $P(z)$;

г) однозначное решение $w=g_{(X)}(z)$.

С этой целью предварительно доказывается сохранение порядка и типа целой трансцендентной функции, а также неизменность области сходимости степенного ряда на диаграмме Рейнхарта при автоморфизме X конечного расширения $\mathfrak{R}$ поля $\mathbb{C}$.

На случай обыкновенного дифференциального уравнения дополнительно указывается возможность построения X - сопряжённых однолистных голоморфных функций-решений одного комплексного переменного.

Грабовская Г.Г., Тингаев А.А. (Одесса).

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Рассматриваются уравнения вида

$$y' = f_1(x,y) + F_1(x,y,W_m y), \tag{1}$$

$$g(x,y)\,y' = f_2(x,y) + F_2(x,y,W_m y), \tag{2}$$

где $W_m y$ - оператор, определенный на некотором классе функций, действующий на $y, y', \dots, y^{(m)}$; $y \in C^m$.

Здесь "укороченные" уравнения

$$y' = f_1(x,y), \tag{3}$$

$$g(x,y)\,y' = f_2(x,y) \tag{4}$$

имеют некоторое семейство решений $y = \varphi(x,C)$, для которого можно найти множество точек $x_0(C)$, такое, что:

в случае (3):

$$\lim_{x \to x_0(c)+0} \varphi(x,c) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0(c)+0} f_1(x,\varphi(x,c)) = \infty;$$

в случае (4):

$$\lim_{x \to x_0(c)+0} \varphi(x,c) = y_0(c) \neq \infty,$$

$$\lim_{x \to x_0(c)+0} g(x,\varphi(x,c)) = 0, \quad \lim_{x \to x_0(c)+0} f_2(x,\varphi(x,C)) \neq \infty.$$

То есть $x_0(C)$ - подвижная особая точка решений уравнений (3), (4).

Даются достаточные условия существования решений уравнений (1),(2) на $[x_0(c), x_0(c)+\Delta]$, $0<\Delta = const$, асимптотически представимых соответствующим решением соответствующего "укороченного" уравнения (3) или (4) при $x \to x_0(c)+0$.

Гурьянов А. Е. (Санкт-Петербург).

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

При математическом моделировании реальных процессов обыкновенными дифференциальными уравнениями часто требуется знать значения дискретизированного решения задачи Коши

$$dy/dx = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 , \tag{I}$$

где $x,\ x_0 \in R^1$, $y,\ y_0 \in R^n$, $f(x,y) \in R^n$.

В такой ситуации предлагается рассматривать в качестве математической модели исследуемого явления только те системы уравнений вида (I), для которых существуют точные численные методы их решения [I, 2]. Сам вывод искомой формулы метода не всегда прост.

Например, для следующего уравнения Бернулли

$$dy/dx = ay + b(x)y^p , \quad (p \neq 0,\ p \neq 1) \tag{2}$$

где $x,\ y \in R^1$, $a \in R^1$,

$$b(x) = \sum_{j=1}^{q} (P_j(x)\cos(\mu_j x) + Q_j(x)\sin(\mu_j x))\exp(\lambda_j x),$$

$\lambda_j, \mu_j \in R^1$, $P_j(x)$, $Q_j(x)$ – многочлены аргумента x степенью m_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, с помощью теорем из статьи [I] устанавливается, что по любому натуральному числу $m \geqslant 2(q + \sum_{j=1}^{q} m_j)$ и по любому шагу интегрирования $h > 0$ существует явный нелинейный m-шаговый точный численный метод решения уравнения (2) в смысле существования m вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ таких, что

$$y_k = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{k-j}^{1-p}\right)^{1/(1-p)}, \quad k = m, m+1, \ldots,$$

где $y_k = y(x_0 + kh)$, $y(x)$ – произвольное решение уравнения (2).

Литература

I. Гурьянов А. Е. Точные методы численного решения систем линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник ЛГУ. Сер. I, вып. 2 (№ 8). 1988. – С. I7 – 2I.

2. Гурьянов А. Е. Построение оптимального по точности численного метода решения задачи Коши // Дифференциальные уравнения с частными производными. – Л.: ЛГПИ, 1990. – С. 80 – 84.

Денисковец А.А. (Гродно)

ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Для дифференциального уравнения Абеля первого рода

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x) y^{3-i} \qquad (1)$$

с аналитическими по x коэффициентами $a_i(x)$, $i=\overline{0,3}$, $a_0(x) \neq 0$, рассматриваются возможности построения общего интеграла и интегрирующего множителя по известным частным интегралам $w_s(x,y)$, являющимися полиномами относительно y с аналитическими коэффициентами по x (аналог задачи Лиувилля относительно уравнения Риккати).

На основании подхода, изложенного в [1], получены достаточные условия наличия у дифференциального уравнения (1) общего интеграла

$$H(x,y) = C \qquad (2)$$

и интегрирующего множителя

$$\mu = H(x,y), \qquad (3)$$

где $H(x,y) = \prod_{s=1}^{3} w_s^{\beta_s}(x,y)$, β_s - некоторые постоянные.

Если известные частные интегралы $w_s(x,y)$ распадаются на решения вида $y=y_i(x)$, $i=\overline{1,p}$, то при $p \geq 3$ построить общий интеграл (2) нельзя, а можно лишь построить в виде произведения (3) интегрирующий множитель.

Вопрос о виде частных интегралов $w_s(x,y)$ уравнения Абеля (1), по которым строится общий интеграл (2) или интегрирующий множитель (3), сводится к наличию хотя бы одного частного интеграла, зависящего только от независимого переменного x или имеющего вид произведения $w = \bar{u}(x)v(x,y)$.

Показано, что более характерными для уравнения Абеля (1) являются общий интеграл $f(x)H(x,y)=C$ и интегрирующий множитель $\mu = f(x)H(x,y)$.

[1] Горбузов В.Н. К вопросу об интегрируемости в квадратурах// Доклады АН Белорусской ССР. - 1981. - Т. 25, № 7. - С. 584 - 585.

Джваршейшвили А.Г. (Тбилиси)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Как известно, задача Дирихле для уравнения

$$y \Delta W + \alpha W'_y = -F(x,y) \quad (1)$$

где $-\infty < x < \infty$, $y > 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ имеет единственное решение вида

$$W(x,y) = y^{1-\alpha} \iint_K FG(x,y,t,\tau)\,dt\,d\tau + (1-\alpha) y^{1-\alpha} \times \quad (2)$$
$$\times \int_{-1}^{1} f(t,0) G(x,y,t,0)\,dt - y^{1-\alpha} \int_0^{\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi) \frac{\partial G}{\partial n}(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi) \times$$
$$\times \sin\varphi\, d\varphi$$

при условии: 1) $F(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера, когда $\in \overline{K} = \{(x,y);\ x^2+y^2 \le 1,\ y \geqslant 0\}$;
2) $F(x,y) = 0$, $(x,y) \in K, y \le \omega$, ω - достаточно малое число;
3) $f(x,y)$ непрерывна на ∂K; 4) $0 < \alpha < 1$.

Устанавливается, что при гораздо слабых ограничениях на F, f решение задачи Дирихле для (1) сохраняет вид . Кроме того доказывается, что полученные ограничения ослабить нельзя.

Дзюбенко Г.А., Листопад В.В., Шевчук И.А. (Киев)

О КОМОНОТОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

Пусть на отрезке $I:=[-1,1]$ заданы s фиксированных точек $-1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_s = 1$, положим $m := m(y_0,\ldots,y_s) := \min\{y_j - y_{j-1} \mid j=\overline{1,s}\}$.

Обозначим W^r, $r \in \mathbb{N}$, – класс функций $f=f(x)$, имеющих на I $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, для которых $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ п.в.на I.

Для случая $r>2$ доказана следующая

Теорема 1. Если $f \in W^r$ и кусочно монотонна на I, а именно, $f(x)\Pi_{j=0}^{s}(x-y_j) \geq 0$, $x \in I$, то существует номер $N = N(r,s,m)$ и число $C = C(r,s)$ такие, что при каждом натуральном $n \geq N$ найдется алгебраический многочлен $P_n = P_n(x)$ степени n комонотонный с f (т.е. $P_n(x)\Pi_{j=0}^{s}(x-y_j) \geq 0$, $x \in I$), для которого

$$|f(x)-P_n(x)| \leq C(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)^r, \quad x \in I, \tag{1}$$

в частности

$$|f(x)-P_n(x)| \leq 2^r C / n^r, \quad x \in I. \tag{2}$$

В ряде важных случаев (например, для $s=1$, или для $r=1,2$) оценки (1),(2) вытекают из результатов G.G.Lorentz, K.L.Zeller, R.De Vore, J.A.Roulier, D.Newman, E.Passow, L.Raymon, A.С.Шведов, G.L.Iliev, R.K.Beatson, K.M.Yu, D.Leviatan, И.А.Шевчук, см.[1],[2] и др.

Литература

1. Yu K.M. On comonotone approximation and coconvex approximation of differentiable function // J.Math.Res.Exposition 9(1989),N3,437.

2. Шевчук И.А. Приближение монотонных функций монотонными многочленами // Матем.сборник, 1992, 183, N5, с.63-78.

Дободейч И. А. (Воронеж)

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. При анализе течений невязкой жидкости обычно пользуются следующими уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial \ell} = 0 , \quad \rho \frac{\partial W}{\partial t} + \rho W \frac{\partial W}{\partial \ell} + \frac{\partial P}{\partial \ell} = 0 \quad (1)$$

где ρ, P и W - плотность, давление и скорость жидкости.

Они при использовании допущения Жуковского

$$\frac{\partial P}{\partial z} = A^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \text{ и } z \equiv \frac{\ell}{R}, M \equiv \frac{W}{A}, \tau \equiv \frac{R}{A}, A, R - Const \ (2)$$

имеют вид

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho M)}{\partial z} = 0 , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + M \frac{\partial M}{\partial z} + \tau \frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

2. Система этих уравнений подстановкой [1]

$$\rho = \rho_H e^{\pm M} , \quad \rho_H - Const \quad (3)$$

сводится к одному

$$\tau \frac{\partial M}{\partial t} + (M \pm 1) \frac{\partial M}{\partial z} = 0$$

3. Этому уравнению удовлетворяет следующее семейство частных решений

$$M = \frac{C_1 + \tau z}{C_2 + t} \mp 1 , \quad C_1, C_2 - Const \quad (4)$$

которое описывает, например, начальную стадию течения невязкой жидкости или газа в трубопроводе после открытия клапана на его конце в период пробега начальной волны давления от клапана до противоположного конца трубопровода.

Литература

1. Дободейч И. А., Кочергина Р. П. Расчет переходных процессов в гидропневмолиниях. - Баку: Изв. ВУЗов "Нефть и газ", - 1977, № 10. - С. 69-74

Е.П.Долженко (Москва)

ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЧЕБЫШЕВСКИМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ

Обозначения: $\Delta=[a,b]$, $M(\Delta)$ - линейное пространство ограниченых функций на Δ, $C(\Delta)$ - подпространство его непрерывных функций, L - чебышевское подпространство на Δ (то есть конечномерное линейное пространство, порожденное некоторой чебышевской системой функций на Δ), P - сублинейный функционал на линейном нормированном пространстве Λ; знакочувствительным весом на Δ назовем упорядоченую пару $p=(p_-,p_+)$ неотрицательных ограниченых функций на Δ; $f^+(x):=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x):=(-f(x))^+$, $(f,p)(x):=f^+(x)p_+(x)-f^-(x)p_-(x)$, $\|f\|:=\sup\{|f(x)|:x\in\Delta\}$; $|f|_p:=\|(f,p)\|$; $W(p,A):=\sup\{\|f\|/P(f):f\in A,f\neq0\}$ при $A\subset\Lambda$ - свобода системы $(P;A)$; $E(P,L,f):=\inf\{P(l-f):l\in L\}$ и $l(P,L,f)$ - наименьшее уклонение и соответствующая функция наилучшего приближения из L для $f\in C(\Delta)$; при $P(\cdot)=|\cdot|_{p,\Delta}$ пишем $W(p,L)$, $E(p,L,f)$ и $l(p,L,f)$ вместо соответствующих выражений с P.

Теорема 1. *Если L - чебышевское подпространство на Δ линейной размерности $n=\dim L$, то необходимым и достаточным условием конечности свободы $W(p,l)$ является выполнение одного из условий:*

(a) *на Δ имеется возрастающая последовательность из $n+2$ точек, в которых p_- и p_+ (или p_+ и p_-) попеременно положительны;*

(b) *на Δ имеется ровно $n+1$ точек, в которых p_- и p_+ одновременно положительны, в остальных же точках они равны 0.*

Теорема 2. *Если $f\in C(\Delta)$ и $E(p,L,f)>0$, то $l(p,L,f)$ единствена.*

Теорема 3. *Функция $l(p,L,f)$ единствена для каждой $f\in C(\Delta)$ тогда и только тогда, когда замкнутые носители $\operatorname{supp} p_-$ и $\operatorname{supp} p_+$ функций p_- и p_+ имеют не менее $n=\dim L$ общих точек.*

Теорема 4. *Для диаметра множества $A(P,L,f)$ всех функций $l\in L$ наилучшего приближения $f\in C(\Delta)$ относительно сублинейного функционала P справедливо неравенство*

$$\operatorname{diam} A(P;L,f)\leq 2W(P;L)\cdot(E(P;L,f)+E(P;L,-f)).$$

Эти результаты полученны совместно с Е.А.Севастьяновым.

В. В. Дубровский, А. С. Печенцов. (Москва)

Асимптотическое разложение спектральной функции самосопряженных дифференциальных операторов.

В пространстве $H = L^2(M, dx)$ рассматриваются положительный псевдодифференциальный оператор T порядка m и оператор P - умножения на вещественную гладкую функцию $P(x)$ заданную на n-мерном многообразии M. Пусть $v_j(x)$ и $u_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$ - ортонормированные собственные функции операторов T и $T + P$ соответственно. Допустим, что для любой точки $x \in M$ подмножество

$$\Sigma_x = \{\xi \in T^*_x M, \ t_m(x, \xi) = 1\},$$

где $t_m(x, \xi)$ главный символ оператора T, строго выпукло в касательном пространстве $T^*_x M$.

Теорема. *Если* $m > n$, *и* $l > \max\left[\dfrac{n-1+\delta(q)}{m-n}; \dfrac{\delta(q)+1}{m-n}\right]$, *то* $\exists$ *последовательность натуральных чисел* $j_k \to \infty$, *такая что*

$$\lim_{j_k \to \infty} \Big\| \sum_{j=1}^{j_k} u_j(x)\bar{u}_j(y) - \sum_{j=1}^{j_k} v_j(x)\bar{v}_j(y) - \sum_{s=1}^{l-1} a_s(j_k) \Big\|_{L^q} = 0,$$

где $a_s(j_k)$ - *s-ая поправка теории возмущений,*

$$\text{и } \delta(q) = \begin{cases} \max\left(n\left|\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2},\ 0\right) & \text{при } \dfrac{2(n+1)}{n-1} \le q \le \infty, \\[2ex] \dfrac{(n-1)(2-q')}{4q'} & \text{при } 2 \le q \le \dfrac{2(n+1)}{n-1}, \end{cases}$$

причем числа q и q' связаны условием

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

С л е д с т в и е. Если $m > \max(2n - 1 - \delta(q),\ n + 1 + \delta(q))$ и $q > 2$, то

$$\lim_{j_k \to \infty} \Big\| \sum_{j=1}^{j_k} u_j(x)\bar{u}_j(x) - v_j(x)\bar{v}_j(x) \Big\|_{L^q} = 0.$$

Дудецкая Г.В., Тишкова В.Л., Куксина Л.П. (Воронеж)

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ: "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ" В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ

Изучение темы "Дифференциальные уравнения" имеет большое образовательное, воспитательное и прикладное значение. Она принципиально важна для учащихся, которые в дальнейшем продолжат заниматься математикой на более высоком уровне. Но, к сожалению ни учебных пособий, ни методических разработок по данной теме нет. Мы предлагаем познакомиться с опытом преподавания этой темы в средней школе № 29.

Цель изучения темы:

I. Заинтересовать учащихся элементами мат.анализа

2. Показать роль и место метода дифуравнений в решении разнообразных задач

3. Сформировать у учащихся общие представления о математическом моделировании процессов в физике, биологии, экономике.

Содержание блока:

№	Тема	Основное содержание	Тип урока
I. 2.	Дифференциальные уравнения	Задачи, приводящие к появлению диф.уравнений; основные понятия, связанные с темой; составление диф.уравнений; основные методы решений	Лекция
3.	Дифференциальные уравнения	Сконцентрировать внимание учащихся на главных и существенных моментах изучаемой темы; учителем анализируются ответы всех учеников, даются дифференцированные задания	Урок-консультация
4. 5.	Решение дифференциальных уравнений	Нахождение второй производной; решение дифуравнений гармонических колебаний; уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений I степени	Практикум
6.	Решение диф.уравнений	Обучающая самостоятельная работа	Урок-практикум по "челночной системе"
7-9.	Решение задач	Задачи прикладного содержания	Групповая работа
IO.-I2	Творческий отчет	Заслушивание докладов; Выполнение комп.заданий	Конференция; Зачет

Дьяченко И.В. (Москва)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Центральной проблемой прямого метода Ляпунова является проблема построения функции Ляпунова, играющей важную роль в задачах анализа устойчивости. Функции Ляпунова можно конструктивно строить для нелинейных автономных систем общего вида в областях с выколотой окрестностью нуля (нулевое положение равновесия соответствует невозмущенному движению).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x = (x_i)_{i=1}^{n} \tag{1}$$

и область G, содержащую $x = 0$ в качестве внутренней точки. Из анализа проблемы построения функции Ляпунова в области с выколотой окрестностью нуля, возникает вопрос о том, что можно сказать о системе, для которой на последовательности замкнутых множеств

$\Gamma_m = \{G \setminus B_m\}$, где B_m, $m=1,2,\ldots$ таковы, что $\operatorname{diam} B_m = \max\limits_{x,y \in B_m} \|x-y\| \underset{m\to\infty}{\to} 0$,

построена последовательность непрерывно дифференцируемых функций Ляпунова:

$$\begin{cases} v_m(x) > 0 \\ \dot{v}_m(x) < 0 \end{cases} \quad x \in \Gamma_m . \tag{2}$$

Определим последовательность чисел

$\{A_m\} = \{A_m : A_m = \max\limits_{x \in \partial B_m} (v_m(x))\}$, где ∂B_m - граница окрестности нуля B_m, и соответствующие ей множества

$$D_m = \{ x \in \Gamma_m : v_m(x) \le A_m \}.$$

Учитывая данные обозначения, сформулируем теорему.

Теорема. Тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{v_m(x)\}$, удовлетворяющих (2), что $\operatorname{diam} D_m \to 0$.

Евтухов В.М.(Одесса)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется вопрос об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений вида

$$u^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left[P_{0k}(t)+P_{1k}(t)\right]u^{(k)}, \qquad (1)$$

где $P_{0k}:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(k=0,\ldots,n-1)$ - локально абсолютно непрерывные, а $P_{1k}:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(k=0,\ldots,n-1)$ - малые в некотором смысле локально суммируемые функции.

Рассматривается случай, когда существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции φ , $\psi:[a,+\infty[\to]0,+\infty[$ такие, что:

- а) существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to+\infty}a_k(t)=a_{0k};\ \lim_{t\to+\infty}b_k(t)=b_{0k}\quad(k=0,\ldots,n-1),$$

где

$$a_k(t)=\varphi^{-1}(t)\psi^{-1-k}(t)(\varphi(t)\psi^k(t))',\ b_k(t)=\psi^{k-n}P_{0k}(t);$$

б) уравнение

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda+a_j(t))=\sum_{k=1}^{n-1}b_k(t)\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda+a_j(t))+b_0(t) \qquad (2)$$

имеет корни $\lambda_{im}(t)$ $(i=1,\ldots,s,\ m=1,\ldots,n_i,\ \sum_{i=1}^{s}n_i=n)$, которые являются локально абсолютно непрерывными на некотором промежутке $[T,+\infty[\subset[a,+\infty[$ комплекснозначными функциями и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to+\infty}\lambda_{im}(t)=\lambda_i,\ \lambda_i=\mathrm{const},\ \lambda_i\neq\lambda_j \text{ при } i\neq j$$

Полученные результаты существенно обобщают результаты И.Т.Кигурадзе/см.Труды Тбилис.ун-та,1964,т.102,с.149-167/,установленные для случая простых корней /т.е.когда $s=n$ /предельного уравнения(2).

Жогин И. Л. (Кемерово)

О СИНГУЛЯРНОСТЯХ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Требования к уравнениям теории поля: гиперболичность, нелинейность (отсутствует суперпозиция), решение задачи Коши не ограничено во времени (сингулярностями, например). Аналогия из теологии: "Бог" не может ограничивать свое могущество, компетентность (а "бросание костей", кстати, есть кризис компетентности - "Бог не копенгаген").

Проблема N1 - градиентная катастрофа (ГК), или многозначность решений [1]. Скажем, для у-ний газовой динамики ГК это ЧП.

Рецепт от ГК - общековариантность (ОК) у-ний, возможность любых замен координат x^{μ}; тогда рождение многозначности можно трактовать как выбор плохих (многозначных) координат. В ОК-теории остается такая проблема, как появление сингулярностей (вырождение метрики).
Выбор полей: поле n-реперов $h_a{}^{\mu}\in Mat(n\cdot n)$ (набор векторных полей); метрика $g_{\mu\nu}=\eta_{ab}h^a{}_{\mu}h^b{}_{\nu}$, где $\eta_{ab}=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$ $(h_a{}^{\mu}h^b{}_{\mu}=\delta^b_a)$.
Опр. 1 Абсолютный параллелизм (АП) это набор совместных ОК-у-ний (не недоопределенных) второго порядка поля h, допускающих замены $(k>0)$ $h^{*a}{}_{\mu}=k\, s^a{}_b\, h^b{}_{\mu}(x)$, $s^a{}_b\in O(1,n-1)$; k, $s^a{}_b=\mathrm{const}$. ■ Решение понимается как класс эквивалентности - относительно действия (псевдо)группы диффеоморфизмов пространства и преобразований Опр. 1. В АП входит и вакуумное у-ние ОТО. Символ у-ний АП стратифицирован по рангу $h^a{}_{\mu}$.
Т. 1 После замены вида $h_a{}^{\mu}= H^pH_a{}^{\mu}$ $(H=\det H^a{}_{\mu})$ любое у-ние АП записывается через $H_a{}^{\mu}$ так, что его символ билинеен по $H_a{}^{\mu}$ и инволютивен, если $r\geq2$ $(r=\mathrm{rank}H_a{}^{\mu})$; члены H'^2 обычно сингулярны, если $r<n$ (случай сильных сингулярностей, обрывающих решение), но существует 1-параметрический класс у-ний $Eq.\mathrm{I}$ (не лагранжевых), допускающих 3-линейный (по $H_a{}^{\mu}$) вид (случай слабых сингулярностей); см. [2a].
Т. 2 У-ния $Eq.\mathrm{I}$ - за одним исключением: $Eq.\mathcal{A}$ - записываются в переменных $h_{a\mu}$ так, что символ полилинеен по $h_{a\mu}$ (входят миноры $h_{a\mu}$) и инволютивен, если $r^*\geq n-1$ $(r^*=\mathrm{rank}\, h_{a\mu})$, но члены h'^2 расходятся при $r^*<n$ (сильные сингулярности); см. [2b].

В итоге, требование невозможности сильных сингулярностей выделяет в АП одно у-ние - $Eq.\mathcal{A}$. Было бы интересно ответить на вопрос: существует ли для $Eq.\mathcal{A}$ закон сохранения (n-импульса) и может ли он подавить рождение слабых сингулярностей.

1. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В., Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
2. Жогин И. Л. //Изв. вузов. Физика. 1991, N9, С. 47; 1992, N7, С. 73.

УДК 517.927

Завгородний М.Г. (Воронеж)

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Вопросу о разложимости функции из области определения обыкновенного линейного дифференциального оператора в равномерно сходящийся ряд по корневым функциям этого оператора посвящена обширная литература (см., напр., [I]). Однако для приложений (например, для обоснования метода разделения переменных) важно показать сходимость такого ряда не только по норме пространства $C[a,b]$, но и по норме пространства $C^n[a,b]$, т.е. важно установить базисность системы корневых функций обыкновенного линейного дифференциального оператора в его области определения. Указанной проблеме и посвящен доклад.

На конечном отрезке $[a,b]$ рассмотрим обыкновенный линейный дифференциальный оператор $Lx \equiv x^{(n)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_n(t)x$, определенный на множестве $\mathcal{D}(L)$ функций из $C^n[a,b]$, удовлетворяющих регулярным (см. [I]) двухточечным краевым условиям.

Теорема. Любая функция f из $\mathcal{D}(L)$ разлагается в ряд по корневым функциям оператора L, сходящийся к f по норме пространства $C^{n-1}[a,b]$.

Сформулированная теорема допускает обобщение и на дифференциальные операторы, порожденные более общими (чем регулярные) краевыми условиями (например, почти регулярными). Обсуждается вопрос и о сходимости к $f \in \mathcal{D}(L)$ по норме пространства $C^n[a,b]$ ряда по корневым функциям оператора L.

Литература.

I. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Задорожний В.Г. (Воронеж)

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрено дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$dx/dt = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x \in R$, A и f – случайные процессы, x_0 – случайная величина. Предполагается, что A задано характеристическим функционалом $\varphi_0(v)$. Получены формулы для моментных функций любого порядка для решения. В частности, первые две моментные функции имеют вид

$$Mx(t) = Mx_0\varphi_0(-i\chi(t_0,t)) + \int_{t_0}^{t}\varphi_0(-i\chi(s,t))\,Mf(s)\,ds.$$

$$M(x(t)x(s)) = Mx_0^2\varphi_0(-i\chi(t_0,s) - i\chi(t_0,t)) +$$

$$+ Mx_0\Big[\int_{t_0}^{t}\varphi_0(-i\chi(\tau,t) - i\chi(t_0,s))\,Mf(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{s}\varphi_0(-i\chi(\tau,s) - i\chi(t_0,t))\,Mf(\tau)\,d\tau\Big] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}d\xi\int_{t_0}^{s}\varphi_0(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))\,M(f(\tau)f(\xi))\,d\tau,$$

где $Mx(t)$ – математическое ожидание по функции распределения A и f. Функция χ определяется следующим образом: $\chi(t_0,t_1,\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma - t_0)$ при σ принадлежащем отрезку с концами t_0, t_1 и $\chi(t_0,t_1,\sigma) = 0$ при σ не принадлежащем этому отрезку. Отметим, что t_1 может быть меньше t_0.

Метод позволяет находить моментные функции решения и коэффициента A, а также для решения и процесса f.

Задорожный А.И. /Ростов-на-Дону/

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЛИННЫХ МГД-ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Плоская линеаризованная задача о длинных / $h \cdot \lambda^{-1} \ll 1$, h - глубина/ волнах в однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной проводимости описывается системой уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} + A^2 \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

$$P = -z + \zeta + P_{атм} + \frac{1}{2}(A_1^2 - A^2) - A^2 \cdot H_x,$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad H_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad z = 0,$$

$$v_x = v_z = 0, \quad z = -1,$$

где $R = \frac{2\pi \cdot h^2 \cdot \sqrt{gh}}{\nu \cdot \lambda}$ - гидродинамическое число Рейнольдса,

$A^2 = \frac{H_0^2}{\rho g h}$, $A_1^2 = \frac{H_1^2}{\rho g h}$ - числа Альфвена, H_0 и H_1 - напряженности стационарных горизонтальных магнитных полей в жидкости и в вакууме над ней соответственно.

Свойства нормальных колебаний / $v_x = u(z) \cdot e^{\sigma t \pm i x}$ / определяются самосопряженным квадратичным операторным пучком, порожденным интегро-дифференциальным уравнением

$$-\frac{1}{R} \cdot u'' + \sigma \cdot u + \frac{1}{\sigma}\left(A^2 \cdot u + \int_{-1}^{0} u \cdot dz\right) = 0, \quad u(-1) = u'(0) = 0.$$

Результатом наложения магнитного поля является усиление "осциллятивности" системы: достаточное условие сильной демпфированности может быть сформулировано в виде $R^{-2} \geqslant \frac{64}{\pi^4} \cdot (1 + A^2)$. В этом случае при $A = 0$ существует лишь один режим медленного затухания / $\sigma \sim -\frac{R}{3}$ /, а при $A \neq 0$ их будет счетное множество с асимптотикой $\sigma_n = -\frac{\pi^2(2n-1)^2}{8R} + \left[\frac{\pi^4(2n-1)^4}{64R^2} - A^2\right]^{\frac{1}{2}}, n \in N$.

Изменяется и асимптотика малой вязкости. К "стандартной" колебательной моде $\sigma_0 = i\sqrt{1+A^2} - \frac{1+i}{2 \cdot \sqrt{2} \sqrt[4]{1+A^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$.

добавляется конечный набор альфвеновских волн:

$$\sigma_n = i \cdot A - \frac{\mu_n^2}{2R}, \quad tg\,\mu_n = \mu_n, \quad A^2 \leq |\sigma_n|^2 \leq 1 + A^2,$$

$$\mathrm{Re}\,\sigma_n \leq -\frac{1}{R}, \quad R \gg 1.$$

Затини Р., Кузнецова Е.В. (Воронеж)

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ НА БАЗЕ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

В работе Блатова И.А., Стрыгина В.В. (Сходимость метода сплайн-коллокации на оптимальных сетках для сингулярно возмущенных краевых задач //Дифференциальные уравнения.-1988.-т.24.-№11.-.1977-1987) рассмотрен метод сплайн-коллокации на базе параболических сплайнов и доказана оценка погрешности порядка $1/m^2$ где m - количество отрезков разбиения).

В настоящем докладе рассматривается задача

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} - a(t)x = f(t)$$

$$x(1)=0 \ , \quad t \in [0,1]$$

$$a(t) \geqslant a_0 > 0 \ , \quad 0 < \varepsilon \ll \frac{1}{m}$$

где $f(t), a(t)$ - достаточно гладкие функции.

Предлагается коллокационная схема на базе эрмитовых сплайнов и доказывается равномерная по малому параметру ε оценка погрешности порядка $1/m^4$.

Зеленков Г.А., Тульчий В.В. (Новороссийск)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПО ВИМАНУ-ВАЛИРОНУ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ПО КРИВЫМ НУЛЕВОГО ВРАЩЕНИЯ

Валирон (1913) и Виман (1915) доказали, что для целой функции (ц.ф.) порядка ρ, $0 \leq \rho \leq 1$ всегда

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \left(\ln m(z)/\ln M(z)\right) \geq \cos \pi\rho \qquad (1)$$

Хеймен (1952) доказал (1) для $\rho = 1$. Особый интерес вызывает случай равенства в (1). Такие функции называют экстремальными по Виману-Валирону (В-В). Оказывается этот случай имеет глубокие связи с "правильным" поведением ц.ф. в плоскости.

В работе исследуется класс целых функций вполне регулярного роста по Левину-Пфлюгеру (в.р.р.), экстремальных по В-В по кривым нулевого вращения (к.н.в.). Асимптотическое поведение ц.ф. в.р.р. по спиральным кривым впервые начал изучать Балашов (1972).

Основным результатом настоящего сообщения является следующий результат:

<u>Теорема</u>. Для экстремальности по В-В ц.ф. в.р.р. по к.н.в. по своему уточненному порядку $\rho(z)$, $\rho(z)\to\rho$, $0<\rho<1$ необходимо, а при $0<\rho\leq 1$ достаточно, чтобы индикатор $h^{\gamma}(\theta)$ был тригонометрическим с одним изломом, т.е.

$$h^{\gamma}(\theta) = a\cos\rho(\theta-\theta_0),\quad a>0,\quad |\theta-\theta_0|\leq\pi.$$

УДК 517.925 Зубова С.П. (Воронеж)

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача

$$\varepsilon^{h} C(t)\frac{dx}{dt} = [A - \varepsilon B(t)]x(t,\varepsilon), \quad x(0,\varepsilon) = x^{0}(\varepsilon), \qquad (1)$$

где E_1, E_2 банаховы пространства, A, B, C –линейные замкнутые операторы, действующие из E_1 в E_2, A –фредгольмовский, $\overline{\mathcal{D}(A)} = E_1$, $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(C) = E_1$, $\dim \ker A = 1$, $0 \le t \le T$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Приводится условие, необходимое и достаточное для того, чтобы частные решения $x_i(t,\varepsilon)$ уравнения (1) имели вид

$$x_i(t,\varepsilon) = \left(\exp \varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(s,\varepsilon)\, ds\right) \cdot u_i(t,\varepsilon) \qquad (2)$$

с $|\lambda_i(t,\varepsilon)| \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $i = \overline{1,\tau}$.

Это условие является условием равенства нулю некоторой алгебраической функции переменных ε и λ с коэффициентами, зависящими от t. С помощью диаграммы Ньютона легко находятся все $\lambda_i(t,\varepsilon)$. При этом на операторы $B(t)$ и $C(t)$ не накладывается никаких дополнительных ограничений, кроме гладкости и устойчивости по t некоторых свойств (кратность $\lambda_i(t,\varepsilon)$ не зависит от t, ...).

Показывается, что $u_i(t,\varepsilon)$ –линейная комбинация собственных и присоединенных элементов, отвечающих собственному значению $\lambda_i(t,\varepsilon)$ некоторого оператора.

Устанавливается количество s линейно независимых решений вида (2).

Находятся разложения $\lambda_i(t,\varepsilon)$ и $u_i(t,\varepsilon)$ по степеням ε.

Выводятся свойства $x^0(\varepsilon)$, необходимые и достаточные для того, чтобы исходная задача имела решение. Строится это решение.

В частном случае $C(t) \equiv I$, $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, A – жорданова клетка $n \times n$ получаем $s = n$, то есть все частные решения имеют вид (2).

Иванов В.И. (Тула)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ П.Л.УЛЬЯНОВА

В [1] П.Л.Ульянов поставил следующую задачу. Для всякого ли универсального (относительно подпоследовательностей) тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx \qquad (1)$$

сопряженный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin 2\pi kx - b_k \cos 2\pi kx \qquad (2)$$

тоже является универсальным ?

Пусть E_ρ – линейное метрическое симметричное пространство, определенное в [2]. К ним относятся пространство S конечных измеримых на $[0,1]$ функций со сходимостью по мере, пространства $\varphi(L)$. Справедливы

Теорема I. Если пространство $E_\rho \not\subset L\ln(L+1)$, то для любой $f \in E_\rho$ существует тригонометрический ряд (I) универсальный в E_ρ, относительно подпоследовательностей (универсальный относительно подрядов, знаков, перестановок), у которого сопряженный ряд (2) сходится в E_ρ к f.

Эта теорема в случае $E_\rho = S$ дает отрицательный ответ на вопрос П.Л.Ульянова. Относительно определений универсальных рядов см. [1,2].

Теорема 2. Если пространство $E_\rho \not\subset L\ln(L+1)$, то существует тригонометрический ряд (I) универсальный в E_ρ относительно подпоследовательностей, у которого сопряженный ряд (2) является универсальным в E_ρ относительно подрядов, знаков, перестановок.

Литература

[1] Талалян А.А. Представление измеримых функций рядами. Успехи матем. наук, 1960, т.15, № 5, с.77-141.

[2] Иванов В.И. Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов. Труды МИАН СССР, 1989. т.189, с.34-77.

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА НА РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ

Л.А.Иванов, И.А.Киприянов (Воронеж)

Пусть X вещественное банахово пространство, B и C производящие операторы непрерывных полугрупп в X, причем $A = B^2$, $\mathcal{D}(A^p) = \mathcal{D}(C^q)$, $p,q \in N$. Рассматриваются уравнения Соболева

$$u_t - \beta C u_t = Au \; ; \; t > 0, \; u(0) = \varphi ;$$

и, параллельно, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$E_{tt}(t) + \frac{1}{t} E_t(t) = AE(t), \; E(0) = \varphi, \; E'_t(0) = 0 .$$

Теорема. Имеет место представление

$$u(t) = (I - \beta C) \int_0^\infty e^{-\sigma} \mathcal{U}_C(\beta\sigma) E(2\sqrt{t}\,\sigma)\, d\sigma ,$$

где $\mathcal{U}_C$ – полугруппа, порождаемая C.

Обозначим через V_n – риманово пространство с постоянной кривизной k, положительной или отрицательной. Авторами ранее были получены аналоги формул Кирхгофа для решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу на . Так при $\mu = 1$ решение имеет вид

$$u(t,x) = c \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \sin \sqrt{k}\, t} \right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-2} Q(t,x) ,$$

где $Q(t,x)$ – среднее от начальной функции. В сочетании с указанной теоремой получаются формулы Кирхгофа для уравнений Соболева на V_n.

ОЦЕНКИ СПЕКТРА РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.А.Иванова (Воронеж)

Пусть V_1 и V_2 - два компактных римановых пространства одинаковой размерности n и непустым пересечением $V_1 \cap V_2$. Обозначим через $\lambda(V)$ первое собственное число оператора Лапласа-Бельтрами Δ на римановом многообразии V. Имеет место

Теорема 1. Справедлива оценка

$$\lambda(V_1 \cup V_2) \leq \lambda(V_1) + \lambda(V_2).$$

Обозначим через $G(r)$ - площадь поверхности шара радиуса r с центром в некоторой точке $x_0 \in V$, в предположении однородности $G(r)$ не зависит от x_0.

Теорема 2. Число $\frac{\mu^2}{4}$, где $\mu = \inf \frac{G'_r}{G}$ меньше первого собственного числа оператора Лапласа-Бельтрами, то есть $\frac{\mu^2}{4} < \lambda(V)$.

Пусть теперь V является римановой поверхностью рода g и $\lambda_g = \inf \lambda(V)$ по всем поверхностям рода g; на основании имеющихся примеров возникло предположение, что $\lim\limits_{g\to\infty} \lambda_g = 0$. На самом деле справедлива

Теорема 3. Существуют римановы поверхности сколь угодно большого рода, для которых $\lambda(V) \geq \alpha_0 > 0$.

Этот факт устанавливается с помощью комбинаторной теоремы об остовном графе симплициального разбиения поверхности.

Ирклиевский В.Д., Ризун В.И. /Алчевск /

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть в уравнении

$$Au = f \qquad /1/$$

A - линейный оператор из Д(A) / область определения пространства Гильберта H в H' / которое может совпадать с H /, имеющий обратный оператор A^{-1}. Кроме этого, элемент $f \in R(A)$ / область значений оператора A /. Тогда уравнение I имеет единственное решение.

Обобщая результаты монографии [1], найдено приближение к решению $u = u(t)$ уравнения /1/, взяв для этого базис Бари

$$\{\varphi_i(t)\}_1^\infty \qquad /2/$$

Решение уравнения /1/ разложимо в ряд [2]

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varphi_k , \qquad /3/$$

где коэффициенты d_k определяются по формулам

$$d_k = (f, z^k) ,$$

в которых элементы $z^k = (A^{-1})^* \varphi_k$, как биортогональные элементы системы

$$\Phi_k = A\varphi_k ,$$

могут быть построены без участия оператора $(A^{-1})^*$ [2].

Рассмотрено также решение граничных задач с помощью аппроксимации и разложения.

1. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.-Киев:ЦЕНТИ , 1991.- 331 с.
2. Талдыкин А.Т. Элементы прикладного функционального анализа.- М.: Высшая школа, 1982.- 383 с.

Казаков В. В.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим целые трансцендентные функции

/1/ $${}_{\ell}\varphi_{m}(\nu_1,\dots,\nu_\ell;\lambda_1,\dots,\lambda_m;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1+1)_n\dots(\nu_\ell+1)_n}{(\lambda_1+1)_n\dots(\lambda_m+1)_n}\left(\frac{z}{t}\right)^{tn},$$

а также

/2/ $${}_{0}\varphi_{m}(\lambda_1,\dots,\lambda_m;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_1+1)_n\dots(\lambda_m+1)_n}\left(\frac{z}{t}\right)^{tn};$$

где

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1),\ n\in\mathbb{N},\ (\lambda)_0=1,$$
$$-\nu_1,\dots,-\nu_\ell,-\lambda_1,\dots,-\lambda_m\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N},\ t=m-\ell>0.$$

Функция ${}_{\ell}\varphi_{m}(z)$ называется гипергеометрической функцией.

Известно, что функция ${}_{\ell}\varphi_{m}(z)$ является решением следующего уравнения:

/3/ $$L(y)=b(\delta)y-a(\delta)(z^t y)=b(0),$$

где $b(\delta)=(\delta+t\lambda_1)\dots(\delta+t\lambda_m)=\delta^m+b_{m-1}\delta^{m-1}+\dots+b_0,$

$a(\delta)=(\delta+t\nu_1)\dots(\delta+t\nu_\ell)=\delta^\ell+a_{\ell-1}\delta^{\ell-1}+\dots+a_0$ при $\ell\geq1,$

$a(\delta)=1$ при $\ell=0$, $\delta=z\frac{d}{dz}$.

Функции

/4/ $$f_1(z),\dots,f_n(z)$$

называются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$, если $P(z,f_1(z),\dots,f_n(z))$ не обращается в 0 тождественно по z, где

$$P(z,z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}[z,z_1,\dots,z_n]\setminus 0.$$

В противном случае функции /4/ называются алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$.

Рассматриваются условия алгебраической независимости функции ${}_{\ell}\varphi_{m}(z)$ и первых $m-1$ её производных.

ОБ АЦИКЛИЧНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВОРОНКИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Каменский М.И., Обуховский В.В. (Воронеж)

Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $Kv(E)$ – совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из E; χ – мера некомпактности Хаусдорфа в E; $\{A(t)\}_{t\in[0;T]}$ – семейство замкнутых линейных операторов в E, порождающее сильно непрерывный эволюционный оператор $U(t,s)$, непрерывный по норме при $s < t$.

Рассмотрим мультиотображение $F : [0,T] \times \mathfrak{C} \dashrightarrow Kv(E)$, где $\mathfrak{C} = C([-\tau,0], E)$, удовлетворяющее условиям:

1) F – измеримо по первому аргументу и полунепрерывно сверху по второму;

2) $\|F(t,c)\| \le \alpha(t) + \beta(t)\|c\|$ при всех $c \in \mathfrak{C}$ и почти при всех $t\in[0,T]$, здесь $\alpha,\beta \in L^1_+[0,T]$;

3) для любого непустого ограниченного равностепенно непрерывного множества $D \subset \mathfrak{C}$ почти при каждом $t\in[0,T]$ выполнено неравенство

$$\chi(F(t,D)) \le k(t)\varphi(D),$$

где $k \in L^1_+[0,T]$, $\varphi(D) = \sup\{\chi(D(t)) : t\in[0,T]\}$.

<u>Теорема 1</u>. При сделанных предположениях множество обобщенных решений задачи Коши

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x_t) \quad \text{при } t\in[0,T],$$
$$x(t) = x_0(t), \quad \text{при } t\in[-\tau,0]$$

является непустым ацикличным компактом в пространстве $C([-\tau,T], E)$.

Доказательство опирается на следующий результат.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathfrak{X}_1 \supseteq \mathfrak{X}_2 \supseteq \ldots$ – последовательность замкнутых ациклических подмножеств полного метрического пространства, причем $\chi(\mathfrak{X}_n) \dashrightarrow 0$ при $n \dashrightarrow \infty$. Тогда $\mathfrak{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}_n$ – непустой ациклический компакт.

Теорема 1 применяется при изучении оператора сдвига для систем дифференциальных включений в банаховом пространстве (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменский М.И., Обуховский В.В. Об операторе сдвига по траекториям решений квазилинейных параболических дифференциальных включений // Современные методы в теории краевых задач. Воронеж – 1992.

Карелин А.А. (Одесса)

О ПРИВЕДЕНИИ ВЕКТОРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КАРЛЕМАНОВСКИМИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ СДВИГАМИ К ВЕКТОРНОМУ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ БЕЗ СДВИГА В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

В работе [I] было установлено операторное тождество в пространстве L_2, позволяющее избавляться от карлемановского дробно-линейного сдвига второго порядка в сингулярных интегральных уравнениях $A\varphi=0$,

$A=aI+bQ+cS_R+dQS_R$, $(S_\Gamma\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_R\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$, $(Q\varphi)(t)=\frac{\sqrt{\delta^2+\beta}}{x-\delta}\varphi\left(\frac{\delta x+\beta}{x-\delta}\right)$, $\delta^2+\beta\neq 0$, δ и β -действительные.

При этом порядок уравнения повышался вдвое $N\varphi=0$

$N=FAH$,

$N=((a_{ij}))I+((b_{ij}))S_{\mathcal{L}}$, $A\in[L_2(\Gamma)]$, $N\in[L_2^2(\mathcal{L})]$.

Здесь F и H -обратимые операторы, $A\in[L_2(\Gamma),L_2^2(\mathcal{L})]$, $H\in[L_2^2(\mathcal{L}),L_2(\Gamma)]$.

Даны обобщения операторного тождества. Расширен класс пространств; рассмотрен векторный случай сингулярного интегрального уравнения с конечной группой карлемановских дробно-линейных сдвигов, как с сохраняющими так и с изменяющими ориентацию образующими; порядок сдвига, сохраняющего ориентацию может быть больше двух.

К примеру, к данному классу рассмотренных уравнений относятся

$$aI\varphi+bW\varphi+cP\varphi+dWP\varphi+kS_\Gamma\varphi+\ell WS_\Gamma\varphi+mPS_\Gamma\varphi+nWPS_\Gamma\varphi=0,$$

$$aI\varphi+\ell B\varphi+cB^2\varphi+dS_\Gamma\varphi+kBS_\Gamma\varphi+\ell B^2S_\Gamma\varphi=0,$$

$$\Gamma=\{z:|z|=1\},\ (W\varphi)(t)=\varphi(-t),\ (P\varphi)(t)=\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{1}{t}\right),\ (B\varphi)(t)=\varphi\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}t\right)$$

Литература

I. Карелин А.А. Преобразование сингулярного интегрального уравнения с карлемановским дробно-линейным сдвигом к характеристическому уравнению с матричными коэффициентами// Изв. вузов. Математика. - 1991.- № 2.- С. 60-65.

Киприянова Н.И. (Воронеж)

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ B-ГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Рассматриваются разложения по собственным функциям сингулярного дифференциального оператора вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (k>0 \text{ - фиксировано})$$

в ограниченной области $\Omega \subset E_n^+$, симметричной относительно гиперплоскости $x_n = 0$, граница которой Γ принадлежит классу поверхностей Ляпунова. Собственными функциями оператора Δ_B назовем четные по переменной x_n решения уравнения $\Delta_B u + \lambda u = 0$, удовлетворяющие одному из трех однородных краевых условий:

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(x)u\right)\Big|_\Gamma = 0,$$

где $h(x) \geq 0$, ν - внешняя нормаль к поверхности Γ.

Пусть функция $f(x) \in W_{2,k}^{[\frac{n+k}{2}]+1}(\Omega)$ и такова, что f, $\Delta_B f$, ..., $\Delta_B^{\ell} f$ (где $\ell = [\frac{n+k}{4}]$ для случая первой краевой задачи, $\ell = [\frac{n+k-2}{4}]$ для случая второй или третьей краевых задач) в обобщенном смысле удовлетворяют соответствующему краевому условию. Тогда ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области Ω. Более того, при суммировании в порядке возрастания собственных чисел для m-ого остатка ряда Фурье справедлива равномерная в замкнутой области Ω оценка:

$$\sum_{i=m}^{\infty} |f_i u_i(x)| = O\left(\frac{1}{\lambda_m^{\alpha}}\right),$$

где α - любое фиксированное число, удовлетворяющее требованию $\alpha < \frac{1 - \{\frac{n+k}{2}\}}{2}$ (здесь $\{n+k\}$ - дробная часть числа $n+k$).

Кирилич В. М. (Львов)

ОБ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА-ДАРБУ

Рассматривается совокупность систем уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u_i^s}{\partial t} + \lambda_i^s(x,t)\frac{\partial u_i^s}{\partial x} = f_i^s(x,t;u),\ i=\overline{1,n_s},\ s=\overline{0,m},\ m\geq 0, \qquad (1)$$

$$(x,t)\in G=\bigcup_{s=0}^{m} G^s;\ G^s=\{(x,t):\ t\in R_+,\ a_s(t)<x<a_{s+1}(t),$$

$a_k(0)=0,\ k=\overline{0,s+1}\ \}$, причем $u_i^s: G\to R$, а функции a_k заранее не заданы и удовлетворяют системе уравнений

$$a_k'(t)=h_k(t;u),\ k=\overline{0,s+1}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)} a_{is}^p(x,t)u_i^s(x,t)dx = H^p(a(t),t), \qquad (3)$$

$$p=\overline{1,N},\quad N=\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=s}^{s+1} card\, I_k^s,$$

$$I_s^s(I_{s+1}^s)=\{i:\lambda_i^s(0,0)>h_s(0;u(0,0))\ (\lambda_i^s(0,0)<h_s(0;u(0,0)))\}$$

Доказана теорема о локальном по t существовании и единственности обобщенного (липшицева по обеим переменным) решения задачи (1)-(3). При этом используется подход, предложенний в [1].

1. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференциальные уравнения.- 1991.-27,N3.-С.497-503.

Кисилевич В.В., Стасюк М.Ф. (Львов)

СВОЙСТВА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается обобщенное квазидифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\left(b_i y^{(n-i)}\right)^{(n-i)}-\lambda\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\left(a_i y^{(n-i)}\right)^{(n-i)}=0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями $y^{(i)}(a)=y^{(i)}(b)=0$ (2) $i=\overline{0,\,n-1}$. Здесь λ - параметр a_o^{-1} - ограниченная и измеримая на $[a,\,b]$ функция, a_i , b_i $\forall\ i=\overline{1,\,n-1}$ - обобщенные производные от функций ограниченной на $[a,\,b]$ вариации $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(x)$ соответственно, причем $\alpha_i(x)$ - неубывающие функции.

Задача (1), (2) обладает следующими свойствами:

1) все ее собственные значения действительны;

2) нормированные собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b y_m^{(i)}(x)\,y_k^{(i)}(x)\,d\alpha_{n-i}(x)=\begin{cases}1, & m=k;\\ 0, & m\neq k;\end{cases}$$

3) функция $\psi(x)$, удовлетворяющая краевым условиям (2) и неоднородному квазидифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\left(b_i y^{(n-i)}\right)^{(n-i)}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(n-i)}\left(a_i \rho^{(n-i)}\right)^{(n-i)},$$

где $\rho(x)$ - произвольная абсолютно непрерывная на $[a,\,b]$ функция вместе со своими производными $\rho^{(i)}(x)$; $i=\overline{0,\,n-1}$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[a,\,b]$ ряд Фурье по собственным функциям задачи (1), (2)

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,y_n(x),$$

причем коэффициенты Фурье c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b \psi^{(i)}(x)\,y_n^{(i)}(x)\,d\alpha_{n-i}(x)$$

этот ряд можно почленно дифференцировать $(n-1)$ раз, получая вновь абсолютно и равномерно сходящиеся на $[a,\,b]$ ряды.

Клевчук И.И. (Черновцы)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Исследование разностного уравнения $x_{i+1}=f(x_i)$ сводится к изучению итераций отображения $x\to f(x)$. Работа посвящена изучению рациональных отображений отрезка в себя. Среди таких функций особую роль играют коммутирующие функциии. Рассмотрены рациональные функции $f(x)$, удовлетворяющие соотношению

$$\varphi(nx)=f(\varphi(x)),\ n\in\mathbb{Z},$$

где функция $\varphi(x)$ совпадает с одной из функций $\cos x, \wp(x,1,\tau)$, $\wp^2(x,1,i), (\wp')^2(x,1,w)$, где $\wp(x,w_1,w_2)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами w_1 и w_2, $i=\sqrt{-1}$, $w=\exp(\pi i/3)$, $\operatorname{Im}\tau>0$. Если $\varphi(x)=\cos x$, то функция $f(x)$ совпадает с полиномом Чебышева, в остальных случаях функцию $f(x)$ можно найти из теоремы сложения.

Показано, что отображение $x\to f(x)$ эквивалентно некоторому кусочно-линейному зубчатому отображению и имеет счетное число циклов. Такое отображение обладает инвариантной мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. В частности, если $\varphi(x)=\wp(x,1,\tau)$, то отображение $x\to f(x)$ эквивалентно рациональному отображению, имеющему инвариантную меру

$$\mu(dx)=\frac{dx}{2\mathcal{K}\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

где K – модуль, $\mathcal{K}$ – полный эллиптический интеграл.

Унимодальное отображение, порядок роста которого больше 1, полусопряжено с кусочно-линейным отображением $F(x)=Sx$, если $0\leq x\leq 0{,}5$; $F(x)=S-Sx$, если $0{,}5<x\leq 1$. Для отображения $F(x)$ найдены бифуркационные значения параметра S. Исследовано унимодальное решение уравнения $f^p(ax)=af(x)$. Показано, что существует гомеоморфизм H, отображающий множество целых p-адических чисел в инвариантное канторово множество отображения $x\to f(x)$. При этом имеют место равенства $H(\ell+1)=f(H(\ell))$, $H(\ell-1)=f^{-1}(H(\ell))$, $H(p\ell)=aH(\ell)$.

[illegible]лимкин В.М. (Самара)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ДАРБУ-ЛЯПУНОВА

Пусть T-некоторое множество; $\Sigma\subset 2^T$, $\varnothing\in\Sigma$, рассматриваемая функция множества $\varphi:\Sigma\to\mathbb{R}^1$, $\varphi(\varnothing)=0$.

Будем говорить, что функция множества φ обладает свойством Сакса, если для любого множества $E\in\Sigma$ и для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое разложение $\{E_1,\dots,E_n\}\subset\Sigma$ множества E, что $\varphi(E_k)<\varepsilon$, $k=\overline{1,n}$.

Класс множеств Σ называется суммируемым (σ-суммируемым), если для любой пары непересекающихся множеств $A,B\in\Sigma$ (соответственно, для любой последовательности $\{E_n\}$ попарно-непересекающихся множеств) $A\cup B\in\Sigma$ ($\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\Sigma$).

<u>Теорема 1</u>. Если полуаддитивная функция множества φ, заданная на суммируемом классе Σ, обладает свойством Сакса, то для любого множества $E\in\Sigma$ и для любого числа $0<\alpha<\varphi(E)$ существует такая последовательность попарно непересекающихся множеств $\{F_n\}\subset\Sigma$, $F_n\subset E$, $n=1,2,\dots$, что $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(F_n)=\alpha$.

<u>Теорема 2</u>. Если аддитивная, монотонная функция φ, заданная на σ-суммируемом классе Σ, обладает свойством Сакса, то для любого множества $E\in\Sigma$ и для любого числа $0<\alpha<\varphi(E)$ существует такое множество $F\in\Sigma$, $F\subset E$, что $\varphi(E)=\alpha$.

<u>Теорема 3</u>. Существует аддитивная неатомическая функция множества, заданная на σ-алгебре Σ, которая не обладает свойством Сакса.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.Dinculeanu: Vector measures, Berlin, 1966.
2. П.Халмош. Теория меры. ИИЛ. 1953

Кожевникова Т.С. (Москва)

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ЗВЁЗДНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается нелинейная задача Дирихле в ограниченной звёздной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(1) $\Delta u = F(u)$ в области Ω

(2) $u = g(x)$ на границе $\partial\Omega$

Даются достаточные условия на функцию $F(t)$, при которых задача (1)-(2) имеет решение. Предполагается, что $F(t)$, $g(x)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие. Через $\varphi_1(x)$ обозначена нормированная первая собственная функция оператора Лапласа, соответствующая собственному значению λ_1 $(0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant 1)$.

<u>Теорема</u>. Пусть существуют отрезки $[A,B]$, $[\widetilde{A},\widetilde{B}]$ и постоянные $b, \widetilde{b}, \lambda, \widetilde{\lambda}$ такие, что

$$B < \min_{x\in\partial\Omega} g(x) \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} g(x) < \widetilde{A}$$

$$B < b$$

$$\widetilde{b} < \widetilde{A}$$

$$0 < \lambda < \lambda_1$$

$$0 < \widetilde{\lambda} < \lambda_1$$

$$F(t) \leqslant -\lambda(t-b), \text{ для } \forall t \in [A,B]$$

$$F(t) \geqslant -\widetilde{\lambda}(t-\widetilde{b}), \text{ для } \forall t \in [\widetilde{A},\widetilde{B}]$$

Тогда если длины отрезков $[A,B]$, $[\widetilde{A},\widetilde{B}]$ и постоянные $b, \widetilde{b}, \lambda, \widetilde{\lambda}$ удовлетворяют соотношениям

$$B-A = \frac{(b-B)(1-\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \min_{x\in\Omega} \varphi_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}}\,x\right)$$

$$\widetilde{B}-\widetilde{A} = \frac{(\widetilde{A}-\widetilde{b})(1-\widetilde{\varepsilon})}{\widetilde{\varepsilon}}, \quad \widetilde{\varepsilon} = \min_{x\in\Omega} \varphi_1\left(\sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda_1}}\,x\right),$$

то задача (1) - (2) имеет решение.

[illegible] В.А. (Одесса)

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Для оценки погрешности квадратурных формул

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) + R(f) = L(f) + R(f)$$

используется, как правило, погрешность $E(L)$ формулы L на классе функций K

$$E(L) = \sup_{f \in K} |R(f)| .$$

Эта оценка, являясь по своей природе априорной, зависит лишь от формулы L и класса K. Она не учитывает информацию, полученную в процессе решения и используемую для построения приближения. Такой информацией в данном случае являются полученные значения функции $\mathcal{I}(f) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$.

Однако можно построить оценки погрешности $E_a(f,L)$ квадратуры L, учитывающие эту информацию. Такие оценки мы называем апостериорными.

Так, например, на классе $W^{(1)}(M,a,b)$, непрерывных на $[a,b]$ функций, обладающих кусочно-непрерывной производной, ограниченной константой M, для составной формулы Симпсона, построенной по узлам $x_i < z_i < x_{i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$, $z_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, получена оценка

$$E_a(f,L) = \frac{5(b-a)Mh}{36} - \frac{(b-a)Mh}{4}\left\{\left(\frac{\min(P,Q)}{M(b-a)} + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\max(P,Q)}{M(b-a)} - \frac{1}{6}\right)^2\right\},$$

где

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} p_i , \quad Q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i , \quad p_i = f(z_i) - f(x_i), \quad q_i = f(x_{i+1}) - f(z_i) .$$

На классе $W^{(2)}(M,a,b)$ имеет место оценка

$$E_a(f,L) = \frac{Mh^3}{3} \max\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i \left(1 - 2\sqrt{\sigma_i}\right) ; \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \left(1 - 2\sqrt{\omega_i}\right) \right\}$$

здесь

$$\sigma_i = \frac{1}{8} - \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2 M} , \quad \omega_i = \frac{1}{8} + \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2 M} , \quad h = \frac{b-a}{n} .$$

УДК 517.927

Коняев Ю.А. / Москва /

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Предлагается новый алгоритм исследования краевых задач на собственные значения для линейных дифференциальных операторов, например, оператора Дирака или Штурма-Лиувилля:

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \qquad (1)$$

В отличие от известного [1], указанный алгоритм, являясь дискретным аналогом нового метода решения сингулярно возмущенных краевых задач[2,3] , позволяет также более просто решать задачи вида (1). Запишем задачу (1) в векторной форме :

$$\varepsilon \frac{dz}{dx} = (A_0 + \varepsilon^2 A_2(x))z; \quad F_1 z(0) + F_2 z(\pi) = 0,$$

где $\varepsilon^2 = \lambda^{-1}$; $z = (y, \varepsilon y')^T$;

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; A_2(x) = q(x)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом параметр $\varepsilon(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\pi} q(t)dt + \bar{\bar{O}}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ определяется из уравнения $\det F(\varepsilon) = 0$, где

$$F(\varepsilon) \doteq F_1 S_0 (E + \varepsilon^2 H_2(0) + \dots) + F_2 S_0 (E + \varepsilon^2 H_2(\pi) + \dots)\Phi(\pi, \varepsilon);$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}; H_2(x) = \frac{-q(x)}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \Phi(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{ix}{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{ix}{\varepsilon}} \end{pmatrix},$$

что дает возможность записать асимптотику собственных значений

$$\lambda(n) = \left(n + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} q(t)dt + \bar{\bar{O}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

и собственных функций $\varphi(n, x) = \sin nx + \bar{\bar{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., Наука, 1988, 432 с.
2. Коняев Ю.А. Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных ОДУ. "Дифференц. уравнения", 1984, т.20, № 11, с.1999-2003.
3. Коняев Ю.А. Исследование некоторых классов регулярных и сингулярных краевых задач. "Математические заметки", 1992, т.51, вып. 2.

Коркина Л.Ф., Рекант М.А. (Екатеринбург)

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА НА НАТУРАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ ЕГО РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Пусть A – линейный замкнутый действующий в банаховом пространстве X над полем $\mathbb{C}$ плотно определённый оператор, $R(\lambda)$ – его резольвента, удовлетворяющая при некоторых $C_0>0$, $\gamma\leq 1$ в замкнутой области $\overline{\Omega(a,\alpha)}=\{\lambda\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda\leq 0, |\operatorname{Im}\lambda|\leq a(|\operatorname{Re}\lambda|+1)^{\alpha}\}$ $(a>0,\alpha\geq\gamma)$ неравенству $\|R(\lambda)\|\leq C_0(|\lambda|+1)^{-\gamma}$.

Теорема I. Пусть m, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\lambda\in\overline{\Omega(a,\alpha)}$, $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z<m+n+\gamma-1$, $x\in X$. Тогда

$$A^{z}R^{m}(\lambda)x=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\Gamma(a,\alpha)}\mu^{z-n}(\mu-\lambda)^{-m}R(\mu)A^{n}x\,d\mu,$$

где $\Gamma(a,\alpha)$ – положительно ориентированная граница области $\Omega(a,\alpha)$.

Теорема 2. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Тогда если $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z<m+\gamma-1$, то существует такое число $C>0$, что при всех $\lambda\in\overline{\Omega(a,\alpha)}$

$$\|A^{z}R^{m}(\lambda)\|\leq C(|\lambda|+1)^{\max\{-m,\operatorname{Re} z-m\gamma\}}\Phi(|\lambda|), \qquad (I)$$

где функция $\Phi(s)$ $(s\geq 0)$ удовлетворяет условию $1\leq\Phi(s)\leq\ln(s+3)$. Если $z\in\mathbb{Z}$, $z\leq m$, то при некотором $C>0$ и всех $\lambda\in\overline{\Omega(a,\alpha)}$

$$\|A^{z}R^{m}(\lambda)\|\leq C(|\lambda|+1)^{\max\{-m,z-m\gamma\}}. \qquad (2)$$

При этом оценки (I) с точностью до логарифмического множителя и (2) точны по порядку.

Аналогичные оценки $\|A^{z}R^{m}(\lambda)\|$ установлены в ряде замкнутых подобластей $\overline{\Omega(a,\alpha)}$. Кроме того, (I) и (2) распространяются в более широкую область. Приведённые соотношения обобщают ряд известных.

Литература

I. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные операторы в банаховом пространстве.– М : Наука, 1967.–465 с.

2. Коркина Л.Ф., Рекант М.А. Дробные степени одного класса операторов. Известия вузов. Математика, 1991, № 9. С. 81-83.

Крушельницкий А.А. (Гродно)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОЛЮСОМ У РЕШЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Из всего множества систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y) \qquad (I)$$

с полиномиальными правыми частями $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ по зависимым переменным x и y выделяются те, у которых хотя бы одна из составляющих $x = x(t)$ или $y = y(t)$ решения имеет полюс в бесконечно удаленной точке $t = \infty$.

В дополнение к исследованиям [I], когда рассматривалась система (I) с квадратичной нелинейностью в правых частях, изучаются случаи $\max\{\deg X(x,y), \deg Y(x,y)\} \geqslant 3$.

Определены связи между такими системами и системами типа Пенлеве (системы с решениями, свободными от подвижных критических особых точек), аналитическая и качественная характеристики которых даны в современной научной литературе обширно. Вместе с тем, наличие различий определяет существенные особенности систем, у которых решение имеет полюс в $t = \infty$.

Например, выделяются системы (I), имеющие целые решения или решения с полюсами у составляющих в конечной части плоскости. Основной метод исследования – метод центрального индекса Вимана - Валирона, позволивший установить характеристики роста при $t \to \infty$. Здесь же указываются достаточные условия отсутствия решений в виде целых трансцендентных функций.

В предположении, что система (I) является вещественной, у выделенных систем (I) (по аналитическим свойствам решений) определяется поведение траекторий в целом с точностью до топологической эквивалентности на кругах Пуанкаре.

Основной вопрос: при каких $k = \max\{\deg X(x,y), \deg Y(x,y)\}$ у систем (I) с полюсом у составляющей решения $x = x(t)$ поведение траекторий на круге Пуанкаре с точностью до топологической эквивалентности определяется однозначно? Завершено исследование лишь квадратичного случая $k = 2$.

I. Горбузов В.Н. Качественное исследование в целом систем в случае полюса в бесконечности// Дифференц. уравнения.- 1982.- Т. 18, № 5.- С. 745 - 753.

Кузенков О.А. (Нижний Новгород)

СИСТЕМЫ ДИНАМИКИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть X - топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ - его борелевская σ -алгебра, $\mathfrak{M}(X)$ - нормированное пространство всех мер Радона на X с нормой меры μ равной вариации $|\mu|[X]$, $\mathfrak{M}^+(X)$ - подмножество вероятностных мер Радона, $\mathfrak{M}^+(X,\mu^*)$ - подмножество вероятностных мер Радона, абсолютно непрерывных относительно $\mu^*\in\mathfrak{M}^+(X)$, $L_1(X,\mu^*)$ - пространство функций, интегрируемых по Лебегу на X по мере μ^*, оператор $F(\mu)$: $\mathfrak{M}^+(X)\to\mathfrak{M}^+(X)$.

Поставлена задача Коши. Найти дифференцируемую по t функцию $\mu(t):R^1_+\to\mathfrak{M}^+(X)$, удовлетворяющую уравнению и начальному условию

$$\dot{\mu}=F(\mu),\quad \mu(0)=\lambda,\ \lambda\in\mathfrak{M}^+(X) \qquad (1)$$

Определяются достаточные условия существования и единственности решения задачи (1) для любой $\lambda\in\mathfrak{M}^+(X)$. Показано, что если рассматривать сужение оператора F на $\mathfrak{M}^+(X,\mu^*)$, то уравнение в (1) приобретает вид

$$\qquad (2)$$

где $p: R^1_+\to L_1(X,\mu^*)$, $\varphi: L_1(X,\mu^*)\to L_1(X,\mu^*)$, $p(t)$ при каждом фиксированном t является плотностью меры $\mu(t)$ относительно μ^*.

Частными случаями уравнения (2) являются: при конечном X - динамическая система на конечномерном симплексе, при $X=N$ (с топологией 2^N) - счетная система уравнений

$$\dot{y}_i=\varphi_i(y_1,\dots,y_i,\dots)-y_i\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(y_1,\dots,y_j,\dots),\quad i=\overline{1,\infty},$$

при $X=[0,1]$ - интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)=\varphi(y(x,t),x)-y(x,t)\int_0^1\varphi(y(x,t),\xi)\,d\xi.$$

Для произвольного множества $A\in\mathfrak{A}$, $\overset{\circ}{A}\neq\varnothing$, $A\neq X$, найдены достаточные условия того, что при любом начальном условии $\lambda\in\mathfrak{M}^+(X)$, $\lambda[A]\neq\varnothing$ справедливо

$\mu(t)[A]\to1$ при $t\to\infty$.

УДК 517.94

Кузнецова Н.А. (Воронеж)

ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

На интервале $t\in(0,\delta)$ рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение вида

$$\alpha^2(t)y''(t)+(-1)^j\,[b(t)+iK\beta(t)\alpha(t)]\,y'(t)-K^2c(t)y(t)=0,\quad j=0,1, \qquad (1)$$

содержащее числовой параметр $K>0$. Коэффициенты $\alpha(t)$, $b(t)$, $\beta(t)$, $c(t)$ достаточно гладкие на $(0,\delta)$ вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0,\qquad 4c(t)-\beta^2(t)\geqslant\nu>0,\qquad b(0)=1.$$

Доказано, что при $K\to\infty$ для решений уравнения (1) справедливы асимптотические представления

$$y_{nj}(t)=y^0_{nj}(t,K)(1+\varepsilon_{nj}(t,K)),\quad y'_{nj}(t)=y^0_{nj}(t,K)\rho_{nj}(t,K)(1+\varepsilon^*_{nj}(t,K)),\quad n=1,2,$$

где

$$|\varepsilon_{1j}(t,K)|\leqslant ctK^{-1},\qquad |\varepsilon_{2j}(t,K)|\leqslant c(\delta-t)K^{-1},$$

$$|\varepsilon^*_{1j}(t,K)|\leqslant ctK^{-1},\qquad |\varepsilon^*_{2j}(t,K)|\leqslant c(\delta-t)K^{-1},\quad c>0,$$

Функции $y^0_{nj}(t,K)$ и $\rho_{nj}(t,K)$ выражаются в явном виде через коэффициенты уравнения (1).

Для решений $y_{nj}(t)$ при $K\to\infty$ справедливы оценки

$$|y_{10}(t)|\sim K^{-\frac12}\exp\Big\{-c\int_t^\delta K^2(1+K\alpha(\hat t))^{-1}d\hat t\Big\},$$

$$|y_{20}(t)|\sim(\alpha^{-1}(t)+K)^{-\frac12}\exp\Big\{c\int_t^\delta(\alpha^{-2}(\hat t)+K\alpha^{-1}(\hat t))d\hat t\Big\},$$

$$|y_{11}(t)|\sim(\alpha^{-1}(t)+K)^{-\frac12}\exp\Big\{-c\int_t^\delta(\alpha^{-2}(\hat t)+K\alpha^{-1}(\hat t))d\hat t\Big\},$$

$$|y_{21}(t)|\sim tK^{-\frac12}\exp\Big\{c\int_t^\delta K^2(1+K\alpha(\hat t))^{-1}d\hat t\Big\},\quad c>0.$$

Кушпель А.К. (Киев)

Поперечники бернштейна классов функций сверхмалой гладкости.

Б.С.Кашин показал, что $d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, $1 \le p \le 2 < q \le \infty$, $r > 1/p$.

Явление изменения слабой асимптотики поперечников соболевских классов W_p^r в пространстве L_q (при $r < 1/p$) впервые было обнаружено Б.С.Кашиным. Позже, Е.Д.Куланин, используя результаты Б.С.Кашина, показал, в частности, что

$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{\frac{q}{2}(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < r < \frac{1}{p}$,

$1 \le p < 2 < q < \infty$.

Пусть $W_p^K = K * U_p$, $U_p = \{\varphi\} \|\varphi\|_p \le 1\}$, $K \sim \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K \cos Kt$,

$\alpha_K = K^{-(1/p-1/q)} \ln^{-\gamma} K$, $\gamma > 0$. Ясно, что для любого $r > 1/p - 1/q$,

$W_p^r \subset W_p^K \subset L_q$. Автором показано, что $d_n(W_p^K, L_q) \asymp$

$\asymp \ln^{-\gamma} n$, $n \to \infty$, $1 < p < q < \infty$, причем соответствующие поперечники реализуются суммами Фурье. Классы W_p^K естественно называть классами функций сверхмалой гладкости.

Оказывается явление сверхмалой гладкости имеет место и для бернштейновских поперечников $b_n(W_p^{K_1}, L_q)$, где

$K_1(t) \sim \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K^{(1)} \cos Kt$, $\alpha_K^{(1)} = \ln^{-\gamma} K$, $\gamma > 0$. Показано, что

$b_n(W_p^{K_1}, L_q) \asymp d_n(W_p^{K_1}, L_q) \asymp \ln^{-\gamma} n$, $2 < q < p < \infty$, а экстремальным подпространством для $b_n(W_p^{K_1}, L_q)$ являются тригонометрические полиномы. С другой стороны, В.Е.Майоровым показано, что

$b_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, $2 < q < p < \infty$. Отметим также, что

$b_n(W_p^{K_2}, L_q) \asymp \alpha_n^{(2)}$, $K_2(t) \sim \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K^{(2)} \cos Kt$, $\alpha_K^{(2)} = e^{-\alpha K^r}$,

$\alpha > 0$, $r \ge 1$, $1 < p, q < \infty$.

Лакерник А.Р. (Москва)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ВИНЕРА-ХОПФА С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

В задачах теории автоматического управления и теории фильтрации радиотехнических сигналов встречается оператор вида

$$(A\varphi)(x)=\int_{x-h}^{x} K(x-t)\varphi(t)\,dt=\int_0^h K(\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi \qquad (I)$$

Ряд свойств этого оператора изложен в работах автора [I] и [2].

В докладе также рассматривается оператор более общего вида

$$(A\varphi)(x)=\int_{x-h}^{x} K(x,x-t)\varphi(t)\,dt=\int_0^h K(x,\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi \qquad (2)$$

В формулах (I) и (2) $h>0$, $\xi\in[0,h]$, а задание отрезка изменения t или x однозначно определяет отрезок изменения другой переменной. Предполагается, что $t\in[\alpha,\beta]$, тогда $x\in[\alpha+h,\beta]$.

Изучаются условия существования операторов (I) и (2) и преобразование ими различных классов гладких функций.

Далее рассматриваются интегральные уравнения первого и второго рода $\psi=A\varphi$ и $\varphi=\lambda A\varphi+f$ с этими операторами. Показывается, что для уравнений второго рода при условии принадлежности ядра и функции $f(x)$ определенным классам функций решение уравнения на отрезке $[\alpha,\alpha+h]$ может быть в этих классах функций задано произвольно, а затем на отрезок $[\alpha+h,\beta]$ это решение продолжается единственным образом.

Аналогичное утверждение справедливо и для уравнений первого рода, однако требуется выполнение условий $K(0)\neq 0$ для оператора (I) или $K(x,0)\neq 0$ для оператора (2), а решение уравнений на отрезке $[\alpha,\alpha+h]$ задается произвольно с точностью до числового множителя.

Литература :

I.Лакерник А.Р. Интегральные операторы и уравнения Винера-Хопфа / Некоторые вопросы высшей математики и их применения.-М. : Моск. ин-т связи.-1989.-Деп. в ВИНИТИ, № 6596-В 89.-с.44-68.

2.Лакерник А.Р. Интегральные уравнения с полосовым оператором типа Винера-Хопфа / Прикладные вопросы высшей математики.-М. : Моск. техн. университет связи и информатики.-1992.-Деп. в ЦНТИ "Информсвязь", № 1912-св.-с.9-27.

УДК 517.927

Майорова С.П. (Воронеж)

О СПЕКТРЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

1. Для обыкновенного дифференциального оператора $Lx \equiv \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x$ с суммируемыми коэффициентами изучается структура спектра краевой задачи с сильной особенностью

$$Lx = \lambda \frac{q(t)}{(t-a)^n(b-t)^n} x \qquad (a < t < b) \qquad (1)$$

$$x^{(i)}(a+0) = x^{(j)}(b-0) = 0 \quad (i = \overline{0,\nu_1 - 1};\ j = \overline{0,\nu_2 - 1};\ \nu_1 + \nu_2 = n) \qquad (2)$$

Предполагается, что $q(\cdot)$ непрерывна на $[a,b]$, сохраняет знак внутри (a,b) и $q(a) = q(b) = 0$. В предположении u_0- положительности интегрального оператора, обращающего задачу (1), (2), в работе [1] показано, что указанная краевая задача имеет осцилляционный спектр. В работе [2] осцилляционность спектра краевой задачи (1), (2) установлена в пространстве функций $y(\cdot)$ из $C^{n-1}(a,b)$ с абсолютно непрерывной на всем (a,b) производной $y^{(n-1)}(\cdot)$, т.е. с суммируемой на всем (a,b) n-ой производной. В докладе условия u_0- положительности интегрального оператора и „глобальная" суммируемость $y^{(n)}(\cdot)$ снимаются.

2. Рассмотрим краевую задачу (1), (2) в пространстве $\mathcal{D}^n(a,b)$ функций из $C^{n-1}(a,b)$ с абсолютно непрерывной производной $y^{(n-1)}(\cdot)$ на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. В этом случае верно следующее утверждение.

Теорема. Пусть существуют положительные числа γ и σ такие, что $|q(t)| \leq C(t-a)^{\gamma}(b-t)^{\sigma}$ $(C - const)$. Тогда краевая задача (1), (2) имеет осцилляционный спектр.

Автор выражает благодарность профессору Ю.В. Покорному за постановку задачи и за помощь в работе.

Литература.

1. Майорова С.П. О спектре одной неклассической краевой задачи// Тез. докл. школы "Современные методы в теории краевых задач"/ Воронеж, 1992. - С. 71.

2. Майорова С.П. Осцилляционность спектра одной сингулярной краевой задачи// Воронеж. ун-т. Воронеж, 1992. - 29 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ 30.11.92, № 3394 - В92.

Максимов В.П. (Пермь)

ТЕОРИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В вводной части лекции дается представление о математическом моделировании процессов функционирования многоотраслевых экономических систем на основе соотношений межотраслевого баланса, уравнений динамики производственных фондов и описании процесса производства с помощью производственных операторов. Особое внимание уделяется свойствам операторов, возникающих при моделировании / отсутствие свойства локальной определенности, наличие свойств вольтерровости и компактности при естественном выборе функциональных пространств /.Показывается, что исследование широкого класса содержательных задач прогнозирования и целевого управления сводится к исследованию краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений.

Далее дается краткий обзор основных утверждений и методов теории функционально-дифференциальных уравнений[1], дающих основу для эффективного исследования краевых задач /теоремы о локальной и нелокальной разрешимости функционально-дифференциального уравнения, теоремы об априорных оценках, структуре и представлении общего решения линейной системы, критерии и условия разрешимости краевых задач/.

В заключительной части рассматриваются конструктивные методы исследования краевых задач - методы эффективного исследования разрешимости и построения решений на основе специальных теорем и алгоритмов, допускающих реализацию с помощью современных вычислительных средств и технологий. Такие методы, разработанные в Лаборатории математических методов анализа динамических моделей экономики ПГУ, охватывают широкие классы краевых задач с функциональными условиями в виде равенств и /или/ неравенств, в том числе задачи для систем с импульсными возмущениями. Для линейных задач эти методы реализованы в виде специального программного комплекса, используемого при исследовании реальных задач экономической и эколого-экономической динамики региона /Андрианов Д.Л.,Румянцев А.Н.,Федяев Е.А./. Рассматриваются и обсуждаются иллюстрирующие примеры.

1. Азбелев Н.В.,Максимов В.П.,Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. - М.:Наука,1991.

Малыгина В.В. /Пермь/

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \int_a^t x(s)\, d_s r(t,s) = 0, \quad t \in [a, +\infty), \qquad /1/$$

где функция $r(\cdot, s) : [s, \infty) \to R$ измерима, функция $r(t, \cdot) : [a,t] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение $v(t) = \operatorname*{var}_{s \in [a,t]} r(t,s)$, причем функция v суммируема на любом интервале $[a, b]$. Интеграл понимается в смысле Римана - Стилтьеса.

Обозначим $h(t) = \sup\{s \in [a,t] : r(\xi, \eta) \equiv 0 \ \forall \xi \geq t, \forall \eta \geq s\}$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть функция $r(t, \cdot)$ не убывает, $v \notin L_1[a, \infty)$ и

$$\varlimsup_{t \to \infty} \int_{h(t)}^t v(s)\, ds < 3/2 \quad (t \geq h(t)). \qquad /2/$$

Тогда для любого решения уравнения /1/ справедлива оценка:

$$|x(t)| \leq N \exp\left\{-\alpha \int_a^t v(s)\, ds\right\} \quad \forall t \geq a \quad (N, \alpha > 0).$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть функция $r(t, \cdot)$ не убывает и

$$\sup_{t \geq a} \int_{h(t)}^t v(s)\, ds \leq 3/2 \quad (t \geq h(t)). \qquad /3/$$

Тогда уравнение /1/ равномерно устойчиво.

<u>Замечание.</u> Неулучшаемость константы 3/2 в неравенствах /2/ и /3/ показывают примеры, приведенные в [1, стр.232] ; в работе [2] построен пример, из которого следует, что в /3/ точную верхнюю грань нельзя заменить верхним пределом.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
2. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения, 1992, т.28, №10, с.1716 - 1723.

Маркуш И.И., Ризун В.И. / Ужгород, Алчевск /

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вводятся две специальные системы функций / СФ / [1]

$$\{\varphi_i(t)\}_1^{\infty} \qquad /1/$$

$$\{\psi_i(t)\}_1^{\infty} \qquad /2/$$

Относительно СФ /1/ доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. СФ /1/ - базис Бари [2] в пространстве Гильберта $L_2(J)$ / $J=[0;1]$ /.

Затем ищется по СФ /2/ решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + Q(t)\dot{y} - R(t)y = 0 \qquad /3/$$

где $Q(t)$ и $R(t)$ - суммируемые функции $\forall t \in J$, в виде ряда

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t), \qquad /4/$$

разложив предварительно коэффициент $R(t)$ в ряд по СФ /1/-

$$R(t) = \sum_1^{\infty} a_i \varphi_i(t) \qquad /5/$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Коэффициенты c_i /$i=1,2,\ldots$/ ряда /4/ находятся по формулам

$$c_i = \sqrt{a_i} \qquad / \ i=1,2,\ldots \ /$$

Теорема 3. Решение /4/ дифференциального уравнения /3/ обладает ускоренной скоростью сходимости.

Полученный результат переносится на нелинейные дифференциальные уравнения и системы уравнений.

1. Ризун В.И. Модифицированный метод вспомогательных функций и его применение.- Киев: [illegible], [illegible].-331 с.

2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука.1965.-448с.

УДК 517.94

Мартыненко Г. В. (Воронеж)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

При исследовании управляемости систем, описываемых гиперболическими уравнениями возникает необходимость изучения корректности (в различных классах начальных данных) следующей краевой задачи

$$w_{tt} + Aw = 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

$$w(0,x) = y_0(x), \; w_t(0,x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} = \varphi_2(s), \quad s \in \Sigma_1 \subset \Sigma, \; w\big|_{\Sigma_1} = \varphi_1(s) \tag{3}$$

где $\Omega \subset R^n$ - компактная область с гладкой границей Γ. $Q = [0,\infty) \times \Omega$; Γ_1 - некоторое подмножество границы Γ, $\Sigma = [0,\infty) \times \Gamma$, $\Sigma_1 = [0,\infty) \times \Gamma_1$

В классическом случае (в случае достаточно гладких начальных данных) задача (1) - (3) исследована в монографии [1]. Представляет значительный интерес, [2], вопрос об однозначной разрешимости задачи в более широких классах начальных условий.

В настоящей работе установлены существование и единственность решений задачи (1) - (3) при начальных условиях из некоторого набора пространств, среди которых имеются соболевские пространства с отрицательными показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М. Лаврентьев и др. Некорректные задачи математической физики и анализа.- "Наука", Москва, 1980.

2. Ж.Л. Лионс. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - "Мир", Москва, 1972.

Матвеев М.Г. (Воронеж)

МОДЕЛЬ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается модель проектирования цифровых одноконтурных линейных САР. Модель представлена И-ИЛИ - деревом вариантов структуры САР, передаточной функции и технических средств реализации системы регулирования. Соответствующие вершины дерева соответствуют графовым моделям структур, передаточным функциям замкнутых систем в виде отношения полиномов переменной z - $B(z)/A(z)$ к множеству параметров вариантов технических средств. Введение вышеприведенных иерархических уровней модели проектирования позволяет решать задачу выбора варианта в три этапа: генерация структуры САР [1]; построение вариантов передаточных функций и принятия решения по типу регулятора [2] ; выбор наилучшего варианта технической реализации [3] . Вектор критериев эффективности на втором этапе представлен типовыми критериями качества регулирования а на третьем этапе - требованиями к параметрам технического устройства, в том числе нечеткими.

Модель проектирования на втором уровне включает имитационную модель объекта регулирования, подсистему идентификации параметров объекта и расчета оптимальных настроек регулятора по методу задания полюсов. Наличие подсистемы имитации объекта позволяет расчитывать занчения критериев качества регулирования и принимать решение на множестве вариентов моделей САР полученных в равных (оптимальных) условиях.

Модель может являться основой для разработок автоматизированной системы проектирования цифровых САР, реализуемых в различных микропроцессорных программируемых контроллерах.

Литература

1. М.Г.Матвеев, М.М.Портнов, Ю.С.Сербулов, О.Б.Горячев. Автоматизация проектирования структурных схем АСР технологических процессов//Межвуз. сб. науч. сб. Автоматизация проектирования и управления в технологических системах. Воронеж, 1990.

2. К.Острем, Б.Виттенмарк. Системы управления с ЭВМ; М., Мир, 1987.

3. В.П.Корячко, В.М.Курейчик, И.П.Норенков. Теоретические основы САПР. М.:Энергоатомиздат, 1987.

Матвеев М.Г., Майстров В.Л. /Воронеж/

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В ТРЕНАЖЕРНО-ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Тренажерно-обучающая автоматизированная система была рассмотрена с системных позиций как сложная информационная система. Такой подход позволил провести декомпозицию и выделить следующие системные элементы: функциональное назначение, функция, структура, компоновка, организация.

Функциональным назначением, определяющим назначение проектируемой информационной системы, является обучение субъекта и контроль его знаний.

Тренажерно-обучающая автоматизированная система представляет собой сложный человеко-машинный объект поэтому функция этой системы складывается из функций объекта, функций субъекта и их взаимодействия. Структура функций автоматизированной тренажерно-обучающей системы была представлена ориентированным раскрашенным графом, в котором использовались пять типов вершин: имитационная модель объекта, изучение, распознавание, действие и анализ. В качестве ребер данного графа используются информационные связи.

Модель информационных потоков в тренажерно-обучающей автоматизированной системе была разработана на этапе определения структуры информационной системы. Структура информационной системы, как и структура функций, была описана графом, где для каждого типа вершин графа функций разработана структура информационных потоков. Каждой i-ой вершине структуры системы предъявлены требования T_i, определяемые тройкой X_i, O_i, P_i, где X_i — получение на выходе из i-ой вершины новой информации, O_i — система логических отношений на X_i, P_i — требования к представлению информации.

Разработанная таким образом концептуальная модель может быть использована для моделирования информационных потоков в любых тренажерно-обучающих автоматизированных системах.

Миронова С.Р. / Казань /

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ЗАМКНУТОЙ НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Пусть Γ - замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, ограничивающая область $\mathcal{D}^+$, вообще говоря, неспрямляемая. Определим сингулярный оператор S_Γ по формуле

$$S_\Gamma \varphi(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t),$$

где $\Phi^\pm(t)$ - функции аналитические в областях $\mathcal{D}^\pm$, $\mathcal{D}^- = \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}^+$ и имеющие непрерывные продолжения на $\Gamma = \partial\mathcal{D}$, удовлетворяющие условию $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$, причем $\Phi^-(\infty) = 0$.

Если $\varphi \in H_\nu(\Gamma)$ и $\nu > \frac{\alpha(\Gamma)}{2}$, где $\alpha(\Gamma)$ - верхняя метрическая размерность кривой Γ, то $S_\Gamma \varphi(t)$ существует, а при выполнении неравенства

$$\alpha_H(\Gamma) - 1 < \lambda < (2\nu - \alpha(\Gamma))/(2 - \alpha(\Gamma)),$$

где $\alpha_H(\Gamma)$ - размерность Хаусдорфа кривой Γ, оператор S_Γ ограниченно действует из $H_\nu(\Gamma)$ в $H_\lambda(\Gamma)$ / I /. При этом для гладких кривых оператор S_Γ совпадает с классическим оператором $v.p.\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$.

В докладе рассмотрено сингулярное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + b(t) S_\Gamma \varphi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (I)$$

где $a^2(t) - b^2(t) = 1$, $t \in \Gamma$, $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$ и исследована картина его разрешимости в пространстве $H_\lambda(\Gamma)$ путем сведения (I) к краевой задаче Римана.

Литература

I. Кац Б.А. Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. - 1983. - № 4. - С. 68-80.

Минбаев К.Т. (Алма-Ата)

О СИЛЬНЫХ АСИМПТОТИКАХ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКАХ ДЛЯ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ

Для чисел $r \in N$, $p,q \in [1,\infty]$ и обыкновенного дифференциального оператора

$$Lf(x) = f^{(r)}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} a_j(x) f^{(j)}(x), \quad x \in [0,1], a_j \in L_\infty(0,1),$$

введем классы Соболевского типа следующим образом

$$W_p(L) = \{f : f, \ldots, f^{(r-1)} \in AC[0,1], f^{(r)} \in L_p(0,1), \|Lf\|_{p,(0,1)} \le 1\}$$

Пусть $d_n(W_p(\mathcal{L}), L_q)$ будет колмогоровским поперечником $W_p(\mathcal{L})$ в $L_q(0,1)$; $d_n \equiv d_n(W_p((\frac{d}{dx})^r), L_q)$.

[I] содержит обзор результатов по точным значениям d_n; решение проблемы слабой асимптотики d_n было завершено в [2]. Пусть $\alpha = \alpha(r,p,q) > 0$ есть показатель слабой асимптотики $d_n \asymp n^{-\alpha}$ (см. [2]).

ТЕОРЕМА. Если $m,n \in N$ и в случае $r=1$, $p<2<q$ значение $p=1$ исключается, то выполнено неравенство $d_{mn} \le c\, d_n m^{-\alpha}$, где $c=1$, если либо $1 \le q \le p$, либо $p < q \le 2$. Более того, если одно из последних двух неравенств выполнено, то

$$0 < \lim_{n\to\infty} n^\alpha d_n = \inf_{n>0} n^\alpha d_n = \lim_{n\to\infty} n^\alpha d_n(W_p(L), L_q) < \infty$$

Результат [3,4] легко сводит случай $d_n(W_p(L), L_q)$ к d_n. Подобное утверждает справку для линейных поперечников.

1. Tikhomirov V.M. Approximation Theory. Sovrem. Problemy Mat. V. 14. Moscow : VINITI, 1987
2. Kashin B.S. Izvestiya AN SSSR. Ser. mat. 1977. V. 41, No. 2. 334-351
3. Makovoz Y. Proc. Amer. Math. Soc 1983. V. 82, No. 1, 109-112.
4. Sazanov A.A. In the book : Approximation of Functions by Polynomials and Splines. Sverdlovsk, 1985

Назаров Л.Г., Хромов А.П. (Саратов)

О ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВОЛЬТЕРРОВА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

В $L_2[0,1]$ рассматривается оператор

$$\mathcal{M}f = \int_0^x \mathcal{M}(x-t)f(t)\,dt$$

где

$$\mathcal{M}(x) = \frac{\partial^m}{\partial \xi^m}\left.\frac{x^{\xi+\alpha-1}}{\Gamma(\xi+\alpha)}\right|_{\xi=0}, \quad \alpha>2.$$

Теорема. Для того, чтобы линейная оболочка системы $\{\mathcal{M}^k g\}_{k=0}^{\infty}$ была плотной в $L_2[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\delta |g(t)|\,dt>0 \quad \text{при любом } \delta>0.$$

С. Р. Насыров

МЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ СФЕРЫ

Сходимость римановых поверхностей к ядру дает геометрическое описание сходимости мероморфных функций и изучалась в работах [1-6]. Автором в [6] введены сходимость последовательности римановых поверхностей с отмеченными точками: обычная и регулярная сходимость. В случае регулярной сходимости можно ввести на пространстве R римановых поверхностей топологию T, согласованную с этой сходимостью. Если пополнить R вырожденными элементами (точками сферы), то полученное пространство становится компактным и удовлетворяющим второй аксиоме счетности. По второй метризационной теореме Урысона, оно метризуемо. В докладе *описывается в явном виде метрика, согласованная с топологией T.* Отметим, что для однолистных областей соответствующая метрика построена в [7], для римановых поверхностей без точек ветвления - в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Caratheodory C. Untersuchungen uber die konformen Abbildungen von festen und veranderlichen Gebieten // Math. Ann. - 1912. - B. 72. - S. 107-144. 2. Волковыский Л. И. Сходящиеся последовательности римановых поверхностей // Мат. сб. - 1948. - Т. 23(65), No 1. - С. 361-382. 3. Трохимчук Ю. Ю. К теории последовательностей римановых поверхностей // Укр. мат. ж. - 1952. - Т. IV, No 1. - С. 49-56. 4. Трохимчук Ю. Ю. О последовательностях аналитических функций и римановых поверхностей // Укр. мат. ж. - 1952. - Т. IV, No 4. - С. 431-435. 5. Насыров С. Р. Топологическое пространство римановых поверхностей, связанное со сходимостью к ядру // ДАН УССР, сер. А. - 1988. - No 5. - С. 19-22. 6. Насыров С. Р. Бикомпактность пространств римановых поверхностей в топологии, индуцированной сходимостью к ядру. // Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1987, вып. 24. - С. 174-187. 7. Куфарев Б. П. Метризация пространства всех простых концов областей семейства // Мат. заметки. - 1969. - Т. 6, No 5. - С. 607-618. 8. Насыров С. Р. Метризация пространства римановых поверхностей над сферой // Всесоюзн. конф. по геометрической теории функций. Тез. докл. / Новосибирск, 1988. - С. 74.

Немец В.С. (Гродно)

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для алгебраического дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^{N} B_i(z)\prod_{k=1}^{n_i}\left\{w^{(i_{ki})}\right\}^{\nu_{ki}} = 0, \qquad (1)$$

где i_{ki} и ν_{ki} – целые неотрицательные числа, $B_i(z)=\beta_i z^{b_i}+\dots$, в зависимости от характеристик $X_i=\sum_{k=1}^{n_i}\nu_{ki}$, $M_i=\sum_{k=1}^{n_i} i_{ki}\nu_{ki}$ в дополнение к [1] и [2, с. 56] доказана

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $X_0=\dots=X_p=d$, $d>X_s$, $0\le p\le N$, $s=\overline{p+1,N}$;

2) $M_0=\dots=M_h=M$, $M>M_j$, $0\le h<p$, $j=\overline{h+1,p}$;

3) $b_0=\dots=b_\lambda=b$, $b>b_\tau$, $0\le\lambda<h$, $\tau=\overline{\lambda+1,h}$;

4) $\beta_0+\dots+\beta_\lambda\ne 0$;

5) $b-M\ge b_j-M_j$, $j=\overline{h+1,p}$.

Тогда: 1) среди однозначных решений уравнения (1) только рациональные решения имеют конечное число полюсов; 2) уравнение (1) не имеет решений с изолированными однозначными существенно особыми точками.

Исследуя связь между решениями пятого и шестого неприводимых уравнений Пенлеве, доказано, что пятое уравнение Пенлеве имеет целые трансцендентные решения (порядков $\operatorname{ord} w(z)=1$ и $\operatorname{ord} w(z)=\frac{1}{2}$), в то время, как шестое уравнение Пенлеве целых трансцендентных решений не имеет.

[1] Горбузов В.Н., Кишкель С.И. По поводу одной теоремы Виттиха// Дифференц. уравнения.- 1987.- Т. 23, № 5.- С. 891 - 893.

[2] Еругин Н.П. Проблема Римана. - Минск: Наука и техника, 1982.- 336 с.

УДК 517.968

Новикова Л.В. /г.Ростов-на-Дону /

Каноническая нормальная форма нелинейного уравнения диффузии.

Рассматриваются разностные аналоги уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) u^k \qquad /1/$$

в банаховом пространстве E функций $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu, \quad \hat{u} \in L_1(-\infty,\infty)$$

с нормой $\| u \|_E = \| \hat{u} \|_{L_1(-\infty,\infty)}$.

Уравнение /1/, рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u) \qquad /2/$$

в банаховом пространстве E, имеет непрерывный спектр $\sigma(A)$ в линейной части. При условии, что

$$\max \lambda \in \sigma(A) < 2 \min \lambda \in \sigma(A) \qquad /3/$$

уравнение /1/ сводится [1] подстановкой $u = H(v)$ к соответствующему линейному уравнению $\frac{dv}{dt} = Av$.

При невыполнении условия /3/ в процедуре приведения уравнения /2/ к линейному уравнению возникают резонансные члены. Описывается процедура приведения уравнения /2/ в этом случае к канонической нормальной форме. Выписываются возникающие при этом резонансные члены второго и третьего порядка.

Литература.

1. Денисов М.Ю. Приведение к линейной форме нелинейного уравнения диффузии. Функциональный анализ и его приложения.-[illegible]-т.19.Вып.1.-С.69-70.

2. Николенко Н.В. Метод нормальных форм Пуанкаре в задачах интегрируемости уравнений эволюционного типа. Успехи математических наук.-1986-т.41.Вып.5/251/.-С.109-151.

Ногин В.А., Сухинин Е.В. (Ростов-на-Дону)

О ДРОБНЫХ СТЕПЕНЯХ НЕЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Даётся описание дробных степеней дифференциальных операторов второго порядка $L=-Q(\mathcal{D},\mathcal{D})$, порождаемых произвольной знакопеременной квадратичной формой $Q(x,x)$ с вещественными коэффициентами, ранга r, $2\leq r\leq n$.

Дробные степени оператора L определяются равенством

$$L^{\alpha/2}_{Q\mp i0}\varphi=F^{-1}(Q\mp i0)^{\alpha/2}F\varphi\ ,\ \alpha\in\mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Re}\,\alpha\neq 0\ ,$$

где преобразование Фурье понимается в смысле обобщённых функций над пространством Ψ_V шварцевых функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на множестве V, где V-конус нулей формы $Q(x,x)$.

Отрицательные степени оператора L рассматриваются как операторы, действующие из $L_p(R^n)$ в Φ'_V, где $\Phi_V=F(\Psi_V)$. Например, в случае, когда $\mathrm{rang}\,Q=n$, $1<p<\frac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}$, $n-2<\mathrm{Re}\,\alpha<n$, оператор $L^{-\alpha/2}_{Q\mp i0}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, на функциях из L_p понимается как продолжение по ограниченности с плотного в L_p множества S оператора

$$\left(L^{-\alpha/2}_{Q\mp i0}\varphi\right)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-s}{2}\pi i}}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{R^n}(R\mp i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}\varphi(x-y)\,dy\ ,\ \mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \alpha\neq n+2j,\ j=0,1,2,\dots$$

где $R(y,y)$ -двойственная к $Q(y,y)$ в смысле преобразования Фурье квадратичная форма; $\gamma_n(\alpha)$-нормировочная постоянная, s -число положительных квадратов в каноническом представлении формы $R(y,y)$. В остальных случаях оператор $L^{-\alpha/2}_{Q\mp i0}$ трактуется в смысле свёртки с ядром

$$k^{\mp}_{\alpha}(y)=e^{\mp\frac{n-s}{2}\pi i}\gamma^{-1}_n(\alpha)\left(R(y,y)\mp i0\right)^{\frac{\alpha-n}{2}}$$

в классе Φ'_V.

Положительные степени L рассматриваются как операторы, действующие из Φ'_V в $L_p(R^n)$. Показано, что область определения $\mathcal{D}(L^{\alpha/2}_{Q\mp i0})$ положительных степеней оператора L совпадает с образом $L^{-\alpha/2}_{Q\mp i0}(L_p)$ отрицательных степеней L. Даётся конструктивное описание положительных степеней оператора L, пространств $L_q\cap\mathcal{D}(L^{\alpha/2}_{Q\mp i0})$ и $L_q\cap L^{-\alpha/2}_{Q\mp i0}(L_p)$, $1\leq q<\infty$, в терминах аппроксимативных операторов.

Орлов Е.В. (Саратов)

ТЕОРЕМА БАНАХА-ЗИГМУНДА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

С.Банах доказал ,[1],стр.198,что если $f(x)\in L^p(0,2\pi)$, $1<p<2$, то $\Sigma|\hat f(n_k)|^2<\infty$, для любой последовательности $\{n_k\}$, $n_{k+1}/n_k > q > 1$, где $\hat f(n)=1/2\pi\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)dx$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.А.Зигмунд,[1] стр.198,получил аналог этого утверждения для $f(x)\in L(\log L)^{1/2}$. Результат С.Банаха справедлив,как показал У.Рудин [2],и для последовательностей $\Lambda(p)$, $2<p<\infty$,см.[3],стр.287.

Рассматривая соотношения между классами последовательностей Сидона,равномерной сходимости,типа $\Lambda(\infty)$ и типа $\Lambda(p)$, $2<p<\infty$,[2], удалось показать что справедлива

Теорема 1. Пусть $f(x)\in L(\log^+ L)^{\lambda}$, $1/2<\lambda<\infty$, $\{n_k\}$-последовательность равномерной сходимости . Тогда справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat f(n_k)|^2<\infty .$$

Отсюда следует

Теорема 2. Между классами последовательностей A, U, $\Lambda(\infty)$ и $\Lambda(p)$,$2 < p < \infty$,справедливы строгие вложения

$$A \subset U \subset \Lambda(\infty) \subset \Lambda(p) .$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Зигмунд А.,Тригонометрические ряды ,М.,1965.

[2] Rudin Y,Trigonometric series with gaps,J.Math.Mech.,9(1960) 202-227.

[3] Эдвардс ,Ряды Фурье в современном изложении ,М.,1985.

[4] Ульянов П.Л.,Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, т.XXVII,№2(164),1972,3-52.

Павленко В.Н. (Челябинск)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматривается задача Дирихле

$$-\sum_{i=1}^{n}(a(x,|\nabla u|^2)u_{x_i})_{x_i}+g(x,u)=0\ ,\ x\in\Omega \qquad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \qquad (2)$$

в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, где функция $g(x,t)=a(x,t^2)\cdot t$ для почти всех $x\in\Omega$ неубывающая и непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и для любого $t\in\mathbb{R}$ функция $g(\cdot,t)$ измерима на Ω, причем, существуют постоянные $0<\alpha<\beta$ такие, что $\alpha\le a(x,t)\le\beta$ на $\Omega\times\mathbb{R}_+$, функция $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ борелева ($mod\ 0$) и для почти всех $x\in\Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода.

Определение. Обобщенным слабым решением задачи (1) - (2) называется функция $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, для которой найдется измеримая $z:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что $z(x)\in[g_-(x,u(x)),\ g_+(x,u(x))]$ для почти всех $x\in\Omega$ $(g_-(x,u)=min(g(x,u-),g(x,u+)),$ $g_+(x,u)=max(g(x,u-),g(x,u+)))$ и для любого $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a(x,|\nabla u|^2)u_{x_i}v_{x_i}\,dx+\int_\Omega z(x)v(x)\,dx=0\ .$$

Теорема. Предположим, что

1) для некоторого $1<p<2n/(n-2)$ $|g(x,u)|\le a|u|^{p-1}+b(x)$ $\forall u\in\mathbb{R}$ и почти всех $x\in\Omega$, $a>0$, $b\in L_q(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$;

2) $2\int_0^u g(x,\tau)d\tau\ge-ku^2-k_1(x)|u|^{2-\gamma}-k_2(x)$ $\forall u\in\mathbb{R}$ и почти всех $x\in\Omega$, где $0<\gamma<2$, $k_1\in L_{2/\gamma}(\Omega)$, $k_2\in L(\Omega)$, постоянная $k>0$ и $\alpha-kM>0$, M - постоянная в неравенстве Стеклова

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx\le M\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_{x_i}^2\,dx\quad\forall u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

Тогда задача (1) - (2) имеет обобщенное слабое решение.

Для доказательства этой теоремы вариационный метод для уравнений с разрывными операторами, предложенный автором ранее (Дифференц. уравнения. 1988. - т.24, № 8. - С. 1397-1402), потребовал дальнейшего развития.

Лелешенко Б.И. (Днепропетровск)

О рациональной аппроксимации функций из неизотропных пространств

Пусть $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\mu_i>0$, $i=1,\dots,n$, и $\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$. Множество чисел $G_\mu=\{\gamma=(\beta,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mu_i,\ \beta=(\beta_1,\dots\beta_n)$ - векторы с неотрицательными координатами $\}$ упорядочим по возрастанию $0=\gamma_0<$ $<\gamma_1<\dots<\gamma_n<\dots$. Обозначим через $P^{\mu}_{\gamma_s}$ множество полиномов вида $p(y)=\sum_{(\beta,\mu)\le\gamma_s}C_\beta y^\beta$,где $y^\beta=y_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\beta_n}$. Далее рассматриваются функции $f\in L_p(\Omega)$, где $0<p\le\infty$ и Ω - параллелепипед из R^n . Определим наилучшее приближение функции f на параллелепипеде $\Pi x,\tau=\{y;\ |y_i-x_i|\le\tau^{\mu_i},\ i=1,\dots,n\}$, принадлежащем Ω: $E^{\mu}_{\gamma_s}(f)_p=\inf_{g\in\mathcal{P}^{\mu}_{\gamma_s}}\|f-g\|_{L_p(\Pi x,\tau)}$.
Введем в рассмотрение класс $\Phi_+(\lambda)$ соотв. $\Phi_-(\lambda)$ таких возрастающих функций $\varphi: R_+\to R_+$, что для достаточно малого $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<0)$ функция $t^{-\lambda-\varepsilon}\varphi(t)$ возрастает (убывает) в окрестности нуля. Для $\varphi\in\Phi_+(\gamma_m)\cap\Phi_-(\gamma_{m+1})$ полагаем

$$f^{\varphi}_{p}(x)=\sup_{\Pi x,\tau\subset\Omega}E^{\mu}_{\gamma_s}(f)_p/[\tau^{1/p}\varphi(\tau)].$$

Через $z_{\gamma_s}(f)_q$ обозначим наилучшее приближение функции f в $L_q(\Omega)$ рациональными функциями $R=P_1/P_2$, где $P_1;P_2\in\mathcal{P}^{\mu}_{\gamma_s}$.

Теорема I. Если $p>0$, $q\ge1$ и $\varphi\in\Phi_+(1/p-1/q)$, то тогда $\forall f\in L_p(\Omega)$ таких, что $f^{\varphi}_p\in L_p(\Omega)$ имеет место неравенство

$$z_{\gamma_s}(f)_q\le C\{\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f^{\varphi}_p\|_{L_p(\Omega)}\}/\varphi(\gamma_s).$$

Здесь C не зависит от f .

Теорема 2. Если $p>0$, $q\ge1$, $p<q\le\infty$, $\varphi\in\Phi_-(1/p-1/q)$ и $\varphi_i(t)=\varphi(t^{\frac{1}{\mu_i}})$, $i=1,\dots,n$, то тогда из условий на частные модули непрерывности $\omega^{(i)}_{\chi_i}(f;t)_p=O(\varphi_i(t))$, $t\to0$ $(i=1,\dots,n)$, следует, что $z_{\gamma_s}(f)_q\le C/\varphi(\gamma_s)$.
Здесь C не зависит от f .

Сформулированные теоремы обобщает результат Девора и Ю (см. Trans.Amer.Math.Soc. v.293, №1, 1986).

Перов А. И. (Воронеж)

Нахождение стабилизирующего решения матричного уравнения Риккати методом последовательных приближений

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) \quad (t = 0,1,2,\ldots), \quad x(0) = x_0$$

с квадратичным критерием качества

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} (x^+(t)Rx(t) + u^+(t)Cu(t)),$$

который надлежит минимизировать. Квадратные матрицы Р и С предполагаются симметрическими и положительными: $R = R^+ > 0$, $C = C^+ > 0$.

Решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$S = \Phi^+ S \Phi - \Phi^+ S \Gamma(C + \Gamma S \Gamma^+)^{-1}\Gamma^+ S \Phi + R$$

называется стабилизирующим [1], если $S = S^+ > 0$ и все собственные значения матрицы

$$(I - \Gamma(C + \Gamma S \Gamma^+)^{-1}\Gamma^+ S)\Phi$$

лежат внутри единичного круга комплексной плоскости.

Т е о р е м а. Пусть пара (Φ,Γ) является l_2-управляемой [3]. Тогда уравнение Риккати имеет единственное решение, являющееся симметрической положительной матрицей. Это решение будет стабилизирующим решением и может быть получено методом последовательных приближений ($S_0 = R$)

$$S_{k+1} = \Phi^+ S_k \Phi - \Phi^+ S_k \Gamma(C + \Gamma S_k \Gamma^+)^{-1}\Gamma^+ S_k \Phi + R, \quad k = 0,1,\ldots,$$

причем неубывающая последовательность $\{S_k\}$ сходится к искомому решению S со скоростью геометрической прогрессии.

По нашему мнению, предлагаемый метод обладает определенными преимуществами по сравнению с известными способами нахождения стабилизирующего решения уравнения Риккати [1]; он близок к тем результатам из [2], где говорится об уравнениях с вогнутыми нелинейностями.

Литература

1. Алиев Ф. А., Бордюг Б. А., Ларин В. Б., H_2-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку, Элм, 1991, 376 с.
2. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва, Физматгиз, 1962, 396 с.
3. Антонов В. Г., Лихтарников А. Л., Якубович В. А. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений. Вестн. Ленинградского ун-та, 1975, № 1, с. 22-31.

Писаренко Н.Д. (Воронеж)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ ПРОЦЕССОВ ЭКСТРАКТИВНОЙ РЕКТИФИКАЦИИ ПО КОСВЕННЫМ ПАРАМЕТРАМ

В различных производствах химической и нефтехимической промышленности значительное место занимают процессы ректификации. Для управления этими объектами получили применение системы управления по составам конечных продуктов разделения с использованием промышленных хроматографов в замкнутом контуре. В таких системах вследствии инерционности объектов управления, а также дискретности анализаторов составов очень трудно добиться качественного регулирования. Одним из путей повышения качества управления является контроль и регулирование косвенных параметров.

В докладе обоснована возможность использовать в качестве таких параметров разность температур как для обычной ректификации, так и для экстрактивной ректификации (ЭР). Для экстрактивной ректификации бутан-бутиленовой фракции с ацетонитрилом получены зависимости разности температур на определенных группах тарелок в исчерпывающей и укрепляющей частях колонны с составами дистиллята и кубового продуктов в статических и динамических режимах.

Для обоснования и выбора системы регулирования была поставлена и решена задача исследования различных вариантов систем регулирования как по составам конечных продуктов, так и по разности температур. Создан комплекс программных средств автоматизированного исследования таких систем. Выполнено моделирование различных вариантов систем регулирования ЭР и проведен их сравнительный анализ качества регулирования. Показана целесообразность разработки систем регулирования продуктов по разности температур.

Регулирование состава дистиллята осуществляется воздействием на поток флегмы, состава кубового продукта - на задание регулятору температуры в кубе колонны. Заданные значения разности температур устанавливаются в зависимости от заданных значений составов и нагрузки по исходной смеси. Вводятся воздействия от возмущений по потоку исходной смеси. Проведена экспериментальная проверка системы управления экстрактивной ректификации бутан-бутиленовой фракции по разности температуры, показана ее работоспособность и эффективность.

Плаксин М.А. (Пермь)

МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ УЧЕБНЫХ ПРОГРАММ.

В настоящее время школьный курс информатики в огромном большинстве случаев сводится к начальному курсу программирования (Хорошо это или плохо - это тема отдельного разговора). При этом явно недостаточно внимания уделяется таким важным вопросам как тестирование и отладка. В докладе предлагается методика тестирования учебных программ, основанная на классических научных исследованиях на эту тему и опыте преподавания начального курса программирования в старших классах средней школы и на первом курсе университета.

Основные положения методики:

1. Цель тестирования - обнаружение ошибок в программе. Неоттестированная программа считается незаконченной.
2. Тесты готовятся при написании текста программы, до выхода на машину. Тест в обязательном порядке включает в себя не только исходные данные, но и ожидаемые результаты.
3. Тестирование обязательно выполняется сначала "в сухую", без выхода на машину, с заполнением трассировочных таблиц.
4. Вводится понятие полноты тестирования и рассматриваются различные критерии полноты тестирования (критерии "черного ящика" - тестирование с точки зрения поставленной задачи; критерии "белого ящика" - тестирование с точки зрения структуры программы). На осове анализа их достоинств и недостатков выводится критерий "минимально-грубого тестирования" (МГТ).
5. Критерий МГТ формулируется следующим образом: должен быть предложен такой набор тестов, чтобы при прогоне всех тестов этого набора: (1) любая развилка в программе выполнялась как по ветви "то", так и по ветви "иначе"; (2) любой цикл в программе выполнялся 0 раз (управление передается на заголовок цикла, но тело цикла не исполняется ни разу), 1 раз, более одного раза (естественно, если язык не допускает нулекратного исполнения цикла, то требовать его не надо); (3) любое элементарное условие должно выдавать как результат "истина", так и результат "ложь". (понятие "элементарного условия" вводится для отличия от "составных условий". Например, "(a>b) or (x=y)" - условие составное, "a>b" и "x=y" - условия элементарные).
6. Для наглядной записи критерия МГТ предлагается специальная табличная форма.

Плотников В.А. (Одесса)

УСРЕДНЕНИЕ ОРБИТАЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x) \tag{1}$$

Многозначное отображение $R(t)$ называется [1] R -решением, соответствующим включению (1), если множество $R(t)$ замкнуто для всех t, функция $R(t)$ абсолютно непрерывна и для почти всех t

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} h\Big(R(t+\Delta),\ \bigcup_{x\in R(t)} \big(x + F(t,x)\cdot\Delta\big)\Big) = 0, \tag{2}$$

где $h(\cdot,\cdot)$ - расстояние по Хаусдорфу.

Назовем R -решение $R(t)$ дифференциального включения (1) устойчивым по Ляпунову [2], если для каждого $\gamma > 0$ и $t_0 \in [0,\infty)$ существует такое $\delta(\gamma,t_0) > 0$, что

1) все R -решения $Y(t)$ дифференциального включения (1) удовлетворяющие условию

$$h(Y(t_0), R(t_0)) < \delta(\gamma, t_0) \tag{3}$$

определены для каждого $t \geq t_0$;

2) для всех решений удовлетворяющих неравенству (3) справедливо неравенство

$$h(Y(t), R(t)) < \gamma \qquad \text{п.в. } t \geq t_0.$$

Асимптотическая устойчивость и орбитальная устойчивость определяются аналогично.

В докладе приводится обоснование метода усреднения на бесконечном промежутке для орбитально устойчивых решений дифференциального включения (1).

Литература

1. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая оптимизация для нелинейных систем управления. Минск. Изд-во БГУ, 1977, 206 с.
2. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. - 188 с.

Покорный Ю.В., Лазарев К.П., Боровских А.В./Воронеж/

О δ-РЕГУЛЯРНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Если $G(t,s)$ - функция Грина некоторой скалярной задачи, то для доказательства осцилляционных спектральных свойств этой задачи достаточно показать, что $G(t,s)$ является ядром Келлога. Последнее эквивалентно, вообще говоря, тому, что для произвольных $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n$ функция вида

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i G(t,\xi_i) \tag{I}$$

имеет не более $n-1$ перемены знака, причем $g(\xi_1)\neq 0$, если $g(\cdot)$ обращается в нуль в остальных точках $\xi_2,\ldots,\xi_n$. Так как функция (I) является обобщенным решением уравнения вида

$$\mathcal{L}x=\sum_{i=1}^{n} c_i\delta(t-\xi_i) \tag{2}$$

при исходных краевых условиях /здесь $\mathcal{L}$ - дифференциальное выражение, порождающее исходную краевую задачу/, то келлоговость $G(t,s)$ удобно проверять, изучая распределение нулей решения уравнения (2). Соответствующее условие для случая классической задачи Валле-Пуссена, а также для нестандартных многоточечных задач с непрерывными решениями были названы условиями δ-регулярности. Понятие обобщенных решений здесь не выходило за рамки теории Шварца. Соответствующая техника базировалась на итерировании обобщенной теоремы Ролля.

Попытка распространения описанного метода на случай краевых задач с разрывными функциями Грина сталкивается с существенными трудностями. Следует отметить, что для ряда естественных физических задач разрывы функции Грина обуславливаются заведомым наличием разрывов в решениях соответствующих дифференциальных уравнений /например - при деформации цепочки упруго сочлененных континуумов/. Здесь оказывается весьма проблематичным корректное определение обобщенных решений соответствующего уравнения (2). Трудности возникают также при определении понятий числа перемен знака, суммарной кратности нулей и пр. для разрывных функций, причем таком определении, которое позволило бы вписать эти понятия в концепцию Келлога. Предлагаемый авторами доклад посвящен корректному определению соответствующих обобщений δ-регулярности.

Покровский А.Н. (С.-Петербург)

РЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ, БЛИЗКИЕ К ПЕРИОДИЧЕСКИМ

Система уравнений

$$\dot{u} = b(u,\tau(t));\ u(0)=u^{\circ};\ \dot{y}_j = g(y_j,u);\ y_j(0)=y_j^{\circ};\ y_{j+1}^{\circ} < y_j^{\circ}, \qquad (1)$$

и условия разрывов решения в моменты t_j^k, $k=1,2,\ldots$, $j=\overline{1,N}$:

$$y_j(t_j^k-0) = \beta(u(t_j^k-0));\quad y_j(t_j^k+0) = \alpha(u(t_j^k+0));$$
$$u(t_j^k+0) = u(t_j^k-0) + a(u(t_j^k-0))/N, \qquad (2)$$

определяют импульсную систему. Гладкие функции b,τ,g,α,β, a, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_1(u,\tau) = g(\beta(u),u) - \beta'(u)b(u,\tau) > 0;\ g(y,u) > 0;\ \beta'(u) \geq 0;$$
$$\gamma_2(u,\tau) = g(\alpha(u),u) - \alpha'(u)b(u,\tau) > 0;\ a(u) \geq 0;$$
$$\gamma_3(u) = \beta'(u)g(\alpha(u),u) - \alpha'(u)g(\beta(u),u) > 0;\ \beta(u) > \alpha(u).$$

Пусть $\bar{u}(\tau)$ - устойчивый корень уравнения $b(\bar{u},\tau)=0$. Обозначим

$$T(u^{\circ}) = \int_{\alpha(u^{\circ})}^{\beta(u^{\circ})} dy/g(y,u^{\circ});\quad q = \sup_{u^{\circ}} \exp\left\{\int_{\alpha(u^{\circ})}^{\beta(u^{\circ})} g_y(y,u^{\circ})\,dy/g(y,u^{\circ})\right\};$$

$$g_y = \partial g/\partial y;\quad a_u = da/du;\quad b_u = \partial b/\partial u;$$

$$p = \sup_{u,\tau}[a_u + b_u T(u)];\quad u_{min} \leq u \leq u_{max};\quad 0 \leq \tau \leq \tau_1.$$

Теорема 1. При $\tau = const$ существует разрывное периодическое решение (1),(2) $\bar{u}(t,\tau), \bar{y}_j(t,\tau)$ с периодом $\bar{T}(\tau)$ и такие $K_T < \infty$, $K_1 < \infty$, что

$$|\bar{T}(\tau) - T(\bar{u}(\tau))| \leq K_T/N;\quad |\bar{u}(t,\tau) - \bar{u}(\tau)| \leq K_1/N.$$

Теорема 2. При выполнении условий $p < 0$, $q < 1$ существуют такие числа $t_1 < \infty$, $K_2 < \infty$, что для решения $u(t)$ системы (1),(2) при $\tau = t/N$ на интервале $t_1 \leq t \leq N\tau_1$ справедлива оценка

$$|u(t) - \bar{u}(t, t/N)| \leq K_2/N.$$

Привалов А.А. (Саратов)

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ВСЮДУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА-ЧЕБЫШЕВА

Пусть $T=\{t_{k,n}\}$, $t_{kn}=\cos\theta_{k,n}$, $\theta_{kn}=\frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k=0,1,2,\ldots,n$; $n=1,2,3,\ldots$ – матрица Чебышова. Положим $\theta_{n+1,n}=\pi$, $t_{-m,n}=t_{m-1,n}$ и $\theta_{-m,n}=-\theta_{m-1,n}$, $m=1,2,3,\ldots,n+1$; $n=1,2,3,\ldots$.
Пусть теперь функция f задана на отрезке $[-1;1]$ и целые числа $n\geq 3$ и $-1\leq p\leq n$. Положим

$$R_n(f,p)={\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}' \frac{f(t_{2k+1,n})+f(t_{2k-1,n})-2f(t_{2k,n})}{\varphi(2k,n,p)}$$

где

$$\varphi(k,n,p)=\begin{cases} p-k, & |p-k|\leq 3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right);\\ p-k-2n, & p-k>3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),\end{cases}$$

и "штрих" у знака суммы указывает на отсутствие слагаемого (не более одного) с индексом k, являющегося решением уравнения $\varphi(2k,n,p)=0$; $L_n(T,f,x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по n – ой строке матрицы T для f.
Теорема. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-1;1]$ и

$$\lim_{n\to\infty} L_n(T,f,x)=f(x) \qquad (I)$$

везде на $[-1;1]$. Тогда для любых $\varepsilon>0$ и N существует такое число N_1, что какова бы не была точка $x\in[-1;1]$ найдется номер n, $N\leq n\leq N_1$, что $|R_n(p)|<\varepsilon$. Здесь p, $-1\leq p\leq n$, определяется равенством $x=\cos\frac{2p+2\alpha+1}{2n+2}\pi$, $0\leq\alpha<1$.
Будет также обсуждаться вопрос об условиях на f, гарантирующих выполнение равенства (I) везде на $[-1;1]$.

Провоторов В.В., Дикарева Е.Р. (Воронеж)

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА СЕТИ

Рассматривается сеть-пучок S, состоящая из объединения полуинтервалов $\Delta_i = (a_i, b]$, $i = \overline{1,m}$, и полуоси $\Delta_{m+1} = [b, \infty)$; континуумы (рёбра) Δ_i имеют только одну общую точку (узел) b. На сети S вводится ориентация: рёбра Δ_i, $i = \overline{1,m}$, ориентированы "к узлу b", а Δ_{m+1} -"от узла b". Пусть на $S \setminus \{b\}$ задано дифференциальное выражение $\ell(x) \equiv -(p x')' + q x$. Считаем, что функции $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ определены на S и их сужения $p_i(\cdot)$, $q_i(\cdot)$ на Δ_i ($i = \overline{1,m+1}$) удовлетворяют условиям: $p_i(\cdot) \in C^1(\bar{\Delta}_i)$, $q_i(\cdot) \in C(\bar{\Delta}_i)$, $i = \overline{1,m}$; $p_{m+1}(\cdot) \in C^1([b,\beta])$, $q_{m+1}(\cdot) \in C([b,\beta])$ для любого конечного $\beta > b$; $p_i(\cdot) > 0$, $q_i(\cdot) \ge 0$, $i = \overline{1,m+1}$.

Под дифференциальным уравнением $\mathcal{L}x = f$ на сети S понимается уравнение $\ell(x) = f(t)$, $t \in S \setminus \{b\}$ (последнее есть множество уравнений $\ell_i(x_i) = -(p_i x_i')' + q_i x_i = f_i$, $t \in (a_i, b)$, $i = \overline{1,m+1}$) и условия в точке b: $x_1(b) = x_2(b) = \ldots = x_{m+1}(b)$,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i'(b) = p_{m+1} x'_{m+1}(b)$$

Здесь сужения $f_i(\cdot)$ на Δ_i функции $f(\cdot)$ принадлежат классам $C(\bar{\Delta}_i)$; $x_i(\cdot)$ - сужение на Δ_i функции $x(\cdot)$.

Пусть $u_i(x)$, $i = \overline{1,m+1}$ - линейные функционалы, задающие условия (типа Коши) $u_i(x) = 0$, $i = \overline{1,m+1}$, в $m+1$ точках сети S.

Теорема. Если из равенства нулю определителя $W(\varphi_i, i = \overline{1,m+1}) = \det \| u_i(\varphi_j) \|$, $i, j = \overline{1,m+1}$, вытекает линейная зависимость решений φ_i ($i = \overline{1,m+1}$) уравнения $\mathcal{L}x = 0$ на S, то функционалы u_i ($i = \overline{1,m+1}$) задаются на более чем $m-1$ рёбрах S.

Теорема устанавливает необходимые условия корректности задания условий $u_i(x) = 0$, которые мы назовём начальными условиями, а задачу отыскания решения уравнения $\mathcal{L}x = f$, удовлетворяющего условиям $u_i(x) = 0$ ($i = \overline{1,m+1}$) - начальной задачей.

Исследованы вопросы единственности решения начальной задачи, построения частного решения и функции Грина для соответствующей краевой задачи.

Прохоров Д.В. (Саратов)

ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРОБЛЕМЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть S^M, $M>1$, - класс голоморфных однолистных в единичном круге функций $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, удовлетворяющих условию $|f(z)|<M$. Экстремум многих функционалов на классе S^M доставляется функцией Пика P_M, которая отображает единичный круг на круг радиуса M с прямолинейным разрезом. Среди нерешенных задач в классе S^M известны 3 гипотезы З.Якубовского:

а) для всякого четного n существует M_n такое, что для всех $M \geqslant M_n$ коэффициенты a_n функции $f \in S^M$ удовлетворяют неравенству $|a_n| \leqslant |P_{n,M}|$, где $P_{n,M}$ - соответствующий коэффициент функции P_M;

б) для всякого четного n и нечетного k существует $M_{n,k}$ такое, что для всех $M \geqslant M_{n,k}$ коэффициенты функции $f \in S^M$ удовлетворяют неравенству $|a_n a_k| \leqslant |P_{n,M} P_{k,M}|$;

в) для всякого $n>2$ существует M_n^* такое, что для всех $M \in (1, M_n^*)$ коэффициенты функции $f \in S^M$ удовлетворяют неравенству $|a_2 a_n| \leqslant |P_{2,M} P_{n,M}|$.

С помощью дифференциального уравнения Левнера, производящего класс S^M, задачи описания множеств значений систем функционалов сводятся к построению множеств достижимости управляемых динамических систем. Автор разработал методы оптимизации, основанные на принципе максимума Понтрягина и динамическом программировании Беллмана, для качественного описания тела коэффициентов в классе S^M, нахождения конкретных точных оценок.

Применение второй вариации функций Пика приводит к достаточным условиям экстремума или устанавливает седловой характер точки на границе тела коэффициентов, дает решение задач З.Якубовского.

ТЕОРЕМА. Гипотеза (а) З.Якубовского верна для всякого четного n. Гипотеза (б) З.Якубовского верна для $n=2$, $k=3$. Гипотеза (в) З.Якубовского не верна для $n=3$, функция Пика не доставляет даже локального максимума функционалу $|a_2 a_n|$ в классе S^M для M близких к I (седловая точка).

I. Прохоров Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций //Мат.сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659-1677.

Прядиев В.Л. (Воронеж)

О СПЕКТРЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается спектральная задача

$$u''+\lambda p(x) f(u) g(u')=0 \quad (0\le x\le \ell), \quad u(0)=0=u(\ell), \qquad (1)$$

в которой λ – вещественный спектральный параметр, $\ell>0$, $p(\cdot)$ непрерывна и положительна на $[0;\ell]$, f возрастает на $\mathbb{R}$, $f(u)/u\in\mathfrak{F}$, $g\in\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – класс непрерывных и положительных на $\mathbb{R}$ функций, неубывающих на $(-\infty;0]$ и невозрастающих на $[0;+\infty)$.

Теорема. Пусть существуют конечные

$$f_0 \triangleq \lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y}, \quad g_0 \triangleq \lim_{y\to\infty} g(y).$$

Пусть $\{\mu_i \mid i=\overline{0,\infty}\}$ – возрастающая последовательность собственных значений задачи

$$u''+\lambda f'(0)g(0)p(x)u=0 \quad (0\le x\le \ell), \quad u(0)=0=u(\ell),$$

а $\{\nu_i \mid i=\overline{0,\infty}\}$ – возрастающая последовательность собственных значений задачи

$$u''+\lambda f_0 g_0 p(x)u=0 \quad (0\le x\le \ell), \quad u(0)=0=u(\ell).$$

Тогда для спектра Λ задачи (1) выполнено

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}(\mu_i;\nu_i)\subseteq\Lambda\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}[\mu_i;\nu_i).$$

Рамазанов А.-Р.К. (Махачкала)

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПО Ф-ВАРИАЦИИ

Пусть $\Phi(u)$ непрерывна, возрастает и выпукла книзу на $[0,\infty)$, $\Phi(0)=0$. Следуя Е.П.Долженко, модулем Ф-абсолютной непрерывности функции $f(x)$, $x\in[0,1]$ назовём введённую ранее Б.И.Голубовым величину

$$W_\Phi(\delta,f)=\inf\{t>0: V_\Phi(\delta,\tfrac{f}{t})\le 1\},$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям

$$0=x_0<x_1<\dots<x_m=1 \quad \text{с} \quad x_i-x_{i-1}\le\delta,\ \delta\ge 0;\ \|f\|_\Phi:=W_\Phi(1,f);$$

$$\|f\|:=\sup\{|f(x)|: x\in[0,1]\}$$

M_n -множество всех кусочно монотонных функций порядка не выше n (Е.А.Севастьянов);

$$M_n(f):=\inf\{\|f-M\|: M\in M_n\},\ V_\Phi M_n(f):=\inf\{\|f-M\|_\Phi: M\in M_n\}$$

Для возрастающих выпуклых вверх функций т.м.н. $\omega(\delta)$ и $W(\delta)$ положим

$$H^\omega=\{f\in C[0,1]\,|\,\omega(\delta,f)\le\omega(\delta)\wedge |f(x)|\le 1\},$$

$$K_W=\{f\in C[0,1]\,|\,W_\Phi(\delta,f)\le W(\delta)\wedge |f(x)|\le 1\}$$

Ниже даётся решение некоторых задач о приближениях по Ф-вариации, проставленных Е.П.Долженко.

ТЕОРЕМА 1. Если $f\in C[0,1]$ и $v(f)=var(f,[0,1])$, то для любой функции $\Phi(u)$ рассматриваемого вида при $n=1,2,\dots$

$$V_\Phi M_n(f)\le 6M_n(f)/\Phi^{-1}\left(M_n(f)/(nM_n(f)+v(f))\right).$$

В случае полиномиальных и рациональных аппроксимаций имеют место вполне аналогичные оценки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon>0$, $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$ решения соответственно уравнений $\omega(\delta)/\Phi^{-1}(\delta)=\varepsilon$ и $W(\delta)=\varepsilon$ (считаем $\omega(\delta)/\Phi^{-1}(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$). Тогда для ε -энтропии относительно нормы $\|\cdot\|_\Phi$ имеют место оценки

$$H_\varepsilon(H^\omega,\Phi)\le c_1/\delta_1(c_2\varepsilon),\quad H_\varepsilon(K_W,\Phi)\le c_3/\delta_2(c_4\varepsilon),$$

$c_i>0$ $(i=\overline{1,4})$ не зависит от ε.

При дополнительных условиях на $\omega(\delta)$ и $W(\delta)$ аналогичные оценки имеют место снизу.

Рейнов О.И., Тарасов А.А. (Санкт-Петербург)

ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЕКТОРНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Классическая теорема Бернштейна утверждает, что если функция f лежит в классе Липшица Λ_α, где $\alpha>1/2$, то ряд, составленный из ее коэффициентов Фурье, абсолютно сходится; при этом для функций класса $\Lambda_{1/2}$ последнее, вообще говоря, не верно [1]. Вместо $1/2$ можно рассматривать любое другое число из интервала $(0,1)$ и, как хорошо известно, чем выше гладкость функции, тем быстрее стремятся к нулю ее коэффициенты Фурье. Мы сделали попытку распространить соответствующие результаты на случай гладких функций, принимающих значения в нормированных пространствах. На этом пути, в частности, получена характеризация пространств, для которых справедлива теорема Бернштейна. Нам понадобятся определения: нормированное пространство X имеет тип p (соотв., котип p), если $\forall\{x_j\}\subset X$ $\left(\sum\|x_j\|^p\right)^{1/p}\geq$ (соотв. $\leq$) $\int_0^1\|\sum r_j x_j\|dt$, где $\{r_j\}$ – функции Радемахера [2] (так, пространство L^p есть пространство типа $\min(2,p)$ и котипа $\max(2,p)$). Пусть $\Lambda_\alpha(X)$ – пространство X-значных функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α.

Т е о р е м а 1. Эквивалентны утверждения:

1) $\inf\{q: X$ котипа $q\}=\sup\{p: X$ типа $p\}=2$;

2) если $f\in\Lambda_\alpha(X), \alpha>\frac{1}{2}$, то ряд $\sum\|\hat{f}(n)\|$ сходится.

Удалось доказать и ряд других результатов. Приведем лишь одну из простейших теорем о коэффициентах Фурье функций из $\Lambda_\alpha(X)$.

Т е о р е м а 2. Пусть $1\leq p\leq+\infty$, $s\in(0,1)$, $\alpha>s$, $s=\frac{1}{r}-\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$.

1) Если $f\in\Lambda_\alpha(L^p)$, то $\sum\|\hat{f}(n)\|^r<+\infty$;

2) Существует такая функция $f\in\Lambda_s(L^p)$, что $\sum\|\hat{f}(n)\|^r=+\infty$

С л е д с т в и е 1) Если $\alpha>\frac{1}{r}$ и $f\in\Lambda_\alpha(X)$, где X – произвольное нормированное пространство, то $\sum\|\hat{f}(n)\|^r<+\infty$.

2) Если $f\in\Lambda_1(L^p)$ при некотором $p\in(1,+\infty)$, то $\sum\|\hat{f}(n)\|<+\infty$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1 А.Зигмунд. Тригонометрические ряды. т.I.- 1965.

2 А.Пич. Операторные идеалы. - 1982.

Родин В.А. (Воронеж)

ТБМО-свойство последовательности частных сумм кратного ряда Фурье и сильное суммирование.

Для $K \in \overline{N}$ и $\gamma > 1$ обозначим через W_K множество функций $a_K \in L_\gamma$ на $[0,1]^K$ и обладающих свойствами: а) $\operatorname{supp} a_K \subset Q_K = I_1 \times \ldots \times I_K \subset [0,1]^K$-двоичный параллелепипед, $I_i = [\nu_i/2^m, (\nu_i+1)/2^m]$, $\nu_i, m \in \mathbb{Z}_+$; б) если $Q_K = I_1 \times \ldots \times I_K$, то

$$\int_{I_j} a_K(t)\,dt_j = 0 \ , \ j \in \overline{K}, t \in Q_K ;$$

в) для $|Q_K| = \prod_{j=1}^{K} |I_j|$ выполняется неравенство

$$\int_{Q_K} |a_K(t)|^\gamma dt \le |Q_K|^{1-\gamma}.$$

Через W_0 обозначим множество функций a_0 : $\operatorname{supp} a_0 \subset [0,1]^N$, $|a_0| \le 1$. Пусть $t^K = (t_{\nu_1}, \ldots t_{\nu_K}) \in R^K$ и $a_K(t^K) \in W_K, K \in \overline{N}$. Пусть t^{N-K} вектор, имеющий $N-K$ координат и дополняющий вектор t^K до вектора $t = (t_1, \ldots, t_N)$. Через $b_{N-K} = b_{N-K}(t^{N-K})$ обозначим вещественную функцию из L_γ^{N-K} с единичной нормой. Если $K = N$, то $b_0 \in W_0$. Через V_K обозначим множество произведений функций $a_K \cdot b_{N-K}$ и пусть $V = \bigcup_{K=0}^{N} V_K$. По последовательности прямоугольных частных сумм $S_K(f,x)$ ряда Фурье для f построим ступенчатую функцию

$$g_n(f,x,t) = \sum_{K_1=0}^{2^{n_1}} \ldots \sum_{K_N=0}^{2^{n_N}} S_{K_1,\ldots,K_N}(f,x) \chi_{K_1}(t_1) \ldots \chi_{K_N}(t_N),$$

где χ_ν -характеристическая функция интервала $[\nu/2^n, (\nu+1)/2^n]$.

<u>Теорема</u> . Для $\gamma > 1$ оператор

$$(Af)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+^N} \sup_{g \in V} \left| \int_{[0,1]^N} g_n(f,x,t)\, g(t)\, dt \right|$$

имеет слабый тип $(L(\ln^+ L)^{N-1} , 1)$.

Теорема в качестве крайних случаев содержит утверждение о сильной суммируемости кратных рядов п.в. на T^N принадлежащее Л.Д.Гоголадзе и определенную разновидность ВМО-свойства кратного ряда Фурье. В общем случае теорема содержит шкалу утверждений для которой указанные выше явления являются крайними в этой шкале.

Р о м а н ю к А. С. (Киев)

О НАИЛУЧШИХ БИЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ КЛАССОВ $B^{r}_{p,\theta}$

Пусть $L_S(\pi_{2m})$ – множество функций $f(x,y)$, $x,y\in\pi_m$ с конечной "смешанной" нормой

$$\|f(x,y)\|_S=\|\,\|f(\cdot,y)\|_{s_1}\|_{s_2}\,;\quad \text{где } \pi_m=\prod_{j=1}^{m}[-\pi,\pi] \text{ и } S=(s_1,s_2).$$

Для $f\in L_S(\pi_{2m})$ наилучшее билинейное приближение порядка M определим следующим образом

$$\tau_M(f)_S=\inf_{u_i,v_i}\|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}u_j(x)v_j(y)\|_S\,,$$

где $u_i\in L_{s_1}(\pi_m)$, $v_i\in L_{s_2}(\pi_m)$, $i=\overline{1,M}$.

Положим $f(x,y)=f(x-y)$, $x,y\in\pi_m$, $f\in B^{r}_{p,\theta}$ (см. [1]).

ТЕОРЕМА. Пусть $2\le q<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ и $0<r_1=r_2=\dots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\dots\le r_m$. Тогда

$$\tau_M(B^{r}_{p,\theta})_{q,\infty}=\sup_{f\in B^{r}_{p,\theta}}\tau_M(f)_{q,\infty}\asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},\quad a_+=\max\{a,0\}. \qquad (1)$$

Сопоставляя (1) с оценкой $d_M(B^{r}_{p,\theta},L_q)$ (см. [2]) находим, что $\tau_M(B^{r}_{p,\theta})_{q,\infty}\ll d_M(B^{r}_{p,\theta},L_q)$.

Отметим, что если $F=W^{r}_{p}$ либо H^{r}_{p} (см. [1]), то при $2\le q<p<\infty$ $\tau_M(F)_{q,\infty}\asymp d_M(F,L_q)$. Аналогичные эффекты на $B^{r}_{p,\theta}$ выявлены и при некоторых других соотношениях между p и q.

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

2. Романюк А.С. О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 39–92.

Русак В.Н. (Минск)

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

В докладе пойдет речь о сингулярных интегралах

$$\mathcal{F}(x) \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2}\, dt, \quad x \in [-1, 1],$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши. Предположим, что $f(t)$ аппроксимируется рациональными функциями $r_n(t)$ порядка не выше n, и пусть

$$\mathcal{R}_n(x) \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} \frac{r_n(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Легко проверить, что $\mathcal{R}_n(x)$ есть также рациональная функция порядка не выше n.

Теорема I. Пусть $f(x) \in Lip_M\, \alpha$, $0 < \alpha \le 1$, и существует рациональная функция $r_n(x)$ такая, что

$$\| f(x) - r_n(x) \| \le C_1 / n^{\beta}, \ \alpha \le \beta; \quad \| r_n'(x) \sqrt{1-x^2} \| \le C_2 n^{\gamma}, \gamma > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{R}_n(x) \| \le \frac{C_3}{n^{\beta}} \ln n. \tag{I}$$

Неравенство (I) точно в том смысле, что существует функция $f(x) \in Lip\, 1$ и рациональная функция $r_n(x)$, которая удовлетворяет условиям теоремы I при $\beta = 2$ и выполнено неравенство

$$\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{R}_n(x) \| \ge C_0 \ln n / n^2.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ аналитическая функция на $[-1, 1]$ и существует рациональная функция $r_n(x)$ такая, что

$$\| f(x) - r_n(x) \| \le C_4\, q^n / n^{\beta}, \quad 0 < q < 1,$$

$$\| r_n'(x) \sqrt{1-x^2} \| \le C_5\, e^{\gamma n}, \quad \gamma \ge 0.$$

Тогда верна оценка

$$\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{R}_n(x) \| \le C_6\, q^n / n^{\beta-1}.$$

Заметим в заключение, что ограничения на производную рациональных функций, которые фигурируют в теоремах I и 2, выполняются, если их полюсы не находятся слишком близко к отрезку $[-1, 1]$.

Садыртдинова Л.И. (Казань)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть (Ω,Σ,μ) –пространство с полной σ-конечной мерой, $L^0 = L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ –множество всех (классов эквивалентности) измеримых μ-п.в. конечных действительнозначных функций на Ω ; E и F –идеальные F –нормированные пространства в L^0 [1,2] ,числа p , $q>0$. Для $f\in L^0$ и $\alpha\in(0,\infty)$ положим

$\Omega_f^\alpha = \{\omega\in\Omega \mid |f(\omega)| \geq \alpha\}$ и $\|f\|_{E_w^p} = \sup\limits_{\alpha>0} \alpha^p \|\chi_{\Omega_f^\alpha}\|_E$,

здесь χ_A –индикатор множества $A\in\Sigma$.

Т е о р е м а 1. Отображение $f \longrightarrow \sqrt[p+1]{\|f\|_{E_w^p}}$ задает $p(p+1)^{-1}$ –однородную F –норму на идеальном пространстве

$$E_w^p = \{ f\in L^0 \mid \|f\|_{E_w^p} < +\infty \}.$$

Очевидно,для $E=L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ имеем $E_w^p = w\text{-}L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ – –классическая шкала "слабых" L_p – пространства, $0<p<\infty$.

Т е о р е м а 2. (i) $(E_w^p)_w^q = E_w^{q(p+1)}$ –"устойчивость"конструкции $(\cdot)_w^p$.

(ii) если $E\subset F$ и $\|\cdot\|_F \leq \|\cdot\|_E$ на E ,то $E_w^p \subset F_w^p$ и $\|\cdot\|_{F_w^p} \leq \|\cdot\|_{E_w^p}$ на E_w^p ;

(iii) $(E\cap F)_w^p = E_w^p \cap F_w^p$,причем

$\|\cdot\|_{(E\cap F)_w^p} = \max\{\|\cdot\|_{E_w^p}, \|\cdot\|_{F_w^p}\}$ на E_w^p ;

(iv) если E – симметрично,то и E_w^p – симметрично.

Можно показать,что E_w^p наследует свойство (C) и для p-однородной $\|\cdot\|_E$ также наследует свойство (A) и $E \hookrightarrow E_w^p$ (непрерывное вложение).

Автор благодарит Ю.И.Грибанова за внимание к работе.

Л и т е р а т у р а:

1. Канторович Л.В.,Акилов Г.П. Функциональный анализ.- М.:Наука, 1977.- 742 С.
2. Rolewicz S. Metric linear spaces. - Ser.: Monografie matematyczne -т.56.- Warszawa , PWN .-287 P.

Сальникова Т.А. (Москва)

О полноте и минимальности взвешенных систем экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R})$

Речь идет о полноте и минимальности систем экспонент с быстро убывающим весом в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $p>1$, т.е. систем

$$\left(e^{i\lambda_n t}\cdot e^{-t^2/2}\right)_{\lambda_n\in\Lambda}, \qquad (1)$$

где $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$

$$\Lambda_1=\{\pm(1+i)(2\pi)^{1/2}(n+a)^{1/2},\ n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{0\},\quad \Lambda_2=i\Lambda_1 .$$

Получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. При $a\leq 1/4p$, $p\geq 2$ система (1) полна в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2. При $a>1/4p$, $1<p\leq 2$ система (1) неполна в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 3. При $a>1/4p-1/4$, $1<p\leq 2$ система (1) минимальна в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 4. При $a\leq 1/4p-1/4$, $p\geq 2$ система (1) не является минимальной в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.

Т.о. случай $p=2$ исследован полностью.
Частный случай теоремы 1 и теоремы 3 при $a=0$ доказан в статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Zalik R.A., Abuabara Saad T. Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms. – J. Math. Anal. and Appl., 1987, V. 126, p. 483–493.

С.Г. Самко, З.У. Муссалаева (Ростов н/Д)

ОЦЕНКИ ТИПА ЗИГМУНДА И ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ В ВЕСОВЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

В работе получены оценки типа Зигмунда для оператора вольтерровской свёртки

$$K\varphi = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad a < x < b$$

в безвесовом случае и в случае веса из класса W_μ, $\mu > 0$. Ядро оператора $k(t)$ принадлежит классу функций V_λ, $0 < \lambda < 1$. Определим классы весов W_μ и ядер V_λ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что $\Psi(x) \in W_\mu$, $\mu > 0$, если $\Psi(x) \in C([0,\ell])$, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x) > 0$ при $x > 0$, $\Psi(x)$ почти возрастает, $\Psi(x)/x^\mu$ почти убывает и существует постоянная c такая, что $|(\Psi(x)-\Psi(y))/(x-y)| \le c(x^*)^{-1}\Psi(x^*)$, $x^* = \max(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что неотрицательная на $[0,\ell]$ функция $k(x)$ принадлежит классу V_λ, $\lambda > 0$, если: 1) $k(x) \not\equiv 0$, $x^\lambda k(x)$ почти возрастает и $x^\lambda k(x)|_{x=0} = 0$, 2) существует ε, $0 < \varepsilon < \lambda$, такое, что $x^{\lambda-\varepsilon} k(x)$ почти убывает, 3) $|(k(x)-k(y))/(x-y)| \le c(x^*)^{-1} k(x^*)$, $x^* = \max(x,y)$.

Получена также весовая оценка типа Зигмунда для дробной производной

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

С помощью этих оценок изучается действие операторов K и D_{a+}^α в обобщённых весовых пространствах Гёльдера $H_0^\omega(\rho)$ с характеристиками, удовлетворяющими определённым условиям.

Основной результат содержит

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Psi(x) \in W_\mu$, $0 < \mu < 2-\alpha$ и $\omega(t)t^{1-\gamma} \in Z$, $\omega(t)t^\alpha \in Z_1$, где $\gamma = \max(1,\mu)$, $0 < \alpha < 1$, а Z и Z_1 – классы неотрицательных на $[0,\ell]$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям:

$$\int_0^h \frac{\varphi(t)}{\varphi(h)} \frac{h}{t}\,dt < \infty \qquad \text{и} \qquad \int_h^\ell \frac{\varphi(t)}{\varphi(h)} \frac{h}{t^2}\,dt < \infty$$

Тогда оператор дробного интегрирования $J_+^\alpha \varphi = t_+^{\alpha-1} * \varphi$ изоморфно отображает пространство $H_0^\omega(\rho)$ с весом $\rho(x) = \Psi(x-a)$ на пространство $H_0^{\omega_\alpha}(\rho)$ с тем же весом и характеристикой $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t)$.

Самкова Г.Е.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БРИО И БУКЕ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, типа Брио и Буке вида

$$t^m \dot{y} = Py + \mathcal{F}(t, y, \dot{y}), \qquad (1)$$

где $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{F}: (-\Delta, \Delta) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $0<\Delta$ – постоянная, $m \in \mathbb{N}$, функция $\mathcal{F}(t, y, \dot{y})$ – голоморфна в точке $(0,0,0)$ и ее разложение в окрестности этой точки не содержит свободных и линейных членов. Исследуются вопросы о существовании и асимптотическом поведении решений системы (1), удовлетворяющих условию

$$y(t) \to 0, \ \dot{y}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0. \qquad (2)$$

При $m=1$ даются достаточные условия существования решений системы (1), удовлетворяющих условию (2), асимптотически равные при $t\to 0$ отрезкам рядов по степеням

$$t, \ t^{\lambda}, \ t^{\lambda}\ln t, \ t^{\lambda}\ln^{\mu} t, \ \frac{1}{a\ln t + b},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mu, a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$.

При $m>1$ даются достаточные условия существования решений системы (1), удовлетворяющих условию (2), асимптотически равные при $t\to 0$ отрезкам рядов по степеням

$$t, \ t^m, \ t^{\lambda m}, \quad \text{где} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Исследуются вопросы о числе таких решений при $t\to +0$ и при $t \to -0$.

Симонов Б.В. (Волгоград)

СУЩЕСТВОВАНИЕ φ -ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ ИНДЕКСАМИ

Функция $\varphi(t)$ называется φ -функцией, если $\varphi(t)$ непрерывная, неубывающая, выпуклая вверх на отрезке $[0, 1]$ функция, равная нулю в точке $t=0$ и имеющая в каждой точке интервала $(0, 1)$ производную $\varphi'(t)$.

Такие функции широко используются при исследовании симметричных пространств. Это объясняется тем, что на любом симметричном пространстве, отличном от L_∞, можно ввести эквивалентную норму так, что его фундаментальная функция (по новой норме) станет φ -функцией. При изучении теорем вложения симметричных пространств часто используются нижний

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$$

и верхний

$$\beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$$

индексы φ -функции $\varphi(t)$.

Заметим, что из определения φ -функции $\varphi(t)$ следует, что

$$1 \le \alpha_\varphi \le \beta_\varphi \le 2.$$

Представляет интерес вопрос о существовании φ -функции $\varphi(t)$, которая имела бы наперед заданные значения нижнего и верхнего индексов. Ответом на этот вопрос является следующее

Утверждение. Пусть $1 \le \alpha \le \beta \le 2$. Существует дважды непрерывно-дифференцируемая на интервале $(0, 1)$ φ -функция $\varphi(t)$ такая, что

$$\alpha_\varphi = \alpha, \ \beta_\varphi = \beta.$$

Доказательство этого утверждения проводится непосредственным построением этой функции на отрезке $[0, 1]$.

Скоков А.В. /Москва/

О НЕГАРМОНИЧЕСКИХ РЯДАХ ФУРЬЕ

Рассматривается негармонический ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum c_n e^{\lambda_n t}, \quad f \in L(-1,1),$$

где λ_n - нули целой функции

$$\sum_{j=1}^{r} h_j e^{t_j z} + \int_{-1}^{1} e^{zt} k(t)\,dt \stackrel{df}{=} \int_{-1}^{1} e^{zt}\,d\sigma(t), \quad -1 < t_1 < \ldots < t_r < 1$$

/формулы для c_n ввиду ограничения объёма не приводим/.

Предположим, что при некотором $m \in Z_+$

а/ функции $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ абсолютно непрерывны на $[-1,1]$,

б/ $k^{(j)}(\pm 1) = 0, \ j = 0, 1, \ldots, m-1$,

в/ $var\, k^{(m)} < \infty$, и $k^{(m)}(\pm 1 \mp 0) \neq 0$.

Пусть

$$S(t, f, r) = \sum_{|\lambda_n| < r}{}' c_n e^{\lambda_n t}.$$

Справедлива

Теорема. Пусть при некотором целом $s \geq 0$ функции f, $f', \ldots, f^{(s)}$ абсолютно непрерывны на $[-1, 1]$, и

$$\int_{-1}^{1} f^{(j)}(t)\,d\sigma(t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, s.$$

Тогда существует последовательность $r_k \to \infty$ / не зависящая от f / такая, что $S(t, f, r_k) \to f(t)$ равномерно по

$$t \in [t_1 - (s+1)(1+t_1)/(m+1) + \varepsilon,\ t_r + (s+1)(1-t_r)/(m+1)],\ \forall \varepsilon > 0,$$

причём, если $(s+1)/(m+1)$ нецелое число, то $\varepsilon = 0$.

Показано, что область сходимости в теореме расширить нельзя.

Отметим, что случай $r = 1$, $t_1 = 1$ /тогда точка 1 в условиях б/, в/ отсутствует/ исследован А.М.Седлецким [I].

Литература

I. Седлецкий А.М. Об одном классе биортогональных разложений по показательным функциям // Изв. АН СССР. Сер. матем.- 1977.- Т. 4I, № 2.- С. 393 - 415.

С.А.Соловьев (Москва)

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРОЕКЦИОННЫХ ЧИСЛЕННЫХ ПРОЦЕДУР ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Одним из наиболее употребительных методов приближенного решения нелинейных операторных уравнений является метод Галеркина. К настоящему времени получены эффективные условия сходимости метода Галеркина для различных классов задач и найдены асимптотики сходимости реализаций этого метода. Для приложений большой интерес, однако, представляют оценки, позволяющие по исходным данным задачи определить размерность аппроксимирующего подпространства, достаточную для получения приближений с заданной точностью. В докладе приводятся эффективные оценки погрешностей метода гармонического баланса в задаче приближенного построения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем одно из утверждений. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + f(t,x) \qquad (1)$$

где $x \in R^N$, A - постоянная матрица, $f(t,x)$ - T-периодична в t. Нас будет интересовать задача построения приближенных T-периодических решений уравнения (1) методом гармонического баланса. Пусть $x_n^*(t)$ - приближение к периодическому решению $x_*(t)$ уравнения (1).

<u>Теорема 1</u> Пусть выполнены следующие оценки:

$$|f(t,x)| \le C, \qquad (t \in [0,T])$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le D|x-y|, \qquad (t \in [0,T])$$

$$\max_{t \in [-T,T]} \|e^{At}\|_{L(R^n)} \le M,$$

$$\|(I - e^{At})^{-1}\|_{L(R^n)} \le Q.$$

Пусть $L = QMDT < 1$, тогда справедливо неравенство:

$$\|x_* - x_n^*\|_{L_2^N} \le \frac{T}{2\pi(n+1)} \frac{(2TC^2(1 + 2\|A\|^2 M^2 Q^2 T))^{1/2}}{1 - QMDT}.$$

Срибная Т.А. (Самара)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БРУКСА-ДЖЕВЕТТА ДЛЯ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

Непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности, будем называть m-классом. Последовательность попарно непересекающихся множеств будем называть спектром.

Будем говорить, что класс множеств Σ обладает f_1-свойством, если для любых спектров $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, для которых $E_n F_k = \emptyset$ при всех $n, k \in N$, существуют бесконечное множество $P \subset N$ и множество $F \in \Sigma$, такие что $F_k \subset F$ при всех $k \in P$ и $FE_n = FF_k = \emptyset$ при всех $n \in N$ и $k \in N \setminus P$.

Пусть Σ - некоторый класс множеств, $\emptyset \in \Sigma$. Функцию множества $\varphi : \Sigma \to \overline{R}^+$ будем называть исчерпывающей на Σ, если для любого спектра $\{E_n\}$ из Σ

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(E_n) = 0. \tag{I}$$

Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}, \varphi : \Sigma \to \overline{R}^+$

равномерно исчерпывающие на Σ, если для любого спектра $\{E_n\}$ из Σ соотношение (I) выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$;

равномерно β-квазитреугольные на Σ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, для которых $A \cup B \in \Sigma$, справедливо: если $\varphi(A) < \delta$, $\varphi(A \cup B) < \delta$, то $\varphi(B) < \varepsilon$.

Теорема I. Пусть Σ - m-класс с f_1-свойством, пусть $\varphi_n : \Sigma \to \overline{R}^+$, $n \in N$, - последовательность равномерно β-квазитреугольных исчерпывающих на Σ функций множества. Если для любого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E),$$

то для того, чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости на Σ, необходимо и достаточно, чтобы функция множества $\varphi_0 : \Sigma \to \overline{R}^+$ была исчерпывающей на Σ.

Литература.

I. Lucia P., Morales P. Some Consequences of the Brooks-Jewett Theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions// Conf. Sem. Mat. Univ. Bari.- 1988 - V. 227 - P. 1-23

Стрыгин В.В., Блатов И.А., Покорная И.Ю. (Воронеж)

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ.

Рассматривается задача ($\varepsilon > 0$ - малый параметр)

$$\varepsilon \dot{x} - A(t)x = d(t), \; x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n, \; -1 \le t \le 1 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x^1(-1) = \ldots = x^k(-1) = x^{k+1}(1) = \ldots = x^n(1) = 0 \quad (1 \le k < n) \tag{2}$$

и достаточно гладкими $A(t)$, $d(t)$. Для этой сингулярно возмущенной задачи строится метод сплайн-коллокации на основе кубических сплайнов минимального дефекта на оптимальных сетках бахваловского типа. Для параболических сплайнов такой метод ранее был построен Стрыгиным В.В. и Блатовым И.А.

Пусть при каждом t спектр $A(t)$ состоит из вещественных различных ненулевых чисел $\lambda_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$), причем точно k из них отрицательны (здесь k - число краевых условий в точке $t = -1$). Пусть $B(t)$ - такая матрица, что $B^{-1}AB = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Пусть $B(t)$ представлена в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

где B_{11} - ($k \times k$) матрица. Если $\det B_{11}(t)$ и $\det B_{22}(t)$ отличны от нуля как при $t = -1$; так и при $t = 1$, то при малых $\varepsilon > 0$ согласно известным результатам Васильевой А.В. и Бутузова В.Ф. существует решение $x_\varepsilon(t)$ задачи (1),(2). Оказывается что при этих же условиях разрешима, вообще говоря, и коллокационная задача.

Обозначим через E_m пространство, удовлетворяющих условию (2), кубических сплайнов дефекта 1 на разбиении с m узлами.

Теорема. Существуют $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 > 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$, такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $m \ge m_0$ из неравенства $m\varepsilon|\ln\varepsilon| \ll \gamma$ следует существование единственного решения $u_{\varepsilon,m}(t) \in E_m$ соответствующей коллокационной задачи, причем

$$\|u_{\varepsilon,m}(t) - x_\varepsilon(t)\|_{C[-1,1]} + \varepsilon \|\dot{u}_{\varepsilon,m}(t) - \dot{x}_\varepsilon(t)\|_{C[-1,1]} \le \frac{c}{m^3}$$

Суетин П.К. (Москва)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

В конечномерных векторных пространствах рассматривается уравнение в двумерных дискретных свертках

$$z(k_1;k_2) = h(k_1;k_2) ** x(k_1;k_2) + \varepsilon(k_1;k_2), \quad (1)$$

которое в радиотехнике [1] интерпретируется как обратная задача теории фильтрации сигналов. В этом уравнении x – неизвестный входной вектор-сигнал, z – известный выходной сигнал, h – импульсный отклик прибора, ε – аддитивный шум, причем все векторы имеют двухиндексные компоненты и конечные прямоугольные опорные области. Если $\varepsilon = 0$, то имеем некорректную задачу обращения оператора двумерной дискретной свертки. В дополнение к известным методам [1] решения уравнения (1) предлагаются следующие новые методы.

1. Применение ортогональных многочленов двух переменных.
2. Метод усеченной обратной двумерной дискретной свертки.
3. Усеченная свертка при аддитивном шуме ограниченной нормы.
4. Обобщенный метод двумерной согласованной фильтрации.
5. Усеченная двумерная свертка без условий инверсности.
6. Минимизация двумерного вектора автокорреляции сверток.
7. Свертка при промежуточных условиях минимизации компонент.
8. Метод усеченной свертки в рекурсивном случае.
9. Задача идентификации двумерного дискретного фильтра.
10. Метод регуляризации некорректной задачи обращения свертки.

Все задачи, связанные с уравнением (1), и методы их решения переносятся на тот случай, когда дискретная свертка заменяется непрерывной двумерной сверткой двух финитных функций двух переменных с прямоугольными опорными областями. При этом вместо уравнения (1) получается интегральное уравнение с двумя переменными.

В случае одномерной дискретной свертки почти все вышеупомянутые результаты изложены в работе автора [2].

Литература :

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов // Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 488 с.

2. Суетин П.К. Решение уравнений в дискретных свертках в связи с некоторыми задачами из радиотехники // Успехи матем. наук.– 1989. – Т. 44, № 5 (269). – С. 97–116.

Сысоев В.В., Матвеев М.Г., Пономарева А.В.
(Воронеж)

ОТБОР АЛЬТЕРНАТИВ В УСЛОВИЯХ МНОГОЭТАПНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Будем считать, что управление представляет собой последовательную процедуру на каждом этапе которой реализуется два шага: синтез некоторого количества оптимальных в смысле Парето альтернатив и отбор из них решений для осуществления дальнейшего управления. Можно считать, что такое сужение вызвано ограничениями на возможности машины, на критерии и управляющие воздействия.

Обозначим: M_m^i – множество конфликтных альтернатив $\overline{X}$, полученных на i -ом шаге управления; $opt(x)$ – оператор, осуществляющий на i -ом шаге управления оптимизацию по Парето; $par(x)$ – закон отбора альтернатив на i -ом шаге управления; $\Gamma(M_m^i)$ – оператор синтеза альтернатив на i -ом шаге управления.

Тогда процедура численного оптимального синтеза альтернатив управления представляется как

$$M_m^{i+1} = par(opt(\Gamma(M_m^i))); \; i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $M_m^0 \subset D$ – некоторое начальное приближение.

Будем считать, что

$$par = \{c_1(\bar{q}); c_2(\bar{q}), \ldots, c_\mu(\bar{q})\}$$

где $\bar{q} = q(\bar{x})$ – вектор эффективности управления.

Тогда в частном случае можно доказать, что если функции и ($\mu = \overline{1, \nu}$, $j = \overline{1, m}$) принадлежат классу функций $C^{1,1}(E_n)$ (градиенты этих функций удовлетворяют условно Липшица, то

$$\lim_{i \to \infty} M_m^i \subset par(opt(D)).$$

Сысоев В.В., Матвеев М.Г., Пономарева А.В.
(Воронеж)

ЗАДАЧА О ДОПУСТИМОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Предположим, что существует граф некоторой технологической сети обработки информации. Информационный поток задается в виде объемов различного наименования N_{ij} ($i = \overline{1, m}$ – номер технологического узла; j – номер наименования потока информации) и пусть t_{ij} – время, затрачиваемое на обработку соответствующих объемов информации.

Тогда модель по определению максимально возможной пропускной способности сети представляется как $\sum_{(i,j)\in D} \gamma_{ij} N_{ij} \to max$,

$$N_{ij} > 0,\ i=\overline{1,m+1},\ j=\overline{1,l};\ a_{ij} \le N_{ij} \le b_{ij},\ (i,j)\in D;$$

$$\sum_{j=1}^{l} N_{ij} t_{ij} \le T_i \quad \forall i=\overline{1,m}$$

$$N_{ij} - \sum_{s=1}^{l} h_{ijrs} N_{rs} = 0 \quad \forall r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,m+1},\ j=\overline{1,l},$$

где γ_{ij} – коэффициенты требуемой пропорциональности; D – множество пар (i,j), соответствующее объемам информации, определяющим конечный продукт технологической сети; a_{ij}, b_{ij} – ограничения на пропускную способность; T_i – суммарное время обработки; h_{ijrs} – передаточные коэффициенты, характеризующие неразрывность соответствующих потоков информации; $m+1$ – номер фиктивного узла обработки.

В этом случае для нахождения узких мест технологической сети решается двойственная задача

$$\sum_{i=1}^{m} T_i \sum_{j=1}^{l} z_{ij} + \sum_{(i,j)\in D} b_{ij} z_{ij} - \sum_{(i,j)\in D} a_{ij} z_{ij} \to min$$

$$z_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,m+1},\ j=\overline{1,l};\ \sum_{j=1}^{l} t_{ij} z_{ij} \ge \gamma_{ij} \quad \forall i,j;$$

$$z_{ij} - \sum_{s=1}^{l} z_{rs} h_{ijrs} = 0,\ z_{ij} \ge \gamma_{ij},\ (i,j)\in D$$

В силу теорем о дополняющей нежесткости номер определяет узкое место, если для него либо $\sum_{j=1}^{l} z_{ij}^{*} > 0$ и тогда $\sum_{j=1}^{l} N_{ij} = 0$ либо $z_{ij}^{*} > 0$ и тогда $N_{ij} = b_{ij}$; или $N_{ij} = a_{ij}$ (z_{ij} – решение двойственной задачи).

Рассмотренные модели позволяют решить задачу о допустимости сети обработки информации, когда для каждого ее наименования известны объемы и требуется оценить возможность их одновременной обработки в заданной структуре технологической сети.

Таций Р.М. (Львов)

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Получено обобщение известного результата Аткинсона [I] для дифференциальной системы с суммируемыми по Лебегу коэффициентами - условия разрешимости краевой задачи:

$$Jy' = [B'(x) + \lambda A'(x)]y(x) = F'(x) \qquad x \in [a, b] \tag{I}$$

$$y(a) = M v, \quad y(b) = N v \tag{2}$$

где A', B', F' обобщенные производные от матриц - функций ограниченной на $[a, b]$ вариации $(A, B, F \in BV[a, b])$. Под решением уравнения (I) понимается вектор-функция $y(x) \in BV[a, b]$, удовлетворяющая ему в обобщенном смысле.

При этом предполагаются выполненными условия корректности так определенного понятия решения [2].

Теорема. Если λ не является собственным значением однородной задачи $(F \equiv 0)$, то задача (I), (2) имеет единственное решение $y(x) \in BV[a, b]$, представимое в виде

$$y(x) = \int_a^b K(x, t, \lambda)\, dF(t) \tag{3}$$

где $K(x, t, \lambda)$ - разрешающее ядро; если же λ - собственное значение кратности p, то единственность решения и представление (3) имеет место при дополнительных условиях ортогональности $\int_a^b y_z^* dF(x) = 0$ $\forall z = \overline{1, p}$, где $y_z(x)$ - соответствующие собственные векторы.

Литература. I. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные краевые задачи. Пер. с англ.-М.: Мир 1968. - 749 с. 2. Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные системы с мерами. Вестн.Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. - Львов: Выща школа. 1988. - № 222. - с. 89-90.

Терехин А.П. /Энгельс/

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРАТНОЙ РАЗНОСТИ ФУНКЦИИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ОТКРЫТОМ МНОЖЕСТВЕ

Пусть $m, k, r \in \mathbb{N}$. Для всякого $t>0$ имеем

$$\Delta^m(krt) = c_0(t)\,I^r(t)\,\Delta^m(t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)\,I^r(t/2^j)\,\Delta^k(t/2^j),$$

где $\Delta(t)$ - оператор разности: $\Delta(t)f(x)=f(x+t)-f(x)$, $[x, x+t]$ принадлежит области определения функции; $c_j(t)$ - операторные коэффициенты, равномерно по t и j ограниченные в L_p, $1\le p\le\infty$. $I(t)$ - оператор усреднения по Стеклову.

Представление непосредственно обобщается на смешанные разности функций многих переменных.

Ткачева С.А. (Воронеж)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Оператор $D_{\alpha,x,p}=\alpha^{1/p'}(x)D_x\alpha^{1/p}(x)$ будем называть "весовой" производной по переменной x ($1/p+1/p'=1$; $1\le p<\infty$, $D_x=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$), здесь весовая функция $\alpha(x)>0$ слабо вырождается при $x\to 0$, так что функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ имеет интегрируемую особенность в точке $x=0$.

Из двухвесового неравенства Харди при $p=q$, $x\in R_1^+$ (см. [1], [2]), получены оценки для весовых производных $D_{\alpha,x,p}$; $D^2_{\alpha,x,p}$.

Утверждение I. Пусть $1\le p<\infty$, то для любой достаточно гладкой функции $u(x)$, у которой $D_{\alpha,x,p}u(x)$ принадлежит $L_p(0,\infty)$, справедливо неравенство

$$\|au\|_{L_p}\le C\|D_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}, \tag{1}$$

где $a(x)=\left(\int_0^x\frac{dt}{\alpha(t)}\right)^{-1}$.

В условиях утверждения I при $D^2_{\alpha,x,p}u\in L_p(0,\infty)$ справедливы неравенства

$$\|aD_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}\le C\|D^2_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}, \tag{2}$$

$$\|a^2u\|_{L_p}\le C\|D^2_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}. \tag{3}$$

Применив неравенства (2)–(3) для исследования уравнения $Lu=f$, $u|_{t=0}=0$, где L – оператор теплопроводности с вырождающимся коэффициентом теплопередачи

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+D^2_{\alpha,x,p}+\alpha'\mu(x)D_{\alpha,x,p}+(\alpha')^2\gamma_1(x)+\alpha\alpha''\gamma_2(x),$$

при некоторых дополнительных условиях на $\alpha'(x)$, $\alpha''(x)$, $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $\mu(x)$ установим оценку

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_p}+\|a^2u\|_{L_p}+\|aD_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}+\|D^2_{\alpha,x,p}u\|_{L_p}\le C\|Lu\|_{L_p}. \tag{4}$$

В частности, неравенство (4) выполнено при $\alpha(x)=|x|^\beta$, $0<\beta<1$.

Литература

1. Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева.–Л.:ЛГУ,1985.–416 с.
2. Батуев Э.Н.,Степанов В.Д. О весовых неравенствах Харди.// Сиб. мат. журн. 1989. т.30,№1. с.13–15.

Тлеубергенова М.А., Ахметов М.У. (Киев)

УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, имеющая вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u + f(t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = B_i x + D_i v_i + I_i, \qquad (1)$$

в которой $x \in R^n$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, t_i, $i=\overline{1,p}$ – строго упорядоченная последовательность, содержащаяся в (α,β), $A(t)$, $C(t)$ – матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, функции f, A, C – кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точках t_i, B_i и D_i, $i=\overline{1,p}$ – последовательности постоянных матриц размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Пара (u, v), где $u : [\alpha,\beta] \to R^m$ – кусочно-непрерывная функция с разрывами первого рода в точках t_i, v_i, $i=\overline{1,p}$ – последовательность векторов из R^{m_i}, определяет управление.

Исследуется вопрос о разрешимости краевой задачи управления

$$x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b, \quad a, b \in R^n$$

для системы (1).

Используется, предложенный в [1] метод решения задач управления линейными системами, основанный на позиции нормальной разрешимости краевых задач.

Получен в достаточной форме принцип максимума Понтрягина и ранговые признаки управляемости. Приводится пример синтеза управления в виброударной системе.

1. Ландо Ю.К. О нормально разрешимых и управляемых соответствиях // Дифференц. уравнения, 1977.- Т. 13.- № 11.- С. 2070-2075.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.- Киев: Вища шк., 1987.- 287 с.

Трынин А.Ю. (Саратов)

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА-ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $u_n(x)$ – собственные функции регулярной задачи Штурма-Лиувилля $u''(x)+[\lambda-q(x)]u(x)=0,\ u'(0)-h\,u(0)=0,$ $u'(\pi)+H u(\pi)=0,$ где q – непрерывная функция ограниченной вариации на $[0,\pi]$, а $0<x_{1,n}<\ldots<x_{n,n}<\pi$ – нули функции $u_n(x)$. Оператор
$$L_n^{SL}(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\,\frac{u_n(x)}{u_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}$$
действует из $C[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$ и обладает интерполяционным свойством Лагранжа $L_n^{SL}(f,x_{k,n})=f(x_{k,n}),\quad k=\overline{1,n},\quad n\in\mathbb{N}$

Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности некоторой непрерывной функции, а $v(n)$ – некоторая неубывающая, выпуклая вверх функция натурального аргумента. Обозначим через $C(\omega^{\wedge},[0,\pi])\ (C(\omega^{\vee},[0,\pi]))$ классы непрерывных функций, удовлетворяющих условию
$$f(x+\delta)-f(x)\geqslant -K_f\,\omega(\delta),\quad \left(f(x+\delta)-f(x)\leqslant K_f\,\omega(\delta)\right).$$
где $K_f>0$ зависят только от f, а через $V[v]$ – множество функций, модуль изменения которых
$$v(n,f)=\sup_{T_n}\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_{2k})-f(x_{2k-1})|\right\},\quad T_n=\{0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{2n}\leqslant\pi\}$$
обладает свойством $v(n,f)=O(v(n))$ при $n\to\infty$.

Теорема 1. Пусть функции ω и v такие, что
$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\leqslant m\leqslant n}\left\{\omega\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n-1}\frac{v(k)}{k^2}\right\}=0,$$
то для любой функции $f\in C(\omega^{\wedge},[0,\pi])\cap V[v]\ (f\in C(\omega^{\vee},[0,\pi])\cap V[v])$ верно $|L_n^{SL}(f,x)-f(x)|\rightrightarrows 0,\ n\to\infty$ равномерно внутри $(0,\pi)$

Для непрерывных функций З.А.Чантурия установил соотношение
$$v(n,f)\leqslant C n\,\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 2. Пусть ω и v удовлетворяют условиям
$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{\delta}{\omega(\delta)}=0,\qquad v(n)\leqslant Cn\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$
Тогда найдется плотное в $[0,\pi]$ множество E такое, что для любой точки $x_0\in E$ существует функция $f\in C(\omega^{\wedge(\vee)},[0,\pi])\cap V[v]$, удовлетворяющая соотношению
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{|f(x_0)-L_n^{SL}(f,x_0)|}{\min\limits_{1\leqslant m\leqslant n}\left\{\omega\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n-1}\frac{v(k)}{k^2}\right\}}>0.$$

Тыщенко В. Ю. (Гродно)

К ВОПРОСУ О РАЗЛИЧЕНИИ ЦЕНТРА И ФОКУСА

Для автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{I}$$

где X и Y полиномы степени n, с частными полиномиальными интегралами $w_k(x,y)$, $k=\overline{1,m}$, относительно кривой

$$\Omega(x,y) \equiv \prod_{k=1}^{m} w_k(x,y) = 0,$$

справедливы утверждения [I].

Теорема 1. Пусть $m = \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ и система (I) имеет состояние равновесия A с чисто мнимыми характеристическими корнями, не принадлежащее кривой $\Omega(x,y)=0$. Тогда A является центром если и только если система (I) имеет интегрирующий множитель $\mu=\Phi(x,y)$ или общий интеграл $\Phi(x,y)=C$, где

$$\Phi(x,y) = \prod_{k=1}^{m} w_k^{\alpha_k}(x,y), \quad \alpha_k=const, \quad k=\overline{1,m}.$$

Теорема 2. Если $m = \frac{n(n+1)}{2} - 1$, то состояние равновесия A системы (I) с чисто мнимыми характеристическими корнями, не принадлежащее кривой $\Omega(x,y)=0$, является центром.

Теорема 3. Если $m = \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ и система (I) имеет состояние равновесия центр, то все ее предельные циклы алгебраичны и расположены на кривой $\Omega(x,y)=0$.

I. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. - Т. 183, № 3. - С. 76 - 94.

Ухоботов В.И. (Челябинск)

ОБЛАСТЬ БЕЗРАЗЛИЧИЯ В ОДНОТИПНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Под однотипной дифференциальной игрой понимается конфликтно-управляемая система, в которой вектограммы игроков описываются одним и тем же выпуклым компактом, который может быть параллельно перенесенным и гомотетично растянутым. Векторы параллельного переноса и коэффициенты растяжения зависят от времени.

В заданный момент окончания игры первая сторона стремится минимизировать значение функции Минковского этого компакта. Вторая сторона имеет противоположную цель.

Вычисляется явный вид цены игры и синтезируются оптимальные управления игроков.

В [I] рассматривался конкретный пример однотипной игры, в котором до определенного момента времени первому игроку все равно какое выбирать управление.

Этот факт в общем случае объясняется тем, что в пространстве переменных существует область, в которой значение игры принимает постоянное значение. Поэтому, пока позиция игры находится внутри этой области, игроки могут выбирать произвольные управления.

Найдены условия существования этой области безразличия и рассмотрены конкретные примеры.

Рассмотрены однотипные игры с геометрическими ограничениями на выбор управлений игроков; с интегральным ограничением на выбор управления первого игрока; со смешанным ограничением на выбор управления первого игрока.

ЛИТЕРАТУРА

I. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М., Наука, 1981, 289 С.

Фалалеев Л.П. (Алма-Ата)

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТРИЧНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ

Поставим каждой $f(x) \in \overset{\circ}{C}_{2\pi}$ в соответствие тригонометрический полином

$$\mathcal{U}_n(f,\Lambda,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

где a_ν, b_ν -коэффициенты Фурье функции $f(x)$, $\Lambda = \| \lambda_k^{(n)} \|$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $n = 0, 1, \ldots$, $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$ -нижняя треугольная матрица вещественных чисел.

Пусть $\omega(f, \beta_n)$ -модуль непрерывности функции $f(x)$, $\beta_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Впервые в общем виде исследована характеристика

$$A(\Lambda,\beta_n) = \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq const.}} \frac{\| f(x) - \mathcal{U}_n(f,\Lambda,x) \|_{C_{2\pi}}}{\omega(f,\beta_n)} . \qquad (1)$$

Решение экстремальной задачи (1) для различных операторов $\mathcal{U}_n(f,\Lambda,x)$ проводилось в работах многих авторов (см. список цитированной литературы в [1]).

Теорема. Пусть последовательность

$$1, \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)}, 0$$

выпукла вниз по индексу ν, $\lambda_\nu^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$, тогда

$$A(\Lambda,\beta_n) = 1 + \frac{2}{\pi\gamma}(1-\lambda_1^{(n)})\left(n - \frac{n \ln(\gamma \ln n)}{\ln n}\right) +$$

$$+ c \cdot \frac{n}{\ln n}(1-\lambda_1^{(n)}) + c \cdot \frac{n^2}{\ln^2 n} \sum_{\nu=0}^{n} \Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} \cdot \frac{1}{\nu+1} ,$$

$\beta_n = \frac{\gamma \ln n}{n}$, $\gamma > 0$, $c > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидчик А.Н., Лигун А.А., Минарченко А.Н. О точных константах приприближении некоторыми положительными операторами // Деп. в ВИНИТИ 16.03.81, № 1168-81. 28 с.

Фарков Ю.А.(Москва)

РЯДЫ ФАБЕРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ - фаберовский компакт, $\Phi : \bar{\mathbb{C}} \setminus K \to \{z : |z| > 1\}$ - конформное отображение, $\lim_{z\to\infty} (\Phi(z)/z) > 0$, G_R - внутренность кривой $\Gamma_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$, $R > 1$, $BH^\infty(G_R) := \{ f : f$ аналитическая в G_R и $|f(z)| \le 1$, $z \in G_R\}$. Полиномиальная часть лорановского разложения Φ^n в окрестности ∞ обозначается Φ_n и называется n-м многочленом Фабера для K (см.,напр.,[1]). Предположим, что для данной функции $f \in BH^\infty(G_R)$ известны коэффициенты Фабера $\{a_k\}$(вычислением $\{a_k\}$ занимались Ellacott (1983) и E.Johnston (1987)).Требуется вычислить значение f в произвольной точке $z \in K$ с заданной точностью ε.

Описание алгоритма. 1.Выбрать треугольную матрицу (λ_{kn}) и ввести операторы $A_n f := \sum_{k=0}^{n} \lambda_{kn} a_k \Phi_k$. 2. Найти $n = n(\varepsilon, f, K)$ такое, что $\| f - A_n f \|_{C(K)} \le \varepsilon/2$. 3. Вычислить и сохранить в памяти ЭВМ числа $\tilde{a}_k \approx a_k$, $0 \le k \le n$, такие, что для $\tilde{A}_n f := \sum_{k=0}^{n} \lambda_{kn} \tilde{a}_k \Phi_k$ выполнено неравенство $\| A_n f - \tilde{A}_n f \|_{C(K)} < \varepsilon/2$. 4. Для $z \in K$ вычислить $\tilde{A}_n f(z)$ и принять $f(z) \approx \tilde{A}_n f(z)$.

Оптимальность алгоритма. Пусть $K = \bar{G}$ - замкнутая область Фабера [1]. Если $\lambda_{kn} = 1$, $0 \le k \le n$, то A_n совпадает с проектором Фабера F_n и

$$(1)\quad \sup\{\| f - F_n f \|_{C(K)} : f \in BH^\infty(G_R)\} \asymp d_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \asymp R^{-n} \ (n\to\infty),$$

где d_n - колмогоровский поперечник. Из (1) согласно [2,с.183] следует, что метод $f \approx F_n f$ по порядку приближения класса $BH^\infty(G_R)$ в $C(K)$ не уступает любому другому n - мерному алгоритму. Соотношения вида (1) верны также для линейного, гельфандовского и некоторых других поперечников. Если границей компакта K является кривая ограниченного вращения Γ с вариацией $V(\Gamma)$ (см.,напр.,[1]), то для любой $f \in BH^\infty(G_R)$

$$\| f - F_n f \|_{C(K)} \le A_n(R,\Gamma) \sup_{z \in G_R} |f(z)|, \quad A_n(R,\Gamma) := \frac{V(\Gamma)}{2\pi^2 R^n} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{|Re^{i\tau} - 1|}.$$

Известно, что $V(\Gamma) = 2\pi$ для выпуклого K. В качестве $n = n(\varepsilon, f, K)$ можно выбрать минимальное n, при котором $A_n(R,\Gamma) \le \varepsilon/2$. Для дальнейшего уменьшения n наряду с известными методами суммирования и ускорения сходимости рядов Фабера целесообразно [3] применять A_n с $\lambda_{kn} = 1 - R^{-2(n-k+1)}$, $0 \le k \le n$. С помощью ε-энтропии аналогично чебышевскому случаю $K = [-1, 1]$ (см.[4, с.253]) доказывается, что предлагаемый алгоритм оптимален также и по используемому объему данных $\{\tilde{a}_k\}$. Известные обобщения рядов Фабера приводят к соответствующим модификациям алгоритма для различных пространств аналитических функций.

Литература

1.Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.:Мир,1986.
2.Трауб Дж.,Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир,1983.
3.Фарков Ю.А. // Успехи матем.наук. - 1990. - Т.45. N 5. - С.197-198.
4.Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука,1986.

Филер З.Е. (Украина, Кировоград)

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ

Задача Коши с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$z(\tau,\varepsilon) = \frac{c + ab}{b^2}\left(e^{b\tau} - 1\right) - \frac{c}{b}\tau + \int_0^\tau e^{b(\tau-\lambda)} \cdot f_1(\lambda, z(\lambda,\varepsilon),\varepsilon)\,d\lambda, \quad (1)$$

$z = x - x_0$, $\tau = t/\varepsilon$, $a = f(M_0)$, $b = f_x(M_0)$, $c = f_t(M_0)$,
$M_0(0, x_0, \varepsilon)$, $f_1(\tau, z, \varepsilon) = f(\varepsilon\tau, x_0 + z, \varepsilon) - (a + bz + c\tau)$.

При достаточной гладкости функции $f(t, x, \varepsilon)$ внеинтегральный член в (I) даёт хорошее начальное приближение

$$x_н(t,\varepsilon) = x_0 + \frac{c(\varepsilon) + a(\varepsilon)b(\varepsilon)}{b^2(\varepsilon)}\left(e^{\frac{b(\varepsilon)t}{\varepsilon}} - 1\right) - \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon b(\varepsilon)}t, \quad (2)$$

описывающее начальную стадию переходного процесса (погранслой). Заменяя $z(\lambda, \varepsilon)$ в (I) выражением (2), получим первое приближение $x_1(t, \varepsilon)$ и т.д.

Переходом к системе уравнений первого порядка может быть построено решение задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 \ddot{x} = f(t, \varepsilon\dot{x}, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad \varepsilon\dot{x}(0) = y_0. \quad (3)$$

Аналогично строится решение краевой задачи для сингулярного уравнения теплопроводности

$$\varepsilon u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx})$$

с предварительной заменой "времени" t и линеаризации функции f:

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad f[t, x, u] = a^2 u_{xx} + \varphi(\varepsilon\tau, x, u, u_x, u_{xx}),$$

$$a^2 = \frac{\partial}{\partial u_{xx}} f[t, x, u].$$

УДК 518:517.392.

Хаиров А.Р. (Махачкала)

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть $\pi_n(m)$ - множество алгебраических многочленов степени не выше n от m переменных; $N = \dim \pi_n(m)$; $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N}$ - некоторый базис в $\pi_n(m)$; $\rho(x)$ - неотрицательная в области $\mathcal{D} \subset R^m$ весовая функция

Пучок квадратичных форм

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x)\left(u(x)-\lambda\right)\left(\sum_{i=0}^{N} \xi_i \varphi_i(x)\right)^2 dx \tag{1}$$

где $u(x)$ - некоторая линейная форма от m переменных, имеет вещественные характеристические числа $\lambda_1(u), \lambda_2(u), \ldots, \lambda_N(u)$ и им соответствующие главные векторы $\xi^s = (\xi_1^s, \xi_2^s, \ldots, \xi_N^s)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x) u(x) F_s(x) F_s(x)\, dx = \lambda_s(u)\,\delta_{sz},$$

$$\int \rho(x) F_s(x) F_z(x)\, dx = \delta_{sz}, \quad F_s(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \varphi_i(x)$$

Теорема I. Для того чтобы кубатурная формула

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k) + R_N(f) \tag{2}$$

была точна на множестве $\pi_{2n+1}(m)$, необходимо и достаточно, чтобы узлы и коэффициенты ее удовлетворяли соотношениям:

$$u(x_k) = \lambda_k(u)\,; \quad A_k F_k(x_s) = \delta_{sk}$$

при любой линейной форме $u(x)$.

Характеристические числа пучка квадратичных форм позволяют установить порядок распределения узлов кубатурной формулы (2).

Теорема 2. Если кубатурная формула (2) точна на $\pi_{2n+1}(m)$, то в гиперплоскости $u(x) = \lambda_s(u)$ лежат столько нулей; какова кратность характеристического числа $\lambda_s(u)$.

Хасанов Ю.Х. (Днепропетровск)

Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти - периодических функций Безиковича

Пусть $f(x)$ - почти - периодическая в смысле Безиковича ($f(x)\in B_2$) функция со спектром $\Lambda(\lambda_n)$ и рядом

$$\sum_n A_n \exp(i\lambda_n x).$$

Приведем критерии сходимости рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)|A_n|^{\beta} \quad (0<\beta<2), \tag{1}$$

где $\varphi(n)$- четная, положительная функция, заданная на $(-\infty,\infty)$.

Устанавливаются следующие

Теорема I. Пусть ограниченная функция $f(x)\in B_2$ и ее спектр удовлетворяет условиям $\lambda_{-n}=-\lambda_n$; $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\ldots<|\lambda_n|<\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$. Если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_{2^\nu}/\lambda_{2^{\nu-1}})^{k\beta}\, \psi_\beta(2^\nu)\omega^{\beta}_{k,2}(f;\lambda^{-1}_{2^\nu}) < \infty, \tag{2}$$

где

$$\psi_\beta(2^\nu)=\{\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} [\varphi(n)]^{2/(2-\beta)}\}^{1-\beta/2},$$

то ряд (1) сходится.

Теорема 2. Пусть спектр ограниченной функции $f(x)\in B_2$ удовлетворяет условиям $\lambda_{-n}=-\lambda_n$; $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>|\lambda_n|>\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=0$; $\lambda_0=0$. Если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\beta(2^\nu) W^{\beta}_{k,2}(f;\lambda^{-1}_{2^\nu}) < \infty, \tag{3}$$

то ряд (1) сходится.

В теоремах I и 2 соответственно $\omega_{k,2}(f;h)$ - модуль гладкости порядка k функции $f(x)$ в метрике B_2, а $W_{k,2}(f;H)$ - модуль усреднения порядка k функции $f(x)$ в метрике B_2 (см.[1]).

При $k=1$ теорема I установлена в работе [2].

Литература

1. Тиман М.Ф., Конструктивная теория функций, Санкт-Петербург, 1992.
2. Притула Я.Г., Вiснiк Львiв. Ун-ту, серия мех-мат, 1971, 137, №5.

Хацкевич В.Л. (Воронеж)

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Пусть Ω - ограниченная область в R^2 с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x,\omega t) - \nabla p, \quad div\, u = 0 \ (x \in \Omega, t \in R), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \ (t \in R), \quad u|_{t=0} = u|_{t=T/\omega} \quad (x \in \bar{\Omega}). \tag{2}$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ - векторные, а p - скалярная функции, $\nu, T, \omega > 0$ - фиксированные постоянные. Предполагается, что $f(x,t)$ - непрерывна как функция из R в $L_2(\Omega, R^2)$ и T - периодична.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x,s)\,ds, \quad div\, u = 0 \ (x \in \Omega, t \in R), \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (t \in R). \tag{4}$$

Обозначим через $\Phi_\omega(t)$ - совокупность (T/ω -периодических) "классических" решений задачи (1), (2). А через X_0 - совокупность решений задачи (3), (4).

<u>Теорема</u>. Полууклонение

$$\beta(\Phi_\omega(t), X_0) := \sup_{\varphi^\omega \in \Phi_\omega} \inf_{x_0 \in X_0} \| \varphi^\omega(t) - x_0 \|_{L_2(\Omega, R^2)} \to 0$$

при $\omega \to +\infty$ равномерно по $t \in R$.

Холщевникова Н.Н.

Конструкция множеств, некоторые свойства которых неопределены в ZFC

Рассмотрим конструкцию множеств на действительной прямой $\mathbb{R}$, вполне аналогичную построению Лузина [1, с. 683], которая дает множества с рядом свойств, неопределенных в обычной системе аксиом ZFC (Цермело-Френкеля) теории множеств. Проблема построения множеств с неопределенными в ZFC свойствами поставлена в [2].

Пусть утверждение о существовании множества класса K, обладающего свойством P, неразрешимо в ZFC. Это означает, что при одних теоретико-множественных предположениях дополнительных к ZFC или в одной модели ZFC существует множество класса K, обладающее свойством P, а при других предположениях или в другой модели ZFC ни одно множество класса K свойством P не обладает.

Напомним, что несчетное подмножество $\mathbb{R}$ называется лузинским, если оно пересекается с каждым нигде не плотным множеством не более чем по счетному множеству. В [2], в частности, ставился вопрос о построении в ZFC несчетного подмножества $\mathbb{R}$, которое было бы лузинским в какой-нибудь модели ZFC.

Пусть $\mathcal{N}$ – идеал всех нигде не плотных подмножеств $\mathbb{R}$, а $\mathcal{B}$ – какая-нибудь накрывающая база наименьшей мощности для $\mathcal{N}$. Обозначим мощность $\mathcal{B}$ через nd. Известно, что $\omega_1 \leq nd \leq \mathfrak{c}$, где ω_1 – первый несчетный ординал, а $\mathfrak{c}$ – мощность континуума. Вполне упорядочим $\mathcal{B}$ по наименьшему типу $\mathcal{B}=\{B_\alpha : \alpha< nd\}$. Выберем по индукции $x_\alpha \in [0,1] \setminus A_\alpha$, $A_\alpha = \bigcup\{B_\beta : \beta<\alpha\} \cup \{x_\beta : \beta<\alpha\}$ для $\alpha<\omega_1$. Очевидно, определение x_α корректно. Положим $X=\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$. Если $nd=\omega_1$, то X будет лузинским. В частности, в предположении континуум-гипотезы CH множество X лузинское. В предположении аксиомы Мартина MA всякое подмножество $\mathbb{R}$, мощности меньше $\mathfrak{c}$, будет первой категории. Поэтому в предположении MA плюс отрицание CH не существует лузинских множеств (см., например, [3]). Таким образом для X неопределенны свойства иметь первую категорию и не быть лузинским множеством. Для X неопределенны также свойства быть N или R -множеством для тригонометрических рядов вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x$. В то же время легко показать, что X является $\mathcal{U}$ -множеством.

Литература: Н.Н. Лузин. Собр. соч. т.2. М.: Изд. АН СССР, 1958

[2] В.И. Малыхин. Сиб. матем. журнал, т.31, №4 (1990) с. 105-110.

[3] A.W. Miller, Handbook of Set-Theoretical topology, (1984) p. 201-233.

Хращевская Р.Ф. (Киев)

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрена слабовозмущенная линейная неоднородная краевая задача с импульсным воздействием [I, 2]:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t)z + f(t), \ t \neq \tau_i \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0), \\ \ell z = \alpha + \varepsilon \ell_1 z. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

Доказано, что, если порождающая краевая задача, получающаяся из (I) при $\varepsilon=0$, неразрешима при произвольных неоднородностях $f(t)\in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i\in R^n$ и $\alpha\in R^m$, т.е. критерий разрешимости порождающей краевой задачи [2] не выполняется, то с помощью малых линейных возмущений ее можно сделать разрешимой. Аналогично [3] $d\times r$ - мерная матрица:

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Big[\ell_1 X_r(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau - \ell\sum_{i=1}^{p} K(\cdot,\tau_i+0)A_{1i}X_r(\tau_i-0)\Big], \qquad (2)$$

определяет условия возникновения решений краевой задачи (I). Доказано, что, если выполнены условия $P_{B_0}=0$, $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$, то для возмущенной линейной краевой задачи с импульсным воздействием (I) существует при произвольных $f(t)\in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i\in R^n$ и $\alpha\in R^m$ единственное решение, представимое в виде сходящегося при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$ ряда

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t), \qquad (3)$$

где: $Q=\ell X(\cdot)$ - $m\times n$ - матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$; $Q^* = Q^T$ - $n\times m$-матрица; $X(t)$- фундаментальная матрица задачи Коши для однородной дифференциальной системы с импульсным воздействием; $P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$, $P_{B_0}: R^r \to N(B_0)$, $P_{B_0^*}: R^d \to N(B_0^*)$, $B_0^* = B_0^T$, $r=n-n_1$, $d=m-n_1$. В случае отсутствия импульсов приходим к ранее известному результату [3].

I.Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища шк., 1987. - 287 с.
2.Самойленко А.М., Бойчук А.А. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. - 1992, №3.С. 564 - 570.
3.Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. - Киев: Наук. думка, 1990. - 96 с.

Хромова Г.В. (Саратов)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ КЛАССАХ И ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ.

Рассмотрим класс функций $\widetilde{\mathcal{M}}_2^r = \{ f(x) \in W_2^r[-\pi,\pi]:$
$f(-\pi) = f(\pi),\ \|f\|_{W_2^r} \leq 1,\ r \geq 1$ – целое$\}$,
где $W_2^r[-\pi,\pi]$ – пространство вещественных функций, заданных на отрезке $[-\pi,\pi]$, у которых $r-1$ –я производная абсолютно непрерывна, $f^{(r)}(x) \in L_2[-\pi,\pi]$. Такие классы возникают при исследовании методов регуляризации в некорректно поставленных задачах.

Обозначим
$$\Delta_1(K_\alpha, r) = \sup\{ \|K_\alpha f - f\|_C : f \in \widetilde{\mathcal{M}}_2^r \},$$
где K_α ($\alpha > 0$ – параметр) – некоторое семейство интегральных операторов, таких, что $\|K_\alpha f - f\|_C \to 0$ при $\alpha \to 0$ для любой $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_2^r$.

В данном сообщении для методов приближения Λ_n из теории линейных методов суммирования рядов Фурье с помощью множителей $\lambda_k^{(n)}$ и метода регуляризации Тихонова R_α^T получены в первом случае точные, во втором – асимптотически точные значения для величин $\Delta_1(\Lambda_n, r)$ и $\Delta_1(R_\alpha^T, r)$.

Теорема. Имеют место равенства:
$$\Delta_1(\Lambda_n, r) = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{2r}+1)^{-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(n)} - 1)^2 (k^{2r}+1)^{-1} \right)^{1/2} \quad (1)$$
$$\Delta_1(R_\alpha^T, r) = \alpha^{(2r-1)(4r)^{-1}} \varphi(r) + O(\alpha^{(2r+1)(4r)^{-1}}) \quad (2)$$
где
$$\varphi(r) = \mp \sum_{\ell=1}^{2r} P_\ell - \left(\sum_{\ell=1}^{2r} \frac{P_\ell^2}{\lambda_\ell} + 4 \sum_{\substack{\ell, m=1 \\ \ell < m}}^{2r} \frac{P_\ell P_m}{\lambda_\ell + \lambda_m} \right)^2$$
суммы в выражении $\varphi(r)$ берутся по таким ℓ и m, для которых $\mathrm{Re}\,\lambda_\ell > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_m > 0$, знак – соответствует r – четному, + r – нечетному, λ_ℓ – корни степени $2r$ из 1 при r – нечетном, из -1 при r – четном,
$$P_\ell = (-1)^\ell \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k<\ell}}^{2r} (\lambda_\ell - \lambda_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k>\ell}}^{2r} (\lambda_k - \lambda_\ell) \right]^{-1}$$
Второе равенство – асимптотическое по α при $\alpha \to 0$.

Равенства (1) и (2) используются затем в задаче восстановления непрерывных периодических функций, заданных с погрешностью δ в среднеквадратичной метрике.

УДК 517.949

Черевко И.М., Якимов И.В. (Черновцы)

ОЦЕНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Иследуются системы линейных нестационарных сингулярно возмущенных дифференциально-функиональных уравнений запаздывающего и нейтрального типа.

В предположении, что все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости $Re\,\lambda_i(t)<-2\alpha$, $0\le t\le T$ получены обобщения на дифференциально-функциональные уравнения известых лемм Флетто-Левинсона [1]. Доказанная оценка фундаментальной матрицы

$$\|X(t,s)\|\le K\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right),\quad 0\le s\le t\le T,\quad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0$$

используется для изучения систем с малым параметром при части производных.

Для уравнений запаздывающего типа доказано существование конечномерного асимптотически устойчивого интегрального многообразия [2]. А также получены условия при которых имеет место принцип сведения об устойчивости: тривиальное решение исходной системы устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда тривиальное решение системы на интегральном многообразии устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво).

Для уравнений запаздывающего [3] и нейтрального типа обосновано применение метода пограничных функций и построено асимтотическое разложение решения на конечном интервале.

Литература

1. Флетто Л., Левинсон Н. Периодические решения сингулярно возмущенных систем //Математика: Сб. пер. -1958. -Т. 2. N2. -С. 61-68.

2. Фодчук В.И., Черевко И.М. Интегральные многообразия линейных сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений //Мат. физика и нелинейн. механика. -1991. -Вып. 15. -С. 35-39.

3. Фодчук В.И., Якимов И.М. Асимптотика решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием //Укр. матем. журн. -1989. -Т. 41. N5. -С. 652-658.

Чернецкий В.А./Одесса/

ЗАДАЧА НЕЙМАНА И ГРУППЫ МЕБИУСА

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ограничена некасающимися и непересекающимися сферами $S_i = \{x : |x - a_i| = R_i\}$, $i = \overline{0, m}$, и $\varphi(x)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$, все особенности которой расположены в D. Рассмотрим задачу Неймана

$$\Delta U = 0, \quad \partial U / \partial n |_{\partial D} = 0, \qquad /1/$$

об определении гармонической функции $U(x)$ в сферической области D, все особенности которой такие же, как и у функции $\varphi(x)$. В случае $n = 2, 3$ к задаче /1/ сводится задача построения установившегося потока идеальной несжимаемой жидкости, обтекающего конечное число сфер. Для решения поставленной задачи используются метод симметрии и результаты теории мебиусовых групп.

Пусть $G_0 = \langle \sigma_i(x), \; i = \overline{0, m} \rangle$ – группа, порожденная инверсиями $\sigma_i(x)$ относительно сфер S_i, и $G = \{g(x)\}$ – ее подгруппа индекса 2, являющаяся симметрической группой Шоттки, $g'(x)$ – якобиан преобразования $g(x)$.

Рассматривая примеры решений задачи /1/ в случае $\partial D = S_i$, замечаем, что $\partial u / \partial r = h$, $r = |x - a_i|$, является знакопеременной гармонической дифференциальной формой веса 1/2 относительно преобразования $\sigma_i(x)$

$$h(x) = -h[\sigma_i(x)] \, |\sigma_i'(x)|^{1/2}. \qquad /2/$$

Естественно поэтому задачу /1/ в сферической области свести к задаче построения соответствующей гармонической формы веса 1/2, автоморфной относительно группы G и удовлетворяющей условиям симметрии /2/ для всех $i = \overline{0, m}$.

При некотором условии на $\varphi(x)$ нетрудно построить соответствующую гармоническую форму $h(x)$, удовлетворяющую условию /2/ при $i = 0$. Тогда при условии на хаусдорфову размерность предельного множества группы G_0

$$d(\Lambda(G_0)) < n/2 \qquad /3/$$

Θ-ряд Пуанкаре

$$H(x) = \Theta[h(x)] = \sum_{g \in G}{}' g[h(x)] (g'(x))^{1/2} \qquad /4/$$

сходится абсолютно и равномерно на соответствующих компактах. Интегрируя почленно ряд /4/ по одной из переменных $r = |x - a_i|$, получаем решение $U(x)$ исходной задачи. Таким образом, при условии /3/ удается решить задачу обтекания конечного числа сфер и сравнительно просто построить функцию Грина задачи Неймана в сферической области.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИАГРАММ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Черных Н.П. (Воронеж)

Изучается асимптотика решений задачи Коши

$$\varepsilon^h \dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \quad x(0,\varepsilon) = x_0 \qquad (1)$$

где ε -малый вещественный параметр, h - натуральное число, $A(t,\varepsilon)$ - матрица $n\times n$, $f(t,\varepsilon)$ - n -мерный вектор, непрерывные в $[0,T]\times[0,\varepsilon_0]$, имеющие при $\varepsilon\to 0$ равномерные на $[0,T]$ асимптотические разложения $A(t,\varepsilon)\sim\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s A_s(t)$, $f(t,\varepsilon)\sim\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s f_s(t)$, причем $A_s(t)$, $f_s(t)$, $s\geq 0$ дифференцируемы по t любое число раз. Рассматривается случай, когда предельная матрица $A_0(t)$ имеет на $[0,T]$ постоянный канонический вид и $\lambda_0(t)$ её собственное значение алгебраической кратности n и геометрической кратности 1.

В работе [1] на примере систем 3-го порядка показано, что асимптотика решения задачи (1) содержит разложения по некоторым дробным степеням ε и суммирование в рядах её векторных функций начинается с отрицательных степеней ε. В общем случае, применив к исследованию задачи (1) метод диаграмм [2], [3], можно показать, что этой отрицательной степенью является число, равное ординате точки первой диаграммы соответствующей для (1) однородной системы, имеющей абсциссу 1.

В качестве примера приведем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть первая диаграмма соответствующей для (1) однородной системы состоит из одного звена с коэффициентом наклона ρ_0/n. Тогда для любого $x_0\in R^n$ решение задачи Коши (1) имеет асимптотику

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{s=-\rho_0(n-1)}^{\infty}\varepsilon^{s/n}x_{si}(t)\Big)\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Big(\lambda_0(\tau)+$$
$$+\sum_{s=\rho_0}^{hn-1}\varepsilon^{s/n}\lambda_{s+1}(\tau)d\tau\Big)+\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}z_s(t),$$

где x_{si}, z_s - векторные, а $\lambda_s(\tau)$ - скалярные функции.

1. Елисеев А.Г.//Изв.АН СССР, серия математ.,1984, т.48,№6.
2. Черных Н.П.,Жукова Г.С.//Укр.мат.журн.,1985, т.37, № 6.
3. Жукова Г.С.//Дифференц.уравнения,1990, т.26, № 9.

УДК 517.956

Чечкин Г.А.(Москва).

О СКОРОСТИ РОСТА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМСЯ ТИПОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В СЛУЧАЕ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ФОРМАЛЬНО УСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧИ.

Пусть $\Omega = (0, d)^N$ - куб в $\mathbb{R}^N_x$, $S = \{ x \in \bar{\Omega} \mid x_N = d \}$, $\Gamma = \{ x \in \bar{\Omega} \mid x_N = 0 \}$, $T_\varepsilon \in Q_{(N-1)} = \{ \xi \in \mathbb{R}^N_\xi : 0 < \xi_i < 1,$ $i = 1,\dots,N-1,\ \xi_N = 0 \}$. Через T^1_ε обозначим множество, образованное всевозможными сдвигами множества T_ε на $z = (z_1,\dots, z_{N-1}, 0)$ с целочисленными компонентами. А через T^ε образ T^1_ε при $x = \delta\, \xi$, где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\Gamma^\varepsilon = \Gamma \setminus T^\varepsilon$.

Рассматривается асимптотика решения следующей задачи

$$\Delta u^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega,\quad u^\varepsilon = 0 \text{ на } T^\varepsilon,\quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_N} = f \text{ на } \Gamma^\varepsilon,\quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_N} = 0 \text{ на } S. \qquad (1)$$

Решения берутся d - периодические по $\hat{x} = (x_1,\dots,x_{N-1})$ и понимаются в обобщеном смысле. Пусть $\langle f\rangle_\Gamma = \dfrac{1}{\operatorname{mes}\Gamma} \displaystyle\iint_\Gamma f(x)\, d\hat{x}$.

Теорема. Если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\lambda_\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = 0$, где λ_ε - первое собственное значение некоторой задачи на ячейке периодичности, то при $\varepsilon \to 0$

$\left(u^\varepsilon(x) - \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}\langle f\rangle_\Gamma\, w_\varepsilon - \langle f(w_\varepsilon - 1)\rangle_\Gamma \right) \to u^0$ слабо в $H^1(\Omega)$, где w_ε - собственная функция, соответствующая λ_ε и стремящаяся к 1 сильно в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, u^0 - решение следующей задачи

$$\Delta u^0 = 0 \text{ в } \Omega,\quad \frac{\partial u^0}{\partial x_N} = f - \langle f\rangle_\Gamma \text{ на } \Gamma,\quad \frac{\partial u^0}{\partial x_N} = 0 \text{ на } S,\quad \langle u^0\rangle_\Gamma = 0. \qquad (2)$$

Доказательство приведено в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА.

[1].Беляев А.Г.,Чечкин Г.А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда предельная задача неразрешима // Математический сборник (в печати).

[2].Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Математический сборник (в печати).

Гурупова И.Г. (Воронеж)

О КЕЛЛОГОВОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА НЕКОТОРЫХ РАЗРЫВНЫХ ЗАДАЧ.

В основе проверки свойств типа δ- регулярности для скалярных краевых задач лежит проверка строгого знакопостоянства функции $h(\cdot)$, определяемой с помощью ассоциированного ядра равенством вида

$$h(t_1) = G\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \end{pmatrix} \quad \left(0 < \begin{matrix} t_1 < t_2 < \ldots < t_k \\ s_1 < s_2 < \ldots < s_k \end{matrix} < \ell\right), \qquad (1)$$

где $G(t,s)$ – функция Грина исследуемой задачи и $t_2 = s_2,\ t_3 = s_3,\ \ldots,\ t_k = s_k$. Этот прием, эффективный для непрерывных функций Грина, оказывается некорректным и, вдобавок, невразумительным при анализе нестандартных задач, решения которых могут быть разрывными. Соответствующее уточнение Боровских А.В., Покорного Ю.В. требует анализа функции $h(t)$ на "грубой" диагонали, когда $t_i \pm 0 = s_i \mp 0$ $(i = \overline{1,k})$. Анализ $h(t)$ в подобной ситуации оказывается весьма нетривиальным даже для простейших задач.

Деформация $u(\cdot)$ цепочки струн, натянутой вдоль отрезка $[0,\ell]$, имеющей разного вида упругие сочленения в точках ξ_i $(i = \overline{1,n})$, описывается уравнением

$$-(pu')' = f$$

и условиями связи

$$u'(\xi_i) = A_i\, u(\xi_i)$$

где

$$u(\xi_i) = \begin{pmatrix} u(\xi_i - 0) \\ u(\xi_i + 0) \end{pmatrix}, \quad \det\|(a^i_{j\ell})\|^2_{j,\ell=1} \le 0,\ a^i_{11}, a^i_{21} \le 0,\ a^i_{12}, a^i_{22} \ge 0.$$

Проверку знаковых свойств функции $h(t)$ для этой задачи облегчает следующая

Теорема. На $[0, s_2]$ функция $h(t)$, определяемая равенством (1), пропорциональна функции Грина двухточечной задачи на $[0, s_2]$, причем краевое условие в точке $x = s_2$ определяется:

1) при $t_2 = s_2$ $(s_2 \ne \xi_i)$ $\quad h(s_2) = 0$;
2) при $t_2 = \xi_i + 0,\ s_2 = \xi_i + 0$ $\quad h(\xi_i - 0) = \frac{1}{a^i_{11}} h'(\xi_i - 0)$
3) при $t_2 = \xi_i - 0,\ s_2 = \xi_i \pm 0$ и $t_2 = \xi_i + 0,\ s_2 = \xi_i - 0$ $\quad h(\xi_i - 0) = 0$

Анализ функции Грина для любой из описанных краевых задач приводит к строгой положительности внутри квадрата $0 < x, s < \ell$, что и приводит, в конечном счете, к свойству Келлога для функции влияния, описанной выше цепочки струн.

Щербатых В.Е. (Воронеж)

Оценки производных решения начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой стратифицированной жидкости в полупространстве

Изучается решение системы уравнений в частных производных вида

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)U=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta_x u+\frac{\partial p}{\partial x_1}\\ \frac{\partial w}{\partial t}-\nu\Delta_x w+\frac{\partial p}{\partial x_2}+g\rho\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}-\frac{\omega_0^2}{g}w\\ \frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=u_0(x);\quad w\Big|_{t=0}=w_0(x);\quad \rho\Big|_{t=0}=\rho_0(x) \qquad (2)$$

и условиях на границе полупространства

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=u_1(x_1,t);\quad w\Big|_{x_2=0}=0 \qquad (3)$$

В (1) $U(x,t)=\{u(x,t),w(x,t),\rho(x,t),p(x,t)\}^T$,- искомая вектор-функция; g,ω_0^2 - положительные постоянные. С помощью формулы представления решения, полученной методом "отражения", проводится оценка норм в $\mathcal{L}_2(R_2^+)$ производных решения $U(x,t)$ через нормы данных задачи $u_0(x)$, $w_0(x)$, $\rho_0(x)$, $u_1(x_1,t)$.

Аналогичные результаты получены и в том случае, когда граничные условия (3) заменены на условия

$$u\Big|_{x_2=0}=u(x_1,t);\quad p\Big|_{x_2=0}=p_1(x_1,t);\quad \frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=0$$

При оценки используются вид и свойства оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ фундаментальной матрицы решений, исследованной А.В.Глушко (см.[1])

Литература

1. Глушко А.В. Асимптотика при $t\to\infty$ решения задачи коллапса пятна интрузии в вязкой стратифицированной жидкости // Математические заметки.-1993.-Т.53.-Вып. 1.-С.16-24.

Щербин В.М.

ПОЛУАДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $\mathcal{K}$-ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. Пусть $A : X \to Y$, где X и Y $\mathcal{K}$-пространства. Оператор A называется полуаддитивным, если выполняются условия:

$$A(x+y) \le A(x) + A(y); \quad A(-x) = -A(x)$$

Теорема 1. Пусть $A : G \to Y$; $G \subset X$; Полуаддитивный оператор A, определенный на подпространстве G полуупорядоченного пространства X, непрерывен на G в том и только в том случае, если он непрерывен в точке $x = \theta$.

Теорема 2. Пусть X – полуупорядоченное пространство, $A : X \to X$ и пусть выполняются следующие условия

а) A полуаддитивен и возрастает в X.

б) θ является единственной неподвижной точкой оператора A: $A\theta = \theta$,

в) при любом $u \in X_+$ выполняется неравенство $Au \le u$,

Тогда при любом $x \in X$

$\lim A^{(n)}(x) = \theta$, $n \in N$, где $A^{(n)}$ – итерация оператора A; $A^{(0)} = I$ – тождественный оператор.

Определение 2. Оператор $A : G \to Y$; $G \subset X$ называется оператором монотонного типа, если при любом $u, v \in G$

$$Au \le A(v) \mapsto u \le v$$

Теорема 3. Если оператор $A : G \to Y$ действует в полуупорядоченном пространстве и удовлетворяет условиям теоремы 2, то оператор A является оператором монотонного типа.

Литература:

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Щитов И.Н. / С.-Петербург /

Рассматривается система

$$\varepsilon\frac{dx}{d\tau}=X_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon},x,z,\tau\right)+\varepsilon X_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon},x,z,\tau\right),$$
$$\varepsilon\frac{dz}{d\tau}=Z_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon},x,z,\tau\right)+\varepsilon Z_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon},x,z,\tau\right), \qquad (1)$$

в предположении, что присоединенная система $(\tau=const)$

$$\frac{dx}{dt}=X_0(t,x,z,\tau),\quad \frac{dz}{dt}=Z_0(t,x,z,\tau) \qquad (2)$$

имеет интегральное многообразие вида $S:\ z=\mathcal{Z}(t,x,\tau)$, обладающее соответствующим свойством устойчивости.

Асимптотика решения задачи Коши для системы (1) ищется в виде:

$$x=\bar{x}+\Pi x=\bar{x}_0(t,\varepsilon)+\varepsilon\bar{x}_1(t,\varepsilon)+\ldots+\Pi_0x(t,\varepsilon)+\varepsilon\Pi_1x(t,\varepsilon)+\ldots$$
$$z=\bar{z}_0(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\varepsilon t)+\varepsilon\bar{z}_1(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\varepsilon t)+\ldots+\Pi_0z(t,\varepsilon)+\varepsilon\Pi_1z(t,\varepsilon)+\ldots$$

где члены $\Pi_i x,\Pi_i z$ имеют погранслойный характер и, например, $\bar{z}_0(t,x,\tau)=\mathcal{Z}(t,x,\tau)$, функция $\bar{z}_1(t,x,\tau)$ определяется как решение системы

$$\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial t}+\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial x}X_0=\left(\frac{\partial Z_0}{\partial z}+\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial x}\frac{\partial X_0}{\partial z}\right)\bar{z}_1+Z_1-\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\tau},$$

а $\bar{x}_0(t,\varepsilon)$ как решение системы

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt}=X_0(t,\bar{x}_0,\bar{z}_0,\varepsilon t)+\varepsilon\frac{\partial X_0}{\partial z}(t,\bar{x}_0,\bar{z}_0,\varepsilon t)\bar{z}_1+\varepsilon X_1(t,\bar{x}_0,\bar{z}_0,\varepsilon\ldots$$

Если $X_0=0, Z_1=0$ и X_1, Z_0 не зависят явно от $t=\frac{\tau}{\varepsilon}$ и S образовано стационарными решениями системы (2), т.е. $z=\mathcal{Z}(x,\tau)$ -корень уравнения $Z_0(x,z,\tau)=0$, то рассматриваемая задача сводится к классической, асимптотика которой построена А.Н.Тихоновым и А.Б.Васильевой [1].

Справедлива теорема, дающая оценки точности построенной асимптотики, аналогичная теореме А.Б.Васильевой.

Возможно дальнейшее обобщение приведенной задачи [2].

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 242 с.

2. Щитов И.Н. // Дифференц. уравнения. 1992. т.28. № 5.

УДК 517.956

С.Якубов, Ж.О.Тахиров (Ташкент)

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Гиперболическая модель теплопередачи возникает при математическом описании распространения тепла в среде, обладающей релаксационным свойством. Получены различные варианты гиперболической задачи Стефана (напр.[1,2]). Они отличаются в основном условиями на свободной границе.

Нами исследована задача в формулировке работы [2] для системы

$$u_t(x,t)+a(x,t)v_x(x,t)+b(x,t)u(x,t)=0. \quad (1)$$

$$v_t(x,t)+a(x,t)u_x(x,t)+b(x,t)v(x,t)=0, \quad x_0<x<s(t),\ t>0. \quad (2)$$

Сначала выпишем начальные и краевые условия, которые используются в постановке краевых задач для различных x_0 :

$$u(x_0,t)=\psi_1(t), \quad t\geq 0, \quad (3)$$

$$v(x_0,t)=\psi_2(t), \quad t\geq 0, \quad (4)$$

$$u(x_0,t)=k\,[\psi_0(t)-v(x_0,t)], \quad t\geq 0, \quad (5)$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \qquad v(x,0)=\varphi_2(x), \quad x\leq 0. \quad (6)$$

Найти функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(t)$, такие, что, $s(0)=0$, $\dot{s}(0)=s_0$, $|\dot{s}(t)|<a(s(t),t)$ и функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ удовлетворяют систему уравнений (1), (2) и условиям:

$$v(s(t),t)=\psi(t),$$

$$\alpha(s(t),t)\dot{s}(t)=u(s(t),t)+\beta(s(t),t)$$

, а также

1. если $x_0=-\infty$, то выполняется (6);
2. если $-\infty<x_0<0$, то выполняется (6) и одно из условий (3)-(5);
3. если $x_0=0$, то выполняется одно из условий (3)-(5).

Установлены оценки для искомых функций, обеспечивающие глобальное разрешимость и корректность поставленных задач. Доказаны теоремы единственности и существование решения задач.

Литература.

1. Rubinstein L.I. Free boundary problems, Part II, Roma. 1980, p.383-450.
2. Lening Li. Quart. appl. math. 1989, v.XLVII, N2, p.[illegible]-231.

УДК 539.4

И.Л.Батаронов, Ю.В.Баранов, А.М.Рощупкин (Воронеж, Москва)

МЕХАНИЗМ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ПЛАСТИЧЕСКУЮ ДЕФОРМАЦИЮ МЕТАЛЛОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проблема влияния электростатических полей на прочность и пластичность металлических материалов приобретает в настоящее время большое значение. Анализ последних экспериментальных работ по пластической деформации металлов в электростатических полях напряженностью $\sim 10^6$ $В/м$ показывает, что указанное влияние скорее всего связано с изменением поверхностного натяжения металлов в электростатическом поле. Одной из основных составляющих такого изменения является увеличение ΔE энергии электрического поля при образовании на поверхности образца ступеньки в результате входа в металл дислокации. Поскольку систему образец-диэлектрическая прокладка-электрод можно рассматривать как сдвоенный плоский конденсатор, то в условиях поддержания на обкладках постоянного потенциала φ величина $\Delta E = \frac{1}{2}\Delta C\cdot\varphi^2$ определяется изменением ΔC емкости конденсатора, для определения которой необходимо решить плоскую задачу Дирихле в бесконечном конденсаторе, на одной из обкладок которого имеется ступенька высотой $2h$. Предполагая, что ступенька перпендикулярна плоскости обкладки, полагая расстояние между обкладками равным d и помещая начало координат на середину ступеньки, с помощью формулы Шварца-Кристоффеля получим конформное отображение полосы со ступенькой на полуплоскость, отображая которую на полосу без ступеньки будем иметь следующее неявное выражение для комплексного потенциала w рассматриваемой задачи:

$$z = 2\frac{d-h}{\pi}\ln\left\{\sqrt{e^{\pi w}-a_1}+\sqrt{e^{\pi w}-a_3}\right\} -$$

$$- 2\frac{d+h}{\pi}\ln\left\{\sqrt{a_3(e^{\pi w}-a_1)}+\sqrt{a_1(e^{\pi w}-a_3)}\right\} +$$

$$+ (d+h)w + 2\frac{h}{\pi}\ln(a_3-a_1) + ih$$

где параметры a_1 и a_3 определяются системой уравнений:

$$\frac{a_3}{a_1} = \left(\frac{d+h}{d-h}\right)^2 \quad ; \quad \frac{\pi h}{d-h} = \int_1^{a_3}\sqrt{\frac{a_3-x}{x-a_1}}\,\frac{dx}{x}$$

Величину ΔE затем можно найти через изменение площади области в плоскости w, являющейся образом части полосы со ступенькой и без нее, ограниченной прямыми $x = \pm x_0$, при $x_0 \to \infty$. Расчет для изменения емкости дает результат:

$$\Delta C = \frac{b}{2\pi^2}\cdot\frac{h^2}{d^2}\left[1 + 2\ln\frac{d}{h}\right]$$

который увеличивается в ε раз при наличии диэлектрической среды.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Тип. ВГУ. З. 47-93. Т. 250.