Международная конференция

"Современные проблемы математики, механики и их приложений"

посвященная 70-летию ректора МГУ
академика В.А.Садовничего

Материалы конференции

The International Conference

"Modern problems of mathematics, mechanics and their applications"

dedicated to the 70-th anniversary of rector of MSU
acad. V.A.Sadovnichy

Materials of the conference

30 марта – 02 апреля 2009 года
Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Международная конференция

"Современные проблемы математики, механики и их приложений"

посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего

Материалы конференции

The International Conference

"Modern problems of mathematics, mechanics and their applications"

dedicated to the 70-th anniversary of rector of MSU acad. V.A.Sadovnichy

Materials of the conference

30 марта – 02 апреля 2009 года
Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Программный комитет:

Академик Ю.С. Осипов (председатель), В.В. Александров, академик А.А. Гончар, Е.П. Долженко, академик С.В. Емельянов, академик Ю.И. Журавлев, академик В.А. Ильин, В.П. Карликов, член-корр. Б.С. Кашин, академик В.В. Козлов, Г.М. Кобельков, академик С.К. Коровин, А.Г. Костюченко, Т.П. Лукашенко, академик Е.И. Моисеев, член-корр. Ю.В. Нестеренко, академик С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев, академик А.Т. Фоменко, академик Г.Г. Черный, В.Н. Чубариков, А.С. Шамаев, А.А. Шкаликов.

Организационный комитет:

В.Н. Чубариков (председатель), Т.П. Лукашенко (зам. председателя), В.В. Белокуров, А.В. Боровских, В.В. Галатенко, Д.В. Георгиевский, А.И. Козко, С.Н. Михалев, А.С. Печенцов (зам. председателя), В.Е. Подольский, Т.В. Родионов, А.М. Савчук, К.В. Семенов, Н.В. Семин, И.Н. Сергеев (зам. председателя), С.А. Степин, С.В. Шапошников, А.А. Шкаликов.

Секции конференции

Конференцию поддержали:

1. Российский фонд фундаментальных исследований
2. Министерство образования и науки РФ
3. Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
4. Выпускник механико-математического факультета МГУ О.Д.Звягин
5. Выпускник механико-математического факультета МГУ А.В.Чеглаков

Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего. – М.: Издательство «Университетская книга», 209. – 416с.

ISBN 978-5-91304-078-7

© Механико-математический факультет МГУ, 2009

ВИКТОР АНТОНОВИЧ САДОВНИЧИЙ
(К 70-летию со дня рождения)

3 апреля 2009 г. исполняется 70 лет выдающемуся учёному, математику, крупному специалисту в области математического анализа, прикладной математики, информатики, теоретической и прикладной механики, известному в России и за рубежом организатору науки и народного образования, видному общественному деятелю, академику РАН, вице-президенту РАН, ректору Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова Виктору Антоновичу Садовничему. В. А. Садовничий родился в селе Краснопавловка Харьковской области в крестьянской семье, и в связи с материальным положением семьи ему пришлось рано пойти работать на шахту. В 1958 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ, закончил его с отличием и связал с Московским университетом всю свою последующую жизнь и деятельность. После окончания в 1966 г. аспирантуры В. А. Садовничий начал работать на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета, сначала ассистентом, затем доцентом, а с 1975 г. профессором. В 1967 г. он защитил кандидатскую, а в 1974 г. докторскую диссертацию. Помимо научной работы, Виктор Антонович вёл в эти годы большую административную и организаторскую деятельность: в 1972 г. он был назначен заместителем декана механико-математического факультета по научной работе, в 1981-82 гг. заведовал кафедрой функционального анализа и его приложений факультета вычислительной математики и кибернетики, в 1982 г. стал проректором университета, а в 1984 г. — первым проректором. С 1982 г. и по настоящее время В. А. Садовничий — заведующий кафедрой математического анализа механико-математического факультета. В 1994 г. его избрали членом-корреспондентом, а в 1997 г. — действительным членом Российской Академии наук. В начале 1992 г., в сложнейшее для страны время политических и экономических перемен, Виктор Антонович на альтернативной основе был избран ректором Московского университета. Во многом благодаря его самоотверженной работе Московскому университету удалось не только сохранить свой высокий учебный и научный потенциал, но и продолжить своё развитие. Под его руководством Московский университет начал освоение новой территории, на которой построены великолепные здания новой фундаментальной библиотеки, клинический корпус, лабораторные и учебные корпуса. При его непосредственном участии в МГУ открыты 18 новых современных факультетов, среди которых факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет физической химии, целый ряд гуманитарных факультетов, 5 научно-исследовательских институтов, среди них институт человека, институт мировой культуры.

В 1994 г. В. А. Садовничего выбирают президентом Союза ректоров России, объединяющего около 700 университетов и высших учебных заведений страны. Он является президентом Евразийской ассоциации университетов, членом более чем 20 отечественных и международных научных и образовательных организаций, среди которых Российская Академия ракетных и артиллерийских наук и Международная Академия аэронавтики. Виктор Антонович избран почетным профессором и почётным доктором более чем 50 отечественных и иностранных университетов и исследовательских институтов, является почётным членом многих зарубежных академий наук. В. А. Садовничий — член Совета при Президенте РФ по науке и высоким технологиям, член Президиума Российской Академии наук, а с 2008 г. — вице-президент РАН. Он является почетным членом Российской академии образования, членом коллегии Минобразования, Научного совета при Совете Безопасности РФ, Совета по русскому языку при Правительстве РФ, членом Совета при Президенте РФ по реализации приоритетных национальных проектов.

Заслуги В. А. Садовничего в научной, педагогической, научно-организационной и общественной деятельности высоко оценены как у нас в стране, так и за рубежом. В. А. Садовничий — лауреат Государственной премии СССР (1989 г.), Госпремии РФ в области науки и техники (2002 г.), премии Правительства в области образования (2006 г.), премии им. М. В. Ломоносова (1973 г.), награждён памятной медалью Академии Естественных Наук РФ “Автор научного открытия”, посвящённой Лауреату Нобелевской премии П. Л. Капице, и золотой медалью РАН им. М. В. Келдыша за цикл работ по спектральной теории операторов (2006 г.). Он награждён правительственными наградами: орден “За заслуги перед Отечеством” III степени, орден “За заслуги перед Отечеством” II степени, два Ордена Трудового Красного Знамени, медаль “За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина”, медаль “В память 850-летия Москвы”. Награждён также орденами Русской православной церкви: орденом святого благоверного князя Даниила Московского II степени (1997 г.), орденом святителя Иннокентия митрополита Московского и Коломенского II степени (1999 г.), орденом Преподобного Сергия Радонежского II степени (2002 г.). Имеет награды зарубежных государств: степень Командора ордена Почетного Легиона (Франция), орден Восходящего Солнца II степени “Золотые и серебряные лучи” (Япония), орден “За заслуги” III степени, а также орден “За заслуги” II степени (Украина), орден Франциска Скорины (Белоруссия), орден “Достых” и Государственную премию Казахстана. Лауреат национальной премии “Человек года 2003”, учрежденной Русским биографическим институтом. 22 января 2008 г. В. А. Садовничему присвоено звание Почетного гражданина г. Москвы.

О многогранной научной деятельности Виктора Антоновича до 1999 г. подробно рассказано в статье “В. А. Садовничий. К 60-летию со дня рождения” [1], и здесь мы в основном сосредоточимся на его работе в прошедшем десятилетии.

Одной из основных областей научных интересов В. А. Садовничего с самого начала его научной деятельности была спектральная теория линейных операторов и, в первую очередь, теория следов. Уже в первой своей работе он получил формулу следа для операторов четвертого порядка, что было существенным продвижением на тот момент, причём результат был получен новым методом с использованием спектральных функций операторов. В серии работ [5-8], выполненных совместно с В. Б. Лидским, был совершён принципиальный прорыв в теории регуляризованных следов регулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Взгляд на собственные числа операторов как на нули целых функций специального класса, названного авторами классом K, позволил свести задачу теории операторов к задаче теории функций, которая была с успехом решена. В. А. Садовничий продолжил развитие теории функций класса K и указал многочисленные приложения этой теории. Было обнаружено, что теория применима не только к регулярным, но и к сингулярным операторам, были исследованы тесно связанные задачи о регуляризованных суммах полуцелых степеней собственных чисел и суммах чисел, входящих в отдельные серии нулей функций класса K. В. А. Садовничий ввёл важнейшее понятие следов с весом, дал метод их нахождения и указал связь взвешенных следов со спектральной функцией оператора. Как приложение этих результатов, В. А. Садовничим было дано простое доказательство асимптотического разложения спектральной функции оператора Штурма–Лиувилля. В работах [32, 33] Виктор Антонович ввёл новый, более широкий класс функций, названный классом C, охватывающий все характеристические определители обыкновенных дифференциальных операторов, и для него удалось решить задачу регуляризации сумм корней.

Но, разумеется, никакие классы целых функций не в состоянии охватить все возможные типы характеристических определителей самых разнообразных операторных задач математической физики, и уже в конце 70-х годов В. А. Садовничий начал систематическое исследование следов операторов методами теории возмущений [20-23].

Выдающимся результатом явилось решение поставленной И. М. Гельфандом ещё в шестидесятые годы проблемы нахождения формулы следов для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере. Эта труднейшая задача в случае возмущения оператором умножения на нечётную функцию была решена Виктором Антоновичем в сотрудничестве с одним из своих учеников В. В. Дубровским [80, 82].

Особое место в работах Виктора Антоновича на протяжении многих лет занимает исследование задачи Орра–Зоммерфельда. Эта задача возникает в теории гидродинамической устойчивости. Ещё в 1968 г. совместно с В. Б. Лидским было проведено детальное изучение асимптотических свойств фундаментальной системы решений, собственных чисел, найдена полная система рекуррентных соотношений на все параметры асимптотик и получены формулы следов [7]. А в середине 90-х годов в цикле работ [102, 143, 144, 147] была обоснована возможность вычисления с помощью регуляризованных следов первых собственных чисел в задачах о плоскопараллельном течении и течении в трубе, расположение которых решает вопрос об устойчивости течений.

В спектральной теории операторов В. А. Садовничему принадлежит ряд важнейших результатов, выходящих за рамки теории следов, среди них первый результат о единственности решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями [11, 14, 15]. Несколько статей [324-326, 351, 352, 361, 371] посвящены восстановлению потенциала и краевых условий в задачах

[1]Дифф. Уравнения, т. 35, №4, 1999. С. 441 - 446

Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями типа $U_1(y) = y'(0)+a_{11}\,y(0)+a_{12}\,y(\pi) = 0$, $U_2(y) = y'(\pi) + a_{21}\,y(0) + a_{22}\,y(\pi) = 0$, или типа $U_1(y) = a_1\,y'(0) + a_2\,y'(\pi) + a_3\,y(0) + a_4\,y(\pi) = 0$ $U_2(y) = b_1\,y(0)+b_2\,y(\pi) = 0$, a_{ij}, $(i,\, j = 1,\, 2)$, a_i, b_j $(i = 1,2,3,4,\, j = 1,2)$ — комплексные постоянные, причем хотя бы один из коэффициентов a_i и хотя бы один из коэффициентов b_j отличны от нуля. При невыполнении соотношений $a_{12} = a_{21} = 0$ обратная задача Штурма–Лиувилля долгое время не поддавалась решению. В указанных статьях по обратным задачам такого типа получены новые значительные результаты в части единственности, методов восстановления и устойчивости.

В. А. Садовничему принадлежит ряд существенно новых результатов по асимптотическому поведению спектральной функции и по единственности решения обратных спектральных задач для абстрактных дискретных операторов [73, 81, 89]; приложения регуляризованных следов к вычислению первых собственных чисел операторов [78, 102]. В классической задаче Штурма–Лиувилля Виктор Антонович поставил и изучил ряд интересных новых вопросов, среди них исследование специального класса S уравнений, у которых есть решение с обрывом асимптотического разложения по спектральному параметру [131, 154], оценка приближения решений уравнения Штурма–Лиувилля частичными суммами их асимптотических рядов [151, 204, 224-226]. К концу 90-х годов прошлого столетия теория следов была уже хорошо развитой теорией, имевшей в своём активе ряд весьма крупных достижений и ряд нерешённых проблемных задач. Пожалуй, центральным из открытых вопросов был вопрос о точных границах выполнимости формулы следа для абстрактных операторов

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{n_m}(\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0, \tag{1}$$

в которой $\{\varphi_n\}$ – базис из собственных векторов неограниченного дискретного оператора A_0 с собственными числами $\{\lambda_n\}$, B - некоторый возмущающий оператор, подчинённый A_0, $\{\mu_n\}$ - собственные числа оператора $A_0 + B$.

В 1999 году в работе [228] В. А. Садовничим была выдвинута гипотеза: формула следа (1) верна для A, имеющего ядерную резольвенту и ограниченного B. В самой работе эта формула была доказана для случая регулярного поведения собственных чисел невозмущённого оператора λ_n: последовательность λ_n/n^δ должна быть монотонно возрастающей при некотором $\delta \in (0, 1]$. Однако там было сделано и важное продвижение в доказательстве этой гипотезы в целом: было доказано стремление второй поправки теории возмущений к нулю именно для операторов, удовлетворяющих условиям гипотезы. Вскоре в работе В. А. Садовничего, С. В. Конягина и В. Е. Подольского [243] была доказана одна фундаментальная лемма о числовых рядах, позволившая доказать стремление к нулю по некоторой системе контуров ядерной нормы резольвенты самосопряжённого оператора с ядерной резольвентой, что дало вторую важнейшую составляющую доказательства приведённой гипотезы.

В работе [277] был доказан ряд теорем, охватывающих как случай оператора с ядерной резольвентой, возмущённого относительно компактным оператором, так и малоизученный случай операторов с неядерной резольвентой. Далее в работах [334, 348, 372] были получены дальнейшие существенные продвижения в этих задачах. В частности, помимо новых, более общих формул следов, полученные в этих работах результаты позволяют уточнить ряд важных оценок ядерных норм операторов.

В тяжелейшей задаче о следе оператора Лапласа на сфере прямым исследованием поправок теории возмущений В. А. Садовничему и З. Ю. Фазуллину [333] удалось получить формулы следов для оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере при условии принадлежности потенциала классу дважды непрерывно дифференцируемых функций – до этого данный результат был получен для бесконечно дифференцируемых потенциалов с применением методов теории псевдодифференциальных операторов.

В обсуждаемый период В. А. Садовничим и В. Е. Подольским [330] был решен ещё один принципиальный вопрос теории регуляризованных следов, впервые поставленный И. М. Гельфандом в 1956 году: установить прямую связь формул следа типа Крейна и типа Гельфанда–Левитана.

В последнее время внимание В. А. Садовничего привлекли задачи для уравнения Штурма–Лиувилля на отрезке для класса разрывных и обобщённых потенциалов. Впервые были получены [249, 269, 270, 276, 294, 296, 335, 347, 350] приближенные формулы любого порядка точности для собственных значений и собственных функций в классе суммируемых по Лебегу потенциалов, а также в классе обобщённых потенциалов, содержащих δ-функции. Затем авторы получили ряд значительных и трудных результатов в этом направлении: была доказана формула следа для потенциала, содержащего функции, установлена аналитичность отображений $\lambda_n : L_1 \to \mathbb{R}$ и $y_n : L_1 \to \mathbb{C}$, установлены точные границы изменения собственного значения λ_n при изменении потенциала q в шаре пространства L_p. Получена точная явная формула для границы изменения знака первого собственного значения, наконец, доказана равномерная равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье ряда по собственным функциям для класса потенциалов, содержащих δ-функции. Таким образом, в этом цикле работ решены новые принципиальные задачи спектральной теории операторов.

Глубоко понимая первостепенную важность прикладных исследований и необходимость связи математики и механики с повседневной жизнью, Виктор Антонович постоянно уделял и уделяет этим вопросам большую часть своих сил и времени.

В 1977 году в Центре подготовки космонавтов (ЦПК) был смонтирован сложный динамический стенд, состоящий из центрифуги с восемнадцатиметровой консолью и кабины, размещенной в управляемом кардановом подвесе. Система управления нижнего уровня была поставлена изготовителем стенда. Для успешного функционирования была необходима система управления верхнего уровня, состоящая из высокопроизводительной ЭВМ и специального математического обеспечения. Руководство ЦПК обратилось к В. А. Садовничему с просьбой организовать разработку такого математического обеспечения. Задача была усложнена тем, что ее постановка находится на стыке четырех областей науки: медицины, механики, математики и теории управления.

В. А. Садовничий создал объединенную группу научных сотрудников ЦПК и МГУ. В основу концепции разработки была положена идея академика А. Ю. Ишлинского о возможности замены сил, действующих на механорецептоы человека в полете, на силы другой природы, оказывающие аналогичное влияние на механорецепторы пилота, находящегося в кабине центрифуги.

После реализации в виде программного обеспечения цифровой системы управления верхнего уровня в ЦПК им. Ю. А. Гагарина, алгоритмы динамической имитации прошли тщательную экспертизу в виде четырнадцати контрольных экспериментов — с семью космонавтами и семью кандидатами в космонавты. Эксперименты дали блестящие результаты. Впервые в мировой практике космонавтики стало возможным осуществлять сквозное моделирование всех этапов аэрокосмического полета. При этом основная проверка готовности кандидата к будущему полету происходит на втором этапе, когда воспроизводится сенсорный конфликт в невесомости. За эту работу в 1989 г. В. А. Садовничий и сотрудники его объединенной группы были удостоены Государственной премии СССР.

Дальнейшие исследования в этом направлении были связаны с изучением негативного влияния вестибуло-сенсорного конфликта на точность визуального управления космическими объектами (космический манипулятор, перестыковка корабля, автономное устройство спасения космонавта и др.) Виктор Антонович пригласили в университетскую группу исследователей ученых из Института медико-биологических проблем, которые в экспериментах на борту орбитальной станции "Мир" показали, что запаздывание стабилизации взора возрастает на орбите в 5-10 раз, что может привести к серьезным авариям при визуальном управлении. Тогда В. А. Садовничим был предложен и разработан метод максиминного тестирования точности визуальной стабилизации космических объектов. На основе этих результатов, доведенных до практического применения, объединенному коллективу сотрудников МГУ, ИМБП и ЦПК им. Ю. А. Гагарина (возглавляемому В. А. Садовничим) была присуждена премия Российской Федерации за 2002 г. В настоящее время коллектив, возглавляемый В. А. Садовничим, продолжает работы в этом направлении уже при создании мобильных имитаторов вертикальной позы — динамических стендов предклинического тестирования прототипов вестибулярного протеза для лиц с нарушениями вестибулярной функции [339, 362, 373]. Лаборатории в США (микросенсоров) и в Мексике (нейрофизиологии) активно сотрудничают и перенимают опыт у группы российских ученых, возглавляемой Виктором Антоновичем. Об этом говорят многочисленные совместные работы [265, 292, 300, 337, 373, 374] и патенты.

В начале 80-х годов Виктор Антонович заинтересовался математическими вопросами, связанными с дистанционными методами изучения Земли и планет. Под его руководством был организован междисциплинарный семинар, на котором заслушивались и обсуждались доклады ведущих специалистов страны по этой проблематике. Одной из важных тем, которой посвятил свои исследования Виктор Антонович, была обработка космических снимков и применения результатов цифровой обработки для анализа состояния окружающей среды и природных ресурсов.

Один из докладов на семинаре в 1987 году был посвящен проекту "Фобос". На нем рассматривалась научная программа исследования межпланетными станциями "Фобос-1,-2" одного из загадочных спутников Марса — Фобоса. Одной из важных проблем, которую необходимо было решить для успешного выполнения навигационной обработки и последующего телевизионного эксперимента, была задача построения трехмерной цифровой модели поверхности Фобоса, и Виктор Антонович загорелся идеей решения этой задачи. Был организован исследовательский коллектив, в который вошли сотрудники МГУ и сотрудники ИКИ АН СССР.

Для построения цифровой модели поверхности Фобоса использовалась карта Р. Тернера [208, 227, 233], построенная по изображениям с космической станции "Маринер-9". Уточнения (нанесение небольших кратеров и борозд) проводились по снимкам со станций "Викинг-1,-2". При организации работ по программе "Фобос" задача построения модели поверхности Фобоса была поручена нескольким научным учреждениям СССР. Работа группы под руководством В. А. Садовничего была инициативной, и официально она не принимала участия в подготовке проекта, однако, при приемке моделей, предоставленных Государственной Комиссии, именно эта модель была признана наиболее точной и корректной, и стала в дальнейшем использоваться в проекте для решения навигационных и других задач.

Много лет В. А. Садовничий взаимодействует с коллективом сотрудников НИИ механики МГУ в области математического моделирования движения. Они занимаются задачами математического моделирования движения управляемых и неуправляемых объектов в сопротивляющейся среде. Спектр таких проблем достаточно широк: от прикладных задач аэрокосмического полета (объект "Буран"), отмеченных Госпремией СССР за 1989 г., через задачу внешней баллистики тел сложной геометрии [211, 301-304, 342], к задачам полета космических "пришельцев" (болиды, метеориты) [222, 315, 341, 343, 344, 353, 354, 357-359]. Стержневая идея этого цикла работ - построение математических моделей и их качественное, аналитическое исследование.

Много лет В. А. Садовничий вёл тесное сотрудничество с одним из крупнейших учёных двадцатого века, лауреатом Нобелевской премии И. Р. Пригожиным, и в 1995 году для дальнейшего проведения научной работы и для её расширения Виктор Антонович создал и возглавил при МГУ Институт Математических Исследований Сложных Систем, а И. Р. Пригожин стал в нём почётным президентом. ИМИСС МГУ был построен на новых для нашей страны принципах. Для решения конкретной задачи ИМИСС не только формирует творческий коллектив из специалистов самых разных отраслей знаний, но и организует консорциум из учреждений и предприятий, расположенных иногда в разных регионах страны. В последние годы такой темой стало создание тактильного механорецептора [345, 364, 366, 376, 377]. За свою историю человек научился документировать и фиксировать свои ощущения. Зрительные образы фиксировались в виде наскальных рисунков или кинофильмов, звук — в виде записи на пластинке или электронном носителе. Тактильные же образы до настоящего времени не нашли возможностей широкого использования. Даже в такой важной области, как медицина, до сих пор отсутствует объективная система, позволяющая описать и запомнить такого рода информацию. Работа, возглавляемая академиком В. А. Садовничим — первое комплексное исследование, проведенное в этой области. В разработке метода тактильной диагностики приняли участие специалисты в области фундаментальной и вычислительной математики, биологии, механики, эндоскопической хирургии, электроники и микроэлектроники, а также ведущие предприятия оборонного комплекса (г. Тула) и микроэлектроники (г. Зеленоград). Главным отличием предлагаемого комплекса является инструментальная возможность ощупывания внутри полостей человеческого организма. В устройстве механорецептора впервые использована объективная система анализа тактильных характеристик живого органа. В результате реализации проекта на основе биомехатронных и робототехнических принципов изготовлена опытная партия медицинских приборов предназначенных для исследования удаленных тканей и работы внутри полостей человека (в грудной полости, полости сустава, брюшной полости и забрюшинном пространстве). Все они оснащены сенсорной системой, имитирующей осязательную функцию человеческого пальца. Разработаны технологии тактильной эндоскопической диагностики, усовершенствованы математические методики обработки изображений и распознавания образов, проведена математическая оценка экспериментальных результатов. Проведен полный комплекс технологических испытаний согласно ГОСТ, предъявляемым к медицинской технике. Технические условия (введены впервые) утверждены Росздравнадзором Министерства здравоохранения и социального развития РФ. Медицинские испытания проведены в ГКБ №31 Москвы, КБ № 119, ЦКБ УД Президента РФ, МНИОИ им. П. И. Герцена. Полученные результаты, созданные приборы, разработанные технологии не имеют мировых аналогов.

Большое место в творческой жизни Виктора Антоновича занимает педагогическая и методическая работа. Под его руководством более 65 учеников защитили кандидатские диссертации и более пятнадцати — докторские. Он подготовил и в разные годы прочитал на механико-математическом факультете МГУ несколько спецкурсов, а также обязательные курсы по функциональному анализу и математическому анализу. Эти курсы легли в основу ряда монографий, учебников, учебных пособий, среди них: курс лекций по спектральной теории дифференциальных операторов, на основе которого впоследствии был написан один из лучших учебников по функциональному анализу, неоднократно изданный в нашей стране и переведённый за рубежом [27, 57, 87, 201, 234, 274]; оригинальный, признанный в ведущих вузах страны и за рубежом, переведённый в Болгарии курс математического анализа [28, 31, 53, 63, 312, 313], а также курс анализа, читаемый на механико-математическом факультете МГУ в последние годы [121, 140-142, 193, 316, 317]; двухтомный сборник задач по математическому анализу, составленный практически полностью из новых задач, упорядоченный в соответствии с последними методическими представлениями о расположении материала в курсе и снабжённый, в отличие от почти всех подобных работ, необходимыми теоретическими сведениями и детальным изложением технических приёмов и методов [72, 84, 91, 130, 246, 247, 261, 262, 307, 308]. Большой цикл публикаций В. А. Садовничего был посвящён проблемам развития и укрепления системы университетского и в целом народного образования в нашей стране, поддержки и развития фундаментальных и прикладных исследований, академической науке, гуманитарному образованию, заботе о сохранении накопленного в стране научного потенциала, проблемам развития и укрепления научных и педагогических связей внутри страны и между народами, поддержке молодёжи. Не имея возможности приводить полный список этих работ, назовём такие блестящие работы В. А. Садовничего, посвящённые проблемам развития гуманитарных наук, как "Университетское образование. Приглашение к размышлению" [113], "Московский университет: проблемы образования и науки" [171], "Математическое образование: настоящее и будущее" [242], "Образование, которое мы можем потерять" [305], "Знание и мудрость" [329], "Наука как метафора", "Гуманитарное образование в России: мысли вслух" (см. в сб. [380]).

Усилиями В. А. Садовничего были восстановлены многие университетские традиции. Так, по его инициативе была восстановлена традиция празднования дня рождения Московского университета "Татьянин день", а сам день согласно указу Президента стал праздником студенческой молодёжи России. Возобновил службу Домовый Храм Св. Мученицы Татианы, имеющий в настоящее время высокий статус Патриаршего Подворья.

Выдающийся талант, огромное трудолюбие, искреннее желание принести наибольшую пользу отечественной науке и образованию, принципиальная гражданская позиция принесли Виктору Антоновичу бесспорный авторитет в широких кругах мировой научной общественности.

Желаем дорогому Виктору Антоновичу здоровья, долгих активных лет жизни, успехов во всех его благородных начинаниях.

Список научных трудов В. А. Садовничего за 2001-2009гг. [2]

[297] Биосфера и человечество на пути к диалогу : Учеб. для последиплом. повышения квалификации геологов, географов и экологов (совм. с К. С. Лосевым и др.). - М. : Изд-во Моск. ун-та, 2001. - 187 с.

[298] Динамическая имимтация маневренных летательных аппаратов (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). Международная конференция «Тренажерные технологии и обучение». Сборник докладов. Жуковский, 2001. С. 210 – 215.

[299] Тестирование качества визуальной стабилизации космических объектов на динамическом стенде с трехуровневой системой управления (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). «Математические вопросы кибернетики», вып. 10, М: Физматлит, 2001. С. 35 – 44.

[300] Maximin testing of satellite stabilization (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). Mathematical Modeling of Complex Information Processing Systems. Moscow Univerity Press, 2001. P. 61 – 70.

[301] Особенности вращательного движения скоростного объекта в свободном полете (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Международная научно-практическая конференция «Вторые Окуневские чтения». Сб. трудов. Т.1. Баллистика. Санкт-Петербург, 2001. С. 82 – 86.

[302] Имитационное моделирование задач о движении тела в сопротивляющейся среде (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Аннотации докладов на YIII Всерос. съезд по теор. и прикл. механике. Пермь, 2001. С. 253.

[303] Особенности углового движения асимметричного тела в свободном полете при нелинейном характере восстанавливающего момента (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Международная научно-практическая конференция «Третьи Окуневские чтения». Материалы докладов. Т.1. Баллистика. Санкт-Петербург, 2002. С. 49 – 50.

[304] Применение информационных технологий при чтении спецкурсов по теоретической механике (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Труды межд. научной конф. «Инф. технологии в ест. науках, экономике, образовании» Саратов-Энгельс, 2002. С. 478 – 480.

[305] Образование, которое мы можем потерять. М.; Изд-во МГУ, 2002. - 288 с.

[306] Задачи студенческих олимпиад по математике (совм. с А. С. Подколзиным). - 2-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2003. - 207 с.

[307] Задачи и упражнения по математическому анализу : Учеб. для студентов вузов: В 2 ч. (совм. с И. А. Виноградовой, С. Н. Олехником). - 4-е изд., стер. - М. : Ч. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление, 2004. - 724 с.

[2] Начало списка см. в статьях "Садовничий Виктор Антонович. К 60-летию со дня рождения", Дифф. уравнения, т. 35, №4, 1999. С. 441 – 446; "К шестидесятипятилетию В. А. Садовничего", Дифф. уравнения, т. 40, №4, 2004. С. 435 – 442.

[308] Задачи и упражнения по математическому анализу : Учеб. для студентов вузов: В 2 ч. (совм. с И. А. Виноградовой, С. Н. Олехником). - 4-е изд., стер. - М. : Ч.2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье, 2004. - 710 с.

[309] Математические проблемы безопасности информационных технологий (совм. с В. А. Носовым, В. В. Ященко). Сб. «Науные и методологические проблемы информационной безопасности», М., МЦМНО, 2004. С. 7 – 10.

[310] Криптография как один из источников развития математики (совм. с В. А. Носовым, В. В. Ященко). Сб. «Науные и методологические проблемы информационной безопасности», М., МЦМНО, 2004. С. 11 – 18.

[311] Научно-методологические проблемы квантовых вычислений (совм. с В. А. Носовым, В. В. Ященко). Сб. «Науные и методологические проблемы информационной безопасности», М., МЦМНО, 2004. С. 19 – 36.

[312] Математический анализ : Учеб.:В 2 ч. (совм. с В. А. Ильиным, Бл. Х. Сендовым). - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Изд-во Моск. ун-та, ч.1, 2004. - 660 с.

[313] Математический анализ : Учеб.:В 2 ч. (совм. с В. А. Ильиным, Бл. Х. Сендовым). - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Изд-во Моск. ун-та, ч.2, 2004. - 353 с.

[314] Имитационное моделирование в задаче внешней баллистики (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Сборник материалов III научной конф. Волжского регион. центра РАРАН (г. Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ). Т.1, 2004. С. 174.

[315] Введение в динамику болидов (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Тезисы докладов Международной научно-практической конференции «Четвертые Окуневские чтения». Спб, 2004. С. 97 – 98.

[316] Лекции по математическому анализу. Учеб. для студентов вузов (совм. с Г. И. Архиповым, В. Н. Чубариковым). - 4-е изд., испр. - М. : Дрофа, 2004. - 638 с.

[317] Лекции по математическому анализу . Учеб. для студентов вузов (совм. с Г. И. Архиповым, В. Н. Чубариковым). - 5-е изд., испр. - М. : Дрофа, 2004. - 638 с.

[318] Океаны и материки : Учеб. для геологов, геофизиков и географов. Кн. 2. Материки (совм. с В. В. Козодеровым, С. А. Ушаковым и др.). - М. : Изд-во МГУ, 2004. - 474 с.

[319] Собственное значение как функция потенциала (совм. с Винокуровым В. А.). Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XV». Воронеж, 3-9 мая 2004. - Воронеж, 2004. С. 49 – 50.

[320] Existence and Stability of Time-periodic Dissipative Structures in Parabolic Systems of Reaction-Diffusion Type. J. of mathematical sciens (совм. с А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым). V. 114, № 4, 2004. P. 1491 – 1509.

[321] Life of the Edge of Chaos. J. of mathematical sciens (совм. с А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым). V. 120, № 3, 2004. P. 1372 – 1398.

[322] Собственное значение как функция потенциала (совм. с Винокуровым В. А.). Межд. конф. посв. 103-летию И. Г. Петровского. Тезисы докл. М., МГУ, 2004. С. 235 – 236.

[323] Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией (совм. с Е. Ф. Мищенко, А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым). М.; Физматлит, 2004. - 430 с.

[324] О корректности обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Доклады Академии наук. Т. 395. № 5, 2004. С. 592 – 595.

[325] Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. I (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Евразийский математический журнал. № 2, 2005. С. 100 – 118.

[326] Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. II (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Евразийский математический журнал. № 3, 2005. С. 99 – 117.

[327] Обобщенная функция спектрального сдвига и связь формул следа Крейна и Гельфанда – Левитана (совм. с Подольским В. Е.). Межд. конф. посв. 100-летию С. М. Никольского. Тезисы докл. М., май 2005. С. 172.

[328] О научной деятельности С. М. Никольского (совм. с О. В. Бесовым, С. А. Теляковским). УМН, т. 60, № 6, 2005. С. 5 – 21.

[329] Знание и мудрость в глобализирующемся мире. Фундаментальная взаимосвязь науки и философии. Высшее образование сегодня. № 8, 2005. С. 14 – 20.

[330] Об обобщенной функции спектрального сдвига и связи формул следа Крейна и Гельфанда – Левитана (совм. с Подольским В. Е.). Докл. РАН, т. 402, № 3, 2005. С. 311 – 312.

[331] О неединственности решения системы регуляризованных следов (совм. с Подольским В. Е.). Докл. РАН, т. 402, № 4, 2005. С. 455 – 456.

[332] Научно-методологические проблемы квантовых вычислений (совм. с В. А. Носовым, В. В. Ященко). Сб. «Науные и методологические проблемы информационной безопасности», М., МЦМНО, 2005. С. 7 – 19.

[333] Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2 (совм. с Фазуллиным З. Ю.). Матем. зам., т. 77, № 3, 2005. С. 434 – 448.

[334] Regularized traces of diskrete operators (совм. с Подольским В. Е.). Russian J. of Math. Phys., v. 12, № 4, 2005. P. 451 – 460.

[335] Аналитическая зависимость собственного значения и собственной функции задачи Штурма–Лиувилля от интегрируемого потенциала (совм. с Винокуровым В. А.). Доклады РАН, т. 400. № 4, 2005. С. 439 – 443.

[336] Видеоокулографическая регистрация реадаптации торсионного вестибуло-окулярного рефлекса к условиям земной гравитации (совм. с Александровым В. В. и др.). Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. № 2, 2005. С. 43 – 46.

[337] Максиминное тестирование качества визуального управления устройством спасения космонавта (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). Вестник Московского государственного университета леса - Лесной вестник. № 4 (40), 2005. С. 6 – 11.

[338] О биомехатронике. Мобильные роботы и мехатронные системы. ч.1 (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). М.: Изд-во МГУ , 2005. С. 53 – 60.

[339] Математическая модель канало-отолитовой реакции на поворот вестибулярного аппарата в гравитационном поле (совм. с Александровым В. В. и др.). Фундаментальная и прикладная математика, М., 11, № 7, 2005. С. 207 – 220.

[340] Тестирование точности управления устройством спасения космонавта (совм. с Александровым В. В. и др.). Фундаментальная и прикладная математика. Том 11, вып 8, 2005. С. 165 – 174.

[341] Качественный анализ в задаче о полете тела (болида) (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения. Труды 2-й Меджнарод. научной конф. Саратов, 2005. С. 26 – 27.

[342] О движении в среде неоднородного шара (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Современые методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Аннот. докладов IV научной конф. Волжского регион. центра РАРАН (г. Саров, 07-09 июня 2005 г.). С. 21.

[343] О моделировании движения космического тела в атмосфере (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Материалы конференции «Астероидно-кометная опасность - 2005». Спб, 2005. С. 220 – 221.

[344] К вопросу о моделировании полета болидов. Фундаментальная и прикладная математика (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). М.: Изд-во «Открытые системы». Т.11, выпуск 7, 2005. С. 63 – 71.

[345] Искусственный тактильный механорецептор. Теория, опыт создания, экспериментальная апробация (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Технология живых систем, т.2, № 4 – 5, 2005. С. 8 – 15.

[346] Асимптотика собственных чисел и формулы следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2 (совм. с З. Ю. Фазуллиным). Математические заметки. Т. 77, вып. 3, 2005. С. 434 – 448.

[347] Аналитическая зависимость собственного значения и собственной функции задачи Штурма–Лиувилля от интегрируемого потенциала (совм. с Винокуровым В. А.). Докл. Рос. акад. наук. Т.400, № 4, 2005. С. 439 – 443.

[348] Регуляризованные следы дискретных операторов (совм. с Подольским В. Е.). Тр. Инст. мат. и мех. Ур. Отд. РАН, т. 12, № 2, 2006. С. 109 – 125.

[349] Следы операторов (совм. с Подольским В. Е.). УМН, т. 61, № 5, 2006. С. 89 – 156.

[350] Современное состояние теории задачи Штурма–Лиувилля (совм. с Винокуровым В. А.). Текст доклада на международной конференции «Тихонов и современная математика», Москва, 19-25 июня, 2006. С. 283 – 285.

[351] Обратная задача Штурма-Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Обратные задачи в приложениях. Коллективная монография под общ. ред. проф. С.М. Усманова. Бирск: БирГСПА, 2006. С. 16 – 46.

[352] Обратная задача Штурма-Луивилля. Теоремы единственности и контрпримеры (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Доклады Академии наук. Т. 411. № 6, 2006. С. 747 – 750.

[353] О движении в среде неоднородного шара (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Труды IV научной конф. Волжского регион. центра РАРАН (г. Саров, 2005 г.). Т.1, 2006. С. 92 – 98.

[354] О движении тела в верхних слоях атмосферы (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Актуальные проблемы Российской космонавтики. Материалы XXX академических чтений по космонавтике. Москва, 2006. С. 76 – 77.

[355] Теория тестирования логических устройств (совм. с В. Б. Кудрявцевым и др.). - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 156 с.

[356] Владимир Александрович Кондратьев (к 70-летию со дня рождения) (совм. с О. В. Бесовым, В. С. Владимировым и др.). Успехи мат. наук. Т.61, вып.6 (372), 2006. С. 195 – 202.

[357] О движении тела в верхних слоях атмосферы (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем. №1(23), v.12, 2007. С. 68 – 75. On body motion in the upper atmosphere. Actual problems of aviation and aerospace systems. P. 76 – 83.

[358] О режиме винтового торможения тела в сопротивляющейся среде (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXI академических чтений по космонавтике. М, 2007. С. 96.

[359] On bolide flight modelling (совм. с Окуневым Ю. М. и др.). Journal of Mathematical Sciences. Springer New York. V.146, № 3, 2007. P. 5840 – 5845.

[360] О связи формул следа Крейна и Гельфанда – Левитана (совм. с Подольским В. Е.). XXII международная конференция им. И. Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Сб. тезисов, Москва, 21 – 27 мая, 2007. С. 268.

[361] Разрешимость обратной задачи Штурма-Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Доклады Академии наук. Т. 412. № 1, 2007. С. 26 – 28.

[362] A Mathematical Model of the Response of the Semicircular Canal and Otolith to Vestibular System Rotation under Gravity (совм. с Александровым В. В. и др.). Journal of Mathematical Sciences, Vol.146, № 3, 2007. P. 5938 – 5947.

[363] Accuracy testing of control for an astronaut saver (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). Journal of Mathematical Sciences, Vol. 147, № 2, 2007. P. 6662 – 6667.

[364] Устройство для исследования плотности ткани при эндоскопическом обследовании (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Патент на изобретение - приоритетная справка № 2008131481.

[365] Разработка технологий и создание опытных образцов искусственных тактильных механорецепторов для эндоскопии (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Федеральное агентство по науке и инновациям. Материалы итоговой конференции по результатам выполнения мероприятий за 2007 год в рамках приоритетного направления «Живые системы» ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы». М., Институт молекулярной биологии им. В.А.Энгельгардта РАН, 2007. С. 251 – 252.

[366] Устройство тактильного исследования плотности ткани при эндоскопическом обследовании (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Патент на изобретение - приоритетная справка № 2008131482.

[367] Математика и развитие человечества. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. - М. : [б. и.], 2007. - 19 с.

[368] О проблеме возникновения автоволн в параболических системах с малой диффузией (совм. с А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым). Матем. сб., т. 198, вып.11, 2007. С. 67 – 106.

[369] Асимптотика спектра и формулы следов для дифференциальных операторов с неограниченными коэффициентами (совм. с Х. Х. Муртазиным, Р. З Тулькубаевым). Доклады Российской академии наук. Т. 416, № 6, 2007. С. 740 – 744.

[370] Информационно-математические модели и технологии обработки и интерпретации многоспектральных космических изображений Земли (совм. с В. В. Козодеровым). Вестник Калужского университета. - Калуга, № 3, 2007. С. 16 – 27.

[371] Обратная задача Штурма-Луивилля с обобщенными периодическими краевыми условиями (совм. с Султанаевым Я. Т., Ахтямовым А. М.). Доклады Академии наук. Т. 421. № 5, 2008. С. 599 – 601.

[372] Следы операторов с относительно компактным возмущением (совм. с Подольским В. Е.). Дифф. уравн., т. 44, № 5, 2008. С. 691 – 695.

[373] Математическая модель формирования выходной информации в гравитоинерциальном механорецепторе при падении в сагиттальной плоскости (совм. с Александровым В. В. и др.). Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, № 6, 2008.

[374] О гравитационно-инерциальном механизме ориентирования у птиц и других позвоночных животных (совм. с Александровым В. В. и др.). Доклады Академии наук, т. 419, № 5, 2008. С. 712 – 714.

[375] Максиминное тестирование качества управления устройством спасения космонавта (совм. с Александровым В. В., Лемаком С. С. и др.). Математические вопросы кибернетики, вып. 16 , М: Физматлит, 2008. С. 23 – 32.

[376] Устройство передачи и отображения тактильной информации при эндоскопическом исследовании плотности ткани (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Патент на изобретение - приоритетная справка № 2008131480.

[377] Программа обработки и отображения тактильной информации искусственных механорецепторов для эндоскопии (совм. с Соколовым М. Э. и др.). Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2008615024.

[378] Следы обыкновенных дифференциальных операторов. Труды межд. конф., посв. 85-летию Л. Д. Кудрявцева «Функциональные пространства, дифференциальные операторы, проблемы математического образования». М.; Физматлит, 2008. С. 199 – 217.

[379] Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау (совм. с А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым). Успехи математических наук. М., т. 63, вып. 2 (380), 2008. С. 21 – 84.

[380] Слово о Московском университете. Избранные доклады, речи, статьи, интервью. 1978-2008. В 2 т. М.; Изд-во МГУ, 2009.

1. Функциональный анализ. Теория операторов.

О БАЗИСНОСТИ РИССА ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

К.Х.Абдрашитов (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Рассматривается спектральная задача

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1), \tag{3}$$

где $q(x)$ - вещественная суммируемая функция, a_j, b_j, c_j, d_j, $j = 1,2$ - вещественные числовые коэффициенты, $\lambda \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть выполнено условие*

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет бесконечное число собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, причем все они простые, за исключением, быть может, одного или двух.

Пусть $\Lambda = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ - система нормированных собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3), а Λ_{nm} - система, получающаяся из Λ удалением двух собственных функций y_n и y_m, отвечающих простым собственным значениям. Тогда Λ_{nm} образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$ в том и только том случае, когда определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_0y_m(0) - c_0y'_m(0) & a_0y_l(0) - c_0y'_l(0) \\ a_1y_m(1) - c_1y'_m(1) & a_1y_l(1) - c_1y'_l(1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

В случае $D = 0$ система Λ_{nm} не полна и не минимальна в $L_2(0,1)$.

В случае $\delta_0 < 0$, $\delta_1 > 0$ все собственные значения вещественные и простые. В случае $\delta_0\delta_1 > 0$ все собственные значения задачи вещественные и простые, за исключением, быть может, либо одной пары комплексных (невещественных) сопряженных простых собственных значений, либо одного непростого вещественного. В случае $\delta_0 > 0$, $\delta_1 < 0$ задача имеет не более двух непростых собственных значений. При $\delta_0 > 0$, $\delta_1 < 0$, для того чтобы все $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ были простыми, достаточно, чтобы нашлось четыре различных комплексных (невещественных) собственных значения.

Аналогичные вопросы изучались ранее Е.И. Моисеевым и Н.Ю. Капустиным для задачи (1), когда $q(x)$ - непрерывная и неотрицательная функция на [0,1] и краевые условия имеют вид:

$$y(0) = 0, \quad (a - \lambda)y'(1) + \lambda b y(1) = 0,$$

где a,b - вещественные коэффициенты и $ab < 0$.

Работа выполнена под руководством проф. А.А. Шкаликова при поддержке гранта РФФИ №07-01-00283.

C^*-АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ МНОГОМЕРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Авсянкин О. Г. (г. Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.rsu.ru

В пространстве $L_2(R^n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{R^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условию

$$|k(e_1,y)||y|^{-n/2} \in L_1(R^n), \quad e_1 = (1,0,\dots,0).$$

Обозначим через $\mathbf{B}$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами вида $\lambda I - K$ и всеми операторами M_α, $\alpha \in R$, где M_α — оператор умножения на осциллирующую функцию $|x|^{i\alpha}(= e^{i\alpha \ln |x|})$. Отметим, что коэффициенты $|x|^{i\alpha}$ играют в теории операторов с однородными ядрами ту же роль, что и коэффициенты вида $e^{i\alpha t}$ в теории операторов свертки.

Для исследования C^*-алгебры $\mathbf{B}$ используется подход, основанный на теории C^*-алгебр, порожденных динамическими системами. Для алгебры $\mathbf{B}$ строится операторнозначное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий обратимости и нетеровости операторов из этой алгебры.

Кроме того, выделены некоторые классы операторов из алгебры $\mathbf{B}$, для которых указано эффективное скалярное условие обратимости. В частности, показано, что необходимым и достаточным условием обратимости и нетеровости оператора

$$B = \lambda I + K_1 + M_\alpha K_2,$$

где K_1 и K_2 — операторы вида (1), является условие

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda + \sigma_{K_1}(m,\xi) \neq 0, \quad \forall\,(m,\xi) \in Z_+ \times R,$$

где $\sigma_{K_1}(m,\xi)$ — символ оператора K_1.

МАТРИЧНО–ЗНАЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ФУНКЦИИ НЕВАНЛИННЫ

Азизов Т.Я. (Воронежский госуниверситет)
azizov@math.vsu.ru

Сообщение основано на совместной работе с А. Дайксма (Гронинген), П. Йонасом (Берлин) и К.-Х. Ферстером (Берлин).

Установлена связь между гиперболическими матрично–значными пучками и функциями Неванлинны. В частности, доказано: Пусть M — рациональная $n \times n$ матрично–значная функция. Тогда M является обратной к слабо гиперболическому (гиперболическому) $n \times n$ матричному полиному L вида $L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + c$ тогда и только тогда, когда

(i) множество нулей $\mathrm{nul}\,(M) = \emptyset$,

(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 M(\lambda) = I_n$, и

(iii) существует точка $c \in \mathbb{R}$ (соответственно $c \in \mathrm{hol}\,(M) \cap \mathbb{R}$) такая, что $-(\lambda - c)M(\lambda)$ — функция Неванлинны.

Если эти условия выполнены и $[a_2, b_2]$, $[a_1, b_1]$ суть левая и правая корневые зоны пучка L, то c принадлежит $[b_2, a_1]$ (соответственно (b_2, a_1)) .

Работа поддержана РФФИ, грант 08-01-00566-а.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аксенов Н.А. (Орловский государственный университет)
aksenovaa@inbox.ru

Пусть H – счетно-полное локально выпуклое пространство с мультинормой $\{\|\cdot\|_p\}$, и пусть $A : H \to H$ – линейный непрерывный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au, \tag{1}$$

где $u(t)$ — векторнозначная функция комплексного аргумента. Ставится задача: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(a) = x_1,\ u(b) = x_2,\ a \neq b,\ x_1, x_2 \in H. \tag{2}$$

Введем множество $M = \{x \in D_\infty(A) : \beta_p(x) \leq 0 \forall p$, причем при $\beta_p(x) = 0\ \alpha_p(x) < \pi^2/|b-a|^2\}$. Здесь $\beta_p(x)$ и $\alpha_p(x)$ – соответственно операторный p-порядок и операторный p-тип вектора x относительно оператора A, $D_\infty(A)$ – область определения оператора A.

Теорема. *$\forall x_k \in M$, $k = 1, 2$, задача (1)-(2) имеет единственное решение. Оно является целой вектор-функцией $u(t)$ со значениями в H и определяется формулой*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_1)}{(2n)!}(t-a)^{2n} + \frac{1}{b-a} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{c_m}{(2n+1)!} A^{m+n}(x_2)(t-a)^{2n+1} -$$

$$-\frac{1}{b-a} \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n+1)!(2k)!} A^{k+m+n}(x_1)(t-a)^{2n+1},$$

$$c_0 = 1,\ c_m = \frac{2(-1)^m(2^{2m-1}-1)(b-a)^{2m}}{(2m)!} B_m,\ m \geq 1,$$

B_m – числа Бернулли.

Литература

1. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям. ДАН СССР, 1986, т. 228, №1, с. 27-31.
2. Громов В.П. Задача Коши в пространстве Фреше. Ученые записки ОГУ, Орел, 2002, вып. 3, с. 5-21.
3. Мишин С.Н. Уравнения вида $\varphi(A)(x) = y$. Ученые записки ОГУ, Орел, 2005, вып. 5, с. 62-78.

О РЕГУЛЯРНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Алимов Ш. А. (МГУ им. М.В.Ломоносова, Ташкентский филиал)

Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть E_λ – соответствующее разложение единицы (см. [1]). Для любого $\alpha \geq 0$ введем нормальные средние Рисса $E_\lambda^\alpha(A) = \varphi(A/\lambda)$, где $\varphi(t) = (1-t)_+^\alpha$.

Теорема. *Пусть возрастающая при $t > 0$ функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию Дини, а ее производные удовлетворяют условию $t^k|\mu^{(k)}(t)| \leq const \cdot \mu(t)$, $k = 1, 2, ..., [\alpha] + 3$. Тогда для любых $\tau \geq 0$ и $\alpha \geq 0$ выполняется равенство*

$$(I + A)^{-\tau}\mu(A)E_\lambda^\alpha(A) = (1+\lambda)^{-\tau}\mu(\lambda)E_\lambda^\alpha(A) +$$

$$+ O(1)(1+\lambda)^{-\tau}\mu(\lambda)E_\lambda^{\alpha+1}(A) + \int_0^1 E_{\lambda t}^{\alpha+1}(A)\rho_\lambda(t)\,dt,$$

где $\rho_\lambda(t) = O(t^{-1}) \cdot (1+\lambda t)^{-\tau} \cdot \mu(\lambda t)$.

Данная теорема является обобщением результата В. А. Ильина [2] о суммируемости спектральных разложений, связанных с эллиптическими операторами. Из полученного более общего представления функции от оператора следуют теоремы абелева типа о регулярности непрерывных методов суммирования, а также теорема тауберова типа об условиях, позволяющих вывести сходимость средних Рисса порядка α из сходимости средних порядка $\beta > \alpha$.

Одно из следствий полученных результатов заключается в доказательстве того, что при $\alpha > 0$ и $r > 0$ сходимость средних Рисса $E_\lambda^\alpha(A)f$ эквивалентна сходимости средних $E_\lambda^\alpha(A^r)f$. Данный результат позволяет свести изучение средних Рисса, связанных с эллиптическими операторами произвольного порядка m, к изучению средних, отвечающих (псевдодифференциальным) операторам первого или второго порядка (см. [3]).

Литература

1. В. А. Садовничий, Теория операторов, Москва, «Высшая школа», 1999.
2. В. А. Ильин, Спектральная теория дифференциальных операторов, Москва, «Наука», 1991.
3. L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., 1968, v. 121, No 3-4, pp. 193-218.

ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Антоневич А.Б. (Минск, Беларусь), Маковска Ю. (Белосток, Польша)
E-mail: antonevich@bsu.by, justajakubowska@gmail.com

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве $F(X)$ функций на множестве X, называется *оператором взвешенного сдвига* , если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть заданное отображение, $a_0(x)$ – заданная функция на X. Одной из основных задач является выявление зависимости свойств оператора B от динамики отображения α.

Оператор $B - \lambda I$ может быть односторонне обратимым при λ, принадлежащим спектру оператора. Для произвольных операторов взвешенного сдвига условия односторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ пока неизвестны.

Рассмотрен конкретный класс операторов B взвешенного сдвига, порожденных отображениями топологического пространства X, имеющими конечное число неподвижных точек $F(0), F(2), \ldots, F(m)$ и такими, что траектория каждой точки стремится к одной из неподвижных точек. Динамические свойства отображения $\alpha : X \to X$ будем описывать с помощью следующего ориентированного графа $\mathbf{G}$: вершинами графа являются неподвижные точки, ориентированное ребро $(F(i), F(j))$ включается в граф в том случае, когда в любой окрестности точки $F(i)$ существует точка, траектория которой стремится к $F(j)$. В предшествующих работах был изучен случай, когда граф $\mathbf{G}$ задает линейный порядок на множестве неподвижных точек.

По оператору b строится т.н. приведенный коэффициент $a(x)$. При заданном λ обозначим

$$\mathbf{G}_\lambda^- = \{F(k) : |a(F(k)| < |\lambda|\}, \quad \mathbf{G}_\lambda^+ = \{F(k) : |a(F(k)| > |\lambda|\}.$$

Теорема. *Оператор $B - \lambda I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда*

1) $|\lambda| \neq |a(F(k))|$;

2) *если существует ребро, соединяющее точку $F^- \in G_\lambda^-$ с точкой $F^+ \in G_\lambda^+$, то оно ориентировано от точки F^- к точке F^+.*

РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ В МОДУЛЯХ ГИЛЬБЕРТА — КАПЛАНСКОГО НАД L_0

Арзиев А.Д. (г. Ташкент.)
79Alik@rambler.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с полной конечной мерой μ, $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – кольцо классов равных п.в. комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ), $L_0^h(\Omega) = \{f \in L_0(\Omega) : \overline{f} = f\}$, H — модуль Гильберта – Капланского (МГК) над L_0 ([1]).

Элемент $\alpha \in L_0$ называется строго положительным (обозначение $\alpha \gg 0$), если $\alpha(\omega) > 0$ для п.в. $\omega \in \Omega$ ([2]).

Оператор $A : H \to H$ называется

- L_0 - *линейным*, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ для всех $\alpha, \beta \in L_0$, $x, y \in H$.
- L_0 - *ограниченным*, если существует такой $k \in L_0$, что $|Ax| \leq k|x|$ при всех $x \in H$.

В [1] определен сопряженный оператор A^* к $A \in B(H)$, где $B(H)$ – пространство всех L_0-линейных L_0-ограниченных операторов.

Оператор $A \in B(H)$ называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Пусть $A = A^* \in B(H)$ и $m = \inf\limits_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle$, $M = \sup\limits_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle$, $m, M \in L_0^h(\Omega)$.

Теорема. *Каждый самосопряженный оператор A порождает семейство $\{E_\lambda\}$ проекторов, где $\lambda \in L_0^h(\Omega)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. если $AC = CA$, то $E_\lambda C = CE_\lambda$ для любого $\lambda \in L_0^h(\Omega)$, где $C \in B(H)$;

2. $E_\lambda A \le \lambda E_\lambda$, $\lambda(E - E_\lambda) \le A(E - E_\lambda)$ *для всех* $\lambda \in L_0^h(\Omega)$*;*

3. если $\lambda \ll \mu$, *то* $E_\lambda \le E_\mu$*;*

4. $\langle E_\mu x, x\rangle = \sup\limits_{\lambda \ll \mu}\langle E_\lambda x, x\rangle$ *для всех* $x \in H$*;*

5. $E_\lambda = 0$, *если* $\lambda \le m$*;* $E_\lambda = E$, *если* $M \ll \lambda$.

Литература

1. Курага А. Г. Мажорируемые операторы //Москва: Наука.—2003, 619 с.
2. Ганиев И.Г., Арзиев А.Д. Спектр самосопряженного оператора на модулях Гильберта-Капланского над L_0 //Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике. Владикавказ.—2007. С. 7-23

О ТОЧНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРОСТРАНСТВА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

Беляев А.А. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Пусть $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ — пространства бесселевых потенциалов, $s \in \mathbb{R}, p \geqslant 1$. Через $M[k,-l]$ обозначим пространство мультипликаторов из пространства $H_2^k(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H_2^{-l}(\mathbb{R}^n)$. Это пространство состоит из обобщенных функций $f(x)$, для которых

$$\|f(x)\phi(x)\|_{-l,2} \leqslant C\|\phi(x)\|_{k,2}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{s,p}$ означает норму в пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$.

В работах [1,2] дана характеризация пространств мультипликаторов M[k,-l] в терминах пространств $H^s_{p,unif}(\mathbb{R}^n)$ в случае $k > \frac{n}{2}$, а в случае $0 < k < \frac{n}{2}$ доказана справедливость вложений с оценками для норм

$$H^{-l}_{\frac{n}{k},unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[k,-l] \subset H^{-l}_{2,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Напомним, что пространство $H^s_{p,unif}(\mathbb{R}^n)$ состоит из функций $f \in H^s_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна величина

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\|f(x)\eta(x-z)\|_{s,p},$$

определяющая норму в этом пространстве. Здесь $\eta(x)$ — фиксированная гладкая функция с финитным носителем, равная 1 при $|x| < 1$.

Наша цель — показать, что эти вложения точны. Точность понимается в следующем смысле.

Теорема.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists u_\alpha \in H^{-l}_{\frac{n}{k}-\varepsilon,unif}(\mathbb{R}^n), \text{но} u_\alpha \notin M[k,-l]$$

и

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists v_\alpha \in M[k,-l], \text{но} v_\alpha \notin H^{-l}_{2+\varepsilon,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство основано на применении теорем вложения для пространств Бесова в частном случае пространств бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Литература

1. М.И.Нейман-Заде, А.А.Шкаликов, "Strongly elliptic operators with singular coefficients."// Russian Journal Of Mathematical Physics, vol.13, issue 1 (2006), pp.70-78.
2. Дж.-Г.Бак, А.А.Шкаликов, "Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шредингера с потенциалами-распределениями."// Математические заметки, **71**(5) , (2002), с. 643-651.

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Брук В.М. (Саратов)
vladislavbruk@mail.ru

Пусть X – банахово пространство, $U(t)$ – сильно непрерывная полугруппа в X $(t > 0)$, A – генератор полугруппы (вообще говоря, A – линейное отношение (см. [1])). Слабым решением включения

$$y'(t) \in Ay(t) \quad (t > 0) \tag{1}$$

называется функция y со свойствами: а) $y \in L_{1,loc}(X; 0, \infty)$; б) для любой финитной бесконечно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функции $\varphi(t)$ и любых упорядоченных пар $\{g, g_1\} \in A^* \subset X^* \times X^*$ справедливо равенство $\int_0^\infty \varphi'(t)(y(t), g)dt = \int_0^\infty \varphi(t)(y(t), g_1)dt$ (здесь $(\cdot,\cdot)$ - билинейная форма, определяемая двойственностью между X и X^*).

Пусть $X_0 = X/\ker U$ - факторпространство, $\pi_0 : X \to X_0$ - соответствующее каноническое отображение, $U_0(t) : X_0 \to X$ - оператор, определяемый равенством $U_0(t)\pi_0 x = U(t)x$. Через Q_- обозначим локально выпуклое пространство, являющееся пополнением X_0 по системе полунорм $p_\alpha(\pi_0 x) = \|U_0(\alpha)\pi_0 x\|$ $(\alpha > 0, x \in X)$. При любом $t > 0$ оператор $U_0(t)$ допускает непрерывное продолжение $U_-(t) : Q_- \to X$. Положим $\tilde{U}_-(t) = \pi_0 U_-(t)$.

Теорема 1. *Операторная функция $t \to \tilde{U}_-(t)$ является сильно непрерывной полугруппой в Q_-. При любом $x \in Q_-$ в пространстве Q_- существует предел $\lim\limits_{t\to+0} \tilde{U}_-(t)x = x$.*

Теорема 2. *При любом $x \in Q_-$ функция $U_-(t)x$ является слабым решением включения (1).*

Теорема 3. *Если $y(t)$ - слабое решение включения (1), то в Q_- существует предел $\lim\limits_{t\to+0} \pi_0 y(t) = y_-$ и $\pi_0 y(t) = \pi_0 U_-(t)y_-$.*

Теорема 4. *Пусть в (1) A - старший генератор (см. [1]). Функция y тогда и только тогда является слабым решением (1), когда y можно представить в виде $y(t) = U_-(t)y_- + v(t)$, где $y_- = \lim\limits_{t\to+0} \pi_0 y(t)$, а v - функция из $L_{1,loc}(X; 0, \infty)$ со значениями в $\ker U \cap \ker A$.*

Для полугруппы класса $\mathbf{C}_0$ описание слабых решений дано в [2].

Литература

1. Баскаков А.Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Матем. заметки, 2008. Т.84, № 2. С.175-192.
2. Горбачук М.Л., Горбачук В.И. Про одне узагальнения еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн., 2000. Т. 52, №5. С.608 - 615.

ДИНАМИКА ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ И МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ

Булинский А.В. (Московский физико-технический институт)
bulinski@mail.mipt.ru

Теория открытых квантовых систем традиционно широко применяется в квантовой статистической механике, квантовой оптике и др. областях. В последнее десятилетие начался новый этап в изучении эволюции таких систем в связи с развитием квантовой теории информации и появлением прообразов квантовых вычислений, см., например, [1],[2]. Аналогия между динамическими преобразованиями и каналами передачи информации отражается и в использовании математического аппарата некоммутативных C^*- и W^*-динамических систем.

Мы рассматриваем каналы, сохраняющие или разрушающие сцепленность состояний, используя подход [3]. В продолжение [4] основное внимание уделяется также асимптотическим свойствам моделей динамики, отражающим актуальные для квантовых каналов явления диссипации и декогерентности (дефазировки), обусловленные взаимодействием с окружением. Целью работы является распространение результатов, установленных для (полугрупп) вполне положительных отображений полных матричных алгебр, на случай общих алгебр фон Неймана в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Получены достаточные условия, обеспечивающие возможность таких обобщений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-01-00164а.

Литература

1. R.Alicki, M.Fannes. Quantum Dynamical Systems. Oxford. Oxford University Press, 2001.
2. А.С.Холево. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.
3. E.Stormer. Separable states and positive maps. J. Funct. Anal., 2008, v.254, p.2303-2312.
4. А.В.Булинский. Асимптотика динамики открытых квантовых систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Обозр. прикл. и промышл. математики, 2008, т.15, в.4, с.637-638.

ВОЛЬТЕРРОВЫЕ НА СИСТЕМЕ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРЫ

Бурлаков Е. О., Жуковский Е. С. (Тамбов)
zukovskys@mail.ru

Важнейшим свойством динамических объектов является зависимость их состояний в данный момент времени от внешних условий и внутренних состояний только в предыдущие моменты времени, т.е. от "прошлого", и независимость от "будущего". Это свойство легло в основу известного определения А.Н. Тихонова вольтерровых операторов. Теоретический интерес и многочисленные приложения имеют обобщения понятия вольтерровости, предложенные в работах Т. Andô, И.Ц. Гохберга, М.Г Крейна, П.П. Забрейко, В.И. Сумина, С.А. Гусаренко и др. Большинство предлагаемых определений означает, что вольтерровый оператор является линейным и обладает цепочкой инвариантных подпространств. В докладе предлагается достаточно общее определение свойства вольтерровости, пригодное как для линейных, так и нелинейных операторов. Показано, что для операторов, удовлетворяющих предлагаемому определению, верны фундаментальные утверждения теории классических интегральных операторов Volterra.

Пусть B – банахово пространство, на котором задана система $\mathcal{V}$ отношений эквивалентности $v(\gamma)$, $\gamma \in [0,1]$, удовлетворяющая условиям:

1. $\gamma = 0$ соответствует отношение $v(0) = B^2$;
2. $\gamma = 1$ соответствует отношение равенства;
3. если $\gamma > \eta$, то $v(\gamma) \subset v(\eta)$;
4. при каждом $\gamma \in (0,1)$, для любых элементов $x, \widehat{x}, y, \widehat{y} \in B$ и всякого числа λ, из $(x,\widehat{x}) \in v(\gamma)$, $(y,\widehat{y}) \in v(\gamma)$ следует
$$(x+y, \widehat{x}+\widehat{y}) \in v(\gamma), \quad (\lambda x, \lambda\widehat{x}) \in v(\gamma).$$

Определение. *Оператор $F : B \to B$ называем вольтерровым на системе $\mathcal{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любых таких $x, y \in B$, что $(x,y) \in v(\gamma)$, имеет место $(Fx, Fy) \in v(\gamma)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00305, CIGENE - Center for Integrative Genetics at Norwegian University of Life Sciences and the Norwegian Research Council.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ С НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бутерин С.А. (Саратовский госуниверситет)
buterinsa@info.sgu.ru

Пусть $\{\rho_{n,j}\}$ – спектры краевых задач L_j, $j = 1,2$, вида

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y(0) + hy(\pi) = y'(0) + hy'(\pi) + \alpha_j y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q_\nu(x) \in W_1^\nu[0,\pi]$ – комплекснозначные функции, h, α_j – комплексные числа, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и для определенности $|h| > 1$, либо $|h| = 1$, но тогда $\mathrm{Re}h\,\mathrm{Im}h \geq 0$. Обозначим $C(x,\rho)$, $S(x,\rho)$ – решения уравнения (1), такие что $C(0,\rho) = S'(0,\rho) = 1$, $C'(0,\rho) = S(0,\rho) = 0$. Пусть ρ_k^0 – собственные значения задачи Дирихле для уравнения (1), занумерованные без учета кратности, а m_k – кратность ρ_k^0. Отметим, что задание $\{\rho_{n,1}\}$, $\{\rho_{n,2}\}$ однозначно определяет все ρ_k^0 и m_k. Рассмотрим функцию $v(\rho) = h(C(\pi,\rho) - S'(\pi,\rho))$ и введем последовательность знаков $\{\sigma_k\}$ следующим образом: $\sigma_k = 0$, если $v(\rho_k^0) = 0$, иначе $\sigma_k = 1$, если $\arg v(\rho_k^0) \in (-\pi, 0]$, и $\sigma_k = -1$, если $\arg v(\rho_k^0) \in (0,\pi]$. Также рассмотрим конечное множество индексов $I := \{k : m_k > 1, \sigma_k = 0\}$. Совокупность спектров $\{\rho_{n,1}\}$, $\{\rho_{n,2}\}$, знаков $\{\sigma_k\}$ и конечного набора чисел $\{\frac{d^\nu}{d\rho^\nu}C(\pi,\rho)|_{\rho=\rho_k^0}\}_{k\in I,\, \nu=\overline{1,m_k-1}}$ будем называть спектральными данными. Рассмотрим следующую *обратную задачу*: по спектральным данным найти коэффициенты краевых задач L_1, L_2. Отметим, что случай вещественных коэффициентов уравнения (1) и самосопряженных краевых условий вида (2) исследовался в [1]. Справедлива теорема единственности.

Теорема 1. *Задание спектральных данных однозначно определяет функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ и коэффициенты h, α_1, α_2.*

Доказательство основано на методе спектральных отображений, изложенном в [2], и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

Литература

1. Набиев И.М. *Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке* // Мат. физ., ан., геом. 2004, т.11, 3, 302–313.
2. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЛА УЗЛОВ КУБАТУРНЫХ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

Васкевич В.Л. (Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН)
vask@math.nsc.ru

Погрешность кубатурной или интерполяционной формулы с N узлами на банаховом пространстве X функций n переменных принято характеризовать с помощью нормы соответствующего функционала (оператора) погрешности l_N [1]. Малые возмущения весов $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ формулы, возникающие при ее компьютерной реализации в силу ошибок округления, приводят к рассмотрению вместо l_N возмущенного функционала (оператора) погрешности $\widehat{l}_N$ с весами $\widehat{c} = (\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \ldots, \widehat{c}_N)$. При этом $|\widehat{c}_k - c_k| \leq \varepsilon_1 |c_k| + \varepsilon_0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где ε_1 и ε_0 — заданные машинные константы, $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_1$. Уклонение нормы $\|\widehat{l}_N \mid X^*\|$ от невозмущенной характеризуется неравенством вида $\left|\|\widehat{l}_N \mid X^*\| - \|l_N \mid X^*\|\right| \leq p_N(X, n) \cdot \varepsilon_1$. С увеличением N норма $\|l_N \mid X^*\|$, как правило, убывает к нулю, в то время как величина $p_N(X, n)$ неограниченно возрастает. Чтобы возмущенная норма $\|\widehat{l}_N \mid X^*\|$ не слишком отличалась от принятого теоретического значения $\|l_N \mid X^*\|$, требуется подчинять число узлов N условию вида $p_N(X, n) \cdot \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}\|l_N \mid X^*\|$. Этому неравенству соответствует, вообще говоря, нелинейное относительно N уравнение. Корень $N_0 = N_0(X, n)$ этого уравнения имеет то практическое значение, что явно указывает порог, до которого имеет смысл увеличивать число узлов формулы с сохранением ее приемлемой и гарантированной точности. В докладе рассматриваются примеры решения пороговых уравнений в случае конкретных функциональных пространств X (типа пространств Соболева). При этом существенно используется информация о константах вложения пространств X в пространство непрерывных функций [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00207 и № 07-01-00585).

Литература

1. Sobolev S.L. and Vaskevich V.L. The Theory of Cubature Formulas, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

2. Васкевич В.Л. Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // СМЖ, Т. 49, 5. 2008. С. 1019–1027.

ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАЛУЮ ДИФФУЗИЮ

Вишик М.И. (ИППИ РАН)
vishik@iitp.ru

1. Система уравнений реакции–диффузии, содержащая малый коэффициент диффузии $\delta > 0$.
2. Траекторный аттрактор этой системы реакции–диффузии.
3. Предельная система уравнений, у которой один коэффициент диффузии равен нулю, и ее траекторный аттрактор.
4. Предел решений и траекторных аттракторов системы реакции–диффузии при $\delta \to 0+$.

Отметим, что для рассматриваемых систем уравнений реакции–диффузии теорема единственности решения начальной задачи не предполагается.

Доклад основан на совместных работах с В. В. Чепыжовым.

Научные исследования выполнены при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00784 и 07-01-00500.

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Вячеславов А. В. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
andrey_msu@hotbox.ru

Рассматривается задача на собственные значения оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y'' + iq(x)y = \lambda y, \qquad y(-\pi/2) = y(\pi/2) = 0,$$

где $q(x) \in C[-\pi/2, \pi/2]$ — нечетная вещественная монотонная функция.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Рассматриваемая задача имеет бесконечное число собственных значений, имеющих асимптотику*

$$\lambda_k = k^2(1 + O(k^{-2})), \qquad k \in N,$$

причем число невещественных собственных значений конечно.

Пусть $y(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ - собственная функция соответствующая вещественному собственному значению λ. Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условию: $q(x) > 0$ при $x > 0$. Тогда между любыми двумя последовательными нулями вещественной части $\varphi(x)$ функции $y(x)$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ есть ровно один нуль мнимой части $\psi(x)$ и наоборот: между двумя последовательными нулями $\psi(x)$ есть ровно один нуль $\varphi(x)$.

Занумеруем числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ в порядке возрастания модулей.

Каждую собственную функцию y_k данной задачи, соответствующую вещественному собственному значению, можно представить в виде $y_k = \varphi_k + i\psi_k$, где функции ψ_k и φ_k вещественные и одна из них четная, а другая нечетная.

Обозначим:

$$\Delta^1_{k,n}(\varepsilon) = (\frac{\pi + 2\pi n}{2k} - \frac{\varepsilon}{k}, \frac{\pi + 2\pi n}{2k} + \frac{\varepsilon}{k}), \quad \Delta^2_{k,n}(\varepsilon) = (\frac{\pi n}{k} - \frac{\varepsilon}{k}, \frac{\pi n}{k} + \frac{\varepsilon}{k}),$$

$$\Delta_k(\varepsilon, \sigma) = (-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{k^{1-\sigma}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{k^{1-\sigma}}).$$

Теорема 2. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\sigma \in (0,1)$ существует k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$ k-я собственная функция задачи y_k имеет представление $y_k = \varphi_k + i\psi_k$, где функции ψ_{2k} и φ_{2k+1} четные, а функции ψ_{2k+1} и φ_{2k} нечетные, обладающие следующими свойствами:*

1) φ_k имеет ровно $(k-1)$ нулей на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, причем для нечетных k нули расположены в интервалах $\Delta^1_{k,n}(\varepsilon/k)$, а для четных k в интервалах $\Delta^2_{k,n}(\varepsilon/k)$.

2)на интервале $\Delta_k(\varepsilon, \sigma)$ нули функции ψ_k находятся в интервалах $\Delta^2_{k,n}(\varepsilon)$ для нечетных значений k, и в интервалах $\Delta^1_{k,n}(\varepsilon)$ для четных значений k, причем внутри каждого интервала находится ровно один нуль функции ψ_k.

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова, поддержана грантом РФФИ №07-01-00283, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2372.2008.1.

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ САМОПОДОБНЫХ ФУНКЦИЙ

Гаганов Н. В., Шейпак И. А.(МГУ им. М.В.Ломоносова)
ngaganov@yandex.ru, iasheip@mech.math.msu.su

В пространстве ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций рассматриваются самоподобные функции, т.е. функции, график которых удовлетворяет условию

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_k \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \text{где}$$

$$G_k \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Здесь $n \geqslant 2$ — натуральное число, а положительные числа $\{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$. Числа $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определены следующим образом: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j$, $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Числа $\{c_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ произвольны, а числа $\{d_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяют условию $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |d_k| < 1$ (что является необходимым и достаточным условием ограниченности самоподобной функции, см. [1]).

В дальнейшем мы рассматриваем самоподобные функции, нормированные условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Теорема 1. *Разрывная самоподобная функция имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n} |d_k| < 1$.*

Теорема 2. *Если* $c_k = 0$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, n$, *то непрерывная самоподобная функция имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{n} |d_k| \leqslant 1$.

Теорема 3. *Если существует число* c_k *отличное от нуля, то непрерывная самоподобная функция имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда функции* $\theta_k(t) = \frac{d_k t + c_k}{a_k}$ *имеют общую неподвижную точку.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-01-00283 и фонда «Поддержки ведущих научных школ», грант № НШ-2372.2008.1.

Литература

1. И. А. Шейпак *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$// Математические заметки, 2007, т.81, вып. 6, 924-938

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Голованева Ф.В., Шабров С.А. (Воронеж)
shaspoteha@mail.ru

В работе изучается краевая задача

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + qu = f, & (1) \\ pu''(0) - \gamma_1 u'(0) = 0, pu''(l) + \gamma_2 u'(l) = 0, & (2) \\ (pu'')'(0) - ru'(0) + \gamma_3 u(0) = 0, & (3) \\ (pu'')'(l) - ru'(l) - \gamma_4 u(l) = 0. & (4) \end{cases}$$

Здесь производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а четвертого — по Радону–Никодиму [1]; $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$ — функции ограниченной на $[0;l]$ вариации; $q(x)$ и $f(x)$ — σ-суммируемые функции; $\gamma_i \geq 0$ $(i = 1,2,3,4)$. Уравнение (1) определено почти всюду (по мере σ) на специальном расширении $\overline{[0;l]}_\sigma$, где каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$ (которая порождает меру σ) заменена упорядоченной тройкой собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Построение множества $\overline{[0;l]}_\sigma$ можно найти в [1]. Решение уравнения (1) (как впрочем и задачи (1)-(4)) мы будем искать в классе

$$E = \left\{ u(x) \in C^{(2)}[0;l] : \; pu'' \in AV[0;l]; ru'(x), (pu'')' \in AV_\sigma[0;l] \right\},$$

где $C^{(2)}[0;l]$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[0;l]$ функций; $AV[0;l]$ и $AV_\sigma[0;l]$ — абсолютно и σ-абсолютно непрерывных на $[0;l]$ функций соответственно.

Используя концепцию, предложенную Ю. В. Покорным [2] (и развитую для дифференциальных второго порядка в [1], [3]), для краевой задачи (1)–(4) получены достаточные условия положительности функции Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07–01–00397).

Литература

1. Покорный и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

2. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. - 1999. - Т. 364, 2. - С. 167–169.

3. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач. Успехи математических наук., Т. 63, вып. 1(379), 2008, С. 111–154.

ДИССИПАТИВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Горюнов А. С. (Институт математики НАН Украины, Киев)
goriunov@imath.kiev.ua

Для произвольного натурального m обозначим через $W_2^{[m]}$ комплексное линейное пространство функций $y(x) \in L_2([a,b], \mathbf{C}) =: L_2$, для которых имеют смысл следующие квазидифференциальные выражения: $D_0 y := y$, $D := -i\frac{d}{dx}$, $D_k y := D(D_{k-1}y) + \sum\limits_{s=0}^{k-1} p_{k,s}(x) D_s y$, $k = \overline{1,m}$, где $p_{k,s}(x) \in L_1([a,b], \mathbf{R})$. Они содержат, в частности, некоторые дифференциальные выражения с коэффициентами-распределениями.

Рассмотрим в пространстве L_2 минимальный оператор $L_{min}y := D_m y$, $Dom(L_{min}) := \{y \in W_2^{[m]} : D_k y(a) = D_k y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1}\}$. Оператор L_{min} является плотно заданным замкнутым симметрическим оператором в гильбертовом пространстве L_2 с индексом дефекта (m, m).

Теорема. *Тройка* $(C^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* Γ_1, Γ_2 *- линейные отображения из* $W_2^{[m]}$ *в* C^m, *такие, что для* $m = 2n$

$\Gamma_1 y := i \cdot col\,(D_{2n-1}y(a), ..., D_n y(a), -D_{2n-1}y(b), ..., -D_n y(b))$,

$\Gamma_2 y := col\,(D_0 y(a), ..., D_{n-1}y(a), D_0 y(b), ..., D_{n-1}y(b))$,

а для $m = 2n + 1$

$\Gamma_1 y := i \cdot col\,(D_{2n}y(a), ..., -D_{n+1}y(b), iD_n y(b) + D_n y(a))$,

$\Gamma_2 y := col\,\left(D_0 y(a), ..., D_{n-1}y(b), \left(-\frac{1}{2} + i\right) D_n y(b) + \left(1 - \frac{1}{2}i\right) D_n y(a)\right)$, *является пространством граничных значений оператора* L_{min}.

Из этой теоремы и известных результатов [1] вытекает биективное описание всех максимальных диссипативных, максимальных аккумулятивных и самосопряженных расширений оператора L_{min}, а также его обобщенных резольвент. Они задаются каноническими граничными условиями, содержащими векторы $\Gamma_1 y$, $\Gamma_2 y$. Подробнее см. [2].

Литература

1. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 284 с.

2. Михайлец В. А., Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка. // Доп. НАН України. – 2009. – 5.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ У J-ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Гриднева И.В., Глазкова М.Ю. (Воронеж)
gridneva_irina@bk.ru

Пусть в пространстве Крейна $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ задан J-диссипативный оператор A, являющийся замыканием оператора

$$A' = A|_{(\mathcal{H}^+ \cap \operatorname{dom} A) \oplus (\mathcal{H}^- \cap \operatorname{dom} A)} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}.$$

Скажем, что J-диссипативный оператор A удовлетворяет условию $(\mathbf{S_1})$, если выполнены следующие условия:

(a) $-A'_{22}$ — максимальный диссипативный оператор в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{H}^-, -[\cdot,\cdot]\}$;

(b) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ оператор $(A'_{22} - \lambda)^{-1} A'_{21}$ ограничен и плотно задан в $\mathcal{H}^+$;

(c) замыкание оператора $A'_{12}(A'_{22} - \lambda)^{-1}$ — компактный оператор;

(d) передаточная функция $M(\lambda) = A'_{11} - \lambda - A'_{12}(A'_{22} - \lambda)^{-1} A'_{21}$ — ограниченный плотно заданный в $\mathcal{H}^+$ оператор.

Условие $(\mathbf{S_1})$ было введено А.А. Шкаликовым в [1] и установлен следующий результат:

Теорема. Пусть J-диссипативный оператор $A \in (\mathbf{S_1})$. Тогда существует хотя бы одно максимальное неотрицательное A-инвариантное подпространство $\mathcal{L}^+ \subset \operatorname{dom} A$, $\operatorname{Im}\sigma(A|_{\mathcal{L}^+}) \geq 0$.

Цель нашей работы — развить данный результат и получить новые теоремы об инвариантном подпространстве для J-диссипативного оператора. В частности, доказана

Теорема. Каждое неотрицательное инвариантное относительно $A \in (\mathbf{S_1})$ подпространство допускает расширение до максимального с тем же свойством.

Иследование выполнено при поддержке гранта РФФИ 08-01-00566-а.

Литература

1. А.А. Шкаликов, *Инвариантные подпространства диссипативных операторов в пространстве с индефинитной метрикой*, Труды МИРАН им. В.А. Стеклова, **248** (2005), 294 – 303.

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Давлетов Д.Э. (ТГПУ,Узбекистан)
ddavletov@mail.ru

Пусть X – компакт. Через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных функций $f : X \to R$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой, т. е. с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in R$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \le \psi$ означает, что $\varphi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Определение (см. [2]) *Функционал $\nu : C(X) \to R$ называется:*

1) слабо аддитивным, если для всех $c \in R$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;

2) сохраняющим порядок, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \le \psi$ вытекает неравенство $\nu(\varphi) \le \nu(\psi)$;

3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;

4) положительно-однородным, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $t \ge 0$;

5) полуаддитивным, если $\nu(f + g) \le \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Для компакта X через $O(X)$ обозначается множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Через $OH(X)$ обозначается множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$, а через $OS(X)$ обозначим множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$. Элементы множества $OS(X)$ для краткости назовем полуаддитивными функционалами. Это множество снабжается топологией поточечной сходимости.

Через $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$ обозначим n точечное множество с дискретной топологией.

Теорема. *При $n \ge 3$ в пространстве $OS(\mathbf{n})$ существует несчетная система линейно независимых элементов.*

Следствие. *При $n \ge 3$ в пространствах $OS(\mathbf{n})$ и $O(\mathbf{n})$ существует несчетная система линейно независимых элементов.*

Литература

1. Radul T. H. On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol. – 1998, – V. 39, – №3,– P.609-615.

2. Шапиро Л.Б. Об операторах продолжения функций и нормальных функторах // Вест.МГУ.Сер.мат.-мех.-1992.-№1.-С.35-42.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА J-ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НУЛИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Денисов М.С. (Воронежский государственный университет.)

den_i_sov@rambler.ru

Пусть $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ — пространство с индефинитной метрикой, оператор A, действующий из $D(A)$ в $\mathcal{H}$, где $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, называют J- диссипативным, если: $Im[Ax, x] \ge 0$ для любого x из $D(A)$.

Мы исследуем связь между инвариантными подпространствами J-диссипативного оператора, действующего в пространстве Понтрягина, и количеством и расположением нулей голоморфных функции следующего вида:

$$f(\lambda) = \left\| \begin{matrix} g_{11} + (R_\lambda u_1, u_1) + ie_{11} - \lambda & \dots & g_{\kappa 1} + (R_\lambda u_\kappa, u_1) + ie_{\kappa 1} \\ g_{12} + (R_\lambda u_1, u_2) + ie_{12} & \dots & g_{\kappa 2} + (R_\lambda u_\kappa, u_2) + ie_{\kappa 2} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{1\kappa} + (R_\lambda u_1, u_\kappa) + ie_{1\kappa} & \dots & g_{\kappa\kappa} + (R_\lambda u_\kappa, u_\kappa) + ie_{\kappa\kappa} - \lambda \end{matrix} \right\|$$

Где $R_\lambda = (V - \lambda I)^{-1}$ — резольвента линейного оператора V, действующего в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, причем $-V$ — максимальный диссипативный оператор, $\{u_1, u_2, \dots, u_\kappa\}$ — произвольная конечная система векторов из $\widetilde{\mathcal{H}}$, матрица $G = \|g_{pq}\|$, где $p, q = \overline{1, \kappa}$ диссипативная, матрица $E = \|e_{pq}\|$, где $p, q = \overline{1, \kappa}$, эрмитова и неотрицательная.

Исследование поддержано грантом РФФИ 08-01-00566-а.

Литература.

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. / Азизов Т.Я. Иохвидов И.С //- М.: Наука 1986. - 352 с.

2. Понтрягин Л.С. Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой. / Понтрягин Л.С. // Изв. Ан СССР. Сер. Матем., - 1944. - 8, С. 243-280.

РЕГУЛЯРНОСТЬ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_∞

А.В. Дмитрук (МГУ)

dmitruk@member.ams.org

Система векторов $\{A_i,\ i=1,\dots,l\}$, $\{B_j,\ j=1,\dots,k\}$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ называется *позитивно-линейно независимой*, если не существует чисел $\alpha_i \geq 0$, β_j таких что $\sum_i \alpha_i + \sum_j |\beta_j| > 0$ и $\sum_i \alpha_i A_i + \sum_j \beta_j B_j = 0$. Система измеримых ограниченных m–мерных вектор-функций $\{A_i(t),\ i = 1,\dots,l\}$, $\{B_j(t),\ j=1,\dots,k\}$ на отрезке $\Delta \subset \mathbf{R}$ называется *равномерно позитивно-линейно независимой,* если существует такое число $c > 0$, что для любого $t \in \Delta$ и любого набора чисел $\alpha_i \geq 0$, β_j выполнена оценка

$$\left|\sum_i \alpha_i A_i(t) + \sum_j \beta_j B_j(t)\right| \geq c\left(\sum_i \alpha_i + \sum_j |\beta_j|\right).$$

Пусть даны $\xi_i,\ \eta_j \in L^*_\infty(\Delta)$. По теореме Иосиды-Хьюитта каждый из них есть сумма абсолютно непрерывного (т.е. элемента $L_1(\Delta)$) и сингулярного функционала. Ясно, что $\xi_i A_i$ и $\eta_j B_j$ есть функционалы на $L^m_\infty(\Delta)$.

Теорема 1 (об отсутствии сингулярных составляющих). *Пусть вектор-функции $A_i(t)$, $B_j(t)$ равномерно позитивно-линейно независимы на Δ. Пусть все $\xi_i \geq 0$, и*

$$\sum \xi_i A_i(t) + \sum \eta_j B_j(t) = \lambda(t) \in L^m_1(\Delta).$$

(т.е. линейный функционал над $L^m_\infty(\Delta)$, стоящий слева, является элементом $L^m_1(\Delta)$). Тогда все ξ_i, η_j – элементы $L_1(\Delta)$, т.е. сингулярных составляющих у них нет.

Теорема 1 является ключевым фактом в анализе условий стационарности (и далее, в получении принципа максимума) для задач оптимального управления со смешанными ограничениями вида $\varphi(t,x,u) \leq 0$, $g(t,x,u) = 0$. При этом $A_i(t) = \varphi_i'(t,x^0(t),u^0(t))$, $B_j(t) = g_i'(t,x^0(t),u^0(t))$ – градиенты этих ограничений вдоль оптимальной траектории, см. [1].

Работа поддержана РФФИ, проект 08-01-00685.

Литература

1. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении Мехмат МГУ, 2004.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Долгих И.Н. (Поморский Государственный Университет, Россия)
irinadolgih@rambler.ru

Пусть квазипроизводные заданной функций y и скалярное выражение $l_n y$, определяются с помощью матрицы F_n как в [1]. Рассмотрим частный случай выражения l_n ($n = 2m$), предположим, что $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$ ($m = 2,3,\dots$) — вещественные функции на $[1,+\infty)$ и для всех $x \geq 1$: $p_k(x) := \phi(x)^{2k}(a_k + r_k(x))$; $q_k(x) := \phi(x)^{2k+1}(b_k + s_k(x))$ ($k = \overline{0,m-1}$); $p_m(x) := \frac{\phi(x)^{2m}}{\frac{1}{a_m} + r_m(x)}$, где $a_0, a_1, \dots a_m$, $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$ — вещественные числа и $a_m \neq 0$. Определим матрицы F_{2m} и Λ как и в [1].

Отметим, что уравнение $l_{2m}y = \lambda y$ равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка $\mathrm{y}' = (F_{2m} + \Lambda)\mathrm{y}$, где $\mathrm{y} := colon(y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[2m-1]})$, $y^{[k]}$ – k-ая квазипроизводная функции y, ($k = 0,1,\dots 2m-1$) (см. [1]).

Используя методы работы [1] и накладывая условия на функции $\phi(x), r_k(x), s_k(x) (k = \overline{0,m-1})$ и $r_m(x)$, преобразуем матричное дифференциальное уравнение $\mathrm{y}' = (F_{2m} + \Lambda)\mathrm{y}$ к уравнению, удовлетворяющему условиям задачи 29 (см. [2, гл.III, стр. 118]). Применяя результат этой задачи, получаем асимптотические формулы решений уравнения $l_{2m}y = \lambda y$. Отметим, что в данном случае мы определяем также и асимптотические формулы всех квазипроизводных решений исходного уравнения.

Аналогичные результаты справедливы и для квазидифференциального уравнения нечетного порядка.

Полученные результаты, в частности, позволяют определить дефектные числа симметрического оператора L_0, порожденного выражением l_n.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 07-01-00192-а.

Литература

1. Мирзоев К.А. О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН.– 2001.– Т.380, N5.– С.591– 595.

2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных операторов: Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 475 с.

РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ II ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ $l_2(H)$ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. АБСОЛЮТНО НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ СЛУЧАЙ

Жданов Г.Г. (г. Архангельск)
Grishnan@list.ru

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A_j, B_j - линейные ограниченные операторы в H, причем $A_j^* = A_j$, а B_j^{-1} - существуют и ограничены. Обозначим через $l_2(H)$ гильбертово пространство бесконечных последовательностей $u = (u_0, u_1, ...)$, где $u_j \in H$, таких, что $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \|u_j\|^2 < +\infty$, со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} (u_j, v_j)$, где $u_j, v_j \in H$. Разностное выражение

$$(lu)_j := B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

где $u_{-1} = 0, u_0, u_1, ... \in H$ задаёт незамкнутый симметрический оператор на финитных векторах пространства $l_2(H)$. Замыкание этого оператора обозначим символом L.

На основании работы [1] заключаем, что если операторы A_j, B_j рассматривать как бесконечные матрицы конечного ранга, то дефектными числами оператора L являются всевозможные пары вида (m, n), где $0 \le m, n < +\infty$. Для оператора L имеет место абсолютно неопределённый случай, если $\exists\lambda \in C$, что все решения уравнения $(lu_j) = \lambda u_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ принадлежат пространству $l_2(H)$.

В работе рассмотрена ситуация, когда $m = n = +\infty$, и получено, тесно связанное с ней необходимое и достаточное условие реализации абсолютно неопределённого случая.

Отметим, что эти результаты аналогичны результатам работы [2], где также рассматривается выражение (1), но $A_j, B_j \in M_p(C)$, $A_j^* = A_j$, B_j^{-1} - существует и $u_j \in C^p$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

Работа поддержана грантом РФФИ, код проекта 07-01-00192-а.

Литература

1. Дюкарев Ю.М. О дефектных числах симметрических операторов, порождённых блочными матрицами Якоби//Математический сборник. - 2006. - т.197, 8, С.73 - 100.

2. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Трёхчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределённый случай//Математические заметки. - 1998. - т.63, Вып. 5. - С.709 - 716.

О ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА СЛАБО АДДИТИВНЫХ σ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

А. А. Заитов, Р. Е. Жиемуратов (г. Ташкент)
adilbek_zaitov@mail.ru

Пусть X – компакт, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций $\varphi : X \to R$ с sup-нормой. Функционал $\mu : C(X) \to R$ называется: *1) слабо аддитивным, если* $\mu(\varphi + c_X) = \mu(\varphi) + c$ *для любых* $\varphi \in C(X)$ *и* $c \in R$; *2) сохраняющим порядок, если для любой пары функций* $\varphi, \psi \in C(X)$ *неравенство* $\varphi \le \psi$ *влечет* $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$; *3) нормированным, если* $\mu(1_X) = 1$.

Для компакта X через $O(X)$ обозначается пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов $\mu : C(X) \to R$. Рассмотрим $O(X)$ как подпространство $R^{C(X)}$.

Функционал $\mu \in O(\beta X)$ назовем σ-гладким, если $\mu(\varphi_n) \to 0$ для любой монотонно убывающей последовательности $\{\varphi_n\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Для тихоновского пространства X через $O_\sigma(X)$ обозначим множество всех σ-гладких функционалов $\mu \in O(\beta X)$.

Теорема 1. *Функционал* $\mu \in W(\beta X)$ *является* σ*-гладким тогда и только тогда, когда* $\mu(\chi_K) = 0$ *для всякого замкнутого* G_δ*-множества* $K \subset \beta X \setminus X$.

Теорема 2. *Для всякого тихоновского пространства* X *пространство* $O_\sigma(X)$ *является вещественно полным.*

Теорема 3. *Замыкание* $\overline{X} = \beta X \cap O_\sigma(X)$ *тихоновского пространства* X *в* $O_\sigma(X)$ *является хьюитовым пополнением пространства* X.

Литература

1. T. N. Radul. On the functor of order-preserving functionals. // Comment. Math. Univ. Carol. 39(1998). No. 3. P. 609-615.

2. T. Banach, A. Chigogidze, V. Fedorchuk. On spaces of σ-additive probability measures. //Topology and its Applications 133(2003), P. 139-155.

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА И СТОКСА

Ильин А.А. (Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша)
ilyin@keldysh.ru

Рассматривается спектр $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots$ задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta\varphi_k = \mu_k\varphi_k, \qquad \varphi_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

и спектр $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ оператора Стокса

$$-\Delta v_k + \nabla p_k = \lambda_k v_k, \qquad \operatorname{div} v_k = 0, \qquad v_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\Omega \subset R^n$ произвольная область с ограниченным n-мерным объемом $|\Omega| < \infty$. Кроме того, обозначим $I = \int_\Omega x^2 dx$.

Теорема. *Для $n = 2$ собственные числа оператора Лапласа и оператора Стокса удовлетворяют оценкам снизу*

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \geq \frac{2\pi}{|\Omega|}m^2 + \frac{1}{24}\frac{119}{120}\frac{|\Omega|}{I}m, \qquad \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \geq \frac{2\pi}{|\Omega|}m^2 + \frac{1}{48}\frac{239}{240}\frac{|\Omega|}{I}m.$$

Аналогичные оценки получены для $n = 3$ и $n = 4$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 06-01-00096 и 08-01-00099, и Программы РАН 1 "Современные проблемы теоретической математики"

Литература

1. Li P. and Yau S.–T. On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem. *Commun. Math. Phys.* **8** (1983), 309–318.
2. Melas A. A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2002), 631–636.
3. Ильин А.А. О спектре оператора Стокса. *Функциональный анализ и его приложения* (2009) (в печати); arXiv:0802.4358v1.
4. Ilyin A.A. Lower bounds for the spectrum of the Laplace and Stokes operators. Preprint.

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАВНОМЕРНО J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ И ОПЕРАТОРАМИ СЕМЕЙСТВА Γ_α

Иохвидов Е.И. (Воронежский государственный технический университет)

В пространстве Крейна

$$H = H_+ \oplus H_-, \quad H_\pm = P_\pm H, \quad P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm, \quad P_+ + P_- = I$$

с индефинитной метрикой

$$[x, y] = (Jx, y), \quad J = P_+ - P_-, \quad x, y \in H$$

рассматриваются равномерно J-нерастягивающие операторы A, определяемые условием

$$[Ax, Ax] \leq [x, x] - \delta \cdot ||x||^2 \quad \forall x \in D_A$$

для некоторого $\delta > 0$, а также операторы семейства Γ_α $(\alpha \geq 0)$, определяемые одним из двух равносильных между собой условий:

$$||P_+Ax||^2 - \alpha \cdot ||P_-Ax||^2 \leq \alpha \cdot ||P_+x||^2 - ||P_-x||^2 \quad \forall x \in D_A$$

или

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \{||Ax||^2 + ||x||^2\} \quad \forall x \in D_A$$

Очевидно что всякий оператор из семейства Γ_α с $\alpha \in [0; 1)$ является равномерно J-нерастягивающим.

Основные результаты.

1. Построен пример равномерно J-нерастягивающего оператора, не принадлежащего семейству Γ_α ни при каком $\alpha \in [0; 1)$. Заметим, что всякий равномерно J-нерастягивающий оператор принадлежит классу Γ_1 и подавно принадлежит всем классам Γ_α при $\alpha > 1$.

2. Установлено, что при дополнительном условии ограниченности оператора P_+A равномерно J-нерастягивающий оператор A принадлежит некоторому классу Γ_α с $\alpha \in [0;1)$. Более точно: Если обозначить

$$m = ||P_- + P_+A|| \quad (< \infty),$$

то будем иметь $A \in \Gamma_\alpha$, где

$$\alpha = \frac{m^2}{m^2 + \delta} < 1$$

(δ- положительная константа из определения равномерно J-нерастягивающего оператор A).

Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203

О СПЕКТРАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ишкин Х.К. (г. Уфа, Башгосуниверситет)
Ishkin62@mail.ru

В работе [1] показано, что спектр ангармонического осциллятора H, порожденного в $L^2(0;\infty)$ выражением $ly = -y'' + e^{i\theta}x^\alpha y$, $0 < \theta < \pi$, $\alpha > 0$, и краевым условием $y(0) = 0$, весьма чувствителен к малым возмущениям. Известно (см. [2]), что асимптотика спектра сохраняется при возмущениях, вызванных оператором умножения на функцию $V(x)$, которая: А) Аналитична в угле $U_\theta = \{-\frac{\theta}{2+\alpha} < \arg z < 0\}$, непрерывна вплоть до границ; Б) $V(z) = o(z^\alpha)$, $z \to \infty$, равномерно по $-\frac{\theta}{2+\alpha} < \arg z < 0$. Поставим вопрос: насколько необходимы эти условия? В некотором смысле условие А) подтверждает

Теорема 1. *Пусть $L_0 = H + V_0$, V_0 — удовлетворяет условиям А) — Б). Верны следующие утверждения:*

1) Пусть $V(x)$ — финитная, непрерывная на своем носителе $[0;b]$ функция, имеющая нуль конечного порядка в точке b. Тогда в спектре оператора $L_0 + V$ появляется новая серия, имеющая асимптотику $\mu_k \sim \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$.

2) Если спектр оператора $L_0 + V$ состоит только из одной серии, удовлетворяющей соотношению $\mu_k \sim \lambda_k\left(1 + o\left(\lambda_k^{-1/\alpha}\right)\right)$, $k \to \infty$, то $V \equiv 0$.

При выполнении А) условие Б) кажется вполне естественным. Но справедлива

Теорема 2. *Для оператора с потенциалом $e^{i\theta}\ln x$ существуют возмущения, сохраняющие асимптотику спектра и имеющие последовательность полюсов второго порядка, уходящих в бесконечность по некоторому лучу внутри угла U_θ.*

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-97914, 05-01-00515а и 08-01-97020.

Литература

1. Davies E.B. "Wild spectral behavior on anharmonic oscillators", *Bull. London Math. Soc.*, 32(2000), 432-438.
2. М.В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1983.

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кадченко С.И. (г. Магнитогорск)
kadchenko@masu.ru

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ - собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ - его ортонормированные собственные функции, соответствующих этим собственным числам. Допустим, что кратность собственного числа μ_n оператора T равна ν_n. Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу собственных чисел μ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ - собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ для которых $\mu_n \neq \mu_{n-1}$ выполняются неравенства $q = \dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, то первые

$m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{m_0} \beta_n^p = \sum_{n=1}^{m_0} \mu_n^p + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(p)}(m_0), \ p = \overline{1, m_0}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_n^{(p)}(m_0) = \frac{(-1)^n p}{2\pi n i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[PR_\mu(T)\Big]^n d\mu$ - n-тые поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ - резольвента оператора T.

Используя систему уравнений (1) разработан новый, вычислительно эффективный метод, позволяющий с необходимой точностью находить первые m_0 собственные числа возмущенных самосопряженных операторов. Проведенные численные эксперименты показали его надежность и эффективность.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РОМАНОВСКОГО

Калитвин А.С. (ЛГПУ, Липецк)
kalitvin@lipetsk.ru

Изучается разрешимость в пространстве $C(D)$ — непрерывных на $D = T \times T$ функций интегрального уравнения

$$x(t,s) = \lambda \int_T a(t,s,\sigma,x(\sigma,t))d\sigma \equiv \lambda(Ax)(t,s), \tag{1}$$

где $T = [a,b], (t,s) \in D, a(t,s,\sigma,z)$ — заданная на $G = D \times T \times (-\infty, +\infty)$ функция, λ — числовой параметр. Частным случаем (1) является уравнение с $a(t,s,\sigma,z) = m(t,s,\sigma)z$, полученное В.И. Романовским при изучении задачи двухсвязных марковских цепей [1]. В связи с этим уравнение (1) будем называть нелинейным интегральным уравнением Романовского, оно почти не изучалось.

Пусть K — конус неотрицательных функций в $C(D)$, $u(t,s) \le v(t,s)$, где $u, v \in C(D)$, $\alpha = \min u(t,s)$, $\beta = \max v(t,s)$, $< u, v >$ — конусной отрезок в $C(D)$. С применением теоремы Банаха о сжимающем отображении доказывается

Теорема 1. *Если* $\lambda A :< u,v > \to < u,v >, |a(t,s,\sigma,p) - a(t,s,\sigma,q)| \le N(t,s,\sigma)|p-q|$ *при* $u(t,s) \le p,q \le v(t,s)$ *и* $|\lambda| < 1/\sup_D \int_T N(t,s,\sigma)d\sigma$, *то уравнение (1) имеет единственное решение в* $< u,v >$ *и оно может быть найдено методом итераций.*

Никакая гладкость ядра $a(t,s,\sigma,z)$ не обеспечивает компактности оператора A, но из непрерывности $a(t,s,\sigma,z)$ следует полная непрерывность оператора $(\lambda A)^2$. Из принципа Шаудера вытекает

Теорема 2. *Если функция* $a(t,s,\sigma,z)$ *непрерывна на* $D \times T \times [\alpha, \beta]$, *оператор* λA *действует в* $< u,v >$, *то уравнение* $x = (\lambda A)^2 x$ *имеет решение* $x_0 \in < u,v >$. *При условии единственности этого решения в* $< u,v >$, x_0 *— единственное решение уравнения (1) в* $< u,v >$.

Если $u \in K$ и $u \ne 0$, то единственность решения уравнения $x = (\lambda A)^2 x$ в $< u,v >$ вытекает из непрерывности $a(t,s,\sigma,z)$, монотонности относительно K оператора A и его u_0 - вогнутости [2]. Получены условия монотонности и u_0 - вогнутости оператора A.

Литература

1. Романовский В.И. Избранные труды. Т.2: Теория вероятностей, статистика и анализ. — Ташкент: Наука, 1964.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ РОМАНОВСКОГО

Калитвин В.А. (ЛГПУ, Липецк)
kalitvin@mail.ru

Некоторые задачи двухсвязных цепей Маркова [1] приводятся к уравнениям, обобщением которых является уравнение

$$x(t,s) = \lambda \int_a^b a(t,s,\sigma,x(\sigma,t))d\sigma \equiv \lambda(Ax)(t,s), \tag{1}$$

где $(t,s) \in D = [a,b] \times [a,b]$, $a(t,s,\sigma,u)$ — заданная на $D \times [a,b] \times (-\infty, +\infty)$ непрерывная функция, λ — числовой параметр. В настоящее время уравнение (1) и оператор A изучены недостаточно.

В данной работе уравнение (1) изучается при $\lambda = 1$ методом Ньютона-Канторовича с использованием схемы из [2], которая применяется к уравнению $F(x) = 0$, где F — нелинейный оператор, определенный на шаре $X(R) = \{x : x \in R, \|x\| \le R\}$ банахова пространства X со значениями в X, дифференцируемый по Фреше внутри $X(R)$ с условием Липшица для $F'(x)$: $\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \le k(r)\|x_1\|$, где $x_1, x_2 \in X(r)$ $(0 \le r \le R)$. В предположении обратимости оператора $F'(0)$ определяются числа $a = \|F'(0)^{-1}F(0)\|$, $b = \|F'(0)^{-1}\|$ и функция $\varphi(r) = a + b\int_0^r (r-t)k(t)dt$ $(0 \le r \le R)$. Разрешимость уравнения $F(x) = 0$ зависит от корней скалярного уравнения $r = \varphi(r)$. Если оно имеет решение $0 < r_* \le R$, а любое другое решение больше R, то уравнение $F(x) = 0$ имеет решение в шаре $X(r_*)$, единственное в шаре $X(R)$, и это решение может быть получено по формуле $x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

При $F = I - A$, $X = C(D)$ и непрерывной функции $a''_{uu}(t,s,\sigma,u)$ имеем $k(r) = \sup\limits_{(t,s)\in D} \int_a^b \sup\limits_{|u|\le r} |a''_{uu}(t,s,\sigma,u)|d\sigma$, $F(0)(t,s) = -\int_a^b a(t,s,\sigma,0)d\sigma$, $F'(0)h(t,s) = h(t,s) - \int_a^b a'_u(t,s,\sigma,0)h(\sigma,t)d\sigma$.
Если существует $F'(0)^{-1}$, то $F'(0)^{-1}h(t,s) = h(t,s) + \int_a^b r(t,s,\sigma)h(\sigma,t)d\sigma$, $a \le \sup\limits_D |\int_a^b [a(t,s,\sigma,0) + \int_a^b r(t,s,\sigma)a(\sigma,t,\sigma_1,0)d\sigma_1]d\sigma|$, $b \le 1 + \sup\limits_D \int_a^b |r(t,s,\sigma)|d\sigma$, а скалярное уравнение $r = \varphi(r)$ изучается при указанных $k(r), a$ и b.

Литература

1. Романовский В.И. Избранные труды. Т.2: Теория вероятностей, статистика и анализ. — Ташкент: Наука, 1964.
2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York:Marcel Dekker,2000.

О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА КЛАССА ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кальменов Т.Ш., Сураган Д. (Институт математики,информатики и механики МОН РК)
suragan@list.ru

Пусть H- гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, A^{-1} — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в H, и A^* — сопряженный к A. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\overline{R(A)} = H$ и для больших положительных целых чисел m*

$$\lambda_k(A^m A^{*m}) \cong \rho_k^m, \tag{1}$$

где λ_k — собственные значения оператора $A^m A^{*m}$, а ρ_k — положительные числа, не зависящие от m. Тогда спектр оператора A либо пуст, либо бесконечен.

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. // Доклады академии наук,2008,том 423, 6, с.730-732.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ СИНГУЛ/РНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Козко А.И. (МГУ имени В.М. Ломоносова)
prozerpi@yahoo.co.uk

В гильбертовом пространстве $L_2[0,\infty)$ рассмотрим самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathbf{L}$, задаваемый дифференциальным выражением $\ell(y) \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + p_{2m-2}(x)y^{(2m-2)}(x) + \dots + p_0(x)y(x)$ и граничными условиями $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0$. Коэффициенты $p_{2(m-k)}(x)$, $i = \overline{2,m}$ – действительнозначные и локально ограниченные функции на $[0;+\infty)$, $p_{2m-2}(x)$ — кусочно-гладкая функция. Предположим, что спектр $\sigma(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ дискретный.

Введём обозначения $\varphi_{klm} = \frac{\pi}{2}(m+l+k+1)$, $B_s = \frac{s-1}{m}\pi$.

В работе найдена асимптотика спектральной функции $\Theta_{\mathbf{L}}(x,y,\lambda)$ оператора $\mathbf{L}$, справедливая равномерно на любом компакте. В частности доказано:

$$\Theta_{\mathbf{L}}(x,x,\lambda) = \frac{\lambda^{1/(2m)}}{\pi} + \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m-3}}{\pi m x} \cdot \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\prod_{s=1}^m \cos\frac{l-s}{2m}\pi \cos\frac{k-s}{2m}\pi}{\cos^2\frac{k-l}{2m}\pi} \times$$
$$\times \sin\left(x(\cos B_l + \cos B_k)\lambda^{1/(2m)} + \varphi_{klm}\right) \cdot e^{-(\sin B_l + \sin B_k)x\lambda^{1/(2m)}} + o(1),$$

равномерно на любом компакте.

Случай $m = 1$ был разобран Б.М. Левитаном [1], случай $m = 2$ А.Г. Костюченко [2].

Работа выполнена совместно с А.С. Печенцовым.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-01-00160а.

Литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970.

2. Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1966.

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ РЕШЕТОК СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАТНОСТИ 2

Конев Р.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

rodionk@inbox.ru

Наша цель — дать достаточные условия для эргодического Z^2-действия, обеспечивающие однородность спектра кратности 2.

Основным результатом заметки является следующая теорема

Теорема. *Для того, чтобы эргодическое действие $\{T^z \times T^z\}_{z\in Z^2}$ имело однородный спектр кратности 2, достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Действие $\{T^z\}_{z\in Z^2}$ имеет простой спектр,*

2. *Действие $\{T^z\}_{z\in Z^2}$ имеет слабые пределы вида:*

$$a_1 I + b_1 \hat{T}^{(1,0)} + c_1\Theta, \quad a_2 I + b_2 \hat{T}^{(0,1)} + c_2\Theta, \quad a_3 I + b_3 \hat{T}^{(1,1)} + c_3\Theta,$$

для некоторых чисел a_j, b_j, c_j, удовлетворяющих условиям:

$$a_j + b_j + c_j = 1, \quad a_j, b_j, c_j > 0 \text{ при } j = \{1, 2, 3\},$$

3. *Найдётся $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что существует слабый предел $\varepsilon I + (1-\varepsilon)\Theta$.*

Автор благодарит Рыжикова В.В. за постановку задачи и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке гранта: НШ-3038.2008.1.

Литература

1. Аносов Д.В. О спектральных кратностях в эргодической теории. Современные проблемы математики. Выпуск 3. М.: МИРАН. 2003.

2. В.В. Рыжиков, Слабые пределы степеней простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1, Матем. Сб., 2007, 198:5, 137-159.

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ — РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Конечная Н.Н. (ПГУ им. М.В.Ломоносова), Мирзоев К.А. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

mirzoev.karahan@mail.ru, mermaid5979@yandex.ru

Доклад посвящен изучению дифференциального выражения $l[y] = -y'' + \sigma'(x)y$, где $x \in [0, +\infty)$, $\sigma(x) \in L^2_{loc}([0,+\infty))$, а $\sigma'(x)$ означает обобщенную производную. Определяется минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порожденный выражением $l[y]$ в пространстве $L^2([0,+\infty))$. Индексы дефекта этого оператора либо $(1,1)$, либо $(2,2)$. Следуя терминологии Г. Вейля, в случае, когда оператор L_0 имеет индексы дефекта $(1,1)$, говорят, что имеет место случай предельной точки; в противном случае – случай предельного круга.

В докладе приводится необходимое и достаточное условие для реализации случая предельного круга в терминах функции Коши одного вспомогательного дифференциального уравнения второго порядка. В качестве примера применения этого критерия сформулируем следующую теорему.

Теорема *Пусть $(a_n, b_n), n = 1, 2, \ldots$ — последовательность непересекающихся интервалов, таких, что функция σ абсолютно непрерывна на каждом из отрезков $[a_n, b_n]$. Пусть, кроме того, выполняется какое-либо из следующих трех условий:*

a) $\sigma'(x) \geq 0$ п.в. при $x \in [a_n, b_n]$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n)^2 = +\infty$;

б) $\sigma' \geq k_n > 0$ *п.в. при* $x \in [a_n, b_n]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n}\{sh^2\gamma_n - \gamma_n^2\}^{1/2} = +\infty$, *где* $\gamma_n = \sqrt{k_n}(b_n - a_n)$;

в) последовательности k_n *и* γ_n *такие же, как в случае б),* $\sigma'(x) = -k_n$ *при* $x \in [a_n, b_n]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n}\{\gamma_n^2 - sin^2\gamma_n\}^{1/2} = +\infty$.

Тогда для выражения l *имеет место случай предельной точки.*

Полученные результаты сравниваются с известными ранее теоремами в этой области и рассматриваются некоторые примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 07-01-00192-а. Первый автор поддержан также грантами РФФИ 08-01-00595-а, НШ 2372.2008.1.

ЛАКУНЫ В СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАГНИТНЫМИ ЯМАМИ ТИПА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Кордюков Ю.А. (Институт математики УНЦ РАН, г. Уфа)
yurikor@matem.anrb.ru

Пусть M — гладкое ориентированное многообразие размерности ≥ 2, снабженное таким собственно разрывным действием конечно порожденной дискретной группы Γ, что M/Γ компактно. Предположим, что любая замкнутая 1-форма на M точна. Пусть g — Γ-инвариантная риманова метрика на M, и B — такая вещественнозначная Γ-инвариантная 2-форма на M, что $B = dA$ для некоторой вещественнозначной 1-формы A на M. Рассмотрим оператор Шредингера с магнитным потенциалом A, задаваемый формулой

$$H^h = (ih\,d + A)^*(ih\,d + A),$$

где $h > 0$ — квазиклассический параметр. Предположим, что существуют такая (связная) фундаментальная область $\mathcal{F}$, что множество нулей магнитного поля B в $\mathcal{F}$ является гладкой ориентированной гиперповерхностью S, содержащейся во внутренности $\mathcal{F}$, причем для всех x в некоторой окрестности S справедлива оценка

$$C^{-1}\,d(x,S)^k \leq |B(x)| \leq C\,d(x,S)^k$$

при некотором натуральном k и постоянной $C > 0$. При данных условиях получены двусторонние оценки для точной нижней грани спектра $\lambda_0(H^h)$ оператора H^h в пространстве $L^2(M)$:

$$C_0 h^{\frac{2k+2}{k+2}} - C_1\,h^{\frac{6k+8}{3(k+2)}} \leq \lambda_0(H^h) \leq C_0 h^{\frac{2k+2}{k+2}} + C_1\,h^{\frac{6k+8}{3(k+2)}},$$

где $C_0 > 0$ — некоторая явно задаваемая постоянная, $C_1 > 0$.

Доказано, что для любых a и b таких, что $C_0 < a < b$, спектр оператора H^h на интервале $[h^{\frac{2k+2}{k+2}}a, h^{\frac{2k+2}{k+2}}b]$ имеет сколь угодно большое число лакун при любом достаточно малом $h > 0$. Если дополнительно предположить существование невырожденных минимум для редуцированной спектральной задачи на S, можно получить более точные оценки для $\lambda_0(H^h)$, а также доказать, что для любого натурального N существует такая постоянная $b_N > 0$, что спектр оператор H^h на интервале $[C_0 h^{\frac{2k+2}{k+2}}, C_0 h^{\frac{2k+2}{k+2}} + b_N\,h^{\frac{2k+3}{k+2}}]$ имеет, по крайней мере, N лакун при любом достаточно малом $h > 0$.

Результаты получены совместно с Б. Хельффером.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Курдюмов В. П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается задача оптимального управления

$$\frac{du}{dt} = Lu + f, \quad u(0) = g, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$f, g \in K, \quad I(f,g) = \|u(T) - u_0\|^2 + \|f\|^2 + \|g\|^2 \to \min. \tag{2}$$

Здесь $u(t)$ при каждом t принадлежит гильбертову пространству H; L – линейный оператор со всюду плотной в H областью определения, имеющий лишь конечное число кратных собственных значений λ_k, которые удовлетворяют требованиям: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{-2}<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|e^{\lambda_k T}|^2<\infty$ и ноль не является собственным значением; собственные и присоединенные элементы φ_k $(k=1,2,\ldots)$ оператора L образуют базис Рисса в H; норма резольвенты в области, полученной из λ-плоскости удалением всех λ_k вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса, при $|\lambda|\to\infty$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|$; управлением в задаче (1)-(2) являются f и g; K – выпуклое замкнутое множество из H; u_0 — заданный элемент из H; $\|\cdot\|$ — норма в H. Решение задачи Коши (1) понимается в обобщенном смысле.

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(2) существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть T_m — подпространство из H, порожденное элементами φ_k $(k=\overline{1,m})$; $f^{(m)}=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{(m)}\varphi_i$, $g^{(m)}=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i^{(m)}\varphi_i$ — решение задачи (1)-(2), когда $K=T_m$; и пусть $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(0)}\varphi_i$, $g=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i^{(0)}\varphi_i$ — решение задачи (1)-(2), когда $K=H$. Тогда для всех $i=1,2,\ldots$ $\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_i^{(m)}=\alpha_i^{(0)}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\beta_i^{(m)}=\beta_i^{(0)}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-0003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1)

ВОПРОСЫ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ОБЛАСТЯХ

Кусаинова Л. К. (Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева)
e-mail:leili2006@mail.ru

В работе рассматривается интегральный оператор с ядром общего вида

$$Tf(x)=\int_G k(x,y)f(y)dy,$$

действующий в весовых пространствах Лебега $L_{p,\omega}$ с нормой

$$\|f\|_{L_{p,\omega}}=\left(\int_G |f|^p\omega(x)dx\right)^{1/p}, 1<p<\infty;$$

G- произвольная область в R^n. Получены достаточные условия ограниченности. Исследуется, в каких случаях эти условия будут достаточными и необходимыми.

ИНДЕФИНИТНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ НА ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Лопушанская Е.В. (Воронеж)
kate.lopushanskaya@yahoo.com

Для данной последовательности комплексных чисел $(t_j)_{j=-n}^{n}$, $t_{-j}=\bar{t}_j$, изучается вопрос существования вещественной меры $\mu=\mu_+-\mu_-$, где μ_+ и μ_- положительные меры на единичном круге $\mathbb{T}$, такой что члены последовательности являются моментами вещественной меры Бореля на $\mathbb{T}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00566-а.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОВУШЕЧНЫХ МОД В ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМАХ

Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. (физич. ф-т МГУ)
malykham@mtu-net.ru

Математическая теория волноводов представляет собой раздел математической физики, посвященный исследованию свойств краевых задач в областях, уходящих на бесконечность, которые вне некоторого шара совпадают с одним или несколькими цилиндрами (волноводами). Простейшая краевая задача такого вида — задача Дирихле для оператора Лапласа в области с некомпактной границей. В наших работах существенный, точечный и дискретный спектр краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа рассматриваются как функции области, в которой рассматривается задача. Предложен новый способ подъема нижней границы существенного спектра не использует ни бесконечных сумм, ни специфических функциональных пространств, и поэтому особенно удобен для дальнейшего применения при обосновании теории возмущений. Одно из наиболее интересных явлений, найденных с применением этой техники — разрушение ловушечных мод при малых деформациях заполнения волновода без введения затухания.

В основу нашего метода исследования существенного спектра этой задачи положена идея о проникновении друг в друга двух "топологий": области евклидова пространства, в которой рассматривается задача, и соответствующего пространства Соболева. При этом удалось "ввести" дополнительную топологию в классическую теорему Вейля в частности доказать, что не только локальная деформация границы области (ср. теоремы Джонса и Бирмана), но и внедрение антенн, уголков или рассеивателей не меняют множества частот, при которых в рассматриваемой волноведущей системе возникают колебания, не затухающие в дальней зоне.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

Литература

1. Linton C. M., McIver P. http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/research/preprints/papers06/06-24.pdf Loughborough Un., 2006. Prep. no. 06-24.
2. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. // Докл. РАН. 2002. Т. 385. 6. С. 744-746.
3. Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. 2007. 2. С. 15-17.

АБСТРАКТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Мельникова И. В (Екатеринбург)
Irina.Melnikova@usu.ru

Большое число важных для приложений задач, как детерминированных, так и требующих учета случайных воздействий, приводят к задаче Коши в бесконечномерных пространствах

$$X'(t) = AX(t) + B\mathrm{W}(t), \quad t \in [0, \tau), \qquad X(0) = \xi, \tag{1}$$

называемой абстрактной задачей Коши. При этом, в отличие от более изученного случая, оператор A может не порождать полугруппу класса C_0, а неоднородность — не удовлетворять классическим условиям гладкости [1].

В докладе будет рассмотрена задача (1) с оператором A, являющимся генератором некоторой регуляризованной полугруппы $S = \{S(t), t \in [0, \tau)\}$ (интегрированной, конволюционной) в гильбертовом пространстве H и H-значным процессом $\{\mathrm{W}(t), t \geq 0\}$, обобщающим процесс белого шума. Будут указаны подходы к решению возникающих здесь двух основных проблем — построению абстрактного белого шума и неограниченных операторов, обратных к операторам, осуществляющим регуляризацию "полугрупповых" семейств S.

В зависимости от переменной, по которой строится обобщенное решение (временной, пространственной), применяются пространства абстрактных распределений и ультрараспределений [2]; для случая обобщенного решения по случайной переменной построены пространства абстрактных стохастических распределений, обобщающие пространства Хиды [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-03-00148.

Литература

1. Irina V. Melnikova and Alexei Filinkov *The Cauchy problem. Three approaches* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **120**, London, New York, Washington: Chapman & Hall/**CRC**, 2001.
2. Melnikova I.V. *Regularized solutions to Cauchy problems well-posed in the extended sense.* J. Int. Transf. and Spec. Functions, 2006, **17**, no. 2-3, 185–191.
3. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. *Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions* J. of Math. Sciences, 2003, **116**, no. 5, 3620-3656.

МНОГОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СОНИНА И ПУАССОНА

Мерзликина Е. М. (Воронеж)
katmix@inbox.ru

В работе [1] было обнаружено, что преобразование Радона-Киприянова функций одной переменной представляет собой оператор преобразования Сонина для сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$ и второй производной $\frac{d^2}{dx^2}$, а обратным является оператор преобразования Пуассона. В этой работе используется преобразование Радона–Киприянова функций многих переменных для введения класса многомерных операторов преобразования, которые связывают сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_B = \Delta + \frac{\gamma}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}$ с обыкновенной второй производной.

Многомерным оператором преобразования Сонина будем называть оператор $S_\gamma = F_c^{-1} F_B$, где F_B — смешанное преобразование Фурье-Бесселя с двойственной переменной $\eta = r\xi$, $|\xi| = 1$, а F_c — косинус-преобразование Фурье, действующее только по радиальной переменной r. Соответствующий оператор преобразования Пуассона определим следующим образом. Пусть $z = (z_1, z_2, x_2, \ldots, x_n) \in R_{n+1}$. Тогда $\mathcal{P}_\gamma = \int\limits_{(z_1,0,x_2,\ldots,x_n)\in\omega} \varphi(\omega)d\mu_\gamma$, где ω — множество гиперплоскостей в R_{n+1}, параллельных координатной оси Oz_2, проходящих через точку $(x_1, 0, x_2, \ldots, x_n)$ на гиперплоскости $z_2 = 0$, $d\mu$ — мера на замкнутом множестве гиперплоскостей, инвариантная относительно группы вращений вокруг оси, параллельной координатной оси Oz_2, проходящей через точку $(x_1, 0, x_2, \ldots, x_n)$. Для четной по x_1 функции $f \in S(R_n)$ имеют место формулы

$$\mathcal{S}_\gamma[\Delta_B f](\xi, p) = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\mathcal{S}_\gamma[f], \quad \mathcal{P}_\gamma\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}\varphi(\xi,p)\right](x) = \Delta_B \mathcal{P}_\gamma[\varphi](x),$$

а также формула обращения $\Delta_b^{\frac{n+\gamma-1}{2}} \mathcal{P}_\gamma[\mathcal{S}_\gamma[f]] = C\,f$, где при дробном $\frac{n+\gamma-1}{2}$ оператор $\Delta_b^{\frac{n+\gamma-1}{2}}$ представляет собой В-гиперсингулярный интеграл, введенный в [2].

Литература

1. Ляхов Л.Н. О преобразованиях Радона и Радона-Киприянова сферически-симметричных функций. // ДАН. 2008. Т.419 3. С.315-319.

2. Гоц Е.Г., Ляхов Л. Н. Обобщенные разности и общие гиперсингулярные интегралы. // ДАН. -2005.- Т. 405.- 4. -С. 444-447.

ОБ ИНДЕКСЕ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ НАД УПОРЯДОЧЕННЫМИ ГРУППАМИ

Миротин А. Р. (Гомель)

amirotin@yandex.ru

Далее G есть связная компактная абелева группа с линейно упорядоченной группой характеров X, T – положительный конус в X. В этой ситуации теплицевы операторы T_φ в $H^2(G)$ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ были определены в [1].

Определение. *Для характера* $\chi \in T$ *положим* $\mathrm{ind}\chi =$ $\mathrm{Card}[1, \chi)$, *если это число конечно, и пусть* $\mathrm{ind}\chi = -\mathrm{ind}(\chi^{-1})$, *если* $\chi \in T^{-1}$ *и* $\mathrm{ind}(\chi^{-1})$ *существует. Множество характеров, имеющих индекс, обозначим* X^i. *Если* $\varphi = \chi e^g$ $(g \in C(G),\ \chi \in X)$ *есть разложение Бора–ван Кампена для* $\varphi \in C(G)^{-1}$ *и* $\chi \in X^i$, *то положим* $\mathrm{ind}\varphi = \mathrm{ind}\chi$. *Множество функций из* $C(G)^{-1}$, *имеющих индекс, обозначим* $\Phi(G)$.

Теорема 1. 1) *Множество* X^i *есть порядковый идеал и выпуклая подгруппа группы* X, *причем отображение* ind *есть порядковый изоморфизм группы* X^i *и некоторой подгруппы группы* $\mathbb{Z}$.

2) $\Phi(G)$ *есть открытая подгруппа группы* $C(G)^{-1}$, *связными компонентами которой являются множества* $\chi\exp(C(G))$, *где* $\chi \in X^i$. *Отображение* $\mathrm{ind} : \Phi(G) \to \mathbb{Z}$ *есть гомоморфизм групп, равный* $\mathrm{ind}\chi$ *на* $\chi\exp(C(G))$ $(\chi \in X^i)$.

Теорема 2. *Пусть* $X^i \neq \{1\}$, $\varphi \in C(G)$. *Оператор* T_φ *фредгольмов тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \Phi(G)$. *При этом* $\mathrm{ind}T_\varphi = -\mathrm{ind}\varphi$.

Следствие 1. *Если любой оператор* T_χ, $\chi \in X$ *фредгольмов, то* G *изоморфна одномерному тору.*

Следствие 2. *Пусть* $\varphi \in C(G)^{-1}$. *Оператор* T_φ *фредгольмов нулевого индекса тогда и только тогда, когда он обратим.*

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1.Murphy G. J. Ordered groups and Toeplitz operators// J. Operator theory. - 1987. - V. 18. - P. 303-326.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ГЛАДКОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Митрохин С. И. (Москва, НИВЦ МГУ)

mitrokhin@srcc.msu.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y^{(4)}(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda a^4 \cdot \rho^4(x)y(x), \ 0 \le x \le \pi, \ a > 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $p(x), q(x) \in \mathcal{L}_1[0;\pi]$, а весовая функция $\rho(x) \in C^4[0;\pi]$, $\rho(x) > 0$ $\forall x \in [0;\pi]$.

Теорема. *Решение* $y(x,s)$ *(где* $\lambda = s^4$, $s = \sqrt[4]{\lambda}$*) дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид при* $|s| \to \infty$*:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{4} C_k \cdot y_k(x,s) + \frac{1}{\Delta(s)} \cdot \sum_{k=1}^{4} y_k(x,s) \cdot \int_0^x M(t) W_{4k}(t,s)dt,$$

где $M(t) = p(t)y'(t,s) + q(t)y(t,s)$, $y_k(x,s)$ $(k = 1,2,3,4)$ *— линейно независимые решения уравнения (1) при* $p(x) = q(x) \equiv 0$, $\Delta(s)$ *— определитель Вронского решений* $y_k(x,s)$, $W_{4k}(x,s)$ *— алгебраические дополнения к элементам 4-й строки и k-го столбца в* $\Delta(s)$*, причём*

$$y_k(x,s) = \rho^{-3/2}(x) \cdot \exp\left\{a w_k s \cdot \int_0^x \rho(t)dt\right\} \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{4} \frac{A_{mk}(x)}{s^m} + O\left(\frac{1}{s^5}\right)\right],$$

$w_k^4 = 1$, $A_{1k} = \frac{1}{4aw_k}\int\limits_0^x \varphi(t)dt$, $\varphi(x) = \frac{5\rho''(x)}{\rho^2(x)} - \frac{15}{2} \cdot \frac{\left(\rho'(x)\right)^2}{\rho^3(x)}$.

Изучена асимптотика собственных значений и собственных функций дифференциального оператора, связанного с краевой задачей (1)–(2).

Для дифференциального оператора второго порядка с суммируемым потенциалом $q(x)$ (в случае $\rho(x) = 1$) аналогичные выводы были изучены в работах Садовничего В. А. и Винокурова В. А. [1], а в случае $\rho(x) > 0$ Митрохиным С. И.

Литература

1. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН, серия математическая. — 2000. — Т. 64. — 4. — С. 47–108.

О ЛАКУНАХ В СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ–РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Михайлец В. А., Молибога В. Н. (Институт математики НАН Украины, г. Киев)
mikhailets@imath.kiev.ua, molyboga@imath.kiev.ua

В комплексном гильбертовом пространстве $L^2(\mathrm{R})$ рассмотрен одномерный оператор Шредингера

$$S(q)u := -u'' + q(x)u, \quad u \in \mathrm{Dom}\,(S(q)) \tag{1}$$

с действительным, 1-периодическим потенциалом–распределением

$$q(x) = \sum_{k \in \mathrm{Z}} \widehat{q}(k) e^{ik2\pi x} \in H^{-1}_{1\text{-}per}(\mathrm{R},\mathrm{R}), \tag{2}$$

т.е., $\widehat{q}(k) = \overline{\widehat{q}(-k)}$ $\forall k \in \mathrm{Z}$, и

$$\sum_{k \in \mathrm{Z}} (1 + 2|k|)^{-2} |\widehat{q}(k)|^2 < \infty. \tag{3}$$

Оператор $S(q)$ корректно определен в $L^2(\mathrm{R})$: (а) как форм-сумма; (б) как квазидифференциальный оператор; (в) как граница операторов с гладкими 1-периодическими потенциалами в смысле равномерной резольвентной сходимости. Эти определения эквивалентны [1]. Оператор $S(q)$ полуограничен снизу и самосопряжен, его спектр абсолютно непрерывен и имеет классическую зонную структуру с лакунами длины $\{\gamma_n(q)\}_{n \in \mathrm{N}}$.

Теорема 1. *Пусть* $q(x) \in H^{-1+\varepsilon}_{1\text{-}per}(\mathrm{R},\mathrm{R})$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*:

(a) $\{\gamma_n(q)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{l}_\infty \Leftrightarrow \{\widehat{q}(k)\}_{k \in \mathrm{Z}} \in \mathrm{l}_\infty$;

(b) $\{\gamma_n(q)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{c}_0 \Leftrightarrow \{\widehat{q}(k)\}_{k \in \mathrm{Z}} \in \mathrm{c}_0$.

Кроме того, получено расширение известной теоремы Марченко-Островского (1975) относительно поведения длин лакун $\{\gamma_n(q)\}_{n \in \mathrm{N}}$ на случай хермандеровских классов пространств потенциалов-распределений [2].

Литература

1. V.Mikhailets, V. Molyboga, *One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, Methods Funct. Anal. Topology **14** (2008), no. 2, 184–200.

2. V. Mikhailets, V. Molyboga, *Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, Methods Funct. Anal. Topology **15** (2009), no. 1.

ОЦЕНКИ НА ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ J-САМОСОПРЯЖЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мотовилов А. К. (ЛТФ ОИЯИ, Дубна)
motovilv@theor.jinr.ru

Установлен ряд новых оценок на изменение спектральных подпространств самосопряженного оператора под действием внедиагональных J-самосопряженных возмущений. В частности, найдена точная априорная оценка на поворот спектрального подпространства, отвечающего спектральному подмножеству, выпуклая оболочка которого не пересекается с остальным спектром. Эта оценка может рассматриваться как аналог известной $\operatorname{tg} 2\Theta$–теоремы Дэвиса–Кахана для случая J-самосопряженных возмущений. Кроме того, установлены точные оценки на норму решений ассоциированных операторных уравнений Риккати. Некоторые из полученных результатов формулируются в терминах теории операторов в пространствах Крейна.

Настоящая работа выполнена совместно с С.Альбеверио и А.А.Шкаликовым.

Мы признательны за финансовую поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований, Немецкому научно-исследовательскому обществу (DFG) и Программе Гейзенберг–Ландау.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ $*$-АЛГЕБР ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. А. Муратов (Таврический Национальный Университет, Симферополь), В. И. Чилин (Национальный Университет Узбекистана, Ташкент)
kromsh@mail.ru

Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана в $B(H)$, $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ — $*$-алгебры всех измеримых и локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов. Центр $Z(S(\mathcal{M}))$ $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ содержится в $*$-алгебре $S(Z(\mathcal{M}))$, но, вообще говоря, с ней не совпадает.

Теорема 1. $Z(S(\mathcal{M})) = S(Z(\mathcal{M}))$ *в том и только в том случае, когда в* $\mathcal{M}$ *не существует последовательности попарно ортогональных не конечных центральных проекторов.*

$*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется заполненной, если из соотношений $|T| \le |S|$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in \mathcal{A}$ следует, что $T \in \mathcal{A}$.

Набор $\{Z_j\}_{j\in J}$ попарно ортогональных ненулевых центральных проекторов из $\mathcal{M}$ будем называть разбиением единицы I, если $\sup\limits_{j\in J} Z_j = I$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Обозначим через $E(\mathcal{A})$ множество всех тех операторов $T \in LS(\mathcal{M})$, для которых существует разбиение единицы $\{Z_j\}_{j\in J}$ и набор операторов $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$ такие, что $TZ_j = T_jZ_j$ для всех $j \in J$. Ясно, что $\mathcal{A} \subset E(\mathcal{A})$ и $E(E(\mathcal{A})) = E(\mathcal{A})$.

Теорема 2

(i) $E(\mathcal{A})$ *—* $*$*-подалгебра в* $LS(\mathcal{M})$*, при этом, если* $\mathcal{A}$ *— заполненная* $*$*-подалгебра, то* $E(\mathcal{A})$ *также заполненная* $*$*-подалгебра;*

(ii) *Если* $Z(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$*, то* $S(Z(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{A})$*;*

(iii) $E(S(\mathcal{M})) = E(LS(\mathcal{M})) = LS(\mathcal{M})$*;*

(iv) *Если* $\mathcal{M}$ *имеет тип* I *или тип* III*, то* $E(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$*;*

(v) *Если* $\mathcal{M}$ *имеет тип* II*, то* $S(\mathcal{M}) \subsetneq E(\mathcal{M})$*, в частности,* $E(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M})$.

ПРОСТРАНСТВА ХЕРМАНДЕРА НА МНОГООБРАЗИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Мурач А. А. (Институт математики НАН Украины, Киев)
murach@imath.kiev.ua

Рассмотрены гильбертовы пространства Хермандера $H^{\varphi}(\Gamma)$, заданные на произвольном гладком замкнутом компактном многообразии Γ. Найдено условие на весовую функцию φ, необходимое и достаточное для того, чтобы пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ допускало эквивалентные определения, аналогичные используемым для пространств Соболева. Оно состоит в том, что φ является RO-меняющейся на ∞ по Авакумовичу функцией [1, с. 86] переменной $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Для такой функции φ следующие определения пространства $H^{\varphi}(\Gamma)$ эквивалентны:

I. $H^{\varphi}(\Gamma)$ состоит из всех распределений на Γ, которые в локальных координатах принадлежат пространству
$$H^{\varphi}(\mathrm{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathrm{R}^n) : \varphi(\langle\xi\rangle)Fu(\xi) \in L_2(\mathrm{R}^n_{\xi})\},\ n = \dim\Gamma.$$

II. $H^{\varphi}(\Gamma) = [H^{s_0}(\Gamma), H^{s_1}(\Gamma)]_{\psi}$ — результат интерполяции с параметром $\psi(t) = t^{-\frac{s_0}{s_1-s_0}}\varphi\left(t^{\frac{1}{s_1-s_0}}\right)$ гильбертовых пространств Соболева $H^{s_j}(\Gamma)$, где $s_j \in \mathrm{R}$ и $c_0 t^{s_0} \le \varphi(t) \le c_1 t^{s_1}$.

III. $H^{\varphi}(\Gamma)$ — пополнение $C^{\infty}(\Gamma)$ по норме $\|\varphi(A^{1/m})u\|_{L_2(\Gamma)}$, где A — эллиптический положительный самосопряженный псевдодифференциальный оператор порядка $m > 0$.

Указаны приложения пространств $H^{\varphi}(\Gamma)$ в спектральной теории эллиптических самосопряженных операторов: сходимость спектральных разложений почти всюду или по норме пространств C^j, где $j \in \mathrm{Z}_+$.

Результаты получены совместно с В. А. Михайлецом [2-4].

Литература

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

2. Mikhailets V. A., Murach A. A. Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces. Methods Funct. Anal. Topology, **14** (2008) no. 1, 81–100.

3. Михайлец В. А., Мурач А. А. Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы. Сборник трудов Института математики НАН Украины, **5** (2008), 1.

4. Михайлец В. А., Мурач А. А. Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии. Доклады НАН Украины, 2009, 3.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Мустафокулов Р. (Таджикский национальный университет)

zarullo_r@tajik.net

Пусть Γ – геометрический граф из $\mathbb{R}^3$, состоящий из объединения конечного набора $\{\gamma_i\}_1^m$, взаимно непересекающихся прямолинейных интервалов (ребер) и совокупности $J(\Gamma)$ некоторых их общих концов (внутренних вершин). Множество остальных концов γ_i (не вошедших в Γ), называемых граничными вершинами, обозначим через $\partial\Gamma$. Пусть $V(\Gamma) = J(\Gamma) \cup \partial\Gamma$ и $\overset{\circ}{\Gamma} = \cup_{i=1}^m \gamma_i$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество $y(\cdot)$ непрерывных на Γ функций, удовлетворяющих в вершинах графа условиям

$$y_i''(a) = 0 \quad (i \in I(a),\ a \in V(\Gamma)),$$

$$\sum_{i\in I(a)} [(p_i y_i'')' - q_i y_i'](a+0) + \rho(a)y(a) = 0 \quad (a \in J(\Gamma)),$$

где $I(a)$–множество индексов ребер γ_i, примыкающих к a и $\rho(a)$–соответствующая вершине a неотрицательное число.

Рассмотрим на $\mathfrak{M}$ краевую задачу, зависящую от скалярного параметра $\mu > 0$:

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = \mu F(x,y;)\,(x \in \overset{\circ}{\Gamma}),\ y(a;\mu) = 0\,(a \in \partial\Gamma). \tag{1}$$

Множество значений Λ параметра $\lambda = 1/\mu$, при которых задача (1) имеет неотрицательное решение, называется *позитивным спектром* задачи. Будем говорить также, что неотрицательное решение задачи (1) образует *непрерывную ветвь бесконечной длины*, если совокупность всех положительных решений задачи (1) имеет непустое пересечение с границей любой ограниченной области, содержащей θ.

Теорема. *Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных, положительна при $y \ge 0$, $x \in \Gamma$ и не убывает по y. Пусть кроме того, при $y \ge 0$ и любом $\tau \in (0,1)$ выполнено условие $F(x,\tau y) - \tau F(x,y) > o$, $x \in \Gamma$.*

Тогда позитивный спектр Λ задачи (1) образует интервал, при каждом $\mu = 1/\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное на Γ положительное решение $y(x;\mu)$, которое образует непрерывную ветвь бесконечной длины, причем $y(x;\mu)$ при каждом $x \in \Gamma$ монотонна возрастает при возрастании μ и непрерывно зависит от μ.

НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА-ПЭЛЛИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Нурсултанов Е. Д. (Астана, Казахстан)

er-nurs@yandex.ru

Известны классические неравенства Харди-Литтлвуда-Пэлли показывающие зависимость интегральных свойств функции и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье по ортогональной системе $\Phi = \{\psi_k(x)\}_k, x \in [0,1]^n$:

при $1 < p \le 2, 0 < q \le \infty$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/p'} a_k^*\right)^q k^{-1} \le C \|f\|^q_{L_{p,q}[0,1]^n}$,

при $2 \le p < \infty, 0 < q \le \infty$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/p'} a_k^*\right)^q k^{-1} \ge C \|f\|^q_{L_{p,q}[0,1]^n}$,

где $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$—невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициентов Фурье функции f по системе Φ. В случае двойных рядов получено усиление этих неравенств.

Пусть $n \in N$, $\Gamma_k = \cup_{\substack{m_1+m_2 \le n \\ 0 \le m_i}} \{(k_1, k_2) \in N^2 : 2^{m_i} \le k_i < 2^{m_i+1}, i = 1, 2\}$. Это множество называется ступенчатым гиперболическим крестом.

Пусть $a = \{a_{k_1 k_2}\}_{k_1=1 k_2=1}^{\infty \infty}$ двойная последовательность, $a^* = \{a_{k_1 k_2}^{*_1 *_2}\}$– невозрастающая перестановка взятая последовательно по переменным индексам k_1 и k_2. Определим числа

$$\overline{a}_{\Gamma_n} = \left(2^{-n} \sum_{(k_1,k_2) \in \Gamma_n} \left(a_{k_1 k_2}^{*_1 *_2}\right)^2\right)^{1/2}, n \in N.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < q \le \infty$, $\Phi_1 = \{\varphi_k^2\}$, $\Phi_2 = \{\varphi_k^2\}$ *ортонормированные в* $L_2[0,1]$ *системы, ограниченные в совокупности. Пусть почти всюду*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k_1 k_2} \varphi_{k_1}^1(x_1) \varphi_{k_2}^2(x_2).$$

Если $1 < p < 2$, *то* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{n}{p'}} \overline{a}_{\Gamma_n}\right)^q \le c \|f\|^q_{L_{pq}[0,1]^n}$.

Если $2 < p < \infty$, *то* $\|f\|^q_{L_{pq}[0,1]^n} \le c \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{n}{p}} \overline{a}_{\Gamma_n}\right)^q$.

Литература

1. E.M. Stein Interpolation of linear operators Trans. Amer. Math. Soc., 83(1956), 482-492.

КВАЗИНОРМИРОВАННЫЕ ИДЕАЛЫ НЕЙМАНА–ШАТТЕНА И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛИОНСА–ПЕТРЕ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Овчинников В. И. (Воронежский госуниверситет)
vio@math.vsu.ru

В работе [1] необходимые и достаточные условия вложения

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1} \subset \psi(X_0, X_1)_{q_0,q_1}$$

пространств в случае $q_0 \le p_0$, $q_1 \le p_1$ были получены с помощью орбитального описания пространств $\varphi(H_0, H_1)_{r_0,r_1}$ в терминах нормированных идеалов S_{r_0}, S_{r_1} Неймана–Шаттена, действующих в гильбертовых парах $\{H_0, H_1\}$.

Оказалось, что для того, чтобы избавиться от условий $q_0 \le p_0$, $q_1 \le p_1$ нужно ввести в рассмотрение и использовать квазинормированные пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$, где $0 < p_0, p_1 \le \infty$, получить орбитальное описание этих пространств с помощью квазинормированных идеалов Неймана–Шаттена S_r, где $0 < r \le \infty$ в парах гильбертовых пространств.

Переход от нормированного случая к квазинормированному при описании пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ оказывается весьма не прямолинейным.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00131.

Литература

1. Кравишвили Е.Д., Овчинников В.И.Описание интерполяционных орбит идеалов Неймана-Шаттена, действующих в гильбертовых парах, и теоремы вложения // Докл. РАН. 2003. Т.393. N1. С. 10–13.

ТЕОРЕМА БАНАХА-ЗАРЕЦКОГО ДЛЯ КОМПАКТНО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТРЕЗКА В ЛВП

Орлов И. В. (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь)
old@crimea.edu

Для отображений отрезка в вещественное полное ЛВП $F : I \to E$ вводится ряд многозначных абсолютно выпуклых (а.в.) характеристик, обобщающих классические скалярные понятия полной вариации, абсолютной непрерывности, N-свойства Лузина и условия Липшица.

В частности, F выпукло абсолютно непрерывно ($F \in AC_{co}(I,E)$), если для любой окрестности $U(0) \subset E$ найдется $\delta > 0$, что для любой дизъюнктной системы интервалов $\{I_k\}$ в I с суммой мер $\sum\limits_k \mathrm{mes} I_k < \delta$ выполнено: $\bigoplus_k \overline{\mathrm{abs.co}} F(I_k) \subset U(0)$. Если в этом определении заменить E на пространство $(E_B, \|\cdot\|_B)$, порожденное а.в. ограниченным подмножеством $B \subset E$, либо на подпространство E_K, порожденное а.в. компактным подмножеством $K \subset E$, приходим, соответственно, к понятиям ограниченной абсолютной непрерывности ($F \in AC_B(I,E)$) и компактной абсолютной непрерывности ($F \in AC_K(I,E)$). Аналогичным образом вводятся понятия выпуклых, ограниченных и компактных: вариации (V_{co}, V_B, V_K), условия Липшица (Lip_{co}, Lip_B, Lip_K), меры нуль ($\mathrm{mes}_{co} = 0$, $\mathrm{mes}_B = 0$, $\mathrm{mes}_K = 0$), N-свойства Лузина (N_{co}, N_B, N_K). Аналогом классической теоремы Банаха-Зарецкого служат следующие результаты.

Теорема 1. *Если $F \in AC_K(I,E)$, то $F \in C(I,E) \cap V_B(I,E) \cap N_K(I,E)$.*

Теорема 2. *Если $F \in C(I,E) \cap V_K(I,E) \cap N_K(I,E)$, то $F \in AC_K(I,E)$.*

Показано на примере, что $AC_K(I,E)$ не содержится в $V_K(I,E)$.

Рассмотрены приложения к интегралу Бохнера в ЛВП. Понятие компактной выпуклой вариации подробно изучено в работе [1].

Литература

1. I.V.Orlov, F.S.Stonyakin. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral //Methods of Functional Analysis and Topology, 2009, vol.15, no.2 (to appear).

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ БУЛЯ И ФОРМУЛАХ СЛЕДОВ

Осипов А. С. (НИИ Системных Исследований РАН)
osipa68@yahoo.com

В 1857 году Дж. Булем для одного класса рациональных функций комплексного переменного было установлено тождество, связывающее сумму значений вычетов рассматриваемой функции в конечных особых точках и разность между суммами ее нулей и полюсов. Аналог данного тождества для функций класса Неванлинны возникает при изучении бесконечномерных эллиптических координат [1-2]. В свою очередь, эти координаты тесно связаны со спектрами конечно-разностных операторов, порожденных бесконечными матрицами Якоби. Используя данные наблюдения, для таких операторов удается получить ряд новых формул следов. Использование тождества Буля приводит также к содержательным результатам, касающимся следов дифференциальных операторов.

Работа поддержана РФФИ (грант No 08-01-00595) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-5247.2006.1.

Литература

1. Костюченко А. Г. Степанов А. А. *Бесконечномерные эллиптические координаты.* Функц. Анализ и его Приложения, 33, No 4, 1999, стр. 73-78.

2. A. Osipov, *On some properties of Infinite-dimensional elliptic coordinates.* Operator theory: Advances and Applications, Vol. 186, pp. 339-346.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ И ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Отелбаев М., Жапсарбаева Л. К. (Казахстан, Астана,Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева)

Пусть H — сепарабельное действительное гильбертово пространство, а A — самосопряженный оператор в H, такой что $A \geq E$. Будем считать, что H — пространство функций, определенных на некотором локально-компактном множестве и оператор A переводит действительные элементы в действительные. Через $C_A^\infty[0,a]$ ($a > 0$) обозначим множество функций со значениями в H, которые вместе со всеми своими производными принадлежат $D(A^n)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$.

Пополнение $C_A^\infty[0,a]$ по норме

$$\|u\|_{H_\beta[0,a]} = \left(\int\limits_0^a \left| A^\beta u(t) \right|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (\beta \in (-\infty, \infty))$$

обозначим через $H_\beta[0,a]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + Au + \theta(t)B(\lambda, u) = f(\lambda, t), \\ u(0) = 0, \quad 0 \le t \le a. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\theta(t)$ - непрерывная на $[0,a]$ функция, а $B(\lambda,\cdot)$ - нелинейный оператор, зависящий аналитический от параметра $\lambda \in G = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.

Определение. *Пусть β – действительное число и $f(\cdot) \in H_\beta[0,1]$. Решение $u(\cdot)$ задачи (1) назовем β-сильным, если $u' + Au \in H_\beta[0,1]$. Если для любого $f(\cdot) \in H_\beta[0,1]$ решение задачи (1) β-сильное, то задачу (1) будем называть β-сильно разрешимой в целом.*

При некоторых условиях на нелинейный оператор $B(\lambda, .)$ получен следующий результат. Если уравнение (1) при всех $|\lambda| = 1$ имеет слабое решение и при некотором λ_0, $|\lambda_0| \le 1$ имеет сильное решение, то при всех $|\lambda| < 1$ имеет сильное решение.

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Панюшкин С. В. (Орловский государственный университет)
panjushkinsv@rambler.ru

В современной математике большое внимание уделяется изучению обобщенного преобразования Фурье (ОПФ). Оно применялось И.Ф. Красичковым [2], В.В. Напалковым, Ю.А. Дубинским [3], В.П. Громовым при решении разнообразных задач функционального анализа.

Определение. *Пусть H — локально выпуклое отделимое линейное топологическое пространство. Пусть $f(\lambda)$ — фиксированная голоморфная вектор-функция комплексного аргумента со значениями в H. Оператор $T : H^* \to \Lambda = \{T(l) = l[f(\lambda)] = \varphi(\lambda);\ \forall\, l \in H^*\}$ назовем ОПФ с ядром f.*

Автором проведено исследование ОПФ в достаточно широком классе пространств и в случае произвольного ядра. Установлены необходимые и достаточные условия алгебраического и топологического совпадения Λ с весовыми пространствами целых функций. Найдены порядки и типы (см [4]) некоторых операторов в пространствах аналитических функций, в частности, оператора обобщенного сдвига и оператора обобщенного дифференцирования. Последний результат дополняет оценки, полученные А.Ф. Леонтьевым в работе [1].

ОПФ позволяет также получать слабое (а в ряде случаев и сильное) представление векторов пространства H с помощью соотношения двойственности: $< x, l >=< \Phi, \varphi >=< \Phi, l[f(\lambda)] >$, $\forall x \in H$, $\forall l \in H^*$, $\Phi \in \Lambda^*$.

Литература

1. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. М., Наука, 1981.

2. Красичков И.Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. Известия АН СССР, серия математическая, 1967, т. 31, вып.1, с. 37-60.

3. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области. М., Изд-во МЭИ, 1996.

4. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям. ДАН СССР, 1986, т.228, №1, с. 27-31.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Печенцов А.С. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

В $L_2[0,+\infty)$ рассматривается самосопряженный, полуограниченный снизу с дискретным спектром оператор $\mathbf{L}$, задаваемый дифференциальным выражением:

$$l(y) \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + P_{2m-2}(x) y^{(2m-2)} + \ldots + P_0(x) y(x)$$

и краевыми условиями

$$B_l(y) \equiv \sum_{s=1}^{2m} a_{ls} y^{(s-1)}(0) = 0, \quad l = \overline{1,m}.$$

Коэффициенты $P_{2(m-k)}(x)$, $k = 2, \ldots, m$ являются действительнозначными, локально-ограниченными на положительной полуоси функциями, а $P_{2m-2}(x)$ — кусочно-гладкая функция. Коэффициенты $a_{ls} \in \mathbf{C}, l = \overline{1,m}, s = \overline{1,2m}$ краевых условий обеспечивают самосопряженное расширение $\mathbf{L}$ минимального симметрического оператора, порожденного операцией $l(y)$. Занумеруем в порядке неубывания собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ..$ оператора $\mathbf{L}$. Пусть $\mathbf{P}$ — оператор умножения на действительнозначную измеримую, ограниченную и финитную функцию $q(x)$. Оператор $\mathbf{L}+\mathbf{P}$ остается самосопряженным полуограниченным с дискретным спектром $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_k \leq ...$

Теорема. *Пусть* $\psi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x q(t)dt \in \mathrm{Var}[0,\delta]$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} q(t)dt\right] = \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} q(x)\left(\Theta_m(x,x,\mu) - \frac{1}{\pi}\mu^{\frac{1}{2m}}\right)dx,$$

где $c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}$, $c_k = \lambda_k^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{k-1}^{\frac{1}{2m}}$, $k = 2,3,...$ *и* $\Theta_m(x,y,\mu)$ *— спектральная функция оператора*

$$\mathbf{L}_m := \begin{cases} (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \\ B_l(y) = 0, \quad l = \overline{1,m}, \end{cases}$$

действующего в пространстве $L_2[0,+\infty)$.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00401.

СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ С ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Подольский В. Е., Садовничий В. А. (Москва)

В докладе изложены некоторые результаты авторов за последние годы по регуляризованным следам абстрактных операторов с относительно компактным возмущением, изложенные в указанных статьях.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ № НШ-225.2008.1

Литература

1. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением. Матем. сб., 2002, т. 193, №2, с. 129 – 152.

2. Sadovnichii V. A., Podol'skii V. E. Regularized traces of discrete operators. Russian J. of Math. Phys., 2005, v. 12, №4, p. 451-460.

3. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Регуляризованные следы дискретных операторов. Тр. Инст. мат. и мех. Ур. Отд. РАН, 2006, т. 12, №2, с. 109 – 125.

4. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением. Дифф. уравн., 2008, т. 44, №5, с. 691 – 695.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Покотило В. И. (МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет)

В работе изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + q(x)y,\ \varepsilon > 0, \tag{1}$$

действующих в пространстве $L_2[a,b]$ с краевыми условиями:

$$y(a) = y(b) = 0, \tag{2}$$

с аналитическими функциями $q(x)$, имеющими один экстремум на отрезке $[a,b]$. Наша задача - описать предельные кривые, вдоль которых происходит концентрация спектра при $\varepsilon \to 0$. Не ограничивая общности, мы можем рассматривать случай $a < 0 < b$, $0 = q(0) < q(a) < q(b)$. Тогда область значений квадратичной формы изучаемого семейства операторов (Ly,y) лежит в полуполосе $\Pi = \{\lambda \in C | Im\lambda < 0, 0 < Re\lambda < q(b)\}$. Так как спектр оператора заключен в его числовом образе, то при любом $\varepsilon > 0$ собственные значения задачи лежат в этой полуполосе. Теперь сформулируем основные условия на функцию $q(x)$.

(i) Функция $q(x)$ вещественна при $x \in [a,b]$, убывает на отрезке $[a,0]$ и возрастает на отрезке $[0,b]$, причем $a < 0 < b$, $0 = q(0) < q(a) < q(b)$. Существуют не пересекающиеся области $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$, имеющие в качестве части своей границы отрезки $[a,0]$ и $[0,b]$ соответственно, такие, что $q(z)$ аналитична в

G_1, G_2 и биективно отображает $\overline{G_1}$ на полуполосу $\overline{\Pi_1}$, а $\overline{G_2}$ на полуполосу $\overline{\Pi}$ (здесь черта означает замыкание областей), где $\Pi_1 = \{\lambda \in C | Im\lambda < 0,\ 0 < Re\lambda < q(a)\}$.

(ii) При любом $c \in (0, q(a))$ прообраз луча $r_c = \{\lambda | \lambda = c - it,\ 0 \le t < \infty\}$ в G_1 есть функция относительно мнимой оси, т.е. любая прямая $Im\lambda = const$ пересекает прообраз луча r_c только один раз, либо не пересекает вовсе. Аналогично, при любом $c \in (0, q(b))$ прообраз луча r_c в G_2 есть функция относительно мнимой оси.

Примерами функций, удовлетворяющих сформулированным двум условиям, могут служить $q(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 2]$, $q(x) = 1 - cos(x)$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ и другие. Пусть $\xi_\lambda^1(\xi_\lambda^2)$ - единственный корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$, лежащий в $G_1(G_2)$, определенный при $\lambda \in \Pi_1(\Pi)$. Введем критические кривые $\widetilde{\gamma_a^1}, \widetilde{\gamma_a^2}, \widetilde{\gamma_b^2}, \widetilde{\gamma_0}, \widetilde{\gamma_\infty}$, где $\widetilde{\gamma_a^1} = \{\lambda \in \Pi_1 | Re \int_{\xi_\lambda^1}^{a} \sqrt{i(q(x) - \lambda)} d\xi = 0\}$ (кривые $\widetilde{\gamma_a^2}$ и $\widetilde{\gamma_b^2}$ определяются аналогично),

$$\widetilde{\gamma_0} = \{\lambda \in \Pi_1 | Re \int_{\xi_\lambda^1}^{\xi_\lambda^2} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\} \text{ и } \widetilde{\gamma_\infty} = \{\lambda \in \Pi | = Re \int_a^b \sqrt{i(q(x) - \lambda)} dx = 0$$

Доказано, что кривые $\widetilde{\gamma_a^1}, \widetilde{\gamma_a^2}, \widetilde{\gamma_0}$ пересекаются в точке $\lambda_1 \in \Pi_1$, а кривые $\widetilde{\gamma_a^2}, \widetilde{\gamma_b^2}, \widetilde{\gamma_\infty}$ пересекаются в точке $\lambda_2 \in \Pi$. Никаких других точек пересечения критических кривых нет. Обозначим через γ_0 часть кривой $\widetilde{\gamma_0}$ между 0 и λ_1, через γ_a^1 - часть кривой $\widetilde{\gamma_a^1}$, заключенную между точками $q(a)$ и λ_1, через γ_a^2 - часть кривой $\widetilde{\gamma_a^2}$, заключенную между точками λ_1 и λ_2, через γ_b^2 - часть кривой $\widetilde{\gamma_b^2}$, заключенную между точками $q(b)$ и λ_2, наконец, через γ_∞ - часть кривой $\widetilde{\gamma_\infty}$, заключенную между λ_2 и $-i\infty$. Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. *При любом $\tau > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что все собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ лежат внутри τ-окрестности графа $\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_a^1 \cup \gamma_a^2 \cup \gamma_b^2 \cup \gamma_\infty$.*

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова. Работа поддержана РФФИ, грант №07-01-00283, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1.

Литература

1. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: Наука, 1983.

2. Шкаликов А. А. *Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Совр. матем., Фундам. напр. - 2003. - Т.3. С.89-112

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА $(-\infty, 0)$ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕР СЕМЕЙСТВА СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Попов А. Ю., Печенцов А. С. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Изучается асимптотическое поведение при $\lambda/\varepsilon \to -\infty$ спектральной меры $d\rho_{\varepsilon q,\alpha}(\lambda)$ операторов Штурма–Лиувилля $\mathbf{L}_{\varepsilon q,\alpha}$ в $L^2(0, +\infty)$, порождаемого дифференциальным выражением $-y'' + \varepsilon y q(x) y$, $\varepsilon > 0$, и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$. Подавляющее большинство работ в этой области связаны с асимптотикой $\rho(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, а при $\lambda < 0$ поведение $\rho(\lambda)$ до сих пор мало изучено. Известно, что существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \rho(\lambda) = \rho(-\infty)$ и верна оценка

$$\rho(\lambda) - \rho(-\infty) = O(\exp(-A\sqrt{|\lambda|})) \quad \lambda \to -\infty \quad \forall A > 0.$$

Если $q \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $q'(x) < 0$ при $x > x_0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = -\infty$, выполняется условие Сирса $\int_{x_0}^{+\infty} |q(x)|^{-1/2} dx = +\infty$ и сходится интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \Big(|q''(x)||q(x)|^{-3/2} + (q'(x))^2 |q(x)|^{-5/2} \Big) dx$, то спектр оператора $\mathbf{L}_{\varepsilon q,\alpha}$ непрерывен и заполняет всю ось.

При дополнительных условиях регулярности поведения q нами найдена асимптотика плотности спектральной меры $\mathbf{L}_{\varepsilon q,\alpha}$ при $\lambda/\varepsilon \to -\infty, \varepsilon = O(1)$:

$$\rho'_{\varepsilon q,\alpha}(\lambda) \sim \psi^{-1} \sqrt{|\lambda|} (\sqrt{|\lambda|} \sin\alpha - \cos\alpha)^{-2} \exp\left(-2 \int\limits_0^{p(-\lambda/\varepsilon)} \sqrt{\varepsilon q(t) - \lambda} dt \right),$$

$p(t)$ — функция обратная к функции $-q(x)$ при $x > x_0$.

Асимптотика выполняется вне отрезка $-\varepsilon^{1/2-\delta} \le \lambda \le$, а в случае $\operatorname{tg}\alpha > 0$ требуется также исключить отрезок $-\varepsilon^{1/2-\delta} - \operatorname{ctg}^2\alpha \le \lambda \le \varepsilon^{1/2-\delta} - \operatorname{ctg}^2\alpha$ (δ — произвольное, но фиксированное число, $0 < \delta < 1/2$).

ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В B-ПРОСТРАНСТВАХ (БАНАХОВЫХ)

Прилепко А. И. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
DSTkachenko@mephi.ru

В данном докладе исследуются задачи управления, наблюдения и оптимальной управляемости эволюционных уравнений в банаховых пространствах.

Задача управления. Даны B-пространства E, P и число $T < \infty$. Для $t \in (0, T)$ найти пару: решение $y(t)$ и управление $u(t)$ из условий:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad y(0) = y_0, \quad u \in L^2(0, T;\ P),$$

$$y(T) = y_1, \quad y \in C([0, T];\ E),$$

если все другие величины даны.

Задача наблюдения. Найти пару: элемент $e^* \in E^*$ и решение $z(t)$ для $t \in (0, T)$ из условий:

$$B^*(t)z(t) = u^*(t), \quad u^* \in L^2(0, T;\ P^*),$$

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z(T) = e^*, \quad z \in C([0, T];\ E^*),$$

если все другие величины даны; E^*, P^* – сопряженные пространства к E, P; для $\forall t \in (0, T)$ операторы $A^*(t)$, $B^*(t)$ – сопряженные к заданным операторам $A(t)$ и $B(t)$.

Решение задачи наблюдения вообще говоря, не существует. Исследуются единственность и существование соответствующего левого обратного оператора.

Автор вводит метод, позволяющий решить ряд новых задач, в том числе оптимальной управляемости, для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Работа поддержана РФФИ, гранты: 06-01-00401, 07-01-92104, НШ-4564.2006.1.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ТИПА

Раутиан Н.А. (РЭА им. Г.В. Плеханова)
nrautian@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Мы рассматриваем интегральные операторы типа свертки на полуоси $\mathbb{R}^+$

$$Tf(x) := v(x) \int_0^x K(x-y)f(y)u(y)dy, \tag{1}$$

где весовые функции $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $u(x) \geq 0$, $v(x) \geq 0$, функция $K(x)$ положительна и не возрастает на $\mathbb{R}^+$. В [1,2] для операторов (1) получены критерии $L^p - L^q$ ограниченности при $1 < p \leq q < \infty$.

Пусть $1 < q < p < \infty$, $1/r_i + 1/r_i' = 1$, $1/s := 1/q - 1/p$. Обозначим

$$\mathcal{B}_i := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^y K(y-x)u^{p'}(x)dx \right)^{1/r_i'} \times \left(\int_y^\infty K(x-y)v^q(x)dx \right)^{1/r_i} \right]^s w_i(y)dy \right)^{1/s},$$

где $r_0 = q$, $r_1 = p$, $w_0(y) = u^{p'}(y)$, $w_1(y) = v^q(y)$, $i = 0, 1$. Положим $\mathcal{B} := \max(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$.

Теорема. *Если $1 < q < p < \infty$, функция $K(x)$ положительна, не возрастает на $\mathbb{R}^+$ и локально суммируема в окрестности нуля, функция $u(x) > 0$ не убывает, а функция $v(x) > 0$ не возрастает на $\mathbb{R}^+$. Тогда для ограниченности оператора $T : L^p \to L^q$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B} < \infty$. Кроме того, существуют такие константы $C_i > 0$ $(i = 1, 2)$, что $C_1\mathcal{B} \leq \|T\|_{L^p \to L^q} \leq C_2\mathcal{B}$, причем оценка сверху верна без условия монотонности весовых функций $u(x)$ и $v(x)$.*

Литература

1. M. Lorente, *A characterization of two weighted norm inequalities for one-sided operators of fractional type*, Can. J. Math., **49**:5 (1997), 1010-1033.

2. Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, "Весовые оценки операторов Римана - Лиувилля и приложения", *Тр. МИАН.*, **248** (2003), 289-312.

О СВОЙСТВАХ ВОЗВРАЩАЕМОСТИ И ПОЧТИ НЕЗАВИСИМОСТИ ОБРАЗОВ МНОЖЕСТВА ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ СОХРАНЯЮЩЕГО МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рыжиков В. В. (Москва, МГУ)
vryzh@mail.ru

Частичная жесткость – одно из асимптотических свойств автоморфизма T вероятностного пространства Лебега (X,μ), характеризующее свойство сильной возвращаемости множества. Оно означает, что для некоторого числа $a>0$ для произвольного измеримого множества A верхний предел $\mu(A\cap T^iA)$ не меньше, чем $a\mu(A)$. Доклад посвящен следующему результату: если автоморфизм T не является частично жестким, то для любого $\delta>0$ найдется множество A заданной меры такое, что $-\delta<\mu(A\cap T^iA)-\mu(A)^2<\delta$ для всех натуральных $i>0$.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Савчук А. М. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
artem_savchuk@mail.ru

Пусть L_D – оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке $[0,\pi]$, порожденный дифференциальным выражением $Ly=-y''+q(x)y$ и краевыми условиям Дирихле. Предполагается, что потенциал q принадлежит пространству Соболева $W_2^\theta[0,\pi]$ при некотором $\theta\geq -1$. Известно, что по спектру и нормировочным числам оператора L_D можно однозначно восстановить потенциал q. В докладе обсуждается вопрос равномерной устойчивости восстановления потенциала. Некоторые результаты получены также для краевых условий Дирихле–Неймана, периодических и антипериодических краевых условий.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00283 и грантом поддержки научных школ НШ 5247.2006.1.

О СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ С ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ, ОТВЕЧАЮЩЕГО САМОСОПРЯЖЕННОМУ РАСШИРЕНИЮ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАВНОМЕРНО ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Садовничая И. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
ivsad@yandex.ru

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженное расширение L оператора Штурма–Лиувилля $ly=-y''+q(x)y$, потенциал q которого является равномерно на $\mathbb{R}$ локально суммируемым, т. е. удовлетворяет условию $\omega_q(h)=\sup\limits_{x\in R}\int\limits_x^{x+h}|q(t)|dt<+\infty,\quad h>0$. Получены оценки скорости равносходимости с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего оператору L, функции из пространства $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $M=\sup\limits_{x\in R}\int\limits_x^{x+1}|q(t)|dt$. Обозначим через $\sigma_\lambda(x,f)$ спектральное разложение функции $f(x)$, отвечающее самосопряженному расширению L на прямой. Пусть $S_\lambda(x,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_R\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{x-y}f(y)dy$.

Теорема 1. *Пусть $\omega_q(h)<+\infty,\quad h>0$. Тогда для любой функции $f(x)$ из класса $L_1(R)$ выполнено:*

$$\sup_{x\in R}|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)|=o(1),\quad \lambda\to+\infty,$$

где постоянная в символе $o(1)$ зависит только от M и от функции $f(x)$.

Теорема 2. *Пусть $\omega_q(h)<+\infty$, функция $f(x)\in L_1(R)$ и, кроме того, $\omega_f(p,h)=\sup\limits_{x\in R}\int\limits_x^{x+h}|f(t)|^pdt<+\infty$, $h>0$.*

Тогда $\sup\limits_{x\in R}|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)|=O\left(1/\sqrt{\ln\lambda}\right)$, $\lambda\to+\infty$, где постоянная в символе O зависит только от M, функции f и показателя суммируемости p.

Теорема 3. *Пусть потенциал $q(x)$ является равномерно локально суммируемым в некоторой степени $p>1$, $f(x)\in L_1(R)$.*

Тогда $\sup\limits_{x\in R}|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)|=O\left(1/\sqrt{\ln\lambda}\right)$, $\lambda\to+\infty$, где постоянная в символе O зависит от M, p и функции f.

Работа поддержана грантом РФФИ поддержки ведущих научных школ НШ 5247.2006.1.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ

А. Садуллаев (филиал МГУ в Ташкенте)

Множество $S \subset \mathbb{C}^n$ называется аналитической мультифункцией, если оно плюриполярное и его дополнение $\mathbb{C}^n \setminus S$ псевдовыпуклое. Мультифункции тесно связаны с графиками аналитических или алгеброидных функций

$$S = \{('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_n^k + a_1('z)z_n^{k-1} + ... + a_k('z) = 0\} \quad (*)$$

и являются естественным объектом изучения в многомерном комплексном анализе. Их геометрические и функциональные свойства достаточно полно отражены в работах Ока, Нишино, Слодковского, Александера, Вермера, Чирки и др.

Имеет место следующий удобный критерий аналитичности

Теорема 1.(Садуллаев) *Плюриполярное множество $S \subset \mathbb{C}^n$ является аналитическим тогда и только тогда, когда функция $V(z) = -\ln \rho(z_n, S_{'z})$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^n \setminus S$.*

Здесь $\rho(z_n, S_{'z})$ - евклидово расстояние от точки $z_n \in \mathbb{C}$ до множества $S_{'z} = \{z_n : ('z, z_n) \in S\}$. Рассмотрим следующую проблему, справедливую в классическом случае $n = 1$: является ли дополнение M аналитической мультифункции параболическим?

Если $S = \{P(z) = 0\}\}$ – алгебраическое множество, то ответ на этот вопрос положителен. Легко проверить, что функция $\rho(z) = -\frac{1}{degP} \ln |P| + 2 \ln |z|$ является функцией исчерпания для $\mathbb{C}^n \setminus S$.

Справедлива более общая

Теорема 2 (А.Айтуна, А.Садуллаев). *Если S – алгеброидное множество вида (*), то $\mathbb{C}^n \setminus S$ является параболическим многообразием.*

О СХОДИМОСТИ ПОЛУГРУПП И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Сакбаев В. Ж. (МФТИ)
fumi2003@mail.ru

Для изучения задачи Коши для уравнения Шредингера с вырожденным гамильтонианом $\mathbf{L}$, являющимся симметрическим но не самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H, применяется метод эллиптической регуляризации, суть которого состоит в аппроксимации вырожденного оператора $\mathbf{L}$ последовательностью операторов $\{\mathbf{L}_n\}$, являющихся генераторами C_0-полугрупп.

Цель исследования – определить условия для сходимости последовательности регуляризованных полугрупп в сильной и в слабой операторной топологии, равномерной на каждом отрезке, в терминах поведения последовательности графиков их генераторов.

Теорема. *Пусть $\{-i\mathbf{L}_n\}$ – последовательность генераторов C_0-полугрупп в пространстве H. Пусть последовательность регуляризованных полугрупп $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_n}(t)$ сходится в сильной операторной топологии к полугруппе $\mathbf{U}(t)$, генератором которой является консервативный оператор $-i\mathbf{A}$. Тогда сильный граф-предел последовательности операторов $\{\mathbf{L_n}\}$ есть график оператора $\mathbf{A}$. Если же последовательность регуляризованных полугрупп $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_n}(t)$ сходится в слабой операторной топологии к полугруппе $\mathbf{U}(t)$, генератором которой является оператор $-i\mathbf{A}$, то тогда сильный Γ и слабый Γ^w граф-пределы последовательности операторов $\{\mathbf{L_n}\}$ и график оператора $\mathbf{A}$ удовлетворяют включениям:*

$$\Gamma \subset \Gamma_{\mathbf{A}} \subset \Gamma^w.$$

Заметим, что первая часть утверждения дает условие, равносильное условию равномерной сходимости резольвент теоремы Троттера-Като.

Полученные результаты позволяют задать такой класс K последовательностей $\mathbf{L}_n$, аппроксимирующих оператор $\mathbf{L}$, что сходимость, компактность и множество частичных пределов последовательности регуляризованных полугрупп $\mathbf{U}_n(t) = e^{-i\mathbf{L}_n t}$ для представителей класса K определяются множеством максимальных симметрических расширений оператора $\mathbf{L}$.

СИНГУЛЯРНЫЕ СЛЕДЫ И ИЗМЕРИМЫЕ ПО А. КОННУ ЭЛЕМЕНТЫ

Седаев А. А. (Воронежский государственный архитектурно-строительный университет)
sed@vmail.ru

В настоящее время активно изучаются и применяются сингулярные (анормальные) следы, введенные Ж. Диксмье [1]. Они удобны для описания асимптотического поведения s-чисел компактных операторов в гильбертовом пространстве (см. [2],[3]). Так, например, А. Конном [2] было введено понятие S-измеримого оператора, означающее, что на нем значения всех сингулярных следов из некоторого класса

S одинаковы. Пусть $\mathcal{L}^{1,\infty}$ — операторное пространство Диксмье, порожденное пространством Марцинкевича $M(\psi)$, $\psi(t) = \ln(1+t)$, $t > 0$. В [3] доказано, что для класса D следов Диксмье и класса CD следов Конна-Диксмье положительный оператор T из $\mathcal{L}^{1,\infty}$ измерим в том и только том случае, если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t s_T^*(\tau)d\tau. \tag{1}$$

Здесь $s_T^*(\tau)$ — ступенчатая функция, составленная из s-чисел элемента T, переставленных в убывающем порядке с учетом их кратности.

В докладе обсуждается возможность описания неположительных D-измеримых элементов $T = T_+ - T_-$ пространства $\mathcal{L}^{1,\infty}$ равенством (1), в котором $s_T^*(\tau)$ заменена на разность $s_{T_+}^*(\tau) - s_{T_-}^*(\tau)$. Доказано, что это возможно только для элементов из не совпадающего с $\mathcal{L}^{1,\infty}$ подпространства $U(\psi)$, содержащего все операторы из слабого L_1. Показано, что $U(\psi)$ не сводится к другим пространствам и играет важную роль во всей теории.

Работа есть вклад в совместный проект с Н. Кальтоном и Ф. Сукочевым и поддержана РФФИ 08-01-00226-а и ARC.

Литература

1. Dixmier J. Existence de traces non normales // C. R. Acad. Sci. Paris. A-B (1966) **262**. A1107–A1108
2. Connes A. Noncommutative geometry. San Diego: Academic Press, 1994.
3. Lord S., Sedaev A., Sukochev F. Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators, J. Funct. Analysis (2005) **224**, no 1, 72-106.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

Седов А. И. (Магнитогорский государственный университет)
sedov@masu.ru

Пусть дискретный самосопряженный оператор T с ядерной резольвентой $R_0(\lambda)$ действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что спектр оператора $\sigma(T)$ простой и занумеруем собственные числа оператора λ_n в порядке возрастания. Через v_n обозначим соответствующие λ_n ортонормированные в H собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *для данной последовательности $\{\xi_n\}$ мало отличающейся, в некотором смысле, от последовательности $\{\lambda_n\}$ доказать существование такого оператора, что его спектр совпадает с данной последовательностью $\{\xi_n\}$.*

Будем искать этот оператор в виде суммы $T + P$, где P — оператор умножения на функцию $p \in H$ действующий в H. Обозначим: $r_n = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$.

Разложим v_n^2 по ортонормированному базису $\{\varphi_n\}$ подпространства $H_1 \subset H$. В частности, это может быть базис $\{v_n\}$. Пусть c_{nk} — коэффициенты Фурье этого разложения.

Теорема. *Если матрица $C = (c_{nk})$ обратима и для нее выполняется неравенство:*

$$\frac{r}{\|1\|_H}\left(\sum_n \left(\sum_k c_{nk}^- r_k \max_{\lambda\in\gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \omega < 1,$$

то для любой комплексной последовательности $\{\xi_n\}$ удовлетворяющей неравенству:

$$\left(\sum_n \left(\sum_k c_{nk}^- |\xi_k - \lambda_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

существует функция $p \in U(0, \frac{r}{2}) \subset H_1$, такая, что $\sigma(T+P) = \{\xi_n\}$.

Здесь c_{nk}^- — элементы обратной матрицы C^{-1}.

СТРОГО СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В L_p

Е. М. Семенов (Воронежский госуниверситет)
semenov@math.vsu.ru

Линейный оператор A, действующий в паре банаховых пространств, называется строго сингулярным, если сужение A на любое бесконечномерное подпространство не является изоморфизмом. Это определение было введено Т. Като.

Всякий компактный оператор является строго сингулярным. Хорошо известно, что в $L_p = L_p[0,1]$ $(p \neq 2)$, существует строго сингулярный и некомпактный оператор. В L_2 множества строго сингулярных и компактных операторов совпадают. Для $p \in [1,\infty]$ множество строго сингулярных (компактных) операторов в L_p обозначим через $\mathrm{SS}(L_p)$ $(\mathrm{K}(L_p))$ и положим $V_p = \mathrm{SS}(L_p) \setminus \mathrm{K}(L_p)$.

Теорема 1. *Пусть $1 < q < r < \infty$. Если линейный оператор A ограничен в L_p и L_r и $A \in \mathrm{SS}(L_p)$ для некоторого $p \in [q,r]$, то $A \in \mathrm{K}(L_p)$ для всех $p \in (q,r)$.*

Теорема 2. *Если $1 < q < r < \infty$, то $V_q \cap V_r \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $q < 2 < r$.*

Теорема 3. *Если $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ и A ограничен в L_p, то $A \in \mathrm{SS}(L_p)$ тогда и только тогда, когда $AB, BA \in \mathrm{K}(L_p)$ для любого $B \in \mathrm{SS}(L_p)$.*

Часть "только тогда" была ранее доказана В. Д. Мильманом.

Множество V_p является связным в пространстве линейных ограниченных в L_p операторов. В связи с Т. 1 заметим, что тождественный оператор строго сингулярен как оператор из L_∞ в L_p $(p < \infty)$ по теореме Гротендика и не строго сингулярен как оператор из L_q в L_r $(1 \leqslant r \leqslant q < \infty)$ по неравенству Хинчина.

Совместная работа с F. L. Hernandez, H. Flores, P. Tradacete (университет Комплутенсе, Мадрид).

Работа частично поддержана грантом РФФИ, № 08–01–00226–а и грантом университета Комплутенсе.

УСЛОВИЯ НЕКВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ МАТРИЧНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. П. Серебряков (МГУ им. Ломоносова, механико-математический факультет)
V-P-Serebr@yandex.ru

Рассматривается на полуоси $I = [0;\infty)$ квазидифференциальное выражение

$$\ell(y) = y^{(2n)}(x) - \sum_{k=1}^{n} (P_{n-k}(x) y^{(n-k)}(x))^{n-k},$$

где $y(x) = (y_1(x),...,y_n(x))^T$ — m-компонентная вектор-функция, $P_k(x) = (p_{kij})_{i,j=1,...,m}$ $(k = 0,1,...,n-1)$ — квадратные симметрические матрицы порядка m, элементами которых являются действительнозначные функции от x, интегрируемые по Лебегу на каждом сегменте $[0;b]$ $(0 < b < \infty)$.

Положим $p^-_{kii}(x) = -\min\{p_{kii}(x), 0\}$.

Теорема. *Пусть существует последовательность попарно пересекающихся интервалов $I_r = [a_r, b_r) \subset I$ $(r = 1,2,...)$, таких, что*

1) найдется диагональная матрица m-го порядка J, имеющая на главной диагонали только 1 и -1, для которой все недиагональные элементы матриц $JP_k(x)J$ $(k = 0,...,n-1)$ неотрицательные почти всюду на I_r $(r = 1,2,...)$;

2) имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_{I_r} [(b_r - x)(x - a_r)]^{n-k} p^-_{kii}(x)dx \le b_r - a_r$$

$(i = 1,...,m;\ r = 1,2,...)$;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_r - a_r)^2$ расходится.

Тогда минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный в пространстве $L^2(I)$ m-компонентных вектор-функций выражением $l(y)$, не является квазирегулярным.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров (Иркутский госуниверситет)
sidorov@math.isu.runnet.ru

Рассматривается уравнение

$$u(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x,s) g(s, u(s), \lambda) ds, \tag{1}$$

где $K(x,s)$ и $g(s,u,\lambda) = u(s) + f(s,u,\lambda)$ — непрерывные функции при $a \le x, s \le b, |u| < r, |\lambda| < p$, причем

$$f(s,u,\lambda) = \sum_{i\ge 2}^{\infty} q_{i0}(s)u^i + \sum_{i\ge 0}^{\infty}\sum_{k\ge 1}^{\infty} q_{ik}(s)u^i\lambda^k. \tag{2}$$

Предполагается, что 1 – характеристическое число ядра $K(x,s)$ ранга n, $\{\varphi_i\}_1^n$ собственные функции этого ядра, $\{\psi_i\}_1^n$ –собственные функции союзного ядра $K(s,t)$ Требуется построить решение $u_\lambda(x) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Предложен способ вычисления главного члена асимптотики решения. Введем условие
А. Ряд (2) может быть перегруппирован к виду

$$f(s,u,\lambda) = \sum_{i\varepsilon+k=\theta} q_{ik}(s)u^i\lambda^k + o(\sum_{i\varepsilon+k=\theta} |u|^i|\lambda|^k),$$

где $\varepsilon = r/s, \theta = \frac{r+m}{s}$.
Натуральные положительные числа r, m, s можно вычислить методом диаграммы Ньютона [1]. Пусть при этом выполнено условие
В. Алгебраическая система

$$L_l(c) \equiv \int_a^b\int_a^b \sum_{i\varepsilon+k=\theta} K(x,s)q_{ik}(s)\left(\sum_i^n c_i\varphi_i(s)\right)^i \psi_l(x)dsdx = 0,$$

$l = 1, 2, \dots n$. имеет простое ненулевое решение c^*.
Теорема. *Пусть выполнены условия А и В. Тогда уравнение 1 имеет решение*

$$u(x) = \lambda^\varepsilon \sum_{j=1}^n c_j^*\varphi_j(x) + r(x,\lambda),$$

где $|r(x,\lambda)| = o(\lambda^\varepsilon)$ при $\lambda \to 0$, функция $r(x,\lambda)$ может быть однозначно определена регуляризованным методом последовательных приближений (см. [2]) или методом неопределенных коэффициентов Некрасова–Назарова.

Соответствующие итерационные формулы регуляризованного метода последовательных приближений можно построить, используя результаты работы [3].

Литература

1. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М.:Физматлит. 2007. —344 с.
2. *Sidorov N., Loginov B. etc.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ. 2002. — 548 c.
3. *Sidorov N.* Explicit and implicit parametrization of branching solutions by iterative methods // Math. Sb. — 1995.— Vol. 186.— C.297—310.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ситник С. М. (Воронежский институт МВД России)
box2008in@gmail.com

В докладе будет рассказано о некоторых задачах теории операторов преобразования, вошедших в обзор автора [1]. Полное содержание обзора такое:

1. Введение.
2. Операторы преобразования для операторов Штурма-Лиувилля.
3. Операторы преобразования Векуа-Эрдейи-Лаундеса.
4. Операторы преобразования для общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.
5. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона.
6. Связь операторов преобразования с дробным интегродифференцированием.

7. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи.
8. В поисках вольтерровых унитарных операторов преобразования.
9. Операторы преобразования для некоторых сингулярных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.
10. Композиционный метод построения операторов преобразования различных классов.
11. Некоторые приложения метода операторов преобразования.
12. Задачи.
13. Литература.

Литература

1. Ситник С. М. Операторы преобразования и их приложения.— Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А. 2008.—С. 226-293.

ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ И ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА

О. Г. Смолянов (МГУ им. М. В. Ломоносова)
smolyanov@yandex.ru

Формулой Фейнмана называется представление решения эволюционного уравнения с помощью предела последовательности интегралов по декартовым степеням пространственной области определения решения или ее кокасательного расслоения; представление решения того же эволюционного уравнения с помощью интеграла по мере или псевдомере на некотором пространстве функций, принимающих значения в пространстве, декартовы степени которого используются в формуле Фейнмана, называется формулой Фейнмана–Каца. В случае уравнения Шредингера, полученного квантованием классической гамильтоновой системы, в формулах Фейнмана используются декартовы произведения ее конфигурационного или фазового пространства. При этом соответствующие функциональные интегралы называются интегралами Фейнмана по траекториям.

Связь между формулами Фейнмана–Каца и Фейнмана состоит в том, что интегралы по мере или псевдомере в формуле Фейнмана–Каца могут быть вычислены (в случае, когда речь идет о мерах) или определены (когда речь идет о псевдомерах) как пределы некоторых последовательностей интегралов по подпространствам пространства траекторий, причем интегралы, содержащиеся в формуле Фейнмана, либо совпадают с интегралами по подпространствам, либо их аппроксимируют. Таким образом, для получения формул Фейнмана–Каца достаточно получить формулы Фейнмана. При этом формулы Фейнмана дают явные аппроксимации (содержащие только элементарные функции) для тех величин (в частности, для переходных вероятностей и переходных амплитуд, а также и для самих интегралов Фейнмана), которые через элементарные функции не выражаются.

Рассматриваются дифференциальные и псевдодифференциальные уравнения типа теплопроводности и типа Шредингера на областях римановых многообразий и на бесконечномерных многообразиях, состоящих из функций, принимающих значения в римановых многообразиях, в том числе уравнения, описывающие эволюцию (квази)частиц, масса которых зависит от координаты. Соответствующие формулы Фейнмана зависят от выбора самосопряженного расширения формального (псевдо)дифференциального оператора.

Некоторые из результатов доклада были получены совместно с Х.фон Вайцзеккером (H.von Weizsaecker, Германия), А.Труменом (A.Truman, Великобритани) и М.Гадельей (M.Gadella, Испания).

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Стакун А. А. (Чебоксары)
asail1@mail.ru

Изучен линейный пучек $L = A - \lambda B$ (λ — спектральный параметр), где A — дифференциальный самосопряженный эллиптический оператор в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), полуограниченный снизу. Рассматриваются также случаи задания A на ограниченной области и n-мерном замкнутом многообразии. Оператор B аналогичен A, но имеет низший порядок, либо $B = q(x)E$, где $q(x)$ может менять знак (обращается в нуль на множестве нулевой меры). При различных предположениях относительно A, B, изучается характер спектра L (в основном, рассматривается случай дискретного спектра), получены асимптотические формулы для собственных значений. Отметим возможность наличия конечного числа комплексных собственных значений (действительный спектр, как правило, не ограничен в обе стороны). В отдельных случаях, рассматриваются аналоги задач теории рассеяния и задача Коши для уравнения смешанного типа. Используются индефинитные метрики, связанные с операторами A, B. Изучаются аналитические и асимптотические свойства резольвенты пучка L.

Использованы общая теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, теория ядерных операторов, метод эталонных уравнений, методы теории псевдодифференциальных операторов, метод выделения отдельных ветвей спектра [1, с.319], тауберовы теоремы Келдыша и Икехара. Результаты, частично, пересекаются с изложенными в [2], где использован вариационный метод и $A \geq 0$.

Литература

1. Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. 368 с.

2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений: статья / Сб. "Математический анализ" (серия "итоги науки"). 1977. Вып. 14. С. 10–86.

К-СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ БОХНЕРА

Стонякин Ф. С. (Симферополь)
fedyor@mail.ru

Цель работы — исследование достаточных условий представимости в виде неопределённого интеграла Бохнера сильно абсолютно непрерывных отображений F вещественного отрезка $I = [a; b]$ в произвольное отделимое вещественное локально выпуклое пространство E. Для решения этой задачи используется недавно предложенное понятие К-субдифференциала [1, 2], которое вводится как

$$\partial_K F(x) = K - \lim_{\delta \to +0} \left(\overline{conv} \left\{ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \,\middle|\, 0 < |h| < \delta \right\} \right),$$

где $K - \lim$ означает топологическое стягивание множеств под знаком предела к их компактному пересечению. Если $\partial_K F(x)$ существует, то F называется К-субдифференцируемым в точке x.

Построены примеры всюду К-субдифференцируемых отображений, нигде не имеющих обычной производной. Исследован ряд свойств сечений (селекторов) $\widehat{\partial}_K F : I \to E$ многозначных отображений $\partial_K F : I \to 2^E$, включая сепарабельнозначность. Это позволило получить следующий результат.

Теорема. *Пусть $F : I = [a; b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду К-субдифференцируемо на I. Тогда любое сечение $\widehat{\partial}_K F \in \partial_K F$ интегрируемо по Бохнеру на I и верно равенство*

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x \widehat{\partial}_K F(t) dt \quad (a \leq x \leq b) .$$

Обсуждаются дальнейшие перспективы использования понятия К-субдифференциала в теории векторного интегрирования.

Автор выражает огромную признательность И. В. Орлову за внимание к работе.

Литература

1. Стонякин Ф.С. *Компактный субдифференциал вещественных функций*// Динамические системы. 2007. Вып. 23. С. 99 – 112.

2. Орлов И.В., Стонякин Ф.С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.*// Современная математика. Фундаментальные направления. — 18 с. — В печати.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Султанаев Я. Т., Валеев Н. Ф., Назирова Э. А. (Башкирский госуниверситет, Уфа)
sultanaevYT@bashedu.ru, valeevnf@mail.ru, nazirovaEA@mail.ru

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задано семейство m-параметрических операторов вида

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0(\lambda) + p_1 B_1(\lambda) + p_2 B_2(\lambda) + ... + p_{m-1} B_{m-1}(\lambda) + p_m B_m(\lambda),$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbf{C}^m$, линейные операторы $[B_0(\lambda)]^{-1}B_k(\lambda)$ мероморфные функции от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями во множестве ядерных операторов. Исследуется обратная спектральная задача в следующей постановке.

Требуется найти возможные значения вектора $\vec{p}$ из пространства $\mathbf{C}^m$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p}, \lambda)$.

Естественными источниками данной постановки обратной спектральной задачи являются, с одной стороны, классические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов, а с другой, прикладные задачи управления частотно-резонансными характеристиками различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и задачи вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний (см.[1]).

В сообщении формулируются теоремы о существовании и изолированности решений, а также рассматриваются методы построения всех решений указанной обратной спектральной задачи, принадлежащих заданной области.

Данная работа была проделана при частичной поддержке гранта РФФИ 08-01-97020.

Литература

1. Под ред. В. В. Болотина. Вибрации в технике: Колебания линейных систем. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.

ОБ ОТСУТСТВИИ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кальменов Т. Ш., Кангужин Б. Е., Сураган Д. (Институт математики,информатики и механики ОНО DE)
suragan@list.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — конечная область, ограниченная гладкой поверхностью $\partial\Omega$.
Задача Q. Найти в области Ω регулярное решение уравнения

$$Lu = \sum_{|\alpha|<p} a_\alpha(x) D^\alpha u = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$Qu\,|_S = 0. \tag{2}$$

Здесь Q — линейный оператор, определенный на следах функций и ее производных до порядка $p' < p-1$, а S — некоторая система поверхностей размерности $n-1$, которые лежат внутри Ω или на границе $\partial\Omega$. Если $S \equiv \partial\Omega$, то оператор Q совпадает с граничным оператором, а при $S \neq \partial\Omega$ оператор Q может порождаться полувнутренними условиями типа Бицадзе–Самарского или только внутренними условиями. Через L_Q обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора (1), определенного на подмножестве функций $u \subset C^p(\Omega) \bigcap C^{p'}(S)$, удовлетворяющих условию (2). Будем называть оператор L_Q-регулярным, если его обратный оператор L_Q^{-1} вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega)$.

Теорема. *Пусть $a_\alpha(x) \subset C^p(\bar{\Omega})$ и оператор L_Q регулярен в $L_2(\Omega)$. Тогда спектр дифференциального оператора L_Q либо пуст, либо бесконечен.*

Литература

1.Кальменов Т. Ш., Сураган Д. // Доклады академии наук, 2008, том 423, № 6, с.730-732.
2.Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М. 1981.

СВЯЗЬ ГЛАДКОСТИ МАТРИЧНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ФАКТОРА

Сухочева Л. И., Мельникова Ю. А. (Воронежский госуниверситет)
yan13@yandex.ru

Пусть $\mathcal{E}^r$ и $\mathcal{E}^s$ — r- и s-мерное пространство, соответственно. Через $L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ обозначим множество матриц размера $r \times s$, т.е. матриц, имеющих r столбцов и s строк, порождающих линейные операторы, действующие из $\mathcal{E}^r$ в $\mathcal{E}^s$. Символ $L(\mathcal{E}^r)$ будет обозначать множество матриц размера $r \times r$. Ниже мы не будем различать понятия линейного оператора и матрицы, что позволит нам записывать матрицу в специальных базисах. Пусть $L(\lambda)$ — функция, заданная на отрезке $[a, b]$ и $L(\lambda) \in L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ при каждом $\lambda \in [a, b,]$. Предположим, что $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$, где $M(\lambda) \in L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ при каждом $\lambda \in [a, b,]$ и $Z \in L(\mathcal{E}^r)$ — постоянная матрица. Поскольку резольвента $(Z - \lambda I)^{-1}$ линейного оператора Z — аналитическая функция на множестве регулярных точек оператора Z (точек λ, в которых матрица $Z - \lambda I$ невырождена), то порядок гладкости функций L и M в таких точках совпадает. В общем же случае, порядок гладкости функции L не ниже порядка гладкости функции M. Предположим, что μ — собственное значение матрицы Z и p_μ — максимальный размер жордановой клетки матрицы Z, отвечающая собственному значению μ. Задача, решаемая в этой работе, — выяснить возможную потерю гладкости функции M по сравнению с гладкостью функции L.

Основной результат: если функция M непрерывна в точке μ и в этой точке L является $n+1(>p_\mu)$ раз дифференцируемой, то M будет $n+1-p_\mu$ раз дифференцируемой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00566-а

ПРО СВЯЗЬ ЦЕЛЫХ ВЕКТОРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕКВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Торба С. Н. (Киев, Институт Математики НАН Украины)
sergiy.torba@gmail.com

Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ над полем комплексных чисел. Оператор A называется *неквазианалитическим*, если он является генератором группы $U(t)$ класса C_0, норма которой удовлетворяет оценке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{1+t^2}\,dt < \infty. \tag{1}$$

Для оператора A рассматриваются два класса векторов — целые вектора экспоненциального типа $\mathcal{E}^\alpha(A)$, $\alpha>0$ [1] и спектральные подпространства $\mathcal{L}[-\alpha,\alpha]$ [2]. До конца выяснена взаимосвязь векторов из этих классов, показано, что

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{E}^{\alpha+\varepsilon}(A) = \mathcal{L}[-\alpha,\alpha], \tag{2}$$

чем существенно улучшен результат работы [3], где было установлено лишь, что $\mathcal{L}[-\alpha,\alpha]\subset\mathcal{E}^\beta(A)$ для некоторого β.

Литература

1. *Радыно Я.В.* Пространства векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. - 1983. - Т. 27, 9. - С. 215-229.
2. *Любич Ю.И., Мацаев В.И.* Об операторах с отделимым спектром // Матем. Сб. - 1962. - Т. 56(98), 4. - С. 433-468.
3. *Горбачук В.І., Горбачук М.Л.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. - 1995. - Т. 47, 5. - С. 616-628.
4. *S. Torba.* Inverse theorems in the theory of approximation of vectors in a Banach space with exponential type entire vectors // Methods Funct. Anal. Topology. - 2009. -Vol. 14, no. 2.- 14p. (to appear)

РАСШИРЕНИЯ АНТИЛИНЕЙНЫХ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Третьяков Д. В. (Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского)
dvttvd@mail.ru

Пусть $\mathfrak{H}$—сепарабельное гильбертово пространство (с.г.п.), $S:\mathfrak{H}\supset\mathfrak{D}_S\to\mathfrak{H}$— замкнутый, плотно заданный кососимметрический
антилинейный оператор, $\xi(S)$—поле регулярности S [1]. Если $0\neq\lambda\in\xi(S)$, то $\mathbb{T}_{|\lambda|}\subseteq\xi(S)$, где $\mathbb{T}_r=\{\omega\in\mathbb{C}\mid|\omega|=r\}$. Поэтому $\mathbb{C}\setminus\{0\}\subseteq\xi(S)$. Если $\lambda\neq 0$—точка регулярного типа оператора S, то дефектный бимодуль оператора S $\mathfrak{N}_\lambda:=(Ran(S-\lambda I))^{(\perp)}$ ($x(\perp)y\Leftrightarrow Re(x,y)=0$) в некоторой окрестности $\mathbb{T}_{|\lambda|}$ имеет одинаковую размерность. Отсюда $\dim\mathfrak{N}_\lambda$ одинакова $\forall\lambda\neq 0$. Доказана следующая
Теорема. *Пусть S-замкнутый, плотно заданный кососимметрический антилинейный оператор, $\lambda\neq 0$, $\widetilde{S}$ - кососимметрическое расширение S . Тогда существует аддитивный изометрический оператор $\Phi:\mathfrak{N}_\lambda\supset\mathfrak{D}_\Phi\to\mathfrak{N}_{-\lambda}$, такой что $\forall n_\lambda\in\mathfrak{D}_\Phi$ $(\Phi n_\lambda,n_\lambda)\in\mathbb{R}$ и $\forall x\in\mathfrak{D}_{S^*}$*
$x=x_0+n_\lambda+\Phi n_\lambda$, $\widetilde{S}x=Sx_0-\overline{\lambda}n_\lambda+\overline{\lambda}\Phi n_\lambda$, $x_0\in\mathfrak{D}_S$, $n_\lambda\in\mathfrak{D}_\Phi$.
Обратно, данные формулы определяют некоторое кососимметрическое расширение оператора S с помощью произвольной аддитивной изометрии Φ, такой что $\forall n_\lambda\in\mathfrak{D}_\Phi$ $(\Phi n_\lambda,n_\lambda)\in\mathbb{R}$.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{H}$— с.г.п., Γ_0,Γ_1 : $\mathfrak{D}_{S^*}\to\mathcal{H}$—антилинейные отображения. Тройка $\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ называется пространством граничных значений (п.г.з.) оператора S^*, если:*
1)$\forall x,y\in\mathfrak{D}_{S^*}$ $(S^*x,y)+(S^*y,x)=(\Gamma_0x,\Gamma_1y)_\mathcal{H}+(\Gamma_0y,\Gamma_1x)_\mathcal{H}$;
2)отображение $\Gamma:\mathfrak{D}_{S^*}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ ($\Gamma x:=\langle\Gamma_0x,\Gamma_1x\rangle$) сюрьективно.

Доказано, что для любого оператора S указанного класса п.г.з. существует. С каждым п.г.з. $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ естественным образом связаны два регулярных трансверсальных (см.,напр.,[2]) кососамосопряжённых расширения $\widetilde{S}_i$ оператора S : $\mathfrak{D}_{\widetilde{S}_i} = \ker \Gamma_i$, $i = 0, 1$.

Определение 2. [2] *Регулярное расширение $\widetilde{S}_B$ оператора Sназывается почти разрешимым (п.р.), если существует п.г.з. $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ и оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, такие что $x \in \mathfrak{D}_{\widetilde{S}_B} \Leftrightarrow \Gamma_0 x = B\Gamma_1 x$.*

Исследуются п.р. и трансверсальные расширения оператора S.

Литература

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука, 1966.-543 с.

2. Derkach V.A. and Malamud M.M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem, J.Math.Sciences 73 (1995), no. 2, 141-242

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОДНОГО КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОМПЛЕКСНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Тышкевич Д. Л. (Таврический национальный университет им. Вернадского, Симферополь, Украина)

dtyshk@inbox.ru

Пусть X — произвольное комплексное банахово пространство, и $X = X_1 \dot{+} X_2$ — разложение в прямую сумму подпространств. Пусть $A \in [X_1]$, $C \in [X_2]$, причем $\sigma(A) \cap \sigma(C) = \emptyset$. Обозначим через $\Gamma(A, C)$ совокупность всех таких пар $\langle \Gamma_A, \Gamma_C \rangle$ замкнутых контуров, что Γ_A, Γ_C не пересекаются и охватывают $\sigma(A), \sigma(C)$ соответственно. Положим

$$\delta(A, C, \Gamma_A, \Gamma_C) := \tfrac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_C} \oint_{\Gamma_A} |\lambda - \mu|^{-1} \|R_C(\lambda)\| \, \|R_A(\mu)\| \, |d\lambda| \, |d\mu|;$$
$$\delta(A, C) := \inf \{ \delta(A, C, \Gamma_A, \Gamma_C) \mid \langle \Gamma_A, \Gamma_C \rangle \in \Gamma(A, C) \}.$$

Пусть $T = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$, $B \in [X_2, X_1], D \in [X_1, X_2]$. Положим

$$\chi_T(X_1, X_2) := \delta(A, C) \sqrt{\|B\| \, \|D\|}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Если $\chi_T(X_1, X_2) < 1/2$, то T имеет нетривиальное инвариантное подпространство вида $\{x + Kx \mid x \in X_1\}$, где $K \in [X_1, X_2]$.*

В специальных случаях, когда имеются более сильные ограничения на $\sigma(A)$, $\sigma(C)$ и обозримые оценки норм резольвент операторов A, C, можно дать и обозримые оценки для $\chi_T(X_1, X_2)$.

Предложение. *Пусть A и C удовлетворяют условиям: 1) спектры их лежат в некоторых непересекающихся кругах; 2) существуют такие невозрастающие функции f и g, что*

$$\|R_A(\mu)\| \le f(dist(\mu, \sigma(A))), \quad \|R_C(\lambda)\| \le g(dist(\lambda, \sigma(C))).$$

Тогда имеет место оценка

$$\delta(A, C) \le \inf \left\{ \frac{xyf(x - r_A)g(y - r_C)}{\rho - x - y} \;\middle|\; x > r_A,\, y > r_C,\, x + y < \rho \right\},$$

где r_A, r_C — радиусы множеств $\sigma(A)$, $\sigma(C)$, а ρ — расстояние между центрами непересекающихся кругов радиусов r_A, r_C, содержащих $\sigma(A)$, $\sigma(C)$ (в этом случае, очевидно, $r_A + r_C < \rho$).

О ФОРМУЛАХ СЛЕДОВ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Фазуллин З. Ю. (Башкирский госуниверситет)

fazullinzu@mail.ru

Доклад посвящен одному методу, основанному на тождестве для конечной суммы второй поправки теории возмущений и на приближенном представлении ядра приведенной резольвенты $R_{0n}(\lambda_n)$ невозмущенного оператора. В качестве примеров рассматриваются возмущения двумерного гармонического осциллятора (см. [2]), двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле в $L_2(\mathrm{R}^2)$. (см. [2]). Также будут обсуждаться другие приложения этого метода [1].

Результаты получены совместно с Х.Х. Муртазиным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-97020.

Литература

1. Фазуллин З.Ю. *Формула регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами.*// Междунар. конф. по компл. анализу и смежным вопросам. Тезисы докладов. Нижний Новгород. 1997. С. 80–81.

2. Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. *Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора.*// Матем. сборник. 2001. Т. 192. №2. С. 109–138.

3. Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю. *Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле.* // Доклады РАН. 2003. Т. 390. №6. С. 743–745.

ТЕОРЕМА БЕЛЛМАНА-ГОЛУБОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Фам Тиен Зунг (Российский университет дружбы народов, Москва)
ptdung2004@mail.ru

Операторами Римана-Лиувилля называют операторы B_α и H_α такие, что

$$B_\alpha(f)(x) := \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x>0, \ \ \alpha>0, \tag{1}$$

и

$$H_\alpha(f)(x) := \int_x^\infty \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{t^\alpha} f(t)dt, \quad x>0, \ \ \alpha>0. \tag{2}$$

Известно, что эти операторы сопряжены друг к другу и ограничены в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$: первый–для $1 \le p < \infty$, а второй–для $1 < p < \infty$ (см. [1]).

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о перестановочности операторов (1) и (2) с операторами Фурье.

Теорема 1. Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha > 1/p'$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливы равенства

$$B_\alpha(\hat{f}_c)(x) = \widehat{H_\alpha(f)}_c(x), \quad B_\alpha(\hat{f}_s)(x) = \widehat{H_\alpha(f)}_s(x), \tag{3}$$

где $\hat{f}_c$, $(\hat{f}_s)$–это косинус и синус-преобразования Фурье функции f, соответственно.

Аналогичная теорема справедлива для обратных суперпозиций.

Теорема 2. Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha > 1/p'$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливы равенства

$$H_\alpha(\hat{f}_c)(x) = \widehat{B_\alpha(f)}_c(x), \quad H_\alpha(\hat{f}_s)(x) = \widehat{B_\alpha(f)}_s(x), \tag{4}$$

Для $p = 2$, $\alpha = 1$ Теорема 1 доказана в [2]. Для $1 < p \le 2$, $\alpha = 1$ обе теоремы получены в [3]). Доказательство Теоремы 2 использует асимптотические формулы из монографии [4].

Литература

1. Г.Г. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства,* М.: ИЛ., 1948.

2. Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье,* Гостехиздат, М.-Л., 1948.

3. Б.И. Голубов, Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье, *Матем. сб.,* **185**, no. 11 (1994), 31-40.

4. М.В.Федорюк, *Метод перевала,* М.,Наука, 1977.

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

Цопанов И.Д.(Северо-Осетинский гос.Университет)
i.tsopanov@globalalania.ru

Впервые формула регуляризованного следа первого порядка для относительно конечномерного возмущения самосопряженного неограниченного оператора с достаточно общими условиями на разреженность его спектра была получена в работе [1]. В работе [2] были получены регуляризованные следы высших порядков для относительно конечномерного возмущения в виде рекуррентных формул. Здесь представлена общая формула регуляризованных следов в терминах операторных пучков.

Пусть $L_\lambda = E - P - \lambda T$, где T– самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве H, оператор P – конечномерный: $Ph = \sum_{l=1}^n (h,\varphi_l)\psi_l$, E– единичный оператор в H.

Пусть функция распределения спектра $N(r)$ операторного пучка $E - \lambda T$ такова, что $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} < \infty$; $0 < \alpha \leq 1$. Если векторы ψ_l удовлетворяют условиям "гладкости"$\psi_l \in D(T^{-2s})$ для некоторого натурального s, то верна формула регуляризованного следа

$$\sum_\nu(\mu_\nu^s - \eta_\nu^s) = \sum_{k=1}^{s}(-1)^k \sum_{\substack{p_1+\dots+p_k=s\\ p_1,p_2,\dots,p_k\geq 1}} Tr\left(T^{-p_1}P\cdots T^{-p_k}P\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^k \sum_{\substack{p_1+\dots+p_k=s\\ p_1\geq 2,p_2,\dots,p_k\geq 1}} (p_1-1)Tr\left(T^{-p_1}P\cdots T^{-p_k}P\right),$$

где μ_ν и η_ν – собственные значения пучков L_λ и $E - \lambda T$ соответственно. Суммирование производится с некоторой расстановкой скобок, определяемой поведением спектра пучка $E - \lambda T$.

Автор выражает искреннюю благодарность В.А.Садовничему за поддержку и внимание.

Литература

1. Садовничий В.А., Любишкин В.А. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формула следов.// Функ. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №3. С. 55–65.
2. Любишкин В.А., Цопанов И.Д. О новых формулах следов для операторов с дискретным спектром.// Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механика, 1987,№6. С. 22–25.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕТРИВИАЛЬНОГО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА

Шабров С.А. (Воронеж)

Качественная теория для дифференциального уравнения второго порядка с производными по мере

$$L_\sigma u \equiv -(pu_x')_\sigma'(x) + Q_\sigma'(x)u(x) = F_\sigma'(x) \tag{1}$$

последние два десятилетия бурно развивается (см., например, [1] и библиографию там же). В уравнении (1) функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;1]$, причём $\inf\limits_{[0,1]} p > 0$ и определены на расширении $\overline{[0,1]}_S$, при котором каждая точка ξ, принадлежащая S (множеству точек разрыва функции $\sigma(x)$) переходит в пару собственных элементов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$. Функция $\sigma(x)$, порождающая на $[0,1]$ меру, предполагается непрерывной в точках $x = 0$ и $x = 1$. Само уравнение (1) задано на $\overline{[0,1]}_\sigma = \overline{[0,1]}_S \cup S$, и в каждой точке $\xi \in S$ принимает вид

$$-\Delta(pu')(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi)$ — скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ: $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$.

На основе установленных ранее свойств и оценок функции Грина краевой задачи $Lu = F_\sigma'$, $u(0) = u(1) = 0$, удается получить достаточные условия существования и единственности нетривиального и неотрицательного решения нелинейной спектральной задачи: $Lu = \lambda f(x,u)$, $u(0) = u(1) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07–01–00397).

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М., Физматлит, 2004 – 272с.

ГАМИЛЬТОНОВЫ КВАЗИМЕРЫ ФЕЙНМАНА И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА

Н. Н. Шамаров (МГУ им. Ломоносова, механико-математический факультет)
nshamarov@yandex.ru

Для эволюционных уравнений вида $\frac{d}{dt}\psi(t) = \hat{H}\,\psi(t)$ с псевдо-дифференциальными операторами (ПДО) $\hat{H}$, определенными в L_2 на конечномерном p-адическом "конфигурационном" пространстве Q и содержащими оператор Владимирова, приводятся представления решений с помощью интегралов типа Фейнмана по пространствам траекторий в "фазовом пространстве" Q^2 . Предполагается, что "функция

Гамильтона" $H : Q^2 \to \mathbf{C}$ (символ оператора $\hat{H}$) имеет вид $H(q,p) = -||p||^a + \tilde{\nu}(q)$, где $||p||$ — норма элемента $p \in Q$, $a > 0$, $\tilde{\nu}$ — преобразование Фурье счетно аддитивной борелевской меры на Q . Такие уравнения аппроксимируют уравнения, моделирующие эффект "спектральной диффузии" при возмущении в ансамбле белковых молекул [1].

При этом (квази)мерами функционального интегрирования является так называемые гамильтоновы, или симплектические, цилиндрические квазимеры Фейнмана. Указаны преобразования Фурье и плотности конечномерных цилиндрических образов таких мер.

Преимуществом представлений решений интегралами по симплектическим квазимерам Фейнмана, в отличие от формул типа Фейнмана–Каца и Маслова, приведенных в [2], является то, что, как и в классических случаях уравнений теплопроводности или Шредингера, квазимера интегрирования по функциональному пространству не зависит от ингредиентов уравнения; в подынтегральном выражении присутствует не разбитая на части "функция Гамильтона" под знаком так называемого гамильтонова интеграла действия. Однако такая цилиндрическая квазимера не может быть выбрана σ-аддитивной.

Литература

1. В.А. Аветисов, А.Х. Бикулов, В.Ал. Осипов. p-Адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул// Тр. Мат. ин-та РАН. 2004. Т.245, С. 55-64.

2. О.Г.Смолянов, Н.Н.Шамаров. Формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова// Докл.АН. 2008. Т.420. №1. С.1–6.

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Е. А. Ширяев (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Рассмотрим дифференциальные операторы четного порядка $n = 2m$, заданные дифференциальным выражением

$$l(y) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left\{ \left(p_k(x)y^{(k)}\right)^{(k)} - \left[\left(q_k(x)y^{(k)}\right)^{(k-1)} + \left(r_k(x)y^{(k-1)}\right)^{(k)} \right] \right\}, \qquad (1)$$

где $p_m(x) = 1$, $r_0(x) = 0$, $y(x) \in W_2^n[0,1]$. Считаем, что коэффициенты $p_k(x)$, $q_k(x)$, $r_k(x)$ таковы, что все производные произведений можно естественным образом раскрыть. Для этого достаточно, чтобы $p_k(x)$, $r_k(x) \in W_1^k[0,1]$, $q_k(x) \in W_1^{k-1}[0,1]$.

Введем квазипроизводные, соответствующие (1):

$$y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad y^{[m]} = y^{(m)} - r_m y^{(m-1)},$$
$$y^{[m+k]} = -(y^{[m+k-1]})' + p_{m-k}y^{(m-k)} + \left[q_{m-k+1}y^{(m-k+1)} - r_{m-k}y^{(m-k-1)}\right],$$
$$k = 1, \dots, m.$$

Краевые условия запишем в виде

$$By^{\wedge} + Cy^{\vee} = 0, \qquad (2)$$

где B и C — квадратные числовые матрицы, а $y^{\wedge}$ и $y^{\vee}$ — векторы значений квазипроизводных:

$$y^{\wedge} = \left(y(0),\ y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0),\ y(1),\ y'(1), \dots, y^{(m-1)}(1)\right)^{\mathrm{t}},$$
$$y^{\vee} = \left(y^{[2m-1]}(0),\ y^{[2m-2]}(0), \dots, y^{[m]}(0),\ -y^{[2m-1]}(1),\ -y^{[2m-2]}(1), \dots, -y^{[m]}(1)\right)^{\mathrm{t}}.$$

Верхний индекс t означает транспонирование.

Определение. *Оператор L, порожденный дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2), назовем вполне регулярным, если выполнено условие $B^{-1}(\operatorname{im} C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$, где B^{-1} понимается как взятие полного прообраза от $\operatorname{im} C$ при отображении B.*

Теорема. *Пусть оператор L задан выражением (1) и краевыми условиями (2). Следующие утверждения эквивалентны.*

1 Оператор L является вполне регулярным.

2 Числовой образ оператора L не совпадает со всей комплексной плоскостью.

3 Числовой образ оператора L содержится в некоторой полуплоскости в $\mathbb{C}$.

4 Квадратичная форма оператора $(Ly, y)_{L_2}$ представима в виде

$$\sum_{k=1}^{m} \left[(p_k y^{(k)},\ y^{(k)})_{L_2} + (q_k y^{(k)},\ y^{(k-1)})_{L_2} - (r_k y^{(k-1)},\ y^{(k)})_{L_2} \right] + (Ay^{\wedge},\ y^{\wedge})_{\mathbb{C}^{2m}}.$$

Определение. *Если* $\mathrm{Im}(Ly, y) \geqslant 0$ $\forall y \in D_L$, *то оператор* L *называется диссипативным. Если* $\mathrm{Re}(Ly, y) \geqslant 0$ $\forall y \in D_L$, *то* L *называется аккретивным.*

Теорема. *Аккретивный или диссипативный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2), является вполне регулярным.*

Следствие. *Диссипативные и аккретивные дифференциальные операторы, порожденные дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2), являются регулярными по Биркгофу.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УСЕЧЕННЫХ ОБЩИХ В-ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Шишкина Э. Л. (Воронеж)
ilina_ dico@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, где $\mathbb{R}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}_n : x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$, $S_N^+ = \{\sigma \in \mathbb{R}_N^+ : |\sigma| = 1\}$. Пространство L_p^γ, $1 \leq p < \infty$ состоит из функций, определенных на $\mathbb{R}_N^+$, для которых конечна норма $\|f\|_{L_p^\gamma} = \left[\int_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p (x')^\gamma \, dx\right]^{1/p}$, $(x')^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Интеграл типа В-потенциала Рисса с однородной характеристикой $\Theta(x/|x|)$ имеет вид: $(\mathbf{U}_{\gamma,\Theta}^\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}_N^+} f(y) \, T_x^y \left(\frac{\Theta(x/|x|)}{|x|^{N+|\gamma|-\alpha}}\right) (y')^\gamma dy$, $0 < \alpha < N + |\gamma|$, где T_x^y – смешанный обобщенный сдвиг [1], $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Усеченный общий В-гиперсингулярный (о.В-г.с.) интеграл с однородной характеристикой $\Omega(t/|t|)$ определим формулой: $\left(\mathbf{D}_{\gamma,\Omega,\varepsilon}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{d_{N,l,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+} \frac{(\Xi_t^l f)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \Omega\left(\frac{t}{|t|}\right) (t')^\gamma \, dt$ где $\{|t| > \varepsilon\}^+ = \{t \in \mathbb{R}_N^+ : |t| > \varepsilon\}$, $d_{N,l,\gamma,}(\alpha)$ – нормировочная константа о.В-г.с. интеграла [1], $(\Xi_t^l f)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k T_x^{kt} f(x)$.

Пусть $f(x) = (\mathbf{U}_{\gamma,\Theta}^\alpha \varphi)(x)$ интеграл типа В-потенциала Рисса с плотностью $\varphi(x) \in L_p^\gamma$, $1 \leq p < \frac{N+|\gamma|}{2}$, тогда для произвольных характеристик $\Theta(x/|x|) \in L_1^\gamma$ и $\Omega(x/|x|) \in L_1^\gamma$ имеет место представление

$$(\mathbf{D}_{\gamma,\Omega,\varepsilon}^\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}_N^+} \mathcal{E}_{\Theta,\Omega}^\gamma(\xi) T_x^{\varepsilon\xi} \varphi(x) (\xi')^\gamma \, d\xi,$$

ядро которого имеет вид

$\mathcal{E}_{\Theta,\Omega}^\gamma(\xi) = \frac{(-1)^{N-n} \varepsilon^{N+|\gamma|-\alpha}}{d_{N,l,\gamma}(\alpha) |\eta|^\alpha} \int\limits_{\{|\tau|>1/|\eta|\}^+} \frac{(\Xi_{|\varepsilon\eta|\tau}^l \mathcal{K}_{\alpha,\Theta}^\gamma)(\varepsilon\eta) \Omega(\tau/|\tau|)}{|\tau|^{N+|\gamma|+\alpha}} (\tau')^\gamma \, d\tau$, где $\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\alpha = \Theta(x/|x|)|x|^{-N-|\gamma|+\alpha}$ – ядро оператора $\mathbf{U}_{\gamma,\Theta}^\alpha$, $\xi/|\xi| \in \overline{S}_N^+$, $\tau/|\tau| \in \overline{S}_N^+$.

Литература

1. Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л. Общие В-гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой. ДАН. 2007. Т. 412.- 2.-С. 162-166.

2. Ляхов Л. Н. Обращение В-потенциалов. ДАН. 1991. Т. 321, 3.-С. 291-296.

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ И ОПЕРАТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Шондин Ю.Г. (Нижний Новгород)
shondin@sinn.ru

Рассматриваются сингулярные выражения Штурма-Лиувилля

$$\ell = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \quad v(x) = \frac{v_{-2}}{x^2} + \frac{v_{-1}}{x} + v_{reg}(x)$$

на интервале $(0, b), b \leq \infty$, имеющие "регулярную особую точку"на левом конце. Предполагается, что $v_{-2} \geq 3/4$, так что в L^2-постановке выполняется случай "предельной точки"в $x = 0$. Положим $v_{-2} = \nu^2 - 1/4$, $\nu \geq 1$. Оказывается, что в этой ситуации наряду с самосопряженной минимальной реализацией в $L^2(0, b)$ существует реализация выражения ℓ эрмитовым оператором S с индексами дефекта $(1, 1)$ в некотором пространстве Понтрягина Π_κ, с $\kappa = [\frac{\nu+1}{2}]$ отрицательными квадратами, и L^2-случай "предельной точки"трансформируется случай "предельной окружности"в Π_κ. В докладе рассматривается задача об аппроксимации самосопряженных расширений оператора S некоторым семейством операторных реализаций для регулярных граничных задач

$$\ell y = zy, \quad y'(\varepsilon) = \beta(\varepsilon, z) y(\varepsilon),$$

на интервалах (ε, b), не содержащих особую точку $x = 0$. Здесь $\beta(\varepsilon, z)$ при $\varepsilon > 0$ — некоторый многочлен от z степени $[\nu]$, коэффициенты которого определяются по асимптотическому разложению относительно ε функции $m(\varepsilon, z) := \dfrac{\psi'_\varepsilon(\varepsilon, z)}{\psi(\varepsilon, z)}$, где $\psi(x, z)$ — решение уравнения $\ell y = zy$, удовлетворяющее самосопряженному граничному условию в b, либо $\psi \in L^2(\varepsilon, \infty)$, если $b = \infty$.

В контексте аппроксимации сильно сингулярных возмущений ранга 1 близкая задача аппроксимации рассматривалась ранее в [1,2]. Представленный доклад основан на совместной работе [3].

Литература

1. O.Yu. Shvedov, Approximations for strongly singular evolution equation, J. Funct. Analysis. **210**(2) (2004), 259-294.

2. Yu. Shondin, On approximation of high order singular perturbations, J.Phys. A:Math.& Gen. J. Phys. A: Math. Gen. **38**(2005), 5023-5039.

3. A. Dijksma, A. Luger, Yu. Shondin, Approximation of $\mathcal{N}_\kappa^\infty$–functions I: models and regularization// Operator Theory: Adv. and Appl., v. 188 (2008) 95-120.

ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ КВАЗИПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВЯЗНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Штерн А.И. (МГУ)
aishtern@member.ams.org

Отображение π группы G в семейство линейных операторов в нормированном линейном пространстве E называется (ε-)*квазипредставлением* (*КП*), если $\pi(e) = 1_E$ и $\|\pi(g_1g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2)\| \leq \varepsilon$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Для описания структуры локально ограниченных конечномерных КП связных локально компактных групп (громоздкого в общем случае) оказывается достаточным описать структуру ограниченных конечномерных КП (ОККП) полупростых групп Ли. Для полупростой компактной группы Ли G семейство её ОККП с достаточно малым дефектом – это малые возмущения обычных непрерывных представлений группы G. Для полупростой группы Ли G с конечным центром семейство её ОККП с достаточно малым дефектом – это малые возмущения единичного представления. Для полупростой группы Ли G с бесконечным центром семейство её ОККП с достаточно малым дефектом совпадает с семейством малых возмущений отображений, которые в некотором базисе диагональны с диагональными элементами вида $g \mapsto \exp(i\alpha f(g))$, $g \in G$, где α малó, а f – композиция отображения, сопоставляющего элементу g "компактную" часть его разложения Ивасавы, и взятия центральной компоненты этой части.

В доказательстве участвует аналог теоремы Ван дер Вардена ("любое конечномерное представление связной группы Ли непрерывно на коммутаторе группы") и теорема о непрерывности представления π группы Ли G в конечномерном нормированном пространстве E при условии, что для любого $\xi \in E$ с $\|\xi\| = 1$ существует такая окрестность U единичного элемента в G, что $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq q$ для данной постоянной $q < 2$. В частности, доказана следующая гипотеза А.С.Мищенко: характеристика, определяемая формулой $\omega(\pi) = \inf\limits_{\|\cdot\|} \sup\limits_{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1} \inf\limits_{U \ni e} \sup\limits_{g \in U} \|\pi(g)\xi - \xi\|$, где $\|\cdot\|$ – нормы на E, может принимать только три значения: 0 (π непрерывно), 2 (π локально ограничено и разрывно) и ∞ (π не локально ограничено).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00034) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-1562.2008.1).

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-ЕЖЕ

Юрко В.А. (Саратовский госуниверситет)
yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим граф с ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$ и вершинами $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r; u_1, \dots, u_N\}$, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$– граничные вершины, $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ – внутренние вершины, $E = \{e_1, \dots, e_r\}$ – граничные ребра, $e_0 = e_1^0 \cup \ldots \cup e_N^0$ – цикл, $e_i^0 = [u_i, u_{i+1}]$, $i = \overline{1, N}$, $u_{N+1} := u_1$, $U = E \cap e_0$. Ребро e_j, $j = \overline{1, r}$ имеет начальную точку в вершине v_j, и конечную точку на множестве U. Множество E состоит из N групп ребер: $E = E_1 \cup \ldots \cup E_N$, $E_i \cap e_0 = u_i$. Каждое ребро e_j, $j = \overline{0, r}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$, где T_j – длина ребра e_j, причем $x_j = 0$ соответствует вершине v_j при $j = \overline{1, r}$, а $x_0 = 0$ соответствует точке u_1. Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ – интегрируемая вещественная функция на T. Рассмотрим уравнение на графе:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, T_j], \quad j = \overline{0, r}, \tag{1}$$

где $y_j, y_j' \in AC[0,T_j]$ удовлетворяют стандартным условиям склейки (см. [1]) в вершинах u_i, $i = \overline{1,N}$. Рассмотрим краевую задачу L_0 для уравнения (1) с условиями $y_j(0) = 0$, $j = \overline{1,r}$. Пусть Λ_0 – спектр L_0. Рассмотрим также краевые задачи $L_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{1,r}$, $1 \le \nu_1 < \ldots \nu_p \le r$ для уравнения (1) с условиями $y_i'(0) = 0$, $i = \nu_1,\ldots,\nu_p$, $y_j(0) = 0$, $j = \overline{1,r}$, $j \ne \nu_1,\ldots,\nu_p$. Пусть $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$ – спектр $L_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}_{n\ge 1}$ – знаковая последовательность для цикла e_0. Выберем и зафиксируем по одному ребру $e_{\xi_i} \in E_i$ из каждого блока E_i, $i = \overline{1,N}$. Положим $\xi := \{k : \ k = \xi_1,\ldots,\xi_N\}$. Исследуется *обратная задача:* даны Λ_j, $j = \overline{0,r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2,N}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le r$, $\nu_j \in \xi$ и Ω, построить q.

Теорема 1. *Задание спектров* Λ_j, $j = \overline{0,r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2,N}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le r$, $\nu_j \in \xi$ *и* Ω *однозначно определяет* q.

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений, изложенного в [1], и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

Литература

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Наука, 2007.

SYMMETRIC OPERATORS, VON NEUMANN ALGEBRAS, AND INVERSE PROBLEMS

M.I.Belishev (Saint-Petersburg, PDMI)
belishev@pdmi.ras.ru

The boundary control method (Belishev'86) is an approach to the inverse problems based on their relations to the boundary control theory. The talk is an attempt to inscribe the BC-method in the scope of model theory. We show that the determination of a Riemann manifold Ω from its boundary spectral or dynamical data by the BC-method is equivalent to constructing a functional model of the minimal Beltrami-Laplace operator $-\Delta_0$ acting in $L_2(\Omega)$.

The basic element of this construction is a certain von Neumann algebra $\mathcal{N}_{L_0}$ associated with a densely defined semi-bounded symmetric operator L_0, which acts in a Hilbert space $\mathcal{H}$ and has a nonzero defect index. The algebra is endowed with an additional operation that we call a "wave extension"and determines (in a canonical way) a certain metric space Ω_{L_0}, which we call a "wave spectrum". If $\mathcal{N}_{L_0}$ is commutative, then Ω_{L_0} turns out to be identical to Gelfand's spectrum (the maximal ideal set) of a subalgebra $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}_{L_0}$, the subalgebra being also determined by L_0.

Such a construction works in the inverse problems as follows: **(a)** the inverse data determine a Hilbert space $\mathcal{H}$ and an operator L_0 in $\mathcal{H}$, which is unitary equivalent to $-\Delta_0$; **(b)** the operator L_0 determines (through the algebra $\mathcal{N}_{L_0}$) the space Ω_{L_0}; **(c)** by construction, Ω_{L_0} turns out to be *isometric* to the manifold Ω. So, the original Riemann manifold Ω is recovered up to isometry. This approach provides a unified look at a rather wide class of inverse problems [1], [2].

References

1. M.I.Belishev. Recent progress in the boundary control method. *Inverse Problems.*, 23 (2007), No 5, R1–R67.
2. M.I.Belishev. Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems. *Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics*, Ed. V.Isakov. Springer, 2008, 5–24.

ON STATIONARY DISTRIBUTIONS FOR SPATIAL PATTERNS OF COMMUNITY

Danchenko V.I. (Vladimir State University), Davydov A.A. (Vladimir State University, International Institute for Applied Systems Analysis)
danch@vlsu.ru, davydov@vlsu.ru, davydov@iiasa.ac.at

We study an integral equation of convolution type

$$(1 + w(x))P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} m(x-y)P(y)dy + Cm(x)$$

being a modification of the equation proposed in [1] as a new model for a stationary distribution P for spatial Patterns of Community. Here the kernel m is an even piecewise continuous distribution, C is the equation parameter, and the function w is even, nonnegative, continuous and integrable on R. Besides both functions m and w have zero limit at infinity. Even nonnegative solutions of the equation with unit limit at infinity may have ecological sense. We show that for wide classes of functions m and w the model equation could have only one solution. But when the solution exists it could have zero limit at the infinity, and in such a case the equation has no solution making ecological sense.

A couple $\{m, w\}$ is called D-pair if for some $\alpha > 0$ we have $0 \le m \le \alpha w$ everywhere. For example, Gaussian kernels when m has no worse order of decreasing at infinity form D-pair.

Theorem *For a D-pair $\{m, w\}$ there is bounded solution of the integral equation which is presented by Neumann series $P(x) = f(x) + K(f)(x) + \cdots + K^n(f)(x) + \dots$ with $f = \frac{Cm}{1+w}$ and $K : h \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} m(x-y)h(y)dy/(1+w)$. Besides this solution has nonzero limit at infinity if $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} w(x)dx < \infty$, and, in particular, provides a solution $P/P(\pm\infty)$ making an ecological sense but for the equation with another value of the parameter $C/P(\pm\infty)$.*

This theorem gives the constructive way to approximate the solution for the case of D-pairs.

The study was done in the framework of collaboration between Dynamic System Program and Evolution and Ecology Program at International Institute for Applied Systems Analysis.

References

1. Law R, Dieckmann U. Moment Approximations of Individual-based Models. In: The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity, eds. Dieckmann U, Law R and Metz JAJ. 2000. pp. 252-270. Cambridge University Press.

ON ASYMPTOTICS OF THE APPROXIMATION ERROR IN VARIATIONAL METHODS FOR SOLUTIONS OF OPERATOR EQUATIONS

Gorbachuk M.L. and GORBACHUK V.I. (Kiev)

imath@horbach.kiev.ua

Let A be a linear operator in a Hilbert space H, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Suppose also that there exists the inverse of A, and A^{-1} is compact. We consider the equation

$$Au = f, \quad f \in H, \tag{1}$$

and seek an approximate solution u_n of this equation in the form $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, where $\{e_k\}_{k \in N}$ is a so-called coordinate system in $\mathcal{D}(A)$, and the complex numbers α_k are such that the functional, associated with a variational (Ritz's, of moments, or the least squares) method, assumes the least value. If the system $\{e_k\}_{k \in N}$ satisfies a certain additional condition concerned with its completeness, then $r_n = \|u - u_n\| \to 0$ and $R_n = \|Au_n - f\| \to 0$ as $n \to \infty$.

However, the investigation of asymptotic behavior of the values r_n and R_n depending on the choice of $\{e_k\}_{k \in N}$ and $f \in H$, turned out to be a difficult problem which in the general situation remains unsolved till now. In various specific cases such questions were being considered by many mathematicians (we refer to [1] for details). We solve this problem, taking for $\{e_k\}_{k \in N}$ the orthonormal basis of eigenvectors of a positive definite self-adjoint operator B similar to A in the sense that $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$. Moreover, the conditions, guaranteeing a certain order of convergence of the values r_n and R_n to zero as $n \to \infty$ and formulated in terms of smoothness for the operator B of the solution u of equation (1), are necessary and sufficient.

Note that for the first time, dependence of the order of smoothness of u for the operator B on the behavior of r_n and R_n at infinity (converse theorems) was considered by us as well as an arbitrary (not only power) order of convergence of r_n and R_n to zero as $n \to \infty$. The results are based on the unified operator approach to direct and converse theorems of the theory of approximation of vectors of a Banach space by entire vectors of exponential type for a closed operator.

References

1. A.Yu. Luchka and T.F. Luchka, *The Appearance and Development of Direct Methods in Mathematical Physics*, Naukova Dumka, Kiev, 1985.

ON SOLUTIONS ON THE WHOLE AXIS OF A SECOND-ORDER ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATION IN A BANACH SPACE

Gorbachuk V.M. (National Technic University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute")

v_horbach@yahoo.com

We consider a second-order equation of the form

$$y''(t) - By(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

where B is a weakly positive operator in a complex Banach space $\mathfrak{B}$, that is, B is a closed densely defined linear operator in $\mathfrak{B}$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$, and there exists a constant $M > 0$ such that

$$\forall \lambda > 0 : \|R_B(-\lambda)\| \leq \frac{M}{\lambda};$$

$\rho(B)$ and $R_B(\lambda)$ are the resolvent set and the resolvent of the operator B, respectively. If, in addition, $0 \in \rho(B)$, then the operator B is called positive. As is known, for a weakly positive operator B, the fractional powers $B^\alpha, 0 < \alpha < 1$, may be determined, and $A = -B^{1/2}$ is the generating operator of a bounded analytic C_0-semigroup $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ in $\mathfrak{B}$ of angle $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ and type $\omega(A) \leq 0$.

By a solution on $(-\infty, \infty)$ for equation (1) we mean a twice continuously differentiable function $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(B)$ satisfying (1) on $(-\infty, \infty)$.

Denote by $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ the space of all entire vectors for the operator A:

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \{x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) | \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha, x) > 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k!\}.$$

Theorem. *Every solution on $(-\infty, \infty)$ for equation (1) with a weakly positive B admits an extension to an entire vector-valued function in the space $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Under the condition that $s > \frac{\pi}{2\theta}$, the set of all solutions admitting an extension to entire vector-valued functions of a finite type and an order s is dense in the set of all solutions on $(-\infty, \infty)$ for equation (1). If the operator B is positive, then the relation*

$$\exists \omega' < -\omega(A) : \|y(t)\| \leq ce^{\omega' t}, \quad 0 < c = const,$$

implies that $y(t) \equiv 0$.

TOEPLITZ OPERATORS WITH SPECIAL SYMBOLS IN WEIGHTED BERGMAN SPACES

Karapetyants A.N. (Southern Federal University, Rostov-on-Don)
alexeyk@aaanet.ru

This talk is based on the series of papers with Professors S.M. Grudsky and N.L. Vasilevsky, devoted to a study of properties of Toeplitz operators with special symbols in weighted Bergman spaces in dependence of weight parameter.

Weighted Bergman space $A^2_\lambda(D)$ is a closure in $L^2_\lambda(D)$ of analytic functions, where

$$L^2_\lambda(D) = \{f : \int_D |f(z)|^2(\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\mu(z) < \infty\}, \tag{1}$$

$d\mu(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$. Let $B_D^{(\lambda)}$ stands for the (weighted) Bergman projection. For $\lambda > -1$ the Toeplitz operator $T_a^{(\lambda)}$ with a symbol $a = a(z)$ acts in the weighted Bergman space on the unit disc D $T_a^{(\lambda)} : f \in A^2_\lambda(D) \longrightarrow B_D^{(\lambda)} af \in A^2_\lambda(D)$. In the special (Berezin) quantization procedure each Toeplitz operator $T_a^{(h)}$ is represented by its Wick symbol $\widetilde{a}_\lambda$, and the Berezin correspondence principle says that for smooth symbols one has

$$\lim_{\lambda \to \infty} \widetilde{a}_\lambda(z) = a(z),$$

$z \in D$, for smooth symbols $a = a(z)$. The natural question is the following: What happens to properties of Toeplitz operators acting on weighted Bergman spaces when the weight parameter varies? In fact we study the following particular questions:

1. Describe the conditions on symbols for boundedness (compactness) of the corresponding Toeplitz operators. Given an unbounded symbol, describe the set of λ for which the corresponding Toeplitz operator is bounded (compact)

2. Study the limit behavior of the spectra of the corresponding Toeplitz operators when $\lambda \to \infty$. Are there any relations to the mentioned above Berezin correspondence principle?

TWO PARTICLE SPECTRAL PROBLEM WITH δ–CONFINEMENT DEPENDING ON PARTICLES LOCATION

Lobanov I. S., Lotorejchik V. Yu., Popov I. Yu.
(Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics)
popov1955@gmail.com

There are few explicitly solvable many-body problems, one of them is the two particle spectral problem with δ-type particle interaction and δ confinement. The corresponding Hamiltonian is a two-particle Schrödinger operator on a pencil of rays studied earlier for constant interaction strength in [1]. In the talk we consider more general setting of the asymptotically constant confinement potential, i.e., we assume that the interaction of one particle with the impurity depends on the position of another particle; this case is analogous to that of a single electron transistor.

We consider the Hamiltonian

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(x)\delta(y) + \alpha(y)\delta(x) + \beta\delta(x-y),$$

where $\alpha(t) \to \alpha_0 < 0$ sufficiently fast as $t \to \infty$, and $\beta < 0$.

Our first result is the inclusion $[-\frac{\min(\beta,\alpha_0)^2}{4}, +\infty) \subset \mathrm{spec}_{\mathrm{ess}}(H)$. To prove the result we construct the corresponding singular sequences.

To proceed further we provide a quasi-boundary triple for H and express the resolvent of H using an analog of the Krein resolvent formula. Then we obtain the spectrum of H in terms of the Weyl function: $z \in \mathrm{spec}(H) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \mathrm{spec}\, Q(z)$, where $Q(z)$ is an integral operator in $L^2(R)^3$ with the kernel $Q(z;p,q) =$

$$\begin{pmatrix} \alpha(p)k_z((p-q)^2) & \alpha(p)k_z(p^2+q^2) & \alpha(p)k_z((p-q)^2+q^2) \\ \alpha(p)k_z(p^2+q^2) & \alpha(p)k_z((p-q)^2) & \alpha(p)k_z((p-q)^2+q^2) \\ \beta k_z((p-q)^2+p^2) & \beta k_z((p-q)^2+p^2) & \beta k_z(2(p-q)^2) \end{pmatrix},$$

$k_z(x) = (2\pi)^{-1}K_0(\sqrt{zx})$, K_0 is the McDonald function. Finally, estimates on the bottom of the spectrum are discussed.

Acknowledgment. The work was supported by RFBR-NANU grant no. 09-01-90410.

References

1. Lobanov I. S., Popov I. Yu. Two-particle scattering on pencil of rays. J. Phys. Conf. Ser. 2008 V. 129 012048/1 - 012048/4.

ON SPECTRUM OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNBOUNDED DOMAINS

Malamud M.M. (Institute of Applied Math. and Mechanics, Donetsk, Ukraine)
mmm@telenet.dn.ua

We consider various closed (and self-adjoint) extensions of elliptic differential expressions of the type

$$\mathcal{A} = \sum_{0\le|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^\alpha D^\alpha a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta, \qquad a_{\alpha,\beta}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

on (bounded or unbounded) domains Ω in $\mathbf{R}^n$ with smooth compact boundary $\partial\Omega$. Using the concept of boundary triples and operator-valued Weyl–Titchmarsh functions, we prove various trace ideal properties of powers of resolvent differences of these closed realizations of $\mathcal{A}$ and derive estimates on eigenvalues of certain self-adjoint realizations in spectral gaps of the Dirichlet realization.

Our results extend classical theorems due to Višik, Povzner, Birman, Solomyak and Grubb.

It is a joint talk with professor F. Gesztesy.

LOWEST EIGENVALUE IN THE RESTRICTED QUANTUM FOUR BODY PROBLEM

Malyshev V. A. (MSU, Moscow), Minlos R. A. (IITP RAS, Moscow)
malyshev2@yahoo.com, minl@iitp.ru

We use various methods of spectral theory to obtain essential information for the lowest eigenvalue in the restricted quantum four body problem in $\mathbb{R}^3$.

Calculation of the discrete spectrum of the hydrogen atom is one of most beautiful explicitly solvable problems in quantum mechanics. But what is the interaction $U(r)$ between two hydrogen atoms situated on the distance r from each other is still a well-known problem in quantum chemistry. Consider two protons, fixed at the points 0 and x, and two electrons at the points y and $x+z$ described by wave function $f(y,z)$, with the standard Coulomb interaction between any pair of 4 particles. That is the Hamiltonian is

$$H = -\Delta_y + \frac{1}{|y|} - \Delta_z + \frac{1}{|z|} + V,$$

$$V = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x+z|} + \frac{1}{|x-y+z|}$$

where we use the system of units with the electron charge $e = 1$.

There are at least two exact definitions of $U(r)$. First one is called classical (electrostatic)

$$U_{ES}(r) = \int \frac{d\mu(y)d\mu(z)}{|x-y+z|}, r = |x|,$$

where $\mu(dy) = \delta(y) - \rho(y)dy$, where δ-function is responsible for the point charge of the proton, and $\rho(y) = |\phi(y)|^2$ is the probability density for the ground state wave function $\phi(y)$ of the hydrogen atom.

The second (quantum) definition is

$$U_Q(x) = E(x) - 2E_0$$

uses the lowest eigenvalue $E(x)$ of H, that is the total ground state energy of the system minus the ground state energy $2E_0$ of two hydrogen atoms as there were no interaction between them.

We explicitly find U_{ES}, we establish asymptotic behavior of $U_Q(r)$ as $r \to 0$ and $r \to \infty$, and in some cases prove the uniqueness of the minimum of $U_Q(r)$. Also the problem of what is the interaction between two quantum objects will be discussed.

SPECTRAL DUALITY FOR NEUMANN LAPLACIAN

Pavlov B. S, Martin G. (St. Petersburg University, Department of Physics, New Zealand Institute of Advanced Study)
pavlovenator@gmail.com

The numerical experiment for 2d Laplacian showed that each zero of the scattering amplitude in the complement of a compact domain Ω, with zero boundary conditions on the smooth boundary, is an eigenvalue of the Dirichlet Laplacian in Ω. This fact was called spectral duality and proved for 2d Dirichlet Laplacian in [2]. For multidimensional Laplacian the question on spectral duality was not answered since then.

We prove the spectral duality for n-dimensional Neumann Laplacian, based on the explicit formula connecting the scattering matrix with Neumann-to-Dirichlet map, suggested in [3].

B. P. recognizes support of Russian Academy of Sciences, Grant RFBR 03-01- 00090

References

1. B. Dietz, J.-P. Eckman, C.-A. Pillet, U. Smilansky, I. Ussishkin *Inside-outside duality for planar billiards: A numerical study* In: Physical Review E, **31**, 2 (1995), pp 4222 - 4231.
2. J.-P.Eckman, C.-A. Pillet *Spectral duality for planar billiards* In : Commun. Mathematical Physics, **170**, 2 (1995),pp 283 - 313.
3. B.Pavlov. *S-Matrix and Dirichlet-to-Neumann Operators* In: *Scattering* (Encyclopedia of Scattering), ed. R. Pike, P. Sabatier, Academic Press, Harcourt Science and Tech. Company (2001) pp 1678-1688.

OPTIMAL CONTROL OF CYCLIC PROCESSES WITH DISCOUNT

Davydov A.A. (Vladimir State University, International Institute for Applied Systems Analysis), Shutkina T.S. (Vladimir State University)
davydov@vlsu.ru, davydov@iiasa.ac.at, shutkina@vlsu.ru

We consider a smooth control system on the circle with positive velocities only and a control parameter belonging to a smooth closed manifold or a disjoint union of ones with at least two different points.

An *admissible motion* we define as an absolutely continuous map x from a time interval to the circle such that at each moment of its differentiability the velocity $\dot{x}$ belongs to the convex hull of the admissible velocities of the system. A *cycle* with a period $T > 0$ is defined as a periodic admissible motion $x, x(t+T) \equiv x(t)$. In the presence of a continuous *profit density* f on the circle there is an optimization problem of the selection of cycle maximizing the time averaged profit:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))dt \to \max.$$

V.I.Arnold shows that in a typical case the motion along an optimal cycle uses the maximum and minimum velocities when the profit density is less or greater than a certain constant, respectively [1], [2], [3]. We prove an analogous result in the presence of a positive discount rate σ, $\sigma > 0$, when the optimization problem is of the form

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\sigma t} f(x(t))dt \to \max,$$

namely, we show that in such a case the motion along optimal cycle also uses maximum or minimum velocities almost everywhere.

The work was completed by partial financial support of RFBR grants 06-01-00661-a, NSH - 709.2008.1.

References

1. V.I. Arnol'd, - *Averaged optimization and phase transition in control dynamical systems//* Funct. Anal. and its Appl. **36** (2002), 1-11.
2. A.A Davydov, - *Generic singularities in Arnold's model of cyclic processes//* Proc. Steklov Inst. Math. 250 (2005), 70-84.
3. A.A Davydov, H. Mena Matos, - *Generic phase transition and profit singularities in Arnold's model//* Sbornik: Mathematics 198:1, 17-37, 2007.

ON A SOLVABILITY OF NONLINEAR DIFFERENCE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Andrianov D. L., Simonov P. M. (Perm State University)
simonov@econ.psu.ru

In nonlinear boundary value problems the dynamics of variable is described by an equation:

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{1}$$

and boundary conditions

$$\eta x = 0. \tag{2}$$

Here $F : M^n_{m+1} \to M^n_m$ и $\eta : M^n_m \to R^n$ are nonlinear continuous operators, M^n_{m+1} and M^n_m — $n \times (m+1)$ and $n \times m$ are real matrices. For the investigation of that boundary value problems there is used schemes with construction and using of a priori inequalities of view:

$$\|x(t)\| \le \mathcal{M}(t, \|x(0)\|). \tag{3}$$

Let us $\varphi(t, \alpha)$ solution of initial value problem

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0, 1, \ldots, m-1; \quad x(0) = \alpha.$$

Then the solvability of the bounded problem (1), (2) is equivalent to the solvability of an equation

$$\eta(\varphi(\cdot\,, \alpha)) = 0$$

relatively $\alpha \in R^n$. The solvability of this equation may be establish using an inequality (3).

Theorem. *Let's*

$$\|x(0) - \eta x\| \le \mu(\|x(\cdot+1)\|, \|x(0)\|), \quad \forall x \in M^n_{m+1},$$

$$\|\varphi(t, \alpha)\| \le \mathcal{M}(t, \|\alpha\|), \quad \forall t = 0, 1, \ldots, m, \quad \alpha \in R^n,$$

though an function $\mu : M^1_m \times [0, \infty) \to R^1$ doesn't decreases on every argument, and an function $\mathcal{M}$: $\{0, 1, \ldots, m\} \times [0, \infty) \to R^n$ doesn't decreases on the second argument.

Then the problem (1), (2) is solvable, if the next set is bounded

$$\{\delta \ge 0 : \delta \le \mu(\mathcal{M}(\cdot+1, \delta), \delta)\}.$$

This work was supported by the RFBR (Grant 06-01-00744-a) and by the RFBR and the Administration of the Perm Region (Grant 07-01-96060-r-ural-a) and Company "PROGNOZ"

FUNCTIONAL MODEL FOR FINITE CONNECTED DOMAINS AND INNER-OUTER FACTORIZATION OF OPERATOR VALUED FUNCTIONS

Tikhonov A. S. (Taurida National University)
tikhonov@club.cris.net

We consider operator valued functions of *weighted Schur classes*

$$S_{\Xi} := \{ (\Theta^+, \Xi_+, \Xi_-) \ : \ \Theta^+ \in H^\infty(G_+, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}_-)), \quad \forall\, \zeta \in C \ \forall\, n \in \mathfrak{N}_+ \quad ||\Theta^+(\zeta)n||_{-,\zeta} \le ||n||_{+,\zeta} \},$$

where $\mathfrak{N}_\pm$ are separable Hilbert spaces; G_+ is a finite connected domain of the complex plane bounded by a rectifiable Carleson curve C, $\Xi_\pm$ are operator valued weights such that $\Xi_\pm, \Xi_\pm^{-1} \in L^\infty(C, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_\pm))$, $\Xi_\pm(\zeta) \ge 0$, $\zeta \in C$, and $||n||_{\pm,\zeta} := (\Xi_\pm(\zeta)n, n)^{1/2}$, $n \in \mathfrak{N}_\pm$.

A function $\Theta^+ \in S_\Xi$ is called

1. Ξ-inner if $||\Theta^+(\zeta)n||_{-,\zeta} \overset{a.e.}{=} ||n||_{+,\zeta}$;
2. Ξ-outer if it has no non-trivial left Ξ-inner divisors;
3. Ξ-unitary constant if Θ^+ is Ξ-inner and $(\Theta^+)^{-1} \in H^\infty(G_+)$.

By means of Functional Model we establish existence and uniqueness (up to Ξ-unitary constant) of the inner-outer factorization

$$\Theta = \Theta_{in}\Theta_{out}.$$

We give another characterization for Ξ-outer functions and prove regularity of this factorization.

Acknowledgement. This research was supported by INTAS grant, project 05-1000008-7883.

References

1. Szökefalvi-Nagy B., Foiaş C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* North-Holland, Amsterdam-London, 1970.
2. Tikhonov A.S., *On connection between factorizations of weighted Schur function and invariant subspaces.* Operator Theory: Adv. and Appl., Vol.**174** (2007), 205-246.

SPECTRAL PROBLEMS, ARISING IN THE THEORY OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vlasov V. V. (Moscow Lomonosov State University)
vicvvlasov@rambler.ru

We study functional differential and integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. The main part of the equation under consideration is an abstract hyperbolic-type equation, disturbed by terms with delay arguments and terms involving Volterra operators.

$$\begin{gathered} \tfrac{d^2u}{dt^2}(t) + A^2u(t) + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(B_j(t)Au\left(g_j(t)\right) + D_j(t)\tfrac{du}{dt}\left(g_j(t)\right)\right) \\ + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)Au(s)ds + \int\limits_{-\infty}^{t} Q(t-s)u^{(1)}(s)ds = f(t), \quad t > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

subject to

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]. \tag{2}$$

Here A-is positive selfadjoint operator in the Hilbert space H having compact inverse, $B_j(t)$ and $D_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, are operator-valued functions taking values in the ring of bounded operators in H; $K(t)$ and $Q(t)$ are operator-valued functions taking values in the ring of bounded operators in H, Bochner integrable on the semiaxis $\mathbb{R}_+$ with weight $e^{-\varkappa t}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varkappa t}\|K(t)\|dt < +\infty, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varkappa t}\|Q(t)\|dt < +\infty; \tag{3}$$

$g_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, are real valued continuously differentiable functions on $\mathbb{R}_+$, such that $g_j(t) \le t$, $g_j^{(1)}(t) > 0$ for $t \in \mathbb{R}_+$. In addition we assume $Af \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, $\varphi \in W_{2,\gamma_1}^2(\mathbb{R}_-, A^2)$ for certain γ_0 and $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

Our work, in comparison with most existing studies in the subject area, focuses on the case of variable delays and variable operator coefficients. We establish the solvability of the corresponding classical initial value problem in weighted Sobolev spaces on semiaxis. Under certain assumptions on coefficients and delays we study several spectral problems in autonomous cases, by considering the operator-valued functions as the symbols of the equations under investigation. We also present some applications of our results to the integrodifferential equation of Gurtin-Pipkin type arising from the theory of heat equations with memory.

Our results generalize those in [1] and continues the studies of abstract functional differential equations in [2]. More details of the formulations and proofs of the results are given in [3].

The research of V. Vlasov is supported by the RFBR (grant N 08-01-00595, N 08-01-00180), and also Leading Scientific School 2327.2008.1.

References

1. V. V. Vlasov, K. I. Shmatov, Correct solvability of hyperbolic differential equations with aftereffect in a Hilbert space, *Proceedings Steclov Inst. Math., 4, 243 (2003), 120-130.*
2. D. A. Medvedev, V. V. Vlasov, J. Wu, Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations, *Functional Differential Equations, **15**, 3-4 (2008), 249-272.*
3. V. V. Vlasov, J. Wu, Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay, *Functional Differential Equations* (submitted).

2. Теория функций.

ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Абанин А.В. (Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru

Пусть ω — канонический вес, $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ — пространства ультрадифференцируемых функций и ультраджетов Уитни на компакте K типа Берлинга, соответственно. Говорят, что для $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ справедлива теорема Уитни о продолжении, если оператор сужения $\rho_K : f \to f|_K$ отображает $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ на все $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$. В [1], [2] (см. также [3]) установлено, что независимо от структуры компакта необходимым и достаточным условием справедливости теоремы Уитни для $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ является строгость ω. Для строгих весов представляет интерес задача о наличии оператора продолжения. При этом говорят, что компакт K обладает оператором ω–продолжения, если среди всех способов продолжения джетов из $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ до функций из $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ можно выбрать такой, что соответствующий оператор продолжения окажется линейным и непрерывным из $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ в $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Как известно [4], существование оператора ω–продолжения, как правило, зависит от компакта. В докладе будет представлен формулируемый ниже функциональный критерий, в котором существование оператора ω–продолжения в одномерном случае характеризуется в терминах аналитических вне компакта функций.

Не ограничивая общности, считаем, что $\omega(t) \le t$ при всех t и что $\omega(1) = 1$. Положим $\omega^*(r) := \sup\{\omega(t) - tr : t \ge 0\}$ и зададим по этой функции последовательность весов $p_n(z)$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующим образом: $p_n(z) = n\omega^*(dist(z, K))$ при $dist(z, K) \le 1$ и $p_n(z) = \omega^*(dist(z, K))$ при $dist(z, K) > 1$. Обозначим через $H_0(CK)$ пространство аналитических в $\mathbb{C} \setminus K$ функций, которые исчезают в бесконечности.

Теорема. *Пусть ω — строгая весовая функция. Для того чтобы одномерный компакт K обладал оператором ω–продолжения, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой номер n_0, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеются $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, при которых каждую функцию f из $H_0(CK)$, удовлетворяющую в $\mathbb{C}$ неравенству $\ln|f(z)| \le p_n(z)$, можно было при любом $t > 0$ представить в виде $f = f_1 + f_2$, где f_1 и f_2 — функции из $H_0(CK)$ такие, что всюду в $\mathbb{C}$ имеют место оценки: $\ln|f_1(z)| \le p_{n_0}(z) + t$ и $\ln|f_2(z)| \le C + p_m(z) - t$.*

Литература

1. Bonet J., Braun R., Meise R., and Taylor B. A. Whitney's extension theorem for non-quasianalityc classes of ultradifferentiable functions // Stud. Math. 1991. V.99. P.155–184.
2. Abanin A. V. On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions // Math. Ann. 2001. V.320. P.115–126.
3. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.
4. Franken U. Continuous linear extension of ultradifferentiable functions of Beurling type // Math. Nachr.—1993.—V. 164.— P. 119–139.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

Авхадиев Ф.Г. (Казань)
favhadiev@ksu.ru

В работах последнего времени по многомерным вариационным неравенствам типа Харди наметился новый этап: переход от теорем существования к явным оценкам констант в зависимости от геометрических характеристик областей (см. статьи [1-4] и библиографию в них). В докладе будут изложены основные результаты этих исследований, новые факты и некоторые нерешенные задачи. Приведем одно утверждение из [1].

Пусть Ω–открытое, выпуклое, собственное подмножество евклидова пространства $\mathbf{R^n}$, $\delta = dist(x, \partial\Omega)$, $\delta_0 = \sup\ \delta$, $\nu \in [0, 1/2]$. Тогда для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\nabla f|^2\,dx \ \geq\ \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\int_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2}\,dx + \frac{\lambda_\nu^2}{\delta_0^2}\int_\Omega |f|^2\,dx.$$

Постоянная λ_ν определяется как первый положительный корень уравнения типа Лямба $J_\nu(\lambda_\nu) + 2\lambda_\nu J_\nu'(\lambda_\nu) = 0$ для функций Бесселя, причем множитель λ_ν^2 является точной во всех размерностях. В частности, случай $\nu = 0$ с постоянной $\lambda_0 = 0,940\ldots$ дает усиление неравенства типа Харди, предложенного в [2] для выпуклых областей с конечным диаметром.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00381.

Литература

1. F. G. Avkhadiev and K.-J. Wirths. Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains. ZAMM **14** (2007), no.8-9, 532–542.

2. H. Brezis and M. Marcus. Hardy's inequalities revisited. Dedicated to Ennio De Giorgi, Ann. Scuola Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **25** (1997, 1998), 217–237.

3. S. Fillippas, V. Maz'ya, A. Tertikas. On a question of Brezis and Marcus. Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2005),no. 4, 491–501.

4. M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof and A. Laptev. A Geometrical Version of Hardy's Inequality. J. Func. Anal. **189** (2002), 539–548.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНОГО ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМОЙ РАДЕМАХЕРА

Асташкин С.В. (Самарский госуниверситет)
astashkn@ssu.samara.ru

Пусть X — произвольное перестановочно инвариантное пространство на [0,1], а $\mathcal{R}(X)$ — замкнутое подпространство X, состоящее из всех функций, являющихся п.в. суммами рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ по системе Радемахера с вещественными коэффициентами. Определим $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ как множество всех таких измеримых функций $x = x(t)$, что $x \cdot y \in X$ для каждой $y \in \mathcal{R}(X)$. Нетрудно проверить, что это банахово идеальное пространство относительно следующей нормы

$$\|x\|_{\Lambda(\mathcal{R},X)} = \sup\{\|x \cdot y\|_X : y \in \mathcal{R}(X), \|y\|_X \leq 1\}.$$

Множество $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ можно рассматривать как пространство мультипликаторов, ограниченно действующих из подпространства $\mathcal{R}(X)$ во все пространство X.

Нас интересует вопрос, в каком случае $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ — перестановочно инвариантное пространство. Ранее в [1] было показано, что это возможно лишь для пространств X, достаточно "близких" к пространству L^∞. Кроме того, в [2] доказано, что $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L^\infty$ тогда и только тогда, когда функция $\log^{1/2}(2/t)$ не принадлежит замыканию L^∞ в X. Рассматривается также ситуация, когда $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ — перестановочно инвариантное пространство, отличное от L^∞. В качестве следствия получен локальный вариант неравенства Хинчина, справедливый для широкого класса перестановочно инвариантных пространств.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 07-01-96603.

Литература

1. S. V. Astashkin and G. P. Curbera, Symmetric kernel of Rademacher multiplicator spaces, *J. Funct. Anal.* **226** (2005) 173–192.

2. S. V. Astashkin and G. P. Curbera, Rademacher multiplicator spaces equal to L^∞, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008) 3493–3501.

ОЦЕНКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА

Балгимбаева Ш.А. (Алматы)
balsholpan@yandex.ru, im@math.kz

Задача оптимального восстановления оператора L на множестве M со значениями в метрическом пространстве X по информации I заключается в нахождении (или оценке) величины

$$E(M, L, I) = \inf \sup_{x \in M} \rho(L(x), S(I(x))),$$

где inf берется по всевозможным отображениям (методам восстановления $S : I(M) \to X$), ρ — метрика пространства X(см., например, [1]).

Нами рассмотрена задача оптимального восстановления дифференциального оператора эллиптического типа произвольного порядка с постоянными коэффициентами $L := \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1 \ldots \partial^{\alpha_n}x_n} + \sum\limits_{|\alpha|<m} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1 \ldots \partial^{\alpha_n}x_n}$ в анизотропном пространстве Никольского - Бесова $B^{\mathbf{s}}_{p,\theta}, 1 < p < \infty, 1 \le \theta \le \infty$, $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n) \in (0, \infty)^n$, по информации о спектре (преобразовании Фурье) $\mathcal{F}$ и получена оценка:

$$E(M, L, \mathcal{F}|_{\Omega_\sigma}) \asymp 2^{-j_\sigma(\varkappa s - t)},$$

где $M := \{f \in B^{\mathbf{s}}_{p,\theta} : \|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}\| \le 1\}$, s — среднее гармоническое чисел $s_1, ..., s_n$: $\frac{1}{s} = \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{1}{s_i}$, $\mathcal{F}|_{\Omega_\sigma}$ — сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}$ на множество $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}^n$: $\Omega_\sigma = \{\xi : \|\xi\|_a < \sigma\}, \sigma > 0$, $\varkappa := 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i}$, $t < \varkappa s$, $X = B^{\mathbf{t}}_{p\theta}$.

По - видимому, впервые задачи оптимального восстановления операторов на функциональных классах на основе информации о спектре были рассмотрены Г.Г. Магарил - Ильяевым и К.Ю. Осипенко (см., например, [2]).

Литература

1. Женсыкбаев А. А. Проблемы восстановления операторов. М.-Ижевск, 2003, 412 с.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. // Матем. сб. 2002. Т.193, вып.3. С.79-100.

КУСОЧНО-МОНОТОННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ВАТЕРМАНА

Бахвалов А.Н. (Москва)
anbakh@rol.ru

Непрерывная функция на отрезке называется кусочно-монотонной порядка n, если отрезок можно разбить на n промежутков так, что на каждом из них функция монотонна, а на объединении любых двух соседних - не монотонна. В [1] это определение обобщено на случай разрывных функций. Для функции f через $M_n[f, I]$ обозначим наилучшее приближение её кусочно-монотонной функцией порядка не выше n в равномерной метрике на I.

Е. А. Севастьяновым [1] установлена связь скорости убывания величин $M_n[f, I]$ с принадлежностью f классам ограниченной Ф-вариации.

В настоящей работе получен аналогичный результат для классов Ватермана [2]. Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_k\}$ таких, что $\overline{I_k} \subset I$. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ такова, что $0 < \lambda_n \le \lambda_{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Λ-вариацией функции f на промежутке I называется величина

$$V_\Lambda(f; I) = \sup_{\{I_n\} \in \Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}.$$

Если она конечна, то говорят, что f принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV(I)$

Теорема. *Пусть $\{a_k\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Для того, чтобы каждая функция f на отрезке I, для которой $M_k[f, I] \le a_k$, имела конечную Λ-вариацию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} < \infty$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-2787.2008.1)

Литература

1. Севастьянов Е.А., Кусочно монотонная аппроксимация и Ф-вариация.//Analysis Math. 1975. **1**. 141–164.
2. Waterman D., On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation. // Studia math. 1972. **44**, N 1. P.107–117.

ТЕОРЕМЫ О СЛЕДЕ И ПРОДОЛЖЕНИИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА

Бекмаганбетов К.А. (Астана, Казахстан)
bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Нами получены предельные теоремы о следе и продолжении для анизотропных пространств Бесова $B^{\alpha\mathbf{q}}_{\mathbf{pr}}(\mathrm{T}^n)$, где $\mathbf{0} \le \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} = (p_1, .., p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, .., q_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, .., r_n) \le \infty$, взятых по метрике анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathrm{T}^n)$ ([1]).

Для произвольного вектора $\mathbf{a} = (a_1, .., a_m, a_{m+1}, .., a_n)$ положим $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, .., a_m)$, где $1 \le m \le n-1$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_m, \alpha_{m+1}, .., \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, .., q_m, q_{m+1}, .., q_n) \le \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, .., p_m, p_{m+1}, .., p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{r} = (r_1, .., r_m, r_{m+1}, .., r_n) \le \infty$, *тогда при* $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ *для* $i = m+1, \dots, n$ *имеет место вложение* $B^{\alpha \mathbf{q}}_{\mathbf{pr}}(\mathrm{T}^n) \hookrightarrow B^{\bar{\alpha}\bar{\mathbf{q}}}_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}}}(\mathrm{T}^m)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_m, \alpha_{m+1}, .., \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, .., q_m, q_{m+1}, .., q_n) \le \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, .., p_m, p_{m+1}, .., p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{r} = (r_1, .., r_m, r_{m+1}, .., r_n) \le \infty$, *тогда для* $\varphi(x_1, .., x_m) \in B^{\bar{\alpha}\bar{\mathbf{q}}}_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}}}(\mathrm{T}^m)$, *при* $\alpha_i = 1/p_i$ *и* $q_i = 1$ *для* $i = m+1, \dots, n$, *можно построить функцию* $f(x_1, .., x_m, x_{m+1}, .., x_n)$ *от* n *переменых, обладающую следующими свойствами*

1) $f \in B^{\alpha \mathbf{q}}_{\mathbf{pr}}(\mathrm{T}^n)$ *и* $\|f\|_{B^{\alpha \mathbf{q}}_{\mathbf{pr}}(\mathrm{T}^n)} \le C \|\varphi\|_{B^{\bar{\alpha}\bar{\mathbf{q}}}_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}}}(\mathrm{T}^m)}$;

2) $f(x_1, .., x_m, 0, .., 0) = \varphi(x_1, .., x_m)$.

Замечание. В теоремах 1 – 2, в отличие от классических теорем вложения разных измерений, нам удалось достичь предельного случая для „сильных" гладкостных и метрических параметров пространства, то есть $\alpha_i = 1/p_i$ при $i = m+1, \dots, n$, за счет того, что $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ (ранее этот эффект был замечен в работе О.В. Бесова [2]). При этом полученные условия не ведут к расширениям пространств из правых частей, по остальным "сильным" параметрам.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта программ фундаментальных исследований МОН РК, рег. № 0106РК01141.

Литература

1. Нурсултанов Е.Д. *Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения*// Доклады РАН. 2004. Т. **394**: 1. С. 1 - 4.

2. Бесов О. В. *Классы функций с обобщенным смешанным условием Гельдера*// Труды МИАН СССР. 1969. Т. 105. С. 21 – 29.

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТЕОРЕМЫ ИСПРАВИМОСТИ

Бережной Е.И. (Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова)
ber@uniyar.ac.ru

Пусть X – симметричное пространство функций на $I = [0,1]^n$, $\chi(D)$ — характеристическая функция множества $D \subset I$ и $D_\delta = \{t \in D : t + \delta \in D\}$. С помощью формулы

$$\Omega(f, h; D, X) = \sup_{0 \le \delta \le h} \|(f(. + \delta) - f(.))\chi(D_\delta)|X\|$$

определим модуль непрерывности функции f на D, вычисленный в пространстве X. Пусть $\Lambda^{\alpha}_{X,p}$ – пространство типа Бесова с нормой

$$\|f|\Lambda^{\alpha}_{X,p}\| = (\sum_{i=1}^{\infty}(2^{\alpha i} \cdot \Omega(f, 2^{-i}; I, X))^p)^{1/p}, \quad (\alpha \in (0,1), p \in [1, \infty)).$$

В геометрической теории банаховых пространств гладких функций значительный интерес представляет следующая задача.

Задача В. Зафиксируем пространство $\Lambda^{\alpha}_{X,p}$, функцию $f \in \Lambda^{\alpha}_{X,p}$ и число $\varepsilon > 0$. Для каждого множества M, мера которого не меньше $1 - \varepsilon$, вычислим модуль непрерывности сужения функции f на множество $M : \Omega(f, \varepsilon; M, L^\infty)$. Требуется найти нижнюю грань $\Omega(f, \varepsilon; M, L^\infty)$ по всем множествам M.

Дается полное решение задачи В для пространства функций $\Lambda^{\alpha}_{X,p}$. Выбирая в качестве пространства X различные симметричные пространства, получается окончательное решение задачи В для пространств Бесова состоящих из функций с заданным модулем непрерывности, который вычислен в пространстве Лебега L^p, пространстве Орлича L_h и вообще в любом симметричном пространстве.

Здесь же дается также окончательное решение задачи об исправимости для функций из $\Lambda^{\alpha}_{X,p}$.

Выполнение работы поддержано РФФИ, проект N 08-01-00669.

Литература

1. Бережной Е. И. *О подпространствах пространств Гельдера, состоящих из функций минимальной гладкости.* Доклады РАН. - 2004. - Т. 398, N 5. - С. 1-4.

2. Бережной Е. И. *О подпространствах C[0,1], состоящих из негладких функций.* Матем. заметки. - 2007. - Т. 81, N 4. - С. 490-495.

ПРИБЛИЖЕНИЕ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ НА ПОЛУОСИ

Бородин П.А. (Москва)
pborodin@inbox.ru

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}$ — комплексные числа, а $P(z) = (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$.

С помощью одного результата В.И. Данченко [1] в работе [2] было доказано, что любая комплекснозначная функция f, заданная на действительной оси R и такая, что $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, может быть с любой точностью равномерно на R приближена наипростейшими дробями.

В то же время, как было отмечено в [2] (и следует из других результатов работы [1]), наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси не плотны ни в одном из (содержащих их) пространств $L_p(R)$, $1 < p < \infty$. Класс $S_p(R)$ функций из $L_p(R)$, с любой точностью приближаемых в этом пространстве наипростейшими дробями, был полностью описан В.Ю. Протасовым в [3].

Доклад посвящен аппроксимативным свойствам наипростейших дробей на полуоси $R_+ = [0, \infty)$.

Теорема. *Для любого* $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *наипростейшие дроби с полюсами в угле* $\Lambda_\gamma = \{z : \arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)\}$ *содержатся в собственном полупространстве пространства* $L_p(R_+)$ *(в частности, не всюду плотны в этом пространстве) при каждом* $p \in \left(1, \frac{2\pi - 2\gamma}{\pi - 2\gamma}\right)$ *и всюду плотны в* $L_p(R_+)$ *при каждом* $p \geq \frac{2\pi-2\gamma}{\pi-2\gamma}$.

Следствие. *Если* $1 < q \leq 2$, $g \in L_q(R_+)$, $\gamma \in [0, \pi(2-q)/2]$ *и*

$$Re \int_{R_+} \frac{g(t)}{t - z}\, dt \geq 0$$

для любого z *с* $\arg z \in (\gamma, 2\pi - \gamma)$, *то* $g \equiv 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 08-01-00648а).

Литература

1. В.И. Данченко, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80.
2. П.А. Бородин, О.Н. Косухин, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 2005, N 1, 3–8.
3. В.Ю. Протасов, *Известия РАН. Сер. матем.* **75**:2 (2009).

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
ABVAS@phys.msu.ru, butuzov@phys.msu.ru, nefedov@phys.msu.ru

Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущенных уравнений, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Эти уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах.

В качестве иллюстрации мы рассматриваем некоторые классы сингулярно возмущенных задач, в том числе задачи о генерации резких внутренних слоев,об их распространении и формирование устойчивых стационарных или периодических контрастных структур. Представляемые результаты получены в результате дальнейшего развития наших исследований контрастных структур, которые были отражены в обзорной статье [1].

Другой класс сингулярно возмущенных задач. который будет обсуждаться в докладе, составляют задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения (этот случай называется также случаем смены устойчивости). Полученные ранее результаты в этом направлении представлены в обзорной статье [2]. Здесь мы опишем новые подходы и новые результаты, касающиеся существования решений для различных задач этого класса задач, их асимптотик, устойчивости и формирования.

Наше строгое исследование рассмотренных задач базируется на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 08-01-00413.

Литература

1. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах”, Фундаментальная и прикладная математика, 4, No.3, 799-851 (1998).

2. V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider " Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities," Journal of Mathematical Sciences, 121, No.1, 1973 - 2079 (2004).

МЕРА КАНТОРА-ЛЕБЕГА В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ

Быкова М.А., Стрелков Н.А. (Ярославль)
strelkov@uniyar.ac.ru

Пусть μ — мера Кантора–Лебега, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(z; a, \xi) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos\{a(1-\xi)\xi^k z\}.$$

Носитель меры μ — симметрическое совершенное множество канторова типа с постоянным отношением разбиения $\xi \in (0, 1/2)$ вида

$$E = E(a, \xi) = \left\{ x \in [-a, a] : \ x = a(1-\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k, \ \alpha_k \in \{-1; 1\} \right\},$$

а ее функция распределения – функция Лебега, построенная по рассматриваемому множеству канторова типа ("канторова лестница" отрезка $[-a, a]$).

Множество E может быть построено следующим образом: из отрезка $[-a, a]$ удаляется центральный интервал $(-(1-2\xi)a, (1-2\xi)a)$, остаются два отрезка равной длины $2a\xi$; в каждом из этих отрезков удаляется центральный интервал длины $2a\xi(1-2\xi)$, остаются четыре отрезка длины $2a\xi^2$ и т.д. Тогда E есть пересечение всех остающихся отрезков. Если $\xi = 1/3$, то E — классическое канторово множество.

Меры такого вида обладают рядом свойств, дающих возможность применять их в численном анализе. Например, пусть $z = (z_1, z_2)$, $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(z_1 + z_2; 1/3, 1/4)\widehat{\mu}(z_1 - z_2; 1/6, 1/4)$ и

$$\widehat{\varphi}(z) = \widehat{\mu}(z)\widehat{\chi}_{[-1/2,1/2]^2}(z).$$

Тогда если $\varphi_k^h(x) = \varphi(x/h - k)$, то $V^h = \operatorname{span}\left\{\varphi_k^h\right\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ — асимптотически оптимальное подпространство пространства $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, порождающее проекционно-сеточный аналог оператора Лапласа, совпадающий с его простейшим разностным аналогом типа "крест". При этом подпространство V^h порождается функцией φ, носитель которой имеет фрактальную структуру.

Предполагается обсудить экзотические ситуации такого рода, возникающие в других областях численного анализа, а также поставить ряд задач, связанных с подобной тематикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00385).

НАИЛУЧШИЕ M-ЧЛЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

Войтенко С.П. (Институт математики НАН Украины, Киев)
svmath@mail.ru

Пусть L_q - пространство Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ со стандартной нормой $\| \cdot \|_q$. В работе [1] были рассмотренны классы $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые при $\omega(\tau) = \tau^r$ совпадают с известными классами Бесова–Никольского $B^{\Omega}_{r,\theta}$ (см., например, [2]). В дальнейшем будем считать, что $\omega(\tau)$ — функция типа модуля непрерывности порядка l, $l \in N$, которая удовлетворяет условиям Бари - Стечкина [3] (S) с некоторым $\alpha > \alpha(p,q)$ и (S_l). Этот факт кратко будем записывать так: $\omega \in \Phi^*_l$, $\alpha > \alpha(p,q)$.

Получены точные по порядку оценки наилучших M-членных тригонометрических приближений $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, которые определяются следующим образом:

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - \sum\nolimits_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_q,$$

где $\{k^j\}_{j=1}^M$ — набор векторов $k^j = (k_1^j, ..., k_d^j)$ с целочисленными координатами, c_j — произвольные числа, F — некоторый функциональный класс.

Теорема. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_l^*$ *и*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d(1/p - 1/q)_+, & 1 \le p \le q \le 2 \text{ или } 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\{d/p; d/2\}, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда для $\alpha > \alpha(p,q)$

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p - \max\{1/q, 1/2\})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Литература

1. Li Yongping, Xu Guiqiao. The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // Journal of Complexity. — 2002. — V. 18. — P. 815 - 832.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.
3. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483 - 522.

ОБ ОТСУТСТВИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВО ВНЕШНОСТИ ШАРА

Володин Ю.В. (РГСУ, Москва)

vjv@inbox.ru

Пусть $B_R = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \le R\}$ — шар радиуса R в пространстве $\mathbf{R}^N$, $B'_R = \mathbf{R}^N \setminus B'_R$ — внешность этого шара.

Рассмотрим систему дифференциальных неравенств с бигармоническим оператором:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m v \ge |u|^q, \\ (-\Delta)^m u \ge |v|^p, \end{cases} \qquad u(x),\, v(x) \colon B'_R \to \mathbf{R}. \tag{1}$$

Здесь p, $q > 1$, $m \in \mathbf{N}$. Условия на границе ∂B_R заданы следующим образом

$$\begin{cases} (-\Delta)^i u = g_i, \\ (-\Delta)^i v = h_i, \end{cases} \qquad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1. \tag{2}$$

Определение. *Глобальным решением* краевой задачи (1)–(2) назовем пару функций $u(x)$, $v(x) \in C^{2m}(B'_R)$, удовлетворяющих заданным условиям на границе (2) и неравенству (1) в каждой точке множества B'_R.

Введём следующие обозначения

$$\int_{\partial B_R} g_i \, ds = a_i, \quad \int_{\partial B_R} h_i \, ds = b_i, \qquad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1,$$

где a_i, b_i — некоторые действительные числа.

Теорема. *Пусть* $N \ge 3$ *и*

$$\begin{array}{l} (-1)^n a_{m-n} \le 0,\ (-1)^{m-i} a_i > 0, \\ (-1)^n b_{m-n} \le 0,\ (-1)^{m-i} b_i > 0, \end{array}$$

при $1 \le n \le m$ *и* $i = m - n + 1, \ldots, m - 1$. *Тогда краевая задача (1)-(2) не имеет нетривиальных глобальных решений при*

$$\frac{N}{2} \le m - n + 1 + \frac{m\big(\max\{p,\, q\} + 1\big)}{pq - 1}.$$

Таким образом, задача (1)–(2) имеет ровно m различных критических показателей в зависимости от ограничений на условия на границе.

ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ НОРМ СУММ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С КРАТНО МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вуколова Т.М. (Москва)

Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin mx \sin ny$.

Будем говорить, что сумма ряда - функция $g(x,y) \in L_{p_1p_2}$, где $p_i \in (0;\infty)$, если

$$\|g\|_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} |g(x,y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty.$$

Для целых $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$ обозначим

$$\Delta_{k_1k_2} a_{mn} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^j a_{m+in+j}.$$

Пусть последовательность $\{a_{mn}\}$ удовлетворяет условиям $a_{mn} \to 0$ при $m \to \infty$ и любом n, $a_{mn} \to 0$ при $n \to \infty$ и любом m и $\Delta_{k_1k_2} a_{mn} \geq 0$ для любых m и n и некоторых k_1 и k_2. Тогда

а) если $p_i \in (0;\infty)$, $k_i \geq 1$, то справедливо неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{k_2p_2-2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{k_1p_1-2} \left(\Delta_{k_1-1k_2-1} a_{mn}\right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq A_1 \|g\|_{p_1p_2};$$

б) если $p_i \in (1;\infty), k_i \geq 2$, или, если $p_i \in (0;\infty), k_i = 1$, или, если $p_1 \in (0;\infty), k_1 = 1$, и $p_2 \in (1;\infty), k_2 \geq 2$, или, если $p_1 \in (1;\infty), k_1 \geq 2$, и $p_2 \in (0;\infty), k_2 = 1$, то справедливо неравенство

$$\|g\|_{p_1p_2} \leq A_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{k_2p_2-2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{k_1p_1-2} \left(\Delta_{k_1-1k_2-1} a_{mn}\right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

где постоянные A_1 и A_2 не зависят от последовательности $\{a_{mn}\}$;

в) если $p_i \in (0;1]$, $k_i \geq 2$, или, если $p_1 \in (0;1]$, $k_1 \geq 2$ и $p_2 \in (0;\infty)$, $k_2 = 1$, или, если $p_1 \in (0;\infty)$, $k_1 = 1$ и $p_2 \in (0;1]$, $k_2 \geq 2$, то не существует такой постоянной A_2, зависящей только от p_1, p_2, k_1 и k_2, что для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, удовлетворяющей отмеченным в пункте в) условиям на k_i, и для соответствующей функции $g(x,y)$ было бы справедливо неравенство пункта б).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302).

МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА СЛАГАЕМЫХ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Галатенко В.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
vvgalatenko@yahoo.com

Стандартная постановка задачи об n-членном приближении заключается в следующем. Фиксируются набор элементов банахова пространства (словарь), разрешенное число слагаемых n и приближаемый элемент f. Требуется найти линейную комбинацию элементов словаря, содержащую не более n слагаемых и приближающую f с наименьшей погрешностью. Такая постановка задачи является достаточно хорошо изученной, для ее решения разработаны различные методы выбора используемых элементов словаря и вычисления коэффициентов, например, жадные разложения (см. [1], [2]).

Естественной является и другая постановка задачи: фиксируются словарь E банахова пространства B, приближаемый элемент $f \in B$ и разрешенная погрешность $\varepsilon > 0$; требуется построить линейную комбинацию элементов словаря, приближающую f с погрешностью, не превосходящей ε, и содержащую минимальное число слагаемых. Несмотря на естественность и важное прикладное значение, эта задача до сих пор остается практически неизученной даже в частных случаях. Оказывается однако, что в отдельных случаях сформулированная задача имеет конструктивные решения, обеспечивающие для каждой пары (f,ε) точный минимум числа используемых слагаемых.

Теорема. *Пусть $B = C([0,1]^*)$— пространство непрерывных на модифицированном отрезке функций со стандартной нормой, а словарь E состоит из характеристических функций двоичных подотрезков модифицированного отрезка $[0,1]^*$. Тогда задача поиска требуемой линейной комбинации сводится к имеющей конструктивное решение задаче, связанной с бинарными деревьями.*

Аналогичная теорема имеет место и для обычного отрезка $[0,1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00799) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2787.2008.1).

Литература

1. Temlyakov *V. Greedy expansions in Banach spaces* // Adv. in Comput. Math. — 2007. **26** (4). — P. 431–449.
2. Галатенко В.В., Лившиц Е.Д. *Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы* // Матем. заметки, 2005, **78** (2). С. 186–201.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ-УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ L^p

Голубов Б.И. (МФТИ)
golubov@mail.mipt.ru

Преобразование Фурье-Уолша $\tilde{f}$ определяется как интегральный оператор

$$\tilde{f}(x) = \int_{R_+} f(y)\psi(x,y)\,dy, \quad x \in R_+ \equiv [0,+\infty), \qquad (1)$$

где $\psi(x,y) = \pm 1$ — так называемое ядро Уолша. Это преобразование было введено Н.Дж.Файном в 1950 г. Оно обладает свойствами, аналогичными свойствам классического преобразования Фурье. Например, если $f \in L^2(R_+)$, то $\tilde{f} \in L^2(R_+)$ и $\|\tilde{f}\|_2 = \|f\|_2$, где $\|f\|_p$ — L^p-норма функции f на R_+. Если же $f \in L^p(R_+)$, $1 \le p \le 2$, то $\tilde{f} \in L^q(R_+)$ и $\|\tilde{f}\|_q \le \|f\|_p$, где $1/p + 1/q = 1$ (см. [1], гл. 9). Отметим, что $q \ge 2$, если $1 \le p \le 2$. Ниже даются достаточные условия на функцию f, при которых $\tilde{f} \in L^p(R_+)$, $1 < p < 2$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ не возрастает на R_+, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и $f(x)x^{1-2/p} \in L^p(R_+)$, где $1 < p < 2$. Тогда интеграл в правой части равенства (1), рассматриваемый как несобственный с особой точкой $+\infty$, сходится в каждой точке $x > 0$, а определяемая им функция $\tilde{f}(x)$ принадлежит пространству $L^p(R_+)$.*

Лемма. *Для $n \in Z$, $\alpha > 0$, в каждой точке $x > 0$ определена функция $W_n^{(\alpha)}(x) \equiv \lim_{m\to+\infty} \int_{2^{-n}}^{2^m} \psi(x,y)y^{-\alpha}\,dy$, причем $W_n^{(\alpha)} \in L(R_+)$.* (Для $\alpha = 1$ см. [1], с.434, а в общем случае - [3]).

Рассмотрим двоичную свертку $f * W_n^{(\alpha)}(x) = \int_{R_+} f(x \oplus y)W_n^{(\alpha)}(y)\,dy$, где знак $\oplus$ обозначает операцию двоичного сложения (см. [4], с.17).

Определение. *Если для функций $f, g \in L^p(R_+)$, $1 \le p < \infty$, выполняется условие $\lim_{n\to+\infty} \|g - f * W_n^{(\alpha)}\|_p = 0$, то функцию $g \equiv I_\alpha^p(f)$ назовем сильным двоичным интегралом (СДИ) порядка α в пространстве $L^p(R_+)$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p < 2$ и функция $\varphi \in L^p(R_+)$ имеет СДИ $f = I^p_{2/p-1}(\varphi)$. Тогда $\tilde{f} \in L^p(R_+)$.*

Теорема 1 аналогична теореме Харди-Литтлвуда (см. [2], с.150, теорема 82), а теорема 2 аналогична теореме Е.Титчмарша (см. [2], с.152, теорема 83), относящимся к классическому преобразованию Фурье.

Работа поддержана РФФИ, проект 08-01-00669 и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект 2.1.1/1662.

Литература

1. Schipp F., Wade W.R., Simon P., Pal J. Walsh series. Budapest, Akademiai Kiado, 1990.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948.
3. Golubov B.I. On some properties of fractional dyadic derivative and integral // Analysis Math., 32, №3 (2006), p.173-205.
4. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. - Второе издание. М., URSS/ЛКИ, 2008.

О ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Долженко Е.П. (Москва)
eugen@ngcom.ru

Модулем колебания жордановой кривой L (замкнутой, или разомкнутой; с концами, или без них) назовем $d(L;\delta) = \sup\{d(L;z,t) : z,t \in L, |z-t| \le \delta\}$, где $d(L;z,t)$ обозначает либо диаметр дуги $L(z,t) \subset L$ с концами z, t — это в случае разомкнутой кривой L, либо меньший из диаметров двух дуг $L(z,t) \subset L$ с концами z, t — в случае замкнутой кривой L. Определение *модуля спрямляемости* $m(L;\delta)$ кривой L мы получим, заменив здесь диаметр $d(L;z,t)$ дуги $L(z,t)$ её длиной $|L(z,t)|$.

Пусть функция $g(x)$ задана и не убывает при $x \ge 0$ (она может иметь разрывы-скачки), $g(x) \ge x$, $g(0) = g(0+) = 0$. Если $\varepsilon = \text{const} > 0$, то $J(g,\varepsilon)$ и $J_0(g,\varepsilon)$ суть семейства всех таких жордановых кривых L, что $d(L;\delta) \le g(\delta)$, или $m(L;\delta) \le g(\delta)$ $\forall \delta \in [0,\varepsilon]$ соответственно. Ниже G — какая-либо ограниченная односвязная область комплексной плоскости, φ — однолистное конформное отображение G на единичный круг D, ψ — обратное отображение; $\omega(f,E,\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции f на множестве E. Положим $d_g(x) = (\pi^2/4)\,g^2(\sqrt{x}) + x/2$, $m_g(x) = (g(\sqrt{x}) + \sqrt{x})^2/4$, $x = d_g^{-1}(y)$ и $x = m_g^{-1}(y)$, $D_g(x) := \int_1^x dy/d_g^{-1}(y)$ и $M_g(x) := \int_1^x dy/m_g^{-1}(y)$.

Теорема 1. $\partial G \in J(g,\varepsilon) \Rightarrow \omega(\varphi,\overline{G},\delta) \le A\sqrt{g(\delta)}$ *(A не зависит от $\delta \ge 0$).*

Теорема 2. $\partial G \in J(g,\varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi,\overline{D},\delta) \le Bg(\sqrt{D_g^{-1}(\log\delta)})$. $\partial G \in J_0(g,\varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi,\overline{D},\delta) \le B_0\,g(\sqrt{M_g^{-1}(\log\delta)})$, *и если при этом* $g(x) \le cx$ $(c \ge 1)$, *то* $\omega(\psi,\overline{D},\delta) \le B_1\delta^{\alpha(c)}$ *($\delta \ge 0$; $1 = \alpha(1) \ge \alpha(c) \searrow 0$ при $c \nearrow +\infty$; об $\alpha(c)$ и пр. см. [1].*

Работа поддержана грантом 08-01-00648а РФФИ.

Литература

1. Е.П. Долженко, ДАН. 2007. 415 (2). С. 155–159.

АСИМПТОТИКА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ И ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Дольников В.Л., Стрелков Н.А. (Ярославль)
strelkov@uniyar.ac.ru

Рассматривается следующая ситуация. Фиксирована равномерная сетка на прямой и значения функции в узлах этой сетки. Для любого натурального n строится принадлежащий $C^{n-1}(\mathbb{R})$ интерполяционный сплайн n-го порядка и рассматривается поведение последовательности этих сплайнов при $n \to \infty$. Показано, что предельная интерполяционная формула совпадает с известной теоремой Котельникова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00648 и 07-01-00385).

ТЕОРЕМА О СВОЙСТВЕ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Дьяченко А.М. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
dyak86@mail.ru

Для чезаровских средних справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть даны $\rho > 0, \gamma \in \mathbf{R}, \beta > 0, k > 1$ и $\alpha \in (0,1)$. Пусть 2π периодическая по каждому переменному функция $f(x,y)$, измеримая, ограниченная и определенная на квадрате $[-\pi,\pi]^2$, в некоторой точке (x_0,y_0) для $0 < s^2+t^2 < 4\pi^2$ удовлетворяет условию*

$$|f(x_0+s,y_0+t) - f(x_0,y_0)| \le \rho(\sqrt{s^2+t^2})^\alpha \left(\ln \frac{2\pi}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)^\gamma.$$

Пусть $\sigma^\beta_{n;m}(x,y;f)$ - чезаровские (C,β)-средние ряда Фурье функции $f(x,y)$, такие что $\frac{1}{k} \le \frac{n}{m} \le k; n \in$ $\mathbf{N}; m \in \mathbf{N}$. Тогда существуют такие постоянные $\mathbf{C}_i(\alpha,\beta,k,\rho,\gamma)(i = 1,2,3,4)$ что

1) если $\beta > \alpha$, то

$$|\sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f) - f(x_0,y_0)| \le \mathbf{C}_1(\alpha,\beta,k,\rho,\gamma)n^{-\alpha}\,(\ln(n+1))^\gamma\,;$$

2) если $0 < \beta < \alpha$, то

$$|\sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f) - f(x_0,y_0)| \le \mathbf{C}_2(\alpha,\beta,k,\rho,\gamma)n^{-\beta};$$

3) если $0 < \beta = \alpha, \gamma \ne -1$, то

$$|\sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f) - f(x_0,y_0)| \le \mathbf{C}_3(\alpha,\beta,k,\rho,\gamma)n^{-\beta}\,(\ln(n+1))^{\gamma+1}\,;$$

4) если $0 < \beta = \alpha, \gamma = -1$, то

$$|\sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f) - f(x_0,y_0)| \le \mathbf{C}_4(\alpha,\beta,k,\rho,\gamma)n^{-\beta}\ln\ln(n+2).$$

Исследования в данной работе выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект N 08-01-00302а.

ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОМЕТРИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Ефимов Д.А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
DiEfimov@gmail.com

Обозначим $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$. Класс N^q, $q > 0$ определяется как множество всех голоморфных в D функций $f(z)$, для которых $\sup\limits_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + f(z))dx < +\infty, z = x + iy$ ([1],[2]). Класс $\ln L^q(\mathbb{R})$ функций f, для которых выполняется неравенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + |f(x)|)\, dx < +\infty$.

Определим конус в линейном пространстве как множество,замкнутое относительно умножения на положительные числа. Отображение I назовем положительно-однородным, если для него выполняется равенство $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ для всех $\alpha > 0$.

Лемма. *Пусть $q > 0$ и положительно-однородное отображение I конуса $C \subseteq \ln L^q(\mathbb{R})$ является $\ln L^q(\mathbb{R})$-изометричным, то есть $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x)|)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|If(x)|)\, dx$, $f \in C$. Тогда отображение I будет также и $L^p(\mathbb{R})$-изометричным, то есть*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |If(x)|^p\, dx, \quad f \in C,$$

для всех p вида $q + l$, где $l \in \mathbb{Z}_+$ и $l \leq q + 1$.

Следствие. *Пусть $q > 0$ и I — произвольная линейная изометрия пространства N^q. Тогда I имеет вид*

$$(If)(z) = c(\varphi'(z))^{1/p} f(\varphi(z)),\ z \in D,\ f \in N^q, \tag{1}$$

где $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, $\varphi = \Psi^{-1} \circ \psi \circ \Psi, \Psi(z) = (z - i)(z + i)^{-1}$, ψ - конформное отображение открытого единичного круга на себя.

Обратно, если I имеет вид (1) для некоторого отображения $\varphi = \Psi^{-1} \circ \psi \circ \Psi$, то I — линейная изометрия пространства N^q.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ 680.2003.1.

Литература

1. N.Mochizuki. Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half-plane. Hokkaido Math. J. 20 (1991), N 3, 609-620.

2. Y.Iida. Nevanlinna-type spaces on the upper half plane. Nihonkai Mathematical Journal, 12 (2001), No.2, 113–121.

ОБОБЩЁННАЯ ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА ДЛИНЫ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СЕТИ

Иванов А. О., Тужилин А. А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
aoiva@mech.math.msu.su, tuz@mech.math.msu.su

Пусть $G = (V, E)$ — дерево и $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ содержит все вершины из G степени 1 и 2. По структуре дерева G зададим на пространстве $\mathbf{R}^{mn}$ с координатами $(\theta_1^1, \ldots, \theta_1^m, \ldots, \theta_n^1, \ldots, \theta_n^m)$ систему S_G, состоящую из уравнений и неравенств на переменные θ_k^j. Положим $\theta_k = (\theta_k^1, \ldots, \theta_k^m)$ и пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Пусть $e \in E$ и $G_r = (V_r, E_r)$ — одна из двух связных компонент графа $G \setminus e$. Положим $B_r = B \cap V_r = \{v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}\}$. Обозначим через σ_e неравенство $\left\|\sum_{q=1}^p \theta_{k_q}\right\|^2 \leq 1$, а через σ — векторное уравнение $\sum_{k=1}^n \theta_k = 0$. Систему S_G составим из σ и σ_e по всем $e \in E$.

Пусть $|S_G| \subset \mathbf{R}^{mn}$ — множество всех решений системы S_G. Отметим, что $|S_G|$ — выпуклое тело в подпространстве, заданном уравнением σ.

Пусть $\varphi\colon B \to \mathbf{R}^m$ — произвольное отображение, $z_k = \varphi(v_k)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Положим $\rho_\varphi(\theta) = \langle \theta, z \rangle$.

Обозначим через $[G, \varphi]$ линейное пространство всех отображений $\Gamma\colon V \to \mathbf{R}^m$ таких, что $\Gamma|_B = \varphi$. Элементы из $[G, \varphi]$ представляют собой линейные сети в $\mathbf{R}^m$ с границей φ. *Длиной сети* Γ называется сумма длин всех ее ребер, т.е. сумме длин отрезков $[\Gamma(v), \Gamma(w)]$ по всем ребрам $vw \in E$ дерева G. Длина сети является выпуклой функцией на $[G, \varphi]$, а ее критические точки называются *экстремальными сетями*, подробности см. в [1].

Теорема. *Длина каждой экстремальной сети из $[G, \varphi]$ равна наибольшему значению линейной функции ρ_φ на выпуклом множестве $|S_G|$.*

Авторы пользуются случаем выразить свою признательность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00648, 05-01-22002 НЦНИ), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-660.2008.1), программы Эйлера ДААД, а также проекта РНП 2.1.1.7988.

Литература

1. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

ТЕОРЕМА О СЕДЛОВОЙ ТОЧКЕ В ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Иванов Г.Е. (Московский физико-технический институт (ГУ))*g.e.ivanov@mail.ru*

Пусть E — банахово пространство. Для произвольных функций $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ рассмотрим *эпи-сумму* $\big(f \boxplus g\big)(x) = \inf\limits_{u\in E}\Big(f(x-u)+g(u)\Big)$; *эпи-разность* $\big(f \boxminus g\big)(x) = \sup\limits_{u\in E}\Big(f(x+u)-g(u)\Big)$ и *эпи-произведение* функции g на произвольное число $s > 0$: $g_s(x) = sg\left(\frac{x}{s}\right)$, $x \in E$. Будем говорить, что функция f *слабо выпукла* относительно функции g с параметром $s > 0$, если $f \boxplus g_s \boxminus g_s = f$; функция f *слабо вогнута* относительно функции g с параметром $s > 0$, если $f \boxminus g_s \boxplus g_s = f$; функция f *сильно выпукла* относительно функции g с параметром $s > 0$, если $g_s \boxplus f \boxminus f = g_s$.

Теорема 1. *Пусть функция $g : E \to \mathbb{R}$ на любом шаре $B \subset E$ ограничена и равномерно выпукла, а также коэрцитивна, т.е. $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$. Пусть заданы собственные функции $\beta, \gamma : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такие, что для любых чисел $C_\beta > \inf\limits_{x\in E} \beta(x)$ и $C_\gamma > \inf\limits_{x\in E} \gamma(x)$ функции β и γ равномерно непрерывны и равномерно выпуклы на множествах $\{x \in E : \ \beta(x) < C_\beta\}$ и $\{x \in E : \ \gamma(x) < C_\gamma\}$ соответственно. Пусть функции β и γ сильно выпуклы относительно функции g с параметрами $r > 0$ и $t > 0$ соответственно. Пусть функция $\alpha : E \to \mathbb{R}$ слабо выпукла и слабо вогнута относительно функции g с параметрами $R > r$ и $T > t$ соответственно.*

Тогда существуют непрерывные функции $u_*, v_* : E \to E$ такие, что для любого вектора $x \in E$ пара векторов $\big(u_*(x), v_*(x)\big)$ составляет седловую точку функции $f_x(u,v) = \alpha(x-u+v) + \beta(u) - \gamma(v)$, т.е. $f_x\big(u_*(x), v\big) \le f_x\big(u, v_*(x)\big)$ $\forall x, u, v \in E$.

Замечания. Теорема 1 не следует из известных теорем Дж. фон Неймана, Ки Фаня, М. Сайона и др., так как в условиях теоремы 1 множества $\bigcap\limits_{i=1}^{I} \{u \in E : \ f_x(u, v_i) \le C\}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{I} \{v \in E : \ f_x(u_i, v) \ge C\}$ могут быть не связными. Теорема 1 позволяет получить достаточные условия существования седловой точки в классе программных стратегий для линейных дифференциальных игр.

Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00156-а и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/500.

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ N-СИММЕТРИЧНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Каюмов И.Р. (Казанский университет)
ikayumov@ksu.ru

П. Дюрен в книге по однолистным функциям [1] сформулировал следующую проблему. Пусть n – натуральное число. Для каких значений λ функция

$$f_n(z) = \int_0^z e^{\lambda t^n} dt$$

однолистна в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$?

Следует, отметить, что данная проблема в другой формулировке ранее была исследована В.Н. Гайдуком [2], который решил ее численно для $n \le 10$.

Пусть $\Phi(\lambda, z)$ – функция, голоморфная в области $\{|\lambda| < r\} \times \mathbb{D}$, такая, что $\Phi(0, z) = 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Пусть

$$f_n(\lambda, z) = \int_0^z \Phi(\lambda, t^n) dt. \tag{1}$$

Проблема, поставленная Дюреном может быть сформулирована следующим образом: найти максимальное $\lambda(n)$, такое, что функции (1) однолистны в круге $\mathbb{D}$ для всех λ, таких, что $|\lambda| \le \lambda(n)$.

Положим

$$\varphi(\lambda, z) = z \exp \int_0^z \frac{\Phi(\lambda, t) - 1}{t} dt,$$

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda| : \varphi(\lambda, z) \text{ не однолистна в } \mathbb{D}\},$$

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda| : \varphi(\lambda, z) \text{ однолистна в } \mathbb{D}\}.$$

Следующая теорема позволяет “асимптотически” решить проблему Дюрена.

Теорема. Если существует натуральное N, такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ однолистны (как функции от z) в $\mathbb{D}$ для всех $n \geq N$, то $|\lambda| \leq \lambda_{\max}$.

Обратно, если $|\lambda| < \lambda_{\min}$, то существует натуральное N, такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ однолистны в $\mathbb{D}$ при $n \geq N$.

Отметим, что в задаче Дюрена $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$.

При доказательстве теоремы нами существенно использована λ-лемма Мане, Сада и Сулливана [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00381).

Литература

1. P.L. Duren, Univalent functions. Springer, New York, 1983.

2. В.Н. Гайдук, Об однолистности решений обратных краевых задач, Труды семинара по краевым задачам. Изд-во Казанского ун-та, 1972 , вып. 9. – С. 39-48.

3. R. Mañe, P. Sad and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, Ann. Sci. Ecole. Norm. Super. 4(1983), No 16, 193–217.

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ГИПЕРЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Ключанцев М. И. (Воронеж)
klych@pisem.net

Гиперцилиндрическими называют функции, обобщающие функции Бесселя индекса ν_k на мультииндекс $\nu = (\nu_1, ..., \nu_{r-1})$ [1]. Пусть γ_m, $m = 1, 2, ...$ нули функции $J_{\nu_k}(x)$. Семейства $\left\{J_\nu(r(2^{-1}\gamma_m)^{2/r}x)\right\}$, $\left\{J_{\nu_k}(\gamma_m x^{r/2})\right\}$ биортогональны: интеграл $\int\limits_0^1 dt_k \int\limits_0^\infty ... \int\limits_0^\infty J_\nu(r(2^{-1}\gamma_m)^{2/r} \Pi t_i) J_{\nu_k}(\gamma_m t_k^{r/2}) t_k^{-r\nu_k/2} e^{-\sum{}' t_i^r} \Pi t_i^{-\sum \nu_i + r\nu_i + r - 1} \Pi' dt_i$ равен 0, если $m \neq n$, и $C(\nu)$, если $m = n$. Поскольку $J_\nu(x)$ на бесконечности неограничена, разложение

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(r(2^{-1}\gamma_m)^{r/2}x), \tag{1}$$

в котором коэффициенты a_m вычисляются по стандартной схеме, сходится (имеет смысл), если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty ... \int\limits_0^\infty (f(x\Pi' t_i) - s_n(x\Pi' t_i)) e^{-\sum{}' t_i^r} \times \Pi t_i^{-\Sigma\nu_i + r\nu_i + r - 1} \Pi' dt_i = 0, \quad \Re\nu_i > -\frac{r-1}{r}, \quad \Pi' = \prod_{i\neq k}. \tag{2}$$

Теорема. *Ряд (1) суммируем в смысле (2), если при* $r > 2$

$$x^{r\Sigma\nu_i + (r-1)(r-2)} f\left(x^{r-2}\right) e^{-x^r} \in L_1(0, \infty).$$

Условие (2) — это ν'-преобразование [2] разности $f(x) - s_n(x)$, т.е. ряд (1) называется сходящимся, если сходится ряд Фурье – Бесселя образа $F_{\nu'} f(x)$. Если брать ν и $(\nu, 0)$-преобразование этой разности, тогда сходимость будет определяться как сходимость разложений образов по системам $\left\{e^{-\gamma_m^2 x^r}\right\}$, $\left\{(1 + \gamma_m^2 x^r)^{-1}\right\}$ соответственно. Эти сходимости эквивалентны.

Литература

1. Ключанцев М.И. Сингулярные дифференциальные операторы с r-1 параметром и функции Бесселя векторного индекса // Сиб. мат. ж. - 1983. - Т. 24, N 3, - С. 47-62.

2. Ключанцев М. И. Введение в теорию $(\nu_1, ..., \nu_{r-1})$-преобразований // Матем. сб. - 1987. - Т.132, N 2.- С. 167-181.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ $BMO_{p,\omega}(\Omega)$

Кодзоева Ф.Д. (Ингушский государственный университет)
ferdos@mail.ru

В работе [1] были введены и изучены специальные классы функций с p-суммируемой ограниченной средней осцилляцией на оси, полуоси и отрезке. Были рассмотрены вопросы продолжения и склеивания функций, необходимые условия принадлежности функций указанным пространствам в терминах сходимости некоторого интеграла. В данной работе продолжается исследование вопроса склеивания функций в случае конечных и полубесконечных интервалов. Для достижения этой цели получены оценки средних значений функций по интервалам в зависимости от самого интервала и его длины, а также некоторые другие внутренние свойства пространств $BMO_{p,\omega}(\Omega)$.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н., доценту кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Южного федерального университета Карапетянцу А.Н. за внимание и помощь. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-01-00862а).

Литература

1. Кодзоева Ф.Д. Пространство $BMO_{p,\omega}(\Omega)$ и оценки средних значений // Ростов-на-Дону. Южный Федеральный Университет. Рукопись деп. в ВИНИТИ 29.05.2008. 474-В2008. 42 с.

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $B^{\omega}_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

Конограй А.Ф. (Институт математики НАН Украины)
Konogray@i.ua

Исследуются классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций одной переменной, где $\omega(t)$ — заданная функция типа модуля непрерывности порядка l, которая удовлетворяет условиям Бари – Стечкина (обозначаем (S) и (S_l)) (см., например, [1]). При $\omega(t) = t^r$, $r > 0$, классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ совпадают с известными классами Бесова $B^r_{p,\theta}$.

Пусть $L_q(\pi_d)$ — пространство 2π-периодических функций со стандартной нормой. Получены точные по порядку оценки линейных поперечников $\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q)$, которые определяются следующим образом

$$\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{L_M} \inf_{\Lambda f \in L_M} \sup_{f \in B^{\omega}_{p,\theta}} ||f - \Lambda f||_q,$$

где inf берутся соответственно по всем подпространствам L_M пространства L_q, размерность которых не превышает M, и всем линейным операторам, которые действуют из L_q в L_M.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \le 2$, $\frac{p}{p-1} < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $\omega(t)$ удовлетворяет условию (S) с некоторым $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, а также условию (S_l). Тогда имеет место оценка*

$$\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Теорема 2. *Пусть $2 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\omega(t)$ удовлетворяет условию (S) с некоторым $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, а также условию (S_l). Тогда имеет место оценка*

$$\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Литература

1. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. // Тр. мат. ин-та им.В. А. Стеклова. – 1997, 219. — P. 356 – 377.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТЕПАНОВА И НЕКОТОРЫЕ ПОЛУГРУППЫ КЛАССА C_0

Костин В.А. (Воронежский государственный университет)
vlkostin@mail.ru

Итерационные пространства Степанова в $\mathbb{R}^n$ определим как множество локально интегрируемых функций $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{S_p^{(\overline{m})}} = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{K_n} \left[\int_{K_m} |f(t + s + |\overline{x}|_m)|^p d(|\overline{x}|_m) \right] ds \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где

$$\overline{m} = (m_1, m_n), |\overline{x}|_m = (\sum_{i=1}^{m_1} x_{1,i} \cdots \sum_{i=1}^{m_n} x_{n,i}), t = (t_1, \dots, t_n),$$

$$ds = ds_1 \dots ds_n, \; d(|\overline{x}|_n) = dx_{1,1} \dots dx_{m_1,1} \dots dx_{n,1} \dots dx_{m_n,n},$$

а K_n и K_m— соответствующие единичные кубы.

Пространства $S_p^{(\overline{m})}$— банаховы со следующими свойствами:

1. Если $n = 1$, $m = 0$, то они совпадают с классическими S_p— пространствами Степанова.
2. При $m_i < k_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ справедливо вложение $S_p^{(\overline{m})} \subset S_p^{(\overline{k})}$ и оценка $\|f\|_{S_p^{(\overline{k})}} \le \|f\|_{S_p^{(\overline{m})}}$.
3. Если $p < r$, то $S_p^{(\overline{m})} \subset S_r^{(\overline{m})}$ и $\|f\|_{S_p^{(\overline{m})}} \le \|f\|_{S_r^{(\overline{m})}}$.
4. Пусть $(T_a(f))(x) = f(x + a)$, тогда $\|T_a f\| = \|f\|$.

Теорема 1. Если $f \in S_p^{(\overline{m})}$, $h \in L_1$, то их свертка $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + s)h(s)ds$, также принадлежит $S_p^{(\overline{m})}$ и справедливо неравенство

$$\|f * h\|_{S_p^{(\overline{m})}} \le \|h\|_{L_1} \|f\|_{S_p^{(\overline{m})}}.$$

Обозначим через $\overline{S}_p^{(\overline{m})}$ замыкание по норме (1) множества равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций. Тогда из теоремы 1 следует

Теорема 2. Полугруппы Гаусса-Вейерштрасса $(W(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * f(x)$ и Пуассона $(P(t)f)(x) = \frac{t \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) * f(x)}{\pi^{\frac{(n+1)}{2}} (t + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ являются сжимающими C_0-полугруппами в пространствах $\overline{S}_p^{(\overline{m})}$.

СХОДИМОСТЬ ЖАДНЫХ АЛГОРИТМОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Лившиц Е.Д. (Москва)
livshitz@rambler.ru

Пусть $X = (X, \|\cdot\|)$ действительное банахово пространство. Множество $\mathcal{D} \subset X$ называют словарем, если $g \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; \|g\| = 1$ и $\overline{\text{span}\mathcal{D}} = X$. В последнее время в теории приближения большое внимание уделяется задаче построения по элементу $f \in X$ конечной линейной комбинации элементов словаря $\sum_{k=1}^m c_k(f)g_k(f)$, $c_k(f) \in \mathbb{R}$, $g_k(f) \in \mathcal{D}$, достаточно хорошо приближающей f. В случае, когда X является действительным сепарабельным гильбертовым пространством $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, весьма эффективным оказывается Чисто Жадный Алгоритм (ЧЖА).

В докладе будут рассмотрены различные обобщения ЧЖА на произвольное банахово пространство ([1],[3]). Наиболее подробно будет обсуждаться X-жадный алгоритм. Для $f, g \in X$, $\|g\| = 1$ определим

$$\mu(f, g) \in \mathbb{R}: \; \|f - \mu(f, g)g\| = \inf_{\mu} \|f - \mu g\|, \; r(f, g) := \|f\| - \|f - \mu(f, g)g\|.$$

X-ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ (X-ЖА) *Пусть задана целевая функция* $f_0^{XGA} := f_0 := f \in H$. *Для каждого* $m \ge 0$ *последовательно выбираем вектор* $g_{m+1} \in \mathcal{D}$ *такой, что* $r(f_m, g_{m+1}) = \sup_{g \in \mathcal{D}} r(f_m, g)$ *и определяем* $f_{m+1}^{XGA} := f_{m+1} := f_m - \mu(f_m, g_{m+1})g_{m+1}$.

Исследуется вопрос сходимости и скорости сходимости X-ЖА в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ для фиксированных словарей: системы Хаара $\mathcal{H}_p$ и системы $\mathcal{I}_p$, состоящей из функций пропорциональных индикаторам двоичных промежутков. Отметим, что ряд результатов для системы $\mathcal{I}_p$ был получен в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 08-01-00799 и 06-01-00160.

Литература

1. Лившиц Е.Д. "О сходимости гриди-алгоритмов в банаховых пространствах" // *Мат. заметки.* 2003. 73. **3**. С. 371–389.
2. Лукашенко Т. П. " О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам" // *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ.* 2001. 1. С. 6–10.
3. Ganichev M., Kalton N.J. "Convergence of the weak dual greedy algorithm in L_p-spaces" // *J. of Appr. Th.* 2003. **124**. P. 89–95.

О РЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Пусть χ_k^m, где $m, k \in \mathbf{N}$, — нормированные в $L^2(\Omega)$ характеристические функции измеримых множеств E_k^m конечной строго положительной меры, множества E_k^m и E_l^m при $k \ne l$ не пересекаются, а если $E_k^m \cap E_l^n \ne \emptyset$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$.

Определение. Если функция f интегрируема по Лебегу на любых измеримых множествах конечной меры, то определим ее *рекурсивное разложение*: 1) $r_0 = f$; 2) если для натурального $m \le N$ задан остаток приближения r_{m-1} и система $\{\chi_k^m\}_k$, то полагаем $\widehat{f_k^m} = \int\limits_\Omega r_{m-1}\chi_k^m\,d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^m)}}\int\limits_{E_k^m} r_{m-1}\,d\mu$ для всех допустимых k и полагаем $r_m = r_{m-1} - \sum\limits_k \widehat{f_k^m}\chi_k^m$. Коэффициенты $\widehat{f_k^m}$ — рекурсивные коэффициенты Фурье f по цепочке систем $\{\chi_k^m\}_k$, $m \in \mathbf{N}$.

Определение. Последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, натуральные $m \le N$, обладает свойством *аппроксимации*, если для любого измеримого множества D конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор множеств $E_{k_p}^m$, $p = 1, \dots, P$, из одной системы, что $\mu\left(D\triangle\bigsqcup_{p=1}^P E_{k_p}^m\right) < \varepsilon$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств.

Теорема. *Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, $m \le N$, обладает свойством аппроксимации и если для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, то для любой функции $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, частичные суммы рекурсивного ряда Фурье по системам $\{\chi_k^m\}_k$ $S_n(f) = \sum\limits_{m=1}^n \sum\limits_k \widehat{f_k^m}\chi_k^m$ стремятся к f по метрике пространства $L^p(\Omega)$.*

Теорема. *Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, натуральное $m \le N$, такова, что для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является конечным объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, а система функций Λ содержит только такие функции, которые равномерно на Ω приближается линейными комбинациями функций из объединения систем $\{\chi_k^m\}_k$, то для любой функции $f \in \Lambda$ частичные суммы рекурсивного ряда Фурье по системам $\{\chi_k^m\}_k$ $S_n(f) = \sum\limits_{m=1}^n \sum\limits_k \widehat{f_k^m}\chi_k^m$ равномерно на Ω стремятся к f.*

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ СДВИГОВ B-СПЛАЙНА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Лыткин С.М. (Москва)
sergeml@rambler.ru

Пусть φ — B-сплайн первого порядка:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } x \in [-1,1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Зафиксируем $n > 1$ и обозначим через S_n пространство кусочно-линейных функций f с узлами в точках kh, $k = 0, \dots, n$, $h = \frac{1}{n}$. Определим при $x \in [0,1]$ систему функций $\Phi = \{\varphi_k(x)\} = \varphi(nx - k)$, $k = 0, \dots, n$. Рассмотрим оператор $T_n f(x) = \sum\limits_{k=0}^n c_k\varphi_k(x)$, где

$$c_k = n\int_{(k-1)h}^{(k+1)h} f(t)(3\varphi_k(t) - 1)\,dt,\ k = 1, \dots, n-1,$$

$$c_0 = n\int_0^h f(t)(6\varphi_0(t) - 2)\,dt,\ c_n = n\int_{1-h}^1 f(t)(6\varphi_n(t) - 2)\,dt.$$

В [1] указывается, что $T_n f = f$ для всех $f \in S_n$.

Теорема 1. *Если $f \in L_p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, то $\|T_n f\|_p \le C_p\|f\|_p$, причём $C_1 = \frac{7}{3}$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $C_\infty = \frac{5}{3}$ — неулучшаемые константы.*

Теорема 2. *Пусть $f \in S_n$, тогда*

$$\frac{1}{4n}\|f\|_2^2 \le \sum_{k=0}^n |(f,\varphi_k)|^2 \le \frac{1}{n}\|f\|_2^2.$$

Следовательно, система Φ является фреймом (см. [2, с. 98]) с границами $\frac{1}{4n}$ и $\frac{1}{n}$. Если рассматривать периодические функции, то границами фрейма будут величины $\frac{1}{3n}$ и $\frac{1}{n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00669) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-2787.2008.1).

Литература

1. Лыткин С. М. *Разложение по системе всплесков B-сплайна первого порядка* // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 13-й Саратов. зимней школы. Саратов: Научная книга, 2006. 111–112.

2. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

ОБРАТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Малютин К.Г. (Институт прикладной физики, г. Сумы)
malyutinkg@yahoo.com

Методом рядов Фурье получены обратные формулы для дельта-субгармонических функций в верхней полуплоскости комплексного переменного. Эти формулы, как и прямые формулы, можно рассматривать в качестве обобщений известной формулы Карлемана. Пусть $v \in J\delta$, λ – полная мера функции v. Обозначим через

$$\Lambda_k(r) := \Lambda_k(r, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{\lambda}_k(t)}{t}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

где $r > r_0$.

Для любой дельта-субгармонической функции v, $v(0) = 0$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ при всех $r > 0$ выполняется

$$\Lambda_k(r) = \frac{\pi}{2} c_k(r) - \frac{\pi k^2}{2} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t} \int_{r_0}^{t} \frac{c_k(\tau)}{\tau}\, d\tau -$$

$$\left(k\alpha_k r_0^k + \frac{2\lambda_k(r_0)}{\pi r_0^k}\right) \ln r - \alpha_k r_0^k + \left(k\alpha_k r_0^k + \frac{2\lambda_k(r_0)}{\pi r_0^k}\right) \ln r_0 .$$

Литература

1. Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Матем. сб.–2001.–Т. 192, №6. –С. 51-70.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ В КРУГЕ

Мардвилко Т.С. (Минск, Беларусь)
mardvilko@mail.ru

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ некоторые комплексные числа, лежащие в круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Введём произведение Бляшке

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}, z \in \mathbb{C}$$

Хорошо известно, что $\int\limits_{\partial D} |b_n'(z)||dz| = 2\pi$. А.А. Пекарский, занимаясь оценками производных рациональных функций [1], получил оценку для высших производных произведения Бляшке, см. также [2]. Нами получена следующая

Теорема. [3] *Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место равенство*

$$\sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \int\limits_{\partial D} \left|b_n^{(s)}(z)\right|^{1/s} |dz| = \sqrt[s]{2 \cdot s!}\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2s}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\right)} \cdot n,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Полученные результаты позволяют улучшить константы в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций [2]. Аналогичные результаты получены и для полуплоскости.

Литература

1. Пекарский А.А. Оценки высших производных рациональных функций и их приложения // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. н. 1980. 5. С. 21-29.

2. Lorenz G.G., Golitschek M.v., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems, Berlin: Springer-Verlag, 1996.
3. Мардвилко Т.С. Экстремальные неравенства для высших производных произведений Бляшке // Весці БДПУ. Серия 3. 2008. 3. С. 17-20.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ У ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА L_p НА ОТРЕЗКЕ

Новак Я. В. (Институт математики НАН Украины)
novak@imath.kiev.ua

Наипростейшей дробью степени n называется функция вида $r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} 1/(z-a_k)$, $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$). Через $\mathbf{SR}_n$ обозначим множество всех наипростейших дробей степени не выше n ($\mathbf{SR}_0 := \{0\}$). Ниже $\Delta = [a,\ b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $1 \le p < \infty$, $\rho_n(f;\Delta)_p := \inf\{\|f - r_n\|_{p,\Delta} : r_n \in \mathbf{SR}_n\}$ ($n = 0,1,2,\ldots$) — наилучшее приближение функций $f \in L_p(\Delta)$ наипростейшими дробями степени не выше n в метрике пространства $L_p(\Delta)$; $C^n(\Delta)$ — множество n раз непрерывно дифференцируемых функций на Δ. Для функции f, суммированой на $I := [\alpha,\beta] \subset \Delta$, положим $\alpha(f,x;\ t) := \int_x^t f(\tau)\,d\tau$ ($x,t \in I$). Пусть $p \in (1,\ \infty)$.

Теорема. *Для того, чтобы функция $f \in L_p(\Delta)$ принадлежала классу $C^n(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\lambda \in C(\Delta)$ такая, что равномерно по x при $\alpha,\beta \to x$ было справедливо следующие условие*

$$\rho_n(f;[\alpha,\ \beta])_p \cdot (\beta-\alpha)^{-(n+1/p)} \to \lambda(x), \qquad a \le \alpha < x < \beta \le b.$$

Если последнее условие справедливо, то имеет место тождество

$$c_{n,p}^{-1} \cdot \lambda(x) \equiv \left| \frac{d^n}{dt^n} \left(f(t) e^{\alpha(f,x;\ t)} \right)_{t=x} \right|, \tag{1}$$

где $c_{n,p} := E_{n-1}(x^n/n!;\ [0,1])_p$.

Аналогичный результат, в терминах локальных приближений алгебраическими полиномами, ранее получил А.Н. Морозов [1].

Литература

1. Морозов А.Н. *Об одном описании пространств дифференцируемых функций* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 5. – С. 758-768.

БАНАХОВЫ ФРЕЙМЫ ГАБОРА С ГАУССОВОЙ ФУНКЦИЕЙ В $L^p(\mathbb{R})$

Новиков С.Я. (Самарский госуниверситет)
nvks@ssu.samara.ru

Понятие фрейма для гильбертова пространства $\mathcal{H}$ хорошо известно [1]. Фреймом Габора называется фрейм для $L^2(\mathbb{R})$ вида $\left\{e^{2\pi imbx} g(x-na)\right\}$, где $m,n \in \mathbb{Z}$, $a,b > 0$ и $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Для банахова пространства введены различные аналоги фрейма: атомическое разбиение, банахов фрейм, p-фрейм и др. [2].Понятие банахова фрейма вводится определением:

Пусть X — банахово пространство и X_d — банахово пространство числовых последовательностей. Пусть $\{g_k\} \subset X^*$ и $S : X_d \to X$ — ограниченный линейный оператор. Тогда $(\{g_k\}, S)$ называется X_d-банаховым фреймом для X, если:

1) $\{g_k(f)\} \in X_d$ для всех $f \in X$;

2) существуют константы $A, B > 0$ такие, что

$$A\|f\|_X \le \|\{g_k(f)\}\|_{X_d} \le B\|f\|_X,\ f \in X;$$

3) $S\{g_k(f)\} = f,\ f \in X$.

Точное описание параметров, для которых заданная функция g образует фрейм Габора, оказывается сложной задачей. Так, например, для функции Гаусса $g(x) = e^{-x^2}$ получено лишь полное описание параметров a, b для пространства $L^2(\mathbb{R})$:

Система $\left\{e^{2\pi imbx-(x-na)^2}\right\}$ является фреймом для пространства $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $ab < 1$.

Хорошо развитая теория локализованных фреймов дает описание т.н.модуляционных пространств (modulation spaces), для которых функция Гаусса порождает банахов фрейм. Однако пространства $L^p(\mathrm{R})$ не являются модуляционными, поэтому остается открытым вопрос о множестве

$$\left\{(p,a,b) : \left\{e^{2\pi imbx-(x-na)^2}\right\} \text{ банахов фрейм для } L^p(\mathbb{R})\right\}.$$

Получены частичные ответы на этот вопрос.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-96603.

Литература

1. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. *Теория всплесков.* М., Физматлит, 2005.
2. Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases.* – Boston: Birkhäuser, 2002.
3. Feichtinger H.G., Gröchenig K.H., Walnut D. *Wilson bases and modulation spaces.* Math. Nachr. V.155 (1992), 7-17.

ИНДЕКС БАНАХА-САКСА НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ

Новикова А.И. (Воронежский госуниверситет)
annnovikova@mail.ru

Пусть E — перестановочно инвариантное пространство на $[0,1]$. Рассмотрим пространство последовательностей $r(E)$, порожденное системой Радемахера $r_k(t) = sgn\ \sin(2^n\pi t)$, $t \in [0,1]$ [1]. Последовательность $x = (x_1, x_2, \dots)$ принадлежит $r(E)$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k r_k$ принадлежит E и

$$\|x\|_{r(E)} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k\right\|_E .$$

Естественный базис в $r(E)$ является симметричным.

Индексом Банаха-Сакса пространства E [2] называется $\sup p$, удовлетворяющих следующему условию: любая слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{x_k\} \subset E$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что

$$\sup_m m^{-\frac{1}{p}} \left\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\right\| < \infty.$$

Несложно показать, что индексы Банаха-Сакса пространств E и $r(E)$ удовлетворяют соотношению

$$1 \le \gamma(E) \le \gamma(r(E)) \le 2.$$

Теорема. *Верна следующая альтернатива:* $\gamma(E) = 1$ *или* $\gamma(r(E)) = 2$.

Литература

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces. B: Springer. -1979.
2. Семёнов Е.М., Сукочев Ф.А. Индекс Банаха-Сакса // Матем. сб. -2004. -Т. 195(2). -С. 117-140.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Павичевич Ж. (Университет Черногории, Черногория)
zarkop@cg.ac.yu

Пусть Ω — сфера Римана, $D : |z| < 1$, $\Gamma : |z| = 1$, $C(f, e^{i\theta}, A)$ предельное множество функций $f : D \to \Omega$ относительно множества A, $A \subset D$, $A \cap \Gamma = \{e^{i\theta}\}$, $\ell(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in D$, гиперболическая метрика, $D_h(w,r) = \{z \in D \mid \ell(w,z) < r\}$, $w \in D$, $0 < r < +\infty$, $\Delta_\gamma(e^{i\theta}, r) = \cup_{w\in\gamma}\overline{D_h(w,r)}$ — γ-криволинейный угол и $\varphi_w(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$.

Жордановы кривые γ_1 и γ_2, $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, оканчивающиеся в $e^{i\theta}$, находятся в отношении $\sim$ если существует ε, $0 < \varepsilon < +\infty$, такое, что $\gamma_1 \subset \Delta\gamma_2(e^{i\theta}, \varepsilon)$. Отношение $\sim$ отношение эквивалентности.

Утверждение 1. *Для произвольной функции* $f : D \to \Omega$ *следующие утверждения эквивалентны:*

i) *для каждого* (w_n), $w_n \in \gamma$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^{i\theta}$, *и каждого* r, $0 < r < +\infty$, $f \cdot \varphi_{w_n} \underset{\overline{D_h(0,r)}}{\rightrightarrows} \omega$; $\omega \in \Omega$

ii) *для каждого* r, $0 < r < +\infty$, $C(f, e^{i\theta}, \Delta_\gamma(e^{i\theta}, r) = \{\omega\}$

iii) *для каждого* $\gamma_1 \in [\gamma]$: $\lim\limits_{\gamma_1 \ni z \to e^{i\theta}} f(z) = \omega$.

Значение ω из утверждения 1 называем $[\gamma]$ — криволинейным граничным значением функции f в точке $e^{i\theta}$.

Утверждение 2. *Пусть* $\lim\limits_{\gamma \to z \to e^{i\theta}} f(z) = \omega$ *и* ω *не* $[\gamma]$ — *криволинейное граничное значение произвольной функции* $f : D \to \Omega$. *Тогда для каждого* ε, $0 < \varepsilon < +\infty$, *существуют кривые* $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma]$, $\gamma_1 \subset \Delta_{\gamma_2}(e^{i\theta}, \varepsilon)$ *такие, что* f *стремится к* ω *вдоль* γ_1, *но не стремится к* ω *вдоль* γ_2.

Замечание. Утверждение 2 служит значительным усилением теоремы 1 Лехта и Виртанена для мероморфных функций [1].

Литература

1. Lehto O., Virtanen K. I., Acta math., 1957, v. 97, p. 47–65.

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА–ШАУДЕРА, ДОПОЛНЕННОЙ ПОЛОВИННЫМИ СДВИГАМИ

Паунов А.К. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
paunov_ak@mail.ru

Напомним определение орторекурсивных разложений (см. [1]). Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H \setminus 0$. Для произвольного элемента $f \in H$ положим $r_0(f) = f$; если уже определен $r_n(f)$, то положим $\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n(f), e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}$, $r_{n+1}(f) = r_n(f) - \hat{f}_{n+1} e_{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением элемента* f *по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $H = L^2[0,1]$. Положим $\varphi(x)$ равной $2x$ на отрезке $[0, 1/2]$, $2 - 2x$ на отрезке $[1/2, 1]$ (эта функция является порождающей для системы Фабера–Шаудера, см., например, [2, гл. 6]). Будем считать, что вне отрезка $[0,1]$ функция $\varphi(x)$ равна нулю. Будем рассматривать пачки функций $\{\varphi(2^n x - (j-1)/2), j = 0, 1, \ldots, 2^n\}$, упорядоченные двумя способами: подряд, и когда сначала идут функции, соответствующие четным j, а затем соответствующие нечетным.

Теорема 1. *Для любой функции* f *из* $L^2[0,1]$ *ее орторекурсивное разложение по системе, содержащей бесконечное число пачек, упорядоченных одним из двух описанных способов, сходится к* f *в метрике* L^2.

Полученная теорема является обобщением теоремы 2 из тезисов Т.П. Лукашенко [3].

Теорема 2. *Для любой определенной на отрезке* $[0,1]$ *липшицевой функции* f *ее орторекурсивное разложение по системе, содержащей бесконечное число пачек, упорядоченных одним из двух описанных способов, сходится к* f *в метрике* C.

Литература

1. Т.П. Лукашенко *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем., мех. 2001, №1. С.6–10.

2. Б.С. Кашин, А.А. Саакян *Ортогональные ряды.* Изд. 2-е, доп. — М.: Изд-во АФЦ, 1999.

3. Т.П. Лукашенко *Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера* // Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 168.

ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Пашкова Ю.С. (Таврический Национальный Университет, Симферополь),
Рубштейн Б.А. (Университет Бен-Гуриона, Беер-Шева, Израиль)
j.pashkova@gmail.com

Пусть μ — мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$, $S(0, \infty)$ — пространство всех измеримых по Лебегу функций на $(0, \infty)$ для которых функция распределения $n_f(y)$ не равна тождественно $+\infty$, f^* — убывающая перестановка функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$, f^{**} — ее максимальная функция Харди-Литлвуда, E — симметричное пространство в $S_0(0, \infty)$ и $H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : f^{**} \in E\}$, $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$. Для абсолютного $L_1 - L_\infty$ сжатия T положим:

$$B_T f = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Рассмотрим пространство Лоренца $L_{p,q}$, $1 < p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$, т.е. пространство функций из $S(0, \infty)$, удовлетворяющих условию:

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int_0^{\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q dt/t \right)^{1/q} < \infty.$$

Теорема 1. *Если $f \in L_{p,q}$, то $B_T f \in L_{p,q}$ для любого абсолютного сжатия T.*

Теорема 2.

(i) $H(L\log^{n+1} L) = L\log^n L$;

(ii) Если $f \in L\log^{n+1} L$, то $B_T f \in L\log^n L$ для любого абсолютного сжатия T.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ K-ФУНКЦИОНАЛА И МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ, ПОСТРОЕННОГО ПО ОБОБЩЕННОМУ СДВИГУ ЯКОБИ

Платонов С.С. (Петрозаводск)

platonov@psu.karelia.ru

Пусть α и β — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $\alpha \geq \beta > -1/2$, $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби степени k. Будем использовать обозначения

$$\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)},\ \rho(\theta) := \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta+1},\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Пусть X — одно из банаховых пространств (БП) $L_p([0,\pi],\rho(\theta)\,d\theta)$, $1 \leq p < \infty$, или $C[0,\pi]$. Используя преобразование Фурье–Якоби, которое задается для $f \in X$ формулой

$$\widehat{f}(k) := \int_0^\pi f(\theta)\,\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\theta)\,\rho(\theta)\,d\theta, \quad k \in \mathrm{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\},$$

можно определить оператор обобщенного сдвига Якоби τ_t соотношением

$$\widehat{\tau_t f}(k) := \varphi_k^{(\alpha,\beta)}(t)\,\widehat{f}(k), \quad t \in \mathrm{R}.$$

Можно доказать, что τ_t является линейным непрерывным оператором в БП X.

Пусть $\mathcal{B} := \frac{1}{\rho(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\rho(\theta)\frac{d}{d\theta}\right)$ – дифференциальный оператор Якоби, W_X^m — пространство Соболева порядка $m \in \mathrm{N}$, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$, т.е. $W_X^m := \{f \in X : \mathcal{B}^j f \in X, j = 1,2,\dots,m\}$. Определим K-функционал, построенный по пространствам X и W_X^m равенством $K(f,t;X,W_X^m) := \inf\{\|f-g\|_X + t\,\|\mathcal{B}^m g\|_X : g \in W_X^m\}$, где $f \in X$, $t > 0$.

Модуль гладкости порядка k определяется формулой $\omega_k(f;\delta)_X := \sup_{0<t\leq\delta}\|(I-\tau_t)^k f\|_X$, где $f \in X$, $\delta > 0$, I — тождественный оператор.

Теорема 1. *Существуют положительные постоянные $c_1 = c_1(\alpha,\beta,m)$ и $c_2 = c_2(\alpha,\beta,m)$ такие, что*

$$c_1\,\omega_m(f,\delta)_X \leq K(f,\delta^{2m};X,W_X^m) \leq c_2\,\omega_m(f,\delta)_X,$$

где $f \in X$, $\delta > 0$.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЩИХ РЯДОВ УОЛША

Плотников М.Г. (Вологда)

mgplotnikov@mail.ru

Пусть G — *двоичная группа*, $\mathcal{B}$ — множество всех двоичных интервалов на G [1]. Каждый ряд Уолша на группе G порождает некоторую конечно-аддитивную функцию двоичного интервала (иначе, *квазимеру*) [2]. Соответствие между рядами Уолша и квазимерами на G является линейным изоморфизмом, причем любой (!) ряд Уолша является рядом Фурье-Стилтьеса-Уолша порождаемой им квазимеры. Пусть $\mathcal{H}$ — множество всех квазимер на G, $t \in G$, а

$$\mathcal{H}_t = \{\tau \in \mathcal{H} :\ \exists I \in \mathcal{B} \text{ такой, что } t \in I \text{ и}$$

$$\tau(\Delta) = 0 \text{ для всех } \Delta \in \mathcal{B},\ \Delta \subseteq I\}.$$

Аналогом принципа локализации рядов Фурье-Уолша для общих рядов Уолша можно считать тот факт, что если $t \in G$, $\tau_0 \in \mathcal{H}_t$, а (S) — ряд Уолша, изоморфный квазимере τ_0, то ряд (S) сходится к нулю в точке t. Несложно показать, что не для всех квазимер $\tau_0 \in \mathcal{H}_t$ последнее условие выполняется.

Пусть $\Delta_n^i = [i/2^n + 0; (i+1)/2^n - 0] \in \mathcal{B}$. Скажем, что квазимера τ является Δ_n^i-*непрерывной* [3], если

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{2^p-1}(-1)^k\tau(\Delta_{n+p}^{i\cdot 2^p+k}) = 0.$$

Теорема. *Пусть $t \in G$, $\tau_0 \in \mathcal{H}_t$, а (S) — ряд Уолша, изоморфный квазимере τ_0. Тогда ряд (S) сходится к нулю в точке t тогда и только тогда, когда квазимера τ_0 является Δ-непрерывной для всех $\Delta \in \mathcal{B}$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00669) и государственной программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-2787.2008.1).

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А., *Ряды и преобразования Уолша: теория и применение*, М.: Наука, 1987.

2. Schipp F., Wade W.R., Simon P., and Pal J., *Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Bristol and New York: Adam Hilger Publishing, Ltd, 1990.

3. Плотников М.Г. "О множествах единственности для кратных рядов Уолша", *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 265-279.

РЕКУРСИВНЫЕ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ С АДАПТИВНЫМ ВЫБОРОМ МАСШТАБОВ

Подкопаев А.И. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

tony-meshok@yandex.ru

Рассмотрим $\varphi, \chi \in H := L^2(\mathbb{R}^n)$ со свойством $\sum_{\vec{s}\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\cdot + \vec{s})|^2$, $\sum_{\vec{s}\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\chi}(\cdot + \vec{s})|^2 \in L^\infty([0,1]^n)$ ($\hat{g}(\vec{\omega}) := \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \vec{x}\cdot\vec{\omega}} g(\vec{x}) d^n\vec{x}$), влекущим непрерывность из H в H операторов $(P_{\varphi,\chi,A}g)(\vec{x}) := |\det A| \times$ $\times \sum_{\vec{s}\in\mathbb{Z}^n} \langle g, \varphi(A\cdot + \vec{s})\rangle_H \chi(A\vec{x} + \vec{s})$ (A — вещественные $n \times n$-матрицы).

Утверждение. *Для всех $g \in H$ с $\|g\|_H = 1$*

$$u_{\varphi,\chi} := \lim_{\delta\to 0+} \operatorname*{ess\,sup}_{\|y\|<\delta} C_{\varphi,\chi}(\vec{\omega}) \geqslant \limsup_{\|A^{-1}\|\to 0} \|g - P_{\varphi,\chi,A}g\|_H \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{\|A^{-1}\|\to 0} \|g - P_{\varphi,\chi,A}g\|_H \geqslant \lim_{\delta\to 0+} \operatorname*{ess\,inf}_{\|y\|<\delta} C_{\varphi,\chi}(\vec{\omega}),$$

где $C_{\varphi,\chi}(\vec{\omega}) := (1 - 2\operatorname{Re}\hat{\varphi}(\vec{\omega})\overline{\hat{\chi}(\vec{\omega})} + |\hat{\varphi}(\vec{\omega})|^2 \sum_{\vec{s}\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\chi}(\vec{\omega} + \vec{s})|^2)^{1/2}$.

Это доказывается аналогично утверждению 7.2 из [1] и даёт возможность задавать рекурсивные разложения функций $g \in H$ формулами $r_0(g) := g$, $r_{m+1}(g) := r_m(g) - P_{\varphi_m,\chi_m,A_m} r_m(g)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), где φ_m и χ_m выбираются адаптивно так, чтобы $\prod_{m=0}^\infty u_{\varphi_m,\chi_m} = 0$, и A_m подбираются по φ_m и χ_m так, чтобы $\|r_{m+1}(g)\|_H \leqslant u_m \|r_m(g)\|_H$ с $\prod_{m=0}^\infty u_m = 0$, тогда $g = \sum_{m=0}^\infty P_{\varphi_m,\chi_m,A_m} r_m(g)$. Например, можно, взяв $A_m = 2^{j_m} A_0$ с адаптивно выбираемыми возрастающими $j_m \in \mathbb{Z}$, $\varphi_m \equiv \varphi_0$ и $\chi_m \equiv \chi_0$ с $u_{\varphi_0,\chi_0} < 1$, получить ряд по двоичным вейвлетам, возможно, с пропусками пачек, сходящийся к g в H экспоненциально или быстрее. Похожим образом можно ввести разложения с вычитанием на каждом шаге суммы нескольких операторов вида $P_{\varphi,\chi,A}$ с естественными изменениями в выделенном выше утверждении, что позволяет использовать аналогичные описанным в [2] направленные вейвлеты с ненулевыми средними.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00669).

Литература

1. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.

2. Antoine J.-P., Murenzi R., Vandergheynst P. *Two-dimensional directional wavelets in image processing* // Int. J. of Imaging Systems and Technology. – 1996. – V. 7. – P. 152–165.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ СЖАТИЙ И СДВИГОВ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

Политов А.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

kentghost@yandex.ru

Определение. Семейство функций $\varphi_{k,l}(x) = \sqrt{m_k}\varphi^{i_{k,l}}(m_k x - l)$, где $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$; $m_k = p_0 \ldots p_k$, $p_k \geq 2$ при $k \geq 1$; $l = 0, 1, \ldots, m_k - 1$; $i_{k,l} \in \{1, 2, \ldots, T\}$ (каждой паре k, l соответствует свое $i_{k,l}$), называется *системой сжатий и сдвигов* функций $\{\varphi^t\}_{t=1}^T$.

Напомним, как производится орторекурсивное разложение элементов в гильбертовом пространстве (см., например, [1]). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ даны система нормированных векторов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и вектор $f \in \mathcal{H}$. Положим $\tilde{f}_1 = (f, e_1)$; если уже определены $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$, то положим $\tilde{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1})$, где $r_n(f) = f - \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i e_i$. Коэффициенты $\tilde{f}_n$ называются *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, а ряд $\sum_{i=1}^\infty \tilde{f}_i e_i$ — *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Пронумеруем систему сжатий и сдвигов следующим образом: $e_{m_0+m_1+\ldots+(m_{k-1})+l} = \varphi_{k,l}$. Рассмотрим орторекурсивное разложение по пронумерованной таким образом системе. Оказывается, что для него имеет место следующее достаточное условие сходимости к разлагаемому элементу.

Теорема. *Пусть функции* $\{\varphi^t\}_{t=1}^T \subset L_2[0,1)$, $T < \infty$, *удовлетворяют условиям* $\|\varphi^t\| = 1\,(t = 1,2,\ldots,T)$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_{n,k} < \infty$, *где* $\rho_{n,k} = \max_t \omega_2^2(\varphi^t, m_k/m_n)$, *а* $\omega_2(\varphi,\delta)$ *— стандартный модуль непрерывности в* $L_2[0,1)$, *и* $\int_0^1 \varphi^t(x)dx \neq 0$ *для всех* t. *Тогда орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов функций* $\{\varphi^t\}_{t=1}^T$ *сходится в норме* $L_2[0,1)$ *к разлагаемой функции для любой функции из* $L_2[0,1)$.

Полученная теорема является обобщением результата [2], полученного А. Ю Кудрявцевым для случая $T = 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00669).

Литература

1. Лукашенко Т.П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестник МГУ. Сер.1. Матем. Механ. 2001, №1. С. 6–10.
2. Кудрявцев А.Ю. *Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции* // Современные методы теории ф-ций и смежные проблемы: Тезисы докладов ВЗМШ. — Воронеж, 2001. С. 161–162.

О ВЗАИМОСВЯЗИ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

Потапов М.К. (Москва), Симонов Б.В. (Волгоград), Тихонов С.Ю.(Москва)

П.Л. Ульянов доказал, что если $f(x) \in L_p$, $1 \le p < q < \infty$, то для любого $\delta \in (0;1]$

$$\omega_1(f,\delta)_q \le c_1(p,q)\left(\int_0^\delta \left(t^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Неравенство (1) может быть усилено.

1. Если $f(x) \in L_p$, p и q таковы, что либо $1 < p < 2 < \frac{p}{p-1} \le q < \infty$, либо $2 \le p < q < \infty$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то для любого $\delta \in (0;1]$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \le c_2(p,q,\alpha)\delta^{\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\int_\delta^1 \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\alpha}\omega_\alpha(f,t)_q\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c_3(p,q,\alpha)\left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_\alpha(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

2. Если $f(x) \in L_p$, $1 \le p < q < \infty$, $\alpha > 0$, то для любого $\delta \in (0;1]$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \le c_4(p,q,\alpha)\left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_5(p,q,\alpha)\left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_\alpha(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Отметим, что неравенства (2) и (3) точны, так как существует функция $f_0(x) \in L_p$, такая что члены неравенств (2) и (3), рассматриваемые как функции δ, имеют разные порядки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-27-87-2008.1).

ЖАДНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассудова О.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
osikras@yandex.ru

Пусть H — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, $D \subset H$ — симметричный словарь ($\|g\| = 1$ для всех $g \in D$; если $g \in D$, то и $-g \in D$; $\overline{\operatorname{span} D} = H$), $t \in (0,1]$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $f \in H$. Определим остатки $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} \subset H$ и разлагающие элементы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$. Положим $r_0 := f$. Если определен $r_{m-1} \subset H$, то в качестве e_m возьмем произвольный элемент D, для которого $(r_{m-1}, e_m) \geq t \sup_{e \in D}(r_{m-1}, e)$, и положим $r_m := r_{m-1} - c_m e_m$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(f)$ будем называть *жадным разложением* элемента f по словарю D *с фиксированными коэффициентами* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В более общем случае (а именно, в случае банаховых пространств) аналогичные разложения были рассмотрены В.Н. Темляковым. Им была доказана теорема([1]), которая в случае гильбертовых пространств формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. *Тогда для любого* $f \in H$ *справедливо равенство* $\liminf\limits_{n \to \infty} \|r_n(f)\| = 0$.

Совместно с В.В.Галатенко было установлено, что в данной теореме нижний предел может быть заменен на обычный (см. [2]). Также оказывается, что условия теоремы в случае гильбертовых пространств существенно ослабить нельзя. А именно, верна следующая теорема, идея доказательства которой взята из [3].

Теорема. *Существуют гильбертово пространство H, словарь D ($D \subset H$), элемент $f \in H$ и последовательность чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что для некоторого числа $C > 0$ справедливы неравенства $c_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и жадное разложение элемента f по словарю D с $t = 1$ и коэффициентами $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к f.*

Литература

1. Temlyakov *V. Greedy expansions in Banach spaces* // Adv. in Comput. Math. — 2007. **26** (4). — P. 431–449.

2. В.В. Галатенко, О.А. Рассудова. *Разложения с фиксированными коэффициентами в гильбертовых пространствах* // Тезисы докладов 14-й СЗШ, Саратов: СГУ, 2008. С.49–50.

3. Галатенко В.В., Лившиц Е.Д. *Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы* // Матем. заметки, 2005, **78** (2). С. 186–201.

ПРОБЛЕМА РИССА – РАДОНА – ФРЕШЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАДОНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ: ОГРАНИЧЕННЫЕ МЕРЫ; ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МЕРЫ; БИМЕРЫ; ОБЩИЕ РАДОНОВСКИЕ МЕРЫ

Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

rodionovtv@mail.ru

Понятие ограниченной радоновской меры на компактном подпространстве в $\mathbb{R}^n$ было введено И. Радоном в 1913 г. и обобщено С. Какутани на произвольное компактное пространство в 1941 г. В неограниченном случае рассматривались только положительные радоновские меры. Сводя воедино все эти случаи, определим (*общую*) *радоновскую меру на хаусдорфовом пространстве T* как борелевскую меру $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, \infty]$ такую, что:

1) $\operatorname{rng} \mu \equiv \{\mu B \mid B \in \mathcal{B}\} \subset]-\infty, \infty]$ или $\operatorname{rng} \mu \subset [-\infty, \infty[$;

2) $\mu C \in \mathbb{R}$ для любого компактного множества C;

3) $\forall B \in \mathcal{B}\ (\mu B \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists C \in \mathcal{C}\ (C \subset B \wedge |\mu B - \mu C| < \varepsilon))$;

4) $\forall B \in \mathcal{B}\ (\mu B = \infty \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists C \in \mathcal{C}\ (C \subset B \wedge \mu C > a))$;

5) $\forall B \in \mathcal{B}\ (\mu B = -\infty \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists C \in \mathcal{C}\ (C \subset B \wedge \mu C < a))$.

Проблема Рисса – Радона характеризации радоновских интегралов в постановке М. Фреше состоит в следующем: для различных классов хаусдорфовых пространств T, различных семейств $\mathfrak{M}(T)$ радоновских мер μ на T и подходящих линейных пространств $A(T)$ универсально интегрируемых функций на T описать соответствующие семейства $I(A(T), \mathfrak{M}(T)) \equiv \{i_\mu | A(T) \mid \mu \in \mathfrak{M}(T)\}$ *радоновских интегралов* $i_\mu f \equiv \int f\, d\mu$ внутри семейства $A(T)^\times$ всех линейных функционалов на $A(T)$.

В работах [1,2] эта проблема была решена для произвольного хаусдорфова пространства в виде параметрической теоремы с параметром $A(T)$, из которой следовали все известные частные случаи. Здесь даётся описание семейства $I(A(T), \mathfrak{RM}(T))$ для семейства $\mathfrak{RM}(T)$ всех радоновских мер на T.

Линейный функционал φ: $A(T) \to \mathbb{R}$ назовём *натуральным*, если $B_\varphi \equiv \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge 0 \leqslant f \leqslant 1\} \subset]-\infty, \infty]$ или $B_\varphi \subset [-\infty, \infty[$.

Теорема. *Пусть $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное пространство симметризованных функций со свойствами $(E)\&(D)$ или (E_σ)* (см. [2]). *Тогда семейство $I(A(T), \mathfrak{RM}(T))$ совпадает с семейством всех натуральных σ-точных* [2] *функционалов на $A(T)$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (08-01-00669) и программы "Ведущие научные школы РФ" (НШ-2787.2008.1).

Литература

1. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. матем., **63**:5 (1999), 37-82; **66**:6 (2002), 3-18.
2. *Захаров В. К.* Проблема Рисса - Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер // Труды МИРАН, **248** (2005), 106-116.

НАИЛУЧШИЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Романюк А.С. (Институт математики НАН Украины)
funct@imath.kiev.ua

Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q=(q_1,q_2)$, — множество функций $f(x,y)$, $x,y\in\pi_d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}=\left\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\right\|_{q_2},\quad 1\le q_1,q_2\le\infty,$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x\in\pi_d$, а затем от результата — по переменной $y\in\pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f\in L_q(\pi_{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2}=\inf_{u_i(x),v_i(y)}\left\|f(x,y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{q_1,q_2},$$

где $u_i\in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i\in L_{q_2}(\pi_d)$.

Если F — класс функций, то полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2}=\sup_{f\in F}\tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{1}$$

В докладе речь будет идти о порядках величин (1) при условии, что $f(x)\in F$, а $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ определяется для функций $2d$ переменных вида $f(x-y)$, $x,y\in\pi_d$. В качестве классов F рассматриваются известные классы периодических функций $B^r_{p,\theta}$, H^r_p и $W^r_{p,\alpha}$, где $r\in R^d_+$ и $0<r_1=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\ldots\le r_d$.

Теорема 1. *Пусть* $1\le\theta\le\infty$, $r_1>0$. *Тогда при* $2\le q_1\le p<\infty$ *и* $1\le q_2\le\infty$ *имеет место соотношение*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{\left(r_1+\frac12-\frac1\theta\right)_+}.$$

Теорема 2. *Пусть* $2\le q_1\le p<\infty$, $1\le q_2\le\infty$ *и* $r_1>0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\tau_M(W^r_{p,\alpha})_{q_1,q_2}\asymp\left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1}.$$

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Румянцева А.А. (Башкирский государственный университет)
allarum@mail.ru

Пусть D — ограниченная выпуклая область в комплексной плоскости,

$$h(\varphi)=\max_{z\in D}\operatorname{Re} e^{i\varphi}z$$

— ее опорная функция, $H(D)$ — пространство аналитических функций в выпуклой области D, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D.

Предположим, что функция $h(\varphi)$ дважды дифференцируема и

$$M=\max_{\varphi}(h''(\varphi)+h(\varphi))<\infty.$$

Тогда функция $Mr - h(\varphi)r$ — субгармонична.

Из теоремы о приближении субгармонической функции логарифмом модуля целой функции (см. [1]) следует, что существует целая функция L с простыми нулями такая, что

$$\ln|L(re^{i\varphi})| = (M - h(\varphi))r + O(\ln r).$$

Множество нулей этой функции $L(z)$ обозначим через Λ_0. Через $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ обозначим последовательность комплексных чисел, и через $\exp\Lambda = (e^{z\lambda_k})_{k=1}^{\infty}$ систему экспонент.

Теорема 1. *Система экспонент* $\exp\Lambda$ *не полна в пространстве* $H(D)$ *тогда только тогда, когда существует ненулевая целая функция* $G(z)$*, которая обращается в нуль в точках* $\lambda \in \Lambda\bigcup\Lambda_0$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$|G(re^{i\varphi})| \leq Ce^{(M-\varepsilon)r}.$$

Литература

1. Юлмухаметов Р.С., Приближение субгармонических функций, Матем. сб. т.124, N 3, 1984.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ МОНОТОННОСТЬ НА ПЛОСКОСТИ

Салахудинов Р.Г. (Казань)
Rustem.Salahudinov@ksu.ru

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω, $u = u(x, y)$ — решение уравнения Пуассона $\Delta u = -1$ с граничным условием $u = 0$ и $\mathrm{P}(\Omega)$ — жесткость кручения области Ω. Рассмотрим функционал

$$\mathrm{I}_p(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{dist}^p(z, \partial\Omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

являющийся *евклидовым моментом области* Ω *относительно её границы порядка* p. Ф.Г. Авхадиевым [1] было доказано, что для односвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеем $\mathrm{P}(\Omega) \sim \mathrm{I}_2(\Omega)$ в смысле Полиа и Сеге. Одним из наиболее важных неравенств для жесткости кручения является неравенство Сен-Венана - Полиа, являющиеся частным случаем неравенства Пейна

$$\mathrm{A}^2(\Omega) - 2\pi\,\mathrm{P}(\Omega) \geq (\mathrm{A}(\Omega) - 4\pi\, u(\Omega))^2\,,$$

где $u(\Omega) = \max\limits_{(x,y)\in\Omega} u(x, y)$. Мы доказываем, что для евклидовых моментов имеет место аналог неравенства Пейна, являющейся частным случаем более сильного изопериметрического свойства — изопериметрической монотонности. Обозначим через

$$f(p) := \frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)}\left(\mathrm{I}_p(\Omega) - \frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)}\right),$$

где $\rho(\Omega) = \max\limits_{z\in\Omega} \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* Ω *односвязная область и* $\mathrm{I}_{p_0}(\Omega) < +\infty$ *для некоторого* $p_0 \in [-1, \infty)$. *Тогда*
1) *Если* Ω *не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то* $f(p)$ *— строго убывающая функция от* p.
2) *Если* Ω *совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то* $f(p) \equiv const$*, для* $p \in [-1, +\infty)$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ грант 08-01-00381-а.

Литература

1. Авхадиев Ф.Г. Решение обобщенной задачи Сен–Венана // Матем. сборник. 1998. Т. 189, Вып. 12. С. 3–12.

ТЕОРЕМА ЛИЗОРКИНА О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ

Сарыбекова Л.О., Тлеуханова Н.Т. (Астана, Казахстан)
lsarybekova@yandex.ru

Пусть $1 < p \le q < \infty$. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — регулярная система [1], $f \in L_p[0,1]$ с рядом Фурье $\sum_{k\in Z} \hat{f}(k)\varphi_k(x)$. Пусть $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — последовательность комплексных чисел. Определим последовательность частичных сумм

$$S_n(f,\lambda,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \hat{f}(k)\varphi_k(x), n \in \mathrm{N}.$$

Будем говорить, что $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе Φ, из $L_p[0,1]$ в $L_q[0,1]$, если конечна величина

$$\|\lambda\|_{m_p^q} = \sup_{n\in\mathrm{N}} \sup_{f\neq 0} \frac{\|S_n(f,\lambda)\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}.$$

Теорема. *Пусть* $1 < p < q \le \infty$, $0 \le \alpha < 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *и* $\beta = \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ *удовлетворяет следующим условиям*

$$\sup_{k\in\mathrm{Z}} |k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |\lambda_k| \le A, \sup_{k\in\mathrm{Z}} k^{1-\alpha} \left(m^{\beta}(\lambda_m - \lambda_{m+1})\right)^{*}(k) \le A,$$

то $\lambda \in m_p^q$ *и* $\|\lambda\|_{m_p^q} \le cA$, *где* $c > 0$ *зависит только от* p, q *и* α.

Следствие. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $A > 0$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ *удовлетворяет следующим условиям*

$$\sup_{k\in\mathrm{Z}} |k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |\lambda_k| \le A, \sup_{k\in\mathrm{Z}} k^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \le A,$$

то $\lambda \in m_p^q$ *и* $\|\lambda\|_{m_p^q} \le cA$, *где* $c > 0$ *зависит только от* p, q *и* α.

Данное следствие является точным аналогом теоремы Лизоркина [2].

Литература

1. Нурсултанов Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье из* L_p*-пространств*// Изв. РАН, сер. матем.- 2000.- Т. 64.- С.95-122.

2. П. И. Лизоркин *О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах* $L_{p,\theta}$// Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 139, 1967.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Сергеев А.Г. (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН)
sergeev@mi.ras.ru

Рассматриваются гармонические отображения компактных римановых поверхностей в пространства петель ΩG компактных групп Ли G. Интерес к таким отображениям объясняется известным результатом Атьи, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между голоморфными отображениями римановой сферы в пространство ΩG и G-инстантонами на пространстве $\mathbb{R}^4$. Основываясь на этом результате, естественно выдвинуть гипотезу, что гармонические отображения римановой сферы в ΩG должны отвечать G-полям Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Для изучения гармонических отображений компактных римановых поверхностей в пространства петель ΩG, мы пользуемся твисторным подходом, который позволяет свести эту задачу к описанию псевдоголоморфных отображений компактных римановых поверхностей в некоторые флаговые расслоения над пространствами петель.

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ КЛАССОВ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКАХ

Сердюк А.С. (Институт математики НАН Украины)
E-mail serdyuk@imath.kiev.ua

Пусть $L^{q,r}_{\beta,p}$, $p = 1,\infty$, — классы обобщенных интегралов Пуассона, то есть классы 2π-периодических функций, представимых при помощи сверток

$$f(x) = c_0 + (P^{q,r}_{\beta} * \varphi)(x) = c_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P^{q,r}_{\beta}(x-t)\varphi(t)\,dt, \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1, \ c_0 \in \mathbf{R},$$

где $P^{q,r}_{\beta}(t)$ — обобщенные ядра Пуассона с параметрами q, r и β:

$$P^{q,r}_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^r} \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}), \ q \in (0,1), \ r > 0, \ \beta \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Исследуется задача о нахождении точных значений наилучших приближений классов $L^{q,r}_{\beta,p}$ тригонометрическими полиномами t_{n-1} порядка, не превосходящего $n-1$, то есть величин вида:

$$E_n(L^{q,r}_{\beta,p})_p = \sup_{f\in L^{q,r}_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1}} \|f-t_{n-1}\|_p, \quad p=1,\infty. \tag{2}$$

Теорема. *Для любых $q\in(0,1)$, $r>0$ найдется номер n_0 такой, что при любом $n\geq n_0$ $(n,n_0\in\mathbf{N})$ и произвольных $\beta\in\mathbf{R}$ ядра $P^{q,r}_\beta(t)$ вида (1) удовлетворяют условию Никольского A^*_n [1] и при этом справедливы равенства*

$$E_n(L^{q,r}_{\beta,\infty})_\infty = E_n(L^{q,r}_{\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi}E_n(P^{q,r}_\beta)_1 = \|P^{q,r}_\beta * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_\infty. \tag{3}$$

При $r=1$ точные значения величин вида (2) при всех $q\in(0,1)$ и $n\in\mathbf{N}$ были вычислены М.Г. Крейном ($\beta=0,\ p=\infty$), С.М. Никольским ($\beta=0,\ p=1$) и А.В. Бушанским ($\beta\in\mathbf{R}$). При $r>1$ справедливость теоремы вытекает из работ Б. Надя ($\beta\in\mathbf{Z},\ p=\infty$), С.М. Никольского ($\beta\in\mathbf{Z},\ p=1$) и автора ($\beta\in\mathbf{R}$).

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант 25.1/0.43).

Литература

1. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**:3 – С. 207-256.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Смирнова И. Ю. (Донской гос. технический университет, Ростов-на-Дону)
alexeyk@aaanet.ru

Начиная с работ С. Бергмана и М.М. Джрбашяна, пространства аналитических p - суммируемых по отношению к σ - конечной мере функций на открытом связном множестве в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^n$ интенсивно изучались в работах многих авторов. Нас будут интересовать весовые пространства Бергмана на единичном диске и верхней полуплоскости, на которых мы и остановимся ниже. Основной мотивацией данной работы является дальнейшее развитие методов исследования классов операторов Теплица и порождаемых этими операторами алгебр в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой и с, вообще говоря, неограниченными символами. Для этого, в частности, необходима характеризация самих весовых пространств Бергмана со смешанной нормой, исследование структуры этих пространств, позволяющее в дальнейшем получить необходимые представления для изучения соответствующих теплицевых операторов. Понятно, что при изучении аналитических p - суммируемых функций основное внимание должно быть уделено поведению функции при приближении к границе области. Введение смешанной нормы позволит особо выделить поведение функции при приближении к границе. В единичном диске имеется три типа гиперболической геометрии - эллиптический, параболический и гиперболический. Исследование поведения функции при приближении к границе по соответствующим геодезическим предполагает введение и изучение трех существенно различных типов весовых пространств со смешанной нормой, связанных с указанными выше типами гиперболической геометрии. Например, модельная ситуация для эллиптического типа - это различные нормы по радиальной и угловой переменной. В последствии, естественно, планируется исследование как отдельных операторов Теплица в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой, так и порождаемых этими операторами C^* - алгебр. Ранее исследование операторов Теплица и алгебр теплицевых операторов в таких пространствах не осуществлялось (имеются только частные результаты об ограниченности проектора Бергмана).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНИМ ЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Соколенко И.В.(Институт математики НАН Украины
sokol@imath.kiev.ua

Пусть $C^q_\beta H_\omega$ — множество всех непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, задающихся свертками

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)P^q_\beta(t)dt,$$

в которых $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbf{R}$, — ядро Пуассона, $\varphi \in H_\omega = \{g \in C : |g(t) - g(t')| \le \omega(|t - t'|)\ \forall t, t';\ g \perp 1\}$, $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности.

Каждой функции f из класса $C^q_\beta H_\omega$ поставим в соответствие введенный А.С.Сердюком тригонометрический полином $U_{n-1}(f;x) = U_{n-1}(q;\beta;f;x)$ вида

$$U_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f) + a_0\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \Big\{\lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) +$$

$$+\nu_k^{(n)}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)\Big\},$$

где $a_k = a_k(\varphi)$, $b_k = b_k(\varphi)$, $k = 0,1,2,...$, — коэффициенты Фурье функции φ, а числа $\lambda_k^{(n)}$ и $\nu_k^{(n)}$ определяются равенствами:

$$\lambda_0^{(n)} = -2q^{2n}\cos\frac{\beta\pi}{2};\quad \lambda_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k} - q^{2n+k})\cos\frac{\beta\pi}{2},\ k = \overline{1, n-1};$$

$$\nu_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k} + q^{2n+k})\sin\frac{\beta\pi}{2},\ k = \overline{1, n-1}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbf{R}$ *и* $\omega(t)$ *— произвольный модуль непрерывности. Тогда величина* $\mathcal{E}_n(C^q_\beta H_\omega) = \sup\{|f(x) - U_n(f;x)| : f \in C^q_\beta H_\omega\}$, *не зависит от точки* x *и при* $n \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_n(C^q_\beta H_\omega) = \frac{2\theta_\omega q^n}{\pi}\int_0^{\pi/2} \omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t\,dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

где $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности, а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, q *и* β.

АСИМПТОТИКА ПОВЕДЕНИЯ СТРОЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ФУНКЦИЙ МАРКОВА

Старовойтов А.П., Лабыч Ю.А. (Гомельский государственный университет им. Фр. Скорины)
svoitov@gsu.by

Предполагая, что $\operatorname{supp}\mu$ – носитель конечной положительной борелевской меры μ компактен и принадлежит отрезку $[-1,1]$, рассмотрим функцию Маркова

$$\widehat{\mu}(z) = \int_{\operatorname{supp}\mu} \frac{z\,d\mu(x)}{1 - xz}, \tag{1}$$

аналитическую в $\mathbb{C}\setminus\{1 \le |x| < +\infty\}$. Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество рациональных функций вида $p_n(z)/q_m(z)$, где p_n и q_m – многочлены степени, не выше n и m соответственно. Пусть $\pi_{n,m}(z;\widehat{\mu}) = p_n(z;\widehat{\mu})/q_m(z;\widehat{\mu})$ – аппроксимации Паде функции $\widehat{\mu}$, т.е. рациональные функции из $\mathcal{R}_{n,m}$, для которых

$$q_m(z;\widehat{\mu})\cdot\widehat{\mu}(z) - p_n(z;\widehat{\mu}) = O\left(z^{n+m+1}\right),\quad z \to 0.$$

Далее полагаем

$$d\mu(x) = \frac{1}{B(a, b-a)}x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}dx,\quad 0 < x < 1,$$

где $b > a > 0$, B – бета-функция Эйлера.

Теорема 1. *Для любых фиксированных* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *и* $z \in D = \{z : |z| < 1\}$

$$\widehat{\mu}(z) - \pi_{n+1,m}(z;\widehat{\mu}) = L_{n,m}\frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m}z^{n+m+2}\left(1 + o(1)\right),\quad n \to \infty$$

где $L_{n,m} = m!\,(a)_{n+1}/(b)_{n+1}\cdot\prod_{k=1}^m(b - a + k - 1)/(b + n + k - 1)_2$,

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(b+n+m+1)}{\Gamma(a+n+1)\Gamma(m+b-a-1)}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-t})^{m+b-a-1}e^{-(n+a+1)t}}{(1-ze^{-t})^{m+1}}\,dt,$$

а Γ — *гамма-функция Эйлера,* $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$.

Многоточечные аппроксимации Паде функции $\widehat{\mu}(z)$ при $a=1$, $b=\alpha+2$, $\alpha>0$ исследовались в [1].

Литература

1. Пекарский А.А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова //Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. 2. С.121-132.

НАИЛУЧШИЕ m-ЧЛЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ БЕСОВА $B^r_{p,\theta}$ В СЛУЧАЕ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

Стасюк С.А. (Институт математики НАН Украины)

stasyuk@imath.kiev.ua

Пусть L_q, $1\le q\le\infty$, - пространство Лебега $2\pi-$ периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,...,x_d)$ со стандартной нормой $\|\cdot\|_q$. Мы исследуем величину наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ ((см., напри- мер, [1]), которая определяется согласно формуле

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j\in \mathbf{z}^d, c_j} \|f-\sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(k^j,x)}\|_q,$$

где $(k,x)=k_1x_1+...+k_dx_d$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $1\le p\le 2<q<\infty, 1\le\theta\le\infty$. *Тогда при* $\frac{d}{p}-\frac{d}{q}<r<\frac{d}{p}$ *выполняется порядковое равенство*

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}.$$

Приведенная теорема дополняет результаты, которые получены в [2] и касаются точных по порядку оценок величин $\sigma_m(B^r_{p,\theta})_q$, $1\le p,q,\theta\le\infty$, при других ограничениях на параметр r. При $d=1$ теорема доказана в [3].

Литература

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

2. De Vore R.A. and Temlyakov V.N. Nonlinear approximation by trigonometric sums // The Journal of Fourier Analysis and Applications. - 1995. **2**, N 1. - P. 29–48.

3. Белинский Э.С. Приближение "плавающей"системой экспонент на классах гладких периодических функций // Матем. сб. - 1987. -**132** , N 1.- С. 20–27.

НЕКОТОРЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФИНИТНЫМ ФУНКЦИЯМ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНТЕНН

Суетин П.К. (МТУСИ, Москва)

mtuci@mtuci.ru

Систему равных нулю при $|x|>1$ финитных функций [2]

$$\Phi_{nk}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}t^k\left(\frac{n+1}{t}\sin\frac{t}{n+1}\right)^{n+1}dt, \quad n=0,1,2,\dots, \quad k=0,1,\dots,n, \tag{1}$$

можно расположить в виде последовательности и ортогонализировать на сегменте $[-1,1]$ при произвольном весе $h(x)$. В результате для финитной функции $f(x)$ получается ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}B_{nk}(x), \tag{2}$$

где

$$a_{nk}=\int_{-1}^{1} h(x)f(x)B_{nk}(x)dx, \quad n=0,1,2,\dots, \quad k=0,1,\dots,n.$$

На ряды (2) переносятся многие свойства ортогональных рядов [1]. В интеграле (1) можно разделить действительную и мнимую части. В результате получается система четных и нечетных функций, которую также можно ортогонализировать. Получающиеся ряды Фурье применяются в задачах математической теории антенн [2].

Литература

1. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. - М.: Наука, 1984. - 496 с.
2. Суетин П.К. Начала математической теории антенн. - М.: Инсвязьиздат, 2008. - 228 с.

АФФИННЫЙ СИНТЕЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА $L[0,1]$

Терехин П.А. (Саратов)
terekhinpa@info.sgu.ru

Пусть функция $\psi(x)$, $x \in \mathrm{R}$, имеет носитель $\operatorname{supp}\psi \subset [0,1]$ на единичном отрезке. Для натурального числа $n = 2^k + j$, где k, j - целые числа такие, что $k \geq 0$ и $0 \leq j \leq 2^k - 1$, положим

$$\psi_n(x) = \psi_{k,j}(x) = 2^k\psi(2^kx - j).$$

Система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов функции* ψ на отрезке $[0,1]$.

Говорят, что имеет место *аффинный синтез* в пространстве $L = L[0,1]$ относительно пространства числовых последовательностей X, если, во-первых, для любой функции $f \in L$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n$, и, во-вторых, для всех $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n$.

Принципиальная возможность аффинного синтеза установлена в работе Филиппова и Освальда [1]. В [1] показано, что условие $\int_0^1 \psi(x)\,dx \neq 0$ является критерием аффинного синтеза. В работах Бруна [2] и автора [3] этот результат был уточнен: имеет место аффинный синтез в L относительно пространства l.

Скажем, что аффинный синтез в L относительно X допускает *линейный алгоритм* вычисления коэффициентов, если существует последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных линейных функционалов на пространстве L таких, что для любой функции $f \in L$ имеем $\{l_n(f)\}_{n=1}^{\infty} \in X$ и справедливо представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(f)\psi_n$.

Доказано, что аффинный синтез в L относительно l не допускает линейного алгоритма вычисления коэффициентов.

Однако, если в качестве X взять пространство коэффициентов аффинной системы, то при дополнительных условиях на функцию ψ существует линейный алгоритм аффинного синтеза в пространстве Лебега L. Этот алгоритм является обобщенным аналогом классического разложения в ортогональный ряд Фурье – Хаара.

Работа выполнена при поддержке гранта Презединта РФ для ведущих научных школ, проект НШ-2970.2008.1.

Литература

1. V.I. Filippov, P. Oswald, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15-29.
2. J. Bruna, *J. Fourier Anal. Appl.*, **12** (2006), 71-82.
3. П.А. Терехин, *Изв. вузов. Матем.*, **43**:8 (1999), 74-81.

О ПОЛНОТЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СИНКОВ В $C[0,\pi]$

Трынин А.Ю. (СГУ, Саратов)
tayu@rambler.ru, trynin@cpk.sgu.ru

В связи с развитием теории сигналов Э. Борель и Е.Т. Уиттекер ввели понятие усечённой кардинальной функции, сужение на отрезок $[0,\pi]$ которых выглядит так

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f(\frac{k\pi}{n}). \tag{1}$$

К настоящему времени достаточно фундаментально исследована проблема синк-аппроксимации аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности (см., например, [1], [2]). Аппроксимативные свойства (1) на отрезке изучались в [3], [4], [5]. В [5] установлена полнота системы $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ в $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Система функций* $\{1, x\} \cup \{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ *полна в* $C[0,\pi]$.

Теорема 2. *Линейные оболочки систем функций* $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}, n \in \mathbb{N}$ *не плотны в* $C[0,\pi]$.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

Литература

1. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. *Основы теории всплесков.* Успехи математических наук. 1998,Т. 53. выпуск 6(324)., С. 53-128.

2. Жук А.С., Жук В.В. *Некоторые ортогональности в теории приближения.* / Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 314, 2004, С. 83-123.

3. Трынин А.Ю.*Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке*, Матем. сб., 2007, 198:10, 141.158.

4. Трынин А. Ю.*Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке.* //Сибир. матем. журнал, Том 48, (2007), Номер 5, стр. 1158.1169.

5. Sklyarov V.P. *On the best uniform sinc-approximation on a finite interval.* East Journal on Approximations Vol. 14, N 2(2008), 29-38.

ПРИНЦИП КАСКАДНОГО ПОИСКА И СОВПАДЕНИЯ N ОТОБРАЖЕНИЙ

Фоменко Т.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
tn-fomenko@yandex.ru

Рассматривается задача каскадного поиска заданного подмножества A в метрическом пространстве X, то есть реализации A как предельного множества мульти-каскада (многозначной динамической системы с полугруппой сдвигов $(Z_{\geq 0}, +)$) на X. Принцип каскадного поиска, предложенный автором, позволяет решить эту задачу для случаев, когда A есть полный прообраз замкнутого подпространства при многозначном отображении из X в Y, а также множества совпадений N таких отображений метрических пространств ($N \geq 2$). Во всех случаях получены оценки на расстояние от любой начальной точки до соответствующих предельных точек. В частности, при $N = 2$, из полученных результатов вытекают недавние результаты А.В.Арутюнова о совпадениях двух отображений. Приведем один из полученных результатов.

Теорема. *Пусть* X, Y *- метрические пространства,* $F_1, ..., F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times ... \times F_n$, *график отображения* F Δ_n*-замкнут* (Δ_n *- диагональ в* Y^n), *и хотя бы один из графиков* $Graph(F_i), i = 1, ..., n$, *полон. Пусть числа* $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, *таковы, что для каждого* $x \in X$, *и каждого* $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x, x') \leq \frac{d(y,\Delta_n)}{\alpha}$, $d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, \Delta_n)$, *и* $d(y', \Delta_n) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, \Delta_n)$. *Тогда на* X *существует мульти-каскад с предельным множеством* $Coin(F_1, ..., F_n) := \{x \in X \mid F_1(x) = ... = F_n(x)\} \neq \emptyset$, *и для любого* $x_0 \in X$ *и любого* $y_0 \in F(x_0)$ *расстояние* $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{d(y_0,\Delta_n)}{\alpha - \beta}$, *где* $\xi = \xi(x_0, y_0)$ *- любая из предельных точек, соответствующих начальной точке* x_0 *и выбранному* y_0.

О ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ ШТЕЙНГАУЗА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж), Хромов А.П. (Саратов)
burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть L — функционально-дифференциальный оператор:

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = \gamma y(1).$$

Оператор (1) встречается, в частности, при исследовании интегральных операторов с инволюцией $\theta(x) = 1 - x$ (см. [1], [2]) и представляет самостоятельный интерес [3].

Теорема. *Если* $a(x)$ *удовлетворяет условию Липшица и* $a(x) = a(1-x)$, $\alpha^2 \neq 1$, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $p_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для любой* $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r \to \infty} \|a(x)S_r(f,x) - S_r(af,x)\|_\infty = 0, \tag{2}$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(f)\, d\lambda$, R_λ *— резольвента оператора* L, $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L_\infty[0,1]}$. *Если же* $\gamma = 1$, *то* (2) *имеет место еще и тогда, когда* $a(x)$ *удовлетворяет условию Липшица и* $a(0) = a(1)$.

Этот результат является аналогом теоремы Штейнгауза ([4], с. 111–112) для разложений по собственным функциям оператора L.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06–01–00003, 07–01–00397) и гранта Президента РФ (проект НШ–2970.2008.1)

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, 10. – С. 33–50.

2. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, вып. 1. – С. 97–110.

3. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. – 2007. – Т. 414, 4. – С. 443–446.

4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматлит, 1961. – 936 с.

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Шарапудинов И.И. (Махачкала)
sharapud@iwt.ru

Пусть $f(t)$ достаточно гладкая функция, заданная на $[-1,1]$. В работе рассмотрена задача о приближении $f(t)$ комбинациями вида $p_n(t)+\tau_m(t)$ где $p_n(t)$ – алгебраический полином степени n, $\tau_m(t) = a_0+\sum_{k=1}^m a_k\cos k\pi t + b_k \sin k\pi t-$ тригонометрический полином порядка m. Подобные задачи часто встречаются в различных областях приложений, в которых для заданного временного ряда наблюдений $f(t)$ требуется найти так называемый тренд $p_n(t)$ и периодическую составляющую $\tau_m(t)$. При решении поставленной задачи возникают проблемы, связанные с необходимостью одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. В частности, когда $f\in W^r_{L^\infty(-1,1)}$ нам удалось получить результаты окончательного характера, исходя из известной теоремы Теляковского – Гопенгауза [1],[2]. Однако, эта теорема не применима в том случае, когда речь идет об одновременном приближении гладких функций f из классов $W^r_{L^p(-1,1)}$ и их производных. Для этого случая в настоящей работе получены новые результаты, аналогичные теореме Теляковского-Гопенгауза. Доказательство этих результатов, в свою очередь, опирается на свойства смешанных рядов по ортогональным полиномам, установленные нами ранее (см.[3],[4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00143.

Литература

1. Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами//Матем. сб. 70:2 (1966), 252–265.

2. Гопенгауз И.З. К теореме А.Ф.Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке// Матем.заметки. Т.1. Вып.2. (1967). С. 163–172.

3. Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r// Матем. сб. 197:3 (2006), 135–154.

4. Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра// Матем.заметки.Т.84. Вып.3.(2008) С.452–471.

ПОРЯДКОВЫЕ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ n-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ S^p_φ

Шидлич А.Л. (Институт математики НАН Украины)
funct@imath.kiev.ua

В докладе приводятся результаты исследований некоторых аппроксимационных характеристик пространств S^p_φ, которые были введены в 2000 году А.И. Степанцом.

Пусть $f\in S^p_\varphi$. Величину

$$e_n(f)_p := \inf_{\alpha_k,\gamma_n} \|f-P_{\gamma_n}\|_{S^p_\varphi} = \inf_{\alpha_k,\gamma_n} \|f-\sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k\varphi_k\|_{S^p_\varphi},$$

где $\gamma_n=\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ — произвольный набор из n различных натуральных чисел, α_k — произвольные комплексные числа, называют наилучшим n-членным приближением элемента f в пространстве S^p_φ.

В работе найдены порядки при $n \to \infty$ точных верхних граней наилучших n-членных приближений q-эллипсоидов

$$\psi U^q_\varphi = \left\{ f \in S^q_\varphi : \widehat{f}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{g}_\varphi(k),\ g \in S^q_\varphi,\ \|g\|_{S^p_\varphi} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{g}_\varphi(k)|^q \right)^{1/q} \leq 1 \right\},$$

в пространствах S^p_φ.

Теорема. *Пусть $0 < p, q < \infty$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность чисел такая, что убывающая перестановка $\bar\psi = \{\bar\psi_k\}$ системы чисел $|\psi_k|$ удовлетворяет условию $\bar\psi_k = \psi_1(k)$, где $\psi_1(t)$, $t \geq 1$, — некоторая положительная выпуклая вниз функция, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_1(t) = 0$ ($\psi_1 \in \mathfrak{M}$). Тогда если ψ_1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}'_\infty := \{\psi \in \mathfrak{M} : \alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \downarrow 0, \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty\}$, то имеет место порядковое при $n \to \infty$ равенство*

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p := \sup_{f \in \psi U^q_\varphi} e_n(f)_p \asymp \frac{\psi_1(n+1)}{(\eta(\psi_1, n) - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}},$$

где функция $\eta(\psi_1; t)$ определяется соотношением $\psi_1(\eta(\psi_1; t)) = = \frac{1}{2}\psi_1(t)$, $t \geq 1$.

Если же функция ψ_1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}''_\infty := = \{\psi \in \mathfrak{M} : \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0\}$ или $\mathfrak{M}^c_\infty := \{\psi \in \mathfrak{M} : \alpha(\psi; t) \downarrow 0,\ 0 < K_1 < \psi(t)/|\psi'(t)| < K_2 < \infty\}$, то

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1).$$

Заметим, что естественными представителями множеств $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ и $\mathfrak{M}''_\infty$ являются функции $\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, в случаях, когда $r \in (0,1)$, $r = 1$ и $r > 1$ соответственно.

О МИНИМУМЕ ФУНКЦИОНАЛОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Лаврентьев И.М. (МГУ им. М. В. Ломоносова),
Шчепанович Р. (Университет Черногории)

Пусть X — банахово пространство, f — вещественный функционал дифференцируемый по Гато и $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Положим $D_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$ i $S_R = \{x \in X : \|x\| = R\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\exists x_0 \in \overset{\circ}{D}_R : f(x) > f(x_0), \forall x \in S_R (f(x_0) > m = \inf\limits_{D_R} f(x))$,

2) Отображение $F(x)$ равномерно непрерывно в D_R.

Тогда для любой минимизирующей последовательности $F(x_n) \to 0, n \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $\forall x \in S_R : \langle F(x), x \rangle \geq \alpha > 0$,

2) Отображение $F(x)$ равномерно непрерывно в D_R.

Тогда для всякой минимизирующей последовательности $\langle x_n \rangle$, $(x_n \in D_R)$: $F(x_n) \to 0, n \to +\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие*

3) $\forall x_1, x_2 \in D_R, \|x_1 - x_2\| + 2Am \leq C(F(x_1), F(x_2)) + A(f(x_1) + f(x_2))$, *где* $m = \inf\limits_{D_R} f(x)$, $C(u,v)$ — *положительная непрерывная функция,* $C(0,0) = 0$ *i* $A \geq 0$.

Тогда всякая минимизирующая последовательность сильно сходится, причем, если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$, to $f(x^*) = \inf\limits_{D_R} f(x)$ и $F(x^*) = 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и условие 3) теоремы 3. Тогда всякая минимизирующая последовательность сильно сходится. Кроме того, если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$, to $f(x^*) = \inf\limits_{D_R} f(x)$ и $F(x^*) = 0$.*

Пример. Как показывает следующий пример из условий теоремы 3 (теоремы 4) не следует, что функционал $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу: $f(x) = \frac{1}{5}\|x\|^5 - \frac{3}{8}\|x\|^4 - \frac{1}{3}\|x\|^3 + \frac{3}{4}\|x\|^2$, $x \in H$, H — гильбертово пространство.

ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_q(R^d)$

Янченко С.Я. (Институт математики НАН Украины)
Sergiy.Yan@Rambler.ru

Исследуются классы $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функций многих переменных, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, где $\omega(\tau)$ — заданная функция (одной переменной) типа модуля непрерывности порядка l, которая удовлетворяет условиям Бари – Стечкина [1] (обозначаем (S) и (S_l)). При определенном выборе функции $\Omega(t)$ классы $B^{\Omega}_{p,\theta}$ совпадают с классами $S^r_{p,\theta}B$, которые исследовались в [2].

Пусть $L_q(R^d)$ — пространство измеримых функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ заданных на R^d, $d \geq 1$, со стандартной нормой. Получены точные по порядку оценки наилучших приближений функций из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$, которые определяются следующим образом:

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{g \in G_q(Q_n)} \|f - g\|_q,$$

где $G_q(Q_n) \subset L_q(R^d)$ — множество целых функций экспоненциального типа со спектром из ступенчато-гиперболического креста Q_n.

Теорема. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *и* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *где* $\omega(\tau)$ *удовлетворяет условию* (S) *с некоторым* $\alpha > 0$, *а также условию* (S_l). *Тогда имеет место порядковое соотношение*

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+},$$

где $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Следствие. *Пусть* $\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{r_1}$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$ *и* $1 \leq \theta \leq \infty$ *справедлива оценка*

$$E_n(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}. \tag{1}$$

Оценка (1) дополняет результаты, которые получены в [2].

Литература

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483–522.
2. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with a certain mixed smoothness by entire functions. // Northeast. Math. J. — 1995. — 11(4). — P. 454 – 466.

ON BLOCH AND NORMAL FUNCTIONS ON COMPLEX BANACH MANIFOLDS

Dovbush P.V. (Institute of Mathematics and Computer Science of Academy of Sciences of Moldova)
peter.dovbush@gmail.com

Following Lehto and Virtanen 1957, and Pommerenke 1970, we generalize the notions of normal function, Bloch function and other notions of one complex variable to the holomorphic functions on a complex Banach manifold modelled on a complex Banach space of positive, possibly infinite, dimension and obtain various relations which exist among them. Several necessary and sufficient conditions for holomorphic functions to be normal/Bloch are established. Boundary behavior of normal functions defined on a bounded domain in a complex Banach space, are also studied. We will discuss the Lindelöf principle for admissible approach regions in a bounded domain in a complex Banach space. The main new idea is to replace the assumption of existence of the limit along a radial (or non-tangential) curve with the assumption of existence of the limit along a suitable asymptotic curve; then one can infer the existence of the admissible limit for normal holomorphic functions.

References

1. P.V. Dovbush, *Bloch functions on complex Banach manifolds* Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy Volume 108, Issue 1, 2008, p. 27-32.
2. P.V. Dovbush, *On normal and non-normal holomorphic functions on complex Banach manifolds* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienzi, to appear.
3. P.V. Dovbush, *On Bloch functions and normal functions on complex Banach manifolds* (to appear in the Proceedings of the 6^{th} International ISAAC Congress. Ankara, Turkey 13 - 18 August 2007, World Scientific).
4. P.V. Dovbush, *On normal and non-normal holomorphic functions on complex Banach manifolds* (to appear in the Proceedings of the 6^{th} Congress of Romanian mathematicians. June 28 - July 4, 2007, Bucharest, Romania).
5. P.V. Dovbush, *Normality and P-point sequences* Exploratory Workshop on Recent trends in complex analysis and related topics, Alba Iulia, August 14 - 16, 2008, p. 8–9.

THE PRIME NUMBER THEOREM FROM POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

Gorin E. A. (Moscow State Pedagogical University)
evgeny.gorin@mtu-net.ru

Let $f = f(\sigma+it)$ be a holomorphic function in $G = \{|\sigma| < 1\}\setminus(-1,0]\}$. We suppose the following conditions hold. (1) $f \in \mathrm{Hol}(G)$, (2) if $\sigma > 0$ then $f(\sigma+it) \neq 0$ for any $t \in \mathbf{R}$, (3) if $0 < \sigma \leq 1$ then $t \to \log|f(\sigma+it)|$ is the PDF (on $\mathbf{R}$), (4)

$$g(it) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\sigma\to+0} \frac{\log|f(\sigma+it)|}{\log|f(\sigma)|}$$

exists for any $t \in \mathbf{R}$.

If this is the case then $g(it)$ has to be (may be discontinues) positive definite functions. It leads to generalizations of the prime number theorem.

ON BASE DIMENSION I AND THE PROPERTY OF UNIVERSALITY

Iliadis S.D. (University of Patras)
iliadis@math.upatras.gr

Iliadis in [3] introduced the so-called base dimension-like functions. One of these functions corresponds an element α of the class $\mathcal{O}\cup\{-1,\infty\}$, where $\mathcal{O}$ is the class of all ordinals, to each space X with a given normal base $\mathcal{F}$ for the closed subsets of X. This function is defined similarly to the classical large inductive dimension Ind and is denoted here by I. We shall write $\mathrm{I}(X,\mathcal{F}) = \alpha$ and say that the *base dimension* I *of* X *by the normal base* $\mathcal{F}$ *is* α. The classical large inductive dimension Ind of a normal space X, as well as, the large inductive dimension Ind_0 of a Tychonoff space X defined independently by Charalambous [1] and Filippov, and relative inductive dimensions defined by Chigogidze [2] for a subspace X of a Tychonoff space Y may be considered as the base dimension I of X by normal bases $\mathcal{Z}(X)$ (all closed subsets of X), $Z(X)$ (all zero-sets of X), and $Z(X,Y) = \{X\cap F : F \in Z(Y)\}$, respectively.

Here, we shall prove that in the class $\mathbb{P}$ of all pairs $(X,\mathcal{F}^X)$, where X is a Tychonoff space of weight $\leq\tau$ and $\mathcal{F}^X$ is a normal base of cardinality $\leq\tau$ for the closed subsets of X consisting of zero-sets, such that $\mathrm{I}(X,\mathcal{F}) \leq n \in \omega$, there exists a universal element $(T,\mathcal{F}^T)$ in the following (strong) sense: for every element $(X,\mathcal{F}^X)$ of $\mathbb{P}$ there exists an embedding i_T^X of X into T with the property

$$\mathcal{F}^X = \{(i_T^X)^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}^T\}.$$

However, the following question is open: Are there universal elements in the class of all Tychonoff (respectively, normal or compact) spaces of the given weight with dimension $\mathrm{Ind}_0 \leq n \in \omega$?

Work supported by the Caratheodory Programme of the University of Patras.

References

1. M.G. Charalambous, *Two new inductive dimension functions for topological spaces*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sest. Math. 18 (1975), 15-25 (1976).
2. A. Chigogidze, *On relative dimensions*, General opology. Spaces of functions and dimension, Moscow State University, Moscow, 1985, 67-117.
3. Stavros Iliadis, *Universal spaces and mappings* North-Holland Mathematics Studies 198, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2005.

JACKSON INEQUALITY IN L_2 SPACE ON $[-1,1]$ WITH HYPERBOLIC WEIGHT

Ivanov V., Ivanov A. (Tula State University), Liu Yongping (Beijing Normal University, China)
ivaleryi@mail.ru, ypliu@bnu.edu.cn

Let $\alpha \geq -1/2$, $\lambda \geq 0$, $P^{-\alpha}_{-1/2+i\lambda}(z)$ be Legendre function of the first kind, $\varphi^\alpha_\lambda(x) = c_\alpha P^{-\alpha}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} x)/\operatorname{sh}^\alpha x$, $\varphi^\alpha_\lambda(0) = 1$, $d\nu_\alpha(x) = |\operatorname{sh} x|^{2\alpha+1}dx$, $L_{2,\alpha}[-1,1]$ be Hilbert space with scalar product $(f,g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d\nu_\alpha(x)$, $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Let us consider Sturm – Liouville problem

$$(\operatorname{sh}^{2\alpha+1} xy'(x))' + (\lambda^2 + (\alpha+1/2)^2)\operatorname{sh}^{2\alpha+1} xy(x) = 0, \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

It gives complete orthogonal system of eigenfunctions $\{\varphi_k(x) = \varphi^\alpha_{\lambda_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ ($\lambda_k > 0, \varphi^\alpha_{\lambda_k}(1) = 0$) in $L_{2,\alpha}[0,1]$. Then $\{\varphi_k(x),\ \psi_k(x) = \varphi'_k(x)\}_{k=1}^\infty$ will be complete orthogonal system in $L_{2,\alpha}[-1,1]$.

For $f \in L_{2,\alpha}[-1,1]$, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\varphi_k(x)+b_k\psi_k(x))$ will be it's Fourier series, $E_n(f)$ — value of best approximation of order n, $T^t f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)(a_k\varphi_k(x) + b_k\psi_k(x))$ — generalized translation operator. It's integral representation is given by

$$T^t f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^{\pi}\{f(\theta)(1+\theta'_x)+f(-\theta)(1-\theta'_x)\}\sin^{2\alpha}\varphi d\varphi,$$

where $\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}t\cos\varphi$. Natural extension of function $f(x)$ from [-1,1] segment to real axes is used in it.

Theorem 1. For all $\alpha \geq -1/2$, $a > 1$ and every $f \in L_{2,\alpha}[-1,1]$ it's Fourier series is convergent in $L_{2,\alpha}[-a,a]$.

Let us define module $\omega(\delta,f) = \sup\left\{\left\|(E-T^t)^{1/2}f(x)\right\| : |t| \leq \delta\right\}$.

Theorem 2. For all $\alpha \geq -1/2$ and every $f \in L_{2,\alpha}[-1,1]$ exact inequality $E_n(f) < \omega(2\tau_{n+1},f)$ is valid. Here τ_{n+1} is smallest positive zero of $\varphi_{n+1}(x)$.

The same problem in $L_{2,\alpha}[-1,1]$ space with power weight $|x|^{2\alpha+1}$ was considered in [1].

This work is supported by RFBR (№05-01-39005, №06-01-00372, №09-01-00685) and NSFC (№10471010).

References

1. *Ivanov V.I., Chertova D.V., Liu Yongping.* Jackson Theorem in the space L_2 on the interval [-1,1] with power-law weight // Math. Notes. 2008. V.84, №1-2. P.134-136.

SHARP ESTIMATES OF INTERMEDIATE DERIVATIVES FOR FUNCTIONS FROM $\overset{0}{W}{}_2^r(-1,1)$

Kalyabin G.A. (Moscow)
gennadiy.kalyabin@gmail.com

1. We consider the Sobolev space $\overset{0}{W}{}_2^r(-1,1)$ which consists from all (real-valued) funtions f, defined on the segment $[-1,1]$, having absolutely continuous derivatives up to the order $(r-1)$, such that $f^{(r)} \in L_2(-1,1)$ and satisfying zero boundary conditions: $f^{(s)}(\pm1) = 0,\ s \in \{0,1,\dots r-1\}$; we put:

$$\|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^r(-1,1)} := \left(\int_{-1}^{1}|f^{(r)}(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Our aim is to obtain explicit formulas for the quantities

$$A_{r,k}(x) := \sup\{\ |f^{(k)}(x)| : \|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^r(-1,1)} \leq 1\};$$

$$x \in [-1,1], \qquad k \in \{0,1,\dots r-1\}. \tag{2}$$

The problems of such a type are described, e.g., in [1, § 2.4] and [2].

Theorem. *Let D^m stand for d^m/dx^m; then*

$$A_{r,k}(x) = \Big(\sum_{n\geq r}\Big(\frac{1}{2}^n n!D^{n-r+k}[(1-x^2)^n]\Big)^2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

In particular, one has

$$A_{r,k}(0) = 2^{k-r}\Big(\sum_{2j\geq k}\Big(\frac{(2j)!}{4^j j!(j+r-k)!}\Big)^2\Big(2j+r-k+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

The work was supported by grants of RFBR 08-01-00443, 06-01-00341, 06-01-04006, INTAS 05-1000008-8157 and DFG-Projekt, GZ: 436 RUS 113/903/0-1.

References

1. Tikhomirov V.M. Some problems of approximation theory. Moscow University Publishers, 1976 (Russian).
2. Kalyabin G.A. Some problems for Sobolev spaces on the half-line// Proc. Steklov Inst. Math. 2006, V.255, pp. 1 - 9.

SHARP ESTIMATES OF NEWTON COEFFICIENTS OF UNIVALENT FUNCTIONS

Kirjackis E.G. (Vilnius Gediminas Technical University)
Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt

Let E is disk $|z| < 1$. Denote by S the class of univalent functions $F(z)$ in E of the form

$$F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k.$$

Bierbach's conjecture concerning the Maclaurin coefficients of functions from the class E was proved by Louis de Branges in 1985 ([1]).

I. A. Aleksandrov ([2]) passed from sharp estimates of the Maclaurin coefficients to sharp estimates of the Taylor coefficients of functions from the class S.

Note that the same result was also obtained by Landau in 1926, however, by assuming that Bieberbach's conjecture was valid ([3]).

The author of this paper passed from sharp estimates of the Taylor coefficients to sharp estimates of the Newton coefficients of functions from the class S.

Theorem (Kirjackis E.G). *Let $[F(z); z_0, ..., z_n]$ is divided difference. If $F(z) \in S$, then*

$$\|[F(z); z_0, ..., z_n]\| \leq \left(-1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}\right) \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}, \tag{1}$$

for any $n \geq 0$ and any $z_0, ..., z_n \in E$.

The equality in (1) holds if and only if $z_m = |z_m|e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, ..., n$, where $0 \leq \alpha < 2\pi$, and the function $F(z)$ is of the form $F(z) = z/(1 - e^{-i\alpha}z)^2$. Moreover

$$\left[\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}; z_0, ..., z_n\right] = e^{-i(n-1)\alpha} \left(-1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}\right) \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}.$$

References

1. *L. Branges.* A proof of the Bieberbach conjecture. //Acta Math. 1985. V 154. P. 137-152.
2. *I. A. Aleksandrov.* Methods of Geometrical Theory of Analytical Functions. //State. Univ.,Tomsk, 2001 (in Russian)
3. *E. Landau.* Einige Bemerkungen Uber schlichte Abbildung. //Jber. Deutsch. Math.-Verein 34 (1925/26).-P. 239-243.

POSITIVE CURVATURE METRICS ON CONE MANIFOLDS WITH TORUS-KNOT TYPE SINGULARITY

Kolpakov A.A. (Novosibirsk State University)
kolpakov.alexander@gmail.com

It is known that every connected Riemann surface F admits a unique complete 2-dimensional real Riemann metric with constant curvature $k = -1$, 0 or $+1$. Notions of 2-dimensional orbifold and cone-manifold generalise the idea of a metric structure on a surface. The present work deals with 3-dimensional cone-manifolds.

A 3-dimensional cone manifold of curvature $k = -1$, 0 or $+1$ is a 3-dimensional Riemann manifold of constant sectional curvature with cone-type singularities along simple closed geodesics (i.e. along a knot or link). The theorem by W. Thurston states that there are no 3-dimensional cone manifolds of curvature -1 with singularities along a torus knot $t(p, q)$ with p, q that are coprime positive integers.

Denote by $T_{p,q}(\alpha)$ a 3-dimensional cone manifold with torus-knot type singularity and cone angle α along it. Our goal is to establish a 3-dimensional cone manifold structure of curvature $k = +1$ on the cone manifold $T_{p,q}(\alpha)$. The following theorem takes place:

Theorem. *The cone-manifold $T_{p,q}(\alpha)$ admits a singular Riemannian metric of constant sectional curvature $+1$ if*

$$2\pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < \alpha < 2\pi\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

The volume of $T_{p,q}(\alpha)$ equals

$$\operatorname{Vol} T_{p,q}(\alpha) = \frac{pq}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)^2.$$

The work is performed under the auspieces of Scientific Schools Grant N.Sh.–5682.2008.1 and supported by RFBR Grant No. 06–01–00153.

References

1. *H. M. Farkas, I. Kra* Riemann Surfaces. Berlin, New York: Springer-Verlag. 1980.
2. *W. Thurston* The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton University Lecture Notes. 1978-1981.
3. *A. A. Kolpakov, A. D. Mednykh* Spherical structures on torus knots and links. Siberian Math. J. 2009. In print.

FRECHET DISTANCE, EQUIVALENT CURVES AND THEOREM OF SEIDEL AND WALSH

Pavicevic Z., Markovic M. (University of Montenegro, Montenegro)
zarkop@cg.ac.yu, m.marijan@t-com.me

With D we denote unit disc is complex plane in Euclid metric. Two curves γ_1 and γ_2 in D are equivalent if there exist $\varepsilon > 0$ such that $\gamma_2 \subseteq \bigcup\limits_{z\in\gamma_1} \Delta(z,\varepsilon)$, where $\Delta(z,\varepsilon)$ is hyperbolic disc with radius ε. This relation of equivalence we denote with $\sim$.

Lemma 1. *If Frechet distance between two curves if finite then these curves are equivalent.*

Converse of previous lema does not hold. There is counterexample.

We say that function f defined on D is normal along curve γ which terminates in point $e^{i\theta} \in \partial D$ if the family $\{f \circ \varphi_w : w \in \gamma\}$ is normal in the sense of Montel, $\varphi(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$, $z \in D$, $w \in D$.

Lemma 2. *If f is meromorphic function in D and is normal along curve γ_1 then it is normal along curve γ_2, where $\gamma_1 \sim \gamma_2$.*

Theorem. *Let function f is meromorphic in D and normal along curves γ_1 and γ_2 which terminates in same point $e^{i\theta} \in \partial D$ and are equivalent. If there exist $\lim\limits_{\gamma_1 \ni z \to e^{i\theta}} f(z)$ then exist $\lim\limits_{\gamma_2 \ni z \to e^{i\theta}} f(z)$ and have the same value.*

Theorem is more general then Theorem 4 in [1] (page 199).

References

1. W. Seidel, J. L. Walsh, *On the Derivate of Function Analytic in the Unit Disc and Their Radii of Univalence and of p-valence*, Transcription of the American Mathematical Society, vol. 52, 1942.

TOPOLOGICAL STRUCTURES ON THE PRIVALOV SPACES

Meštrović R. (Department of Mathematics, Maritime Faculty, University of Montenegro, Kotor, Montenegro), Pavićević Ž. (Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro)
romeo@cg.ac.yu, zarkop@cg.ac.yu

For any fixed $p > 1$, the *Privalov space* N^p consists of all analytic functions f on the open unit disk $\mathbf{D}$ in the complex plane for which

$$\|f\|_p := \left(\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} (1 + \log|f(re^{i\theta})|) \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} < +\infty.$$

The classes N^p were introduced by I.I. Privalov in 1941, where N^p is denoted as A_q. In 1977 M. Stoll showed that the space N^p with the topology given by the metric ρ_p defined by $\rho_p(f,g) = \|f-g\|_p$, $f,g \in N^p$, becomes an F-algebra.

By a result of C.M. Eoff from 1993, the space N^p can be expressed as a union of certain weighted H^2 spaces and it is given a locally convex topology $\mathcal{H}_p$ as the inductive limit of these spaces. This topology is weaker than the topology on N^p given by the metric ρ_p. On the other hand, the topology $\mathcal{H}_p$ coincides with the Mackey topology (strongest locally convex topology yielding the same dual) on N^p. By using the fact that the (topological) duals of N^p with respect to the topology $\mathcal{H}_p$ and the metric topology ρ_p coincide, we prove asymptotic versions of Szegő's theorem and the Helson-Szegő theorem. Our results are in fact generalizations of those obtained by J.E. McCarthy (*J. Funct. Anal.* **104** (1992), pp. 229-241) for the case $p = 1$ (with the convention that N^1 denotes the well known *Smirnov class* with the metric ρ_1).

Furthermore, we characterize the intersection of the ranges of a class of co-analytic Toeplitz operators, by considering this set as the dual space of the Privalov space N^p in a certain topology.

References

1. R. Meštrović and Ž. Pavićević, Topologies on some subclasses of the Smirnov class, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **69** (2003), 99-108.
2. R. Meštrović and Ž. Pavićević, A note on common range of a class of co-analytic Toeplitz operators, accepted for publication in *Portugaliae Mathematica*.

APPROXIMATION OF CONTINUOUS PERIODIC FUNCTIONS BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

Ovsiy E.Y. (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)
ovsiy.imath@gmail.com

Let C be the space of 2π-periodic continuous functions f with the norm $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Let $C^\psi_\beta H_\omega$ be the set of functions $f \in C$ representable in the form of a convolution

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(x-t)\Psi_\beta(t)\,dt, \quad y \in H^0_\omega,$$

where $H^0_\omega = \{y \in C: \ |y(t') - y(t'')| \le \omega(|t'-t''|)\ \forall t', t'' \in R,\ y \perp 1\}$, $\omega(t)$ is an arbitrary modulus of continuity, $\Psi_\beta(t)$ is a summable function, which the Fourier series is of the form $\sum_{k=1}^\infty \psi(k)\cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in R$, $\psi(k)$ is prescribed number of sequences. Let M_0' be the set of continuous functions $\psi(t)$ convex below for all $t \ge 1$, having at the points $t = k$ the values $\psi(k)$ and which satisfy conditions: $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$, $0 < \frac{t}{\psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right) - t} \le K$, $t \ge 1$ and $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty$. Let F be the set of continuous functions $\varphi(t)$, $t \ge 0$, steadily increasing to infinity and having at the points $t = k$ the values $\varphi(k)$.

Let

$$Z^\varphi_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left[1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\right](a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),$$

where $n \in N$, $\varphi \in F$.

For the class $C^\psi_\beta H_\omega$, where $\psi \in M_0'$, it is proved the following statement.

Theorem. *Let $\psi \in M_0'$, $\varphi \in F$, $\omega(t)$ is an arbitrary modulus of continuity, $\beta \in R$ and $\psi(u)\varphi(u) = u$, $u \ge 1$. Then the following relation holds as $n \to \infty$*

$$\sup_{f \in C^\psi_\beta H_\omega} \|f(x) - Z^\varphi_n(f,x)\|_C = \frac{2}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{\psi(n)}{n}\int_{1/n}^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt +$$

$$+\frac{\theta_\omega}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{1/n}\psi\!\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\omega(t)}{t}\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n),$$

where $\theta_\omega \in [\frac{2}{3}, 1]$, $\theta_\omega = 1$ if $\omega(t)$ is a convex modulus of continuity, and $O(1)$ is a quantity uniformly bounded in n and β.

APPROXIMATION BY FAMILIES OF LINEAR POLYNOMIAL OPERATORS

Runovski K.V. (Sevastopol, filial of Moscow State University)
k_runov@mail.ru

Let $\varphi(\xi)$ be a complex valued continuous on $\mathbb{R}^d$ function with compact support and satisfying $\varphi(0) = 1$ and $\varphi(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}$ for $\xi \in \mathbb{R}^d$. It generates the trigonometric kernels

$$W_0(h) = 1\,,\ W_\sigma(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(k/\sigma)\,e^{ikh}\,,\ \sigma > 0\,,$$

and the families of linear polynomial operators given by

$$\mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\lambda}(f;x) = (2N+1)^{-d}\sum_{\nu=0}^{2N} f\left(t^\nu_N + \lambda\right)\cdot W_\sigma(\varphi)\left(x - t^\nu_N - \lambda\right)\ , \qquad (1)$$

Here, $N = [\rho\sigma]$, $\rho = \sup\{\,|\,\xi\,| : \varphi(\xi) \neq 0\}$, $t^\nu_N = 2\pi\nu/(2N+1)$, $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$. In contrast to the classical methods (Fourier means and interpolation means) method (1) is comparatively new (see, e.g. [2]). Its introduction was mainly motivated by the problem posed by M. K. Potapov concerns "angular"approximation [1] in L_p for $0 < p < 1$. Family (1) is called *convergent* (or *converges*) *in* L_p, if for each $f \in L_p$

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \| f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\lambda}(f) \|_{\overline{p}} = 0 ,$$

where $\| \cdot \|_{\overline{p}} = (2\pi)^{-d/p} \| \quad \| \cdot \|_{p;x} \|_{p;\lambda}$ (averaged with respect to λ norm). We put $\mathcal{P}_\varphi = \{ p \in (0, +\infty] : \widehat{\varphi} \in L_p(\mathbb{R}^d) \}$.

Theorem. *Let $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. Then family (1) converges in L_p if and only if $p \in \mathcal{P}_\varphi$. The approximation error of (1) is equivalent to the approximation errors of the Fourier means and the interpolation means generated by φ in L_p with $1 \le p \le +\infty$ and $p = +\infty$, respectively.*

The result is applied to the methods generated by the classical kernels. In particular, it is shown that the families generated by the kernels of Fejer, Vallee-Poussin and Rogosinski converge in L_p if and only if $p > 1/2$, and the family generated by the Bochner-Riesz kernels with the index $\alpha > (d-1)/2$ converges in L_p if and only if $p > 2d/(d + 2\alpha + 1)$.

References

1. M. K. Potapov: *Approximation by "angle"and embeddings classes.* Math. Balcanika 2 (1972), 183-198.
2. K.V. Runovski: *On approximation by families of linear polynomial operators in L_p – spaces,* $0 < p < 1$. Ross. Akad. Sci. Matem. Sbornik 185 (1994), 81-102.

REPRESENTATION OF SUBHARMONIC FUNCTIONS IN A HALF-PLANE

Sadik N. (Istanbul University)

sadnaz@mail.ru

The theory of subharmonic functions of finite order is based to a considerable extent on integral formulae. In the present paper representations are obtained for subharmonic functions in the upper half-plane with more general growth $\gamma(r)$ than finite order. The main result can be stated as follows. Let $\gamma(r)$ be a growth function such that either $\ln \gamma(r)$ is a convex function of $\ln r$ or the lower order of $\gamma(r)$ is infinite. Then for each proper subharmonic function v of growth $\gamma(r)$ there exist an unbounded set $\mathbf{R}$ of positive numbers and a family $u_R : R \in \mathbf{R}$ of proper subharmonic functions in the upper half-plane C_+ such that

1) The full measures of the u_R in the discs $|z| \le R$ are equal to the full measure of the function v;
2) $v - u_R \rightrightarrows 0$ uniformly on compact subsets of C_+ as $R \to \infty, R \in \mathbf{R}$;
3) The function family $u_R : R \in \mathbf{R}$ satisfies the growth constraints uniformly in $\mathbf{R}$, that is, $T(r, u_R) \le A\gamma(Br)/r$, where A and B are constants and $T(r, \cdot)$ is the growth characteristic.

References

1. A. A. Gol'dberg and I. V. Ostrovski.., Distribution of values of meromorphic functions, Nauka, Moscow 1970. (Russian).
2. A. F. Grishin, Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions, Mat.Fiz.Anal.Geom. 1:2 (1994), 193.215. (Russian).
3. N. V. Govorov, Riemann's boundary problem with infinite index, Nauka, Moscow 1986; English transl., Oper. Theory Adv. Appl., vol. 67, Birkh Nauzer, Basel 1994.
4. W. K. Hayman, "Questions of regularity connected with the Phragmen.Lindelof principle", J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 115.126.
5. K. G. Malyutin, Fourier series and δ-subharmonic functions , Theory of approximation of functions (Donetsk, 1998), Tr. Inst. Mat. Mekh., vol. 3, Inst. Mat. Mekh., Donetsk 1998, pp. 146.157. (Russian)
6. L. A. Rubel, A Fourier series method for entire functions , Duke Math. J. 30:3 (1963), 437.442.

SOME PROPERTIES OF FUNCTIONS WITH BOUNDED DIRICHLET INTEGRAL

Šušić J., Pavićević Ž. (University of Montenegro, Montenegro)

jela@rc.pmf.cg.ac.yu, zarkop@cg.ac.yu

It is proposed in [1] the problem whether the class D of meromorphic functions on the open unit disk $\mathbf{D}$ with bounded Dirichlet integral, is a subclass of the class UBC_0 of meromorphic functions on $\mathbf{D}$ whose Nevanlinna characteristic has the property $T(r, f_w) = o(1)$ as $|w| \to 1$,where$f_w(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$, $w \in D$. S. Yamashita proved in [2] that D$\subset UBC_0$. In this paper we also prove that D$\subset UBC_0$. Our proof is geometric and it can be applied to solve similar problems related to holomorphic functions on the disk $\mathbf{D}$ and for the hyperbolic case of bounded holomorphic functions on the disk $\mathbf{D}$.

References

1. S. Yamashita, *Functions of uniformly bounded characteristic*, Ann. Acad. Sci. Fenn. seria A. I. v. 7, 1982, 349-364.

2. S. Yamashita, *Image area and functions of uniformly bounded characteristic*, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, v. 34, N 1, 37-44, 1985.

3. Дифференциальные уравнения.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВАЖДЫ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Абдрахманов А.М.
(Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия)
abdrai@mail.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $K(t)$, $\alpha(t)$ и $f(x,t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции, A, B, l — дифференциальные операторы

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u,$$

$$lu = K(t)D_t^3 u + \alpha(t)D_t^2 u.$$

Относительно операторов A и B, функции $K(t)$ будем предполагать выполненными условия

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x),$$

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

$$K(0) = 0, \quad K(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

В докладе излагаются новые результаты о разрешимости краевых задач для дважды вырождающихся уравнений составного (соболевского) типа

$$lAu - Bu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$K(t)Au_{tt} - Bu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

В частности, приводятся условия, обеспечивающие существование обобщенных решений, а также решений, являющихся «почти регулярными».

ОБЩАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ САМОСОПРЯЖЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абрамов А.А. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)
alalabr@ccas.ru
Ульянова В.И. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)
valya@ccas.ru
Юхно Л.Ф. (Москва, Институт математического моделирования РАН)
yukhno@imamod.ru

Рассматривается общая нелинейная спектральная задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при предположении определенной монотонности исходных данных (в частности, краевых условий) по спектральному параметру. Предлагается метод сведения такой задачи к задаче для гамильтоновой системы. Приводятся результаты обобщения на общую систему результатов для гамильтоновых систем, полученных авторами ранее. В частности, дается метод вычисления количества собственных значений задачи, лежащих на заданном интервале изменения спектрального параметра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00139, 08-01-00069).

Литература

1. Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф. Об общей нелинейной самосопряженной спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. N 4 (в печати).

2. Абрамов А.А. О вычислении собственных значений нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. N 1. С. 29-38.

3. Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф. О некоторых свойствах нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. N 4. С. 638-645.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Абрашина-Жадаева Н.Г., Романова Н.С.
(Белорусский государственный университет)
zhadaeva@bsu.by

К настоящему времени определился ряд направлений в построении методов решения задач с уравнениями в частных производных дробных порядков как по пространству, так и по времени. Первое направление связано с нахождением аналитического решения с помощью интегральных преобразований, см. [1],[2] и цитируемую там литературу. Аналитическое решение дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка возможно в некоторых специальных случаях. Многие практические задачи связаны с математическими многомерными моделями с переменными коэффициентами в ограниченных областях. В случае дифференциальных уравнений целых порядков для таких задач развиты численные методы решения. Поэтому второе направление связано именно с этими методами. Численные методы решения требуют приближенной оценки дробной производной. В [3] впервые для двумерного одностороннего уравнения диффузии дробного порядка использовали неявный метод Эйлера со смещенной версией аппроксимации Грюнвальда–Летникова и показали, что численный алгоритм устойчив и сходится с точностью $O(\tau)+O(h_1)+O(h_2)$. Причем явный алгоритм устойчив, если $\frac{\tau}{h^\alpha}$ достаточно мало.

В случае двусторонней дробной диффузии уравнение запишем в виде (см. [4] и цитируемую там литературу)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^1[(1-p_1)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^1)^\alpha} + p_1\frac{\partial^\alpha u}{\partial(x^1)^\alpha}] + c^2[(1-p_2)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^2)^\beta} + p_2\frac{\partial^\beta u}{\partial(x^2)^\beta}] + f,$$

где $1 < \alpha,\beta < 2$, $u = u(x,t)$, $x = (x^1,x^2) \in P = \{x^1_l \le x^1 \le x^1_k, x^2_l \le x^2 \le x^2_k\}$, $0 \le t \le T$, $c^i = c^i(x) > 0, (i = 1,2)$, $f = f(x,t)$, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^1)^\alpha}$, $\frac{\partial^\beta u}{\partial(-x^2)^\beta}$ — отрицательные дробные производные с весами $p_i \in [0,1]$, $(i = 1,2)$, с нулевыми граничными условиями в прямоугольнике. Для дробных производных Римана–Лиувилля используем уже общепринятые, право и левосторонннние смещенные оценки Грюнвальда–Летникова и схемы факторизации второго порядка точности по времени. Справедлива

Теорема 1. *Метод приближенной факторизации для исходной первой краевой задачи безусловно устойчив при условии коммутативности операторов расщепления* $A^\alpha_1 A^\beta_2 = A^\beta_2 A^\alpha_1$ $(1 < \alpha,\beta < 2)$.

В [4] рассмотрены векторно–аддитивные алгоритмы безусловно устойчивые без требования коммутативности операторов расщепления. Для явного метода многокомпонентного расщепления со смещенной оценкой Грюнвальда–Летникова для дробной производной справедлива

Теорема 2. *Явный разностный алгоритм для исходной задачи со смещенной оценкой Грюнвальда-Летникова к дробным производным* $(1 < \alpha,\beta < 2)$ *является устойчивым, если* $max\{\frac{\tau\alpha}{h^\alpha}c_{1max}, \frac{\tau\beta}{h^\beta}c_{2max}\} \le 1$, *где* $c_{imax} = maxc_i(x^1,x^2)$, $0 \le t \le T$.

В единичном квадрате решалась задача с известным точным решением и проводилось сравнение точного и приближенного решений в зависимости от соотношений на шаги согласно теоремы 2.

В заключении отметим, что вопрос применения аппроксимационных оценок дробных производных для задач с ненулевыми граничными условиями остается открытым.

Литература

1.Kilbas A.A., Trujillo J.J., Voroshilov A.A. Caushy-type problem for diffusion-wave equation with the Riemann-Liouville fractional derivative. Fract.Calcul.Appl.Anal, 2005, v. 8, p.403-430.

2. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffuse-wave phenomena. Chaos Solution and Fractals/. 2004, v.7, p. 1461-1477.
3. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advec-tion-dispersion flow equations. J.Computat.Appl.Math., 2004, v. 172, p. 65-77.
4. Abrashina-Zhadaeva N.G., Romanova N.S. A splitting type algorithm for numerical of PDEs of fractional order. Mathem. Modeling and Analysis. 2007, v. 12, p. 399-408.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ И ОЦЕНКА ГРАНИЦ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Агошков В.И. (ИВМ РАН)
agoshkov@inm.ras.ru

В задачах гидродинамики часто возникает проблема оценки границ спектра операторов типа $\mathcal{A} = \mathrm{div}\Delta^{-1}\mathrm{grad}$. Эта проблема связана как с вопросами разрешимости рассматриваемых задач, так и с формулировкой эффективных алгоритмов их решения [1]. Оценки границ спектра таких операторов в задачах геофизической гидродинамики изучались в [2,3]. В [3] автор рассмотрел класс операторов "типа $\mathcal{A}$", возникающий в задачах геофизической гидродинамики на сферических многообразиях и получил оценки границ их спектра для некоторых граничных условий. В настоящей работе аналогичные исследования проводятся при рассмотрении других типов граничных условий. Одновременно здесь вводятся функциональные пространства $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ вектор-функций, подчиненных особым условием в 'полюсных точках'. Изучается ряд свойств этих пространств, играющих важную роль в проводимых исследованиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

Литература

1. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. – М.: Институт вычислительной математики РАН, 2002.
2. Agoshkov V.I., Botvinovskii E.A. Investigation of a method for solving a hyperbolic–parabolic system on a sphere. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 23, No. 2, 2008, pp. 1-28.
3. Agoshkov V.I. Estimates of spectrum bounds for some operators in geophysical hydrodynamics. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 23, No. 4, 2008, pp. 305-327.

О СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Акыш А. Ш. (Алматы, Казахстан)
akysh41@mail.ru

В работе [1] из начально-краевой задачи для нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса [2] выведена задача Неймана для уравнения Пуассона относительно давления P с однородным граничным условием, и в итоге получена полная постановка начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в области $Q = (0,T] \times \Omega$, $\Omega \subset R_3$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f},\ \mathbf{U}\big|_{t=0} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \mathbf{U}\big|_{\partial\Omega} = 0, (1)$$

$$-\Delta P = \mathrm{div}\Big\{(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\Big\},\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0,\quad \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}].\quad (2)$$

В последующем [3] выявлено важное свойство уравнений (1)-принцип максимума, которой позволяет доказать разрешимость задач (1),(2) в целом по времени $t \in [0,T], T < \infty$.

Теорема. *Если входные данные* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q)$ *и* $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$, *тогда у каждой задачи (1) и (2) существует единственное слабое обобщенное решение*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega)) \cap \mathbf{L}_2(0,T;\mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)) \cap \mathring{\mathbf{J}}_\infty(Q) \quad \textit{и}$$

$$P \in L_2(0,T;W^1_2(\Omega)) \wedge \Big(\int_\Omega P\mathbf{dx} = 0, \forall t \in [0,T]\Big),$$

где $\mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$- *пространство соленоидальных векторов;* $W^k_{2,0}(\Omega)$ - *Соболевское пространство.*

Литература

1. *Акыш А. Ш.* а) О решении уравнений Навье–Стокса // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. №1. С. 30-35; б) 2-часть, там же. 2008. №3. С.7-10.

2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. –Москва: Наука, 1970. 288 с.
3. *Акыш А. Ш.* Принцип максимума для уравнений Навье-Стокса //Докл. Междунар. конф. по матем. мет. в Геофизике ММГ-2008, -Новосибирск//www.sscc.ru /conf/ mmg2008. -С. 1-6.
4. *Акыш А. Ш.* О сильных решениях уравнений Навье-Стокса// Вестник КазНУ, Сер.матем., мех., инфор., Алматы, № 4, 2008 г. -С. 28-30.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА

Алдибеков Т.М. (Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби)
tamash59@list.ru

Рассматривается линейная система

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \quad t \ge 0. \tag{1}$$

С неограниченными, непрерывными матрицами коэффициентов $A(t) = (a_{ij}(t))$, $i,j = \overline{1,n}$.
Положим

$$\psi(t) = \max_{\substack{t \ge 0\\ 1 \le i \le n\\ 1 \le j \le n}} \{a_{is}(t), 0\}, \quad q(t) = \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau$$

Пусть $\overline{x}_j = colon[x_{1j}, x_{2j}..., x_{nj}]$, $j = \overline{1,n}$ нормированная фундаментальная система решений системы (1) при t=0.

$\mu_j(q) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|\overline{x}_j(t)|$, $j = \overline{1,n}$ обобщенный показатель [1] решения $\overline{x}_j$ системы (1) относительно $q(t)$. $X(t,\tau) = (x_{ij}(t,\tau))$ - матрица Коши системы (1).

Теорема. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $D_\varepsilon > 0$*

$$|x_{ij}(t,\tau)| < D_\varepsilon e^{[\mu_j(q)+\varepsilon][q(t)-q(\tau)]} \quad \textit{при} \quad 0 \le \tau \le t,$$

$$|x_{ij}(t,\tau)| < D_\varepsilon e^{[-\mu_j(q)+\varepsilon][q(\tau)-q(t)]} \quad \textit{при} \quad 0 \le t \le \tau,$$

то $\mu_j(q)$, $j = \overline{1,n}$ являются обобщенным показателями системы (1) относительно $q(t)$, кроме того система (1) обобщенно-правильная и устойчивая при малых возмущениях $f(t,x)$, где $f(t,x)$ непрерывна по $t \ge 0$ и непрерывно- дифференцируема по x в области D содержащий ноль в R^n и удовлетворяет неравенству $|f(t,x)| \le \theta(t)\,|x|^m$, $m > 1$, $\theta(t)$ – непрерывная функция с нулевым показателем относительно $q(t)$.

Примечание. *При $q(t) = t$ см. [2].*

Литература

1. Алдибеков Т.М. Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, №6. С.859-860.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 531 с.

(2 + 1)-МЕРНОЕ СОЛИТОННОЕ УРАВНЕНИЕ A5, ПОРОЖДЕННОЕ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ H1

Алексеева А.В. (Институт математики МОН РК, Алматы)
alexandra-aleks@mail.ru

Теория многомерных солитонных уравнний, в последнее время, является предметом интенсивных исследований. Урвнения Кадомцева-Петвиашвилли и Веселова-Новикова можно назвать универсальными, поскольку они описывают многие задачи о нелинейных воднах, возникающие в разных физических ситуациях.Этот факт позволяет находить новые многомерные эволюционные уравнения, учитывая специфику и свойства солитонных уравнений. В работе представлено новое $(2+1)$-мерное солитонное уравнение A5, порожденное билинейной формой H1.

Определение. Комплексное (2+1)-мерное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xyy} + 2\left(U^2\right)_x + (\psi V)_x = 0, \\ U_x = \psi_y, \\ V_{xx} = \psi_{yy}, \\ \psi = \psi(x,y,t) \end{cases}$$

назовем *уравнением A5*, а комплексную (2 + 1)-мерную форму вида

$$\left(D_x D_t + D_x^2 D_y^2\right)(\phi \cdot \phi) = 0, \qquad \phi = \phi(x,y,t)$$

назовем *формой H1*.

Теорема. *Уравнение A5, где $\psi = 2(\ln\phi)_{xx}$ — его частное решение, можно представить в виде формы H1. И наоборот, форме H1 соответствует уравнение A5, где $\psi = 2(\ln\phi)_{xx}$ — его частное решение.*

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Алешин П. С. (Орловский Государственный университет, Орел)
AlyoshinPavel@gmail.com

Уравнение

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,t) - u_{xx}(x,y) = H(y-h)\int_0^h R(\xi)u_y(x,y-\xi)d\xi, 0 < \alpha < 1, \qquad (1)$$

где D_{0y}^{α} - оператор дробного (в смысле Капуто) интегро-дифференцирования, действующий на функцию $u(x,y)$ по переменной y, $R(y)$ - ограниченная функция, $H(\xi)$ - функция Хевисайда, $0 < h \equiv const$, рассматривается в области D, где $D = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k$, а $D_k = \{(x,y) : 0 < x < \tau; kh \le y \le (k+1)h\}$.

Задача К

Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t) \in C(\overline{D})$, $y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,t)$,$u_{xx}(x,y) \in C(D)$, удовлетворяющее условию

$$u(x,0) = \omega(x), |x| < +\infty, \qquad (2)$$

где $\omega(x)$ - заданная, достаточно гладкая функция.

Единственное решение **задачи К** найдено в виде разложения по собственным функциям

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \delta_n(y)\sin\lambda_n x,$$

где $c_n = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega(x)\sin\lambda_n x dx$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{\tau}$,

$$\delta_n(y) = g_n(y) + \int_0^y g_n(y-\xi)f_n(\xi)d\xi,$$

$$f_n(y) = \int_{y-h}^{0} R(y-\xi)\delta_n'(\xi)d\xi,$$

а $g_n(y)$ определяется равенством

$$g_n(y) = \int_0^y R(y-t)\left(I_{0n}(t) + \sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^t I_{mn}(\xi)R_m(t-\xi)d\xi\right)dt +$$

$$+\int_0^y (y-t)^{-\alpha}\left(I_{0n}(t) + \sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^t I_{mn}(\xi)R_m(t-\xi)d\xi\right)dt.$$

Литература

1. Алешин П. С., Зарубин А. Н. Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения диффузии с дробной производной и рапределенным запаздыванием// Дифференциальные уравнения. Т. 43, 10, 2007. – С. 1363-1368.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматгиз, 2003. – 272 с.
3. Podlubny I. Fractional Differential Equations. N. Y., London: Acad. Press, 1999. 340 p.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Алиев А.Б. (Баку, Азербайджан)

В области $[0,\infty)\times R_n$ рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения

$$u_{tt}+u_t+\sum_{\substack{|\alpha:l|\geq 1\\ |\alpha:L|\leq 1}}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}u=f(u) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\ u_t(0,x)=u_1(x),\ x\in R_n, \tag{2}$$

где $l=(l_1,...,l_n)$, $L=(L_1,...,L_n)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $l_i,L_i\in N, l_i\leq L_i$, $i=1,...,n,\alpha_i\in N$, $|\alpha:l|=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{l_i}, |\alpha:L|=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{L_i}$.

Через $W_2^L(R_n)$ обозначим анизотропное пространство Соболева.

Предполагается, что $|f(u)|\leq c|u|^p, |f'(u)|\leq c|u|^{p-1}$, где $c>0$,

$$p>1+\frac{2}{|l^{-1}|},\ \text{при}\ |l^{-1}|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\leq 2, \tag{3}$$

$$p>2,\ \text{при}\ |l^{-1}|>2,\ \left|L^{-1}\right|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}\leq 2, \tag{4}$$

$$2<p\leq\frac{2}{|L^{-1}|-2},\ \text{при}\ \left|L^{-1}\right|>2. \tag{5}$$

Пусть

$$U_\delta=\left\{(u,v):(u,v)\in\left[W_2^L(R_n)\cap L_1(R_n)\right]\times\left[L_2(R_n)\cap L_1(R_n)\right],\right.$$
$$\left.\|u\|_{W_2^L(R_n)}+\|u\|_{L_1(R_n)}+\|v\|_{L_2(R_n)}+\|v\|_{L_1(R_n)}<\delta\right\}.$$

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3)-(5). Тогда существует $\delta_0>0$ такое, что при любых $(\varphi,\psi)\in U_{\delta_0}$ задача (1), (2) имеет единствен-ное решение $u\in C\left([0,\infty):W_2^L(R_n)\right)\cap C^1\left([0,\infty):L_2(R_n)\right)$.*

Используя метод пробных функций, доказывается следующая

Теорема 2. *Предположим, что $\varphi\in L_1(R_n)$, $\psi\in L_1(R_n)$,*
$\int\limits_{R_n}[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx\geq 0$ *и*

$$f(u)\geq c|u|^p,\qquad u\in R,\quad \textit{где}\quad 1<p\leq 1+\frac{2}{|l^{-1}|}.$$

Тогда задача (1), (2) не имеет слабое решение, определенное в области $[0,\infty)\times R_n$.

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ T

Андреев А.А., Лексина С.В. (Самарский государственный университет)
lesveta@rambler.ru

Рассмотрена система волновых уравнений

$$w_{tt}-\Lambda w_{xx}=0 \tag{1}$$

в области $Q_{l,T} = [0;l] \times [0;T]$, где Λ - квадратная матрица порядка n, в которой на главной диагонали стоит число λ^2 и все элементы одного ряда ниже диагонали равны единице.

Задача. Найти вектор-функцию $w(x,t) \in C^2(Q_{l,T})$, удовлетворяющую системе (1) в области $Q_{l,T}$, начальным

$$w(x,0) = \varphi(x), w_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l; \tag{2}$$

условиям на отрезке $[0,l]$ и краевым условиям

$$w(0,t) = \mu(t), w(l,t) = \nu(t), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\varphi \in C^2[0;l]$, $\psi \in C^1[0;l]$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ – вектор - функции.

Теорема. Решение $w(x,t) = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ первой краевой задачи представимо:

$$w_k(x,t) = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(k-s)!} \delta^{(k-s)} F_\lambda({}^p\Phi_s, {}^p\Psi_s, \mu_s, \nu_s), \tag{4}$$

где $\delta = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}$, $\delta^n = \delta(\delta^{n-1})$, $\delta^0 \equiv 1$, ${}^p\Phi = ({}^p\Phi_1, ..., {}^p\Phi_n)^T$, ${}^p\Psi = ({}^p\Psi_1, ..., {}^p\Psi_n)^T$ - продолжения вектор-функций φ, ψ на отрезки вида $[pl, (p+1)l]$, $[-pl, -(p-1)l]$,

$$\begin{gathered} F_\lambda({}^p\Phi_i, {}^p\Psi_i, \underline{\mu}_i, \underline{\nu}_i) = \tfrac{{}^p\Phi_i(x+\lambda t) + {}^p\Phi_i(x-\lambda t)}{2} + \tfrac{1}{2\lambda} \int\limits_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} {}^p\Psi_i(s) ds + \\ + \sum_{k=0}^{n} [\tfrac{1+(-1)^k}{2} \left(\underline{\mu}_i(t - \tfrac{x+kl}{\lambda}) + \underline{\nu}_i(t + \tfrac{x-(k+1)l}{\lambda})\right) + \\ + \tfrac{-1+(-1)^k}{2} \left(\underline{\mu}_i(t + \tfrac{x-(k+1)l}{\lambda}) + \underline{\nu}_i(t - \tfrac{x+kl}{\lambda})\right)], \end{gathered} \tag{5}$$

где $n = [\frac{pl}{\lambda}]$.

Решение первой краевой задачи с начальными (финальными) условиями используется в задачах граничного управления.

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПУАССОНА-НИЙЕНХЕЙСА

Андреянов П.П. (МГУ им. Ломоносова)
andreyanov.pp@gmail.com

Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определим оператор $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Тензором Пуассона-Нийенхейса называется следующее выражение

$$N_R(X,Y) = R[RX,Y] + R[X,RY] - R^2[X,Y] - [RX,RY],$$

где $[\,,\,]$ — означает коммутатор в алгебре $\mathfrak{g}$. Из классической теории дифференциальных уравнений в частных производных, нам известно, что равенство нулю тензора Нийенхейса означает существование локальной системы коорлинат, в которых матрица аффинора приводится к диагональному виду с разделением переменных. В нашем случае наличие такого оператора, что $N_R = 0$ связано с теорией лиевых пучков. По такому оператору оказывается возможным построить согласованную лиеву структуру, а следовательно и согласованную линейную скобку Пуассона на коалгебре $\mathfrak{g}^*$. Подобный подход применяется в построениии интегрируемой системы Соколовым и Одесским на коалгебре gl^*. Нами изучен вопрос полноты данных систем и сходство с системами, полученными методом сдвига аргумента.

Литература

1. Y.Kosmann-Shwarzbach, F.Magri. Poisson-Lie groups and complete integrability. I.Drinfield bialgebras, dual extensions and their canonical representations. Annales de l'I.H.P., section A, tome 49, 4(1988), p. 433-460.
2. Y.Kosmann-Shwarzbach, F.Magri. Poisson-Nijenhuis structures. Annales de l'I.H.P., section A, tome 53, 1(1990), p. 35-81.
3. A.V. Odesskii, V.V. Sokolov. Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras. J.Phys., A:Math.Gen., 39(2006), p.12447-12456.

КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Асташова И. В. (Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ))
ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p(x)|y|^{k-1}y = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

где $n \geq 1$, $k > 1$, а $p(x)$ и $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$|p(x)| \geq p_* > 0,$$

$$|f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})| \leq L(|y_0| + |y_1| + \dots + |y_{n-1}|),\ L = \mathrm{const} > 0,$$

Исследуются качественные свойства решений этого уравнения — ограниченность, колеблемость, равномерные оценки решений с общей областью определения.

Аналогичные свойства решений уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(i)} + p(x)\, |y|^{k-1}y = 0,$$

где где $n \geq 1$, $k > 1$, а $p(x)$ и $a_j(x)$ — непрерывные функции, причем $|p(x)| \geq p_* > 0$, получены в [1], [2].

Выполнено при поддержке РФФИ, грант 08-01-00819, и гранта НШ-1698.2008.1

Литература

1. *И. В. Асташова.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Известия РАН, 2008, т. 72, 6, с. 103–124.
2. *И. В. Асташова.* On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations. — Georgian Mathematical Journal, 2007, v. 14, 2, p. 223-238.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЕРШИННЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

Асылбаев Н.А., Гималтдинов И.К. (Стерлитамакская Государственная Педагогическая Академия)
moljan@mail.ru

Пылающие леса стали настоящим бедствием человечества. Масштабы лесных пожаров и наносимый ими материальный ущерб всегда приносили больше бед, чем в других странах. В настоящее время в России осуществляется спутниковый мониторинг лесных пожаров. В агентстве МЧС России по мониторингу и прогнозированию чрезвычайных ситуаций эта работа ведется с помощью геоинформационной системы. Однако, для определения эффективных сценариев реагирования недостаточно мониторинга чрезвычайной ситуации, а требуется прогноз динамики ее дальнейшего развития. Такой прогноз можно дать с помощью метода математического моделирования чрезвычайной ситуации, в рассматриваемом случае - математического моделирования лесных пожаров.

Для моделирования применяется система уравнений, состоящая из уравнения неразрывности газовой фазы, уравнений сохранения импульса газовой фазы, уравнения сохранения концентраций компонентов газовой фазы, объемных долей твердой фазы, уравнения переноса лучистой энергии и уравнения состояния. Для ее численного интегрирования был использован метод крупных частиц. В результате численного моделирования трехмерной системы уравнений, описывающий процесс распространения вершинных лесных пожаров в однородных лесных массивах, с соответствующими начальными и граничными условиями были получены поля температуры газовой и твердой фаз, массовых концентраций компонентов газовой фазы, объемных долей компонентов твердой фазы в различные моменты времени.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации МД-280.2008.1, грантом правительства Республики Башкортостан для молодых ученых и молодежных научных коллективов.

Литература

1. А.М.Гришин. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. // Новосибирск: Наука СО, 1992, 404 с.

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ В ПОСТРОЕНИИ МНОГОФАЗНЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

Багдерина Ю.Ю. (Институт математики с вычислительным центром РАН, Уфа)
yulya@mail.rb.ru

Метод дифференциальных связей [1] в применении к эволюционным уравнениям $u_t = F(x,u,u_x,\dots,\partial^m u/\partial x^m)$ представляет собой обобщение метода разделения переменных, т.к. для них достаточно искать дифференциальные связи в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) $\Phi(x,u,u_x,\dots,\partial^n u/\partial x^n)=0$. Известно, что использование дифференциальных связей в форме линейных ОДУ эффективно в основном для уравнений диффузионного типа и позволяет получать решения в виде конечных сумм [2] $u(t,x)=h_1(t)f_1(x)+\dots+h_n(t)f_n(x)$.

В [3] для эволюционных уравнений предложен метод построения физически интересных (N-солитонных) точных решений вида

$$u(t,x)=\frac{h_0(t)f_0(x)+h_1(t)f_1(x)+\dots+h_n(t)f_n(x)}{h_0(t)g_0(x)+h_1(t)g_1(x)+\dots+h_n(t)g_n(x)},\quad n\ge 1,$$

основанный на использовании нелинейных дифференциальных связей, задаваемых обобщенными уравнениями Риккати. Данный подход может быть применен и к системам эволюционных уравнений, что иллюстрируется, в частности, на примере системы, состоящей из уравнения $iu_t=(\beta_1(t)+i\beta_2(t))u_{xx}+(\alpha_1(t,x)+i\alpha_2(t,x))u_x+u(F_1(t,x,|u|^2)+iF_2(t,x,|u|^2))$ для функции $u(t,x)$ и соответствующего уравнения для $\overline{u}(t,x)$. В качестве частных случаев оно включает в себя уравнение Шредингера с потенциалом ($F_1=-|u|^2+V(x)$), магнитное НУШ ($\alpha_2=2a(x)$, $F_2=a'$, $F_1=a^2+f(x,|u|^2)$), НУШ с усиливающим членом ($F_1=-|u|^2$, $F_2=g(t)$) и др.

Работа выполнена при поддержке гранта МК-5863.2008.1.

Литература

1. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.

2. Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34, вып. 3. С. 373-383.

3. Багдерина Ю.Ю. Рациональные решения эволюционных уравнений пятого порядка для описания волн на воде. ПММ. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 288-301.

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Баев А. Д. (Воронежский государственный университет)
baev@math.vsu.ru

Рассмотрим в R^n_+ уравнение вида

$$A(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=F(x,t),\tag{1}$$

$A(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=\sum\limits_{|\tau|+j+ql\le 2m} a_{\tau jl}(t)D_x^\tau D_{\alpha,t}^j\partial_t^l, \partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\ D_{\alpha,t}=$
$=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, q=\frac{2m}{k}>1$ (m,k — натуральные числа),
$a_{ook}(t)\ne 0$ при всех $t\in[0;+\infty)$.

На границе $t=0$ полупространства R^n_+ задаются граничные условия вида

$$B_j(D_x,\partial_t)v\big|_{t=0}=\sum_{|\tau|+ql\le m_j} b_{\tau lj}D_x^\tau\partial_t^l\,v\big|_{t=0}=G_j(x),\ b_{\tau lj}\in R^1.\tag{2}$$

Кроме того, при $t\to\infty$ ставится условие $\lim\limits_{t\to+\infty}v(x,t)=0$.

Условие 1. Уравнение $\sum\limits_{|\tau|+ql+j\le 2m} a_{\tau jl}(t)\xi^\tau\eta^j z^l=0$ при всех $t\ge 0$ не имеет z – корней, лежащих на мнимой оси при всех $(\xi,\eta)\in R^n$, $|\eta|+|\xi|>0$. Причем корни $z_{j_1}(t,\xi,\eta)$ этого уравнения удовлетворяют при всех $j,l=0,1,2,\dots$ оценкам $\left|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial_\eta^l z_{j_1}(t,\xi,\eta)\right|\le c_{jl}(|\xi|^2+|\eta|)^{q-l+\delta j}$ ($\delta\in(0;1)$) с некоторыми константами $c_{jl}>0$.

Условие 2. Число граничных условий (2) равно числу z — корней, лежащих в левой полуплоскости и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi, z) = \sum\limits_{|\tau|+ql=m_j} b_{\tau lj}\xi^\tau z^l$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi, z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r} (z - z_{j_1}(0, \xi, 0))$, где $z_{j_1}(t, \xi, \eta)$, $j_1 = 1, 2, \dots, r$, корни, лежащие в левой полуплоскости.

Условие 3. $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ при $t > d$, где $d > 0$ некоторое число. Существует число $\nu \in (0; 1]$ такое, что функция $\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)$ ограничена при всех $t \geq 0$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^s[0; d]$, для некоторого $s \geq s_0(\nu)$.

При выполнении этих условий доказаны коэрцитивные априорные оценки решений и построен регуляризатор рассматриваемой задачи.

ПРИЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С. (Институт математики, Алматы)
dzhumabaev@list.ru

На $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K(t, s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

Основными методами исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений являются метод Некрасова [1] и метод функций Грина [2]. Эти методы применимы к задаче (1),(2) при однозначной разрешимости некоторых промежуточных задач. Однако их однозначная разрешимость не являются необходимыми условиями существования единственного решения задачи (1),(2).

В сообщений к задаче (1),(2) применяется метод параметризации [3]. По шагу $h > 0 : Nh = T$ интервал $[0, T]$ разбивается на части и задача (1),(2) сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами [1,2]. Предлагается алгоритм нахождения решения задачи с параметром. При этом в качестве промежуточной задачи решается специальная задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений. Показана ее однозначная разрешимость при достаточно малых $h > 0$ и установлены достаточные условия сходимости алгоритма. С помощью числовых параметров $\nu \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ и по данным исходной задачи составляется $nN \times nN$ матрица $Q_{\nu m}(h)$. В терминах матриц $Q_{\nu m}(h)$, $A(t)$, $K(t, s)$ установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1),(2).

Литература

1. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений //Тр. ЦАГИ, 1934. вып. 190. С. 1-25.

2.Виграненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений //Зап. Ленинград. горн. ин-та. 1956. Т.33. вып. 3. С. 177-187.

3.Джумабаев Д. С. Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 50 - 66.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ В ПОЛУПОЛОСЕ

Батршина Э.В. (г.Стерлитамак)
evro-trans@list.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu(x, t) \equiv K(t)u_{xx} + x^m u_{tt} - b^2 x^m K(t)u = 0\ , \tag{1}$$

где $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, $K(t) = sgnt \cdot |t|^n$, $n > 0$, в области $D = \{(x, t)|\, 0 < x < 1, \quad t > -\alpha\}$, где α - заданное положительное число.

Задача Дирихле. *Найти в области D ограниченную функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq -\alpha; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ - заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Следуя [1], в которой рассмотрена задача (2)-(5) при $m = 0$, установлены критерий единственности и существование решения задачи (2)-(5) в классе функций, ограниченных на бесконечности, на основе спектрального метода решения краевых задач.

Важным следствием полученного результата является то, что решение задачи Дирихле определяется в классе $C^2(\overline{D})$ и построенное решение всюду в области D является решением уравнения (1). Поэтому линия изменения типа $t = 0$ уравнения (1) как особая линия устраняется.

Теорема. *Если существует решение $u(x,t)$ задачи (2)-(5), ограниченное на бесконечности, то оно единственно.*

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в полуполосе// Дифференц. уравнения. 2007. Т.43. №10. С.1417-1422.

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Копачевский Н.Д., Батыр Э.И., Дудик О.А.
(Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь)
kopachevsky@crimea.edu; bei@ukr.net; dudik_tnu@mail.ru

В докладе рассматриваются две проблемы о колебаниях тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. При исследовании этих задач используется теория сжимающих полугрупп операторов, общая теория операторов в гильбертовых пространствах, а также в пространствах с индефинитной метрикой.

В первой проблеме изучаются начально-краевая и спектральная задачи о колебаниях системы из n маятников, последовательно соединенных один с другим сферическими шарнирами. При этом верхний маятник имеет неподвижную точку, а на всю систему действует однородное гравитационное поле «сверху вниз». Каждый маятник имеет полость, целиком заполненную несжимаемой идеальной либо вязкой жидкостью.

Для случая идеальных жидкостей доказана теорема Н.Е. Жуковского о том, что движение системы маятников с жидким наполнением эквивалентно движению аналогичной системы твердых маятников с видоизмененными характеристиками. Для вязкой жидкости доказана теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи, исследован спектр нормальных колебаний, получены утверждения о полноте и базисности системы корневых элементов в пространстве Л.С. Понтрягина Π_{2n}.

Во второй задаче изучаются малые движения и нормальные колебания пространственного либо плоского маятника с полостью, частично заполненной одной либо несколькими вязкими несжимаемыми капиллярными жидкостями (условия, близкие к невесомости). При определенных условиях доказана теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи. При условии статической устойчивости по линейному приближению исследована структура спектра нормальных колебаний гидромеханической системы, доказана теорема о базисности системы корневых элементов по Абелю-Лидскому. Доказано также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ

Баязитова А.А. (Южно-Уральский государственный университет)
alfiya@math.susu.ac.ru

На конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G}$ с ребрами длиной $l_j > 0$ и площадью поперечного сечения $d_j > 0$ рассмотрим обратную коэффициентную задачу с дополнительными условиями

$$(\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2})u_{jt}(0,0) = \varphi_j, \quad (\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2})u_{jt}(l_j,0) = \psi_j, \tag{1}$$

для уравнений Хоффа

$$\lambda_j u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha_j u_j + \beta_j u_j^3. \qquad (2)$$

В [1] впервые исследована обратная задача для уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной на графе. Наконец, в [2] изучена задача Коши для уравнений (2) на графе при более простых предположениях на данные задачи, именно $d_j = 1$, $\alpha_j = \alpha$, $\beta_j = \beta$, $\lambda_j = \lambda$.

В случае нетривиального ядра оператора L при производной по времени введем множество $\mathfrak{D}$ — множество допустимых значений векторов φ, ψ, при которых решениями задачи будут коэффициенты α_j, β_j одного знака. С использованием подхода, изложенного в [2], найдено множество $\mathfrak{D}$ и доказана следующая

Теорема. *При любых φ, $\psi \in \mathfrak{D}$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ таких, что $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$, и условиях принадлежности решений $u_j(x,t)$ фазовому пространству уравнений (2), существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha_j\beta_j \in \mathbb{R}_+$ обратной задачи.*

Литература

1. Свиридюк Г.А., Баязитова А.А. Обратная задача для уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной на графе // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н.Векуа. Новосибирск, 2007. С. 244-250.
2. Свиридюк Г. А., Шеметова В. В. Уравнения Хоффа на графах // Дифференц. уравнения.- 2006.- Т.42, 1.- С.126-131.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Бегматов Акр.Х., Очилов З.Х. (СамГУ им. А.Навои)
akrambegmatov@mail.ru

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $u(x,y)$ – достаточно гладкая функция, определенная в n–мерном пространстве $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, и $\{M(\lambda)\}$ – семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int\limits_{M(\lambda)} u(x)d\sigma = v(\lambda) \qquad (1)$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $M(\lambda)$. Требуется по функции $v(\lambda)$ найти функцию $u(x)$.

Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [2]. В работе [3] приводится определение слабо и сильно некорректных задач.

В работе изучается задача интегральной геометрии вольтерровского типа по семейству парабол с весовой функцией, имеющей особенность. Получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает ее слабую некорректность, получено представление решения, доказана теорема существования.

Для указанного класса слабонекорректных задач интегральной геометрии с возмущением при достаточно общих предположениях о весовой функции возмущения получены таорема единственности и оценка устойчивости решения в пространствах Соболева.

Литература

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер. Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1962. Вып. 5.
2. Лаврентьев М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода // В кн.: Междунар. мат. конгресс. В Ницце, 1970. М.: Наука, 1972.
3. Лаврентьев М.М. Интегральная геометрия и обратные задачи // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск.: Наука, 1984. С. 81-86.

ИМПУЛЬСНЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Бекларян Л.А. (г.Москва, Центральный Экономико-Математический Институт РАН)
beklar@cemi.rssi.ru

Многие задачи приложения приводят к необходимости описания более широкого класса решений функционально-дифференциальных уравнений точечного типа нежели классические решения из пространства абсолютно непрерывных функций. К таким решениям, в частности, относятся импульсные решения. Это решения из пространства кусочно абсолютно непрерывных функций, для которых в точках разрыва существуют пределы слева и справа, а величины скачков в точках разрыва конечны (разрывы первого рода). К отмеченному классу задач относится, в частности, линейная теория функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, в которой при построении аналога альтернативы Нетера приходится рассматривать решения сопряженного уравнения в классе импульсных решений.

Изучается краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+n_1), \cdots, x(t+n_s)), t \in B_R, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, s \tag{1}$$
$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{2}$$
$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$
$$x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = \varrho_i, t_i \in \mathbb{R}, t_i < t_{i+1}, \varrho_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

в классе импульсных решений.

Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1]$, t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty[$, $t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ является объединением конечного числа орбит группы сдвигов $Q = < t + n_1, \ldots, t + n_s >$.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант No.06-01-00430-а) и Грантом поддержки научных школ (НШ-3038.2008.1)

Литература

1. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, 2007. – 288с.

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Белов Ю.Я., Фроленков И.В.
(ФГОУ ВПО Сибирский Федеральный университет, Красноярск)
belov@lan.krasu.ru, kspk_job@mail.ru

В работе доказана однозначная разрешимость и получены оценки устойчивости решений задач идентификации входных данных в пространствах ограниченных гладкий функций в случае первой и второй краевых задач и задачи Коши. Исследован случай двух неизвестных коэффициентов λ_1, λ_2 многомерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,z) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z) +$$
$$+ \lambda_1(t,x) u(t,x,z) + \lambda_2(t,x) f(t,x,z),$$

где коэффициенты $a_{ij}(t)$ зависят только от переменной t. При достаточно гладких входных данных исследованы многомерные обратные задачи для параболического уравнения с эллиптическим оператором в правой части, коэффициенты a_{ij} которого зависят от переменных (t, x). Доказана однозначная разрешимость задач определения входных данных в случаях двух и трех неизвестных коэффициентов.

Литература

1. Белов Ю.Я., Кантор С.А. *Метод слабой аппроксимации.* - Красноярский госунив-тет, 1999. - 236 с.
2. Белов Ю.Я., Фроленков И.В. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой* // Спец. выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. 2006. т.11, ч.1. С.46-54.
3. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* – Новосибирск, 1967. – 195 с.
4. Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* - Utrecht: VSP, 2002. 211 p.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Бельман С.А. (Рязанский государственный университет имени С.А.Есенина)
sabelman@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$R(x, \lambda, \mu) \equiv \dot{x} - (\omega_0 + \mu)(Ax + K(\lambda)x + C(x, \lambda) + D(x, \lambda)) = 0, \tag{1}$$

в которой $x \in E_n$, $\lambda \in E_p$, λ, μ — параметры, $\omega_0 > 0$ — некоторое число, $A, K(\lambda)$ — $n \times n$–матрицы, $C(x,\lambda)$ — форма порядка $s > 1$ относительно переменных x, λ, $D(x,\lambda)$ — конечная сумма вектор-форм порядка более высокого, чем s, относительно тех же переменных.

Ненулевое 2π–периодическое решение ищется в пространстве $M_n(l_1)$, элементами которого являются тригонометрические ряды вида $a_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, a_0, a_k, b_k — n-мерные векторы, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$ сходящийся, ряд с нулевыми коэффициентами — нулевой элемент множества $M_n(l_1)$.

Ставится задача — определить условия существования ненулевого элемента $x \in M_n(l_1)$, при котором $R(x,\lambda,\mu)$ — нулевой элемент $M_n(l_1)$.

Методом замены переменных и разбиения пространства $M_n(l_1)$ на прямую сумму подпростанств задача поиска условий существования периодических решений системы (1) сведена к разрешимоти следующего операторного уравнения

$$K(\lambda)\alpha + O(\mu) + o(\varepsilon^s) = 0, \tag{2}$$

где $K(\lambda)$ — матрица, α, β — векторы, определяющие решение системы (1), $\lim\limits_{\mu\to 0} O(\mu) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} o(\varepsilon^s) = 0$.

Методом неподвижной точки нелинейного оператора доказаны теоремы об условиях разрешимости системы (2). Рассмотрены примеры применения полученных результатов.

ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЛИНЕЙНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Бибиков Ю. Н. (Санкт-Петербург)
bibicoff@yandex.ru

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений с малым параметром, невозмущенная часть которой состоит из двух консервативных дифференциальных уравнений второго порядка с линейной или кубической восстанавливающей силой. Ставится вопрос об ответвлении инвариантных торов от положения равновесия системы при прохождении малого параметра через нулевое значение. Строится система бифуркационных уравнений, положительным решениям которой соответствуют двумерные инвариантные торы. Для гамильтоновых и обратимых по времени систем бифуркационные уравнения обращаются в тождества. К таким системам применяются методы КАМ-теории. В частности, рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия с двумя степенями свободы.

Литература

1. Бибиков Ю. Н. Локальные проблемы многочастотных нелинейных колебаний. Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003, 170 с.

ОБ УСРЕДНЕНИИ НАЧАЛЬНОЙ И КРАЕВОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Бигун Я.И. (Черновицкий национальный университет)
yaroslav.bihun@gmail.com

Метод усреднения по быстрым переменным для двухчастотных систем впервые обоснован В.И. Арнольдом. Для многочастотным систем дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями этот метод развит А.М. Самойлено и Р.И. Петришиным [1]. В данной работе рассматривается m–частотная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{1}$$

где $\tau \in [0, L]$, $x \in D \subset \mathrm{R}^n$, $\varphi \in \mathrm{R}^m$, малый парамер $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $x_\Theta(\tau) := \mathrm{col}(x(\theta_0\tau), \dots x(\theta_r\tau)))$, $0 < \theta_0 < \dots < \theta_r < 1$. Вектор-функции X и Y 2π-периодические по φ_Θ.

Усредненная по быстрым переменным система имеет вид

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, x_\Theta), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, x_\Theta),$$

В работе найдены условия незастревания системы (1) в малой окрестности резонансов $(l_0, \omega(\theta_0\tau))\theta_0 + \dots + (l_r, \omega(\theta_r\tau))\theta_r = 0$, где вектор $l \in \mathrm{R}^{(r+1)} \setminus 0$, и для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ получена оценка

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau)\| \le C\varepsilon^\alpha, \quad 0 < \alpha \le (2m(r+1))^{-1}.$$

Аналогичные вопросы исследованы для системы (1) с многоточечными и интегральными краевыми условиями. При этом усреднение по быстрым переменным производится как в системе (1), так и в интегральных краевых условиях.

Метод усреднения для систем с вектором частом $\omega = \omega(\tau, x, x_\sigma)$, $\sigma \in (0,1)$, обоснован в [2].

Литература

1. A. Samoilenko and R. Petryshyn. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems.– Dodrech Boston / London: Kluwer Academic Publishers.— 2004.— 317 P.

2. Бигун Я.И. Существование решения и усреднение нелинейных многочастотных задач с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 2007. - 59. – 4. – С. 435-446 (укр).

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Благодатских А.И. (Ижевск, Удмуртский госуниверситет)
aiblag@mail.ru

В терминах начальных позиций получены достаточные (иногда и необходимые) условия многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимки при равных динамических и инерционных возможностях всех участников. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка.

В пространстве R^ν $(\nu \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями

$$\dot{x}_i = u_i,\ u_i \in V, \quad \dot{y} = v,\ v \in V, \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad y(t_0) = Y^0,$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I$. Здесь $x_i, y \in R^\nu$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, V — строго выпуклый компакт в R^ν с гладкой границей такой, что $\mathrm{Int}V \neq \emptyset$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(k) = \big\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in I\big\}.$$

Определение. *В игре Γ возможна одновременная m-кратная поимка ($n \geq m \geq 1$), если существует $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t,\ X_i^0,\ Y^0,\ v(s),\ t_0 \leq s \leq t)$ такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_0]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено $x_\alpha(\tau) = y(\tau)$, $x_\alpha(s) \neq y(s)$ для всех $s \in [t_0, \tau)$, $\alpha \in \Lambda$.*

Условие. $Y^0 \in \mathrm{Intco}\{X_k^0,\ k \in K\}$ *для всех* $K \in \Omega(n - m + 1)$.

Теорема. *В игре Γ возможна одновременная m-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие.*

В докладе планируется рассказать и о других достаточных условиях разрешимости указанных выше задачах.

Работа поддержана грантами Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (09-01-00403).

КЛАСТЕРЫ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Богаевский И. А. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)
bogaevsk@mccme.ru

Решение вариационной задачи о наименьшем механическом действии имеет особенности даже при гладких начальных данных. Эти особенности, образующие ударную волну, приводят к появлению кластеров, т. е. точечных скоплений частиц с положительной массой. Кластеры перемещаются внутри ударной волны, которая испытывает перестройки, хорошо известные в случае общего положения на плоскости и в трехмерном пространстве. Мы описываем все типичные случаи возникновения кластеров, их взаимодействия, а также их поведения в точках уже известных перестроек ударной волны на плоскости.

Поддержано грантами: НШ 709.2008.1, ИНТАС 05-7805, РФФИ 08-01-00388, 05-02-89000-НВО_а.

Литература

1. И. А. Богаевский, Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении, *Мат. сборник*, 197(12):11–42, 2006.

2. I. A. Bogaevsky, Perestroikas of shocks and singularities of minimum functions, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 173(1-2):1–28, 2002.

ФОРМУЛА ПЛАНКА В СЛАБО-ДИССИПАТИВНОЙ ТЕОРИИ КОЛМОГОРОВА-АРНОЛЬДА-МОЗЕРА

Богданов Р.И. (НИИЯФ МГУ, Россия),
Богданов М.Р. (МГУ ИЭ, Россия, аспирант 3 года МГУ ИЭ)
bogdanov@bogdan.npi.msu.su

В [2], [3], излагается теория прямых измерений для нестационарного уравнения Шредингера. В этом подходе возникает распределение Планка (см. [4]) в присоединенном представлении оператора эволюции . Апелляция к дискретному спектру оператора эволюции во времени позволяет интерпретировать распределение Планка в качестве инварианта оператора Фробениуса, отвечающего произвольной динамической системе как в непрерывном, так и в дискретном времени. В частности, распределение Планка возникает в случае общего положения в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Мы рассматриваем отображение плоскости (см. [4])с параметрами $k, \varepsilon, \mu \in \mathrm{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n + kx_n\,(x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n)\, y_n \end{array}\right\}, \tag{1}$$

Определение. *Кластером периодических орбит отображения (1) назовем такую их последовательность, что в окрестности каждой точки предыдущей орбиты содержится равное число точек последующей орбиты.*

Лемма. *Нулевоге приближение инвариантного распределения, отвечающее кластеру асимптотически (не)устойчивых орбит, имеет вид распределения Планка.*

Литература

1. Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov-map: bifurca-tions, mode locking, and chaos in a dissipative system// International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3. №4, p. 803-842.

2. Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М.: Вузовская книга, 2003. 376 с.

3. Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. / Р.И. Богданов.- М.: Вузовская книга, 2008, - 428 с.

4. Планк М. Избранные труды. Термодинамика. Теория излучения и квантовая теория. Теория относительности. Статьи и речи. - М.: «Наука», 1975, 788 с.

О ВЗАИМОСВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ, СВЯЗАННЫХ С СИСТЕМОЙ ХААРА

Бокаев Н.А., Сыздыкова А.Т. (Астана, Казахстан)
bokayev@mail.ru, Syzdykova_ aizhan@mail.ru

Пусть $\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in [0,1]$ система Хаара.

Через $\alpha(x)$ будем обозначать некоторую функцию, которая измерима, не отрицательна и суммируема на $[0,1]$. Обозначим также

$$\beta(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \alpha(t)dt, \quad \mu(n) \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \alpha(t)dt.$$

Пусть $1 \le p < \infty, 1 \le \theta < \infty$. Через $B_{\theta,p}(\alpha)_\omega$ обозначим класс функций $f \in L_p[0,1]$, для которых $I_{\theta,p} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu)\omega_p^{\theta}(f, \frac{1}{\nu}) < \infty, 1 \le \theta < \infty$, где $\omega_p(f, \frac{1}{\nu})$ - модуль непрерывности функций $f \in L_p[0,1]$. Через $W_{\theta,p}(\alpha)$ обозначим класс функций $f \in L_p[0,1]$, имеющих ряд Фурье - Хаара $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x)$ для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{\frac{1}{\theta}}(n)c_n(f)\chi_n(x)$ есть ряд Фурье - Хаара некоторой функции $\varphi \in L_p[0,1]$. В данной работе рассматривается взаимосвязь между этими классами для различных p .

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty, \theta = \min(p,2)$ *, тогда* $B_{\theta,p}(\alpha)_\omega \hookrightarrow W_{\theta,p}(\alpha)$. *Другими словами, если* $f(x) \in B_{\theta,p}(\alpha)_\omega$ *, то ряд по системе Хаара* $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{\frac{1}{\theta}}(n)c_n(f)\chi_n(x)$ *есть ряд Фурье - Хаара некоторой функции* $\varphi(x) \in L_p[0,1]$. *Кроме того, справедливо неравенство* $\|\varphi\|_p \le C(\theta,p)I_{\theta,p}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty, \theta = \max(p,2)$ *и функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^{\delta} \alpha(t)dt \le C(\alpha)\delta \int_{\delta}^{2\delta} \alpha(t)dt, 0 < \delta < 1.$$

Тогда $W_{\theta,p}(\alpha) \hookrightarrow B_{\theta,p}(\alpha)_\omega$. *Кроме того, справедливо неравенство*

$$I_{\theta,p} \leq C(\theta,p)\|\varphi\|_p.$$

Для случая тригонометрической системы подобные классы ранее рассмотрены в работе [1], где на функцию $\alpha(x)$ накладывались дополнительные δ - и (δ,τ) - условия.

Литература

1. М.К.Потапов О взаимосвязи некоторых классов функций. Матем. заметки, 1967, Т. 2, 4, С 361-372.

НЕКОТОРЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МОДУЛЕЙ СОБОЛЕВА-КЛИФФОРДА

Боровиков И. А., Дубинский Ю. А. (МЭИ)
borovikovia@mail.ru

Пусть $W_p^m(G,A_n)$ - множество функций, определенных в области $G \subset R^{n+1}$ со значениями в 2^n-мерной алгебре Клиффорда A_n над полем R, таких, что каждая компонента в разложении функции по базису алгебры принадлежит пространству Соболева $W_p^m(G)$. Эти множества можно рассматривать как

а) наделенные структурой линейного пространства;

б) наделенные структурой A_n-бимодуля.

Соответственно, будет различаться двойственная теория. Мы рассматриваем множества $W_p^m(G,A_n)$ как A_n-бимодули и называем их *модулями Соболева-Клиффорда*. Подход а) рассмотрен в работе [2]. Кроме алгебраической структуры на $W_p^m(G,A_n)$ вводится и топологическая, а именно норма

$$|\cdot|_{p,m} = [\sum_{|\alpha|\leq m}\int_G |D^\alpha\cdot|_{A_n}^p dx]^{1/p}.$$

Доказан следующий факт.

Теорема.[1] *Пусть* $m \leq Z$, $1 < p < \infty$. *Тогда имеет место прямое разложение*

$$W_p^m(G,A_n) = O_p^m(G,A_n) \oplus \partial W_{p,0}^{m+1}(G,A_n).$$

Здесь при $m < 0$ *под* $W_p^m(G,A_n)$ *понимается сопряженный (правый или левый) модуль,* $O_p^m(G,A_n)$ *- это подмодуль (лево или право) моногенных функций,* $W_{p,0}^{m+1}(G,A_n) = \mathring{W}_p^1(G,A_n) \cap W_{p,0}^{m+1}(G,A_n)$.

Этот факт является центральным в работе [1]. На нем основана разрешимость некоторых вариационных задач.

Литература

1. И. А. Боровиков, Ю. А. Дубинский, Некоторые разложения модулей Соболева-Клиффорда и нелинейные вариационные задачи, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 260, с. 57-74, 2008.
2. Dubinskii Ju., Reissig M., Variational problems in Clifford analysis, Math. Meth. Appl. Sci. V. 25. P. 1161-1176, 2002.

О ЗАМЫКАНИИ В МЕТРИКЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

Брусенцев А.Г.
(Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова)
brusentsev@mail.ru

Обобщенным интегралом Дирихле назовем квадратичный функционал

$$D(u,u) = \int_G [(A(x)(\nabla u - i\overrightarrow{b}(x)u), (\nabla u - i\overrightarrow{b}(x)u) + q(x)|u|^2]dx,$$

где G - открытое множество в R^n, $A(x)$ - позитивная эрмитова матри-ца-функция, $\overrightarrow{b}(x)$ - n-компонентная вектор-функция с вещественными компонентами, $q(x)$ - вещественная функция, удовлетворяющая условию $q(x) \geq \delta > 0$, $u(x)$ - комплекснозначная функция, а $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ - скалярное произведение и норма в унитарном пространстве $E(\dim E < \infty)$. Обозначим через $H_0(G)$ замыкание в норме $\|u\| = D(u,u)^{\frac{1}{2}}$ множества $C_0(G)$, а через $H(G)$ множество функций из $W_{2loc}^1(G)$, для которых интеграл $D(u,u)$ конечен.

В докладе сформулированы необходимые, достаточные, а в некоторых случаях необходимые и достаточные условия принадлежности функции из $H(G)$ подпространству $H_0(G)$. Эти условия применяются для ответа на вопрос о справедливости равенства $H_0(G) = H(G)$. Они позволяют отвечать на него в неизученных ситуациях, в частности, и при $G = R^n$. Так, в известной работе В. Г. Мазьи [1] показано (при $\overrightarrow{b}(x) = \overrightarrow{0}$ и $q(x) = const$), что достаточная гладкость и равномерная позитивность матрицы $A(x)$ ($A(x) \geq \varepsilon I$, $\varepsilon = const$) обеспечивают равенство $H_0(R^n) = H(R^n)$ при $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 1$ в теореме В.Г. Мазьи условие равномерной позитивности можно заменить простой поточечной позитивностью. Возникает естественный вопрос о такой возможности и для $n = 2$. В настоящем докладе с помощью упомянутой выше характеризации пространства $H_0(G)$ дается отрицательный ответ на этот вопрос. Для любого $n \geq 2$ построен пример позитивной матрицы-функции $A(x)$, для которой (при $\overrightarrow{b}(x) = \overrightarrow{0}$ и $q(x) = const$) $H_0(R^n) \neq H(R^n)$. При $n \geq 3$ эти примеры существенно отличаются от известных, принадлежащих Н.Н. Уральцевой и С.А. Лаптеву.

Литература

1. Мазья В.Г. Замыкание в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. - 1967.- т.5 - с.192-195.

СТЕПЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ КАК НАНОМАТЕМАТИКА

Брюно А.Д. (ИПМ им. Келдыша РАН, мех.-мат. МГУ)
brunoa@mail.ru

Разработано новое исчисление “Степенная геометрия” (СГ), которое является развитием дифференциального исчисления для существенно нелинейных уравнений (алгебраических, обыкновенных дифференциальных и в частных производных) и систем таких уравнений [1,2]. СГ позволяет находить асимптотики и асимптотические разложения решений таких систем по переменным и параметрам, а также анализировать их сингулярности. Основная концепция СГ — изучение уравнений по множествам векторных показателей степеней членов, входящих в уравнение. Основные алгоритмы СГ: выделение укороченных систем, степенное преобразование, логарифмическое преобразование и нормализующее преобразование. Алгоритмы СГ позволяют последовательно упрощать исходную систему уравнений, доводя ее до системы, решение которой находится просто и является асимптотикой решения исходной системы. Кроме того, алгоритмы СГ позволяют продолжить асимптотику решений в их асимптотическое разложение. Для простых уравнений эти вычисления можно делать вручную, но для сложных многомерных систем нужно реализовывать алгоритмы в виде компьютерных программ. Задачи, возникающие в нанотехнологии, зачастую описываются громоздкими системами уравнений указанных типов с большим числом переменных и параметров. Их решения можно получать на компьютере, используя запрограммированные алгоритмы СГ. В докладе основные идеи и алгоритмы СГ будут объяснены на простых примерах. Будут продемонстрированы и непростые применения СГ [3–7].

Литература

1. А.Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

2. А.Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004, т. 59, N 3, с. 31–80.

3. А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН, 2007, т. 417, N 3, с. 298-302.

4. А.Д. Брюно. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // ПММ, 2007, т. 71, N 2, с. 192–226.

5. А.Д. Брюно, Т.В. Шадрина. Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды Московского матем. об-ва, 2007, т. 68, с. 224–287.

6. А.Д. Брюно, В.П. Варин. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // ПММ, 2007, т. 71, N 6, с. 1034–1066.

7. А.Д. Брюно, В.Ф. Еднерал. Алгоритмический анализ локальной интегрируемости // ДАН, 2009, т. 424, N 3, с. 307–310.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АСПЕКТОВ МЕТОДА ТРЕФФЦА

Бузыкин Г.О. (ВЦ РАН)
gbuzykin@newmail.ru

Пусть B — жорданова область на комплексной плоскости $z = x + iy$ с липшицевой границей Γ, а u — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в B с граничной функцией $f \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Пространство

Вейля $I_2^1(B)$ представляет собой фактор-пространство $\widetilde{W}_2^1(B)/\mathbf{R}$, где $\widetilde{W}_2^1(B)$ — пространство Соболева $W_2^1(B)$ гармонических в B функций, а $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел. Аналогично определяется постранство Вейля $I_2^{1/2}(\Gamma)$ следов этих функций на Г. Пусть $\{\Omega_k(z)\}$ — полная в $I_2^1(B)$ аппроксимативная система, в качестве которой в нашем случае выбрана система $\Omega := \{\mathrm{Re}(z-z_0)^k, \ \mathrm{Im}(z-z_0)^k\}$, где z_0 — некоторая фиксированная точка, а индекс k принимает натуральные значения. Отметим, что если $z_0 \in B$, то система Ω является не только полной, но и минимальной в $I_2^1(B)$. Построение методом Треффца приближенного решения $u^N := a_0 + \sum_{k=1}^N a_k^N \Omega_k$ рассматриваемой краевой задачи осуществляется путем минимизации $u^N(z) - f(z)$ в норме пространства $I_2^1(B)$ и условия $u^N(z') = f(z')$ для некоторой $z' \in \Gamma$. Численные исследования, проводившиеся для ряда полигональных областей B и различных по гладкости граничных функций f, для которых были получены явные решения u, показали экспоненциальную скорость сходимость метода внутри области B, выявили погранслойный эффект для погрешности и установили экспоненциальную расходимость a_k^N, $N \to \infty$, при $z_0 \notin \overline{B}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-01-00503) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Буробин А.В. (Обнинск)
burobin@iate.obninsk.ru

Для кинетического уравнения больцмановского типа (см. [1])

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f = St(f), \tag{1}$$

$$t > 0, \quad \mathbf{v} \in R^n, \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (n \geq 1),$$

изучается задача Коши с начальным условием

$$f|_{t=0} = f_0(\mathbf{v}, \mathbf{x}). \tag{2}$$

Предполагается, что оператор столкновений St в правой части уравнения является нелинейным интегральным оператором с конечным набором элементарных инвариантов столкновений.

Вводится понятие обобщенного решения уравнения (1), которое можно трактовать как неподвижную точку некоторого многозначного отображения, порождаемого уравнением. Построение обобщенного решения связывается с регуляризацией уравнения (1) и нахождением предельной функции множества регуляризованных решений.

Исследуется нелокальная разрешимость задачи Коши (1), (2) в пространствах обобщенно интегрируемых функций при соблюдении локальных законов сохранения уравнения, связанных с инвариантами столкновений оператора St достаточно общего вида.

Литература

1. Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.*

КЛАССИЧЕСКИЙ ГАМИЛЬТОНОВ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ БИРМАНА-КРЕЙНА В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Буслаев В.С. (Ст.Петербург), Пушницкий А. (Лондон)
buslaev@mph.phys.spbu.ru, alexander.pushnitski@kcl.ac.uk

Теория рассеяния в квантовой механике сравнивает динамику, порождаемую двумя самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве, возмущенным и невозмущенным. Сопоставление этих сравнений при больших положительных и больших отрицательных временах приводит к понятию рассеяния, которое описывается оператором рассеяния. Этот оператор действует независимо при каждой энергии и порождает так называемую матрицу рассеяния, оператор, зависящий от спектрального параметра. Определитель этого оператора измеряет разность спектральных плотностей двух операторов в зависимости от точки спектра. В точной формулировке этот факт и выражается формулой Бирмана-Крейна. В другой версии этой формулы речь идет не о разности спектральных плотностей, а о таком физически более выразительном объекте, как "время задержки".

В классической гамильтоновой механике сопоставляются два гамильтоновых потока на некомпактном симплектическом многообразии. Известно довольно много попыток перенести на классическую случай описанные выше конструкции. Мы предлагаем здесь еще одну попытку, в которой вскрывается аналогия между определителем матрицы рассеяния и таким объектом симплектической топологии как инвариант Калаби, который общей ситуации приписывается определенному классу симплектоморфизмов. Не входя в точные формулировки, можно сказать, что мы определяем аналог матрицы рассеяния, который называем симплектоморфизмом рассеяния. Аналогом определителя матрицы рассеяния является инвариант Калаби симплектоморфизма рассеяния. В итоге мы устанавливаем впоне аналогичную квантовомеханической связь межлу временем задержки и инвариантом Калаби, погружая, тем самым, аналог формулы следа в рамки симплектической геоиетрии.

Препринт может быть найден в [1].

Работа была частично поддержана Лондонским Математическим Обществом.

Литература

1. Vladimir Buslaev, Alexander Pushnitski. The scattering matrix and associated formulas in Hamiltonian mechanics. arXiv:0805.4172

О ПЕРЕСТРОЙКАХ ОБЛАСТЕЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Бутенина Н.Н.(Нижний Новгород, ННГУ)
n.n.butenina@mail.ru

Рассматривается семейство управляемых динамических систем (УДС) вида

$$x' = P(x) + u(t)Q(x), \tag{1}$$

где $x \in \Omega \subset R^2$ (Ω – область), $P(x)$, $Q(x)$ $\{R^2 \to R^2\}$ – функции класса C^k $(k \geq 3)$, $u(t)$ (управление) – кусочно-непрерывная ограниченная функция, $m \leq u(t) \leq n$. Ограничения на управление являются параметрами УДС (1). Изучаются перестройки областей управляемости $U(M_0)$ $(M_0 \in \Omega)$ и достижимости $D(M_0)$ при расширении промежутка $[m, n]$.

В дальнейшем μ- системой называем систему (1) при $u(t) \equiv \mu$, $\mu = const$, $m \leq \mu \leq n$, $mn\,(nm)$-системой – систему (1) при $u(t) = m\,(n)$, если $F(x) = det(P(x), Q(x)) > 0$, $u(t) = n\,(m)$, если $F(x) < 0$.

При расширении промежутка $[m, n]$ простые особые точки m- и n- систем смещаются по кривой $F(x) = 0$ в определенном направлении, предельные циклы сшитых mn- и nm- систем либо сжимаются, либо расширяются, сепаратрисы особых точек указанных сшитых систем вращаются в определенном направлении. Указанные изменения приводят к бифуркациям, аналогичным тем, которые происходят в автономных динамических системах при монотонном вращении векторного поля.

Литература

1. Butenina N. N. The structure of the boundary curve for planar controllability domains // Amer. Math. Soc. Transl.(2) Vol. 200. 2000

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Бутко Я.А. (МГТУ им. Н.Э.Баумана)
yanabutko@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача Коши–Дирихле для эволюционного уравнения, описывающего диффузию квазичастиц спеременной массой. (Такие квазичастицы используются в математических моделях полупроводников, а также при описаниях некоторых процессов в наноструктурах.) Решение задачи Коши–Дирихле представляется в виде предела конечнократных интегралов от элементарных функций (такие представления называются формулами Фейнмана). Полученный предел конечнократных интегралов может быть интерпретирован как функциональный интеграл по некоторой гауссовской мере с переменным коэффициентом диффузии. Таким образом, формулы Фейнмана, с одной стороны, позволяют получать функциональные интегралы для решений различных эволюционных уравнений (формулы Фейнмана–Каца), с другой стороны, являются способом вычисления этих функциональных интегралов.

В доказательстве используется метод Смолянова–Вайцзеккера, позволивший значительно расширить класс исследуемых задач по сравнению с классическими подходами, основанными на формуле Троттера или исчислении Ито.

В докладе рассматриваются также начальные и начально-краевые задачи для уравнений диффузии и Шрёдингера на римановом многообразии; представляются формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца для решений таких задач.

Исследования велись при поддержке грантов РФФИ № 06-01-00761 и DAAD.

Литература

1. Ya.A. Butko, M. Grothaus, and O.G. Smolyanov, Feynman formula for a class of second order parabolic equations in a bounded domain, *Dokl. Math.*, 78(1):1–6, 2008.
2. Ya.A. Butko, Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain of a Riemannian manifold, *Math. Notes*, 83(3):333–349, 2008.
3. Ya.A. Butko, Functional integrals for the Schrödinger equation on compact Riemannian manifolds, *Math. Notes*, 79(2):178–184, 2006.

БЭРОВСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МАЖОРАНТ ОДНОГО КЛАССА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Быков В.В. (МГУ имени М.В.Ломоносова)
vvbykov@gmail.com

Для заданного $n \in \mathrm{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_n$ множество систем вида $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathrm{R}^n$, $t \in \mathrm{R}^+$, с непрерывными коэффициентами, наделенное равномерной на полупрямой топологией.

Теорема. *Пусть $S \subset \mathcal{M}_n$ замкнуто, функционал $\phi\colon S \to \overline{\mathrm{R}}$ допускает представление*

$$\phi(A) = \limsup_{t\to\infty} \phi_t(A), \quad A \in S, \tag{1}$$

где ϕ_t, $t \in \mathrm{R}^+$, — непрерывный функционал, определяемый значениями оператор-функции A на отрезке $[0;t]$, M — топологическое пространство, метризуемое полной метрикой, а отображение $\mathcal{A}\colon \mathrm{R}^+ \times M \to \mathrm{End}\mathrm{R}^n$ непрерывно, причем $\mathcal{A}(\cdot,\mu) \in S$, $\mu \in M$. Тогда функция, ставящая в соответствие $\mu \in M$ значение минимальной полунепрерывной сверху мажоранты функционала ϕ на системе $\mathcal{A}(\cdot,\mu)$, принадлежит второму классу Бэра и в типичной по Бэру точке полунепрерывна сверху.

Сформулированная теорема применима к показателям Ляпунова, младшей характеристической частоте знаков линейного уравнения и старшему показателю Перрона, взятому с противоположным знаком [1]-[3].

Литература

1. Быков В. В. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, №11, с. 1575.
2. Быков В. В. Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, №6, с. 853-854.
3. Быков В. В. Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ. 2007.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ФАНТОМНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В МЕТРИКЕ БЬЯНКИ I

Вернов С.Ю. (НИИ Ядерной Физики МГУ, Москва)
E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

Анализ данных, полученных при изучении суперновых типа Ia, галактических кластеров и на эксперименте WMAP, показывает ускорение темпа расширения Вселенной, что свидетельствует о доминировании в настоящее время во Вселенной равномерно распределенной тёмной энергии (то есть субстанции с отрицательным давлением). Параметр состояния тёмной энергии $w = -1 \pm 0.2$.

В случае $w < -1$, который называется "фантомным", все энергетические условия нарушаются, и возникает проблема нестабильности. Исследуемый способ решить проблему нестабильности состоит в рассмотрении фантомной космологической модели, как эффективной модели, возникающей из полевой теории струн [1].

Изотропия и однородность Вселенной на больших расстояниях является в настоящее время экспериментальным фактом. Вселенная может быть с высокой точностью аппроксимирована пространственно плоской метрикой Фридмана. Мы провели анализ стабильности изотропных (фридмановских) решений в метрики Бьянки I, т.е. относительно анизотропных возмущений. Отметим, что сделанное в [2] доказательство основано на выполнении сильного энергетического условия. Мы рассматриваем модели с фантомными полями, нарушающие все энергетические условия. Доказано, что в случае положительности параметра Хаббла из стабильности решения в метрике Фридмана следует его стабильность в метрике

Бьянки I. Данный результат получен для модели со скалярными и фантомными скалярными полями и произвольным потенциалом. Доказана стабильность точных решений типа кинка, полученных в космологических моделях, связанных с теорией струн [3].

Данный доклад основан на совместной работе с И.Я. Арефьевой, Н.В. Булатовым и Л.В. Жуковской. Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00798.

Литература

1. Aref'eva I.Ya., AIP Conf. Proc. 2006. V. 826. P. 301–311, astro-ph/0410443.

2. Wald R.M., Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2118–2120.

3. Aref'eva I.Ya., Joukovskaya L.V., Vernov S.Yu., J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. P. 304003, arXiv:0711.1364

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПРАВИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ветохин А. Н. (Москва)
vetokhin@front.ru

Для заданного натурального n рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+,$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in R^+$ оператор-функцией. Систему B назовем бесконечно малым (б. м.) возмущением системы (1) [1], если выполнено условие

$$\lim_{t\to+\infty} ||A(t) - B(t)|| = 0.$$

Показатели Ляпунова системы (1) могут скачкообразно меняться под действием б. м. возмущения, даже в случае, когда система (1) является правильной по Ляпунову [2]. Если же б. м. возмущение является правильной по Ляпунову системой, то справедлива

Теорема. *Пусть A и B правильные по Ляпунову системы и B является б. м. возмущением системы A. Тогда показатели Ляпунова систем A и B совпадают.*

Автор благодарен профессору И. Н. Сергееву за оказанное внимание к работе.

Литература

1. Сергеев И. Н.// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111-166. 2. Виноград Р. Э.// ПММ 17. 1953. Вып. 6. С. 645-650.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Вира М.Б. (Украина, г.Нежин, Нежинский государственный университет имени Н.Гоголя)
VyraMaryna@mail.ru

Исследуется вопрос о существовании асимптотического решения краевой задачи

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon); \tag{1}$$

$$Px(0,\varepsilon) + Qx(1,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

в которой $x(t,\varepsilon)$ - искомый n-мерный вектор, $t \in [0;1]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$– малый вещественный параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ - $(n \times n)$- матрицы, $f(t,\varepsilon)$ - n-мерный вектор; $d(\varepsilon)$ - p-мерный вектор; P, Q- постоянные $(p \times n)$-матрицы.

Предполагается, что выполняются следующие условия: матрицы $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ и вектор $f(t,\varepsilon)$ допускают равномерные асимптотические разложения на отрезке $[0;1]$: $A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t)$, $B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t), f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t)$; коефициенты $A_k(t)$, $f_k(t), B_k(t)$ бесконечно дифференцированы на $[0;1]$; $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0;1]$; предельный пучок матриц $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ регулярный [1] и имеет постоянную кронекерову структуру при всех $t \in [0;1]$.

Исходя из асимптотического анализа общего решения системы (1), осуществлённого в работе [2], изучается возможность построения асимптотического решения краевой задачи (1),(2).

В докладе рассматриваются отдельные случаи, которые связаны с поведением спектра предельного пучка матриц, а именно: простой спектр ($n-1$ конечных елементарных делителей $\lambda - \lambda_1(t), ...,$ $\lambda - \lambda_{n-1}(t)$ и один - бесконечный); кратный спектр (один конечный елементарный делитель $(\lambda - \lambda_0(t))^s$ кратности $s > 1$ и простой бесконечный). При этом, рассмотрены случаи как частичного $\det(B(t,\varepsilon) \neq 0,\ k = 1, 2, ..., \forall t \in [0; 1])$, так и полного ($B_k(t) \equiv 0$, $k = 1, 2, ..., \forall t \in [0; 1]$) вырождения матрицы $B(t, \varepsilon)$.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1967.– 548 с.
2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. К.: Вища школа. 2000.– 294 с.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА — ШАФРАНОВА

Безродных С.И. (ВЦ РАН)
sergeyib@pochta.ru
Власов В.И. (ВЦ РАН)
vlasov@ccas.ru
Демидов А.С. (Мехмат МГУ)
asd@math.msu.su

Пусть область G расположена строго в правой половине $\mathcal{H}_+ := \{x_1 > 0\}$ плоскости $x = (x_1, x_2)$, а ее границей является жорданов кусочно-гладкий контур Γ. В этой области рассматривается уравнение Грэда — Шафранова

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^2(au + b) + cu + d, \quad x \in G, \tag{1}$$

где a, b, c, d — параметры, с однородным условием Дирихле

$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Пусть при некотором наборе $\{a, b, c, d\}$ решение задачи (1), (2) существует, а $\Phi(x)$, $x \in \Gamma$, — его нормальная производная. Обратная задача для уравнения (1) заключается в том, чтобы установить, существует ли другой (или другие) наборы указанных параметров, для которых решение задачи (1), (2) имеет ту же нормальную производную $\Phi(x)$. Эта задача возникает в связи с проблемой управляемой термоядерной реакции в токамаке [1]-[3]. В работе установлена единственность решения этой обратной задачи для одного класса областей G.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№07-01- 00500, №07-01-00503), программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач" и программы РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики".

Литература

1. Shafranov V.D., "On equilibrium magnetohydrodynamic configurations," III Congr. Internaz. Fenomeni D'ionizzaz. Gas, Venezia, 15 giugno, 1957, Milano, 990-997 (1957).
2. Grad H., Rubin H., "Hydromagnetic equilibria and force-free fields," Proc. 2nd United Nations Inter. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, Columbia University Press, New York, 190.195 (1959).
3. Демидов А.С., Захаров Л.Е., "Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы," Успехи Матем. Наук, 29, No. 6, 203 (1974).

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

Войтицкий В.И.
(Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь)
victor.voytitsky@gmail.com

Пусть сверхтекучая жидкость, занимающая в состоянии покоя липшицеву область Ω с горизонтальной открытой поверхностью Γ и твердой стенкой S, находится в гравитационном поле $\vec{g}$. Считаем (см. [1]), что малые движения описываются полями скоростей сверхтекучей и нормальной компонент жидкости $\vec{v}_s$ и $\vec{v}_n$, полями динамических давлений p_s и p_n, а также функцией ζ, описывающей малые отклонения

Г:

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \nu\Delta\vec{v}_n + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_n = 0, \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\vec{v}_s = 0, \quad (\text{в } \Omega), \tag{2}$$

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n} = 0, \ \vec{v}_n = \vec{0} \ (\text{на } S), \quad \tau_{i,j}(\vec{u}) := -p\delta_{i3} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{v}_s \cdot \vec{n} = \vec{v}_n \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0, \tag{4}$$

$$\tau_{i,3}(\vec{v}_n) = 0 \ (i = 1,2), \quad p_s - \tau_{3,3}(\vec{v}_n) = (\rho_s + \rho_n)g\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{5}$$

$$\vec{v}_n(0,x) = \vec{v}_n^0(x), \quad \vec{v}_s(0,x) = \vec{v}_s^0(x), \quad \zeta(0,x_1,x_2) = \zeta^0(x_1,x_2). \tag{6}$$

Доказано, что задача (1)–(6) имеет единственное сильное решение. Спектр состоит из бесконечнократного нулевого собственного значения, из двух ветвей положительных нормальных собственных значений с предельными точками 0 и $+\infty$ и, возможно, из конечного числа невещественных собственных значений.

Литература

1. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. – М.: Мир, 1978. – 520 с.

2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

3. Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid. — Birkhäuser Verlag. – Basel – Boston – Berlin. 2003. — 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФИТЦ-ХЬЮ-НАГУМО-СЕМЕНОВА (ФХНС) В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Волосова А.К., Волосов К.А., Сонин А.П.

(Московский государственный университет путей сообщения)

E-mail konstantinvolosov@yandex.ru

Основные теоремы лежащие в основе метода не фиксированной, конструктивной замены переменных для уравнений в частных производных приведены в [1]-[4]. (Диссертация выставлена на сайте [5] и всем доступна.) Произвольную замену переменных часто использовали классики для классификации линейных уравнений в частных производных, однако они не рассматривали дополнительные дифференциальные соотношения. Поэтому они просмотрели еще одно важное свойство широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными обнаруженное в [1]-[4]. Это свойство заключается в том, что внешне сильно нелинейная система является скрытой СЛАУ для широкого класса уравнений с частными производными и имеет единственное решение . Получено новое тождество в математике, следующие из условий разрешимости. Метод дает новое направление исследования уравнений с частными производными. Построим решение уравнения ФХНС, известного в математической биологии, и сделаем замену переменных:

$$Z_t' - Z_{xx}'' - Z(1 - Z^2) = 0, \quad Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta) \tag{1}$$

Введем обозначения (установим дифференциальные связи)

$$\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta), \frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \tag{2}$$

В данном примере положим $Y(\xi,\delta) = G(\xi,U)$ $T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)G(\xi,U)$ где $U = U(\xi,\delta)$. В цитируемых работах доказано, что условие разрешимости системы следующей из (1),(2) выполнено при функциях $v(U) = 3U/\sqrt{2}$, $w(U) = 3U(1-U^2)/2$. Якобиан преобразования не равен нулю и бесконечности. Описываемая в цитируемых работах система имеет вид $x'_\xi = [2U(1-U^2+\sqrt{2}\xi)+(-\sqrt{2}U^2+\sqrt{2}U^4-2\xi-2\sqrt{2}\xi^2)U'_\xi]/P_1$, $x'_\delta = (-\sqrt{2}U^2 + \sqrt{2}U^4 - 2\xi - 2\sqrt{2}\xi^2)U'_\delta/P_1$, $t'_\xi = [-2(2\xi + U(-1 + U^2 - 3\sqrt{2}\xi)U'_\xi)]/(3P_1)$, $t'_\delta = [2(U - U^3 + 3\sqrt{2}U\xi)U'_\delta]/(3P_1)$.

Так как функция $G = \xi$ в данном примере определена, то все интегралы вычисляются методом разложением на простые дроби . $P_1 = Fw + w^2 + vwG - G^2(Gv' + w') = U^2 - 2U^4 + U^6 + 3\sqrt{2}U^2\xi - 3\sqrt{2}U^4\xi - 2\xi^2 + 6U^2\xi^2 - 2\sqrt{2}\xi^3 = (U + \sqrt{\sqrt{2} + 2\xi}/2^{1/4})(U - \sqrt{\sqrt{2} + 2\xi}/2^{1/4})(U - (-1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)(U - (1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)(U - (-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)(U - (1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)$.

Выражаем благодарность академику В.П.Маслову, докторам.ф.-м.н. М.В.Карасеву, С.Ю.Доброхотову, В.Г.Данилову , А.С. Братусю, Е.М. Воробьеву за полезные советы.

Литература

1. *Волосов К.А.* Изд.С-Петербургский педагогический университет., Материалы научной конфер.Герценовские чтения,(17-22 04.2006), С-Петербург,2006 с.35-40.
2. *Волосов К.А.*// Дифф. уравн. 2007, Т.43, В.4, С.492-497, Differential Equations-2007,V. 43,N 4, P.507-512.
3. *Волосов К.А.*// Диссертация на соискание уч.ст. д.ф-м.н.,
"Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами", 2007, МИЭМ. Диссертация выставлена на сайте "Мир дифференциальных уравнений",http:// eqworld.ipmnet.ru, в разделе диссертаций.
4. *Волосов К.А.* Доклады АН 2008,т.77, н.1,С.1-4. Doklady Akademii Nauk. 2008, V.418, No.1, pp.11-14.
5. *Volosov K.A. Волосов К.А.*. Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34),С.29-39.English transl.in J. of Applied and Industrial Math.

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Ворошилов А.А. (Минск, БГУ)
22365@rambler.ru

Рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \lambda^2\Delta_x u(x,t) + \sum_{i=1}^{p} g_i(x)h_i(t) \quad (x \in R^m, t > 0), \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $p \in N$, $\Delta_x = \sum_{j=1}^{m} \partial^2 u/\partial x_j^2$ – оператор Лапласа по x. Здесь $\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции $u(x,t)$ по t [1, с.342].

Работа посвящена решению уравнения (1) с начальными условиями

$$\left(D^{\alpha-k}_{0+,t}u\right)(x,0+) = f_k(x) \quad (k = 1, ..., n = -[-\alpha], x \in R^m). \tag{2}$$

Методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье решение задачи получено в терминах H-функции (см. [2]).

Теорема. *Если $0 < \alpha \le 1$, $m \in N$, $\lambda > 0$, то задача типа Коши (1), (2) разрешима, и ее решение имеет вид*

$$u(x,t) = \int_{R^m} G^{\alpha}_1(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{p}\int_{R^m} g_i(\tau)d\tau \int_0^t G^{\alpha}_1(x-\tau,t-\theta)h_i(\theta)d\theta,$$

где функция $G^{\alpha}_1(x,t)$ определяется формулой

$$G^{\alpha}_1(x,t) = |x|^{-m}\pi^{-\frac{m}{2}}t^{\alpha-1}H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix}(\alpha,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right],$$

если интеграл в правой части сходится.

Решение задачи (1), (2) в терминах H-функции получено также для случая $1 < \alpha < 2$. В одномерном случае найденные решения выражены в терминах специальной функции Райта.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. – 401 p.

ДВУЧЛЕННАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА В ОБЛАСТИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Гадыльшин Р.Р. (совместно с Й.Амира и Г.А. Чечкиным)
(Башкирский государственный педагогический университет)
gadylshin@yandex.ru

Рассмотрена задача задача Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области, часть которой часто осциллирует, с постоянной амплитудой. Для этой краевой задачи построена двучленная асимптотика собственного значения по малому параметру, характеризующему частоту колебаний границы.

Результаты работы анонсированы в [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ и программы Ведущие научные школы (НШ-1698.2008.1, НШ-2215.2008.1).

Литература

1. Youcef Amirat, Gregory A. Chechkin, Rustem R. Gadylshin, Asymptotics of the solution of a Dirichlet spectral problem in a junction with highly oscillation boundary // Comptes Rendus. Mecanique. 2008. V.336. P.693–698.

О ФЕНОМЕНЕ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Гильмутдинова А.Ф. (г. Челябинск)
algil@lisy.ru

В полосе $(a,b)\times\mathbb{R}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda-\nabla^2)(u(x,0)-u_0(x))=0, \tag{1}$$

$$u(a,t)=u(b,t)=0, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$(\lambda-\nabla^2)u_t=\alpha\nabla^2u+\beta\nabla(u\nabla u). \tag{3}$$

С использованием подхода, изложенного в [1] доказана следующая

Теорема 1. *При любых* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и*

(i) $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{-\lambda_k\}$ *существует точно одно решение задачи* (1)-(3) *при любых* $u_0\in\mathfrak{U}$.

(ii) $\lambda\in\{-\lambda_k\}$ *существует два различных решения задачи* (1)-(3) *при любых* $u_0\in\mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0\in\mathfrak{U}^1_+$.

(iii) $\lambda\in\{-\lambda_k\}$ *не существует ни одного решения задачи* (1)-(3) *при любых* $u_0\in\mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0\in\mathfrak{U}^1_-$.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}_+$ рассмотрим краевую задачу

$$v(x,0)=v_0(x),\ x\in\Omega, \tag{4}$$

$$(\frac{\partial v}{\partial n}+\lambda v)(x,t)=(\frac{\partial w}{\partial n}+\lambda w)(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+ \tag{5}$$

для системы уравнений Плотникова

$$v_t=\Delta v-\Delta w,\ 0=v+\Delta w-\delta w-\alpha w^3. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $\beta,\lambda\in\mathbb{R}_+$ *и* $u_0\in\mathfrak{U}^\alpha$. *Тогда если:*

(i) $\delta\in(0,\nu_1)$, $\alpha\in(1/2,1)$, *то существует единственное решение задачи* (4)-(6).

(ii) $\delta=\nu_1$, $v_0\in\mathfrak{U}^\alpha\cap\mathfrak{H}^-$, *то существует единственное решение задачи* (4)-(6).

(iii) $\delta=\nu_1$, $v_0\in\mathfrak{U}^\alpha\cap\mathfrak{H}^+$, *то существует ровно три решения задачи* (4)-(6).

Литература

1. Свиридюк, Г. А., Карамова А. Ф. (Гильмутдинова А. Ф.) О складке фазового пространства одного неклассического уравнени // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1400–1405.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСПИРАЦИИ АЭРОЗОЛЯ В ТОНКОСТЕННУЮ ТРУБКУ В НИЗКОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ

Гильфанов А.К. (Казанский государственный университет)
artur.gilfanov@ksu.ru

Приводятся результаты численного исследования задачи аспирации аэрозоля в тонкостенную трубку, ориентированную входным отверстием к набегающему потоку аэрозоля. Поле скоростей течения воздуха в приближении потенциального течения несжимаемого газа находится методом граничных элементов, в рамках модели вязкого течения - методом конечных объемов в среде программы FLUENT. Наряду с коэффициентом аспирации рассчитываются поля концентраций частиц на основе метода [1]. Уравнения движения частиц дополняются уравнениями для определения концентраций частиц вдоль траекторий.

Проведены параметрические исследования коэффициента аспирации для очень малых (малоподвижный воздух) значений отношения R_a скоростей ветра и аспирации, когда коэффициент аспирации плохо описывается широко известной экспериментальной формулой Беляева-Левина. При малых R_a становится заметным влияние силы тяжести (рис.1). Изучены пространственные распределения концентраций частиц в окрестности и внутри аспирирующей трубки. При промежуточных числах Стокса наблюдается значительная неоднородность распределения концентрации в окрестности и внутри пробоотборника. В целом, концентрация частиц растет при приближении к пробоотборнику, но внутри пробоотборника появляются области с концентрацией меньше концентрации частиц в невозмущенном потоке. Дается сравнение расчетов в приближениях потенциального и вязкого течений несущей среды. Исследовано влияние неоднородного профиля концентраций частиц вдали от пробоотборника на коэффициент аспирации.

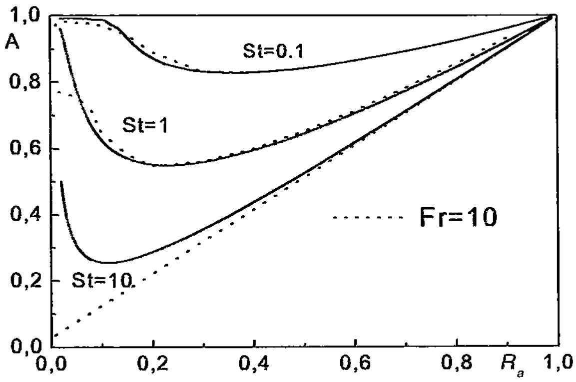


Рис. 1. Зависимость коэффициента аспирации A от R_a без учета (сплошные кривые) и с учетом (штриховые кривые) силы тяжести (St - число Стокса, Fr - число Фруда).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (N 07-07-00183).

Литература

1. Osiptsov A. N. *Modified Lagrangian method for calculating the particle concentration in dusty-gas flows with intersecting particle trajectories.* // Proc. 3rd Intern. Conf. Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France. 1998. Paper 236. 8 p.

НЕЛОКАЛЬНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Гладков А.Л. (Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)
gladkoval@mail.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - c(x,t)u^p & \text{для } x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{для } x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{для } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω - ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $p > 0$, $l > 0$, $c(x,t)$ - неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$, $k(x,y,t)$ - неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$ и $u_0(x)$ - нетривиальная неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая граничному условию при $t = 0$. Для этой задачи изучаются вопросы единственности, локального и глобального существования. В частности, найдены условия при которых все нетривиальные решения разрушаются за конечное время. Получены результаты для различных соотношений между p и l. В частности, для $p > 1$ и $l > 1$ установлено следующее.

Предположим, что

$$c(x,t) \geq \underline{c} > 0 \text{ для } x \in \Omega \text{ и } t > 0, \tag{2}$$

$$\int_\Omega k(x,y,t)\,dy \leq A\exp(\sigma t),\ \ A > 0,\ \sigma < \lambda_1(l-1), \tag{3}$$

для $x \in \partial\Omega$ и $t > 0$, или

$$c(x,t) \leq \overline{c} \text{ для } x \in \Omega \text{ и } t > 0, \tag{4}$$

$$k(x,y,t) \geq B\exp[\lambda_1(l-1)t],\ \ B > 0, \tag{5}$$

для $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$ и больших значений t.

Теорема. *Если справедливы условия (2) и (3), то существуют глобальные решения задачи (1) с достаточно малыми начальными условиями. При выполнении условий $l \geq (p+1)/2$, (4) и (5) любое нетривиальное решение существует лишь конечное время. При $l < (p+1)/2$ и $c(x,t) > 0$ для $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$, задача (1) имеет глобальные решения при любых начальных данных.*

ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Глушко А.В., Рябенко А.С. (Воронежский государственный университет)
kuchp@math.vsu.ru

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений (см. [1])

$$\begin{gathered}\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\frac{\nu}{\rho_0(x)}\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0(x)}q(t,x)=F(t,x),\\ \frac{\partial q(t,x)}{\partial t}-\left(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t,x)+\rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial q(t,x)}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}-\frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x)=0,\ x>0,\ t>0,\end{gathered}\tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}&V(t,x)|_{t=0}=P(t,x)|_{t=0}=q(t,x)|_{t=0}=0,\\ &V(t,x)|_{x=0}=V(t,x)|_{x=\infty}=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Система (1) описывает в линейном приближении малые одномерные акустическо-гравитационные колебания вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости. При выполнении некоторых условий на функции $F(t,x)$ и $\rho_0(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема. У задачи (1), (2) существует классическое решение, а для функции $V(t,x)$ равномерно по $x \in [0;\infty)$ справедлива следующая оценка $|V(t,x)| \leq ct^{-1/4}$ при $t \to \infty$.

Доказательсво теоремы основано на выяснении связи между асимптотическим поведением решения задачи при $t \to \infty$ и геометрией контуров потери аналитичности образа Фурье-Лапласа решения. Область аналитичности образа решения выявлена с помощью его априорных оценок на основе методики развитой в работе [2].

Литература

1. Бреховских Л.М. Введение в механику сплошной среды / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров — М.: Наука, 1982. — 335 с.
2. Рябенко А.С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А.С. Рябенко // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика, Математика. — 2007. — 1. — С. 95–99.

АСИМПТОТИКИ И РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Горючкина И.В. (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
chukhareva@yandex.ru

Мы изучаем асимптотики и разложения решений уравнений Пенлеве [1, гл. III, §6]. С помощью методов плоской [2] и пространственной степенной геометрии [3] были получены асимптотики для первых четырех уравнений Пенлеве [3], [4], [5], включая асимптотики эллиптического типа. Для шестого уравнения Пенлеве найдены все асимптотические разложения его решений при всех значениях его четырех параметров вблизи трех его особых точек $x = 0$, 1, ∞ и вблизи его неособой точки $x = x_0 \neq 0$, 1, ∞. Вблизи каждой его особой точки существуют 37 семейств асимптотических разложений [6]. Всего $37 \times 3 = 111$ семейств четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. Среди них известны 3 двупараметрических семейства степенных разложений, 24 однопараметрических подсемейства по целым степеням независимой переменной, а также первые члены, т. е. асимптотики, 6 сложных разложений. Вблизи каждой неособой точки уравнения существуют 17 семейств степенных разложений [7]. Среди 17 семейств 9 – известны, 8 семейств – новые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и Фонда содействия отечественной науке.

Литература

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва/ Ленинград. 1950. 436 с.
2. Брюно А.Д. // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.
3. Брюно А.Д., Горючкина И.В. // ДАН. 2008. Т. 422. №2. С. 157-160.
4. Брюно А.Д., Горючкина И.В. // ДАН. 2008 г. Т. 422. №6. С. 729-732.
5. Брюно А.Д., Горючкина И.В. // ДАН. 2008 г. Т. 423.№4.
6. Брюно А.Д., Горючкина И.В. // ДАН. 2007. Т. 417. №3. С. 298-302.
7. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Все разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2008, 30 с.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТЕОРИТНЫХ ПАДЕНИЙ

Грицевич М.И. (НИИ Механики МГУ им. М.В.Ломоносова) *gritsevich@list.ru*

Развитие обоснованных методов интерпретации наблюдений метеорных тел в настоящее время позволяет по-новому ставить вопрос об определении их конечной массы. Действительно, эти значения могут быть определены не локально, в отдельных (заключительных) точках светящегося участка траектории, а путем подбора основных динамических параметров, позволяющих аппроксимировать наблюдаемое явление в целом. Указанные значения параметров найдены в работе при помощи оригинального, развитого автором метода, позволяющего извлекать оценки из условия наилучшего соответствия фактически зарегистрированной траектории. При этом в качестве теоретической зависимости используется аналитическое решение уравнений метеорной физики.

В процессе подготовки представленной работы были обработаны опубликованные данные наблюдений ярких болидов Канадской сети. Далее оценивалась динамическая масса, обеспечивающая наблюдаемое торможение. По результатам было отобрано 28 метеорных тел, имеющих конечную массу более 2 кг, проведен последующий анализ их основных характеристик. Результаты расчетов и их сопоставление с другими оценками подтверждают адекватность используемой модели и возможность ее использования для оценки массы выпавших метеоритов. Кроме того, полученные результаты свидетельствуют о вероятной недооценке притока метеорного вещества.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИСКРЕТНО-СКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ БОГОЛЮБОВА

Губаль Г.Н. (Луцкий национальный технический университет)
hhm@lt.ukrtel.net

Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова можно представить как разложение по группам возрастающего числа частиц эволюционного оператора, эволюция которых описывается кумулянтом (семиинвариантом) соответствующего порядка эволюционных операторов конечного числа частиц [1, 2].

Рассмотрим дискретно-скоростную модель газа, т.е. симметричную систему многих частиц, взаимодействующих как упругие шары диаметра σ и массы $m = 1$ [3].

В пространстве L^1 последовательностей суммируемых функций исследуем задачу Коши для дискретно-скоростной модели цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными, которые имеют свойство факторизации (хаоса).

В пространстве $L_1(V^s \times \mathbb{R}^{2s})$ суммируемых функций доказано существование решения задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в форме разложения по кумулянтам

$$F_s(t,Y) = S_s(-t,Y)\chi_s(Q^s)\prod_{i=1}^{s} F_1(0,x_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{v^n}\frac{1}{n!}\times$$
$$\times \sum_{v_{s+1},\dots,v_{s+n}\in V_{\mathbb{R}^{2n}}} \int d(Q^{s+n}\setminus Q^s) \sum_{\substack{Z\subset X\setminus Y\\ Z\neq\emptyset}} (-1)^{|X\setminus(Y\cup Z)|}\times$$
$$\times\, \mathfrak{A}_2(t,Y,Z)\chi_{s+n}(Q^{s+n})\prod_{i=1}^{s+n} F_1(0,x_i), \quad |X\setminus Y| \geq 1,$$

где $\frac{1}{v}$ — плотность,

$$Q^s = (q_1, \dots, q_s), \qquad Q^{s+n} = (q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_{s+n}),$$
$$Y = (x_1, \dots, x_s), \qquad X \setminus Y = (x_{s+1}, \dots, x_{s+n}),$$

$\sum\limits_{Z}$ — сумма по всем непустым подмножествам Z множества $X \setminus Y$, $Z \subset X \setminus Y$, причем группа из $|Z|$ частиц эволюционирует как один элемент, $\mathfrak{A}_2(t, Y, Z)$ — кумулянт второго порядка, $\chi_{s+n}(Q^{s+n})$ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}^{2(s+n)} \setminus \{W_{s+n} \cup \partial W^{\varepsilon}_{s+n}\}$, множество $\partial W^{\varepsilon}_{s+n}$ — ε-окрестность множества W_{s+n} запрещенных конфигураций.

Литература

1. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O. *On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions* // J. Phys. A: Math. and General. — 2004. — Vol. 37, 42. — P. 9861–9872.

2. Сташенко М. А., Губаль Г. Н. *О теоремах существования решения начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова в пространстве последовательностей ограниченных функций* // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, 1. — С. 188–205.

3. Borgioli G., Gerasimenko V., Lauro G. *Derivation of a discrete Enskog equation from the dynamics of particles* // Rend. Seminario Mat. Univ. Politecnico Torino. — 1998. — Vol. 56, 2. — P. 59–69.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дауылбаев М.К., Уаисов А.Б. (Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби)

dmk57@mail.ru

Ранее (см. [1,2]) рассматривались сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями в правой точке отрезка. В настоящей работе исследуются линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями во внутренней точке данного отрезка.

Рассмотрим на отрезке [0,1] интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t) y^{(n-1)} + \dots + A_n(t) y = F(t) + \\ + \int\limits_a^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + \dots + H_{m+1}(t,x) y^{(m+1)}(x,\varepsilon)] dx. \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями в точке $t_0 \in (0,1]$:

$$y(t_0, \varepsilon) = \alpha_0, y'(t_0, \varepsilon) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0, \varepsilon) = \alpha_{n-1}. \tag{2}$$

Пусть $A_1(t) > 0$. При отсутствии интегральных членов решение получаемой дифференциальной задачи при $\varepsilon \to 0$ на $t_0 \le t \le 1$ стремится к конечному пределу, являющемуся решением обычной вырожденной задачи $L_0 y(t) = F(t), y^{(i)}(t_0) = \alpha_i, i = \overline{0, n-2}$, а в полуинтервале $0 \le t < t_0$ стремится к бесконечности и, следовательно, не имеет конечного предела.

В настоящей работе доказано, что с добавлением интегральных членов вышеуказанная асимптотическая картина решений дифференциальной задачи резко меняется. А именно, промежуток ограниченности решения дифференциальной задачи (1), (2) с добавлением интегральных членов расширяется с $t_0 \le t \le 1$ на $a \le t \le 1 (a < t_0)$. Случаи $a = 0$, $t_0 = 1$ рассмотрены в работах [1,2].

Литература

1. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке ... // Дифференциальные уравнения. Москва – Минск, 1999. – Т. 35, №6. – С. 822 – 830.

2. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные ... // Известия вузов. Математика. - Казань, 2003.- №7(494).- С. 70-74.

НЕРЕЗОНАНСНОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Денега А.А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН)

denegaanna@yandex.ru

Рассматривается управляемая алгебро-дифференциальная система (АДС)

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = U(t)u(t), \quad t \in T = [t_0, +\infty), \tag{1}$$

$$y(t) = C(t)x(t), \tag{2}$$

где $A(t), B(t)-(n\times n)$-матрицы, $\det A(t) \equiv 0$ на T, $U(t)-(n\times l)$-матрица, $x(t)$ – искомая n-мерная функция, $u(t)$ – управление размерности l, $C(t)$ – $(m \times n)$-матрица, $y(t)$ – выход размерности m.

Определение 1. Система (1) называется *резонансной*, если существуют управление $u(t)$: $||u(t)||_{\mathbf{C}^r(T)} \le \mathrm{const}$ (r – индекс АДС (1)) и согласованное с ней начальное условие $x(t_0) = x_0$ такие, что порождаемое ими решение $x(t)$ неограниченно на полупрямой $t \ge t_0$. Система, не являющаяся резонансной, называется *нерезонансной*.

Показано, что в условиях существования эквивалентной формы [1], АДС (1) нерезонансна тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система экспоненциально устойчива.

Определение 2. Система (1) называется *устойчивой по выходу*, если выходные сигналы (2), соответствующие некоторому управлению $u(t)$ при различных согласованных начальных условиях: $x(t_0) = x_0$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ с течением времени сближаются: $\lim\limits_{t\to+\infty} = ||y(t) - \bar{y}(t)|| = 0$.

Определение 3. Система (1) называется *резонансной по выходу*, если некоторому управлению $||u(t)||_{\mathbf{C}^r(T)} \le \mathrm{const}$ соответствует неограниченный при $t \ge t_0$ выход $y(t)$.

Доказано, что в случае постоянных коэффициентов, в предположении полной управляемости, понятия нерезонансности, устойчивости по выходу и нерезонансности по выходу совпадают.

Также рассматривается проблема синтеза нерезонансной системы (1) при выборе управления в виде обратной связи.

Литература

1. *Щеглова А. А.* Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика, 2008, 10, с. 57-80

ОСОБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА 2-ГО РОДА И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Дженалиев М.Т. (Алматы, Институт математики МОН РК)
dzhenali@math.kz, muvasharkhan@gmail.com

Хотя изучаемая в данной работе пара сопряженных интегральных уравнений является парой уравнений Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром λ, однако метод последовательных приближений для их решения не применим в силу того, что ядра интегральных операторов имеют особенности. Здесь показано, что индекс изучаемого оператора неположителен, и установлена его зависимость от значения спектрального параметра. Подобные интегральные уравнения (но с другим ядром) были рассмотрены ранее в [1], которые возникают в теории граничных задач с подвижными границами, обратных задач и нагруженных дифференциальных уравнений.

Рассматриваются вопросы разрешимости следующей пары сопряженных интегральных уравнений ($\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$):

$$\varphi(t) - \lambda\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),\ \ 0<\tau<t<\infty, \tag{1}$$

$$\psi(t) - \overline{\lambda}\int_t^\infty k(\tau-t)\psi(\tau)\,d\tau = g(t),\ \ 0<t<\tau<\infty, \tag{1*}$$

где

$$k(t) = (2\sqrt{\pi}t^{3/2})^{-1}\exp\{-1/(4t)\},\ \ t>0,$$

$$\lambda\in\mathbb{C};\quad f(t),\ \varphi(t)\in L_1(\mathbb{R}_+);\quad g(t),\ \psi(t)\in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{2}$$

Отметим, что ядра операторов в (1) и (1*) обладают свойствами:

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t k(t-\tau)\,d\tau = 0;\qquad \int_t^\infty k(\tau-t)\,d\tau = 1,\ \ \forall t>0.$$

Отсюда следует, что норма интегрального оператора в (1*) равна 1, поэтому метод последовательных приближений для этого уравнения не применим.

Результаты по уравнениям (1) и (1*) применяются для исследования граничных задач с подвижными границами и нагруженных параболических граничных задач.

Литература

1. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, 4 и 6, с. 498 — 508, 788 — 794.

АСИМПТОТИКИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Доброхотов С.Ю. (ИПМех РАН им.А.Ю.Ишлинского и Московский физико-технический институт)
dobr@ipmnet.ru

Для строго гиперболических систем корректных по Петровскому с переменными коэффициентами рассматривается задача Коши с локализованными начальными данными, характеризуемые малым параметром μ. Для решения этой задачи предлагается новая асимптотическая формула, основанная на обобщении канонического оператора Маслова, простом соотношении, связывающим быстроубывающие и быстроосциллирующие решения, и принимающая во внимание соображения разложения типа пограничного слоя. Предложенная формула учитывает наличие фокальных точек и каустик, метаморфозы решения и их связь с индексами Маслова и Морса, сосредоточенность решения в окрестности волновых фронтов и другие эффекты. Приведены начальные возмущения специального типа, для которых асимптотические формулы выражаются через элементарные функции. Эти формулы применяются к задачам описания распространения волн цунами и мезомасштабных вихрей (тайфунов и ураганов) в атмосфере.

Эта работа выполнена совместно с Б.И.Волковым, С.Я.Секерж-Зеньковичем, Б.Тироцци и А.И.Шафаревичем при поддержке гранта РФФИ N 08-01-00726 и договора о сотрудничестве между ИПМЕх РАН и университетом "La Sapienza", Rome.

Литература

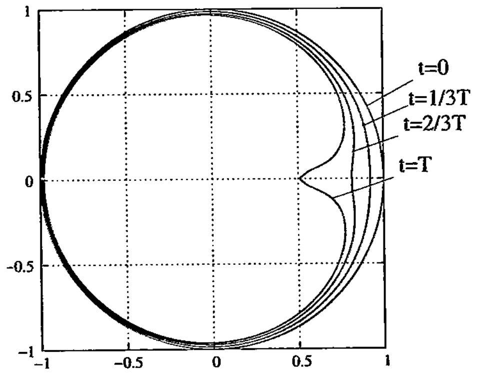
1. S.Yu. Dobrokhotov, S.Ya Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, T.Ya. Tudorovskiy, "The description of tsunami waves propagation based on the Maslov canonical operator," *Doklady Mathematics*, 74, No. 1, 592-596 (20056).
2. S.Yu. Dobrokhotov, S.Ya Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, B.Volkov, "Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model," *Russ. Journ. Earth Sciences*, 8, ES403, 1-12 (2006).
3. S.Yu. Dobrokhotov, A.I.Shafarevich, B.Tirozzi, Localized Wave and Vortical Solutions to Linear Hyperbolic Systems and Their Application to the Linear Shallow Water Equation, Russ.J.Math.Phys. v. 15, N 2, 2008, pp.192-221.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОСТАНОВКЕ ЛЕЙБЕНЗОНА

Дорофеева В.И.(Орловский госуниверситет)
vdorofey@mail.ru

Численно решена задача о продвижении границы раздела жидкости и газа в постановке Лейбензона методом дискретных особенностей. Проведена регуляризация уравнения движения границы за счет сглаживания особенности в интегральном представлении для скорости смещения границы раздела жидкостей. При определенных размерах области сглаживания удалось добится практической сходимости решения на фоне стабильного поведения вычислительного процесса.

Для демонстрации стабильности процесса вычисления с регуляризацией на рисунке построены последовательные положения границы раздела жидкостей в различные моменты времени t.



Литература

1. Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Исследование дискретных схем для задачи об эволюции границы раздела жидкостей в постановке Лейбензона// Сб. Межд. школы-семинара «МДОЗМФ-2008». Выпуск 6. Орел: «Картуш», 2008. С.73-77.

2. Кирякин В.Ю.,Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах//Дифференциальные уравнения.-2007.-Т.43,№9.-С.1263-1276

РИМАНОВЫ РАСШИРЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Дрюма В.С. (ИМИ АН РМ, Кишинев)
valery@dryuma.com

На основе теории римановых расширений пространств аффинной связности построены примеры 4-мерных Риччи-плоских пространств, отвечающих уравнениям Кадомцева-Петвиашвили и Буссинеска. Для изучения поведения нелинейных динамических систем типа Лоренца иРесслера используются свойства операторов Бельтрами-Лапласа метрик римановых расширений 4-мерных пространств постоянной аффинной связности.

Работа выполнена при поддержке Гранта N: 08.820.08.07 RF CSTD АН РМ.

Литература

1. V.Dryuma, "Four-dimensional Ricci-flat space defined by the KP equation", Buletinul AS RM, Matematica, No.3, p.1-5, 2008.
2. V.Dryuma, "Riemann Extensions in theory of the first order systems of differential equations", arXiv:math. DG/0510526 v1, Oct 2005, p.1-21.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Егорова И.П. (г. Самара)
US63@rambler.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) = \begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} = 0, & 0 < m < 1,\ y > 0, \\ u_{xy} - \frac{q}{x+y}(u_x + u_y) = 0, & q = \frac{m}{2(2-m)},\ y < 0, \end{cases}$$

на множестве $D = D_- \cup D_+$, где $D_- = \{(x,y) | -1 < -x < y < 0\}$, а D_+ ограничена гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB оси $y = 0$.

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+), u(x,y) \in C^1(D_-), u_{xy} \in C(D_-); \tag{1}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{2}$$

$$u\,(x(s),\, y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l; \tag{3}$$

$$\lim_{y \to -x+0} (x+y)^{-q} u(x,\, y), \quad 0 \le x \le 1; \tag{4}$$

$$\nu_+(x) = v_-(x), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

где

$$\nu_+(x) = \lim_{y \to 0+0} u_y(x,y), \quad x \in (0,1),$$

$v_-(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{-r} u(t,\, 0)\,dt, \quad 0 < r < 1$, $\varphi(s)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(l) = 0$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B против часовой стрелки, l – длина кривой Γ.

Здесь методом экстремума доказана единственность решения задачи (1) – (5), а существование при некоторых ограничениях на кривую Γ и заданную функцию $\varphi(s)$ эквивалентно сводится к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода [1, гл.4, §6].

Литература

1. Сабитов К.Б. Функциональные, интегральные, дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа. 2005. 671 с.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Еднерал В.Ф. (НИИЯФ МГУ)
edneral@theory.sinp.msu.ru

Рассматривается автономная система ОДУ, разрешенная относительно производных. Поиск ее формальных и аналитических интегралов вблизи ее конечной неподвижной точки осуществляется по ее нормальной форме. Бесконечно удаленная неподвижная точка сначала переводится в конечную с помощью степенного преобразования. Этот подход применен к приведенной системе Янга–Миллза

$$\dot{p}_1 = r_1 r_2^2, \quad \dot{p}_2 = r_1^2 r_2, \quad \dot{r}_1 = -p_1, \quad \dot{r}_2 = -p_2.$$

Оказалось, что в окрестности одной бесконечно удаленной неподвижной точки эта система локально неинтегрируема, чем подтверждается известный результат о ее глобальной неинтегрируемости.

Существенно, что обсуждаемый подход к исследованию локальной интегрируемости может быть сформулирован в алгоритмической форме.

Ранее похожим методом была исследована интегрируемость системы
Эйлера–Пуассона [1].

Работа выполнена совместно с Проф. А.Д. Брюно [2] при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ 195.2008.2.

Литература

1. Брюно А.Д., Еднерал В.Ф., *Об интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона* // Фундаментальная и прикладная математика, **13**, вып. 1 (2007), стр. 45–49.
2. Брюно А.Д., Еднерал В.Ф., *Алгоритмический анализ локальной интегрируемости* // ДАН, **424**, 3 (2009). В печати.

ВЫСШИЕ ИЕРАРХИИ КП И ПРОКОЛОТЫЕ ЛЕНТЫ

Жеглов А.Б. (МГУ), Осипов Д.В. (МИРАН)
azheglov@mech.math.msu.su, d_osipov@mi.ras.ru

В работах [1], [2], [3] предлагается обобщение классической теории КП, связанной с классическими уравнениями Кадомцева-Петвиашвили и Кортевега-де-Фриза и проблемой Шоттки.

В частности, в работах предложено обобщение классической иерархии КП в размерности 2, построен аналог геометрических данных Кричевера, состоящих из проколотых лент и пучков без кручения на них, обобщено соответствие Кричевера между геометрическими данными и аналогами пар Шура в двумерном локальном поле, а также построен аналог якобиана кривой: формальная схема Пикара проколотой ленты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00095-а), Программой Президента РФ "Поддержка ведущих научных школ"(грант НШ-4578.2006.1, грант НШ-1987.2008.1), грантом Национальных Научных Проектов 2.1.1.7988, программой Президента РФ "Поддержка молодых российских ученых"(грант МК-864.2008.1).

Литература

1. Zheglov A.B., Two dimensional KP systems and their solvability, e-print arXiv:math-ph/0503067.
2. Kurke H., Osipov D., Zheglov A., Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields, e-print arXiv:0708.0985; to appear in Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2008.
3. Kurke H., Osipov D., Zheglov A., Formal groups arising from formal punctured ribbons, preprint of ESI, Wien, (2008)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Жидков А.А., Калинин А.В., Сумин М.И. (Нижегородский государственный университет)
Artem.Zhidkov@gmail.com

В настоящее время можно отметить растущий интерес к изучению электромагнитных явлений и к изучению физических процессов, в которых существенна роль электрических и магнитных полей [1]. Одно из проявлений этих весьма сложных и разнообразных физических процессов – глобальная электрическая цепь [2, 3], поддерживающая достаточно стабильную разность потенциалов между Землей и верхними слоями атмосферы.

В данной работе рассматриваются различные постановки краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении для описания глобальной электрической цепи в атмосфере [2–4]. В частности, рассмотрены альтернативные описания электромагнитных полей в терминах напряженностей электрического и магнитного поля, в терминах потенциала и др. Для соответствующих систем уравнений доказываются теоремы о существовании и единственности решений в функциональных классах, определенных постановками задач, предлагаются и обосновываются эффективные итерационные методы решения задач и некоторые алгоритмы численного исследования.

В работе рассмотрен также ряд обратных задач, для решения которых предложены и обоснованы регуляризирующие алгоритмы.

Литература

1. Шестая Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. Под. ред. Мареева Е.А. –Н. Новгород, 2007.
2. Mareev E.A., Anisimov S.V. Global Electric Circuit as an Open Dissipative System // Proc. 12th Int. Conf. on Atmospheric Electricity. –Versailles, 2003. –P.797–800.
3. Mareev E.A., Anisimov S.V. Lifetime of the Energy in the Global Electric Circuit // Proc. 13th Int. Conf on Atmospheric Electricity. –Beijing, 2007.
4. Калинин А.В., Жидков А.А. Задача об определении электрического потенциала в квазистационарном электрическом приближении для системы уравнений Максвелла // Обозрение прикладной и промышленной математики. –Т.14. Вып. 4. –М.: ОПиПМ, 2007. –С.712–714.

О КЛАССИФИКАЦИИ ОДНОМЕРНЫХ РАСТЯГИВАЮЩИХСЯ АТТРАКТОРОВ

Исаенкова Н.В., Жужома Е.В. (НГПУ), Медведев В.С. (ННГУ)
nisaenkova@mail.ru, zhuzhoma@mail.ru, medvedev@uic.nnov.ru

В теории динамических систем имеются различные типы классификаций инвариантных множеств. В докладе рассматриваются внутренняя и окрестностная классификации одномерных растягивающихся аттракторов диффеоморфизмов замкнутых многообразий. Приводятся новые примеры, демонстрирующие различие указанных классификаций.

Авторы благодарят РФФИ (грант 08-01-00547) за финансовую поддержку.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ. ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Заворотинский А.В. (Черниговский гос. пед. университет, Чернигов, Украина)
zavorot@ukr.net

Изучаемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. На многообрази G с гладкой границей $\partial G \in C^\infty$ рассматривается краевая задача для эллиптического оператора порядка $2m$:

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) = f(x), \quad x \in G$$

$$B_j(x', D)u(x') + \sum_{k=1}^{\kappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \qquad (1)$$

$$x' \in \partial G, \quad (j = 1, \ldots, m + \kappa)$$

где оператор в (1) полиномиально зивисит от малого параметра ε.

Содержательная теория эллиптических с малым параметром граничных задач берёт своё начало с работы М.И. Вишика и Л.А. Люстерниках [1]. Обобщил и придал современный вид этой теории Л. Р. Волевич [2,(там же см. библиографию)]. В работе определяются эллиптические и правильно эллиптические с малым параметром и дополнительными неизвестными функциями на границе задачи и полученны оценки на фундаметальные решения. Вывод оценок основан на конструкции экспоненциального пограничного слоя, предложенной в классичсской работе Вишика и Люстерника[1]. Полученные оценки позволяют получить априорные оценки, равномерные относительно параметра. Схема исследования аналогична предложенной в работе Л.Р.Волевича [2].

Пользуясь случаем автор приносит глубокую благодарность М.Л. Горбачуку и $\boxed{\text{Л.Р.Волевичу}}$ за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром *Успехи мат. наук*, **12**, No. 5, 3–122(1957).

2. Л. Р. Волевич. Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром *Труды московского математического общества*, **67**, 104–147(2006).

О МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Беседина Т.В., Задорожний В.Г. (Воронеж)
E-mail zador@amm.vsu.ru

Находятся моментные функции решения задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

где u-искомая функция, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, u_0, f$ - случайные процессы. Пусть $M(\varepsilon)$ обозначает математическое ожидание для ε, $A(\tau,t) = \int_\tau^t f(s)ds$,
$B(\tau,t) = \int_\tau^t M(\varepsilon_2(s))ds$.

Теорема. *Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f, u_0$ независимы,$\varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1$ и ε_2 заданы характеристическими функционалами*

$$\psi_{\varepsilon_1}(v) = \frac{\sin \int_T a(s)v(s)ds}{\int_T a(s)v(s)ds}\exp(i\int_T M(\varepsilon_1(s))v(s)ds), a(t) \geq 0,$$

$$\psi_{\varepsilon_2}(v) = \exp(i\int_T M(\varepsilon_2(s))v(s)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T b_2(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)ds_1, ds_2),$$

тогда

$$M(u(t,x)) = \frac{1}{4A(t_0,t)(\pi B(t_0,t))^{0,5}}\int_{-B(t_0,t)-A(t_0,t)}^{-B(t_0,t)+A(t_0,t)} \exp(-\frac{(x-\eta)^2}{4B(t_0,t)})d\eta$$
$$*\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}(\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_2(s_1,s_2)ds_1,ds_2)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}Mu_0(x)$$
$$+\int_{t_0}^t \frac{1}{4A(\tau,t)(\pi B(\tau,t))^{0,5}}\int_{-B(\tau,t)-A(\tau,t)}^{-B(\tau,t)+A(\tau,t)} \exp(-\frac{(x-\eta)^2}{4B(\tau,t)})d\eta$$
$$*\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}(\int_\tau^t\int_\tau^t b_2(s_1,s_2)ds_1,ds_2)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}Mf(\tau,x)d\tau$$

является математическим ожиданием решения задачи (1).(2).

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа//Т.В.Беседина, В.Г.Задорожний, М., Ижевск,- 2006, 316 с.

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛАМБА О ВОЛНАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Задорожный А.И. (Южный федеральный университет)
simon@rsu.ru

Термин задача Ламба ввел Н.Н. Моисеев (1965), определяя кратко задачу о свободных гравитационных волнах в безграничной однород-ной вязкой несжимаемой жидкости. Ламб впервые опубликовал исследование в 1879 г., построив главные члены асимптотических разложений частоты и декремента затухания колебаний для большой и малой вязкости и обратив внимание на наличие сплошного спектра [1]. В 1941 г. к задаче вновь обратился Л.Н. Сретенский [2]. Выведенный в [1] дисперсионный полином четвертого порядка детально изучен в [2]. Заметив, что соответствующая плоская кривая принадлежит эллиптическому типу, Л.Н. Сретенский провел униформизацию, дав параметрическое представление корней многочлена через $P-$ функцию Вейерштрасса, которое, правда, приемлемо только для апериодических движений при достаточно большой вязкости.

В магнитной гидродинамике источником диссипации является не только молекулярная, но и магнитная вязкость ν_m. В классическом магнитогидродинамическом приближении связанная (самосогласованная) задача Ламба для системы "жидкость-вакуум", находящейся в горизонтальном стационарном однородном магнитном поле, формулируется в докладе в виде

$$\frac{1}{RgRm}L^3Z(z)+\sigma(\frac{1}{Rg}+\frac{1}{Rm})L^2Z+(\sigma^2+A)L(z)=0, z\in]-\infty,0[,$$

где $L=\frac{d^2}{dz^2}-1, Rm, Rg$ - гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса, A - число Альфвена, σ - искомый спектральный параметр, $Z(z)$ - амплитуда вертикальной компоненты индуцированного движением жидкости магнитного поля: $h_z(x,z,t)=\exp(\sigma t+ix)Z(z)$. Граничное условие затухания при $z\to-\infty$ дает конечный спектр поверхностных волн, а при требовании лишь ограниченности на бесконечности - сплошной (вязкие внутренние волны по терминологии [3]).

Остальные граничные условия выражают факт непрерывности тензора полных напряжений при переходе через границу раздела, а также условия сопряжения электромагнитных полей.

Доказывается теорема о дисипации: $\Re\sigma<0$. Проводится аналогия с теорией самосопряженных квадратичных операторных пучков [3]. Подробно исследуются случаи $Rm=\infty, Rg<\infty, A\neq 0$ и $Rg=\infty, Rm<\infty, A\neq 0$ (последний в одном из вариантов изложен в [4]). Приводятся результаты численного анализа и для общего случая.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИПМИ Владикавказского НЦ РАН и правительства республики СО-Алания.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.,Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, (1947).

2. Сретенский Л.Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Труды ЦАГИ, 541, (1941).

3. Копачевский Н.В., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука. (1989).

2. Задорожный А.И., Грунтфест Р.А. Собственные колебания жидкости конечной электропроводимости при наличии внешнего магнитного поля. ПМТФ, т.41, 2, 3-10, (2000).

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Зайцев В.А. (Удмуртский государственный университет)

verba@udm.ru

Рассматривается линейная стационарная система управления

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=C^*x,\quad (x,u,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^k. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится в виде $u=Uy$. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x}=(A+BUC^*)x. \tag{2}$$

Исследуется задача управления спектром собственных значений матрицы системы (2). Говорят, что спектр в системе (2) *глобально управляем*, если для любого многочлена $p(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, $\gamma_i\in\mathbf{R}$ существует постоянная матрица $\widehat{U}$ такая, что характеристический многочлен $\chi(A+B\widehat{U}C^*;\lambda)$ совпадает с $p(\lambda)$. Известно, что в случае когда $C=I$, спектр глобально управляем тогда и только тогда, когда пара (A,B) вполне управляема, т.е. $\operatorname{rank}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]=n$. Система (1) называется *согласованной на* $[t_0,t_0+\vartheta]$ [1], если для всякой $n\times n$-матрицы G найдется кусочно непрерывное управление $U(t)$, $t\in[t_0,t_0+\vartheta]$ такое, что решение матричной задачи Коши $\dot{Z}=AZ+BU(t)C^*\exp(A(t-t_0))$, $Z(t_0)=0$ удовлетворяет условию $Z(t_0+\vartheta)=G$. Свойство согласованности системы (1) является обобщением понятия полной управляемости для систем с наблюдателем.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет форму Хессенберга (т.е. $a_{i,i+1}\neq 0$, $i=\overline{1,n-1}$; $a_{ij}=0$, $j>i+1$), и первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю ($p\in\{\overline{1,n}\}$). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. Система (1) согласованна.

2. Спектр в системе (2) глобально управляем.

3. Матрицы C^*B, C^*AB, ..., $C^*A^{n-1}B$ линейно независимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09–01–00403).

Литература

1. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.

ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Закалюкин В.М. (Московский Государственный Университет)
zakalyu@mail.ru

Получена классификация типичных особенностей первых интегралов систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями, в частности, описаны перестройки поверхностей уровня таких интегралов.

Эти результаты являются обобщением классической теории одного неявного дифференциального уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией, созданной в работах А.Пуанкаре, М.Чибрарио, В.Арнольда, Д.Брюса, А.Давыдова и др., которая является замечательным приложением теории особенностей и составляет отдельную главу теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Показано, что такие особенности изоморфны лежандровым проекциям открытых зонтиков Уитни, которые встречаются и во многих других геометрических и физических приложениях теории особенностей. Первоначально, они изучались в работах А. Гивенталя, Г. Ишикавы, В. Закалюкина. В указанных размерностях все такие особенности слабо структурно устойчивы [1].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 080100157.

Литература

1. В.М.Закалюкин, А.О.Ремизов, *Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах,* Труды Матем. Ин-та им. В.А.Стеклова, 2008, т.261, 140-153.

ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ НЕГЛАДКИХ СИСТЕМ

Замонов М.З. (Российско - Таджикский (Славянский) Университет)
mzamonov@mail.ru,
Нуров И.Д. (Институт математики АН Республики Таджикистан)
nid1@mail.ru

При исследовании многих динамических нелинейных систем, периодические движения на выходе линейной части оказываются близки к синусоидальным. В основе изучения таких автоколебательных режимов естественной является гипотеза “авторезонанса”, состоящая в том, что возникающие в нелинейной системе автоколебания близки по форме к колебаниям в “порождающей” линейной системе.

В работе [1] исследовано бифуркационные явления в нелинейных системах, когда нелинейная функция обладала “o“ - малости, и являлась непрерывной. Приближенно построено (с помощью метода Ньютона - Канторовича) решение нелинейного уравнения вида

$$x'' + a_1(\lambda)x' + a_2(\lambda)x = f(x, \lambda). \tag{1}$$

Настоящий доклад посвящен исследованию бифуркационных решений для нелинейных систем (1), где правая часть является недифференцируемой в точке $x = 0$.

Уравнения типа (1) возникают в ряде задач электродинамики, механики, биологии и т.д. Использован метод дифференциального включения [2], метод локальной теории дифференциальных уравнений, метод функционализации параметров [3].

Литература

1. Nurov I. and Ymagulov M. Italian Jornal of Pure and Applied Mathematics., 2003, n.13, p.71-81.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985, 224 с.
3. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Зарубин А.Н. (ГОУ ВПО "ОГУ")
aleks_zarubin@mail.ru

Уравнение

$$\begin{gathered}\operatorname{sgn} x U_{xx}(x,y) + \operatorname{sgn} y U_{yy}(x,y) - H(x-\tau)U_x(x-\tau,y) - \\ -H(y-h)U_y(x,y-h) = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

$0 < \tau, h \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ - функция Хевисайда, рассмотрим в области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2$, где $D_1 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, $D_2 = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty} D_{2l}$ и $D_3 = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ - гиперболические и эллиптическая части области D, а $J_1 = \{(x,y): x > 0, y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y): x = 0, y > 0\}$, причем $D_{1k} = \{(x,y): k\tau - y < x \leq (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, $D_{2l} = \{(x,y): -h/2 < x < 0, lh - x < y \leq (l+1)h + x\}$.

Задача Т. Найти в области D функцию $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D\backslash(J_1 \cup J_2))$, исчезающую на бесконечности, удовлетворяющую уравнению (1), граничным условиям

$$U(x, k\tau - x) = \psi_{1k}(x), k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2,$$

$$U(lh - y, y) = \psi_{2l}(y), lh \leq y \leq (2l+1)h/2;$$

условиям сопряжения

$$U(x,-0) = U(x,+0) = \omega_1(x), U(-0,y) = U(+0,y) = \omega_2(y);$$

$$U_y(x,-0) = U_y(x,+0) = \nu_1(x), U_x(-0,y) = U_x(+0,y) = \nu_2(y);$$

где $\psi_{1k}(x)$, $\psi_{2l}(y)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, а $\omega_j(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\nu_j(x) \in C^1(0,+\infty)$ $(j = 1,2)$ - подлежат определению.

Теорема. *Пусть* $\psi_{1k}(x) \in C[k\tau,(2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$, $\psi_{2l}(y) \in C[lh,(2l+1)h/2] \cap C^2(lh,(2l+1)h/2)$, $\psi_{10}(0) = \psi_{20}(0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_{1k}(x)| = 0$, $\lim\limits_{l\to+\infty} \max\limits_{y\in[lh,(2l+1)h/2]} |\psi_{2l}(y)| = 0$. *Тогда существует единственное при* $\tau \leq 1, h \leq 1$ *решение* $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D\backslash(J_1 \cup J_2))$ *задачи Т.*

Доказательство единственности решения задачи Т проведено с помощью интегральных неравенств на линии вырождения.

Вопрос существования решения задачи Т сведен к разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений, регулиризация которой осуществлена методом "сингуляризации".

АППРОКСИМАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД В ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МОДЕЛЕЙ НЕНЬЮТОНОВОЙ гидродинамики

Звягин В.Г. (Воронежский Государственный Университет)
zvg@math.vsu.ru

В докладе на основе аппроксимацонно-топологического метода исследуется разрешимость задач оптимального управления правыми частями для двух моделей движения вязкоупругих несжимаемых сред: Джеффриса и Фойгта. Опишем подробно здесь первую модель, модель Джеффиса с производной Яумана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v + \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = \mathrm{Div}\tau + u, \tag{1}$$

$$\frac{\mathcal{D}_0 \tau}{\mathcal{D}t} + \frac{1}{\lambda_1}\tau = 2\mu_2 \mathcal{E}(v), \tag{2}$$

$$\tau|_{t=0} = \tau_0, \tag{3}$$

$$v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \ v|_{t=0} = v_0, \ \mathrm{div} v = 0, \ \int_{\Omega} p(t,x)dx = 0, t \in [0,T]. \tag{4}$$

Здесь: $\frac{\mathcal{D}_0\Theta}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \Theta\mathcal{W} - \mathcal{W}\Theta$ - производная Яуманна тензора $\Theta = (\Theta_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область с границей класса C^∞, $n = 2,3$, $v(t,x) = (v^1(t,x),\ldots,v^n(t,x))$ - поле скоростей, $p(t,x)$ - функция давления среды, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ - тензор скоростей деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\mathcal{W}(v) = (\mathcal{W}_{ij}(v))_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ - тензор завихренности, $\mathcal{W}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} - \frac{\partial v^j}{\partial x_i})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\tau = (\tau_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ - чисто упругая компонента девиатора тензора напряжений σ, т. е. $\tau = \sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(v)$, λ_1, μ_1, μ_2 - некоторые положительные константы, имеющие физический смысл, u - внешняя сила, действующая на жидкость, которая и будет являться управляющим параметром. Плотность среды предполагается постоянной и равной единице.

Для неё исследуется проблема существования оптимальных решений с функционалом качества

$$J(\dot{v},v,u) = \int_0^T \Psi(\dot{v}(t,\cdot), v(t,\cdot), u(t,\cdot))dt \to \inf. \tag{5}$$

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00192.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ С КАТАСТРОФАМИ

Зейфман А.И., Макарьина И.А. (Вологда)
a_zeifman@mail.ru

Стационарные модели систем массового обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели с катастрофами (ПРГК), изучались многими авторами, см. например, [1]. Нестационарная модель системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами рассмотрена в [2]. В настоящем докладе исследуются общие нестационарные ПРГК.

Рассмотрим ПРГК, вероятности состояний которого описываются прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\left(\lambda_0(t) + \xi(t)\right) p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - \left(\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t)\right) p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1. \end{cases}$$

где $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ $\xi(t)$ – коэффициенты системы (интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно), удовлетворяющие стандартным условиям (см., например, [3]). Положим $\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t)$, и $\alpha(t) = \inf_{k\geq 0}\alpha_k(t)$.

Теорема. Пусть интенсивности $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ заданы. Пусть для некоторой последовательности $\{d_j\}$ $(1 = d_{-1} = d_0 \leq d_1 \leq \dots)$ выполнено условие $\int\limits_0^\infty \alpha(t)\,dt = +\infty$. Тогда при любой $\xi(t)$ справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int\limits_s^t \alpha(\tau)\,d\tau}\|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}$$

при всех s,t, $0 \leq s \leq t$, и любых допустимых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s)$, $\mathbf{p}^{**}(s)$, здесь $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^\infty d_i|x_i|$, a $\|\mathbf{x}\|_{1D} = \sum_{i=1}^\infty d_{i-1}\left|\sum_{k=i}^\infty x_i\right|$.

Работа поддержана РФФИ, грант 06-01-00111.

Литература

1. *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett. 2008. V. 78 P. 2248–2257.
2. *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for $M(t)/M(t)/S$ queue with catastrophes // Proceedings of SMCTools08. Athens, Greece, 2008.
3. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ

Зернов А.Е., Кузина Ю.В. (г. Одесса)
yuliak@te.net.ua

В первой части доклада рассматриваются задачи Коши вида

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $x : (0,\tau) \to \mathrm{R}-$ неизвестная функция , $F : D_1 \to \mathrm{R}$ - непрерывная функция, $D_1 \subset (0,\tau) \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}$. Исследуются как регулярные, так и сингулярные задачи.

Во второй части доклада рассматриваются задачи Коши вида

$$x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha(t)x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \tag{3}$$

где $x : (0,\tau) \to \mathrm{R}-$ неизвестная функция, $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)-$ непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0}\alpha(t) = 0$, $f : D_2 \to \mathrm{R}-$ непрерывная функция, $D_2 \subset (0,\tau) \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, $g : (0,\tau) \to (0,+\infty)$,
$h : (0,\tau) \to (0,+\infty)-$ непрерывные функции, $g(t) \leq t$, $h(t) \leq t$, $t \in (0,\tau)$.

Решением каждой из задач (1)-(3) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0,\rho] \to \mathrm{R}$ $(0 < \rho < \tau)$, которая при всех $t \in (0,\rho]$ удовлетворяет соответствующему уравнению и при этом выполнено условие $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Качественный анализ задач (1)-(3) дает возможность сформулировать конкретные достаточные условия, при выполнении которых каждая из рассматриваемых задач имеет непустое множество решений $x : (0, \rho] \to \mathrm{R}$ (ρ – достаточно мало) с определенными асимптотическими свойствами при $t \to +0$. Выясняется вопрос о числе таких решений. Приводятся примеры.

Литература

1. Зернов А.Е. О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью // Укр. мат. ж. - 2001. - 53, 4. - С. 455-465.
2. Зернов А.Е., Кузина Ю.В. Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0$, $x(0) = 0$ //Укр. мат. ж. - 2003. - 55, 12. - С. 1720-1723.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИГАЗО- И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Злотник А.А. (Москва)
azlotnik2007@mail.ru

Установлены необходимые и достаточные условия параболичности (равномерной и неравномерной) по Петровскому квазигазодинамической (КГД) системы уравнений в случае совершенного политропного газа. Они представляют собой неравенства на показатель адиабаты $\gamma > 1$ и число Маха. Как следствие, впервые дана локальная по времени теорема существования и единственности классического решения задачи Коши.

Представлена новая модифицированная ГКГД система, содержащая вторые производные не только по пространственным, но и по временной переменной. Установлены критерии ее гиперболичности.

Изучена задача устойчивости малых возмущений по постоянному фону для линеаризованных КГД и ГКГД систем. Впервые выведены равномерные на всем бесконечном интервале времени оценки норм относительных возмущений решения через соответствующие нормы относительных начальных возмущений.

Соответствующие результаты выведены и для родственной квазигидродинамической системы уравнений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 08–01–90009–Бел. и 09–01–00600 и Минобрнауки РФ, программа "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/3276.

Литература

1. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. N 3. С. 445–472.
2. Злотник А.А. Матем. заметки. 2008. Т. 83. N 5. С. 667–682.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Зубова С. П., Раецкая Е. В.(Воронежский государственный университет)
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система

$$A\dot{\bar{x}} = B\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \tag{1}$$

$$\bar{x}(0) = x^0, \bar{x}(T) = x^T, \tag{2}$$

где $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t) \in R^n$; $A, B, D \in L(R^n, R^n)$; $t \in [0, T]$, которая возмущается с помощью параметров ε, $\mu \in C$ и произвольных матриц G_1, $G_2 \in L(R^n, R^n)$ следующим образом:

$$(A + \varepsilon DG_1)\dot{x} = (B + \mu DG_2)x(t, \varepsilon, \mu) + Du(t, \varepsilon, \mu) \tag{3}$$

$$x(0, \varepsilon, \mu) = x^0, x(T, \varepsilon, \mu) = x^T. \tag{4}$$

Доказываются

Теорема 1. *Система (3),(4) является полностью управляемой в том и только том случае, когда исходная система является полностью управляемой.*

Теорема 2. *Состояние $x(t)$ системы (3),(4) инвариантно относительно указанных возмущений, то есть $x(t, \varepsilon, \mu) = \bar{x}(t)$.*

Рассматривается также система наблюдения

$$\dot{\bar{x}} = B\bar{x}(t) + F(t) \tag{5}$$

$$f(t) = A\bar{x}(t) \tag{6}$$

и возмущенная система

$$(I + \varepsilon G_1 A)\dot{x} = (B + \mu G_2 A)x(t, \varepsilon, \mu) + \Phi(t, \varepsilon, \mu). \tag{7}$$

$$f = Ax. \tag{8}$$

Теорема 3. *Система (7),(8) полностью наблюдаема в том и только том случае, когда система (5),(6) является полностью наблюдаемой.*

Указывается вид функции $\Phi(t, \varepsilon, \mu)$, достаточный для инвариантности состояния $\bar{x}(t)$ относительно указанных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00397).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ибрагимова Л.С. (Сибайский институт Башкирского государственного университета, г. Сибай)
lilibr@mail.ru

Рассматривается дискретная динамическая система, зависящая от векторного параметра λ:

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $f(x, \lambda)$ – оператор, гладко зависящий от $x \in R^N$ и λ.

В докладе обсуждается вопрос о локальных бифуркациях в окрестности неподвижных точек системы (1). А именно, предполагается, что система (1) при некотором $\lambda = \lambda_0$ имеет неподвижную точку $x = 0$, т.е. $f(0, \lambda_0) = 0$. При этом рассматривается ситуация, когда неподвижная точка $x = 0$ системы является негиперболической, т.е. матрица Якоби $A = f'_x(0, \lambda_0)$ имеет собственные значения, равные по модулю 1. Основное внимание уделяется рассмотрению случаев, когда матрица A имеет простые собственные значения $\rho = 1$, $\rho = -1$ и $\rho = e^{i\varphi}$.

В зависимости от указанных случаев возможны различные сценарии локальных бифуркаций в окрестности неподвижной точки $x = 0$. Предлагается новая схема исследования указанных бифуркаций, основанная на конструировании эквивалентных операторных уравнений и их анализе с использованием специального метода функционализации параметра. Получены новые признаки бифуркаций и асимптотические (по степеням малых параметров) формулы для рождающихся неподвижных точек и циклов системы (1). Рассматриваются приложения в задаче о бифуркации вынужденных колебаний дифференциальных уравнений.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ

Игнатьев М.Ю. (Саратовский госуниверситет)
ignatievmu@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу:

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, x, t > 0; q(0, t) = a, q_{xx}(0, t) = b, \tag{1}$$

где a, b - заданные вещественные числа такие, что $a > 0$, $b < 0$. Определим $f(\lambda) := 16\lambda^3 - (12a^2 - 4b)\lambda - 2a(2a^2 - b)$, $\mu^* := \max\limits_{\lambda < -a/2} f(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$ - вещественное решение задачи (1) такое, что функции q, q_x, q_{xx} ограничены при $x \geq 0, t \geq 0$ и функция $p(t) := \left(-q_{xt} + q_x^2\right)|_{x=0}$ существует и ограничена снизу при $t \geq 0$. Тогда $p(t)$ допускает продолжение на отрицательную полуось такое, что*

1) $p(t) - \mu^* \in \tilde{B}$ (описание класса $\tilde{B}$ см.[1]);

2) спектр оператора Штурма-Лиувилля на полуоси $t > 0$ с потенциалом $p(t)$ и условием Дирихле в нуле неотрицателен.

Теорема 2. *Пусть $p(t), t \in (-\infty, \infty)$ - функция класса $\mu^* - \delta + \tilde{B}$, $\delta > 0$ такая, что спектр оператора Штурма-Лиувилля на полуоси $t > 0$ с потенциалом $p(t)$ и условием Дирихле в нуле лежит на луче $[\delta, +\infty)$. Тогда существует вещественное решение $q(x,t)$ задачи (1) такое, что $\left(-q_{xt} + q_x^2\right)|_{x=0} = p(t)$ при $t \geq 0$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

Литература

1. V.A. Marchenko. *The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data.* In: *What is integrability?* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991. P. 273-318.

УРАВНЕНИЯ С АККРЕТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

М. Илолов, Х.С. Кучакшоев (Институт математики АН Республики Таджикистан)
ilolovm@gmail.com

Пусть X – банахово пространство, A неограниченный и нелинейный оператор действующий из множества $D(A)$ в X; A называется аккретивным оператором, если имеет место неравенство

$$\|u-v\| \leq \|u-v+\lambda(A(u)-A(v))\| \tag{1}$$

для любых $u, v \in D(A)$ и $\lambda > 0$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши вида

$$\frac{du}{dt} + A(u(t)) = 0, \ \ t \in R_+, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

где A аккретивный в смысле (1) оператор. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $A + I$: $D(A) \to X$ сюрьективный оператор. Тогда для заданного $u_0 \in D(A)$ существует, и притом только одна, непрерывная функция $u : R_+ \to X$, которая слабо непрерывна дифференцируема по t и является решением задачи (2)-(3).*

Утверждение теоремы 1 означает, что оператор – A является генератором нелинейной полугруппы $G(t)$ и $u(t) = G(t)(u_0)$.

Имеет место также и "обратное" утверждение.

Теорема 2. *Пусть нелинейная полугруппа $G(t) : K \to K$ (K– подмножество банахово пространство X) является сжимающей:*

$$\|G(t)(u) - G(t)(v)\| \leq \|u-v\|, \ \ \forall u, v \in K, \ \ t \in R_+.$$

Тогда генератор $-B$ определенный равенством

$$B(k) = \lim h^{-1}(G(h)(k) - k)$$

будет аккретивным оператором.

Приведенные утверждения относятся к обобщении на нелинейный случай известной теоремы Хилле-Иосида для линейных полугрупп [1]. Они имеют приложения в нелинейной теории параболических уравнений и их систем [2].

Литература

1. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 1972.
2. Балакришнан А.В. Прикладной функциональной анализ М.: Наука, 1980.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В СЛУЧАЕ ЗАВИСИМЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.С. Ількив (НУ «Львовская политехника»)
И.Я. Савка (ИППММ им. Я.С. Пидстрыгача НАНУ, Львов)
ilkivv@i.ua, s-i@ukr.net

В области $\mathcal{D} = (0, T) \times \Omega$ переменных (t, x_1, x_2), где Ω – двумерный тор, рассматривается задача для нормального уравнения

$$\Big(\frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1\frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + a_2\frac{\partial^n}{\partial x_2^n}\Big)u = \sum_{j=1}^{n} A_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}u, \tag{1}$$

с нелокальными двухточечными условиями

$$\mu_1\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu_2\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \ \ j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $A_j(\alpha, \beta) = \sum\limits_{l+m\leq j} A_{lm}^j \alpha^l \beta^m$, коэффициенты a_1, a_2, A_{lm}^j, μ_1 и μ_2 являются действительными числами, $u = u(t, x_1, x_2)$ – искомое решения, φ_j – заданные функции. Дополнительно налагаем условия

$$F_1(a_1, a_2) = 0, \qquad F_2(\mu_1, \mu_2) = 0, \tag{3}$$

на коэффициенты a_1, a_2 и μ_1, μ_2, где F_1, F_2 – заданные функции.

Задачи (1), (2) и (1)–(3) являются некорректными по Адамару, причём существования их решений связано с проблемой малых знаменателей. Для случая независимых коэффициентов a_1, a_2 и μ_1, μ_2 разрешимость задачи (1), (2) в шкале пространств Соболева установлена с помощью метрического подхода [1]. Изучались также некоторые частные задачи для зависимых коэффициентов.

В работе исследован вопрос выбора множества таких гладких кривых (3), для почти всех точек которых задача (1), (2) разрешима, а также определены условия существования и единственности решения задачи соответствующей гладкости. При этом доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей.

Работа поддержана ГФФИ Украины (договор Ф-25/108).

Литература

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

СОЛИТОННАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЯ С ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ

Имайкин В.М. (г. Королев)
ivm@infoline.su

Это результаты совместных работ с А.Комечем, Г.Шпоном и Б.Вайнбергом ([1] и указанная там библиография). Рассматриваются системы, описывающие взаимодействие поля $\psi(x,t)$ в $\mathbf{R}^3$ с релятивистской заряженной частицей, имеющей в момент t положение $q(t)$ и импульс $p(t)$. Для поля Клейна-Гордона система имеет вид

$$\dot\psi(x,t) = \pi(x,t),\ \dot\pi(x,t) = \Delta\psi(x,t) - m^2\psi(x,t) - \rho(x - q(t)),$$

$$\dot q(t) = p(t)/\sqrt{1+p^2(t)},\ \dot p(t) = \int \psi(x,t)\,\nabla\rho(x - q(t))dx,$$

здесь $m > 0$. При $m = 0$ получаем волновое поле; изучался также случай поля Максвелла. Система является трансляционно-инвариантной и допускает солитонные решения

$$Y_{a,v}(t) = (\psi_v(x - vt - a), \pi_v(x - vt - a), vt + a, p_v), p_v = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, |v| < 1.$$

Состояния $S_{a,v} := Y_{a,v}(0)$ образуют солитонное многообразие $\mathcal{S} := \{S_{a,v} : a, v \in \mathbf{R}^3, |v| < 1\}$. Основным результатом является асимптотика вида

$$(\psi,\pi) \sim (\psi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm), \pi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm)) + W_0(t)\Psi_\pm \qquad (1)$$

при $t \to \pm\infty$. В зависимости от условий на формфактор $\rho(x)$ и начальные данные можно получить различные варианты асимптотики. При условии Винера $\hat\rho(k) = \int e^{ikx}\rho(x)dx \neq 0 \forall\ k \in \mathbf{R}^3$ удается вывести асимптотику (1) без последнего слагаемого, справедливую в локальных энергетических полунормах; при условии малости взаимодействия $\|\rho\|_{L^2} \ll 1$ — полную асимптотику (1) в глобальной энергетической норме. При условии Винера и условии близости начальных данных к солитонному многооообразию в весовом пространстве Соболева с достаточно высоким весом удается получить полную асимптотику (1) в глобальной энергетической норме.

Литература

1. V.Imaikin, A.Komech, B.Vainberg, On scattering of solitons for the Klein-Gordon equation coupled to a particle, *Comm. Math. Phys.* **268** (2006), no 2, 321-367.

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ВИХРЕВЫХ ПОЛЯХ

Исламов Г.Г. (Удмуртский госуниверситет)
ggislamov@udm.net

Случай, когда квантово–механическая система не испытывает воздействие вихревых полей, безусловно, заслуживает внимания и ему посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ. Именно в этом случае правомерна известная формула де Бройля $E = \hbar\omega$, которая связывает энергию E квантово–механической системы с круговой частотой ω собственных колебаний этой системы. Здесь $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$*эрг · сек* — постоянная Планка. Однако учёт влияния вихревых полей пространства квадратично суммируемых функций на свойства квантово-механических систем не менее важен при создании новых видов материалов с помощью нанотехнологий. В вихревых полях, как будет показано в докладе, уже нет простой зависимости между энергией и круговой частотой собственных колебаний квантово–мехнических систем. В основе теории лежит гипотеза о том, что квантово–механическая система, находящаяся в вихревой среде, испытывает с её стороны воздействие, интегрально зависящее от волновой функции $\psi(t)$ и выражаемое в виде конечномерного оператора минимально возможного ранга $K\psi(t) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j(\psi(t), b_j)$, переводящего систему из текущего набора частот собственных колебаний системы в новый набор частот. Здесь все элементы a_j, b_j принадлежат пространству $L_2(R^n)$. Мы предлагаем следующее обобщение уравнения Шрёдингера

$$i\hbar(\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} + \frac{1}{\hbar}\mathrm{Im}K\psi(t)) = (T + U - \mathrm{Re}K)\psi(t),\ t \geq 0,\ \psi(0) = \psi_0,$$

где $\mathrm{Re}\, K = (K + K^*)/2$ и $\mathrm{Im}\, K = (K - K^*)/(2i)$ есть вещественная и мнимая части конечномерного оператора K, которые естественно называть соответственно "оператором деформации"и "оператором вихря".

О НЕРАВЕНСТВЕ ГОРДИНГА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Исхоков С. А. (Душанбе, Таджикистан)
sulaimon@mail.ru

Из общей теории регулярных эллиптических уравнений известно, что неравенство Гординга играет важную роль в исследовании разрешимости задачи Дирихле методом Гильбертова пространства. Наш доклад посвящен весовому аналогу неравенства Гординга для одного класса эллиптических операторов с вырождением.

Пусть Ω – произвольная (ограниченная или неограниченная) область в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Обозначим через $d(x)$ расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$, если $\partial\Omega \neq \emptyset$. В случае $\Omega = R^n$ положим $d(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{1/2}$.

Пусть $\sigma(x)$, $\delta(x)$ – положительные функции из класса $C^1(\Omega)$, удовлетворяющие условиям $\delta(x) \leq \kappa d(x)$, $\quad |\nabla\delta(x)| \leq \kappa \quad |\nabla\sigma(x)| \leq \kappa\sigma(x)\delta^{-1}(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть r – натуральное число. В работе доказывается весовое неравенство Гординга для дифференциального оператора

$$(Lu) = \sum_{|k|,|l| \leq r} (-1)^{|l|}\left(a_{kl}(x)\sigma^2(x)\delta^{-2r+|k|+|l|}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)}. \tag{1}$$

Пусть $W_2^r(\Omega;\, \sigma, \delta)$ – пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, норма которого определяется равенством

$$\|u;\, W_2^r(\Omega;\, \sigma, \delta)\|^2 = \sum_{|k|=r} \int_\Omega \sigma^2(x)\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + \int_\Omega \sigma^2(x)\delta^{-2r}(x)|u(x)|^2 dx.$$

и пусть $(W_2^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta))'$ – пространство антилинейных непрерывных функционалов определенных над $W_2^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$. Обозначим через $B[u,\, v]$ форму, порожденную оператором (1). Применением весового неравенства Гординга исследуется разрешимость следующей задачи

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta))'$ требуется найти решение $U(x) \in W_2^r(\Omega;\, \sigma,\, \delta)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int_\Omega \sigma^2(x)\delta^{-r}(x)U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

Отметим, что некоторые частные случаи задачи D_λ ранее изучались при условии ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ без привлечения неравенства Гординга. В нашем случае эти коэффициенты принадлежат некоторым L_p – пространствам с весом.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛЕ АЛЬМАНСИ

Карачик В.В. (г.Челябинск, ЮУрГУ)
karachik@susu.ru

Пусть функция $f(x)$ аналитическая в некоторой звездной окрестности нуля $D \subset R^n$. Рассмотрим неоднородное полигармоническое уравнение

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in D. \tag{1}$$

На основании представления аналитической функции по бесконечной формуле Альманси [1] справедливо утверждение.

Теорема 1. *Решение уравнения (1) может быть записано в форме*

$$u(x) = \frac{|x|^{2m}}{2(2m-2)!!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2m)!!} \times$$
$$\times \int_0^1 (1-\alpha)^{k+m-1} \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k f(\alpha x)\, d\alpha.$$

Следствие. Некоторое решение уравнения $\Delta^m u(x) = P_l(x)$, где $P_l(x)$ полином степени l может быть записано в форме

$$u(x) = |x|^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+m-1}{m-1} \frac{|x|^{2k} \Delta^k P_l(x)}{(2,2)_{k+m}(n+2l-2k,2)_{k+m}},$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера, с соглашением $(a,b)_0 = 1$.

Аналогичное утверждение справедливо и для неоднородного уравнения Гельмгольца $\Delta v + \lambda v = f(x)$.

Теорема 2. *Решение неоднородного уравнения Гельмгольца может быть найдено в виде*

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{n/2-1} (-\Delta - \lambda)^k f(\alpha x)\, d\alpha,$$

где в отличие от теоремы 1 следует считать, что оператор $(-\Delta - \lambda)^k$ применяется к функции $f(\alpha x)$.

Литература

1. Карачик В. В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Математические труды, 2007. -Т.10. -N. 2. -С. 142-162.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Кожевникова Л.М. (г. Стерлитамак, СГПА)
kosul@mail.ru

В неограниченной области $\Omega \subset \mathrm{R}_n$, $n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} - a(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} (\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha} - \Phi(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \Psi\big|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

Функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1,n}$, $a(\mathbf{x}, s)$ измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ и для всех $\xi \in \mathrm{R}_n$, $s \in \mathrm{R}$ при п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq a_1 |\xi - \eta|^{m+1}, \quad m \geq 1;$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \xi) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \eta)| \leq a_2 |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{m-1}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n);$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1,n};$$

$$(a(\mathbf{x},s)-a(\mathbf{x},t))\,(s-t)\geq a_3|s-t|^{q+1},\quad q\geq 1;$$
$$|a(\mathbf{x},s)-a(\mathbf{x},t)|\leq a_4|s-t|(|s|+|t|)^{q-1};$$
$$a(\mathbf{x},0)=0.$$

Обобщая понятие λ-последовательности, введенное в работе [1] для областей, расположенных вдоль выделенной оси, на неограниченные области, произвольным образом уходящие на бесконечность, и квазилинейный оператор, для решений задачи (1), (2) установлена теорема типа Фрагмена-Линделефа. На основе априорных оценок методом последовательных приближений [2] доказана разрешимость задачи Дирихле в широком классе областей с некомпактными границами с экспоненциально растущими данными.

Литература

1. Кожевникова Л.М. Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений // Изв. РАН 2006. Т. 70. №6. С. 93–128.
2. Шишков А.Е. Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций растущих на бесконечности // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47. №2. С. 277–289.

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Карулина Е.С. (Москва)
KarulinaES@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y''(x)-q(x)y(x)+\lambda y(x)=0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(0)-k^2y(0)=0,\\ y'(1)+k^2y(1)=0, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $q(x)\geq 0$, суммируемая и ограниченная на $[0,1]$ и удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^1 q^{\gamma}(x)dx=1,\quad \gamma\neq 0. \tag{3}$$

Получены оценки минимального собственного значения этой задачи при различных значениях γ и k.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1698.2008.1

УРАВНЕНИЕ, ОБЛАДАЮЩЕЕ ПАРОЙ ЛАКСА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ РАССЕЯНИЯ

Карюк А.И., Редькина Т.В. (Ставрополь)
karyuk@mail.ru

I. В работе [1] получено уравнение

$$8\alpha_{11}^2 w_{\tilde{x}\tilde{z}}=e^w\left[\alpha_{31}w_{\tilde{z}}-(3\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}})w_{\tilde{x}}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}(w_{\tilde{x}}-w_{\tilde{z}})w\right], \tag{1}$$

которое имеет пару Лакса.

1.1 *Решение в виде бегущей волны специального вида.* Для уравнения (1) будем искать решение в виде функции $w=f(\xi)$, где $\xi=\alpha_{31}\tilde{x}+(3\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}})\tilde{z}$. В этом случае решение можно получить из обращения интеграла $\int\frac{df}{C_1+e^f(1-f)}=\frac{1}{m}\left[\alpha_{31}\tilde{x}+(3\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}})\tilde{z}\right]+C_2$, где $m=\frac{16\alpha_{11}^3\alpha_{31}}{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left(1+\frac{\alpha_{11}\alpha_{31}}{2\alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{21}\alpha_{32}}\right)$, C_1, C_2 - произвольные постоянные.

1.2 *Решение в виде бегущей волны.* Подстановкой $\xi=\tilde{x}+\lambda\tilde{z}$ уравнение (1) сводится к обыкновенному уравнению второго порядка, решая которое, определяем решение $\int\frac{e^{-w}dw}{(1-\lambda)w+B(\lambda-3)+C_1e^{-w}}=\frac{1}{A\lambda}\tilde{x}+\frac{1}{A}\tilde{z}+C_2$, где $A=\frac{16\alpha_{11}^3}{\alpha_{21}\alpha_{32}}$, $B=1+\frac{2\alpha_{11}\alpha_{31}}{\alpha_{21}\alpha_{32}}$, C_1, C_2 - произвольные постоянные.

II. Рассмотрим уравнение, имеющее главную часть, совпадающую с главной частью уравнения (1), и нелинейность вида

$$8\alpha_{11}^2 w_{\tilde{x}\tilde{z}} = e^w \left[\alpha_{31} w_{\tilde{z}} - (3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}}) w_{\tilde{x}} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} w\right]. \qquad (2)$$

2.1 Найдено решение в виде $w = \prod_{k=0}^{\infty} w_k$, где $w_0 = e^{a\tilde{x}} + e^{b\tilde{z}}$, $a = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{6\alpha_{11}\alpha_{31}+2\alpha_{21}\alpha_{32}}$, $b = -\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}\alpha_{31}}$ также решение уравнения (2), и каждый последующий множитель w_k получается из системы:

$$\begin{cases} \alpha_{31} w_{kz} - (3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}}) w_{kx} = 0, \\ w_{(k-1)x} w_{kz} + w_{(k-1)z} w_{kx} + w_{(k-1)} w_{kxz} = 0. \end{cases}$$

2.2 Пусть $w = f(\xi)$, где $\xi = \alpha_{31}\tilde{x} + (3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}})\tilde{z}$. В этом случае получено решение в неявном виде с помощью квадратур:

$$\int \frac{df}{\sqrt{C_1 + 2\gamma e^f (f-1)}} = C_2 \pm \left(\alpha_{31}\tilde{x} + (3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}})\tilde{z}\right),$$

где $\gamma = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{16\alpha_{11}^2\alpha_{31}(3\alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{21}\alpha_{32})}$.

Литература

1. Карюк А. И., Редькина Т. В. *Нелиненое уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка// Современные методы физико-математических наук. С.Т.М.К., г.Орел. Т.1 - Издат. ОГУ, 2006г. - С.70-75*

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Касымов К.А., Имангалиев Е.И. (Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби)
E-mail: 2261031@mail.ru

Рассматривается следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y'''(t,\varepsilon) + A(t)y''(t,\varepsilon) + B(t)y'(t,\varepsilon) + C(t)y(t,\varepsilon) = F(t) +$$
$$+\int_0^1 [K_0(t,x)y(x,\varepsilon) + K_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + K_2(t,x)y'''(x,\varepsilon)]dx \qquad (1)$$

с условиями:

$$y(0,\varepsilon) - \int_0^1 [b_0(t)y(t,\varepsilon) + b_1(t)y'(t,\varepsilon) + b_2(t)y''(t,\varepsilon)]dt = a_0,$$
$$y'(0,\varepsilon) - \int_0^1 [c_0(t)y(t,\varepsilon) + c_1(t)y'(t,\varepsilon) + c_2(t)y''(t,\varepsilon)]dt = a_1, \qquad (2)$$
$$y(1,\varepsilon) - \int_0^1 [d_0(t)y(t,\varepsilon) + d_1(t)y'(t,\varepsilon) + d_2(t)y''(t,\varepsilon)]dt = a_2,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $F(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ на отрезке $[0,1]$, а $K_i(t,x)$, $i = \overline{0,2}$ в области $D = (0 \le t \le 1,\ a \le x \le 1)$ являются достаточно гладкими функциями, $A(t) > 0$, $0 \le t \le 1$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $i = \overline{0,2}$ – известные функции, a_i, $i = \overline{0,2}$ – известные постоянные.

Найдена конструктивная аналитическая формула решения интегральной краевой задачи (1), (2) и получены асимптотические по малому параметру оценки решения и его производных. Установлено, что решение интегральной краевой задачи (1), (2) в точке разрыва ($t = 0$) обладает явлением начального скачка нулевого порядка.

Литература

1. К.А. Касымов. Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. Алма-Ата, 1981.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛЯПУНОВА С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО МНОГОМЕРНОМУ ВРЕМЕНИ

Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А. (Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова)
aiman-80@mail.ru

Оператором дифференцирования по многомерному времени $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m) \in R \times R^m$, $R = (-\infty, +\infty)$ назовем оператор $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, где $e = (1, ..., 1)$ – m-вектор, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$, $\langle , \rangle$ – знак скалярного произведения.

Исследование некоторых колебательных процессов квантовой механики приводит к изучению периодических по (τ, t) решений Z линейных матричных уравнений в частных производных вида

$$D_e Z = AZ + ZB + F(\tau, t), \tag{1}$$

где A и B – заданные $n \times n$-матрицы, $F(\tau, t)$ – $n \times n$-матрица, обладающая свойствами периодичности и гладкости вида

$$F(\tau + \theta, t + k\omega) = F(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R \times R^m) \tag{2}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, ..., k_m)$ из множества Z^m, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – вектор-период, кратный периоду $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, причем $\theta = \omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные числа.

Предположим, что собственные значения $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_j\}$ матриц A и B соответственно удовлетворяют условию

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0, \quad 1 \leq i, \ j \leq n. \tag{3}$$

Теорема. *При условиях (2) и (3) матричное уравнений типа Ляпунова (1) допускает единственное (θ, ω)-периодическое по (τ, t) решение Z^*, представимое в виде*

$$Z^*(\tau, t) = L[X(\tau + \theta) \int\limits_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta,t+\omega)} X^{-1}(s) F(s, \varkappa) Y^{-1}(s) d_e(s, \varkappa) Y(\tau + \theta)],$$

где $X(\tau)$ – матрицант уравнения $D_e X = AX$, $Y(\tau)$ - матрицант уравнения $D_e Y = YB$, $L[H]$ – линейный оператор, представляющий решение матричного уравнения $Z = X(\theta) Z Y(\theta) + H$, $d_e(\tau, t)$ – дифференциал по (τ, t) и интеграл определены вдоль прямых $t = t_0 + e\tau$ пространства (τ, t).

ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ФУНКЦИЕЙ ЭЙРИ

Ким В.Э. (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа)
kim@matem.anrb.ru

Пусть X – топологическое векторное пространство. Непрерывный линейный оператор $\Phi : X \to X$ называется *гиперциклическим*, если $\exists\, x \in X$, такой что $\overline{\{\Phi^n x, \ n = 0, 1, 2, ...\}} = X$. Изучение таких операторов берет свое начало с классической работы Дж. Биркгофа [1], в которой была доказана гиперцикличность оператора сдвига на пространстве целых функций $H(\mathbf{C})$. Один из наиболее общих результатов в этой области был получен в работе [2], где было показано, что любой дифференциальный оператор (бесконечного порядка) с постоянными коэффициентами вида

$$M[f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z), \ f \in H(\mathbf{C}),$$

является гиперциклическим, за исключением случая $L(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, где $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$.

В представленной работе установлен класс гиперциклических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

Теорема 1. *Любой оператор вида*

$$T[f](z) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n[f](z), \ f \in H(\mathbf{C}), \ A[f](z) = f''(z) - z f(z),$$

является гиперциклическим, за исключением случая $P(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, где $P(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$.

Теорема 1 получена как следствие следующего результата.

Теорема 2. *Система сдвигов функции Эйри* $\{\mathrm{Ai}(z+\lambda), \lambda \in \Lambda \subset \mathbf{C}\}$ *полна в* $H(\mathbf{C})$, *если множество* Λ *содержит по крайней мере одну предельную точку.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00779-а) и Совета по грантам при Президенте РФ (грант НШ-3081.2008.1).

Литература

1. Birkhoff G. D. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. T. 189. C. 473–475.
2. Godefroy G., Shapiro J. H. // J. Funct. Anal. 1991. T. 98. 2. C. 229–269.

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Ковалёв М.Д. (МГТУ им. Н.Э.Баумана)
mdkovalev@mtu-net.ru

Рассматривается известная задача [1, 2] на собственные значения эффективного показателя преломления β планарного диэлектрического оптического волновода с произвольным числом $n+1 \geq 3$ слоёв. В случае ТЕ-моды в j-ом слое с показателем преломления n_j уравнение для компоненты $E_y(x)$ амплитуды электрической напряжённости световой волны выглядит так [1]:

$$\frac{c^2}{\omega^2}\frac{d^2E_y}{dx^2} + n_j^2 E_y = \beta^2 E_y, \tag{1}$$

где ω — частота волны, c — скорость света в пустоте.

Для определения собственных значений величины β ранее были известны так называемые дисперсионные уравнения двух видов. Это уравнение Д1, получаемое [2] приравниванием нулю определителя системы линейных уравнений, возникающих при сшивке решений уравнений (1) по условиям непрерывности E_y и $\frac{dE_y}{dx}$ на границах слоёв. Второе уравнение Д2, получается на основе известного метода характеристических матриц [1]. Третье уравнение Д3 впервые получено автором [3, 4] и названо им многослойным.

Недавно автором доказаны теоремы, устанавливающие простые связи между всеми тремя уравнениями. В частности показано, что множество корней уравнения Д2 в точности совпадает с множеством собственных значений величины β, тогда как уравнения Д1 и Д3 обладают лишними корнями, совпадающими с показателями преломления слоёв.

Автор благодарит академика В.И.Пустовойта за содействие и внимание к работе. Работа поддержана РФФИ, грант 08-01-90102-Мол.

Литература

1.*М.Борн, Э.Вольф.* Основы оптики. Москва, Наука, 1970.
2. Вопросы оптоэлектроники. Под ред. Т.Тамира. Москва, Мир, 1991.
3. *Майер А.А., Ковалев М.Д.*. Дисперсионное уравнение для собственных значений эффективного показателя преломления в многослойной волноводной структуре. ДАН, 2006, т. 407, N 6, С. 766–769.
4. *Ковалев М.Д.*. Многослойное уравнение. Чебышевский сборник. Тула, т. 7, выпуск 2 (18), 2006, С. 99–106.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Кожанов А.И. (Новосибирск)
kozhanov@math.nsc.ru

Для уравнений

$$u_t = \mathrm{div}(p(x)\mathrm{grad}u) - q(x)u + F(x,t),$$

описывающих процессы распространения тепла или же диффузии частиц [1], исследуется разрешимость задачи нахождения вместе с решением $u(x,t)$ неизвестных коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$, характеризующих свойства среды. В качестве условий переопределения в рассматриваемой задаче предлагаются условия задания решения на плоскостях $t = t_1$, $t = t_2$, $0 < t_1 < t \leq T$, в качестве же прямой информации — граничные условия первой либо второй начально-краевых задач, а также начальное условие. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и устойчивости регулярных решений.

Помимо описанных выше, рассматриваются также задачи нахождения вместе с решением $u(x,t)$ уравнения теплопроводности неизвестных коэффициентов $p(x,t)$ и $q(x,t)$ специального вида

$$p(x,t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) g_k(x,t), \quad q(x,t) = \sum_{k=1}^{l} q_k(x) h_k(x,t)$$

с известными функциями $g_1(x,t), \ldots, g_m(x,t), h_1(x,t), \ldots, h_l(x,t)$ и неизвестными $p_1(x), \ldots, p_m(x), q_1(x), \ldots, q_l(x)$. Условиями переопределения в этих задачах являются условия задания решения на плоскостях $t = t_1, \ldots, t = t_m, t = t_1^*, \ldots, t = t_l^*$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$, $0 < t_1^* < \ldots < t_l^* \le T$, $t_i \ne t_j^*$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l$.

Частично результаты, излагающиеся в настоящем докладе, опубликованы в работах [2, 3].

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

2. Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, N 5. С. 1053–1071.

3. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Докл. РАН. 2006. Т. 409, N 6. С. 740–743.

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

И.С. Кокшаров (Вологда, ВГПУ), А.Н. Наимов (Вологда, ВоГТУ)

nan67@rambler.ru, pm02kis@yandex.ru

Рассмотрим задачу

$$z'' = Q\left((z' - B_1(t,z))(z' - B_2(t,z))\right) + f(t,z,z'), \qquad 0 < t < \omega, \quad z \in C, \tag{1}$$

$$z(0) = z(\omega), \qquad z'(0) = z'(\omega), \tag{2}$$

где $z = x + iy$, $\omega > 0$, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, C-комплексная плоскость, $Q : C \mapsto C$ - непрерывное отображение, положительно однородное порядка m, где $m > 1/2$, отображения $B_1, B_2 : R \times C \mapsto C$, $f : R \times C \times C \mapsto C$ непрерывны, ω-периодичны по t и удовлетворяют условиям:

$$B_j(t, \lambda z) \equiv \lambda B_j(t,z) \quad \forall \lambda > 0, \quad j = 1,2,$$

$$(|z| + |w|)^{-2m} \max_{t \in R} |f(t,z,w)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z| + |w| \to \infty.$$

Для задачи (1),(2) имеет место априорная оценка, если существует число $C = C(Q, B_1, B_2, f) > 0$ такое, что для любого решения $z(t)$ задачи верно неравенство:

$$\max_{0 \le t \le \omega} (|z(t)| + |z'(t)|) < C.$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $B_1(t_0, z_0) \ne B_2(t_0, z_0)$ при любых $z_0 \ne 0$, $t_0 \in R$;

2) системы $z' = B_1(t,z), z' = B_2(t,z)$ не имеют ненулевых $\omega-$периодических решений

3) при любых фиксированных $z_0 \ne 0$, $t_0 \in R$ система $u' = Q(u - B_1(t_0, z_0))(u - B_2(t_0, z_0))$ не имеет нестационарных органиченных решений;

Тогда имеет место априорная оценка для задачи (1),(2).

На основе приведенной теоремы можно находить условия разрешимости задачи (1),(2).

О СТРУКТУРЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Субботина Н.Н.(институт математики и механики УрО РАН), Колпакова Е.А.(институт математики и механики УрО РАН)

subb@uran.ru, eakolpakova@gmail.com

Рассмотрена задача Римана для одномерного закона сохранения

$$u_t + [G(u)]_x = 0, x \in R, u(0,x) = u_l, \ x \le 0; \ u(0,x) = u_r, \ x > 0; u_l \ge u_r.$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x \in R$, функция $G(\cdot)$– дважды непрерывно дифференцируема и выпукла. Известно, что в данной задаче существует и единственно обобщенное энтропийное решение [1], которое не определено на множестве меры нуль, где оно терпит разрыв первого рода. Это решение является слабым решением в смысле С.Л.Соболева [2]. Известно также, что в этой задаче существует и единственно обобщенное многозначное М-решение [3].

Показано, что в точках непрерывности энтропийного решения, оно совпадает с М-решением, которое является полунепрерывным сверху многозначным отображением. В точках разрыва энтропийного решения М-решение многозначно. Показано, что М-решение в данной задаче совпадает с субдифференциалом обобщенного минимаксного решения [3] в следующей краевой задаче для уравнения Гамильтона-Якоби

$$w_t + G(w_x) = 0, w(0, x) = u_l x,\ x \leq 0;\ w(0, x) = u_r x,\ x \geq 0.$$

Таким образом для одномерного закона сохранения определена структура энтропийного решения задачи Римана в окрестностях точек разрыва.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-01-00410 и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ №НШ-2640.2008.1.

Литература

1. С.Н. Кружков. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. //Математический сборник. 1970, т.81(123), №2, с. 228.-255.

2. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

3. А.С. Лахтин, А.И. Субботин. Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка.//Математический сборник. 1998, т.189, №6, с.33–58.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

Королев С.А. (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)
korolev_s_a@mail.ru

Рассмотрим систему двух слабосвязанных маятниковых уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(a + \cos x)\dot{x} + \alpha\dot{y}], \\ \ddot{y} + \sin y = \varepsilon[(b + \cos y)\dot{y} + \beta\dot{x}], \end{cases} \tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, a, b – параметры, α, β — параметры, определяющие связь уравнений.

При $\varepsilon = 0$ система (1) распадается на два независимых уравнения. Фазовый цилиндр каждого из невозмущенных уравнений делится на две области: колебательную, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми, не охватывающими цилиндр, и вращательную. В колебательных областях вводятся [1] новые переменные действие - угол $(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$. Пусть $\omega_1(I_1)$, $\omega_2(I_2)$ — частоты движения по траекториям в этих областях.

Рассматривается резонансный случай, когда частоты соизмеримы, то есть выполняется соотношение: $p\omega_1(I_1) - q\omega_2(I_2) = 0$, где p, q — натуральные числа. В окрестности резонанасных уровней вычислена трехмерная усредненная система [1]. Функции в правых частях уравнений этой системы получены в виде быстро сходящихся рядов. Оставляя основные члены в рядах, получим систему:

$$\begin{cases} v' = w + \mu(p_1 u^2 + p_2 uw + p_3 w^2), \\ w' = p_4 + (\alpha p_5 + \beta p_6)\cos pv + \\ \qquad +\mu[(p_7 + (\alpha p_8 + \beta p_9)\cos pv)u + (p_{10} + \alpha p_{11}\cos pv)w], \\ u' = p_{12} + \alpha p_{13}\cos pv + \\ \qquad +\mu[(p_{14} + \alpha p_{15}\cos pv)u + (\alpha p_{16}\cos pv)w], \end{cases} \tag{2}$$

где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, p_i — параметры, причем p_4, p_7, p_{10}, p_{12}, p_{14} линейно зависят от параметров a и b. Для системы (2) проведено исследование состояний равновесия и найдены их бифуркации при изменении параметров a, b, α, β исходной системы (1). Также проведено численное исследование системы (2), в ходе которого были найдены предельные циклы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00270.

Литература

1. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазигамильтоновых ситемах. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2005.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Булгаков А. И., Корчагина Е. В., Филиппова О. В. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

Доклад посвящен эффективным оценкам решений функционально-дифференциальных включений с вольтерровой по А. Н. Тихонову правой частью и импульсными многозначными воздействиями.

Пусть comp $[\mathrm{R}^n]$ - множество непустых компактов пространства R^n, $\mathbf{L}$ пространство суммируемых функций $x : [a, b] \to \mathrm{R}^n$.

Пусть $\Phi \subset \mathbf{L}$. Будем говорить, что множество Φ *разложимо*, если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция. Пусть $S(\mathbf{L})$ – множество ограниченных замкнутых разложимых подмножеств пространства $\mathbf{L}$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек, $\widetilde{\mathbf{C}}$ – множество непрерывных на интервалах $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\ldots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \to \mathrm{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \quad \Delta x(t_k) \in I_k(x(t_k)), \ k = 1, \ldots, m, \quad x(a) = x_0, \tag{1}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}} \to S(\mathbf{L})$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathrm{R}^n \to$ comp $[\mathrm{R}^n]$ непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Определение. *Под решением задачи* (1) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)),$$

где $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $k = 1, \ldots m$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00305, CIGENE - Center for Integrative Genetics at Norwegian University of Life Sciences and the Norwegian Research Council.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МНОГОМОДОВЫХ ПРОГИБОВ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Костин Д.В. (Воронежский государственный университет)
dvkostin@rambler.ru

Доклад посвящен одному из новых применений схемы бифуркационного анализа фредгольмовых уравнений в случае двухмодового вырождения, порождающего решения. Изначально качественный анализ уравнений с помощью асимптотических методов был изложен в работах Ляпунова и Шмидта. На данный момент схема Ляпунова–Шмидта получила разнообразные обобщения. Доклад посвящен бифуркационному анализу упругих систем в случае слабо неоднородности. Новое обстоятельство заключается в применение асимптотических методов теории линейных операторов к построению ключевой функции для 2-модовых прогибов неоднородной балки и пластины [1], [2].

Построение опирается на схемы конечномерных редукций, представляющие собой аппарат исследования потенциальных физических систем с неединственностью состояний, к каковым относятся, упругие конструкции в закритических равновесных состояниях, сегнетоэлектрические фазы кристаллов и т.п.

В предлагаемой исследовательской схеме традиционное условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала функционала энергии в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций системы. В построении требуемой пары векторных полей ведущую роль сыграла взятая из монографии В.П.Маслова [3] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$).

Особую актуальность предложенной схеме придает то, что она позволяет разрабатывать алгоритмы компьютерного сопровождения решений вариационных задач достаточно широкого класса.

Литература

1. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Докл. РАН – 2007. Т. 416, 4. – С.1-5.

2. Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Матем. заметки, 2008, 83:1, С.50.60.

3. Маслов В.П. *Асимптотические методы и теория возмущений.* – М.: Наука.1988. – 312с.

НЕЛОКАЛЬНЫЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЦИКЛОВ В ВАРИАЦИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Костина Т.И. (Воронежский государственный университет)

tata_sti@rambler.ru

В данном сообщении главный акцент сделан на уравнение Белецкого [1]

$$(1 + e\cos(\nu))\,\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\,\sin(\nu)\,\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) = 4e\,\sin(\nu), \tag{1}$$

описывающее колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты (e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника). Это уравнение является вариационным [2] (имеет интегрирующий множитель), что позволяет применять к нему вариационную модификацию метода Ляпунова–Шмидта [3], и основанные на ней новые вычислительные технологии [4].

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) превращается в классическое уравнение колебаний маятника $\ddot{x} + \mu\,\sin(x) = 0$. Последнее уравнение вместе с уравнением Дуффинга было исследовано (при нелокальных возмущениях) в работах А.Ю.Борзакова [4] в случае краевых условиях первого рода. Большой интерес представляет также изучение уравнений такого типа и в случае периодической краевой задачи. Разработка и применение соответствующих данному случаю численно–аналитических методов нелокального анализа [3],[4] стали возможными благодаря развитию новых компьютерных технологий и, в частности, в связи с появлением новых вычислительных пакетов символьной математики.

Литература

1. Белецкий В.В Движение искусственного спутника вокруг центра масс.–М.: Наука, 1965.–416с.

2. Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта // Математические модели и операторные уравнения. Том 5. Воронеж: ВорГУ, 2008. 98–104.

3. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, N 1. – С. 101-132.

4. Борзаков А.В. О приближенных методах в нелокальном анализе вариационных задач на основе конечномерной редукции// Математические модели и операторные уравнения. Том 3. Воронеж: ВорГУ, 2005. 13–26с.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ СУММЫ РЯДА ЭКСПОНЕТ

Кривошеева О.А. (Башкирский государственный университет)

kriolesya2006@yandex.ru

Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n exp(\lambda_k z) \tag{1}$$

Изучается вопрос, когда область существования функции $f(z)$ совпадает с областью сходимости ряда (1). Предварительно введем некоторые обозначения. Через σ обозначим максимальную плотность последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е.

$$\sigma = \overline{\lim}_{k\to\infty}\frac{k}{|\lambda_k|}$$

Положим еще

$$\chi = \lim_{\delta\to\infty} \overline{\lim}_{k\to\infty} |\lambda_k|^{-1} \ln |q_k(\delta)|,$$

где

$$q_k(\delta) = \prod_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), j\neq k} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{\delta|\lambda_k|}\right)^{m_j}.$$

Теорема. *Для того, чтобы область существования функции $f(z)$ совпадала с областью сходимости ряда (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\sigma = 0$ и $\chi = 0$.*

Как следствие приведем один из результатов для рядов Дирихле.

Следствие. (Теорема Карлсона и Ландау). *Пусть $\lambda_k = 0$ и $m_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Предположим, что $\sigma = 0$ и $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда область существования функции $f(z)$ совпадает с областью сходимости ряда (1).*

Литература

1. А.Ф. Леонтьев. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983. 175с.

БИФУРКАЦИИ ЦИКЛА АНДРОНОВА - ХОПФА ОБОБЩЕННОГО КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Куликов Д.А. (ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Рассматривается обощенное кубическое уравнение Шредингера

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u. \tag{1}$$

Его можно интерпретировать как частный случай известного уравнения Гинзбурга - Ландау при отсутствии диффузии. Здесь $u(t, x, y)$ - комплекснозначная функция, $c, d \in R$ $(d > 0)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Пусть $(x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, x - y \geq 0\}$. Уравнение (1) будет рассмотрено вместе с условиями Неймана:

$$u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = 0, \ u_x|_{x=y} - u_y|_{y=x} = 0. \tag{2}$$

Задача (1), (2) имеет решение $u(t, x, y) = \exp(-ict)$ - цикл Андронова - Хопфа (А.-Х.). Справедливы утверждения.

Теорема 1. *При $d > 2c$ цикл А.-Х. задачи (1), (2) асимптотически орбитально устойчив в норме фазового пространства краевой задачи (1),(2), а при $d \in (0, 2c)$ - неустойчив. Наконец, при $d = 2c$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости цикла А.-Х.*

Теорема 2. *Существует такое положительное $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $d = 2c - \varepsilon$ задача (1),(2) имеет два пространственно неоднородных устойчивых цикла. Для соответствующих периодических решений справедлива формула*

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \exp(i(-ct + \varphi_0))[1 \pm \sqrt{\varepsilon c l_0^{-1}}\alpha(\cos x + \cos y) + o(\sqrt{\varepsilon})], \tag{3}$$

где $\alpha = -c + i$, $l_0 = (6c^4 + 15c^2 + 1)/6 > 0$ при всех c, $\varphi_0 \in R$ (произвольная постоянная).

Аннонсированные результаты опубликованы в работе [1] и продолжают исследования данного уравнения из монографии [2].

Литература

1. Куликов Д.А. Бифуркации однородного цикла обобщенного кубического уравнения Шредингера в треугольнике // Моделир. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15. №2. С. 50 - 54.
2. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 432 с.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Курбангалина З.Р. (Стерлитамак)
E-mail: Zulfiya_k83@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = f(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ \ -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные действительные числа.

Обратная задача. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x), удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(D_- \cup \{t = -\alpha\}); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_+ \cup \{t = \beta\} \cup D_- \cup \{t = -\alpha\}; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

В данной работе следуя [1] установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)– (6).

Теорема. *Если существует решение u(x,t) и f(x) задачи (2)– (6), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия*

$$\alpha + \beta - \tfrac{\alpha^2}{2} \ne 0,$$

$$e^{-4\pi^2 k^2 \beta} - (\cos 2\pi k\alpha + 2\pi k \sin 2\pi k\alpha) \ne 0$$

при всех $k \in N$.

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413, №1. С. 23 - 26.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Куржанский А.Б. (Москва, МГУ)
kurzhans@mail.ru, kurzhans@cs.msu.su

Доклад посвящён новому классу задач математической теории процессов управления, мотивированному прикладными проблемами. В нём приводится постановка и решение задачи целевого управления групповым движением, синтезированного по результатам доступных зашумлённых наблюдений параметров движения. А именно, рассматривается конечное множество подсистем с управлениями, подлежащими выбору при том условии, что по ходу движения к заданному достижимому целевому множеству эти подсистемы попарно не сближаются , но и не слишком отдаляются друг от друга. Предложенные решения опираются на методы динамического программирования при фазовых ограничениях. Для систем с изначальной линейной структурой приводятся подробные соотношения, полученные методами теории двойственности нелинейного анализа.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-4576.2008.1 и РФФИ 06-01-0032.

Литература

1. А.Б.Куржанский. О синтезе управлений по результатам измерений. *Прикладная математика и механика*, т.68, 4, 2004, стр.547-563.
2. A.B.Kurzhanski, I.M.Mitchell, P.Varaiya. Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems.*Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.128, N3, 2006, pp. 499-521.
3. А.Б.Куржанский. Задача управления групповым движением.Общие соотношения. *Доклады РАН*, 2009 (в печати).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ ТИПА БИЕНИЙ ВДАЛИ ОТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Курин А.Ф. (Воронежский госуниверситет)
afkurin@mail.ru

В работе [1] решена задача Коши для уравнения Матье

$$\ddot{z} + [a + q\cos(2t)]z = 0, \quad z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

в третьем приближении асимптотического метода усреднения для нулевой области ($a \approx 0$) и в четвёртом приближении для 1-4 областей ($a \approx 1, 4, 9, 16$) неустойчивости тривиального решения этого уравнения.

Малым параметром является q. Найдено также ограниченное решение в областях устойчивости вблизи границ указанных областей неустойчивости. В настоящей работе в четвёртом приближении метода усреднения найдено ограниченное решение уравнения Матье в виде биений при $a \approx 1/9, 1/4, 9/4, 4/9, 16/9$. Биения обусловлены наличием колебаний с близкими частотами. Биениям соответствуют медленные комбинационные фазы, которые при анализе появляются в третьем и четвёртом приближениях метода усреднения. Система уравнений для амплитуды и медленной фазы, усреднённых по быстрым колебаниям, с точностью до коэффициентов совпадает с системой в работе [1]. Проводится сравнение глубины амплитудной и частотной модуляций при биениях вблизи областей параметрического резонанса и вдали от них.

Литература

1. Курин А.Ф. Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Ж.вычисл.матем.и матем.физ. 2008. Т.48. 4. С.633-650.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТОЧКАМИ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

Курина Г. А., Смирнова Е. В. (Воронеж)
kurina@math.vsu.ru

Рассмотрены задачи оптимального управления без ограничений на управление с критерием качества, который наряду с интегральным членом относительно траектории и управления содержит умноженные на малый параметр квадратичные формы относительно отклонений переменной состояния в фиксированных точках от заданных величин, при этом начальное значение переменной состояния известно. Вырожденная задача является стандартной задачей оптимального управления без промежуточных точек. Допустимые управления являются кусочно-непрерывными функциями, траектории являются непрерывными функциями. При помощи прямой схемы построена асимптотика решения в виде ряда по целым неотрицательным степеням малого параметра. Установлены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению задачи по управлению, траектории и функционалу. Доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим приближением оптимального управления. Для рассматриваемых задач строится асимптотика решения в форме обратной связи, используя асимптотику решений соответствующего операторного уравнения Риккати и вспомогательного линейного дифференциального уравнения. Установлены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению. Найдено минимальное значение функционала.

Также проведен асимптотический анализ задач оптимального управления, уравнение состояния которых представляет собой две системы с последовательными режимами функционирования, где момент переключения с одной системы на другую фиксирован, условия стыковки отсутствуют, а минимизируемый функционал зависит от значений траектории в точках переключения слева и справа и от малого параметра. Значения переменной состояния в начальный и конечный моменты заданы, траектории состояния являются в общем случае разрывными функциями.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты 07-01-00397, 08-06-00302.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Абрамов А.А., Курочкин С.В.
(Вычислительный центр им. А.А.Дородницына Российской академии наук, Москва)
kuroch@ccas.ru

Для ряда объектов, связанных с классическим уравнением Матье, до настоящего времени сохранялись пробелы либо некорректности в их определении и вычислении.

Анализ структуры аналитического продолжения мультипликаторов Флоке и осцилляционных свойств решений позволяет решить следующие задачи:

1. Дать корректное определение собственного значения с произвольным вещественным номером. При этом осцилляционные свойства соответствующих решений уравнения Матье находятся в однозначном соответствии с осцилляционными свойствами последовательностей коэффициентов их представлений посредством рядов Фурье.

2. Устранить неоднозначность в определении характеристического показателя Матье – слагаемое вида “произвольное четное целое” и знак мнимой части.

Все предложенные конструкции допускают эффективную численную реализацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00257).

Литература

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1-3. М.: Наука, 1967.
2. А.А.Абрамов, С.В.Курочкин Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журнал вычислительной математики и математической физики 2007, том 47, №3.

УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Лазарев К.П. (Воронежский госуниверситет)
lazarev_k@mail.ru

Пусть Γ - связный геометрический граф в R^3 (см. [1]), $J(\Gamma)$, $\partial\Gamma$ и $V(\Gamma)$ - множества внутренних, граничных и всех вершин, $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ - множество ребер, $E(a)$ - множество ребер из E, примыкающих к вершине a.

Пусть $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, Γ^0, Γ^0_1, Γ^0_2 - объединение точек всех ребер из E, E_1, E_2 соответственно. Заданы неотрицательные функции $p \in C^2(\Gamma^0)$ и $q \in C^1(\Gamma^0)$ такие, что $\inf\limits_{x\in\Gamma^0_1} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in\Gamma^0_2} q(x) > 0$ и $p(x) \equiv 0$ на Γ^0_2. Введем дифференциальное выражение $l(u)$, имеющее вид $-(q(x)u')'$ на Γ^0_2 и $(p(x)u'')'' - (q(x)u')'$ на Γ^0_1, и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}
&l(u) = f, \ f \in C(\Gamma^0),\\
&u_{\gamma_i}(a) - u_{\gamma_j}(a) = 0, \ \gamma_i, \ \gamma_j \in E(a), \quad i < j \ , \ a \in J(\Gamma),\\
&(p_\gamma u''_\gamma)(a) = 0, \quad \gamma \in E_1(a), \ a \in V(\Gamma),\\
&\sum_{\gamma\in E_1(a)} (p_\gamma u''_\gamma)'(a) - \sum_{\gamma\in E(a)} (q_\gamma u'_\gamma)(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma),\\
&u_\gamma(a) = 0, \quad \gamma \in E(a), \ a \in \partial\Gamma.
\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть любые вершины можно соединить ломанной, состоящей из ребер E_2. Тогда задача невырождена, функция Грина симметрична, непрерывна и строго положительна на* $\Gamma^0 \times \Gamma^0$.

Результат справедлив и при более слабых условиях.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 272с. - ISBN 5-9221-0425-X.*

СМЕШАННЫЕ ГИБРИДНЫЕ СХЕМЫ МКЭ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Лапин А.В. (Казань, Казанский государственный университет)
alapin@ksu.ru

Рассматривается вариационное неравенство с потенциальным квазилинейным эллиптическим оператором второго порядка:

$$u \in K : \int\limits_\Omega g(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla(w-u)dx \geq \int\limits_\Omega f(w-u)dx \quad \forall w \in K.$$

Здесь Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_C \cup \Gamma_D$, $K = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0$ на Γ_D, $u(x) \geq 0$ в Ω, $u(x) \geq 0$ на $\Gamma_C\}$ — выпуклое замкнутое множество, а функция $g(t)t$ удовлетворяет условиям монотонности и липшиц-непрерывности. Это вариационное неравенство аппроксимируется конечномерной седловой задачей с помощью смешанного гибридного метода конечных элементов. При аппроксимации используется теория двойственности и метод множителей Лагранжа. Доказывается однозначная разрешимость и сходимость сеточной задачи, обсуждаются итерационные методы ее решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00449.

Литература

1. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
2. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. N.Y: Springer Verlag, 1991.
3. *Ignatieva M.A., Lapin A.V.* Iterative solution of mixed hybrid finite element scheme for Signorini problem// Comp. Methods in Appl. Math. 2004. V. 4, 2.

О СТРУКТУРЕ МОНОТОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Лаптев Г.И., Лаптева Н.А. (Российский государственный социальный университет)
glaptev@yandex.ru

Монотонные операторы были введены во второй половине прошлого столетия. К настоящему времени заложены основы теории абстрактных монотонных операторов, действующих из банахова пространства X в его сопряженное X^*. Оператор $A : X \to X^*$ называется монотонным, если выполнено соотношение $(Au - Av, u - v) \geq 0$ для всех $u, v \in X$. Доклад посвящен выяснению внутренней структуры монотонных дифференциальных операторов, чему ранее уделялось мало внимания. Приведем некоторые результаты. Типичный монотонный дифференциальный оператор имеет вид $Au = L^*a(Lu)$, где L — линейный оператор, переводящий пространство Соболева в лебегово пространство, L^* — его сопряженный. Нелинейность скрыта в конечномерном функциональном операторе $a(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$, который определен на подходящих функциях $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$. В указанных условиях можно получить следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть оператор a имеет вид*

$$a(y) = (|y|^{p_1}y_1, \dots, |y|^{p_n}y_n)$$

с некоторыми степенями $p_i > -1$. Он порождает монотонный оператор тогда и только тогда, когда все степени совпадают, т.е. $p_1 = \dots = p_n$.

Теорема 2. *Пусть оператор a имеет вид*

$$a(y) = (\lambda_1|y|^p y_1, \dots, \lambda_n|y|^p y_n),$$

где числа λ_i удовлетворяют условию $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Он порождает монотонный оператор тогда и только тогда, когда выполнены соотношения $c_p\lambda_1 \leq \lambda_n \leq C_p\lambda_1$, где константы c_p, C_p зависят только от параметра $p > -1$ и вычисляются явно.

Например, при $p \to \infty$ получаем: $c_p \to 2$, $C_p \to 2$, т.е. при больших значениях p числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ должны отличаться незначительно.

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Левенштам В.Б. (Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, Южный научный центр РАН)
vleven@math.rsu.ru

Метод усреднения, который часто называют методом Крылова-Боголюбова-Митропольского, давно применяется в различных задачах гидродинамики. Обоснование процедуры усреднения для ряда задач динамики вязкой несжимаемой жидкости в высокочастотных силовых полях осуществлено в пионерской работе И.Б.Симоненко [1]. Там, в частности, рассмотрена важная задача о конвекции вязкой жидкости, описываемая системой, одно из уравнений которой (уравнение Навье-Стокса) содержит высокочастотное слагаемое, пропорциональное частоте. В работах [2,3] обоснован базирующийся на методе погранслоя Вишика-Люстерника эффективный алгоритм построения полных асимптотических разложений решений ряда гидродинамических задач того же типа. К на- стоящему времени различными авторами, включая автора доклада с его учениками, выполнен ряд работ по развитию систематической теории метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений (см.[4]),па-раболических уравнений и задач гидродинамики вязкой жидкости, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты. В одной из последних работ докладчика метод усреднения обоснован для некоторого класса уравнений Навье-Стокса в случае начально-краевой задачи. Эти уравнения в рассматриваемом случае содержат полиномиальные нелинейности любой степени (массовая сила может нелинейно зависеть от скорости течения жидкости) и высокочастотные слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты. Доклад посвящен краткому обзору отмеченных выше результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00287 -а).

Литература

1. Симоненко И.Б. Матем.сб., 1972, т.87, 2. С.236-253.
2. Левенштам В.Б. Журн. выч . мат. и мат . физ., 2000, т.40, 9, с.1416-1420.
3. Левенштам В.Б. Дифференц. уравн. ,2001, т. 37, 5, с.696-705.
4. Левенштам В.Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Изд. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, 2008, 366с.

О КЛАССИФИКАЦИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ С ОДНОМЕРНЫМИ АТТРАКТОРАМИ

Левченко Ю.А. (Нижегородский государственный университет им. Лобачевского)
Lev4eno4ka@mail.ru

Пусть f сохраняющий ориентацию диффеоморфизм заданный на трехмерной сфере S^3, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла, неблуждающее множество $\Omega(f)$ которого состоит в точности из одного связного одномерного поверхностного аттрактора Λ [2], принадлежащего трансверсально притягивающему совершенному носителю S, гомеоморфному двумерной сфере и ручно вложенному в S^3; из неподвижных седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{k(\Lambda)}$, каждая из которых принадлежит в точности одной компоненте связности множества $S \setminus \Lambda$; двух источников α_1, α_2, принадлежащих различным компонентам связности множества $S^3 \setminus S$.

Назовем носитель S совершенным, если дополнение $S \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей $\Delta_1, \dots, \Delta_{k(\Lambda)}$, гомеоморфных диску, каждая из которых содержит в точности по одной седловой периодической точке σ_i, $i = \overline{1, k(\Lambda)}$ диффеоморфизма f.

Поверхность S будем называть трансверсально притягивающей, если существует одномерное слоение F^s множества $S^3 \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$ такое, что $W^s(\sigma_i) \in F^s$ и каждый слой слоения F^s отличный от $W^s(\sigma_i)$ трансверсально пересекает (в топологическом смысле) поверхность S в точности в одной точке и принадлежит некоторому слою слоения $N^s = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W^s(x)$.

Аналогично [1] для рассматриваемого класса диффеоморфизмов введено понятие алгебраического представления аттрактора Λ.

Теорема. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_1$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены их алгебраические представления.*

Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи и руководство, а также РФФИ РАН, грант 08-01-00547а за частичную финансовую поддержку.

Литература

1. Гринес В. З. О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами. *Матем. сб.*,188, No. 4 (1997), 57-94.
2. Гринес В. З. Медведев В. С., Жужома Е. В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях. *Мат. зам.*,78, No. 6 (2005), 813-826.

ОПЕРАТОРЫ ДУНКЛА, KZ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ

В.П.Лексин (Коломна, КГПИ)
lexine@mccme.ru

Рассматриваются дифференциально-разностные операторы Дункла, конструируемые по группам порожденным отражениями. Веселов показал [1, 2], что для конечных групп Коксетера и некоторых их деформаций можно предъявить функции, которые являются решениями уравнения ассоциативности (WDVV уравнений). А именно, по неприводимой системе корней $R \subset \mathbf{C}^n$, отвечающей неприводимой коксетеровской группе отражения W, или некоторой деформации этой системы выписывается решение уравнения ассоциативности

$$F(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha, z)^2 \ln(\alpha, z).$$

Интегрируемость специальных уравнений Книжника-Замолодчикова (KZ связностей) играет роль посредника в доказательстве этого факта. Мы распространяем эти результаты на конечные правильно порожденные неприводимые комплексные группы отражений W, используя модифицированное выражение для $F(z_1, \dots, z_n)$, коммутирующие аналоги операторов Дункла [3] для комплексных групп отражений W и связь операторов Дункла с плоскими KZ связностями в векторных расслоениях с групповой алгеброй $\mathbf{C}[W]$ в качестве слоя.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00085 и грантом научных школ НШ-3038.2008.1.

Литература

1. A.P.Veselov, *Deformations of the root systems and new solutions to generalized WDVV equations.* Phys.Lett. A **261**(1999),no. 5–6 297-302.
2. M.V.Feigin and A.P.Veselov, *On the geometry of* $\vee$*-systems.* arXiv:math/0710.5729[math-ph].
4. C.F. Dunkl and E.M. Opdam, *Dunkl operators for complex reflection groups.* arXiv: 0108185[math.RT].

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ СТЕНДОВ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Садовничий В.А. (МГУ, Москва),
Александров В.В. (МГУ, Москва),
vladimiralexandrov366@hotmail.com
Лемак С.С., (МГУ, Москва)
lemaks2004@mail.ru

Для выработки навыков управления сложными системами в экстремальных ситуациях, например управлении подвижными объектами на орбитальной станции, условиях аэрокосмического полета при больших перегрузках, действующих на пилота, очень важное значение получает повышение качества тренировок оператора или пилота на различного рода стендах как динамических, так и компьютерных.

Современный уровень разработок динамических тренажеров предполагает наличие элементов искусственного интеллекта в системе управления таким стендом. В частности, предусматривается наличие системы тестирования качества выполнения заданий оператором при прохождении тренировки.

Разработанная авторами методика максиминного тестирования позволяет получить объективные показатели точности выполнения оператором поставленной задачи при наихудшем поведении факторов, мешающих управлению. Кроме получения оценки, решается задача выработки навыков (и таким образом их коррекция) управления применительно к экстремальным условиям реального полета. В случае стендового тестирования ситуация усложняется, поскольку кроме алгоритмов тестирования требуется разработка алгоритмов динамической имитации, создающих соответствующие условия для сенсоров системы управления (либо для сенсоров космонавта).

Предложен алгоритм тестирования качества стабилизации билинейных дискретно-непрерывных систем, позволяющий получить объективную «мягкую» оценку алгоритму стабилиции как в случае наличия ситуации равновесия в исходной динамической игре, так и в случае ее отсутствия. Рассмотрены примеры применения методики на ксомических тренажерах:

а) управлению спуском КА на базе динамического стенда — центрифуги ЦФ-18, расположенной в центре подготовки космонавтов им. Ю.А. Гагарина;

б) управлению сближением спасательного модуля с орбитальной станцией.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Лискина Е. Ю. (Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина)
e.liskina@rsu.edu.ru; katelis@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathrm{R}^2$, R^2 – двумерное вещественное векторное пространство, A – постоянная 2×2-матрица, имеющая пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ $(\omega > 0)$; $f(x)$ -вектор-функция, компонентами которой являются формы порядка $k \geq 2$ $(k \in \mathrm{N})$ относительно компонент вектора x. Множество $\Omega(\varepsilon_0)$ задано соотношением: $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in \mathrm{R}^2, \|x\| \leq \varepsilon_0\}$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,2}}\{|x_i|\}$. Система (1) на множестве $\Omega(\varepsilon_0)$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Получены условия, при выполнении которых существует окрестность состояния равновесия $x \equiv 0$ системы (1), через каждую точку которой проходит некоторое ненулевое T-периодическое решение системы (1), $T = (1+\lambda)T_0$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. Доказательство основной теоремы опирается на принцип неподвижной точки нелинейного оператора.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДАМИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

Лукацкий А.М.(ИНЭИ РАН, Москва)

Рассматривается подход к исследованию решений уравнений математической физики, основанный на погружении конфигурационного пространства описываемого физического объекта в бесконечномерную группу Ли G. Предполагается, что в алгебре Ли g группы G имеется скалярное произведение $< u, v >$, которое индуцирует на G лево-(или право-) инвариантную метрику в зависимости от физического смысла задачи. Геодезические этой метрики являются решениями уравнений Эйлера на группе Ли G. Изначально этот подход был предложен для группы диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема области течения жидкости, В.И. Арнольдом в 1966 г. и затем развивался рядом авторов для различных уравнений математической физики, [1].

Геометрические характеристики инвариантной метрики на бесконечномерной группе Ли могут служить индикаторами для оценивания турбулентного поведения решений уравнений Эйлера, в частности, отрицательность секционных кривизн инвариантной метрики является признаком экспоненциальной неустойчивости решений уравнений Эйлера.

Вопрос о продолжении решений на бесконечность во времени оказывается связанным с некоторыми структурными свойствами бесконечномерной алгебры Ли g или ее подалгебры h, в ситуациях, когда решения с начальными условиями из h эволюционируют в h, т.е. когда подалгебре $h \subset g$ соответствует вполне геодезическая подгруппа $H \subset G$.

В докладе описанные эффекты анализируются на примерах течений идеальной жидкости типа "бегущей волны", [2]. Методология исследования позволяет перенести ряд результатов на вязкую жидкость, описываемую уравнениями Навье-Стокса.

Исследования выполнены при поддержке фонда РФФИ грант 07-01-00230.

Литература

1. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007, 392 с.

2. Лукацкий А. М. О применении одного класса бесконечномерных групп Ли к динамике несжимаемой жидкости// Прикладная математика и механика. Т. 67, 2003. Вып. 5, С. 784-794.

НАХОЖДЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Львова Т.Л. (Рязанский государственный радиотехнический университет)

m.terehin@rsu.edu.ru

В докладе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$A\dot{x} = Bx + f(t), \tag{1}$$

в которой x – n-мерный вектор, A и B – $n \times n$ постоянные матрицы, $f(t)$ – n-мерная вектор-функция, причем $\det A = 0$.

Предполагаем, что $f(t) = c_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{p_j \in D_j} \left(c_{p_j} \cos\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + \right.$ $\left. + \, d_{p_j} \sin\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right)$ – квазипериодическая вектор-функция со спектром $W = \left\{ 0, \sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \right\}$, $\omega_i \in \mathbf{R}^+$ – несоизмеримые числа, множество $D_j = \left\{ p_j : p_j = \left(k_1^j, \ldots, k_m^j \right), \sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j = j, \; j \in \mathbf{N}, \; k_i^j \in \mathbf{Z}^* \right\}$, где $m \in \mathbf{N}$ некоторое фиксированное число, $\mathbf{Z}^*$ – множество целых неотрицательных чисел.

Решение системы (1) находим в виде тригонометрического ряда со спектром W:

$$x(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(a_{p_j} \cos\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \Big) + b_{p_j} \sin\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \Big) \right). \tag{2}$$

Матрицу A представим, как $A = [colon\,(A_{11}, \, 0), \, colon\,(0, \, 0)]$, где A_{11} – $s \times s$ матрица, $s < n$ и $\det A_{11} \neq 0$. Получим, что ряд (2) тогда и только тогда, является решением системы (1), когда разрешима некоторая система алгебраических уравнений. Для исследования этой системы используем понятие полуобратной матрицы [1]. Доказывается теорема о разрешимости матричного уравнения $B_2 Y_{p_j} = F_{p_j}$. Рассмотрен пример.

Литература

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. – 224 стр.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ОБЩИХ ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ляхов Л.Н. (Воронежский государственный университет)

lyakhov@box.vsi.ru

K_γ-преобразование (Радона-Кипрниянова) определено равенством ([1]) $K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{R_N^+} \delta(p - \langle x, \xi \rangle) \, f(x) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i} \, dx$, где $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$, $R_n^+ = \{x' = (x_1, \ldots, x_n), \; x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, $\gamma_i > 0$.

Однородный многочлен $P^\gamma_m(x)$, $x \in R_N$, порядка m, четный по каждой из переменных $x_1,\dots,x_n$, удовлетворяющий уравнению $\Delta_B P^\gamma_m(x) = 0$, называется *$B$-гармоническим. Весовой сферической функцией* (в.с.ф.) называется сужение B-гармонического многочлена на единичную сферу: $Y^\gamma_m(\theta) = \frac{P_m(x)}{|x|^m} = P^\gamma_m(\theta)$, $\theta = \frac{x}{|x|} \in S^+_N$. Положим $Y^\gamma_0 = 1$. Функции $\{Y^\gamma_m\}$, $m = 0,1,2,\dots$ образуют ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L^\gamma_2(S^+_N)$ с весовым скалярном произведением $(u,v)_\gamma = \int_{S^+_N} u(x)\, v(x)\, (x')^\gamma\, dS$, S^+_N — поверхность единичной сферы в R^+_N [2].

Пусть F_c — косинус-преобразование Фурье, а H_β — преобразование Ганкеля порядка β. Оператор преобразования Сонина порядка ν имеет вил $S_\nu = (2\pi)^{-1} F_c H_\nu$.

Теорема. *Преобразование Радона-Киприянова общей весовой сферической функции* $f(|x|)\, Y^\gamma_m(\Theta) \in S_{ev}(R^+_N)$ *порядка* m *есть снова общая весовая сферическая функция того же порядка и вида:* $K_\gamma[f(|x|)\, Y^\gamma_m(\Theta)](\Theta;p) = \lambda\, \varphi(p)\, Y^\gamma_m(\Theta)$, *где* $\lambda = i^m\, \pi^{\frac{N-n}{2}} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) \cdot 2^{-\frac{N+|\gamma|}{2}+n+m-1}\, \Gamma^{-1}(N+|\gamma|+m)\,, \varphi(p) = S_\nu[f(r)](p)$ *а* S_ν *— оператор преобразования Сонина порядка* $\nu = N + |\gamma| + m - 1$.

Литература

1. Киприянов И.А., Л.Н. Ляхов. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона.// ДАН. 1998.- Т. 360.- №2. С. 157-160.

2. Ляхов Л.Н. Об одном классе сферических функций и сингулярнvх псевдодифференциальнvх операторов. // ДАН, 1983, Т. 272, №4, С. 781-784.

3. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул./ С.Л. Соболев М.: Наука, -1974. 808 с.

4. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции, и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом./ - Воронеж. гос. технол. акад. - Воронеж, 1997. - 144 с.

ЗАВИСИМОСТЬ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОТ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.С. Илькив (НУ «Львовская политехника»)

Т.В. Магеровская (Львовский госуниверситет внутренних дел)

ilkivv@i.ua, v-senyk@mail.ru

В области $\mathcal{D}^p = (0,T) \times \Omega_p$, где Ω_p — p-мерный тор, рассматривается задача Коши

$$D^n_t u + \sum_{j=1}^n a_j(D) D^{n-j}_t u = 0, \tag{1}$$

$$D^j_t u|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j = 0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

где $a_j(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} a_{js} D^s$, коэффициенты a_{js} — комплексные числа, l — приведённый порядок уравнения (1), $u = u(t,x)$ — искомое решения, $\varphi_j = \varphi_j(x)$ — заданные функции.

Получены зависящие от коэффициентов условия разрешимости задачи (1)–(2) и установлена гладкость ее решения в пространствах 2π-периодических по переменной $x = (x_1,\dots,x_p)$ функций.

Вопрос о гладкости тесно связан с малыми знаменателями — дискриминантами многочленов $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^n a_j(k)\lambda^{n-j}$, где $k \in \mathbb{Z}^p$. Специфика малых знаменателей задачи Коши в отличие от других (граничных) задач [1, 2] состоит в том, что они могут обращаются в нуль только вместе с соответствующими числителями дробей, поэтому эти дроби всегда допускают оценку сверху.

С помощью метрического подхода показано, что можно улучшить указанную оценку для „почти всех“ уравнений (1). При этом гладкость решения повышается, если выполняется условие $p < 4l$.

Работа поддержана ГФФИ Украины (договор Ф-25/108).

Литература

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

2. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕР МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ПРИ МНОГОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Малкин М.И. (Нижегородский гос. университет)
malkin@unn.ru

Для семейства разностных уравнений порядка m вида $\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$, с параметром λ предполагается, что при невозмущенном значении параметра λ_0 функция Φ зависит от двух переменных: $\Phi_{\lambda_0}(x_0, \dots, x_m) = \xi(x_N, x_{N+L})$, где $0 \le N, N+L \le m$. Тем самым, невозмущенное уравнение представляет собой обобщенное одномерное отображение (с замедлением времени в $|L|$ раз). Предполагается также, что уравнение $\xi(x,y) = 0$ содержит кусочно-монотонную, кусочно-гладкую одномерную ветвь $y = \varphi(x)$ с положительной топологической энтропией: $h_{top}(\varphi) > 0$. Как показано в [1], во множестве бесконечных в обе стороны решений возмущенного разностного уравнения существует замкнутое в тихоновской топологии инвариантное множество Γ_λ, на котором отображение сдвига имеет топологическую энтропию, аппроксимирующую с любой степенью точности значение $h_{top}(\varphi)/|L|$.

В данном докладе рассматривается построение меры максимальной энтропии для φ и её продолжение до такой инвариантой меры ограничения возмущенной системы на Γ_λ, для которой метрическая энтропия аппроксимирует значение $h_{top}(\varphi)/|L|$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00566, 08-01-00083, 08-01-00547.

Литература

1. Juang J., Li M.-C., Malkin M.I. Chaotic difference equations in two variables and their multidimensional perturbations. Nonlinearity.– 2008. – v.21, 1019 – 1040.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Малюгина М.А. (Воронеж)
Malyugina-vrn@mail.ru

Уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(q\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \kappa\frac{d^2p}{dx^2} + \varepsilon\frac{dp}{dx} + \alpha p + p^3 = 0,$$

на $[0,1]$ при локализизации параметров $\kappa = 5 + \delta_1, \alpha = 4 + \delta_2$, где $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$ — малые параметры, $q(x)$ - функция неоднородности материала, и при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2p}{dx^2}(1) = 0$$

не является потенциальным. Поэтому при изучении ветвлений его решений подход с использованием ключевой функции $W(\xi)$ заменяется изучением ветвлений решения ключевого уравнения $\theta(\xi)$ на координатной плоскости.

Структура ключевой функции при $\varepsilon = 0$, $q = 1$ ранее была исследована в работах Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова [2], при $\varepsilon = 0$ - в работах Костина Д.В. [1], при $q = 1$ - в работе [3]. На основе этого была вычислена главная часть ключевого уравнения, дано локальное описание дискриминантного множества, а также описаны взаимных примыкания раскладов решения.

Литература

1. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки// Докл. РАН, 2008, т. 418, 3, – с. 295–299.
2. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004), с. 3–140.
3. Малюгина М.А., Бифуркационный анализ краевой задачи для ОДУ четвертого порядка в условиях нарушения потенциальности //Математиcкие модели и операторные уравнения. Том 5(2008), с.114-121.

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

Мамадалиев Н. (Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент)

В пространстве $\mathbb{R}^n$ движется точка z согласно системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$; h – фиксированное действительное число; A, B, C, D – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$; $(n \times p)$, $(n \times q)$. Пусть P и Q – непустые компактные подмножества $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$. Векторы $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, $0 \leq t < \infty$ – называются *управляющими функциями* преследователя и убегающего игроков соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено непустое терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, M_1 – подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в $\mathbb{R}^n, \pi$ – матрица оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на подпространство L; В качестве начального множества $N(\mathbf{R}(\cdot))$ берется множество измеримых ветвей многозначного отображения $\mathbf{R}(s)$, $-h \leq s \leq 0$.

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, T]$ значения $u(t)$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, пучка $z(u(\cdot), v(\cdot), N(\mathbf{R}(\cdot)))$ попала на множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t), 0 \leq t \leq T$, принадлежащей пучку $z(u(\cdot), v(\cdot), N(\mathbf{R}(\cdot)))$ при некотором $t = t' \in [0, T]$ имело место включение $z(t) \in M$. Число T называется *временем перевода*.

Рассмотрим геометрическую разность множеств $\pi K(r-h)CP$ и $\pi K(r-h)DQ$ [1-2] $\hat{w}(r) = \pi K(r-h)CP \overset{*}{-} \pi K(r-h)DQ$, $r > 0$. Далее, через $H\left[\tau, N(\mathbf{R}(\cdot))\right]$ обозначим следующее множество $H\left[\tau, N(\mathbf{R}(\cdot))\right] = \pi K(\tau) R(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - s - h) BR(s)\, ds$,

где $K(r)$ – матричная функция, обладающая некоторими свойствами (см.[3]).

Предположение 1. Существуют число $T > 0$, вектор $d \in [M_1 \overset{*}{-} H(T, N(\mathbf{R}(\cdot)))]$ и суммируемая функция $w(r) \in \hat{w}(r)$, $0 \leq r \leq T$, такие, что: 1) функция $\lambda(T, r)$, $0 \leq r \leq T$ и также суперпозиция $\lambda(T, r, v(r))$, $0 \leq r \leq T$, функции $\lambda(T, r, v)$, $0 \leq r \leq T$, $v \in Q$, и произвольной измеримой функции $v(r)$, $0 \leq r \leq T$, являются суммируемыми; 2) выполнено неравенство $d + \int\limits_0^T w(r)dr \neq 0$, $\quad |\xi[T, z_o(\cdot)]| - \int\limits_0^T \lambda(T, r)dr \leq 0$, где

$$\xi[T, z_o(\cdot)] = -d - \int\limits_0^T w(r)dr; \ \lambda(T, r) = \inf_{v \in Q} \lambda(T, r, v); \ \eta[T, z_o(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[T, z_o(\cdot)]}{|\xi[T, z_o(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[T, z_o(\cdot)] \neq 0, \\ 0, & \text{если } \xi[T, z_o(\cdot)] = 0. \end{cases}$$

$$\lambda(T, r, v) = \sup\Big\{\lambda \geq 0 : \lambda\eta[T, z_o(\cdot)] \in \pi K(T-r)CP - \pi K(T-r)Dv - w(T-r)\Big\}.$$

Теорема 1. *Если выполнено сформулированное выше предположение 1, то в игре (1) можно перевести пучок траекторий из множества $N(\mathbf{R}(\cdot))$ на множество M за время $T(N(\mathbf{R}(\cdot))) =$ $= T$.*

Литература

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М: 1988 Т.2. 575 с.
2. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий. //Дифференц. уравнения. Т.27. №2, 1991. С. 219–228.
3. Беллман Р.,Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М: 1967. 547. с.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Мансурова Е.Р. (Йошкар-Ола)

E-mail mansurovka@mail.ru

Для системы

$$L_i u \equiv \begin{cases} \Delta u_i + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}(x,y)u_k = 0, & y > 0, \\ \\ u_{ixy} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}(x,y)u_k = 0, & y < 0, \end{cases}$$

$i = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ в области $D \subset R^2$, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ простой кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезками $AC : y = -x$, $BC : x = 1$ при $y < 0$, рассматривается следующая

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами: $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+)$, $u_{xy} \in C(D_-)$; $L_i u \equiv 0$, $(x,y) \in D_+ \cup D_-$, $i = \overline{1,n}$; $u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$; $u(1,y) = \psi(y)$, $y \in [-1,0]$; $u_y(x,+0) = a(x)v_-(x)$, $x \in (0,1)$, где

$$v_-(x) = D_{0x}^{\lambda} u(x,0) + D_{0x}^{\lambda-1} u(t,-x),\ 0 < \lambda < 1,$$

$a(x)$ – заданная достаточно гладкая числовая функция, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ – заданные достаточно гладкие вектор-функции, $\varphi_i(1,0) = \psi_i(0)$, $v_-(x) = (v_1^-, v_2^-, ..., v_n^-)$, $D_{0x}^{\lambda} u$ и $D_{0x}^{\lambda-1} u$ – соответственно производная и интеграл дробного порядка, $D_\pm = D \cap \{y \gtrless 0\}$.

В работе, следуя [1], доказана единственность решения задачи без каких-либо ограничений на кривую Γ. Разрешимость задачи доказывается методом интегральных уравнений.

Литература

1. Сабитов К.Б. Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. 4. С. 783–786.

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И ОДНОГО ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Стогний В. И., Маркитанов Ю. Н. (НТУУ "КПИ", Киев,Украина), Лагно В. И. (ПГПУ, Полтава, Украина)

valeriy_stogniy@mail.ru, yurmark@rambler.ru, lvi@pdpu.poltava.ua

Для моделирования случайных движений используется уравне-ние

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, \quad u = u(t,x,y), \tag{1}$$

предложенное А.Н. Колмогоровым [1], которое является частным случаем двухмерного уравнения Фоккера-Планка. С использова-нием метода Ли-Овсянникова [2] получено следующее утверждение.

Теорема. *Нетривиальную конечно-параметрическую группу инвариантности уравнения (1) генерируют следующие дифферен-циальные операторы:*

$$e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u,\ e_2 = -t^2\partial_t - (tx + 3y)\partial_x - 3ty\partial_y +$$
$$+(x^2 + 2t)u\partial_u,\ e_3 = \partial_t,\ X_1 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + \frac{1}{6}t^3\partial_y + \frac{1}{2}(y - tx)u\partial_u,$$
$$X_2 = t\partial_x + \frac{1}{2}t^2\partial_y - \frac{1}{2}xu\partial_u,\ X_3 = \partial_x + t\partial_y,\ X_4 = \partial_y,\ X_5 = u\partial_u.$$

Отметим, что дифференциальные операторы симметрии состав-ляют базис восьмимерной алгебры Ли $L_8 = sl(2,\mathrm{R}) \bigoplus L_5$, где $sl(2,\mathrm{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $L_5 = \langle X_1, X_2, \ldots, X_5 \rangle$.

Дальнейшее использование двоек дифференциальных операто-ров (несопряженных двухмерных подалгебр алгебры L_8) позволило провести симметрийную редукцию уравнения (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям и получить ряд точных решений уравнения Колмогорова (1). Двухмерные абелевы подалгебры L_8 были использованы для разделения переменных в уравнении (1).

Также проведена групповая классификация уравнения Колмого-рова с обобщенным коэффициентом сноса и тем же коэффициентом диффузии

$$u_t - u_{xx} + A(x)u_y = 0.$$

Литература

1. Kolmogoroff A.N. Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung).–Ann.Math.–1934, –vol. 35, 2, p. 116-117.

2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных урав-нений.— М.: Наука, 1978. — 400 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мартемьянова Н.В. (г.Самара)

ninamartem@yandex.ru

В прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β - положительные действительные числа, для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} = f(x)$$

исследуется следующая краевая задача.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup \{y=-\alpha\} \cup D_+ \cup \{y=\beta\}),$$

$$u_y \in C^2(D_- \cup D_+); \tag{1}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x), (x,y) \in D_- \cup \{y=-\alpha\} \cup D_+ \cup \{y=\beta\}; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = \chi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\chi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$, $\varphi'(0)=\psi'(0)=0, D_+ = D \cap \{y>0\}$, $D_- = D \cap \{y<0\}$.

Следуя [1,2] в данной работе установлены теоремы о единственности и существовании решения задачи (1) - (6). Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

Литература

1. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1979. Т.15. №7, С.1279 - 1283.

2. *Сабитова Ю.К.* Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. Стерлитамак. СГПА. 2007. 20с.

ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ И РАЗДЕЛЯЮЩИЕ МОДУЛЬ И НАПРАВЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА

Меграбов А. Г. (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск)

mag@sscc.ru

Получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств, связывающих лапласиан Δu ($= \operatorname{div}\operatorname{grad} u$) произвольной гладкой скалярной функции $u(x,y)$ или $u(x,y,z)$, модуль $|\operatorname{grad} u|$ ее градиента и его направление $\bar{\tau}$ ($\operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u|\bar{\tau}$). Направление $\bar{\tau}$ выражается в двумерном случае через угол α, определяемый по $\operatorname{arctg}(u_y/u_x)$ ($\bar{\tau} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты по осям x, y, z), а в трехмерном — через два угла α и $\theta = \arccos(u_z/|\operatorname{grad} u|)$. Основное тождество есть $\bar{Q} \overset{\text{def}}{=} (\Delta u/|\operatorname{grad} u|^2)\operatorname{grad} u = \bar{P}(|\operatorname{grad} u|) + \bar{R}(\bar{\tau})$, где $\bar{P} = \operatorname{grad}\ln|\operatorname{grad} u|$, $\bar{R} = \bar{\tau}\operatorname{div}\bar{\tau} + \bar{\tau} \times \operatorname{rot}\bar{\tau}$, причем в двумерном случае $\bar{R} = \bar{R}(\alpha) = \operatorname{rot}(\alpha\bar{k})$, а в трехмерном $\bar{R} = \bar{R}(\alpha,\theta) = \operatorname{rot}(\alpha\bar{k}) - \cos^2\theta\operatorname{rot}\{\alpha\bar{k} + \operatorname{tg}\theta(\sin\alpha\,\bar{i} - \cos\alpha\,\bar{j})\}$. Оно означает, что для любого векторного потенциального поля $\bar{F} = \operatorname{grad} u$ существует коллинеарное ему векторное поле $\bar{Q} = \bar{P} + \bar{R}$, где поле $\bar{P}$ определяется только модулем поля $\bar{F}$ и является потенциальным, а поле $\bar{R}$ определяется только направлением поля $\bar{F}$ и является вихревым в двумерном случае. Поле $\bar{Q}$ в определенном смысле порождает или содержит разделение потенциального поля $\bar{F}$ по величине и направлению. Символы $(\cdot)$ и $(\times)$ обозначают скалярное и векторное произведение векторов. В двумерном случае из тождеств получены следующие результаты (см. также статьи автора в Докладах РАН, 2004, т. 394, 6; 2004, т. 395, 2).

1. Тождества $\Delta u = ([\operatorname{grad}\ln\sqrt{g} + \operatorname{rot}(\alpha\bar{k})] \cdot \operatorname{grad} u)$, где $g = u_x^2 + u_y^2$, $\Delta\ln\sqrt{g} = \operatorname{div}\bar{Q}$, $\Delta\alpha = -(\operatorname{rot}\bar{Q}\cdot\bar{k})$.

2. Формулы, выражающие гауссову и полную кривизну поверхности с метрикой $ds^2 = n^2(x,y)(dx^2 + dy^2)$ через дифференциальные параметры Бельтрами, а также представление гауссовой кривизны $K^+(x,y)$ поверхности в трехмерном евклидовом ($K^-(x,y)$ в псевдоевклидовом) пространстве, заданной графиком $z = u(x,y)$ ($t = t(x,y)$), в виде дивергенции: $K^\pm = \operatorname{div}\bar{V}_1$, $\bar{V}_1 = \pm g\bar{R}/[2(1 \pm g)]$.

3. Связь между уравнением Монжа — Ампера $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F(x,y)$ и уравнением движения идеальной жидкости для функции тока $u_x(\Delta u)_y - u_y(\Delta u)_x = (\Delta u)_t$: они представимы с помощью одного и того же векторного поля $\bar{V}$ в виде $\operatorname{div} V = 2F$ и $\operatorname{rot}\bar{V} = (\Delta u)_t\bar{k}$ соответственно, где $\bar{V} = -g\bar{R} = (\operatorname{grad} u \times \nabla) \times \operatorname{grad} u$, и др.

К ТЕОРИИ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ "НАСЛЕДСТВЕННОГО"ТИПА

Метрикин В.С. (Нижний Новгород, НИИ ПМК)
E-mail: pmk@unn.ac.ru

При относительном движении двух шероховатых тел согласно гипотезе работы [1], коэффициент трения покоя является монотонно возрастающей функцией времени совместного движения этих тел. В этой связи представляет определенный интерес исследования динамики движущихся относительно друг друга тел с учетом трения **"наследственного"типа**. Такие системы можно охарактеризовать также как системы с "памятью". В настоящей работе рассматривается класс математических моделей систем с "памятью"и с ударными взаимодействиями различных элементов, динамика которых может быть изучена с помощью исследования свойств одномерных и двумерных точечных отображений. Качественные и количественные характеристики хаотических движений изучались с привлечением известных свойств показателя Ляпунова. Проведено разбиение пространства параметров систем на области существования различных типов движений, получены точные аналитические соотношения на параметры систем, определяющие кравнения бифуркационных границ, разделяющих в пространстве параметров области существования различных типов движений (многооборотные стохастические режимы движения, устойчивые периодические режимы движения произвольной кратности) и другие более сложные движения. В частности, доказано существование недостижимых границ, в окрестности которых существует счетное множество периодических режимов движения.

Для более подробного изучения структуры пространства параметров был разработан програмный продукт, который позволяет производить: расчет точечных отображений секущих поверхностей, построение бифуркационных диаграмм, позволяющих отслеживать поведение систем в зависимости от величины основных параметров, построение фазовых портретов динамических систем с памятью.

Литература

1. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журн. Техн. физики. 1944. Т.14. вып.415. С.276–282.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

Жибер А.В. (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа)
E-mail: zhiber@mail.ru
Михайлова Ю.Г. (Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа)
E-mail: mihaylovaj@mail.ru

Одним из классических приемов построения общих решений линейных гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

является каскадный метод Лапласа. Основу этого метода составляет последовательность инвариантов Лапласа и связанные с ней преобразования Лапласа.

Между тем, хотя инварианты и преобразования Лапласа для скалярных линейных уравнений известны уже более сотни лет, для систем линейных уравнений эти понятия, по-видимому, начали изучаться лишь в последнее время (см. [1]– [2]).

Рассмотрим теперь системы линейных уравнений (1). Для систем уравнений (1) с конечной цепочкой обобщенных инвариантов предложена схема построения общего решения [3]. В качестве примеров таких систем уравнений рассмотрены линеаризованные цепочки Тоды серии A_n, B_n, C_n, D_n. Получены явные формулы решения краевых задач с данными на характеристиках.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00440-а.

Литература

1. *Жибер А.В., Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа /УМН. 2001. Т. 56, 1. С. 63–106.
2. *Гурьева А.М., Жибер А.В.* Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды /ТМФ. 2004. Т. 138, 3. С. 401–421.
3. *Жибер А.В., Михайлова Ю.Г.* О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа /Труды Института математики и механики. Екатеринбург. 2007. Т.13, 4. С.74 - 83.

О РЕЗОНАНСАХ В ДВУХЧАСТОТНЫХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ

Морозов А.Д. (Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского)
morozov@mm.unn.ru

Рассматриваются системы с 3/2 и 2 степенями свободы, близкие к нелинейным интегрируемым.

Для систем с 3/2 степенями свободы дается обзор возможных структур резонансных зон (проходимые, частично проходимые и непроходимые; невырожденные и вырожденные). Используется метод усреднения, а также методы качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем. Рассмотрение иллюстрируется на примере уравнения типа Дюффинга-Ван дер Поля.

Если для систем с 3/2 степенями свободы в резонансных случаях усредненные системы двумерные, то для систем с 2 степенями свободы – трехмерные, определенные на полнотории $R^2 \times S^1$. Обсуждаются некоторые результаты по исследованию таких систем. Указывается на возможность существования периодических движений разных типов (предельных циклов 1-го и 2-го родов, однообходных и многообходных), а также петель седдло-фокуса и сложной динамики в их окрестности.

Работа поддержана РФФИ, грант 09-01-00356.

РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

Захаров Г.А., Мукосеев Б.И., Цыганкова К.В. (г. Владивосток, Институт прикладной математики)
admin@iam.dvo.ru

В обычной гидродинамике, в основном, применяется полевой метод описания, который базируется на поле скоростей Эйлера [1]. Одним из авторов был предложен тоже полевой метод описания, но на основе переменных Лагранжа [2]. В этой работе доказывается теорема, что поле скоростей в переменных Лагранжа более полней описывает поведение жидкости, так как скорость состоит из поступательной, деформационной и вращательной составляющих.

В данной работе решается целый ряд задач. Первой задачей является задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе, которая была решена в переменных Эйлера проф. И.С. Громека (1882г.) [3]. Имея решение проф. И.С. Громека и решив эту задачу в переменных Лагранжа, был проведен анализ этих решений, который выявил, что решение на основе поля скоростей в переменных Лагранжа более полней описывает поведение жидкости в трубе, так как учитывается деформационная и вращательная составляющие скоростей, а это порождает, что давление зависит от поперечной ординаты.

Далее была решена задача об истечении вязкой несжимаемой жидкости из круглой трубы. Как выше, она решалась в двух вариантах: первый вариант – в обычных переменных Лагранжа и во втором варианте было использовано поле скоростей в переменных Лагранжа. В первом варианте на основании граничных условий поперечная поступательная скорость равна нулю, т.е. вдоль радиуса трубы. Во втором варианте как и ожидалось происходит полный учет всех составляющих данной задачи. Получены законы взаимодействия струи с окружающим пространством, а также решена техническая задача по очистке поверхности от нефтяных пятен. Все задачи решены аналитически методом преобразования Лапласа.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. Л.–М. ГИТТЛ, 1947.928с.
2. Мукосеев Б.И. Физические поля в переменных Лагранжа. Владивосток. Изд–во Дальнаука, 2009. 383с.
3. Громека И.С. Собрание сочинений. М. Изд–во АН СССР,1952. 296с.

УРАВНЕНИЕ МСГ

Муртазина Р.Д. (Уфа, УГАТУ)
ReginaUFA@yandex.ru

В работе [1] для уравнений синус-Гордон и Цицейки с использо-ванием образующих характеристической алгебры построены диф-ференциальные операторы, переводящие высшие симметрии в сим-метрии меньшего порядка. Обратные к последним являются опера-торами рекурренции для вычисления алгебры симметрий.

Характеристическая алгебра (см. [2]) модифицированного урав-нения синус-Гордон (мСГ)

$$u_{xy} = s(u)b(u_1)\bar{b}(\bar{u}_1), \quad \text{где} \quad b' = -\frac{u_1}{b}, \quad \bar{b}' = -\frac{\bar{u}_1}{\bar{b}} \tag{1}$$

и функция s удовлетворяет соотношению $s'' - 2s^3 - \mu s = 0 \quad (\mu - const)$, порождена образующими

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - s^2 b^2 \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots ,$$

$$Y = sb\frac{\partial}{\partial u_1} + (s'u_1b - s\frac{u_1u_2}{b})\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots.$$

Здесь $u_1 = u_x, \overline{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \overline{u}_2 = u_{yy}, \dots$.

В настоящей работе получен оператор, обратный к оператору $Y^2 + s^2$, который определяет алгебру симметрий уравнения (1).

В случае, если $s'^2 - ss'' + s^4 = 0$, то уравнение (1) точечной заменой приводится к виду

$$u_{xy} = \frac{1}{\cos u}\sqrt{1-u_1^2}\sqrt{1-\overline{u}_1^2} \qquad (2)$$

Это уравнение является интегрируемым по Дарбу. Для уравнения (2) построен оператор, который симметрию переводит в интеграл и обратный оператор, переводящий интеграл в симметрию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00440-а).

Литература

1. Жибер А. В. *Симметрии и интегралы нелинейных дифферен-циальных уравнений* // Дисс. ... докт. физ.–мат. наук. – Уфа.: Институт механики Уфимского научного центра РАН, 1993. – 236 с.

2. Муртазина Р. Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и ха-рактеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2007. – Т. 13. – № 4. – С. 102–117.

О ПРОДОЛЖИМЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н.(г. Вологда, ВоГТУ)

emuhamadiev@rambler.ru , nan67@rambler.ru

Рассматривается нелинейное уравнение Шредингера с начальными условиями

$$\psi''(x) = \left(1 - \frac{\varphi(x)}{x}\right)\psi(x), \quad x > 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = a, \qquad (1)$$

где $\psi(x)$ - волновая функция, $\varphi(x)$ - потенциал, который зависит от $\psi(x)$

$$\varphi''(x) = -\frac{\psi^2(x)}{x}, \quad x > 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = b. \qquad (2)$$

Волновой функцией $\psi(x)$, определенной и ограниченной на правой полуоси $[0, +\infty)$, описывается динамика движения полярона в однородной среде. Для любых чисел a и b существует единственное решение задачи (1),(2).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть при некоторых a и b, где $a \neq 0$, решение задачи (1),(2) продолжимо на правую полуось $[0, +\infty)$. Тогда такое решение обладает следующими свойствами:*

а) существуют и конечны пределы

$$\sigma^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\varphi(x)}{x}\right), \quad \nu = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \psi^2(s)ds,$$

где $\sigma > 0$;

б) функция $\psi(x)$ имеет конечное число нулей, и для числа нулей $N(\psi)$ функции $\psi(x)$ верно неравенство

$$N(\psi) > \sqrt{6}(b-1)/(2\pi|a|);$$

в) для функции $\psi(x)$ при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\psi(x) = (C + o(1))e^{-\sigma x}x^{\nu/(2\sigma)}, \quad \psi'(x) = (-\sigma C + o(1))e^{-\sigma x}x^{\nu/(2\sigma)},$$

где C - постоянное, $C \neq 0$.

ПРОСТРАНСТВО ЛОКАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОСТРАНСТВО В.В. ФИЛИППОВА $A_{ceu}(X)$

Мычка Е. Ю. (г. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
mychkaevg@mail.ru

Устанавливается связь между непрерывными локальными динамическими системами (ЛДС, см. [1]) и пространствами класса $A_{ceu}(X)$ теории В. В. Филиппова . Предлагается способ построения пространства класса $A_{ceu}(X)$ по заданной ЛДС, и, наоборот, по заданному пространству класса $A_{ceu}(X)$ определенным образом строится ЛДС. Предложенный способ построения устанавливает гомеоморфизм между пространством всех ЛДС на локально компактном метрическом пространстве X и пространством $A_{ceu}(X)$. Полученные результаты распространяют теорию В. В. Филиппова ([2] – [6]) на ЛДС.

Кроме того, исследуется строение изолированной стационарной точки (ИСТ) ЛДС на плоскости. В [1] О. Хайек для построения окрестности ИСТ, ограниченной трансверсалью, использует теорию трубок и сечений, разработанную Бебутовым (в оригинале для динамических систем на метрических пространствах). Приведенные Хайеком рассуждения можно легко применить для построения правильной стенки в параболическом секторе, однако, они не подходят для построения правильной стенки в гиперболическом секторе. В связи с этим приводится другое построение сечения, которое в дальнейшем используется для секторов всех типов.

Литература

1. O. Hajek. Dynamical Systems in the Plane // Academic Press, London and New York, 1968.
2. Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. // - М.: Изд-во МГУ, 1993. - 336 с.
3. Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений. // - Успехи математических наук.- т. 48.- 1 1993. - с. 103-154.
4. V. V. Filippov Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations. // - Topology in Nonlinear analysis, Banach center publications, 35, 171-192. 1996. - c. 171-192.
5. V. V. Filippov Basic topological structures of ordinary differential equations. // - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1998.
6. V. V. Filippov Topological structures of ordinary differential equations. // - Open problems in Topology II, Elsevier B.V. 2007. 561-565.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

Наумов О.Ю. (г. Самара)
naumol75@mail.ru

В работе доказана однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения эллиптико-гиперболического типа с оператором

$$Lu(x,y) \equiv \begin{cases} u_{xx} + u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xy}, & y < 0, \end{cases}$$

область гиперболичности которого $\{(x,y)|\ 0 < y < x < l\}$, а область эллиптичности $\{(\rho,\varphi)|\ 0 < \rho < l, 0 < \varphi < \varphi_0\}, 0 < \varphi_0 < \pi$. Краевые условия заданы на границе области эллиптичности и прямой $y = -x$ в области гиперболичности. Условия сопряжения на линии изменения типа $y = 0$ уравнения имеют следующий вид:

$$u(x,0+0) = u(x,0-0), 0 \le x \le l,$$

$$u_y(x,0+0) = \alpha(x) \lim_{y\to 0-0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-x}^{y} (y-t)^{-\lambda} u(x,t)dt,\ 0 < \lambda < 1, 0 < x < l.$$

Доказательство единственности решения задачи проводится с применением принципов внутреннего и граничного экстремума гармонических функций и принципа локального экстремума решения задачи Дарбу[1]. Пользуясь решением задачи Дарбу и условиями сопряжения, исходная задача сводится к смешанной задаче для уравнения Лапласа. Решение смешанной задачи строится методом разделения переменных в виде суммы биортогонального ряда, при доказательстве равномерной сходимости которого использованы результаты работы [2].

Литература

1. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 2003, 255 с.

2. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов. // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №1. С. 177–179.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМАХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ни Минь Кань (Восточно-Китайский Педагогический Университет, КНР)
Mingkang@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \mu^2 y_1'' = f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n, t), \\ \mu^2 y_2'' = f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n, t), \\ \cdots \\ \mu^2 y_n'' = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, t). \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$\begin{array}{ll} y_k(0,\mu) = y_k^0, & k = 1, 2, \cdots, n; \\ y_j'(0,\mu) = z_j^0, & j = 1, 2, \cdots, n-1; \\ y_n'(1,\mu) = z_n^1. & \end{array}$$

В настоящей работе доказано, что задача существует решение с контрастной структурой типа ступеньки и построена равномерно асимптотическкре разложение решения.

Теорема. *При выполнении заданных условий существует решение краевой задачи, имеющее внутренний слой типа ступеньки в окрестности точки $t^* = t_0 + O(\mu)$, представимое следующей асимптотической формулой:*

$$y_k(t,\mu) = \alpha_k^1(t) + \Pi_0 y_k(\tau_0) + Q_0^{(-)} y_k(\tau) + O(\mu), \quad 0 \le t \le t^*,$$

$$\alpha_k^2(t) + R_0 y_k(\tau_1) + Q_0^{(+)} y_k(\tau) + O(\mu), \quad t^* \le t \le 1.$$

Работа выполнена при поддержке: 1. ФГЕН 10671070; 2. Key Laboratory of Geographic Information Science, The Ministry of Education, ECNU, Shanghai, 200062; 3. Supported by Shanghai Leading Academic Discipline Project, Project Number B407

Литература

1. Васильева А.Б. Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений [M]. Москва, Высшая школа, 1990.
2. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) [J]. Автоматика и телемеханика, 1997, 7: 4-32.
3. Васильева А.Б. Контрастные структуры в системах трех сингулярно возмущенных уравнений [J]. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1999, 39(12): 2007-2018.
4. Esipova V.A. Asymptotic properties of solutions of general boundary - value problems for singularly perturbed conditionally stable systems of ordinary differential equations [J]. Differential Equations, 1975, 11(11): 1457-1465.

ВНУТРЕННИЕ И ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Никитин А.Г. (физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова)
a.nikitin@bk.ru

Многие важные практические приложения в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях естествознания описываются математическими задачами для уравнения типа адвекция-реакция-диффузия. Особый интерес представляют решения таких задач, имеющие пограничные и внутренние слои. В настоящее время большой интерес вызывают более сложные модели, которые включают эффекты обратной связи или нелокального взаимодействия. Часто эти модели представлены интегро-дифференциальными уравнениями(см. [1, 2]). В докладе представлены результаты по существованию, асимптотическому приближению и локальной устойчивости решений со стационарными и движущимися внутренними слоями для задач такого типа([3, 4]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-00413.

Литература

1. Pao C.V., Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York and London, 1992.
2. J. Rubinstein and P. Sternberg, Nonlocal reaction.diffusion equations and nucleation, IMA Journal of Applied Mathematics (1992), v. 48(3), p. 249-264
3. Н.Н. Нефедов, А.Г. Никитин, Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае, Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, .5.
4. N.N. Nefedov, A.G. Nikitin, L. Recke, Moving Fronts in Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations, Humboldt-Universitat zu Berlin, Institut fur Mathematik, preprint 2007-22, 17 p.

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Никольский И.М.(МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМиК)
haifly@rambler.ru

В работе рассматриваются неограниченные решения двух уравнений типа

$$u_t = \operatorname{div}(k(u)\operatorname{grad} u) + Q(u). \tag{1}$$

Неограниченными (или развивающимися в режиме с обострением) называются решения, существующие конечное время (на временном интервале от 0 до T) и обращающиеся в бесконечность в момент времени T.

Уравнения типа (1) изучались математиками школы А.А.Самарского и С.П.Курдюмова (см. [1] и библиографию в ней). При соответствующем выборе функций $k(u)$ и $Q(u)$ (1) описывает явления различной природы (процессы электронной теплопроводности, биохимические реакции и т.д.)

В первой части работы рассматривается начально-краевая задача на плоскости для уравнения со степенными нелинейностями:

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta,\ \beta > \sigma + 1; \tag{2}$$

$$u \underset{|\bar{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ u^\sigma \operatorname{grad} u \underset{|\bar{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{3}$$

$$u(|\bar{x}|, 0) = u_0(|\bar{x}|) \geq 0,\ u_0(|\bar{x}|) \in C(R^2),\ u_0(|\bar{x}|) \leq M; \tag{4}$$

Численно исследуются двумерные автомодельные решения. Изучается структура множества этих решений при различных β и σ, а также выход других неограниченных решений на автомодельный режим.

Вторая часть посвящена следующей задаче Коши:

$$u_t = (u\,u_x)_x + (u - u_0)(u - u_1),\ \ u_1 > u_0 > 0; \tag{5}$$

$$u(x,t) = u_0 + g(x),\ g(x) \geq 0,\ \operatorname{mes}\operatorname{supp} g(x) < \infty; \tag{6}$$

Аналитически получены условия на начальную функцию, достаточные для неограниченности соответствующего решения. Исследован процесс локализации решений на фоне u_0.

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. // М.: Наука, 1987*

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Федоров В.Е., Омельченко Е.А.
(Челябинский государственный университет)
kar@csu.ru

Рассмотрим задачу

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \quad h \in \mathcal{U}_r \equiv C([-r,0];\mathcal{U}), \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа с запаздыванием

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_r;\mathcal{F})$ (линейны и непрерывны), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, действует в $\mathcal{F}$), $u_t \in \mathcal{U}_r$, $u_t(s) = u(t+s)$ для $s \in [-r, 0]$.

Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Используя идею сведения уравнения с запаздыванием к эволюционному уравнению [1] и результаты теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим достаточные условия разрешимости задачи (1), (2). Для этого построим оператор $T \in Cl(\mathcal{U}_r^1)$, $Tz = z'$, заданный на области определения

$$\mathrm{dom}T = \{z \in C^1([-r,0];\mathcal{U}^1) : z(0) \in \mathrm{dom}M_1,$$

$$z'(0) = L_1^{-1}M_1z(0) + L_1^{-1}Q\Phi z\}.$$

(Здесь и далее используются обозначения для некоторых операторов и подпространств, существование которых следует из сильной (L,p)-радиальности оператора M [2].)

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_r;\mathcal{F})$, $\mathrm{im}\Phi \subset \mathcal{F}^1$, $Ph \in \mathrm{dom}T$, $(I-P)h \in \mathcal{U}_r^0$, $(I-P)h(0) = 0$. Тогда существует единственное решение $u \in C([-r,+\infty);\mathcal{U}) \cap C^1([0,+\infty);\mathcal{U})$ задачи* (1), (2).

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-96030.

Литература

1. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, Berlin, Heidelberg: Springer – Verlag, 2000.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Орловский Д.Г. (Москва)
odg@bk.ru

В банаховом пространстве E рассмотрим краевую задачу Дирихле для абстрактного диффференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + p, & 0 \le t \le T, \\ u(0) = 0, \\ u(T) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где A замкнутый линейный оператор в E с плотной областью определения $D(A)$, удовлетворяющий условию позитивности: все неположительные числа входят в резольвентное множество оператора A и для некоторой постоянной $M > 0$ и всех $\lambda \ge 0$ справедливо неравенство

$$||(\lambda I + A)^{-1}|| \le \frac{M}{1+\lambda},$$

где I – тождественный оператор в E. Последнее условие означает, что дифференциальное уравнение имеет эллиптический тип.

Теорема. *При любом $\tau \in (0,T)$ решение задачи (1) удовлетворяет тождеству*

$$u(t) = (I - V(t))(I - V(\tau))^{-1}(I - V(T-t))(I - V(T-\tau))^{-1}u(\tau), \tag{2}$$

где $V(t)$ – полугруппа, порожденная оператором $-A^{1/2}$.

Отметим, что формула (2) позволяет решить обратную задачу по определению элемента p, если дополнительно известно значение $u(\tau) = u_0$. В этом случае функция $u(t)$ определяется из равенства (2), а неизвестный элемент p определяется из дифференциального уравнения: $p = u''(t) - Au(t)$ (при любом значении переменной t).

C^1-НЕПЛОТНОСТЬ ОРБИТАЛЬНОГО СВОЙСТВА ОТСЛЕЖИВАНИЯ

Осипов А.В. (СПбГУ)
osipovav@list.ru

Пусть f — гомеоморфизм метрического пространства (M, dist). Обозначим через $O(p,f)$ траекторию точки p в динамической системе, порожденной отображением f. Говорят, что f обладает свойством OSP (соответственно, POTP или WSP), если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $d > 0$, что если для последовательности $\xi = \{x_k\}$ выполняются неравенства

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d \quad \text{при } k \in \mathbf{Z},$$

то найдется такая точка $p \in M$, что

$$\xi \subset N(\epsilon, O(p,f)) \quad \text{и} \quad O(p,f) \subset N(\epsilon, \xi)$$

$$\left(\operatorname{dist}(x_k, f^k(p)) < \epsilon \quad \text{при } k \in \mathbf{Z} \qquad \text{или} \qquad \xi \subset N(\epsilon, O(p,f))\right),$$

где $N(\epsilon, A)$ — ϵ-окрестность множества A.

С.Ю. Пилюгин и О.Б. Пламеневская доказали (см. [1]) C^0-типичность свойства POTP (а значит и свойств OSP и WSP) в том случае, когда фазовое пространство является гладким замкнутым многообразием (в докладе рассматривается именно этот случай). Известно, что в этом случае свойство POTP C^1-неплотно (см. [2]), тогда как свойство WSP C^1-плотно (см. [3]). В докладе доказывается неплотность свойства OSP относительно C^1-топологии. В доказательстве этого результата используется метод косых произведений, разработанный Ю.С.Ильяшенко и А.С.Городецким.

Литература

1. Pilyugin S.Yu., Plamenevskaya O.B., Shadowing is generic. Topology and its Applications, 1999, vol. 97, pp. 253–266.

2. Bonatti Ch., Diaz L. J., Turcat G., Pas de "shadowing lemma" pour les dynamiques partiellement hyperboliques. C. R. Acad. Sci. Paris, 2000, Ser I, Math, vol. 330, 587–592.

3. Crovisier S., Periodic orbits and chain-transitive sets of C^1-diffeomorphisms. Springer Berlin-Heidelberg, 2006, vol. 104, N 1,pp. 87–141.

ТОПОЛОГИЯ БИГАМИЛЬТОНОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Ошемков А. А. (Мех-мат МГУ)
oshemkov@mech.math.msu.su
Болсинов А. В. (Loughborough University)
A.Bolsinov@lboro.ac.uk

Многие из известных интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с различными задачами механики, математической физики, геометрии, могут быть описаны в рамках конструкции, основанной на использовании свойств согласованных скобок Пуассона. Этот подход применялся для явного интегрирования некоторых систем, а также для исследования аналитических свойств их решений.

В докладе будет рассказано о некоторых идеях, позволяющих использовать бигамильтонову структуру интегрируемой системы для исследования топологии ее особенностей. В силу теоремы Элиассона, локальная структура особенности полностью определяется ее типом (т.е. количеством эллиптических, гиперболических и фокусных компонент).

Один из основных примеров согласованных скобок Пуассона — это пучок скобок Пуассона на алгебре Ли, связаный с методом сдвига аргумента. Задача, которая будет обсуждаться в докладе — описать понятия невырожденности и типы особенностей для интегрируемой системы, соотвествующей такому пучку, в терминах алгебр Ли из этого пучка. Некоторые результаты в этом направлении получены для особенностей ранга 0 и коранга 1.

Общие результаты, полученные для произвольных пар согласованных скобок Пуассона, можно применить к исследованию следующих двух конкретных примеров: системы, полученные "обычным" методом сдвига аргумента на полупростой алгебре Ли, и, так называемый, волчок Эйлера–Манакова на алгебре Ли $so(4)$. Для этих двух примеров описание множества критических точек и условий их невырожденности будет дано в достаточно явной форме. Например, будет показано, что в случае компактной алгебры Ли критические точки коранга 1 (т. е. особенности общего положения) для системы, полученной методом сдвига аргумента, образуют устойчивые орбиты пуассонова действия.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Павлова Н. Г. (Российский университет дружбы народов)
E-mail: natasharussia@mail.ru

Рассматривается задача оптимального импульсного управления

$$J = J(x_1, x_2, u, \mu) = W_0(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t), t)dt + \int_{[t_1,t_2]} g^0(t)d\mu(t) \to min,$$

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t)dt + G(t)d\mu(t),\ t \in [t_1, t_2],$$

$$W(x_1, x_2) = 0,\ x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2,\ \mu \in \mathbb{K}.$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ — время, $t_1 < t_2$ заданы, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f — n-мерная, g^0 —k-мерная, G —$n \times k$-мерная, а W — w-мерная вектор-функции (k, n, m, w — натуральные числа), W_0 и f^0 — скалярные функции. Функции W_0 и W предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, функции f^0 и f — дважды дифференцируемыми по x и u для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, а функции g^0 и G — непрерывными.

$$\mathbb{K} = \left\{ \mu \in \mathbb{C}^* \left([t_1, t_2]; \mathbb{R}^k\right) : \int_B \varphi(t) d\mu \geq 0 \ \ \forall \text{ борелевского } B \subset [t_1, t_2],\ \forall\ \varphi \in \mathbb{C}[t_1, t_2] \mid \varphi(t) \in K^0\ \forall\ t \right\},$$

где $K \subseteq \mathbb{R}^k$ — заданный острый выпуклый замкнутый конус, K^0 — его полярный. В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u, \mu) :\ \mu \in \mathbb{K},\ \ u \in L^m_\infty[t_1, t_2]$.

Вводится понятие 2-регулярности, которое играет большую роль при выводе необходимых условий первого и второго порядка для задачи оптимального управления. Для задач оптимального импульсного управления получены необходимые условия экстремума, являющиеся обобщением результата, полученного Е.Р. Аваковым в [1], на случай динамических систем с импульсными управлениями.

Литература

1. Аваков Е.Р. Необходимые условия первого порядка для анормальных задач вариационного исчисления // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т.27, N 5. - С.739-745.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕКУРРЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Панасенко Е. А. (Тамбов)

panlena_t@mail.ru

В докладе рассматривается обыкновенное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1}$$

где $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathbf{R}^n)$. Предполагается, что функция F равномерно непрерывна по t и локально липшицева по x.

Пусть функция $M : \mathbf{R} \to \operatorname{comp}(\mathbf{R}^n)$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $\mathcal{M}$ определяет график этой функции, то есть

$$\mathcal{M} \doteq \{(t, M(t)) \in \mathbf{R} \times \operatorname{comp}(\mathbf{R}^n)\}.$$

Множество $\mathcal{M}$ называется *положительно инвариантным относительно включения* (1), если для любого решения $x(t)$ (в смысле Каратеодори) дифференциального включения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0 \in M(t_0)$, соотношение $x(t) \in M(t)$ имеет место для всех $t \geqslant t_0$. Достаточные условия положительной инвариантности множества $\mathcal{M}$ могут быть сформулированы в терминах функций Ляпунова (см. [1]).

Напомним, что функция $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ называется *рекуррентной*, если $\forall \varepsilon, \vartheta > 0$ множество $\ell(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbf{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} |x(t+\tau) - x(t)| \leqslant \varepsilon\}$ относительно плотно на $\mathbf{R}$ (то есть $\ell(\varepsilon, \vartheta) \bigcap [s, s+\vartheta] \neq \varnothing$ для некоторого $\vartheta > 0$ и всех $s \in \mathbf{R}$).

Теорема. *Пусть множество $\mathcal{M}$ положительно инвариантно относительно включения (1) и функции F, M совместно рекуррентны по t равномерно на компактах в $\mathbf{R}^n$, то есть $\forall \varepsilon, \vartheta > 0$ множество* $\Delta(\varepsilon, \vartheta) =$

$$\left\{ \tau \in \mathbf{R} : \max_{|t|, |x| \leqslant \vartheta} (\operatorname{dist}(F(t+\tau, x), F(t, x)) + \operatorname{dist}(M(t+\tau), M(t))) \leqslant \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на $\mathbf{R}$. Тогда существует рекуррентное решение $x(t)$ включения (1) такое, что $x(t) \in M(t)$ для любого $t \in \mathbf{R}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00305.

Литература

1. *Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

ОБ УПРАВЛЕНИИ ХАОСОМ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Панкратова И. Н. (Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан)
irina.pankratova@math.kz

Взаимодействие двух и более систем, динамика которых описывается одномерным отображением φ_λ с разными числовыми параметрами, приводит к необходимости изучения суперпозиции отображений: $\varphi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \varphi_{\lambda_1}$, где $p > 1$ – число систем. Пусть φ_λ имеет вид $\varphi_\lambda y = \lambda\Phi(y)y$, $\Phi(y) \geq 0$ – непрерывная на отрезке $I_a = [0, a]$ функция и $\lambda \geq 0$. В силу нелинейности отображения φ_λ существуют области параметров $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, при которых система, порожденная суперпозицией $\varphi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \varphi_{\lambda_1}$, становится хаотической (или близка к хаотической). Задача состоит в том, чтобы перевести систему с одного уровня функционирования (например, хаотического) на другой (регулярный или с заданными характеристиками).

Суперпозиции $\varphi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \varphi_{\lambda_1}$ можно рассматривать, как отображения последования F^p, $p \geq 1$, динамической системы F^m, $Fx = \Phi(\|x\|)Ax$, с фазовым пространством $K_a^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \|x\| \leq a\}$ [1]. Здесь L^n – линейное нормированное пространство, $\|x\| = \sum_1^n |x_i|$, $A \geq 0$ – матрица (с неотрицательными элементами).

На примере двумерной системы f^m, $fx = (1 - \|x\|)Ax$, с фазовым пространством K_1^2, имеющей отображения последования вида $f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, показана принципиальная возможность управления сменой типов аттракторов (и/или типов динамики) в системе, порожденной отображением $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$. Здесь $\psi_\lambda y = \lambda(1 - y)y$ – хорошо известное одномерное логистическое отображение [2], $y \in I_1$. Управление в системе $(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})^m$ осуществляется: 1) по начальным данным $y \in I_1$ (резкий переход с одного аттрактора (и/или типа динамики) системы $(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})^m$ на другой); 2) по параметрам (λ_1, λ_2) (приведение системы $(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})^m$ из регулярного режима в регулярный режим того же периода через одно- многократную смену типов аттракторов (и типов динамики) при непрерывном изменении параметров). Объясняется механизм такого управления.

Литература

1. Панкратова И.Н. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, 6. С. 861.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.

О слабой замкнутости множества обобщенных энтропийных решений скалярного закона сохранения

Панов Е.Ю. (Новгородский государственный университет)
Eugeny.Panov@novsu.ru

В полуплоскости $\Pi = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ рассмотрим скалярный закон сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u = u(t, x), \ (t, x) \in \Pi \tag{1}$$

с функцией потока $f(u) \in C(\mathbf{R})$. Напомним (см. С.Н. Кружков [1]), что функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется обобщенным энтропийным решением (о.э.р.) уравнения (1), если

$$\forall k \in \mathbf{R} \quad |u - k|_t + [sign(u - k)(f(u) - f(k))]_x \leq 0 \tag{*}$$

в смысле распределений (в $\mathcal{D}'(\Pi)$). При этом, u является о.э.р. задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbf{R}), \tag{2}$$

если в дополнение к $(*)$ выполнено соотношение $\operatorname{ess\,lim}_{t \to 0+} u(t, x) = u_0(x)$ в $L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Одним из известных приложений метода компенсированной компактности является результат (доказанный в [2] при $f(u) \in C^1(\mathbf{R})$) о том, что слабый предел последовательности о.э.р. уравнения (1) является слабым решением этого уравнения (то есть удовлетворяет (1) в $\mathcal{D}'(\Pi)$). Вопрос, является ли этот предел о.э.р., оставался открытым. В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос. Итак, предположим, что последовательность $u_n = u_n(t, x)$, $n \in \mathbf{N}$ о.э.р. уравнения (1) сходится $*$-слабо в $L^\infty(\Pi)$ к функции $u = u(t, x)$. Тогда справедлива

Теорема. *Предельная функция u является о.э.р. задачи (1), (2) с некоторой начальной функцией $u_0(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00289) и DFG (проект No. 436 RUS 113/895/0-1).

Литература

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Матем. сборник. 1970. Т. 81. 2. С. 228–255.
2. L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations. Nonlinear analysis and mechanics: Heriot. Watt Symposium, vol. 4 (Edinburgh 1979), Res. Notes Math. 39(1979) 136–212.

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА–КАЦА И ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Панюнин Н. М. (НИИСИ РАН)

E-mail nikitasp@rambler.ru

Рассматриваются эволюционные псевдодифференциальные уравнения в пространстве супераналитических функций $\mathcal{A}(X)$ бесконечномерного аргумента с символами из пространства $\mathcal{F}(Y)$ суперпреобразований Фурье распределений на двойственном суперпространстве. Для таких уравнений ставится "слабая" задача Коши и доказывается теорема о существовании ее решений. Строятся представления решений "слабой" задачи Коши интегралом Фейнмана по траекториям в фазовом суперпространстве(формула Фейнмана–Каца). Полученные результаты распространяют на суперслучай результаты работ [3,4]. Кроме того, они обобщают на бесконечномерный случай результаты работы [2]. Изложение ведется на языке функционального суперанализа(ср. [1]).

Автор выражает благодарность О. Г. Смолянову за постановку задачи и полезные обсуждения и Е. Т. Шавгулидзе и Н. Н. Шамарову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Ф.А.Березин. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: МГУ, 1983.
2. А.Ю.Хренников. Суперанализ. — М.: Физматлит, 2005.
3. O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. // J. Math. Phys. 43 (2002)
4. О.Г.Смолянов, Е.Т.Шавгулидзе. Континуальные интегралы. — М.: МГУ, 1990.
5. N.M. Panyunin. Feynman-Kac and Feynman Formulas for Evolution Pseudodifferential Equations in Superspace. //Russian Journal of Mathematical Physics, 2008, vol. 15, no. 4, pp. 511-521

СТРОГИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Ощепкова С. Н.(Белгород)

oshchepkova@bsu.edu.ru

Под стратифицированным множеством будем понимать связное подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа относительно открытых выпуклых многогранников σ_{kj} (стратов), примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. Обозначим через Ω_0 связное открытое подмножество Ω (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$), составленное из упомянутых стратов и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. На Ω_0 можно определить аналог оператора Лапласа. Его выражение в точке $X \in \sigma_{k-1i}$ имеет вид $\nabla \cdot (\nabla u)$, где внешний символ ∇ означает дивергенцию по специальной "стратифицированной мере"на касательных векторных полях; в подробной записи –

$$\nabla \vec{F}(X) = \nabla_{k-1}\vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{\nu} \cdot \vec{F}|_{\overline{kj}}(X).$$

Обозначение вида $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}$ означает примыкание страта σ_{k-1i} к страту σ_{kj}. Детальное определение оператора Лапласа на стратифицированном множестве можно найти в [1]

Решения неравенства $\Delta u \geq 0$ естественно назвать субгармоническими функциями на стратифицированном множестве. В отличие от классического лапласиана определение субгармонической функции в терминах неравенства, связывающего среднее по сферам со значением в центре, на стратифицированном множестве нет. Поэтому доказательство строгого принципа максимума на нем существенно усложняется. В этом случае оно опирается на следующее неравенство, справедливое для субгармонических функций на стратифицированном множестве, в котором $S_r^m(X)$ - объединение пересечений обычной сферы с $(m+1)$-мерными стратами.

$$\sum_{m=0}^{d} r^m \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^m}\int\limits_{S_r^m(X)} u\right) d\mu \geq 0, \tag{1}$$

Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00299.

Литература

1. Ощепкова С.Н., Пенкин О.М. Доклады РАН. - 2007. - Т. 416, 1. - С. 22-25.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ СИСТЕМ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ СОДЕРЖАТ ОБОБЩЕННУЮ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЮ ДИРАКА

Петренко М. П. (Киев, НТУУ "КПИ")

Уравнения в частных производных, содержащие в коэффициентах дельта-функцию Дирака, описывают процессы в системах с распределенными параметрами, которые дополнительно имеют сосредоточенные параметры — сосредоточенные массы, сосредоточенные упругие элементы, точки защемления, точки пересечения упругих тел. Разработан метод точного решения таких задач как задач математической физики, т. е. получены характеристические уравнения, собственные функции, условия их ортогональности и выражения квадрата их норм, позволяющие решить неоднородные задачи и удовлетворить заданным начальным условиям. Получено обобщение условия ортогональности на случай системы двух уравнений. К таким системам сводятся задачи о совместных колебаниях балки или пластины, опирающихся на упругий стержень или совместные колебания двух балок, имеющих общую точку. В качестве примера можно рассмотреть колебания балки, содержащей в точке x_1 сосредоточенную массу m, которые описываются уравнением

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [\rho S + m\delta(x - x_1)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho(x,t),$$

где $p(x,t)$ - внешняя распределённая нагрузка, δ - дельта функция Дирака. Условие ортогональности имеет вид

$$pS\int_0^1 W_k(x)W_n(x)dx + mW_k(x_1)W_n(x_1) = 0, \quad k \neq n,$$

где l - длина балки.

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

Петров А.Г. (ИПМех РАН)
petrov@ipmnet.ru

Квадратная матрица размером $2n \times 2n$ называется симплектической, если она удовлетворяет соотношению [1]

$$A^T I A = I, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Матрица A^T – транспонирована по отношению к A, матрица I удовлетворяет соотношению симплектичности и, кроме того, обладает свойством $I^2 = -E$. Можно показать, что (1) накладывает $2n^2 - n$ независимых ограничений на элементы матрицы A, и поэтому симплектическая матрица должна выражаться через $2n^2 + n$ независимых параметров, ровно столько, сколько элементов у симметричной матрицы S. В связи с этим представляет интерес параметризовать симплектическую матрицу с помощью симметричной. Показывается, что для любой симметричной матрицы S матрица

$$A = (E + IS)(E - IS)^{-1} \tag{2}$$

симплектична, и обратно, для любой симплектической матрицы, удовлетворяющей условию $det(E+A) \neq 0$, матрица

$$S = I(E + A)^{-1}(E - A) \tag{3}$$

симметрична и через нее матрица A выражается по формуле (2).

Отмеченные свойства оказываются полезными при построении канонических преобразований в Гамильтоновой механике. Для построения общего канонического преобразования нужно взять два преобразования с якобиевыми матрицами $E + IS$ и $E - IS$ и умножить первое на обратное второе. В докладе будут изложены и другие факты, например, тождества для определителей якобиевых матриц $\det(E + IS) = \det(E - IS) = 2^{2n}/\det(E + A)$, как симметричная матрица выражается через производящую функцию Пуанкаре [2,3].

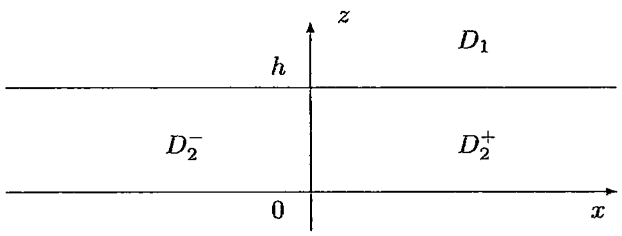
Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 431 с.
2. Петров А.Г. Диф. уравнения. Т. 40. N 5. 2004г. С. 626-638.
3. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том II. М.; Наука, 1972г. 999 с.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ПОЛУОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Плещинский И. Н., Плещинский Н. Б. (Казанский государственый университет)
pnb@kzn.ru

В областях D_1, D_2^-, D_2^+ нужно найти решения уравнения Гельмгольца (с кусочно-постоянным коэффициентом), равные нулю при $z = 0$ и удовлетворяющие условиям сопряжения при $z = h$, $x = 0$, а также условиям на бесконечности. В неоднородных условиях сопряжения на оси z содержатся следы потенциальной функции электромагнитной волны, набегающей на стык.



Найдены собственные волны полуоткрытых волноводных структур дискретного и непрерывного спектров. Введено скалярное произведение в множестве собственных волн и показано, что они образуют ортогональную систему функций.

Установлено, что система собственных волн полная. Для этого рассмотрены переопределенные граничные задачи для уравнения Гельмгольца в полуполосе и в смещенной четверти плоскости.

Искомые решения при $x < 0$ и $x > 0$ представлены в виде интегралов по сложному контуру ¨⌉ ("клюшка с шайбами"), состоящему из мнимой отрицательной полуоси, интервала вещественной оси и конечного числа ее точек.

Доказано, что задача сопряжения полуоткрытых волноводов эквивалентна различным интегральным уравнениям по контуру ¨⌉. Построены и тестированы алгоритмы их численного решения.

Литература

1. Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения задачи сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Матем. - 2007. - 5. - С.63-80.

О НАИЛУЧШЕМ РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЛИНОМАМИ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ

Покровский А. В. (Институт математики НАН Украины)
pokrovsk@imath.kiev.ua

Отображение h множества $\mathbb{Q}^+$, состоящего из всех положительных рациональных чисел, в множество $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$ называется регулятором фундаментальности для вычислимой последовательности рациональных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $|a_p - a_q| < \varepsilon$ при любых p и q, больших $h(\varepsilon)$. Действительное число называется вычислимым, если оно является пределом вычислимой последовательности рациональных чисел, обладающей вычислимым регулятором фундаментальности. Фиксируем какие-либо две представительные вычислительные модели, осуществляющие соответственно вычисления функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$ и из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{N}$, и соответствующие способы программирования. Назовем дуплексом всякую пару (p_1, p_2), в которой p_1 есть программа некоторой последовательности рациональных чисел, а p_2 есть программа некоторого регулятора фундаментальности этой последовательности. Всякий дуплекс задает некоторую вычислимую последовательность рациональных чисел, обладающую вычислимым регулятором фундаментальности, и, следовательно, вычислимое действительное число, являющееся пределом этой последовательности; рассматриваемый дуплекс называется программой этого числа.

Пусть $\mathbb{R}_c$ обозначает множество всех вычислимых действительных чисел. Функция из $\mathbb{R}_c$ в $\mathbb{R}_c$ называется вычислимой, если существует алгоритм, который дает по всякой программе аргумента программу соответствующего значения функции и не дает никакого результата для любой программы вычислимого действительного числа, не принадлежащего области определения функции. Вычислимая функция f, всюду определенная на $[0,\ 1]_c := \mathbb{R}_c \cap [0,\ 1]$, называется равномерно непрерывной, если для нее существует такая вычислимая последовательность натуральных чисел $\{\omega(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, что при любых $x_1, x_2 \in [0,\ 1]_c$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ из $|x_1 - x_2| < 2^{-\omega(n)}$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n}$.

Теорема. *Каковы бы ни были число $n \in \mathbb{N}$ и вычислимая равномерно непрерывная функция f, всюду определенная на $[0,\ 1]_c$, существует вычислимое действительное число $E_n(f)$, являющееся величиной наилучшего равномерного приближения функции f на $[0,\ 1]_c$ алгебраическими полиномами степени не выше n.*

К СВОЙСТВАМ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мешков В.З., Половинкин И.П. (Воронежский государственный университет)
polovinkin@yandex.ru

Пусть $P(w)$ — однородный многочлен порядка m, $w \in \mathrm{C}^n$. Далее, пусть

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, n,\quad D = (D_1, \ldots, D_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = 0. \tag{1}$$

Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим уравнение (1), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathrm{R}^n)$ имеет место равенство

$$\langle \Phi, u \rangle = 0.$$

Теорема. *Для того, чтобы распределение Φ с компактным носителем являлось сопровождающим уравнение (1), необходимо и достаточно, чтобы образ Фурье-Лапласа $\hat{\Phi}(w)$ этого распределения делился нацело на $P(w)$, $w \in \mathrm{C}^n$.*

Эта теорема дает возможность получать новые формулы среднего для уравнений в частных производных. В частности, для гармонической в R^n функции установлена следующая формула среднего:

$$|S_n|\frac{2h^{n+2}}{n^2+2n}u(x^{(0)}) = \int\limits_{|x-x^{(0)}|\le h} (h^2 - r^2)u(x)\,dx,$$

где $|S_n|$ — площадь поверхности единичной сферы в R^n.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. — М.: Мир, 1986. — 464 с.
2. Мешков В.З., Половинкин И.П. К свойствам решений линейных уравнений в частных производных // Черноземный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". — 2007. - Вып. 1 (5). — С. 3 - 11.

О ТРЕХМЕРНОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

В. А. Полунин, А. П. Солдатов (Белгородский гос. университет)
polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Рассматривается трехмерный аналог интеграла типа Коши

$$\phi(x) = \int_\Gamma Q(x, y; y - x)\varphi(y)ds_y,\quad x \in D,$$

где Γ является поверхностью Ляпунова и служит границей области $D \subseteq R^3$. Относительно ядра $Q(x, y; \xi)$ предполагается, что оно однородно степени -2 и нечетно по переменной $\xi \in R^3$. Интегралы такого типа широко встречаются как потенциалы двойного слоя для эллиптических уравнений и систем второго порядка [1] и как обобщенные интегралы типа Коши для эллиптических систем первого порядка [2].

Показано, что при определенных предположениях гладкости функция $\phi(x)$, $x \in D$, определяемая этим интегралом, непрерывна продолжима на границу $\Gamma = \partial D$ области D и для ее граничных значений получен аналог известной формулы Сохоцкого–Племеля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(проекты 07-01-00299, 08-01-92208)

Литература

1. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ., 1957г., 256с.
2. Бицадзе А.В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука, 1972г., 264с.

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ СОСТАВНОГО ТИПА

Полынцева С. В., Сорокин Р. В. (Красноярск, Сибирский федеральный университет)
siriuspsv@mail.ru, rsor@mail.ru

В работе доказана однозначная разрешимость задачи идентификации двух старших коэффициентов параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на различных поверхностях, и задачи определения четырех коэффициентов в системе составного типа. Для доказательства теорем существования и единственности решений данных обратных задач был применен метод, позволяющий, используя условия переопределения, привести исходные обратные задачи к прямым задачам для нагруженных уравнений. Исследование корректности прямых задач проведено методом слабой аппроксимации [1].

Задачи идентификации двух коэффициентов параболических уравнений с условиями переопределения, заданными на двух различных гиперплоскостях были исследованы в работах [2,3].

Разрешимость одной коэффициентной обратной задачи для системы составного типа исследовалась в [4].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (программа развития научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы).

Литература

1. *Белов Ю.Я., Кантор С.А.* Метод слабой аппроксимации. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. – 236с.
2. *Белов Ю.Я., Полынцева С.В.* Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения // ДАН. 2004.-т.396. - N5. - С.583-586.
3. *Полынцева С.В.* Задача идентификации коэффициентов при производной по времени и пространственной переменной // Журнал СФУ:математика и физика. Красноярск. 2008. - т.1 - N3 - С.308-317.
4. *Сорокин Р.В., Шипина Т.Н.* Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае // Вычислительные технологии. 2004. - т.9. - ч.3. - С.59-68.

ЗАДАЧА МОДИФИКАЦИИ ОДНОМЕРНОГО АНАЛОГА МОДЕЛИ ГОЛЬДШТИКА

Потапов Д. К. (Санкт-Петербург)
potapov@apmath.spbu.ru

Рассматривается модификация одномерного аналога математической модели отрывных течений несжимаемой жидкости Гольдштика [1, 2]. Требуется найти дважды непрерывно-дифференцируемую функцию ψ, удовлетворяющую уравнению

$$\psi'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \le \psi \le 0, \\ 0, & \text{если } \psi \ge 0 \end{cases}$$

и граничным условиям $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$.

Модель представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра ε, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается разрывная нелинейность.

Данная работа посвящена построению регуляризации краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда свободный член есть разрывная функция типа Хевисайда.

Показывается, что при $\varepsilon \to 0$ все результаты о решениях (число решений, аналитические выражения норм решений и значений функционала, порождаемого задачей, на них) согласуются с результатами, полученными в [2] для одномерного аналога модели Гольдштика. В силу [3] аппроксиматором вместо $-\frac{\omega}{\varepsilon}\psi$ при $-\varepsilon \le \psi \le 0$ может быть любая функция $f = f(\psi)$, непрерывная на отрезке $[-\varepsilon, 0]$ и удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega$, $f(0) = 0$.

Литература

1. *Гольдштик М.А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости// Докл. АН СССР. - 1962. - Т. 147. - № 6. - С. 1310–1313.

2. *Потапов Д.К.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Известия РАЕН. - Сер. МММИУ. - 2004. - Т. 8. - № 3-4. - С. 163-170.

3. *Потапов Д.К.* Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Известия РАЕН. - Сер. МММИУ. - 2005. - Т. 9. - № 1–2. - С. 159-165.

УСТОЙЧИВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИРИХЛЕ-УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Потапов М. М. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
mpotapov@tochka.ru

Рассматривается система, динамика которой описывается следующей дифференциальной задачей:

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x, \quad 0 < t < T,\ 0 < x < l,$$
$$y|_{x=0} = u_0(t), \quad y|_{x=l} = u_1(t), \quad 0 < t < T,$$
$$y|_{t=0} = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Требуется найти такие граничные управления $u = (u_0(t), u_1(t))$, которые обеспечивают выполнение заданных финальных условий:

$$y|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l.$$

Управления выбираются либо из класса Лебега, либо из класса функций, имеющих первую обобщенную производную по Соболеву. Для численного решения таких задач применяется вариационный метод автора [1], а также дискретный вариант известного HUM-метода Ж.Л.Лионса [2]. Результаты применения обоих подходов сравниваются на серии тестовых примеров с целевыми состояниями $f = (f^0(x), f^1(x))$ различной степени гладкости и на разностных сетках различной плотности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00416) и программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект РНП 2.1.1.1714).

Литература

1. Потапов М.М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365. 5. С. 596.598.

2. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. No. 1. P. 1–68.

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Потапова И. С. (Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина)
m.terehin@rsu.edu.ru

Исследуется система вида

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \tag{1}$$

где $A(t) - n \times n, B(t) - n \times m$ матрицы, непрерывные на множестве $I = (-\infty, +\infty)$.

Устанавливается, что при определенных условиях неособенным линейным преобразованием с постоянной матрицей система (1) приводится к виду

$$\dot{x} = H(t)x + B_1(t)u,$$

в котором $H(t) - n \times n$ треугольная матрица, непрерывная на множестве I.

Управление u определяется согласно равенству

$$u(t) = R(t)v,$$

где $R(t) - m \times n$ матрица, непрерывная на множестве I, $v = colon(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ - постоянный неизвестный вектор.

Предполагается, что элементы матрицы представимы равенством

$$b_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{r} p_{ij}^{(s)} \varphi_s(t), i \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

где $D^{(s)} = [p_{ij}^{(s)}]$, $p_{ij}^{(s)}$ - действительные числа, $\varphi_s(t)$ - некоторые функции, непрерывные на I..

Определяются условия, при которых система (1) является вполне управляемой [1].

Литература

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ БАРОТРОПНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пронина Е. А. (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь)
namekat@gmail.com

Рассматривается начально-краевая задача, порожденная проблемой малых движений баротропной вязкой жидкости в ограниченной области.

Эта задача допускает переформулировку в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве:

$$\frac{dy}{dt} + Ay(t) = f(t), \quad y(0) = y^0, \tag{1}$$

где оператор A после замыкания по непрерывности является равномерно аккретивным максимальным оператором, т.е. $-\bar{A}$ будет генератором сжимающей C_0-полугруппы. С учетом данных свойств оператора A доказана теорема существования и единственности сильного решения задачи Коши (1).

На этой основе установлено существование и единственность сильного решения исходной начально-краевой задачи.

Литература

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989. - 416 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

3. Иванов Ю.Б., Копачевский Н.Д. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). – 1. – 2003. – С. 61-77.

ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА 1-МЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ ПРИ ОБОБЩЁННО-ГЛАДКИХ УСЛОВИЯХ ТРАНСМИССИИ

Прядиев В Л. (Белгород)
Pryadiev@bsu.edu.ru

Пусть N – конечная и ограниченная 1-мерная пространственная сеть, т. е. $N = \bigcup_{i=1}^{p} \gamma_i$, где $\gamma_i := \{\pi_i(\xi) \,|\, \ell_i \leqslant \xi \leqslant m_i\}$, ℓ_i, m_i – фиксированные вещественные числа, $\ell_i < m_i$, $\pi_i : [\ell_i; m_i] \to \mathbb{R}^n$, π_i – непрерывна, причём: 1) если $\ell_i \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant m_i$ и $\xi_2 - \xi_1 < m_i - \ell_i$, то $\pi_i(\xi_1) \neq \pi_i(\xi_2)$, 2) если $j \neq k$, то $\gamma_j \cap \gamma_k = \partial\gamma_j \cap \partial\gamma_k$, где $\partial\gamma_i := \{\pi_i(\ell_i), \pi_i(m_i)\}$. Обозначим $V := \bigcup_{i=1}^{p} \partial\gamma_i$ и зафиксируем $D \subseteq V$.

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \quad (x \in N \setminus V,\ t > 0) \tag{1}$$

при условиях трансмиссии

$$\sum_{i\,|\,\gamma_i\ni x} \alpha_{x,i}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 \quad (x\in V\setminus D,\ t\geqslant 0), \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) := \dfrac{\partial}{\partial \xi}u(\pi_i(\xi),t)\Big|_{\xi=\pi_i^{-1}(x)}$ – при $x\in\gamma_i$, $\alpha_{x,i}$ – фиксированные вещественные числа, причём $\forall(x\in V\setminus D)\,[A(x)\neq 0]$, где $A(x) := \sum\limits_{i\,|\,\gamma_i\ni x}\beta_{x,i}\alpha_{x,i}$, где $\beta_{x,i}=1$ при $x=\pi_i(\ell_i)$ и $\beta_{x,i}=-1$ при $x=\pi_i(m_i)$. Тогда для $x\in V\setminus D$ и достаточно малых $\Delta>0$:

$$A(x)\big[u(x-\Delta,t)+u(x+\Delta,t)\big] =$$

$$= 2\sum_{i\,|\,\gamma_i\ni x}\beta_{x,i}\alpha_{x,i}u\big(\pi_i(\pi_i^{-1}(x)+\beta_{x,i}\Delta),t\big). \tag{3}$$

При $(m_j-\ell_j)/(m_k-\ell_k)\in\mathbb{Q}$ соотношение (3) может быть использовано для численного решения начально-краевых задач для системы (1), (2) (см. в этой связи [1], где рассмотрен случай $\beta_{x,i}\alpha_{x,i}=1$).

Литература

1. Прядиев В. Л., Шаталов С. С. Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Матер. конф. - Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. - С. 206-207.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Пулькина Л. С.(Самара)
louise@samdiff.ru

В сообщении рассматривается задача об отыскании функции $u(x,y)\in C(\bar{Q})\cap C^2(Q)$, удовлетворяющей в прямоугольнике $Q=(0,a)\times(0,b)$ уравнению

$$u_{xy}+(Au)_x+(Bu)_y+Cu=f(x,y) \tag{1}$$

и условиям

$$\int_0^b K(x,y)u(x,y)dy=\varphi(x), \quad x\in[0,a], \tag{2}$$

$$\int_0^a K(x,y)u(x,y)dx=\psi(y), \quad y\in[0,b]. \tag{3}$$

Поставленную задачу можно назвать интегральным аналогом задачи Гурса, но, в отличие от классической задачи Гурса, условий гладкости входных данных недостаточно для существования единственного решения. Показано, что одним из условий однозначной разрешимости задачи (1) - (3) является выполнение неравенства

$$(A_yK-AK_y)(B_xK-BK_x)-C^2\geq 0.$$

Очевидно, это неравенство не выполняется, если $A=B=0$, а $C\neq 0$. Приведен пример, иллюстрирующий эту ситуацию. Однако можно добиться единственности решения задачи и в этом случае при выполнении некоторых дополнительных условий на функцию $K(x,y)$:

$$\left(\frac{K_{xy}+CK}{K}\right)_{xy}\geq 0,$$

$$(K_{yy}K-K_y^2)(K_{xx}K-K_x^2)-(K_{xy}+CK)^2\geq 0.$$

Доказательство существования решения опирается на возможность сведения задачи (1) - (3) сначала к нагруженному интегральному уравнению, а затем - к уравнению Вольтерра.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В. В. Палин, Е. В. Радкевич (Москва, МГУ)
evrad07@gmail.com

Одна из проблем кинетики неравновесных процессов связана с недостаточной информацией о начально-краевых данных большей части неравновесных переменных, которые не имеет интуитивного физического смысла — их нельзя определить из эксперимента. К тому же число неравновесных переменных настолько велико, что числа разумных с физической точки зрения граничных условий недостаточно для постановки смешанной задачи. Тогда что в этом случае начальные данные для задачи Коши и граничные данные для смешанной задачи? По сути, начально-краевые данные большей части неравновесных переменных (моменты высших порядков) мы должны рассматривать любыми! Английскими физиками Чепменом и Энскогом [1] была выдвинута гипотеза, что **для "физически корректных" моделей механики сплошных сред влияние моментов высшего порядка "несущественно"**. Есть ряд постулатов физической корректности — мы не будем на этом останавливаться, для нас существеннен другой факт, что понимать под **влияние моментов высшего порядка "несущественно"** с точки зрения математики [2]. Этой теме будет посвящено содержание доклада.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06-01-00095) и DFG Project 436 RUS 113/895/0-1

Литература

1. *Gui-Qiang Chen, Levermore C. D. and Tai-Ping Luui* Comm. on Pure and Appl. Math., v. XLVII (1994), pp. 787-830
2. *V. V. Palin, E. V. Radkevich* ISSN 1061-9208, Russian J. of Math. Phys., Vol. 15, N 3, pp 401-421(2008)

О ПРИМЕНЕНИИ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Райхельгауз Л.Б. (Воронеж)
jikol_85@mail.ru

По аналогии с неполными (косинус или синус) преобразованиями Фурье преобразование Ганкеля (см. [1], где оно называется одномерным преобразованием Фурье-Бесселя), является неполным, т.к. его ядро $j_\nu(t) = C(\nu)\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$ (J_ν — функция Бесселя первого рода) — четная функция. Оказалось, что при исследовании ряда задач (см. [2]) необходимо ввести „полное преобразование Ганкеля" на основе ядра $\Lambda_\gamma(t) = j_\gamma(t) - ij'_\gamma(t)$, при этом ожидаемая аналогия его с e^{it} и преобразованием Фурье не имеет места. Причина этому весьма принципиальная: полное преобразование Фурье-Бесселя произведения функций не приводит к обобщенным сверткам их образов и к соответствующим операторам обобщенных сдвигов, как это происходит с преобразованиями Фурье и Фурье-Бесселя. Как оказалось, роль сдвигов выполняют операции типа $\frac{d}{dx}T_x^y$, $T_x^y\frac{d}{dx}$, где T_x^y — обобщенный сдвиг, определяемый теоремой произведения j-функций Бесселя: $j_\nu(tx)\,j_\nu(ty) = T_x^y j_\nu(tx)$. Указанные выше операторы вообще не принадлежат к классам обобщенных сдвигов Левитана [3].

В докладе обсуждается возможность применения полного преобразования Ганкеля $\mathfrak{F}_B$ к дифференциальному уравнению вида $\sum a_\alpha D_B^\alpha U = f$, где

$$D_B^\alpha = \begin{cases} B^m, & \alpha = 2m \\ \frac{\partial}{\partial x}B^m, & \alpha = 2m+1 \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Оказалось удобным искать решение в классе обобщенных функций с основными функциями вида $\phi + \phi'$, где $\phi-$ четная функция из пространства Шварца основных функций.

Литература

1. Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сборник, 1977. - Т. 104, 1. - С.49-68.
2. Левитан Б.М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их приложения. М.: ГИФМЛ. 1962. С. 323.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рахманова Л. Х. (г. Стерлитамак)
LouisaR@yandex.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_y - u_{xx} + b^2u = 0, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - b^2(-y)^m u = 0, & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ \ 0 < x < 1,\ \ 3mm - \alpha < y < \beta\}$, где $b \geq 0$, $m > 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_+), \tag{1}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_- \cup D_+, \tag{2}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.

Теорема. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (1) - (4), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathrm{N}$ выполнено условие*

$$\delta_\alpha(k) = \lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \neq 0,$$

где $\gamma_{\frac{1}{2q}}(k) = \frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}$, $\gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) = -\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{-\frac{1}{2q}}$, $\Gamma(\cdot)$ – *гамма функция,* $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ – *функции Бесселя первого рода,* $p_k = \sqrt{b^2 + (2\pi k)^2}/q$, $q = (m+2)/2$, $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$.

При некоторых ограничениях на функцию ψ и число α решение задачи (1) – (4) построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения [1].

Литература

1. *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Диф. уравнения. – 2008. – Т.44. – 9. – С. 1175 - 1181.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ройтенберг Е. Я. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
formal@imec.msu.ru

В банаховом пространстве рассматривается обратная задача для нелинейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными параметрами, для которых известны информационные области.

Найдены достаточные условия существования вспомогательного нелинейного дифференциального уравнения, решение которого дает оценки решения исходного уравнения.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Романов М. С. (МГУ им.М.В.Ломоносова), Самохин В. Н. (МГУП), Чечкин Г. А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
mcliz@mail.ru, vnsamokhin@mtu-net.ru, chechkin@mech.math.msu.su

Известно (см., например, [1]), что стационарное движение вязкой жидкости в пограничном слое можно описать уравнением Прандтля в переменных Мизеса:

$$\nu\sqrt{w}w_{\psi\psi} - w_x - v_0(x)w_\psi = -2s(x)(U - \sqrt{w}) - (U^2)' \tag{1}$$

в области $\Omega = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$w(x,0) = 0;\ w(0,\psi) = w_1(\psi);\ w(x,\psi) \to U^2(x),\ \psi \to \infty. \tag{2}$$

Классическим решением этой задачи назовем функцию w, которая непрерывна вплоть до границы области Ω, положительна при $\psi > 0$, удовлетворяет неравенству $w > c\psi$ при достаточно малых ψ, имеет непрерывные в Ω производные w_x, w_ψ, $w_{\psi\psi}$ и удовлетворяет уравнению (1) с граничными условиями (2).

Предполагается, что $s_\varepsilon(x) = s(x, \frac{x}{\varepsilon})$, где $s(x,\xi)$ — положительная, бесконечно гладкая, 1-периодическая по ξ функция. Обозначим $s_0(x) = \int\limits_0^1 s(x,\xi)d\xi$, а также $\Omega_N = \{0 < x < X, 0 < \psi < N\}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема *Пусть* $w_1 > 0$, $w_1'(0) > 0$, $w_1 \to U$ *при* $\psi \to \infty$; $U' > 0$ *и, кроме того,* U', v_0, s_ε *и* s_0 — *бесконечно гладкие функции;* w_1, w_1' *и* w_1'' *ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера. При малых* ψ *выполнено условие согласования*

$$\nu\sqrt{w}_1 w_{1\psi\psi} - v_0(x)w_{1\psi} + 2U(0)U'(0) + 2s_\varepsilon(0)(U(0) - \sqrt{w_1}) = O(\psi).$$

Тогда при всяком $\varepsilon \geq 0$ *существуют классические решения* w^ε *задачи* (1), (2) *для* $s = s_\varepsilon$ *и* w^0 — *задачи* (1), (2) *для* $s = s_0$.

Кроме того, для всякого N *существует такая константа* C, *что*

$$\sup_{\Omega_N} |\sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}| < C\varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

Литература

1. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. - М.: Наука. Физматлит, 1997.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ 3-ГО РОДА

Рудаков И. А.(Брянский госуниверситет им. И.Г.Петровского)
rudakov-bgu@mail.ru

Рассматривается задача

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = g(x,t,u) + f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ \ t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{2}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Здесь $h > 0, T = 2\pi b/a, a, b \in N, (a,b) = 1$,

$$p(x) \in C^3[0,\pi], \ p(x) \geq d > 0 \ \ \forall x \in [0,\pi]. \tag{4}$$

Обозначим $\eta_p(x) = \frac{1}{2}\frac{p''}{p} - \frac{1}{4}\left(\frac{p'}{p}\right)^2$, $\eta_1 = \min\limits_{[0,\pi]} \eta_p(x)$, $\eta_2 = \max\limits_{[0,\pi]} \eta_p(x)$. В точке π функция p удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} = \frac{2}{h}, \tag{5}$$

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} > \frac{2}{h}. \tag{6}$$

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times [0,T]$, $A_0 = p(x)\partial_{tt} - \partial(p(x)\partial_x\ )_x$, $A = A_0/p(x)$ и Λ множество собственных значений оператора A, действующего на T-периодических по t гладких функциях, удовлетворяющих граничным условием (2) (см.[1]).

Теорема. *Пусть выполнено условие (4), функция* $g \in C([0,\pi] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, T- *периодична по* t *и существуют* $C > 0, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *такие, что*

$$\alpha \leq \frac{g(x,t,u)}{p(x)u} \leq \beta, \ \forall |u| \geq C, [\alpha,\beta] \cap \Lambda = \emptyset.$$

Предположим также, что либо верно равенство (5) *и* $\eta_1 > 0$, *либо имеет место неравенство* (6) *и* $\eta_2 < 0$. *Тогда при нечетном* b *для любой* T - *периодической по* t *функции* $f \in L_2(\Omega)$ *задача* (1) – (3) *имеет обобщенное решение* $u \in C.(\Omega)$.

Аналогичная теорема справедлива для граничных условий $u(0,t) - hu_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Литература

1. И. А.Рудаков. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами// Матем. сб. 2007. Т. 198. N 7. С. 83-100.

ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Власенко Л.А., Руткас А.Г.
(Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина)
Larisa.A.Vlasenko@univer.kharkov.ua Anatoliy.G.Rutkas@univer.kharkov.ua

Рассматривается сингулярное уравнение с импульсными возмущениями

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t,u) + \sum_{k=1}^{n} h_k\delta(t-t_k), \quad t_0 \le t \le T.$$

Здесь A, B – замкнутые линейные операторы из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T = t_{n+1}$. Равенство и операции в (1) понимаются в смысле теории распределений или обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве. Решениями уравнения (1) являются распределения типа функций $u(t) \in L_1(t_0,T;X)$ такие, что $Au(t) \in W_1^1(t_k,t_{k+1};Y)$ для $k = 0,\ldots,n$ и в точках t_k выполняются равенства $(Au)(t_k+0) - (Au)(t_k-0) = h_k$. Сингулярность уравнения (1) означает, что характеристический пучок операторов $\lambda A + B : D_A \cap D_B \to Y$ не имеет регулярных точек, то есть не существует ограниченного обратного оператора $(\lambda A + B)^{-1} \in L(Y,X)$ ни для каких комплексных λ. Импульсные уравнения с регулярным пучком исследовались в [1] (см. также библиографию в [1]). В работе [2] изучались сингулярные уравнения без импульсных возмущений.

Получено несколько условий разрешимости начальной задачи для сингулярного импульсного уравнения (1). Условия разрешимости зависят от типа сингулярности характеристического пучка $\lambda A + B$ – аннулирующей или дефектной [2]. Рассматриваются приложения к импульсным радиотехническим цепям и уравнениям в частных производных с импульсными возмущениями.

Литература

1. Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, N 2. – С. 222-231.
2. Руткас А.Г. Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, N **2**. – С. 225-239.

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ TVD СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рыбакин Б. П. (Кишинев, Институт математики и информатики АН Молдовы)
rybakin@math.md

В данной работе предложен параллельный метод, основанный на схеме типа TVD, для решения трехмерных уравнений газодинамики [1]. Такие уравнения часто используются в астрофизике. Численные схемы, применяемые для их решения, должны максимально точно воспроизводить поведение вещества в окрестностях больших разрывов и достоверно описывать малые возмущения вдали от фронтов ударных волн. Такие требования приводят к необходимости снижения диссипативных свойств численных методов, а это приводит к появлению больших осцилляций за фронтами ударных волн. Для решения таких противоречивых требований используют разностные схемы, которые сочетают в себе повышенную разрешающую способность в областях малых возмущений и монотонность в областях сильных разрывов [2]. Схемы TVD, которые впервые были предложены в [3], обладают нелинейным условием устойчивости [4].

В данной работе рассматривается моделирование магниторотационного взрыва сверхновой звезды в трехмерной постановке. Трехмерная модель коллапса наиболее реалистична и не имеет ограничений, связанных с допущениями, принятыми в 1D и 2D моделях. Для ускорения расчетов по предложенной схеме TVD был построен параллельный алгоритм. Этот алгоритм использует технологии распараллеливания OpenMP и MPI. Проведенные расчеты показали, что алгоритм хорошо распараллеливается на 16 - 24 процессора. В дальнейшем планируется улучшить масштабируемость данного алгоритма.

Данная статья написана при поддержке гранта РФФИ- Молдова (ИКИ АН России - ИМИ АН Молдавии) N40/K.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика.* 1987, 733 стр.
2. Рыбакин Б.П. Чмсленные методы для многопроцессорных ЭВМ. Кишинев, Из-во МолдГУ, 338 стр.
3. A. Harten, *J. Comp. Phys.*. **49**, (1983), pp. 357-365.

4. H. Trac, Ue-Li Pen. A Mopving Frame Algorithm for High Mach Number Hydrodynamics *arXiv:astro-ph.* **24 Sep 2003**, pp. 1-19.

КОНТАКТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ КАК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

А.К. Рыбников (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)
arybnikov@mail.ru

Так называемые преобразования Ли-Бэклунда или, что то же, контактные преобразования высших порядков (см., например, [1]) используются при изучении нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными с целью приведения дифференциальных уравнений к более простому виду. В настоящей работе контактные преобразования высших порядков рассматриваются как дифференциально-геометрические структуры и, следовательно, могут быть определены заданием поля геометрического объекта (фундаментального объекта). На возможность определения дифференцируемых отображений заданием фундаментального объекта указал Г.Ф. Лаптев в докладе на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г. (текст доклада см. в [2]).

Контактные преобразования порядка k ($k = 1, 2, \dots$) представляют собой частный случай диффеоморфизмов между многообразиями голономных k-струй J^kE и J^kE', где E и E' – $(n+1)$-мерные расслоенные многообразия общего типа над n-мерными базами. В настоящей работе мы ограничиваемся для простоты рассмотрением случая $n = 2$.

В работе изучаются дифференциально-геометрические структуры контактных диффеоморфизмов 2-го порядка. Несмотря на то, что мы ограничиваемся контактными преобразованиями 2-го порядка (говоря точнее, контактными диффеоморфизмами многообразий 2-струй), полученные результаты нетрудно распространить на преобразования любого порядка.

Диффеоморфизм между многообразиями 2-струй J^2E и J^2E' (или, говоря по-другому, 2-диффеоморфизм) можно задать уравнениями Пфаффа, связывающими главные (базисные) дифференциальные формы этих многообразий. Главные формы в J^2E линейно выражаются через главные формы в J^2E' (и обратно). Коэффициенты в этих линейных выражениях являются компонентами фундаментального объекта 2-диффеоморфизма. В случае, когда 2-диффеоморфизм – контактный, фундаментальный объект имеет весьма специальный вид. Его компоненты связаны рядом соотношений, которые мы здесь не выписываем ввиду ограниченности объема тезисов.

Нами рассмотрен также случай, когда 2-диффеоморфизм задан явными уравнениями, связывающими локальные координаты многообразий J^2E и J^2E'. Выведены необходимые и достаточные условия, при которых диффеоморфизмы 2-го порядка, заданные явными уравнениями, являются контактными диффеоморфизмами.

В работе систематически используется инвариантный аналитический метод Э. Картана - Г.Ф. Лаптева (см. [3] или оригинальные работы Г.Ф. Лаптева, ссылки на которые можно найти в [3]).

Литература

1. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

2. *Лаптев Г.Ф.* К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрическ. семинара. Т. 6. М.:ВИНИТИ, 1974. С. 37–42.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 9. М.:ВИНИТИ, 1979. С. 5–246.

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕОРИИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ НА СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ, МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рыков Ю. Г. (Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН)
Yu-Rykov@yandex.ru

Рассмотрим следующую систему уравнений в частных производных, которая описывает при упрощающих физических предположениях процесс многокомпонентной фильтрации в пористой среде в случае присутствия обеих фаз и наличия фазовых переходов. При этом обе фазы предполагаются сжимаемыми.

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}\left(x_{i,G}\varrho_G\cdot s + x_{i,L}\varrho_L\cdot(1-s)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x_{i,G}\varrho_G\lambda_G + x_{i,L}\varrho_L\lambda_L\right)\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right] = 0\ ,\ i = 1,\dots,N\ . \quad (1)$$

Здесь N является числом компонент; P обозначает давление; s — насыщенность газовой фазы; $x_{i,G}, x_{i,L}$ — константы равновесия фаз; ϱ_G, ϱ_L — плотности фаз; λ_G, λ_L — мобильности фаз; Φ обозначает пористость, которая, как правило, зависит только от x.

Замыкание системы (1) осуществляется с помощью термодинамических соотношений нормировки $\sum\limits_i x_{iG} = \sum\limits_i x_{iL} = 1$ и, кроме того, с помощью N дополнительных алгебраических соотношений, выражающих собой равенство химических потенциалов фаз. Эти $N+2$ соотношения связывают переменные x_{iG}, x_{iL}, $i = 1, \dots, N$ и выделяют из них $N-2$ независимые переменные, которые обозначим через $y_1, \dots, y_{N-2}$. После этого систему (1) можно переписать в форме вырожденной гиперболической системы законов сохранения относительно неизвестных $s, y_1, \dots, y_{N-2}, P$.

Можно показать, что, вообще говоря, (1) имеет $N-1$ собственных чисел и допускает разрывы в решениях, которые удовлетворяют соответствующим соотношениям Гюгонио. Также возможно сформулировать условия устойчивости ударных волн в форме Лакса-Олейник [1] и рассматривать задачу Римана, которая, как оказывается обладает как гиперболическими, так и параболическими свойствами, см. [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 06-01-00096 и программы 1 ОМН РАН.

Литература

1. P.D. Lax. Regional Conf. Series in Appl. Math. SIAM, 1973.
2. Ю.Г. Рыков. Препринт ИПМ им.М,В,Келдыша № 59, 2007.

О решениях в целом тривиального уравнения Монжа-Ампера

Сабитов И.Х. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
isabitov@mail.ru

Уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x,y) \quad (1)$$

при $f = 0$ называется тривиальным уравнением Монжа-Ампера. Его решения $z = z(x,y)$ описывают поверхности нулевой гауссовой кривизны, которые обычно называются развертывающимися поверхностями. Локальное строение таких поверхностей изучено очень хорошо, а вопрос заключается в исследовании строения их в целом. Если в уравнении (1) правая часть отрицательна, то по известным результатам Н.В.Ефимова и E.Heinz'а решение может существовать только над некоторой ограниченной областью, а если $f = 1$, то по теореме K.Jörgens'а любое решение, определенное над всей плоскостью xy, является полиномом второй степени. В случае $f = 0$ известно, что решение, определенное над всей плоскостью, является цилиндром, а любая коническая поверхность с однозначной проекцией на плоскость xy определяет решение, существующее над плоскостью с одной проколотой точкой. Мы вводим понятие максимального продолжения решения без самопересечений и показываем, что в этом классе поверхностей существуют решения, не являющиеся коническими поверхностями, но определенные над плоскостью с одной проколотой точкой. Кроме того, исследуя поверхности в минимальном классе гладкости C^2, мы показываем, что точки непродолжаемости решения составляют некоторую непрерывную кривую, у которой в каждой точке в контингенции касательных есть направление, совпадающее с направлением приходящей в эту точку образующей, что и представляет собой обобщение свойства горловой линии развертывающейся поверхности быть огибающей семества образующих. Основой исследования является метод описания решений уравнения (1) при $f = 0$, предложенный в работе [1].

Работа поддержана грантами РФФИ №09-01-00179 и Минобразования РФ №3704.

Литература

1. Ushakov V.G. The explicit general solution of trivial Monge-Ampère equation. Comment. Math. Helv., 2000, 75, p. 125-133.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Сабитова Ю.К. (г. Стерлитамак)
ori05@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0\ , \qquad (1)$$

где $K(y) = sgny \cdot |y|^m$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, m, α, β – заданные положительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (1)$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \quad (2)$$

$$u(0,y) = 0, \ \ u(1/2,y) = u(1,y), \ -\alpha \le y \le \beta; \quad (3)$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \ \ u(x,\beta) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le 1, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(1/2) = \varphi(1)$, $\psi(1/2) = \psi(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной работе доказаны теорема единственности и существования решения задачи (1) - (4) на основе спектрального метода решения краевых задач [1].

Литература

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка, Дифференциальные уравнения. 1986. Т.22, 12. С. 2059 — 2071.

Равномерная равносходимость спектрального разложения, соответствующего несамосопряжённому оператору Штурма-Лиувилля для двухслойной среды, с интегралом Фурье на всей действительной прямой

Салтыков Е.Г. (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)
saltykov@cs.msu.su

Теорема. *Если функция $f(z)$ и её первая производная $f'(z)$ абсолютно интегрируемы на R^1, $\sigma_\Lambda(z,f)$ является спектральным разложением функции $f(z)$, соответствующем оператору Штурма-Лиувилля $Lu = -d^2u/dz^2 - k^2(z)u$, опрелённому на R^1, где $k(z) = k_1$, при $z < 0, k(z) = k_2$, при $z > 0$, k_i - комплексные константы, $S_\Lambda(z,f)$ разложение Фурье $f(z)$, тогда при $Im\,k^2(z) > 0$ или $Im\,k^2(z) < 0$ равенство*

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mid \sigma_\Lambda(z,f) - S_\Lambda(z,f) \mid = 0$$

справедливо равномерно по z на всей действительной прямой z.

Спектральное разложение функции $f(z)$ имеет вид

$$\begin{array}{l} \sigma_\Lambda(z,f) = \sum_{i=1,2} \int_0^\Lambda \tilde{f}_i(\mu) u_i(z,\mu) dp_i(\mu), \\ \tilde{f}_i(\mu) == \int_{-\infty}^{\infty} f(z') u_i(z,\mu)\, dz', (i = 1,2). \end{array} \quad (1)$$

Это разложение характеризуется спектральной мерой, представляющей диагональную матрицу-функцию, с отличными от нуля элементами $p_i(\mu)$ и фундаментальными функциями $u_i(z,\mu)$.

Функции u_i являются ограниченными на всей действительной прямой z решениями уравнений Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами

$$-d^2u_i/dz^2 - k^2(z)u_i = (\mu^2 - k_i^2)u_i, \ \mu \in R^1,$$

удовлетворяющими при $z = 0$ условиям сопряжения - непрерывности функций u_i и du_i/dz.

$$dp_i(\mu) = d\mu/(a_i^i(\mu) b_i^i(\mu) \cdot 2\pi).$$

Коэффициенты a_i^i and b_i^i связаны с коэффициентами прохождения и отражения и характеризуют функции u_i.

Спектральное разложение (1) функции $f(z)$ сходится к $f(z)$, когда $\Lambda \to \infty$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Самойленко Ю.И.(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)
yusam@univ.kiev.ua

В докладе рассматривается уравнение Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами вида:

$$u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где

$$a(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функции $a_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, функция $f(\eta)$ принадлежит пространству Шварца.

Предложен алгоритм построения однофазового солитонообразного асимптотического решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами (1)–(2) и установлено асимптотическую оценку для него.

Литература

1. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124.

НОРМЫ СТЕПАНОВА ФУНКЦИЙ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Санина Е. Л., Костин А.В.(Воронежский госуниверситет, Воронежский технический госуниверситет)

Для наших целей норму Степанова [1] запишем в веде, использующим интегрирование по шару $B_n(l)$ радиуса $\frac{l}{2}$, с центром в начале координат $\|f\|_{S_q^{(1)}} = \sup\limits_x \left[\frac{1}{|B_n(l)|}\int\limits_{B_l} |f(x+s)|^q\, ds\right]^{1/q} < \infty$, где $|B_n(l)|$ объем шара радиуса $\frac{l}{2}$ в евклидовом пространстве R_n, а через $S_q^{(1)}$ обозначено пространство Степанова, соответствующее этой норме. Пусть $R_N = R_{m_1} \times R_{m_2} \times \ldots \times R_{m_n} \times R_{N-|m|}$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$ и функция f принадлежит пространству $S_q(R_N)$ и представляет собой функцию с многоосевой симметрией: $f(x){=}f(r_1,r_2,\ldots,r_n,x'')$, $x'' \in R_{N-|m|}$, $r_1{=}\sqrt{x_1^2{+}\ldots{+}x_{m_1}}$, $r_2{=}\sqrt{x_{m_1+1}^2{+}\ldots{+}x_{m_1+m_2}}$, $\ldots$, $r_n{=}\sqrt{x_{|m|-m_n+1}^2{+}\ldots{+}x_{|m|}}$. Для таких функций нормы Степанова вычисляются по формуле

$\|f\|_{S_{q,l_1}} = \frac{\prod_{i=1}^n |S_{m_i}|}{|B_N(1)|} \times$

$\times \sup\limits_{(r,x'')\in R^+_{N-|m|+n}} \left[\int\limits_{B^+_{N-|m|+n}(l)} T_r^\rho |f(\rho,x''{+}y'')|^q \prod_{i=1}^n \rho_i^{m_1-1}\, d\rho dy''\right]^{1/q}$, где $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n)$, $\rho_i = (\sum y_j^2)^{1/2}$, $R^+_{N-|m|+n} = \{(r,x'') = (r_1,\ldots,r_n,x''), r_1 > 0, r_2 > 0,\ldots, r_n > 0\}$, T_r^ρ — многомерный обобщенный сдвиг $T_r^\rho : f \to T_r^\rho f(\rho,y'') = T_{r_1}^{\rho_1}\ldots T_{r_n}^{\rho_n} f(\rho,y'')$,

$T_{r_i}^{\rho_i} f(\rho,y'') = \frac{\Gamma(\frac{m_i}{2})}{\Gamma(\frac{m_i-1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} \times$

$\times \int\limits_0^\pi f(\rho_{1,i-1},[\rho_i \to r_i](\alpha_1),\rho_{i+1,n},y'')\, \sin^{m_i-2}\alpha_i\, d\alpha_i$ $\rho_{k_1,k_2} = (\rho_{k_1},\rho_{k_1+1},\ldots,\rho_{k_2})$, $[\rho_i \to r_i](\alpha_i) = \sqrt{\rho_i^2 + r_i^2 - 2\rho_i r_i \cos\alpha_i}$.

Литература

1. Костин А.В., Костин В.А. К теории функциональных пространств Степанова. Воронеж, ВГУ. 2007. 259 с.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ УРАВНЕНИЙ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Сапронов Ю.И. (Воронеж, ВорГУ)
yusapr@mail.ru

Цель сообщения — изложение новой методики дискриминантного анализа решений фредгольмовых уравнений (на банаховом пространстве) с круговой симметрией ($SO(2)$–эквивариантностью), бифурцирующих из изолированной особой точки. В качестве приложения предлагается процедура вычисления дискриминантного множества и амплитуд периодических решений, бифурцирующих с резонансом из точек покоя дифференциальных уравнений достаточно широкого класса, включающего в себя уравнение колебаний упругой балки на упругом основании, нелинейные уравнения С.Л. Соболева, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение Навье–Стокса и др. Методологической основой представленных в докладе результатов исследования является спектральный метод Ляпунова–Шмидта [1] – [3], оснащенный элементами теории особенностей гладких отображений [4].

Литература:

1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л., Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3-140.

2. Sapronov Yu.I., Darinskii B.M. Discriminant sets and layerings of bifurcating soluions of fredholm equations// Journ. of Math. Sc. Vol. 126, N 4. 2005. P.1297-1311.

3. Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Резонансные бифуркации решений фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и нелинейная динамика// Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. 2008, 1. - С.184-194.

4. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн–Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. – 672 с.

OSCILLATIONS IN QUASI-LINEAR SYSTEM WITH OPERATOR OF THE DIFFERENTIATION ON DIAGONALS OF MULTIVARIATE TIME

Sartabanov Zh.A, Kulzhumiyeva A.A. (Aktobe State University by Zhubanov)

aiman-80@mail.ru

In report is considered question about existence periodic on arguments $\tau \in (-\infty, +\infty) = R, t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ and $\sigma = t - e\tau$ solutions $x(\tau, t, \sigma)$ of systems of the type

$$D_e x = P(\tau, t, \sigma)x + \mu f(\tau, t, \sigma, x, \mu) \tag{1}$$

with operator $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ – differentiations on diagonals of space multivariate variables (τ, t) and small parameter $\mu > 0$, where $e = (1, ..., 1)$ – m-vector, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – vector, $\langle , \rangle$ – sign of the innerproduct, $P(\tau, t, \sigma)$ – $n \times n$-matrix, $f(\tau, t, \sigma, x, \mu)$ – n-vector-function, $x = (x_1, ..., x_n)$ – vector.

Meet the condition of periodicity and of smoothness:

$$P(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega) = P(\tau, t, \sigma) \in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R \times R^m \times R^m), \tag{2}$$

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega, x, \mu) =$$
$$= f(\tau, t, \sigma, x, \mu) \in C^{(0,1,1,1,0)}_{\tau,t,\sigma,x,\mu}(R \times R^m \times R^m \times R^n \times I), \tag{3}$$

where $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, $k = (k_1, ..., k_m) \in Z^m$ – multitude of integer number vectors, $I = [0, \mu_0]$, $\mu_0 = const > 0$.

At condition (2) and (3) problem of Koshi for (1) with initial condition $x|_{\tau=0} = u(t) = u(t + k\omega) \in C^{(1)}_t(R^m)$, $k \in Z^m$ has unique solution. It is expected that linear system, got from (1) under $\mu = 0$ has not periodic on (τ, t, σ) solutions, except zero.

On base of the condition periodicity of solutions of the system (1) and generalised of theorem about tacit function are fixed sufficient conditions of existence unique periodic on (τ, t, σ) solution of the system (1), which applies to zero under $\mu \to 0$.

Work is executed under financial support of the Fund of science MES RK (No1.6-11(1.6.1-11)).

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Сафаров Д.С.(КГУ им. Н. Хусрава, Республика Таджикистан)

shavkat58@mail.ru

Будем искать двоякопериодические, с основными периодами h_1, h_2, $Im\frac{h_1}{h_2} \neq 0$, решений уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z = 0 \tag{1}$$

где $q(z)$ – двоякопериодическая с периодами h_1, h_2, и $|q(z)| \leq q_0 < 1$.

Некоторый гомеоморфизм $\omega(z)$ плоскость C_z на плоскость C_ω уравнения (1) будем называть основным квазипериодическим гомео- морфизмом, с периодами h_1, h_2, если $\omega(z)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z + m_1h_1 + m_2h_2) = \omega(z) + m_1\widetilde{h}_1 + m_2\widetilde{h}_2,$$

m_1, m_2 – целые числа, $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2$ такие, что $Im\frac{h_1}{h_2} \neq 0$. Здесь не исключено случаи, когда $\widetilde{h}_1 = h_1, \widetilde{h}_2 = h_2$.

Доказывается, что при некотором условии на $q(z)$ уравнение (1) имеет единственный основной квазипериодический гомеоморфизм $\omega(z)$ (о.к.г $\omega(z)$) с периодами h_1, h_2. Числа $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2$ – вообще зависят как функционал от функции $q(z)$. При этом решетка $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2\}$ плоскости C_z переходит в решетку $\Gamma' = \{m_1\widetilde{h}_1 + m_2\widetilde{h}_2; m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ плоскости C_ω. Фундаментальная область $C_z\backslash\Gamma = \Omega$ с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$ отображается квазикомформно в фунда- ментальную область $C_\omega\backslash\Gamma' = \Omega'$ с вершинами $0, \widetilde{h}_1, \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2, \widetilde{h}_2$.

Под обобщенным эллиптическим функциям с периодами h_1, h_2 понимается любое двоякопериодическое решение (1) с периодами h_1, h_2 представляемое в виде

$$w(z)\Phi(\omega(z)),$$

где $\Phi(\omega)$ – эллиптическая функция на плоскости о.к.г. $\omega(z)$ с основными периодами $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2$. На плоскости о.к.г. $\omega(z)$ можно определить обобщенную функцию Вейерштрасса $\widetilde{\mathcal{P}}(z) = \mathcal{P}(\omega(z))$, где $\mathcal{P}(u)$ – пе функция построенная на периодах $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2$. Из свойств решений уравнения (1) и функции $\mathcal{P}(u)$ следует, что все обобщенные эллиптические функции с фиксированными основными периодами h_1, h_2 образуют алгебраическое поле с двумя образующими $\widetilde{\mathcal{P}}(z)$ и $\frac{\widetilde{\mathcal{P}}_z(z)}{\omega_z(z)}$.

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Сафаров Д.Х. (ТНУ, г. Душанбе, Республики Таджикистан)
safarovdh@mail.tj

Рассмотрим систему уравнений относительно вещественной вектор – функции $u(t, x) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\triangle u + \lambda graddivu, \qquad (1)$$

где ρ и λ – вещественные постоянные, $\triangle$, $grad$, div – соответственно операторы Лапласа, градиента и дивергенции по $x \in R^n$. Характеристический символ системы имеет вид

$$\sigma(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) = (\rho\xi_0^2 + |\xi|^2)^{n-1}(\rho\xi_0^2 + (1-\lambda)|\xi|^2),$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$.

Следовательно, при $\lambda < 1$ эта система эллиптична, если $\rho > 0$ и гиперболична, если $\rho < 0$. При $\lambda > 1$ и любом $\rho \neq 0$ система (1) не подлежит традиционной классификации классических систем, т.е. она является неклассической системой. В первых двух случаях система (1) более или менее хорошо изучена. В том случае, когда система (1) неклассического (составного) типа (см. [1,2,3]) представляет интерес исследование задач как в неограниченных, так и в ограниченных областях с краями. Например, если $\rho > 0$, $\lambda > 1$, тогда можно доказать, что для системы (1) корректна в полупространстве
$R_+^{n+1} = \{(t, x) : t \geq 0, x \in R^n\}$ задача с начальными условиями

$$u(0, x) = f(x), \quad divu_t(0, x) = g(x).$$

Если же $\rho < 0$, $\lambda > 1$, то для системы (1) корректна в полупространстве R_+^{n+1} задача с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad rotu_t(0, x)\psi(x).$$

Литература

1. Джураев А.Д. Методы сингулярных интегральных уравнений.М.: Наука, 1987, 415с.

2. Сафаров Д.Х. Многомерные неклассические системы уравнений с частными производными. Душанбе: Дониш, 1996, 230с. 3. Safarov D. Kh. Non – classical systems of equations. Dushanbe: Donish, 2008, 431p.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сафин Э.М. (г. Стерлитамак, Россия)
Eldar4u@rambler.ru

В области $D = \{(x, t)| \ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = f(x, t), \quad (1)$$

где $Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx}, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0, \end{cases}$ $f(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0, \end{cases}$

α и β – заданные положительные действительные числа.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. *Найти в области D функции $u(x,t)$, $f(x,t)$ удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}), \quad u_t(x,t) \in C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+), \quad (2)$$

$$f(x,t) \in C(D_- \cup D_+), \quad (3)$$

$$Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-, \quad (4)$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \quad (5)$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u_t(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le, \quad (6) x \le 1,$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,, \quad (7)$$

где φ, ψ и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

В работе методом спектрального анализа установлен следующий критерий единственности решения задачи (2) — (7).

Теорема. *Если существует решение u(x,t) и f(x,t) задачи (2) — (7), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия $\pi k + \sin \pi k\alpha - \pi k \cos \pi k\alpha - e^{-\pi^2 k^2 \beta} \sin \pi k\alpha \ne 0$ при всех $k \in N$.*

При некоторых ограничениях на функции φ, ψ, g и число α само решение построено в виде суммы ряда по полной системе собственных функций соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ N ДЛЯ ОДНОГО B - ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

Сафина Р.М. (Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет, Казань, Россия)

rimma77705@mail.ru

Пусть E_3^{++} – четверть $x_1 > 0$ и $x_3 > 0$ трехмерного евклидова пространства E_3, D – область в E_3^{++}, ограниченная поверхностью $\Gamma \subset E_3^{++}$ и частями Γ_0 и Γ_1 соответственно координатным плоскостям $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$.

Рассмотрим B - эллиптическое уравнение

$$\Delta_B(u) \equiv B_{x_1}(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \qquad (1)$$

где $B_{x_1} = x_1^{-k} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$ – оператор Бесселя, $k > 0$ – постоянная.

Задача N. *Требуется найти четную по x_1 функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям*

$$1) u \in C^2(D) \cap C(\bar{D}); \quad 2) \Delta_B(u) = 0, x \in D;$$

$$3) u|_\Gamma = \varphi(\xi), \xi \in \Gamma, \varphi \in C(\Gamma); \quad 4) \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \nu(x'), \nu(x') \in C(\Gamma_1).$$

Теорема 1. *Задача N не может иметь более одного решения.*

Доказательство следует из теоремы о принципе максимума.

Теорема 2. *Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с координатными плоскостями прямые углы, то задача N при $\varphi \in C(\Gamma)$, $\nu(x') \in C(\Gamma_1)$ имеет единственное решение и решение может быть представлено в виде*

$$u(x) = -\iint\limits_{\Gamma_0} \nu(\eta') \left[\iint\limits_{\Gamma} \varepsilon(\eta', 0; \xi) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, x) \xi_1^k d\Gamma - \varepsilon(\eta', 0; x) \right] \eta'^k d\eta' -$$

$$- \iint\limits_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, x) \xi_1^k d\Gamma,$$

где $G(\xi, x) = \varepsilon(\xi, x) + q(\xi, x)$, $\varepsilon(\xi, x)$ *– фундаментальное решение уравнения (1),* $q(\xi, x)$ *– регулярное решение уравнения (1) всюду в области* D.

Доказательство проводится методом теории линейных интегральных уравнений.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА: СЛУЧАЙ НЕИЗВЕСТНОГО ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СОСТАВНОГО ВИДА

Сафиуллова Р.Р. (Стерлитамакская государственная педагогическая академия)
Regina-SAF@yandex.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n, $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_1(x,t)$, ..., $h_m(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$, ..., $q_m(x)$ связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + b(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t).$$

В качестве условий переопределения в рассматриваемой задаче предлагаются либо условия

$$u(x, t_k) = 0, \quad k = 1, ..., m, \quad 0 < t_1 < ... < t_m \leq T,$$

либо же условия

$$u(x, t_i) = 0, \quad u_t(x, t_i) = 0, \quad 0 < t_1 < ... < t_{m_1} \leq T,$$

$$u(x, t_j^*) = 0, \quad 0 < t_1^* < ... < t_{m_2}^* \leq T, \quad t_i \neq t_j^*,$$

где $i = 1, ..., m_1$, $j = 1, ..., m_2$, $2m_1 + m_2 = m$.

Помимо условий переопределения, задаются также естественные условия первой или второй начально-краевой задачи.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и устойчивости регулярных решений.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ

Сахаров А.Н. (Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия)
ansakharov2008@yandex.ru

В докладе рассматривается задача о топологической эквивалентности линейных расширений минимальных потоков на компактных метрических пространствах, т.е. потоков на $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ вида

$$F^t(\varphi, x) = (\varphi_t, X(t, \varphi)x), \quad \varphi \in \mathcal{T}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $\{\varphi_t\}$ – минимальный поток на компактном метрическом пространстве $\mathcal{T}$, $X(t,\varphi)$ – линейный автоморфизм $\mathbb{R}^n$. Отображение $X(t,\varphi)$ удовлетворяет при всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{T}$ соотношению $X(t+s, \varphi) = X(t, \varphi_s)X(s, \varphi)$ и назывется коциклом над потоком $\{\varphi_t\}$, число n называется размерностью коцикла $X(t,\varphi)$. Пусть $X(t,\varphi)$, $Y(t,\varphi)$ – два гиперболических коцикла размерности n над потоком $\{\varphi_t\}$. Если пространство $\mathcal{T}$ сводится к точке, то гиперболические коциклы топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\dim W_X^s = \dim W_Y^s$ ($\dim W_X^u = \dim W_Y^u$). Здесь $W_{X,Y}^s$ ($W_{X,Y}^u$) – устойчивое (неустойчивое) подрасслоение коцикла $X(t,\varphi)$, $Y(t,\varphi)$ соответственно. В общем случае это условие не будет достаточным, так как инвариантные поддрасслоения линейных расширений могут быть топологически нетривиальными [1] (однако, в [2] доказывается теорема, которая утверждает, что эти условия достаточны). Сопоставим линейному расширению проективный поток $\{P^t\}$, действующий на пространстве $\mathcal{T} \times \mathbb{RP}^{n-1}$ [3]. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Линейные расширения потока* $\{\varphi_t\}$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически эквивалентны соотвествующие им проективные потоки.*

Доказательство теоремы основывается на результатах Селгрейда о структуре множеств Морса проективных потоков [3].

Автор благодарит РФФИ за финансовую поддержку, грант 08-01-00547.

Литература

1. Былов Б.Ф, Виноград Р.Э., Лин В.Я, Локуциевский О.В. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев. Наукова думка. 1977. С. 54–61.

2. Ayala V., Colonius F., Kliemann W. Journal of Dynamical and Control Systems. 2007. V. 13. n. 3. P. 337–362.
3. Selgrade J. // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 203. P. 359–390.

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

Сачков Ю.Л. (Институт Программных Систем РАН)
sachkov@sys.botik.ru

Инвариантная субриманова задача на группе движений плоскости — это задача оптимального управления, которая формулируется следующим образом. По заданным двум точкам на плоскости и двум векторам в этих точках требуется найти кривую, выходящую из первой точки с первым касательным вектором и приходящую во вторую точку со вторым касательным вектором. При этом кривая должна иметь минимальную длину в пространстве (x, y, θ), где x, y — координаты на плоскости, а θ — угол наклона касательного вектора кривой.

С помощью геометрических методов теории управления получено полное решение задачи: описаны экстремальные кривые, их локальная и глобальная оптимальность, оптимальный синтез, множество разреза, субримановы сферы и каустики.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00156-а.

Литература

1. I. Moiseev, Yu. L. Sachkov. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, ESAIM: COCV, 2009 (принята к публикации), arXiv:0807.4731v1.
2. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. —М.: Физматлит, 2005, 391 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППОКСИМАЦИИ

Сачкова Е.Ф. (Институт Программных Систем РАН)
elenas@u-pereslavl.botik.ru

Расматриваются вполне управляемые трехмерные нелинейные системы с двумя линейными управлениями. Для таких систем ставится задача перемещения из начальной точки в ε–окрестность заданной конечной. Эта задача полностью решена для неголономных систем общего положения.

Решение получено в виде вычислительного алгоритма, основанного на теоретической схеме приближенного решения задачи управления для произвольных неголономных систем, предложенной Дж. Лаферьером и Х.Суссманом [1].

Для построения алгоритма используются точные решения задачи управления для нильпотентных аппроксимаций расматриваемых трехмерных нелинейных систем с двумерным линейным управлением в нескольких классах управлений.

Построенный вычислительный алгоритм реализован в системе Maple и апробирован на задачах управления мобильным роботом на плоскости и ориентацией катящейся по плоскости сферы. Рассмотренные примеры демонстрируют устойчивую работу алгоритма при высокой требуемой точности, а также умеренный (линейный) рост количества итераций в зависимости от порядка требуемой точности.

Литература

1. Laferriere G. and Sussmann H.J. //In: *Zexiang Li and J.F. Canny Eds.* Nonholonomic Motion Planning – The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science. – V. 192 – 1992.
2. Сачкова Е.Ф. Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифференц. уравнения. 2008. 12. С. 1704–1707.

ГЛОБАЛЬНАЯ И ЛОКАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ

Сергеев И.Н. (МГУ имени М.В.Ломоносова)
in_serg@mail.ru

Управляемую систему

$$\dot{x} = U(t)x \quad (x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R}), \quad U \equiv A + bu, \quad [1]$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$ — ограниченная бесконечно дифференцируемая функция (*управление*), а A и b — постоянные матрица и столбец, соответственно, назовем:

• *эквивалентной линейному уравнению*, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

• глобально ляпуновски приводимой (в классе ограниченных гладких управлений), если любая система $\dot{x} = C_0(t)x$ с ограниченными непрерывными коэффициентами ляпуновски приводима к системе [1] с некоторым управлением u_0;

• сверх того, локально непрерывно ляпуновски приводимой вблизи точки C_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая система $\dot{x} = C(t)x$ с ограниченными непрерывными коэффициентами, удовлетворяющая неравенству $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|C(t) - C_0(t)\| < \delta$, ляпуновски приводима к системе [1] с некоторым управлением u, удовлетворяющим неравенству $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|u(t) - u_0(t)\| < \varepsilon$, причем получающееся таким образом отображение, ставящее в соответствие каждой функции C функцию u, можно выбрать непрерывным в смысле равномерной топологии на прямой.

Теорема 1 [1]. *Управляемая система, эквивалентная линейному уравнению, глобально ляпуновски приводима.*

Теорема 2 (выводится из [1]). *Управляемая система, эквивалентная линейному уравнению, локально непрерывно ляпуновски приводима вблизи любой точки.*

Литература

1. И. Н. Сергеев. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2009, № 3.

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Сергеев С.А. (МГУ ВМиК)
SergeevSe1@yandex.ru

Рассматриваются колебания сферического слоя при условии радиальной симметрии, описываемые уравнением

$$u_{tt}(r, t) - \frac{1}{r^2}[r^2 u_r(r, t)]_r = 0 \tag{1}$$

в области $\{R_1 < r < R_2\} \times \{0 < t < T\}$, где R_1 и R_2 — радиусы сфер, ограничивающих рассматриваемый слой. Финальный момент времени T равен $2m\delta + \Delta$, $\delta = R_2 - R_1$, $\Delta \in [0, 2\delta]$, m — натуральное число.

Известны начальное $\{\varphi(r), \psi(r)\}$ и финальное $\{\varphi_1(r), \psi_1(r)\}$ состояния слоя. На границе ведется управление либо первым, либо третьим краевыми условиями:

$$u(R_1, t) = \mu(t), \; u(R_2, t) = \nu(t); \tag{2}$$

$$u_r(R_1, t) + \tfrac{1}{R_1}u(R_1, t) = \mu(t), \; u_r(R_2, t) + \tfrac{1}{R_2}u(R_2, t) = \nu(t), \tag{3}$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ из $W_2^1[0, T]$ в случае (2), или из $L_2[0, T]$ в случае (3).

Необходимо найти управление $\{\mu(t), \nu(t)\}$, переводящее слой из начального в финальное состояние. Существует бесконечное множество таких функций, поэтому ставится вопрос оптимизации, где критерием служат следующие условия:

$$\begin{array}{ll} \int_0^T \{a^2[R_1\mu'(t)]^2 + b^2[R_2\nu'(t)]^2\}dt \to \min \text{ в случае (2),} & \\ & a, b \neq 0 \\ \int_0^T \{a^2[R_1\mu(t)]^2 + b^2[R_2\nu(t)]^2\}dt \to \min \text{ в случае (3).} & \end{array}$$

Функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ удается выписать в явном аналитическом виде. Автор благодарит В.А. Ильина за ценные указания и замечания. Работа выполнена при поддержке грантов НШ-862.2008.1, РФФИ 08-01-00200, Р.Н.П. 2.1.1.1291.

Литература

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация управления на двух концах струны упругими граничными силами за любой достаточно большой промежуток времени. // Дифференциальные уравнения, 2008, т. 44, N 1, с. 89-110

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сидоренко О.Г. (Стерлитамак)

olsig@rambler.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(t)u_{xx} + u_{tt} - b^2 K(t)u = 0\ ,$$

где $K(t) = \operatorname{sgn} t \cdot |t|^m$, $m = const > 0$, $b = const > 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \{x = 0\} \cup \{x = 1\}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{3}$$

$$u_t(x,\beta) = \varphi(x), \ \ u_t(x,-\alpha) = \psi(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi(x) \in C^{2+\delta}[0,1]$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$ и $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$. Тогда задача (2) – (5) однозначно разрешима тогда, когда выполнены условия

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q) - \frac{\pi}{2}Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q) \neq 0,$$

где $J_{\frac{1}{2q}-1}(z)$, $K_{\frac{1}{2q}-1}(z)$, $I_{\frac{1}{2q}-1}(z)$ – функции Бесселя, $q = (m+2)/2$ и $\inf\limits_k |\sqrt{k}\Delta_k(\alpha,\beta)| \ge C_0 > 0$. Это решение определяется рядом

$$u(x,t) = u_0(t) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\cos(2\pi kx) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t)\sin(2\pi kx),$$

где функции $u_0(t)$, $u_k(t)$ и $v_k(t)$ выписаны в явном виде.

Литература

1. Лернер М.Е., Репин О.А., Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. 8. С. 1087 - 1093.
2. Моисеев Е.И., Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. 8. С. 1094 - 1100.

О числе периодических решений уравнений в частных производных 1-го порядка

Сидоров Е.А. (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

dynamics@mm.unn.ru

Представляет интерес вопрос о классах уравнений в частных производных (УЧП), имеющих определенное число периодических (квазипериодических и т.п.) решений, в частности, для УЧП 1-го порядка (одно из направлений исследований отражено в [1]) . Для квазилинейного уравнения

$$L(u) \equiv a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u,x,y), \tag{1}$$

где функции a, b и f имеют период 2π по x и y (класс P) и достаточно гладкие, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $f(u,x,y)$ определена в R^3 и $f(u,x,y) = 0$ только при $u = 0$, то уравнение (1) имеет только тривиальные решения $u \in P$.*

Теорема 2. *Более общий результат относится к следующему варианту*

$$(a(x,y)u)_x + (b(x,y)u)_y = f(u,x,y), \tag{2}$$

при дополнительном условии, что $f(u,x,y)u > 0$ при $u \neq 0$.

Из предыдущего вытекает в отношении уравнения типа Риккати (1), где $f(u,x,y) = u^m + p(x,y)$ ($p \in P$), справедливость утверждения:

Теорема 3. *Данное уравнение имеет не более 1-го решения, если m – нечетное (не более 1-го знакоопределенного решения, если m – четное) из класса P.*

При дополнительных условиях уравнение (1)при $m = 2$ может иметь не более двух периодических решений:

Теорема 4. *Если $a(x,y) \neq 0$, $b(x,y) \neq 0$ и уравнение характеристик для (1) на торе имеет иррациональное число вращения, то уравнение (1) имеет не более двух различных решений из P.*

Возможен также случай, когда рассматриваемое уравнение обладает двумя разнознаковыми квазипериодическими решениями.

Теорема 5. *Для постоянных a и b ($\neq 0$) сосуществуют два решения $x_1 = 1 - \cos h(x,y)$, $x_2 = -1 + \sin h(x,y)$, где $h(x,y)$ –псевдопериодическая функция.*

Литература

1. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х., УМН. 2000. Т. 55. . 2. С. 95-120.

ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА

Асланов В. С. (Самарский государственный аэрокосмический университет)
aslanov_vs@mail.ru

Для иллюстрации эффективности метода Мельникова [1] при исследовании хаотического поведения нелинейной системы часто использует классическое уравнение Дуффинга. Однако интерес вызывает и обобщенное уравнение Дуффинга

$$\ddot{\theta} = a\sin\theta + b\sin 2\theta + \varepsilon(a_1\sin\theta + b_1\sin 2\theta + c)\cos\omega t - \delta\dot{\theta}, \qquad (1)$$

где ε и δ - малые параметры, остальные коэффициенты являются постоянными числами. Это уравнение описывает движение тяжелой материальной точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси, а также движение затупленного тела относительно центра масс при спуске в разряженной атмосфере.

При невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$, $\delta = 0$) уравнение (1) может иметь неподвижные точки типа седло и центр. Получены аналитические уравнения гетероклинических орбит для сепаратрис.

Функция Мельникова описывает расщепление сепаратрис при малом возмущении ($\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$). Если она знакопеременна, то устойчивая и неустойчивая ветви пересекаются, что влечет за собой появление хаоса. В случае ($a_1 = 0$, $b_1 = 0$) для орбит, охватывающих центр $\theta = 0$, функция Мельникова вычисляется аналитически, и условие пересечения сепаратрис можно записать как

$$\delta < \delta_c = \varepsilon c\pi \operatorname{sh}\frac{\theta_*\omega}{\nu}[\nu^2\sin\theta_*(1-\theta_*\operatorname{ctg}\theta_*)\operatorname{sh}\frac{\pi\omega}{\nu}]^{-1},$$

где $\nu = \sqrt{(a^2-4b^2)/(2b)}$, $\theta_* = \arccos(-a/(2b))$. Аналогичная формула вычислена и для орбит, охватывающих центр π. Для общего случая, когда все коэффициенты уравнения (1) отличны от нуля, функция Мельникова определяется численно. Для анализа возмущенной системы (1) использовалось отображение Пуанкаре. Показано хорошее совпадение аналитических решений с численными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00355а).

Литература

1. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества. - 1963. - 12. - С. 1.56.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Скороход А.В. (г. Самара)
scorohodav@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0, m > 0, \\ u_{xy} - \frac{q}{x-y}(u_x - u_y), & y < 0, x < 0, \\ u_{xy} - \frac{q}{x+y}(u_x + u_y), & y < 0, x > 0, \quad q = \frac{m}{2(m+2)}, \end{cases}$$

в области D, ограничений при $y > 0$ гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, отрезками прямых $x=-1$, $y=x$, $x=1$, $y=-x$ при $y<0$.

Задача Геллерстедта. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+) \cap C^1(D_-),\ u_{xy} \in C(D_-);$$

$$Lu \equiv 0,\ (x,t) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(x,y)\,|_\Gamma = \varphi(s),\ 0 \le s \le l;$$

$$u(x,x) = \psi_1(x),\ x \in [-1,0];\ u(x,-x) = \psi_2(x),\ x \in [0,1];$$

$$u_y(x,+0) = v^1\_(x),\ x \in (0,1);\ u_y(x,+0) = v^1\_(x),\ x \in (0,1),$$

где

$$v^1\_(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\lambda}u(t,0)dt + \int_{x}^{0}(t-x)^{-\lambda}u(x,t)dt,$$

$$0<\lambda<1,\ x\in(-1,0);$$

$$v^2\_(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(t-x)^{-r}u(t,0)dt + \int_{x}^{0}(x-t)^{-r}u(x,t)dt,$$

$$0<r<1,\ x\in(0,1);$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $D_+ = D \cap \{y>0\}$, $D^1\_ = D \cap \{x<0, y<0\}$, $D^2\_ = D \cap \{x>0, y<0\}$, $D\_ = D^1\_ \cap D^2\_$.

В данной работе приводится доказательство существования решения задачи Геллерстедта при некоторых ограничениях на кривую Γ, заданные функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\varphi(s)$.

Литература

1. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 2003. - 255с.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. - 304с.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ТРЕФФЦА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Скороходов С.Л. (Москва, ВЦ РАН)
skor@ccas.ru

В 1921 г. Е.Треффц предложил метод аналитического решения следующей краевой задачи в плоских полигональных областях $\mathcal{G}$:

$$\Delta\varphi(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\mathcal{G};\qquad \varphi(x,y)=h_2(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\mathcal{G}, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $h_2(x,y)$ – полином степени 2, решение $\varphi \in C^2(\mathcal{G}) \bigcap C(\overline{\mathcal{G}})$.

В настоящей работе строится обобщение метода на случай полиномиальной правой части и полиномиального краевого условия:

$$\Delta\varphi(x,y)=f_M(x,y),\ \ (x,y)\in\mathcal{G};\qquad \varphi(x,y)=h_K(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\mathcal{G}, \tag{2}$$

где $f_M(x,y)$ и $h_K(x,y)$ – полиномы от (x,y) степеней M и K.

Вычитая частное решение (2), задачу сводим к нахождению гармонической функции $\psi(x,y)$ с полиномиальным краевым условием степени $N=\max(M+2,K)$. Рассматривая комплексную плоскость $z=x+iy$, решение $\psi(z)$ ищем с помощью аналитической функции $\Psi(z)$:

$$\psi(z)=\mathrm{Im}[\Psi(z)]\,.$$

Вводя производную $\mathcal{F}(z)=\Psi^{(N)}(z)$ степени N от функции $\Psi(z)$, убеждаемся, что $\mathcal{F}(z)$ отображает исходную полигональную область $\mathcal{G}$ на некоторую область $\mathcal{D}$, также являющуюся полигональной и, возможно, неоднолистной; при этом вершины полигона $\mathcal{G}$ переходят в вершины полигона $\mathcal{D}$.

Отображение $\mathcal{F}(z)$ мы строим с помощью отображений $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$. Функция $f_1(\zeta)$ отображает вспомогательную полуплоскость $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$ и может быть представлена в виде интеграла Кристоффеля- Шварца. Функция $f_2(\zeta)$ отображает полуплоскость $\mathcal{H}$ на $\mathcal{D}$ и представляется в виде обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца.

Разработанный метод был применен к решению ряда важных прикладных задач в $L-, T-, Z-$ образных областях и позволил явно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах полигона $\mathcal{G}$, а также найти другие характеристи решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00295, 07-01-00503) и Программы N^o 3 ОМН РАН.

НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Скрябин М.А. (Москва, РУДН)
skryabinm@gmail.com

Алгебраические условия для выполнения неравенства Гординга для функционально-дифференциальных операторов были получены, например, А. Л. Скубачевским (в случае преобразований сдвига), Л. Е. Россовским (в случае преобразований растяжения и сжатия). При нахождении алгебраических условий для выполнения неравенства Гординга для функционально-дифференциальных операторов наиболее трудным оказывается случай, когда у преобразований аргумента имеются неподвижные точки. Мы рассмотрим этот случай на примере преобразований поворота относительно начала координат.

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} (\Phi_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i u_{x_i} + \Phi_0 u(x), \tag{1}$$

действующий из $\dot{C}^\infty(Q)$ в $L_2(Q)$. Здесь операторы $\Phi_{ij}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$, $i,j = 1,\ldots,n$, и $\Phi_i\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$, $i = 0,\ldots,n$, являются линейными и ограниченными, причем $(\Phi_{ij}u)(x) = \sum\limits_{g\in G} a_{ijg} u(g(x))$, где G — конечная группа преобразований поворота относительно начала координат, $a_{ijg} \in C^\infty(\overline{Q})$. Так как, вообще говоря, $g(x) \notin \overline{Q}$ при $x \in \overline{Q}$, то при определении операторов Φ_{ij} предполагается, что $u(x) \equiv 0$ вне $\overline{Q}$.

Для оператора A, определенного по формуле (1), найдены алгебраические условия для выполнения неравенства Гординга (см. подробнее в [1]), которые имеют вид положительной определенности некоторых матриц, связанных с функциональными операторами Φ_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00268.

Литература

1. Скрябин М. А., Разбиение единицы и проблема сильной эллиптичности для функционально-дифференциальных операторов, Соврем. мат. Фунд. направл., в печати.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С СЛУЧАЙНЫМИ ФАКТОРАМИ

Сливка-Тилищак А. И. (Ужгородский национальный университет)
aslyvka@tn.uz.ua

В работе рассматривается метод построения модели, что приближает решение краевой задачи математической физики гиперболического типа с случайными начальными условиями с заданной надежностью и точностью. Для уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u),\ L(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(X)u,$$

найдено с вероятностью единица решение, которое удовлетворяет начальным условиям $u|_{t=0} = \xi(X)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \eta(X)$, и граничное условие $u|_S = 0$, $t \in [0;T]$, где $\{\xi(X),\ X \in G\}$, $\{\eta(X),\ X \in G\}$ — независимые строго субгауссовые случайные процессы,

$$u(X,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right) v_k(X),$$

$$A_k = \int\limits_G \xi(X) v_k(X) dX, \qquad B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_G \eta(X) v_k(X) dX.$$

Моделью процесса $u(X,t)$ будем называть сумму

$$u^N(X,t) = \sum_{k=1}^{N} \left(\hat{A}_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \hat{B}_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) v_k(X).$$

Модель $u^N(X,t)$ приближает решение $u(X,t)$, с заданной надежностью γ и точностью δ в равномерной метрике области Q_T, если

$$P\left\{ \sup_{(X,t)\in Q_T} \left| u^N(x,t) - u(X,t) \right| > \delta \right\} \le \gamma.$$

Литература

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных матаматической физики. – Москва: Высшая школа, 1970.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ- ВОЛН

Смирнов Ю.Г. (Пензенский государственный университет)
smirnov@tl.ru

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через диэлектрический слой, расположенный между двумя полубесконечными полупространствами $x < 0$ и $x > h$, заполнными средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1 \ge \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \ge \varepsilon_0$ соответственно, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Электромагнитное поле $\mathbf{E}(x,y,z)$, $\mathbf{H}(x,y,z)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E},$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H},$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию экспоненциального затухания при $|x| \to \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|E|^2$; a, ω и $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ – положительные константы.

Рассмотрим ТМ-поляризованные волны $\mathbf{E} = \{E_x,\ 0,\ E_z\}$,$\mathbf{H} = \{0,\ H_y,\ 0\}$ с гармонической зависимостью от z, $H_y = H_y(x)\, e^{i\gamma z}$, $E_x = E_x(x)\, e^{i\gamma z}$, $E_z = E_z(x)\, e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной волны.

Теорема[1]. *Пусть*

$$h_1^{(k)} = \inf_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1,\ \varepsilon_3),\ \varepsilon_2)} J(a,\ \gamma,\ k), \quad h_2^{(k)} = \sup_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1,\ \varepsilon_3),\ \varepsilon_2)} J(a,\ \gamma,\ k),$$

и $h \in (h_1^{(k)},\ h_2^{(k)})$ *для всех* $k = \overline{0,\ N}$, *где* $J(a,\ \gamma,\ k)$ - *известные функции. Тогда существует по крайней мере* $N + 1$ *собственных значений задачи.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-07-89063а.

1. Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г. О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008, Т. 48, N. 12, С. 2186-2194.

О ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А.П. Солдатов (Белгородский гос. университет)
soldatov@bsu.edu.ru

Рассмотрим в области $D \subseteq R^2$, ограниченной ляпуновским контуром Γ, эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где $\phi = (\phi_1, \dots \phi_l)$ и собственные значения постоянной матрицы $J = (J_{ij}) \in C^{l\times l}$ лежат в верхней полуплоскости. Пусть матрица -функция $G(z)$, $z = x + iy$, задана и удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}$ и ее определитель $\det G^+$ всюду отличен от нуля на контуре Γ. Эта система впервые была предложена Дуглисом [1] и играет большую роль при исследовании общих эллиптических задач на плоскости [2].

Рассмотрим задачу Римана -Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi^+ = f$$

для решений ϕ системы (1). Хорошо известно, что в классе Гельдера $C^\mu(\overline{D})$ эта задача фредгольмова и ее индекс $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = -2\mathrm{Ind}_\Gamma\, G + 1, \quad \mathrm{Ind}_\Gamma\, G = \frac{1}{2\pi} \arg\det G(t)|_\Gamma.$$

В докладе этот результат распространяется на класс функций ϕ, для которых $\mathrm{Re}\phi \in C(\overline{D})$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(проекты 07-01-00299, 08-01-92208)

Литература

1. Douglis, A.A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 259-289.

2. Солдатов А.П., Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР"(сер.матем.) 1991. Т.55, No.5. С.1070-1100.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ЦИЛИНДРЕ.

Соловьев В.В. (МИФИ)
solovevv@mail.ru

Пусть G - ограниченная область с границей класса $C^{2+\alpha}$ в $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Пусть $q_1, q_2 : q_1 < 0 < q_2$ - фиксированные числа. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(y, x_1, ..., x_n)\} = \{(y, x)\}$ определим цилиндр $\Omega = (q_1, q_2) \times G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в котором рассмотрим обратную задачу определения пары функций $u \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $c \in C^\alpha(G) \cap C(\overline{G}), c \leqslant 0$, из условий:

$$-\Delta u(y, x) = c(x)u(y, x) + g(y, x), (y, x) \in \Omega,$$

$$u(q_1, x) = u(q_2, x) = 0, x \in \overline{G},$$

$$u(y, x) = \varphi(y, x), (y, x) \in [q_1, q_2] \times \partial G,$$

$$u(x, 0) = \chi(x), x \in \overline{G}$$

Пусть, далее, $\overline{w}(y, x)$ - решение следующей краевой задачи:

$$-\Delta\overline{w} = g_{yy}(y, x), (y, x) \in \Omega,$$

$$\overline{w}(q_i, x) = -g(q_i, x), i = 1, 2, x \in \overline{G}$$

$$\overline{w}(y, x) = \varphi_{yy}(y, x), (y, x) \in [q_1, q_2] \times \partial G.$$

Теорема. Пусть $\varphi, \varphi_{yy} \in C([q_1, q_2] \times \partial G), g, g_{yy} \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\chi \in C^{2+\alpha}(G) \cap C^2(\overline{G}), g \geqslant 0, \varphi \geqslant 0, \chi(x) \geqslant \chi_0 > 0, g_{yy} \leqslant 0$, $\varphi_{yy} \leqslant 0$. Тогда не может существовать двух различных решений сформулированной выше обратной задачи.

Если, дополнительно к перечисленным выше условиям, выполнены условия согласования:

$$\chi(x) = \varphi(0, x), \varphi(q_i, x) = 0,$$

$$\varphi_{yy}(q_i, x) = -g(q_i, x), i = 1, 2, x \in \partial G$$

и неравенство

$$-\Delta_x\chi(x) - g(0, x) \leqslant \overline{w}(0, x), x \in \overline{G}$$

то существует единственное решение рассматриваемой обратной задачи.

О БИФУРКАЦИЯХ, ПРИВОДЯЩИХ К ИСЧЕЗНОВЕНИЮ БЕЗОПАСНЫХ ЗОН В ОБЛАСТЯХ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Стародубровская Н.С. (Нижний Новгород)
n.n.butenina@mail.ru

Рассматривается управляемая динамическая система (УДС) вида

$$dx/dt = P(x) + u(t)Q(x), \quad (1)$$

где $x \in R^2$, $P(x)$, $Q(x)$ $\{R^2 \to R^2\}$ – функции класса C^k $(k \geq 3)$, $u(t)$ $\{R^1 \to R^1\}$ (управление) – произвольная кусочно-непрерывная на любом конечном отрезке ограниченная функция, $m \leq u(t) \leq n$. В дальнейшем m и n считаем параметрами УДС (1).

Пусть Ω_0 – устойчивое предельное множество системы (1) при $u(t) \equiv \mu_0$, $\mu_0 = const$, $m < \mu_0 < n$; $U(\Omega_0)$ $(D(\Omega_0))$ – множество управляемости (достижимости) в состояние (из состояния) Ω_0, $I(\Omega_0)$ – зона иммунитета указанного состояния [1].

Область достижимости $D(\Omega_0)$ при условии, что $D(\Omega_0) \subset U(\Omega_0)$, является минимальной безопасной зоной области $U(\Omega_0)$. Известно, что при расширении промежутка $[m, n]$ область достижимости $D(\Omega_0)$ расширяется, зона иммунитета $I(\Omega_0)$ сжимается. Если при некоторых $m = m^*$ и $n = n^*$ $\partial D(\Omega_0) \cap \partial I(\Omega_0) \neq \emptyset$, то при n, сколь угодно близких к n^*, $n > n^*$, и $u(t) \in [m^*, n]$ либо при m, сколь угодно близких к m^*, $m < m^*$, и $u(t) \in [m, n^*]$ имеем $I(\Omega_0) = \emptyset$.

В качестве примера исследована управляемая динамическая система, описывающая при постоянных значениях управления движение самолета в вертикальной плоскости [2]. Указаны ограничения на управление, при которых не существует безопасных зон устойчивых предельных множеств вспомогательной автономной системы, т.е. возможно управление движением самолета в двухканальном режиме.

Литература

1. Бутенина Н. Н. Зоны иммунитета управляемых динамических систем, Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. N5. С.630–637.

2. Белюстина Л. Н. К динамике симметричного полета, Изв. АН СССР. ОТН. 1956. Т.11. С.3–27.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УСРЕДНЕНИЯ ТЕЙЛОРОВСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ

Р.Р. Столярчук (НУ «Львовская политехника»)
roksols@yahoo.com

В работе [1] было заложено основы нового направления в теории численных методов решения задачи Коши для жестких систем

$$y' = f(x, y)\ , y(x_0) = y_0\ ,\ y \in R^n\ ,\ f : R^{N+1} \to R^N \quad (1)$$

в сеточном узле $x_{n+1} = x_n + h$, как усреднения с дробно-рациональными весовыми коэффициентами ω_i последовательности тейлоровских аппроксимаций

$$y_{n+1}^{[p]} = \sum_{i=0}^{p} \omega_i T_{p-i,n} \quad (2)$$

$$\omega_i = \frac{(-1)^i \alpha_i h^i J_n^i}{\sum_{j=0}^{p} (-1)^i \alpha_i h^i J_n^i} \quad , i = \overline{0,p} \quad (3)$$

где $T_{k,n}$- тейлоровское приближение к-го порядка в сеточном узле x_{n+1}относительно узлаx_n, J_n- значение матрицы Якоби правой части системы (1) в узле x_n, $\alpha_i > 0$ $(i = \overline{0,p}\,, \alpha_0 = 1)$- скалярные параметры, p-максимальный порядок последовательности тейлоровских приближений.

Определение коэффициентов усреднения ω_iтребует вычисления степеней матрицы Якоби при образованию матричного полинома в знаменателе соотношения (3), что может повлиять на обусловленность линейной системы при реализации вычислений приближения (2). Для устранения этого приближения (2), (3) представим в виде

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{\sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j a_p^j h^j J_n^j T_{p-j,n}}{(E - a_p h J_n)^p}\ , \quad \alpha_i = C_p^i a_p^i\ ,\ i = \overline{1,p}, \quad (4)$$

Для обеспечения необходимого типа устойчивости исследованы условия , которым должны удовлетворять коэффициенты a_p. Экспериментальные исследования предлагаемых методов подтверждают их эффективность.

Литература

1. Slonevsky R.,and Stolyarchuk R. New methods for numerical investigation of dynamic processes. / In: Proceedings of SIMS 2004. 45th International Conference of Scandinavian Simulation Society. Copenhagen. Denmark. September 23-24, 2004.p.249-254.

Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций

Султанаев Я.Т.,Мякинова О.В. (г.Уфа, БашГУ)

llmmst@rambler.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,+\infty) \oplus L_2(0,+\infty)$ минимальный дифференциальный оператор L_0, порожденный дифференциальным выражением

$$ly = y^{(4)} + Q(x)y, \tag{1}$$

$y = (y_1(x), y_2(x))^T$, $x \in (0,\infty)$, где $Q(x) = \|q_{i,j}(x)\|_{i,j=1}^2$ – вещественная симметрическая матрица, собственные значения которой $|\mu_i| \to \infty$, $x \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1)$|\mu_i| \to \infty$, $x \to \infty$, $i = \overline{1,2}$,

2)$|\phi'(x)| \le const$, *где* $\phi(x) = \frac{1}{2}arcctg(\frac{q_{22}-q_{11}}{2q_{12}})$

3)$0 < A \le \left|\frac{\mu_i}{\mu_j}\right| \le B$, $\overline{i=1,2}$ *при* $x > x_0$ *для достаточно больших* x_0.

4)$\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i|^{-1/4} dx < \infty$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\mu_i'^2}{(\lambda-\mu_i)^{9/4}} + \frac{\mu_i''}{(\lambda-\mu_i)^{5/4}}\right| dx < \infty$, *для* $x > x_0$ *при достаточно больших* x_0.

5)$|\mu_i'(x)| \le c\,|\mu_i^{\alpha}(x)|$, $0 < \alpha < 5/4$, *для* $x > x_0$ *при достаточно больших* x_0.

Тогда система $ly = \lambda y$ *имеет 8 линейно независимых векторов-решений* $y_j(x,\lambda)$, *таких что при* $x \to \infty$

$y_{1,2} \sim \psi_1(x,\lambda)exp(\pm \int_0^{\infty} \sqrt[4]{\lambda - \mu_1}dx)$,

$y_{3,4} \sim \psi_1(x,\lambda)exp(\pm i \int_0^{\infty} \sqrt[4]{\lambda - \mu_1}dx)$,

$y_{5,6} \sim \psi_2(x,\lambda)exp(\pm \int_0^{\infty} \sqrt[4]{\lambda - \mu_2}dx)$,

$y_{7,8} \sim \psi_2(x,\lambda)exp(\pm i \int_0^{\infty} \sqrt[4]{\lambda - \mu_2}dx)$,

где $\psi_1 = (cos(\phi(x)), -sin(\phi(x)))^T$, $\psi_2 = (sin(\phi(x)), cos(\phi(x)))^T$

Теорема 2.

Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда

1)Если $\mu_i \to -\infty$, $i = \overline{1,2}$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны (6,6). 2)Если* $\mu_i \to +\infty$, $i = \overline{1,2}$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны (4,4). 3)Если* $\mu_i \to +\infty, \mu_j \to -\infty$, $i,j = \overline{1,2}$ $i \ne j$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны (5,5).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-01-00354-а.

Литература

1.Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. - М.: Наука, 1979, 400 с.

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ПОРЯДКА

Султанбекова А.О. (Институт Математики, Алма-Ата)

liga900@gmail.com

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение, вида

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t,\omega) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t,\omega) \cdot \dot{y} + a_0(t,\omega) \cdot y, \quad t \in R^+, \tag{1}$$

где $a_0(t,\omega), a_1(t,\omega), \ldots, a_{n-1}(t,\omega) \in C^+$ (C^+ – пространство непрерывных и ограниченных на $R^+ = [0,+\infty)$ функций), $\omega \in (0,1]$.

Показатели Ляпунова уравнения (1) $\lambda_1(\omega) > \ldots > \lambda_n(\omega)$ определяются как показатели Ляпунова эквивалентной линейной системы. Необходимые сведения из теории показателей содержатся в [1].

Здесь исследуются функции $\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_n(\omega)$ с точки зрения их классификации по Бэру (см. [2]).

Строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных систем (размерности не меньше двух) следует из [3, 4]. Однако для систем, эквивалентных уравнению (1), данный результат неприменим, так как в данном случае рассматриваются системы специального вида.

Доказывается следующая

Теорема. *Существуют такие функции* $a_0(t,\omega),\ldots,a_{n-1}(t,\omega)\in C^+$, *что показатели Ляпунова* $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$, $\ldots$, $\lambda_n(\omega)$ *уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.*

Литература

1. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, Москва, Наука, 1966.

2. Р. Бэр. Теория разрывных функций, Москва, Мир, 1932.

3. В. М. Миллионщиков, "Бэровские классы функции и показатели Ляпунова", *Дифференциальные уравнения*, **16**, № 8, 1408–1416 (1980).

4. М. И. Рахимбердиев, "О бэровском классе показателей Ляпунова", *Математические заметки*, **31**, № 6, 925–931 (1982).

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сурков П.Г. (ИММ УрО РАН)

platon.surkov@gmail.com

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bx(t-r),\ t\in(-\infty,0],\quad (1)$$

где $x\colon(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n$, $r>0$, A и B — постоянные матрицы размера $n\times n$, $\det B\neq 0$. Задача нахождения решения системы (1) на полуоси $(-\infty,0]$ является некорректной [1]. В сепарабельном гильбертовом пространстве состояний [2] для её решения можно использовать итерационную процедуру и метод регуляризации А.Н. Тихонова [3]. Итерационная процедура позволяет свести рассматриваемую задачу к нахождению компоненты решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя асимптотические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [4] для решения полученной краевой задачи, удалось найти асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости регуляризованных решений системы (1) от параметра регуляризации на конечном отрезке отрицательной полуоси. Задача решена для произвольных начальных функций из пространства состояний, в случае дополнительных требованиях гладкости начальной функции её решение получено в работе [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (06-01-00399).

Литература

1. Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н., Дифференц. уравнения.,1993. Т. 29. 8. С. 1317–1323.

2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.

4. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев, 1954.

5. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г., Сб. научных трудов фак-та ВМиК МГУ: Проблемы динамического управления. 2007. Вып. 2. С. 71–99.

ПОЛНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ДЛЯ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ НА 3-МНОГООБРАЗИЯХ

Таланова Е.А. (НГСХА, Россия)

eltalanova@rambler.ru

Рассматривается класс $G_H(M^3)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов $f: M^3\to M^3$, заданных на гладком замкнутом ориентируемом трехмерном мнообразии M^3, блуждающее множество которых содержит конечное число некомпактных гетероклинических кривых. В работе вводится топологический инвариант, который называется локальной схемой диффеоморфизма и является пространством орбит действия диффеоморфизма f на множество $W^s(\omega)\setminus\{\omega\}$. Локальная схема диффеоморфизма является объединением простых замкнутых кривых, торов, бутылок Клейна, открытых колец и листов Мебиуса. Аналогично работе [1] вводится понятие глобального графа $G(f)$, оснащенного локальными схемами диффеоморфизма f. Изоморфизм графов, включает в себя эквивалентность локальных схем и сопряженность подстановок $P(f)$, $P(f')$, индуцированных диффеоморфизмами f и f' на множестве вершин графов $G(f)$ и $G(f')$ соответственно.

Результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Граф $G(f)$ является полным топологическим инвариантом с точностью до изоморфизма.*

Работа посвящена результатам, полученным совместно с В.З. Гринесом и О.В. Починкой.

Автор благодарит грант No 08-01-00547 Российской Академии за финансовую поддержку.

Литература

1. Гринес В.З., Медведев В.С. "О топологической сопряженности трехмерных градиентно-подобных диффеоморфизмов с тривиально вложенным множеством сепаратрис седловых неподвижных точек". *Мат. заметки.* 1999. Т.66. с.945-948.

2. Починка О. В., Таланова Е. А. "Топологическая сопряженность градиентно-подобных диффеоморфизмов с единственной гетероклинической кривой на S^3". *Труды средневолжского математического общества.* Саранск. Т. 11. No 1 (2008). с.241-249.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Е. И. Моисеев, Н. О. Таранов (ВМК МГУ)

nicktaranov@mail.ru

Задача Геллерстедта в теории уравнений смешанного типа является классической. Метод сведения подобных задач к сингулярным интегральным уравнениям, представленный в [1], имеет ряд недостатков. Существование решения полученного сингулярного уравнения трудно доказать, и само представление решения не столь удобно для практических нужд. В данной работе исследуется задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае с ненулевыми данными на характеристиках волнового уравнения и полуполосой в качестве области эллиптичности. Решение данной задачи в совокупности с решением задачи Геллерстедта, изложенным Е. И. Моисеевым в статье [2] позволяет конформными отображениями получить решение задачи Геллерстедта с граничными условиями общего для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Постановка задачи.

$$\begin{cases} u_{xx} + sgn(y)u_{yy} = 0, & (x,y) \in D_+ \cup D_{-1} \cup D_{-2}; \\ u(-1/2, y) = 0, & \\ u(1/2, y) = 0, & y \in (0, +\infty); \\ u(x, -x - 1/2) = f_1(x), & x \in (-1/2, -1/4); \\ u(x, x - 1/2) = f_2(x), & x \in (1/4, 1/2). \end{cases}$$

Здесь $D_+ = \{-1,2 < x < 1/2, y > 0\}$, $D_{-1} = \{-1/2 - y < x < y, -1/4 < y < 0\}$, $D_{-2} = \{y < x < y + 1/2, -1/4 < y < 0\}$. На граничные условия наложены требования: $f_1 \in C^2(-1/2, -1/4)$, $f_2 \in C^2(1/4, 1/2)$, $f_1(-1/2) = 0, f_2(1/2) = 0$. Ищем решение $u \in C^0(\overline{D_+ \cup D_{-1} \cup D_{-2}}) \cap C^2(D_+) \cap C^2(D_{-1}) \cap C^2(D_{-2})$. Получено решение данной задачи в виде ряда. Доказана равносходимость ряда. Получено интегральное представление решения.

Работа была выполнена при содействии программы поддержки ведущих научных школ(проект НШ-2726-2008.1).

Литература

1. А. В. Бицадзе. Некоторые классы уравнений в частных производных. Монография: Наука, 1981.

2. Е. И. Моисеев. Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа.//Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. 7.

Конечные решения систем эллиптического типа с регулярными особенностями

Тасмамбетов Ж.Н. (г. Актобе, Казахстан)

tasmam@rambler.ru

Доказано необходимое и достаточное условие существования конечных решений вида

$$\begin{aligned} Z = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot (A_{0,0} + A_{1,0} \cdot x + A_{0,1} \cdot y + \ldots + A_{p,q} \cdot x^p \cdot y^q) = \\ = x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \left(B_{0,0} + \frac{B_{1,0}}{x} + \frac{B_{0,1}}{y} + \ldots + \frac{B_{p,q}}{x^p \cdot y^q} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

системы эллиптического типа с регулярными особенностями

$$
\begin{aligned}
x^2 \cdot p^{(0)} \cdot Z_{xx} + y^2 \cdot p^{(1)} \cdot Z_{yy} + x \cdot p^{(2)} \cdot Z_x + \\
+ y \cdot p^{(3)} \cdot Z_y + p^{(4)} \cdot Z = 0, \\
y^2 \cdot q^{(0)} \cdot Z_{yy} + x^2 \cdot q^{(1)} \cdot Z_{xx} + x \cdot q^{(2)} \cdot Z_x + \\
+ y \cdot q^{(3)} \cdot Z_y + q^{(4)} \cdot Z = 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где коэффициенты $p^{(i)} = p^{(i)}(x,y)$ и $q^{(i)} = q^{(i)}(x,y)$ $(i = \overline{0,4})$ многочлены двух переменных, а $Z = Z(x,y)$ – общая неизвестная, которую следует определить.

Для системы (2) введено понятие размаха $(\nu+1)$ коэффициентов и последовательно изучены возможности существования конечных решений вида (1) при $\nu = 0, 1$, $k \geq 2$. Доказаны несколько теорем.

Теорема. *Для существования конечного решения вида (1) системы (2), при $\nu = k$ $(k \geq 2)$ необходимо и достаточно, чтобы $q_0 = \gamma - \alpha$ и $g_0 = \delta - \beta$ были равны целым неотрицательным числам и чтобы матрица с $(q_0+1)\cdot(g_0+1)$ столбцами и $(q_0+1)\cdot(g_0+1)$ строками, составленная из коэффициентов $f^{(k)}_{p,q}$ системы рекуррентных уравнений имела ранг $(q_0+1)\cdot g_0$ или $(g_0+1)\cdot q_0$.*

О НОВЫХ ЗАДАЧАХ И РЕЗУЛЬТАТАХ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Темиргалиев Н. (Астана, Казахстан)
ntmath@mail.ru, ntmath29@mail.ru

Доклад посвящен последним исследованиям, проводимыми на Кафедре математического анализа ЕНУ им. Л.Н.Гумилева:

1. Компьютерные (вычислительные) поперечники, 2. Квадратурные формулы - методы теории алгебраических чисел, 3. Квадратурные формулы - метод тензорных произведений функционалов, 4. Восстановление функций, 5. Дискретизация решений уравнений в частных производных, 6. Алгоритмы построения равномерно распределенных сеток и эффективизация метода Монте-Карло, 7. Построение вероятностных мер на функциональных классах и их применения, 8. Аппроксимативные возможности полиномов по ортогональным системам с произволным спектром, 9. Пространства типа Морри.

Литература

1. Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Матем. сборник. 2007. Т. 198, No 11. С. 3–20.
2. Ажгалиев Ш. У. Матем. заметки. 2007. Т. 82, выпуск 2. С. 177–182.
3. Баилов Е. А., Темиргалиев Н. ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46, No 9. С. 1594–1604.
4. Нурмолдин Е. Е. Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. - Т. 8, No 4. С. 337-351.
5. Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Матем. заметки. 2003. Т. 3, выпуск 6. С. 803-812.
6. Темиргалиев Н., Баилов Е. А., Жубанышева А. Ж. Докл. РАН. 2007. Т. 416, No 2. С. 169-173.
7. Темиргалиев Н. Матем. заметки. 1997. No 2, С. 297-301.
8. Темиргалиев Н. Матем. сборник. 1990. Т. 281, No 4. С. 490-505.
9. Темиргалиев Н. Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. No 5. С. 1050-1054.
10. Воронин С. М., Темиргалиев Н. Матем. заметки. 1989. Т .46, No 2. С.34-41.
11. Темиргалиев Н. Доклады РАН. 2003. Т. 393, No 5. С. 605-608.
12. Темиргалиев Н. Труды МИРАН. 1997. Т. 218. С. 397-402.
13. Темиргалиев Н. Изв. Вузов. Математика. 1990. No 8. С. 90-93.
14. Temirgaliev N. Analysis Mathematica. 1988. V. 14, No 3. P. 253-258.
15. Воронин С. М., Темиргалиев Н. Матем. заметки. 1986. Т. 39, выпуск 1. С. 52-59.
16. Сулейменов К., Темиргалиев Н. Analysis Mathematica. 2006. V 32, No 4. С. 283-317.
17. Сихов М. Б. Analysis Mathematica. 2004. V. 30, No 2. С. 137-146.
18. Сихов М.Б. Матем. заметки. 2006. Т. 80, выпуск 1. С. 95-104.
19. Джумакаева Г.Т. Матем. заметки. 1985. Т. 37, No 3. С. 399-406.

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАКСИМУМАМИ

Терехин М.Т. (Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина)
m.terehin@rsu.edu.ru

Рассмотрим уравнение

$$
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,\lambda) \max_{\tau \in [h(t),t]} x(\tau) + f(t, x(t), \max_{\tau \in [h(t),t]} x(\tau), \lambda), \tag{1}
$$

$x(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in [-\omega, 0]$, в котором $x(t)$-n-мерная вектор-функция, $A(t), B(t,\lambda)$-$n \times n$-матрица, λ – m-мерный вектор-параметр, $f(t,x,y,\lambda)$-n-мерная вектор-функция, $h(t)$-функция, определенная на сегменте $[0,w]$, $\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x(\tau) = (\max\limits_{\tau\in[h(t),t]} x_i(\tau), i \in \{1,2,...,n\}), \varphi(t)$-$n$-мерная вектор-функция, $h(t) \le t$, $-\omega_0 = \min\limits_{t\in[0,\omega]} h(t)$.

В предположении, что $f(t,0,0,\lambda) \equiv 0$, определяются условия, при выполнении которых существует число $\delta > 0$ такое, что при любых $\alpha(|\alpha| \le \delta)$, $\lambda(|\lambda| \le \delta)$ уравнение (1) имеет единственное решение $x(t,\alpha,\lambda), x(0,\alpha,\lambda) = \alpha$, $\varphi(\xi) = \alpha$ при $\xi \in [-\omega_0, 0]$, определенное на сегменте $[0,\omega]$.

Двухточечная краевая периодическая задача ставится так: определить условия существования векторов $\alpha \neq 0, \lambda$ удовлетворяющих равенству

$$x(\omega,\alpha,\lambda) = x(0,\alpha,\lambda). \tag{2}$$

При условии, что $B(t,\lambda) = (b_{ij}(t),\lambda)_{11}^{nm} + o(|\lambda|)$, $(b_{ij}(t),\lambda)$-скалярное произведение векторов $b_{ij}(t)$ и λ, $rang[X(\omega) - E] = r$, $0 \le r < n$, E-единичная матрица, доказывается, что задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда относительно $\beta \neq 0, \lambda$ разрешима система

$$\int_0^\omega X^{-1}(t)S^*(t, \max_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)R\beta)dt\lambda + o(|\gamma|) = 0, \tag{3}$$

в которой матрици S^* определяется равенством, $S^*(t, \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha)\,\lambda = (b_{ij}(t),\lambda)_{11}^{nm} \max\limits_{\tau\in[h(t),t]} X(\tau)\alpha$, $X(t)$-фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, R – $n \times (n-r)$-матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $[X(\omega) - E]\alpha = 0$, $\gamma = (\beta,\lambda)$.

Доказывается теорема об условиях существования векторов $\beta \neq 0, \lambda$, удовлетворяющих системе (3).

О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЗАМЫКАНИЯ

Тлеубергенов М.И. (Институт математики, Алматы)
marat207@mail.ru

По заданному стохастическому уравнению Ито

$$\ddot{x} = f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}, \qquad x \in R^n, \quad \xi \in R^k, \tag{1}$$

где $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ – система независимых винеровских процессов, требуется достроить замыкающие уравнения

$$\ddot{u} = f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}, \qquad u \in R^r \tag{2}$$

так, чтобы множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x,u,t) = 0, \qquad \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(x,u,t) \in C_{xut}^{222} \tag{3}$$

было интегральным для совместной системы уравнений (1), (2).

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv 0$, $\sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследована в [1, 2]; а в случае, когда $\sigma_1 \not\equiv 0$, $\sigma_2 \not\equiv 0$ и с заданными свойствами вида $\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) = 0$, $\lambda \in R^m$, $\lambda = \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) \in C_{x\dot{x}u\dot{u}t}^{12121}$ решена в [3].

На основе метода разделения [2], правила стохастического дифференцирования Ито и с использованием обозначений из [2, 3] доказывается

Теорема. *Для того чтобы множество (3) при заданной структуре (1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (1), (2) достаточно, чтобы 1) квадратная $(m \times m)$ подматрица F_1 прямоугольной матрицы $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$ обладала свойством $detF_1 \neq 0$, 2) первые m компонент вектор-функции f_2 и $(m \times k)$ подматрица σ_2' матрицы σ_2 замыкающего уравнения (2) имели соответственно вид*

$$f_2' = F_1^{-1}(\widetilde{A} - F_2 f_2''), \qquad \sigma_2' = F_1^{-1}(\widetilde{B} - F_2\sigma_2'').$$

Литература

1. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986.
2. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.: Изд-во РУДН, 1986.
3. Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания //Доклады МН-АН РК. Алматы. 1999. 1. С. 53-60.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Трегубова А. Х.(г. Стерлитамак)
albina1210@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y - b^2u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, где $a, b \geq 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$ - заданные действительные числа.

Как известно (см. [1]), что постановка краевых задач для уравнения (1) в области эллиптичности существенным образом зависит от коэффициента a. В связи с этим возникают случаи, когда $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$. В данной работе рассмотрен случай, когда $a > 1$ и исследована следующая

Задача. *Пусть $a > 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D} \setminus \{y = 0\}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{5}$$

$$u(\alpha,y) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{a-1}u(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^{a-1}u(x,y), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \lim_{y\to 0+0}(yu_y(x,y) + du(x,y)) = \\ = \lim_{y\to 0-0}((-y)u_y(x,y) - du(x,y)), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{gathered} \tag{8}$$

где f, g – заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$; $d = \Gamma(a)/\Gamma(a-1)$.

На основе спектрального метода (см. [2]) установлен критерий единственности решения задачи (2) – (8), а решение построено в виде суммы ряда Фурье.

Литература

1. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. - 1951. - Т. 77, № 2. С. 181 - 184.*

2. Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. - 2007. - Т. 413, № 1. С. 23 - 26.*

НЕЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Турусикова Н.М. (Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина)
m.terehin@rsu.edu.ru

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t,\mu)x + B(t)u + f(t,x,u), \tag{1}$$

в которой $x \in E_n$, $u \in E_m$, $m \leq n$, u-управление, $t \in [0,\infty]$, E_k-k-мерное векторное пространство, $A(t,\mu), B(t)$-матрицы, $f(t,x,u)$ n-мерная вектор-функция, μ-параметр.

Пусть $V(\delta) = \{l \in E_n : |l| \leq \delta\}, Y(\delta) = \{\lambda \in E_q : |\lambda| \leq \delta\}$, $U_0 = \{u(\cdot) : U(t) = B^T(t)l + \varphi(t,\lambda)\}$, $\varphi(t,\lambda)$ — известная вектор-функция, определенная и ограниченнаяна множестве $[0,\infty) \times Y(\delta)$, $\delta > 0$— некоторое число, $(^T)$-знак транспонирования.

Ставится задача — найти число $T_0 > 0$ и управление $U(\cdot) \in U_0$, определенное на сегменте $[0, T_0]$, при котором система (1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее равенствам

$$x(0) = \alpha, x(T_0) = \beta, \tag{2}$$

$\alpha \in E_n$, $\beta \in E_n$.

Заменой переменных $y = x - a - \frac{t}{T}(\beta - \alpha)$ система (1) преобразуется в систему

$$\dot{y} = A(t,\mu)y + B(t)u + f(t, y + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}t, u) + A(t,\mu)(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}t) - \frac{\beta-\alpha}{T}.$$

Краевые условия (2) преобразуются в условия

$$y(0) = 0, y(T_0) = 0. \tag{3}$$

Фиксируем число $T > 0$. Сегмент $[0, T]$ разделим на равные части $[t_{i-1}, t_i]$.

Пусть $\Lambda_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)B^T(\tau)d\tau$.

В предложении, что при любом i $det\Lambda_i \neq 0$, доказывается теорема об условиях разрешимости задачи (1),(3).

Достаточно подробно исследован случай, когда $rang\Lambda_i = r_i$, $0 \leq r_i < n$. Определены достаточные условия разрешимости и неразрешимости задачи (1),(3).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕРНУЛЛИ И РИККАТИ

Тухтасинов М., Нурматов Д. (Ташкент, Национальный университет Узбекистана)
mumin51@mail.ru

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Cx + x \cdot f(x),\ x \in R^n,\ x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \tag{1}$$

где C - постоянная матрица порядка $n \times n$, $f(x)-$ непрерывная скалярная функция в пространстве R^n и является однородной порядка α, т.е. $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$, $\lambda-$действительное число.

Теорема 1. *Задача Коши (1) имеет решение вида*

$$x(t) = \frac{e^{tC}x_0}{\varphi(t)}, t \geq 0,$$

где скалярная функция $\varphi(t)$, $t \geq 0$ определяется следующим образом

$$\varphi(t) = \left(1 - \alpha \int\limits_0^t F(\tau)d\tau\right)^{1/\alpha},\ F(\tau) = f(e^{\tau C}x_0).$$

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши

$$\dot{x} = Cx + x \cdot f(x) + g(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \tag{2}$$

где функция $f(x)$, $x \in R^n$ удовлетворяет вышеуказанным условиям, $g(t)$, $t \geq 0-$ непрерывная вектор-функция.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(t) \geq 0$ решение следующего интегрального уравнения*

$$\varphi(t) = \left(1 - \alpha \int_0^t f\left(e^{\tau C}x_0 + \int_0^\tau e^{(\tau - s)C}g(s)\varphi(s)ds\right)d\tau\right)^{1/\alpha}.$$

Тогда задача Коши (2) имеет решение вида

$$x(t) = \frac{e^{tC}x_0}{\varphi(t)} + \frac{\int\limits_0^t e^{(t-\tau)C}g(\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\varphi(t)}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Узбекистана ОТ-Ф1.096.

Литература

1. В.К.Роменко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Москва-Санкт-Петербург. 2001.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Удалова Г.Ю. (г.Самара)

Рассмотрим для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} = f(x)$$

в области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, -\alpha \ < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ - заданные действительные числа, следующую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup \{y = -\alpha\} \cup D_+ \cup \{y = \beta\}),$$

$$u_y \in C^2(D_- \cup D_+); \tag{1}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x), (x,y) \in D_- \cup \{y = -\alpha\} \cup D_+ \cup \{y = \beta\}; \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = 0, \ u_x(1,y) = 0, \ -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \ u(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0, D_\pm = D \cap \{y \neq 0\}$.

Следуя [1] в данной работе установлено необходимое и достаточ-ное условие для единственности решения задачи (1) – (6), при этом решение самой задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

Литература

1. *Ильин В.А.* Теорема о единственности классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического урав-нения в произвольном цилиндре // Дифференц. уравнения. - 1975. - Т. 11, 7. - С. 110 - 115.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ В R^3

Уткина Е.А.(Казань)
eutkina1@yandex.ru

Нелокальные задачи в граничных условиях, появившись впервые в работах [1],[2], в настоящее время представляют собой интенсивно развивающееся научное направление. Сейчас подобные задачи активно исследуются также с интегральными условиями([3] и др.), но в основном для уравнений второго порядка. В данном сообщении речь идет об уравнении третьего порядка

$$\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} a_{i_1 i_2 i_3}(x_1,x_2,x_3)\partial^{i_1+i_2+i_3}u(x_1,x_2,x_3)/\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3} = f(x_1,x_2,x_3). \tag{1}$$

Задача: Пусть $D = \{x_i \in (0,1), i = \overline{1,3}.\}$*Найти функцию $u(x_1,x_2,x_3) \in C^{1,1,1}(D) \cap C^{0,0,0}(\overline{D})$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям*

$$u(0,x_2,x_3) = \varphi_1(x_2,x_3), u(x_1,0,x_3) = \varphi_2(x_1,x_3), \tag{2}$$

$$\int_0^1 u(x_1,x_2,t)dt = \psi(x_1,x_2), \tag{3}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi$- известные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие соответствующим условиям согласования.

Задача (1)-(3) исследуется путем ее редукции к однозначно разрешимой задаче Гурса [4,§2] с граничными условиями (2) и $u(x_1,x_2,0) = \varphi_3(x_1,x_2)$. В результате приходим к уравнению вольтерровского типа, из которого могут быть получены условия его разрешимости.

Литература

1. Жегалов В.И.//Уч.зап.Казанск.ун-та.1962,т.122, 3.С.3-16.
2. Нахушев А.М.//Дифф.уравнения.1969,т.5, 1.С.44-59.
3. Кожанов А.И.,Пулькина Л.С.//Дифф.уравнения. 2006, т. 42, 9. С.1166-1179.
4. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными// Казань: Казанское матем. общ-во.-2001.-226с.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Фалалеев М.В., Красник А.В., Орлов С.С.
(Иркутский государственный университет)
mihail@ic.isu.ru

В работе методами теории фундаментальных оператор-функций [1, 2] исследуются задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах вида

$$Bu^{(4)} = A_1u^{(2)} + A_0u + f(t),$$

и

$$Bu^{(3)} = A_2u^{(2)} + A_1u^{(1)} + A_0u + f(t),$$

где B – фредгольмов оператор.

Обобщенные решения строятся в классе распределений с ограниченным слева носителем. Исследована связь между обобщенным и классическим решениями таких задач. Полученные теоремы применены к исследованию задач Коши-Дирихле для уравнения обобщенного потенциала электрического поля ионно-звуковых волн в замагниченной плазме [3] и для уравнения колебаний термо-упругой пластины [4].

Литература

1. Фалалеев М.В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах* // СМЖ. 2000. Т. 41, 5. С. 1167–1182.
2. N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithin and M. Falaleev *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
3. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
4. Jaime E. Munoz Rivera, Luci Harue Fatori *Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates* – Math. Meth. Appl. Sci., 1998, Vol. 21, P. 797–821.

О СПЕКТРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Филиновский А.В. (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана)
flnv@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с гладкой границей Γ. Будем рассматривать дифференциальное выражение $lu = -(1/\rho)\,\Delta u$, где $\rho(x) \in C(\overline{\Omega})$ — положительная функция, и гильбертово пространство $L_{2,\rho}(\Omega)$ с нормой $\|u\|^2_{L_{2,\rho}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^2\rho\,dx$. Пусть L — самосопряженное расширение по Фридрихсу в пространстве $L_{2,\rho}(\Omega)$ минимального оператора, порождаемого дифференциальным выражением l. Оператор L является неотрицательным самосопряженным оператором в $L_{2,\rho}(\Omega)$. Спектральные свойства таких операторов изучались разными авторами ([1], [2]).

В данном сообщении рассматривается случай $\rho = r^{-s}$, $r = |x|$, $s \geq 0$. Мы также предполагаем, что границы областей удовлетворяют условию звездности относительно начала координат $(\nu, x) \leq 0$, $x \in \Gamma$, где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ, и $|x| > 1$ в $\overline{\Omega}$. Пусть $S_\eta = \Omega \cap \{r = \eta\}$, $\eta > 0$, и Σ_η есть множество точек x на единичной сфере, удовлетворяющих условию $\eta x \in S_\eta$. Обозначим через $\hat{\lambda}(\eta)$ минимальное по модулю собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами в Σ_η с нулевым условием Дирихле на $\partial\Sigma_\eta$. Пусть $\Lambda = \lim\limits_{\eta\to\infty} |\hat{\lambda}(\eta)|$.

Теорема 1. *Если* $0 \leq s < 2$, *то* $\sigma(L) = [0, +\infty)$; *если* $s = 2$, *то* $\sigma(L) = [(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$; *если* $s > 2$, *то* $\sigma(L) \subset ((n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$.

Доказывается, что при возрастании параметра s при переходе через точку $s = 2$ спектр оператора L из непрерывного становится дискретным. При этом справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого* $\lambda \in \left[(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty\right)$ *существуют постоянная* $C(\lambda) > 0$ *и число* $s_0 > 2$, *такие, что для любого* $s \in (2, s_0]$ *выполнено соотношение* $\sigma(L) \cap (\lambda - \delta(s), \lambda + \delta(s)) \neq \emptyset$, *где*

$$\delta(s) = \left|\hat{\lambda}\left(\ln\ln(1/(s-2))\right)\right| + C\frac{\ln\ln\ln(1/(s-2))}{\ln\ln(1/(s-2))}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1698.2008.1

Литература

1. Lewis R.T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271. P. 653–666.
2. Eidus D.M. // Journal of Funct. Anal. 1991. V. 100. P. 400–410.

ПОСТРОЕНИЕ "ТОЧНЫХ В СРЕДНЕМ"АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

Филиппов А.И., Михайлов П.Н. (СГПА, г. Стерлитамак)
filippovai@rambler.ru

К настоящему времени определен класс практически важных задач сопряжения, описывающих поля температур и концентраций растворов в глубокозалегающих пластах. К ним относятся задачи о температурном поле в нефтеносных пластах при различных воздействиях с целью увеличения нефтеотдачи, при движении жидкостей и газов в пласте и скважине, о концентрации радиоактивных примесей при подземном захоронении и т.д. Решение таких задач имеет практическое значение, как для развития соответствующих технологий, так и для решения экологических проблем.

В цилиндрических координатах осесимметричную задачу сопряжения о температурном поле в пористом пласте представим в следующем виде. Пусть $\hat{L}_i u(r,z,t) = q_i(r,z,t), i = 1,2,$ - уравнения теплопроводности, заданные соответственно в полупространствах $z > 1$ и $z < -1$. $\hat{L}u(r,z,t) = q(r,z,t)$ - уравнение конвективной теплопроводности в области $|z| < 1$. Требуется найти неизвестную функцию $u(r,z,t)$ удовлетворяющую начальному условию $u|_{t=0} = 0$, граничным условиям $u|_{r=0} = 0$, $u|_{r+|z|\longrightarrow\infty} = 0$ и условиям сопряжения $u|_{z=1+0} = u|_{z=1-0}$, $\lambda_1 u_z|_{z=1+0} = \lambda u_z|_{z=1-0}$, $u|_{z=-1+0} = u|_{z=-1-0}$, $\lambda_2 u_z|_{z=-1-0} = \lambda u_z|_{z=-1+0}$. Произведя замены $\lambda_i/\lambda \longrightarrow \varepsilon\lambda_i/\lambda$, получим параметризованную задачу, решение которой ищется в виде асимптотических разложений по формальному параметру ε. При таком введении параметра: 1) задача распадается на последовательность краевых задач для коэффициентов разложения; 2) нулевое асимптотическое приближение решения параметризованной задачи совпадает как с решением осредненной на отрезке параметризованной, так и исходной задач; 3) если краевую задачу для первых коэффициентов асимптотического разложения решать с дополнительным условием $\langle u^{(1)}|_{r=0}\rangle = 0$, то осредненная задача для остаточного члена асимптотического ряда имеет тривиальное решение, а построенное решение в первом приближении называется "точным в среднем"; 4) "точное в среднем"решение не удовлетворяет граничному условию $u|_{r=0} = 0$. Отмеченный недостаток первого приближения легко исправляется построением в окрестности границы погранслойных функций. Построенные решения удобны для практических приложений и физического анализа процессов.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Хаджи И.А. (г.Стерлитамак, Россия)
Oliga–7@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного элиптико-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = f(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β - заданные положительные числа.

Обратная задача. *Найти в области* D *функции* $u(x,y)$ *и* $f(x)$, *удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup \{y = \beta\} \cup D_- \cup \{y = -\alpha\}),$$

$$u_y \in C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x), \quad (x,y) \in D_+ \cup \{y = \beta\} \cup D_- \cup \{y = -\alpha\}; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ \ u(x,-\alpha) = \psi(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где φ, ψ и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

В данной работе следуя [1] установлен следующий критерий единственности решения задачи (1)-(6).

Теорема. *Если существует решение u(x,y) и f(x) задачи (1)-(6), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N$ выполнено условие*

$$\delta_k(\alpha,\beta) = 2(cos\lambda_k\alpha ch\lambda_k\beta - sin\lambda_k\alpha sh\lambda_k\beta - 1) \neq 0.$$

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413, №1. С. 23 – 26.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Халилов Ш.Б.
(Институт математики АН Республики Таджикистан)
E-mail: shavkat58@mail.ru

Как известно, для многомерных эллиптических по И.Г. Петров- скому систем уравнений с частными производными второго порядка классические граничные задачи не всегда поставлены корректно. Примером этого послужит система

$$-\Delta u_j + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

задача Дирихле, для которой в полупространстве не нетерова.

Рассматриваем систему уравнений с частными производными

$$-Lu_j + \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n} l_i(u_i)\right) = f_j(x), \ \ j = \overline{1,n}, \quad L(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_i(\cdot)}{\partial x_i}, \tag{1}$$

$$l_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_k}, \quad \lambda_j(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}(x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_i},$$

$a_{ik}(x)$, $\lambda_{ij}(x) \in C^{1,\alpha}$, $f_j(x) \in C^{0,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$ и $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$ когда $j \neq i$, $\lambda_{ii} = \lambda(x)$. Пусть D_1 – ограниченная область евклидово пространство R^n и пусть в D_1 задана система уравнений (1).

Задача. Найти регулярное в области $D \subset D_1$ решение $u_1, u_2, \cdots,$
u_n системы уравнения (1) удовлетворяющее на границе S области D краевым условиям

$$u_j\big|_S = g_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $g_j(x) \in C^{0,\alpha}$, $\partial D = S$ – поверхность Ляпунова.

Теорема. *Пусть произведение матрицы $A = (a_{ij}(x))$ с кососим- метрической матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij}(x))$ является коммутативным. Тогда, если $\Theta_1 \cap \overline{D} = \oslash$ и $\Theta_2 \cap S = \oslash$, то задача Дирихле (2) для системы (1) фредгольмова, а если $\Theta_1 \cap \overline{D} \neq \oslash$ или $\Theta_2 \cap S \neq \oslash$, то нарушается фредгольмовость поставленной задачи. Здесь Θ_1 множества нулей функции $\lambda(x) - 1$, а Θ_2 множества нулей функции $\lambda(x) - 2$.*

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Халмухамедов А. Р. (Ташкентский Филиал Московского Государственного Университета), Косбергенова М.С. (Национальный Университет Узбекистана)
khalmukhamedov@gmail.com, kosbergenova.marina@gmail.com

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^N)$ оператор $L = -\Delta - V(x)$, с областью определения $D(L) = D^{1,2}(R^N)$, являющейся замыканием $C_0^\infty(R^N)$ по норме $\|u\|_{D^{1,2}(R^N)} = \left(\int\limits_{R^N} |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ и V принадлежит следующему классу потенциалов

$$\Upsilon = \left\{ \begin{array}{ll} V(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i \chi_{S(\tilde{a}_i,r)\cap X\setminus B(0,R)}(x)}{|\tilde{x}-\tilde{a}_i|^2} + \frac{\lambda_\infty \chi_{R^N\setminus B(0,R)}(x)}{|x|^2} + W(x): & r_i, R \in R^+ \\ \tilde{x}, \tilde{a}_i \in R^{N-m}, \lambda_i, \lambda_\infty \in (-\infty, \frac{(N-m-2)^2}{4}), & W \in L^{N/2}(R^N) \cap L^\infty(R^N) \end{array} \right\}$$

где $N-m \geq 3$, $m,k \in N$, $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}_j$ при $i \neq j$ и $S(\tilde{a}_i, r) = \{(\tilde{x}, \bar{x}) \in R^N : |\ \tilde{x} - \tilde{a}_i \ | < r)\}$ и $B(0,R) = \{x \in R^N :$ $|\ x\ | < R)\}$ и $\chi_{S(\tilde{a}_i,r)\cap B(0,R)}(x)$ - характеристическая функция множества $S(\tilde{a}_i, r) \cap B(0,R)$.
Из неравенства Харди и Соболева [1] следует, что для любого $V \in \Upsilon$ первое собственное значение $\nu_1(V)$ оператора $-\Delta - V$ на $D^{1,2}(R^N)$ конечно, т.е.

$$\nu_1(V) = \inf_{u \in D^{1,2}(R^N)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{R^N} \left(|\nabla u(x)|^2 - V(x)u^2(x)\right) dx}{\int\limits_{R^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx} > -\infty.$$

Напомним, что в силу Теоремы 1 работы [2] следует, если $V \in \Upsilon$ с $\lambda_i \leq (N-m-2)^2/4 - 1$ для всех $i = 1, ..., k$, то соответствующий оператор Шредингера L самосопряжен в существенном и следовательно, допускает единственное самосопряженное расширение $\hat{L}$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $V \in \Upsilon$. *Тогда существенный спектр* $\sigma_{ess}(\hat{L})$ *совпадает с отрезком* $[0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $V \in \Upsilon$ *и* $\nu_1(V) < 0$. *Тогда дискретный спектр* $\hat{L}$ *состоит из конечного числа отрицательных собственных значений.*

Литература

1. V.Felli, E.M.Marchini, S.Terracini. *On Schrodinger operators with multipolar inverse-square potentials. arXiv:math/AP/0602209*, 2006 .

2. А.Р. Халмухамедов, М.С. Косбергенова, *О самосопряженности в существенном оператора Шредингера с сильно сингулярным на многообразиях потенциалом,*
Вестник НУУз (2008), p.p 67 – 70.

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Ходжаниязов А.Г. (г. Ташкент)
mathinst@uzsci.net

Постановка задачи. В области $D = \{(x,y) : -1 < x, y < 1\}$ найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u_{yy}) + au_{xy} + \lambda u = 0, a \in R, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{\partial D} = 0, \ u(0,y) = 0. \tag{2}$$

Применение к решению задачи (1),(2) метода Фурье приводит нас к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X''' + \mu X' + \lambda X = 0, \ X(-1) = 0, \ X(0) = 0, \ X(1) = 0, \tag{3}$$

$$Y'' + aY' + \mu Y = 0, \ Y(-1) = 0, Y(1) = 0. \tag{4}$$

Собственные функции задачи (4) имеют вид

$$Y_n(y) = \exp\left(-\frac{a}{2}y\right) \sin\frac{n\pi(y-1)}{2}, \ \mu_n = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, n = 1, 2, ...$$

Лемма 1. *Система функции* $\left\{\exp\left(-\frac{a}{2}y\right)\sin\frac{n\pi(y-1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в* $L_2(-1,1)$.

Лемма 2. *Система функции* $\left\{\exp\left(-\frac{a}{2}y\right)\sin\frac{n\pi(y-1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *образует базис Рисса в* $L_2(-1,1)$.

Собственными функциями задачи (3) будут

$$Y_n(y) = \exp(b_m x)\sin m\pi x, b_m = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + (2m\pi)^2 + (n\pi)^2}.$$

Литература

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1734-1745.
2. Моисеев Е.И. // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094-1100.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

ПЕРВАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Хребтова С.С. (Воронежский государственный университет)
SumeraS@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \varepsilon(t)u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in T = [t_0, t_1]$, u — искомая функция, ε, f — случайные процессы, $u_0(x)$ — случайный процесс, независимый с случайными процессами ε, f. Пусть $\overset{x}{*}$ — знак свертки по переменному x, ε задано характеристическим функционалом [1]

$$\varphi(v,\omega) = M(\exp(i\int_T \varepsilon(s)v(s)ds + i\int_T\int_{R^3} f(s,\tau)\omega(s,\tau)dsd\tau)).$$

Пусть $F[f(x)](\xi)$— преобразование Фурье функции f по переменному x, $F^{-1}[\phi(\xi)](x)$ — обратное преобразование Фурье, $\chi(t_0,t,s) = sign(s-t_0)$ при условии, что s принадлежит отрезку с концами t_0, t и $\chi(t_0,t,s) = 0$ в противном случае, $\frac{\delta f(x)}{\delta x(t)}$ — вариационная производная [1].

Теорема 1. *Обобщенное математическое ожидание $M(u(t,x))$ решения задачи (1), (2) выражается формулой*

$$M(u(t,x)) = \frac{1}{4\pi(t-t_0)}exp(-\frac{x_2^2+x_3^2}{4(t-t_0)}) \overset{x_2x_3}{*} (M(u_0(x)) \overset{x_1}{*}$$
$$\overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}[\varphi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),0)](x_1)) - i\int_{t_0}^{t} \frac{1}{4\pi(t-s)}exp(-\frac{x_2^2+x_3^2}{4(t-s)}) \overset{x_2x_3}{*}$$
$$\overset{x_2x_3}{*} F_{\xi_1}^{-1}[F_{x_1}[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(s,t,\cdot),0)}{\delta\omega(s,x)}](\xi_1)](x_1)ds.$$

Автор выражает благодарность профессору Воронежского государственного университета, заведующему кафедрой "Нелинейных колебаний"Задорожнему Владимиру Григорьевичу.

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа/В.Г. Задорожний, М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006.- 316 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Царьков И.Г. (Москва, МГУ)
tsar@mech.math.msu.su

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - компактная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, являющаяся замыканием своей внутренности Ω_0. Рассмотрим отображение $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функции $\varphi_i : \Omega \to \mathbf{R}$, принадлежащие пространству $L_q(\Omega)$ при $q \in (1, +\infty]$. Изучим две квазилинейные неоднородные задачи Дирихле ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} \Delta u_i = F(x, u_i) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0 \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.i}$$

Рассмотрим следующие условия на F :

а). $n \geqslant 2$; б). $q > \frac{n}{2}$, $\varphi_i \in L_q(\Omega)$; в). Найдутся функции $r(x) \in L_\eta(\Omega)$ $(\eta > \frac{n}{2})$, $\lambda \in L_1(\Omega)$ и $\mu_1, \mu_2 \in C(\mathbb{R}_+)$ такие, что $|F(x,u)| \leqslant \lambda(x)\mu_1(|u|)$, и для любых $(x,u_1),(x,u_2) \in \Omega\times\mathbb{R}$ выполнено неравенство: $|F(x,u_1) - F(x,u_2)| \leqslant r(x)\mu_2(v)|u_1-u_2|$, где $v = \max\limits_{i=1,2}|u_i|$.

г). Найдется число $k \geqslant 0$ такое, что для всех $(x,u) \in \Omega\times\mathbb{R} : |u| \geqslant k$ выполнено неравенство: $F(x,u)\mathrm{sign}(u) \geqslant -D|u| + c(x)$, где $c : \Omega \to \mathbb{R}$ – некоторая функция из $L_q(\Omega)$, а D – некоторое число из полуинтервала $[0,\gamma^{-2})$, и γ – наименьшая константа в неравенстве Фридрихса.

Пусть $M = \max\{\|r\|_{L_\eta(\Omega)}, \|\lambda_1\|_{L_1(\Omega)}, \|c\|_{L_q(\Omega)}\}$. Положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Для произвольного числа $\delta > 0$ через Q_δ обозначим пересечение области Ω с δ-окрестностью ее границы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия а) – г), $\eta \geqslant q, \beta \in (0,1] : \beta + \frac{n}{\eta} < 2, \nu = \frac{1}{2}(\beta + \frac{n}{\eta})$, и u_i – обобщенные решения из класса $W_2^1(\Omega)$ задач (1.i), непрерывные на Ω. Тогда найдутся константы $\mathcal{P}, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от $\delta, \beta, (1-D\gamma^2), M, q, \eta, k, \Omega, \mu_1, \mu_2$, и такие, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и всякой ε-сети Γ во множестве Q_δ условие $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ влечет неравенство: $\|u_1-u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mathcal{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^{\frac{\beta}{\nu}}$.*

В частности, из этой теоремы вытекает, что если $\varphi_1 = \varphi_2$, то $u_1 = u_2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00160).

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ВЯЗКИХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Цветков Д.О. (Таврический национальный университет)
tsvetdo@gmail.com

Изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы состоящей из двух тяжелых вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, плотности, которых в состоянии равновесия имеют устойчивую стратификацию.

Проведено построение, которое позволяет получить аналог известного ортогонального разложения Вейля, пространства вектор-функций суммируемых с квадратом по области, приспособленного к исследованию данной задачи. Путем проектирования уравнений движения на соответствующие ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов начально-краевая задача, описывающая малые движения данной гидродинамической системы, проводится к задаче Коши. Используя известные теоремы о разрешимости абстрактно параболических уравнений, удается доказать теорему о существовании и единственности сильного решения исходной начально-краевой задачи.

Задача о нормальных колебаниях исходной гидросистемы приведена к задаче на собственные значения для операторного пучка С.Г.Крейна. На его основе показано, что существуют диссипативные волны со сколь угодно большими декрементами затухания, также внутренние и поверхностные (вблизи границы раздела) волны со сколь угодно малыми декрементами затухания. Обсуждаются вопросы базисности мод различных типов волн, свойства спектра задачи.

СТАТИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Никонов В.В., Цирулев А.Н. (Тверской госуниверситет)
tsirulev@tversu.ru

Известен ряд точных асимптотически плоских решений уравнений Эйнштейна для безмассовых [1] и нелинейных скалярных полей с отрицательным [2] и положительным [3] кинетическим членом. Для действия и метрики в форме

$$S = 1/(8\pi)\int(-R/2 + \varepsilon\langle d\phi, d\phi\rangle - 2V(\phi))\sqrt{-g}\,d^4x\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,,$$

$$ds^2 = f\sigma^2dt^2 - dr^2/f - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\,, \quad f = f(r)\,, \sigma = \sigma(r)\,,$$

мы нашли формальное общее решение обратной задачи ($' = d/dr$):

$$\sigma = \exp\left\{-\int_r^\infty \varepsilon\phi'^2 r dr\right\}, \; Q = r - 3m + \int_r^\infty (1-\sigma)dr\,,$$

$$f = \frac{r^2}{\sigma^2}\left(a + 2\int_r^\infty \frac{Q\sigma}{r^4}dr\right)\,, \; V(r) = -\frac{1}{2}\left(\frac{f\sigma'}{r\sigma} + \frac{f'}{r} + \frac{f-1}{r^2}\right);$$

выбирая монотонную функцию $\phi(r)$, находим метрику и функцию $V(r)$, а затем находим потенциал самодействия $V(\phi)$ как функцию поля. Для асимптотически плоских решений уравнений Эйнштейна $a = 0$, а параметр m – шварцшильдова масса.

Для действия с положительным кинетическим членом методом обратной задачи получены новые семейства асимптотически плоских точных решений. Рассматривается обратная задача устойчивости в следующей постановке: найти класс положительных на пространственной бесконечности потенциалов нелинейного скалярного поля, для которых регулярные конфигурации или чёрные дыры существуют и устойчивы относительно радиальных возмущений.

Литература

1. Фишер И.З. ЖЭТФ, 1948, **18**, 636. Bronnikov K.A. Acta. Phys. Pol., 1973, **B4**, 251.
2. Dennhardt H., Lechtenfeld O. Int. J. Mod. Phys., 1998, **A13**, 741. Bronnikov K.A., Fabris J.C. Phys.Rev.Lett., 2006, **96**, 251101.
3. Bronnikov K.A., Shikin G.N. Grav. & Cosmol., 2002, **8**, 107. Bronnikov K.A., Chernakova M.S., Grav. & Cosmol., 2007, **13**, 51. Nikonov V.V., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. Class. Quantum Grav., 2008, **25**, 138001.

ЭКПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЛОШНОЙ ЧАСТИ ЛАМИНАРНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ СТРУИ

Цун И.М. (Магнитогорский государственный университет)

E-mail: tsoun@masu.ru

В экспериментальных исследованиях искомую зависимость в безразмерной форме находили в виде: $L = F(Re, We, H)$, где $L = l/d$, $Re = v\rho d/\mu$, $We = v\sqrt{\rho d/\sigma}$, $H = h/d$, l – длина сплошной части капиллярной струи моделируемой жидкости (образца), d – выходной диаметр капилляра, ρ – плотность, σ – поверхностное натяжение и μ – динамическая вязкость жидкости, v – скорость истечения жидкости, h – длина капилляра.

Зависимость длины l сплошной части капиллярной струи от скорости от 0 до критического значения $v_{кр}$ последней в относительных единицах от числа We хорошо аппроксимируется прямой (рисунок, а): $L = 17,58 \cdot We$. Зависимость максимальных значений L_m относительной длины сплошной части струи от относительной длины H капилляра и зависимость соответствующих значений числа Рейнольдса Re_m, вычисленного для критических значений $v_{кр}$ скорости (рисунок, б и в): $L_m = 102\cdot[1+2,77\cdot exp\,(-3,80\cdot 10^{-2}\cdot H)]$, $Re_m = 2108\cdot[1+5,62\cdot exp\,(-6,41\cdot 10^{-2}\cdot H)]$, 99,9-процентные доверительные интервалы нанесены на графиках. При уменьшении длины H капилляра от значения 100 диаметров значение критического числа Re_m возрастает от 2108 и соответственно возрастает наибольшая относительная длина L_m сплошной части струи.

Как известно, при движении жидкости в трубах большой длины переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при $Re = (2100 \div 2300)$. Известно также, что при турбулентном движении в трубах в начале потока существует начальный участок, на котором имеет место ламинарное движение.

Полученные данные дают основания считать, что критическое значение скорости $v_{кр}$ и соответственно наибольшая длина l_m сплошной части струи определяются исключительно режимом движения потока жидкости при выходе из канала капилляра. Величины $v_{кр}$ и l_m, по-видимому, соответствуют началу перехода ламинарного движения жидкости на срезе капилляра заданной длины в турбулентное.

Есть основания считать, что при малых значениях H ($H < 20$) имеет место некоторое уменьшение наибольшей длины L_m сплошной части струи. Это можно объяснить турбулезирующим влиянием входных кромок канала капилляра на поток жидкости.

Благодарности. В обсуждении результатов этих экспериментов принимали участие заведующий кафедрой "Промышленная теплоэнергетика" Южно-Уральского государственного университета (г. Челябинск), Заслуженный деятель науки и техники, академик АИН, доктор технических наук, профессор Е.В.Торопов и профессор кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (г. Москва), Заслуженный профессор Московского университета, доктор физико-математических наук, профессор В.Я.Шкадов.

Литература

1. Троцкий Я. К вопросу о распадении жидкой струи на капли. // ЖТФ, 1933. - Т. III. - Вып. 5. - С. 729-743.

2. Некоторые особенности тепломассообмена при экструдировании расплавленных металлов для получения литой проволоки. / Г.К. Субботин, И.М. Цун, В.П. Петышин, В.И. Лукьянов. // Теплотехника процессов выплавки сталей и сплавов. - Свердловск: изд-во УПИ, 1977. - Вып. 5. - С. 31-37.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Механика сплошных сред. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 788 с.
4. Цун И.М. Исследование влияния условий истечения на длину сплошной части капиллярной струи. // Материалы XV Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2007), г. Алушта. - М.: Вузовская книга, 2007. - 544 с. - С. 503-504.
5. Kavesh Sh. Melt spinning of metal fibers // American Institute of Chemical Engineers. Symposium Series, 1978. - V. 74. - 180. P. 1-15.
6. The Production of Metal Fibres and Wires Directly from the Melt / I.G. Butler, W. Kurz, J. Gillot, B. Lux // Fibre Science and Technology, 1972. - 5. P. 243-262.

УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ, СИГУЛЯРНО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПО ВРЕМЕНИ

Чепыжов В.В. (ИППИ РАН)
chep@iitp.ru

Рассматривается диссипативное неавтономное волновое уравнение следующего вида:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \gamma \partial_t u + f(u) = g_0(t) + \varepsilon^{-\rho} g_1(t/\varepsilon).$$

Здесь $\rho \in [0, 1]$, и $\varepsilon > 0$ – малый параметр, отражающий скорость осцилляций по времени и рост амплитуды внешней силы, стоящей в правой части уравнения. Одновременно рассматривается усредненное уравнение

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \gamma \partial_t u + f(u) = g_0(t),$$

которое формально соответствует предельному случаю $\varepsilon = 0$.

При выполнении подходящих условий для нелинейной функции $f(u)$ и для внешней силы доказана равномерная (по ε) ограниченность глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ этих уравнений в энергетическом пространстве $E = H_0^1 \times L_2$.

Если $\rho < 1$, то доказана теорема о сходимости глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ первого уравнения к глобальному аттрактору $\mathcal{A}^0$ второго уравнения в энергетической норме при $\varepsilon \to 0^+$. При $\rho = 1$ показано, что сходимость может нарушаться.

Предполагая, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ усредненного уравнения является экспоненциально притягивающим множеством, доказана явная степенная (по ε) оценка для хаусдорфова отклонения в пространстве E множества $\mathcal{A}^\varepsilon$ от множества $\mathcal{A}^0$ вида $M\varepsilon^\eta$, для некоторых $M \geq 0$ и $\eta = \eta(\rho) \in (0, 1)$.

Доклад основан на совместных работах с М.И.Вишиком и В.Пата.

Научные исследования выполнены при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00784 и 07-01-00500.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Чуканов С.В. (Москва, ВЦ РАН)

В экономической теории и приложениях важную роль играют модели, формализованные в виде вариационных задач $\int_0^\infty L(x, \dot{x}, \delta) e^{-\delta t} \to \inf$ с некоторыми дополнительными ограничениями. Полное исследование сценариев развития динамической сложности в этих моделях весьма проблематично. Однако, в качестве паллиатива удается построить достаточно богатое множество параметризованных семейств задач указанного типа, сводящихся к уравнениям оптимального синтеза $\dot{y} = Ay + \delta y + G'(y)$, где A – произвольная устойчивая матрица, G – выпуклая функция, тейлоровское разложение в нуле которой начинается с членов выше третьего порядка, а y – задает отклонение решения от стационарной экстремали (магистрали), вычисленной при соответствующем значении параметра. Специфику полученного класса семейств динамических систем можно пояснить на характерном примере системы взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля, получающейся в случае, когда матрица A составлена из диагональных блоков $\begin{pmatrix} \delta_k & -a_k \\ a_k & \delta_k \end{pmatrix}$, где $\{\delta_k\}$ - набор положительных чисел, $G(y) = \sum y_k^4 + \varepsilon R(y)$, а функция R задает потенциал взаимодействия. При $\varepsilon = 0$ система распадается на множество не связанных осцилляторов, «оживающих» при прохождении δ (бифуркационных) значений δ_k и иллюстрирующих процесс рождения устойчивых инвариантных торов. Более сложный процесс деформации и разрушения инвариантных торов по мере роста ε приходится исследовать численно. При этом отслеживаются экспоненциальная неустойчивость траекторий на аттракторе, появление широкополосных спектров, изменения (локальной) топологической размерности аттрактора, строятся инвариантные меры (в частотном приближении). Насколько позволяют судить численные эксперименты, по мере усиления взаимодействия происходит процесс синхронизации колебаний, характеризующийся уменьшением топологической размерности аттрактора, проходящего различные фазы странного, хаотического и нехаотического характера.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ – 2982.2008.1 и РФФИ 07-01-00703.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ МОДЕЛИ КРОУ–КИМУРЫ

Шагалова Л.Г. (Екатеринбург)
shag@imm.uran.ru

Рассматривается следующая задача Коши, приведенная в [1] для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции.

$$\partial u/\partial t + H(u', x) = 0, \quad [1]$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad [2]$$

Здесь $u' = \partial u/\partial x, \quad 0 \le t < \infty, \quad -1 \le x \le 1$, а гамильтониан задан соотношением

$$-H(u', x) = f(x) - 1 + \frac{1+x}{2}e^{2u'} + \frac{1-x}{2}e^{-2u'}, \quad [3]$$

где $f(x)$ – функция приспособленности.

Для решения задачи ([1]–[2]) справедливо представление

$$u(t, x) = (f(x) - 1)t + u^*(t, x),$$

где функция $u^*(t, x)$ – решение задачи Коши с тем же начальным условием ([2]), но для уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом, не зависящим от функции приспособленности.

Проводится анализ задачи для нахождения функции u^*.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00410) и Программы Президента РФ «Ведущие научные школы» (проект НШ-8512.2006.1).

Литература

1. D.B. Saakian, O. Rozanova, A. Akmetzhanov. Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution., Physical Review E 78, 041908 (2008)

2. А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Жуков. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит. 2005.

3. Р. Курант. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1964.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Шамин Р.В. (Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН)
roman@shamin.ru

Рассматриваются абстрактные системы Коши-Ковалевской в шкалах гильбертовых пространств. Для таких эволюционных уравнений известны результаты о локальной по времени разрешимости. В настоящей работе рассматриваются конструктивные методы позволяющие оценить время существования индивидуальных решений. Методы основаны на аппроксимации системы Коши-Ковалевской системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученные методы продемонстрированы на нелинейных системах, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. В частности, эти методы находят свое применение при моделировании такого сложного и интересного эффекта в океанологии, как «волны-убийцы».

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 07-01-00268-а, 07-05-00648-а, 07-05-92211-НЦНИЛ_а.

Литература

1. Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.

2. Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления — 2007. — *21*, — С. 133-148.
3. Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — *418*, № 5. — С. 112-113.

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

Шамолин М. В. (Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова)
shamolin@imec.msu.ru

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Автор не претендует в данном вопросе на некое первенство. Но при исследовании "маломерных" уравнений движения вполне конкретных тел пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогичном поле неконсервативных сил. В результате были найдены два случая интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы. Новизна результатов объясняется тем, что в системе присутствует (сильно) неконсервативная сила.

Ранее [1] была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в среде, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. Здесь все взаимодействие среды с телом сосредоточено на части поверхности тела, имеющей форму (одномерной) пластины. Позднее (см. также [1]) плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь все взаимодействие сосредоточено на части поверхности тела, имеющей форму плоского (двумерного) диска.

В работе исследуются уравнения движения динамически симметричного твердого тела в двух логически возможных случаях — в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00231-а).

Литература

1. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд–во "Экзамен", 2007. — 352 с.

О ПРОДОЛЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шананин Н. А. (Москва)
nashananin@inbox.ru

Пусть $u \in C^\infty(\Omega)$ - решение квазилинейного уравнения

$$\sum_{m-\mu<\langle\varrho,\alpha\rangle\le m} a_\alpha(x,[u]_{m-\mu}(x))\,\partial^\alpha u = f(x,[u]_{m-\mu}(x)), \quad [1]$$

со взвешенными производными и бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Здесь $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1+\ldots+\varrho_n\alpha_n$- взвешенный порядок ∂^α, $\varrho\in\mathbb{N}^n$, $\mu=\min_j \varrho_j$, $[u]_k(x)$ - совокупность всех производных $u(x)$ в точке x, для которых $\langle\varrho,\alpha\rangle\le k$. Пусть

$$\mathcal{H}_u(x,\xi,h)=\sum_{k=0}^{\mu-1}h^k\sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=m-k} a_\alpha(x,[u]_{m-\mu}(x))(i\xi)^\alpha,$$

- пучок символов уравнения на решении $u(x)$, $(x,\xi,h)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Пусть $\xi'=\{\xi_j|\varrho_j=\mu\}$ и $\xi''=\{\xi_j|\varrho_j>\mu\}$, аналогично $x=(x',x'')$. Пусть $T: C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega_T)$ - отображение, сохраняющее решения, $x^0\in\Omega\cap\Omega_T$ и $\mathcal{F}_{x^0}$ - связная компонента слоя $\{x\in\Omega\cap\Omega_T|x''=x''^0\}$, содержащая x^0. Предположим, что для каждой точке $y\in\mathcal{F}_{x^0}$ и любых неколлинеарных векторов (ξ'^0,ξ''^0) и $(\eta'^0,0)$ существует окрестность W точки $(y,\eta'^0,\xi^0,0)$, в которой уравнение $\mathcal{H}_u(x,z\eta'+\xi',\xi'',h)=0$ имеет только простые корни, прич.м для каждого из них либо мнимая часть корня тождественно равна нулю в W, либо отлична от нуля во всех точках W. Пусть u_y - росток u в точке y.

Теорема 1. $(Tu)_{[x^0]} = (u)_{[x^0]} \Rightarrow (Tu)_{[x]} = (u)_{[x]}, \quad \forall x \in \mathcal{F}_{x^0}$

Сужения ростков $u_{[x^0]}$ и $v_{[x^0]}$ на росток гиперповерхности $S_{[x^0]}$ назов.м k-эквивалентными, если $(\partial^\alpha(u-v))|_S = 0$ при $|\alpha| \leq k$ для каких-либо их представителей u, v и S. Класс k-эквивалентности назов.м k-ростком сужений. Пусть $k = m/\mu$ и $S_{[x^0]}$ - росток нехарактеристической на u для [1] гиперповерхности. Тогда k-росток сужений однозначно определяет росток решения в x^0. Пусть t - k-ростков сужений и $t((v)_{S_{[x^0]},k}) = (Tv)_{S_{[x^0]},k}$ для любой функции $v \in C^\infty(\Omega)$.

Теорема 2. $t((u)_{S_{[x^0]},k}) = (u)_{S_{[x^0]},k} \Rightarrow (Tu)_{[x]} = (u)_{[x]}, \quad \forall x \in \mathcal{F}_{x^0}$

Аналоги теорем 1 и 2 справедливы для локальных групп преобразований сохраняющих решения.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шарин Е.Ф. (Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова)
eugene_sharin@mail.ru

В работе рассматривается случай односторонних спутных по- токов, на границе раздела которых выполняются общие условия согласования.

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, где либо область в R, либо $\Omega \equiv R$, причем $0 \in \Omega$. В области D рассмотрим уравнение

$$f(x)u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + d(x,t). \tag{1}$$

Пусть в уравнении (1) функция $f(x) > 0$ и терпит разрыв в точке 0. Решение уравнения (1) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий

$$u(x,0) = u_0(x)(x \in \Omega^+), \; u(x,0) = u_1(x)(x \in \Omega^-), \tag{2}$$

и условий непрерывности производных до 1-го порядка. В работе будет рассматриваться общий случай сопряжения потоков

$$\begin{pmatrix} u(+0,t) \\ ux(+0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(-0,t) \\ ux(-0,t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где a_{ij} – элементы невырожденной матрицы.

Методом параболических потенциалов простого слоя с неизвест- ными плотностями α, β построенных при помощи фундаменталь- ного решения краевая задача (1) – (3) приводится к решению си- стемы двух уравнений.

Если решение поставленной задачи разыскивать из простран- ства Гельдера $H^{p,p/2}_{x\ t}$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $l \geq 1$, то для однозначной разрешимости краевой задачи (1) – (3), необходимо и достаточно, в зависимости от элементов a_{ij} матрицы условий сопряжения, выполнение $[p]+1$ или $[p]$ условий на данные задачи вида:

$$Ls(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \; s = 1, ..., [p] + 1, \tag{4}$$

где L_s – интегральные операторы от функций u_0, u_1.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ И ГИБРИДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Шафаревич (МГУ)
shafarev@yahoo.com

Дифференциальные уравнения и дифференциальные операторы на сингулярных пространствах (т.е. на пространствах, не являющихся гладкими многообразиями) активно изучаются в последние десятилетия. В докладе обсуждаются квазиклассические асимптотики для уравнений Шредингера на графах и гибридных пространствах (т.е. пространствах, получающихся из графа заменой вершин на гладкие многообразия). Рассматриваются как спектральные задачи для оператора Шредингера, так и задача Коши для нестационарного уравнения. Описывается связь квазиклассической асимптотики спектра с геометрией пространства и с инвариантными множествами соответствующей классической гамильтоновой системы. Исследована асимптотика при больших временах решения задачи Коши на графе; она оказывается связанной с топологией графа и в ряде случаев выражается через число целых точек в расширяющемся симплексе.

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ КАСАНИЯ И ПСЕВДО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ

Шильников Л.П. (Нижний Новгород)
lpshilnikov@mail.ru

В настоящее время хорошо известно, что наличие в системе гомоклинического касания – гомоклинической орбиты Пуанкаре седлового периодического движения L, по которой касаются W_L^s и W_L^u – является признаком особо сложного поведения траекторий как самой системы, так и, в особенности, близких к ней. В частности, последние могут образовывать области, в которых плотны системы с периодическими и гомоклиническими траекториями любых порядков вырождения, со счетным множеством модулей топологической и Ω-эквивалентности (эквивалентности на неблуждающих множествах) и т.п., см. [1,2]. С позиций же нелинейной динамики гомоклинические касания интересны тем, что их бифуркации приводят к рождению аттракторов различных типов – периодических, квазипериодических (торов), аттракторов типа Бенедикса-Карлесона. Последние являются негрубыми, так как на их месте при малых возмущениях возникают устойчивые периодические движения.

Однако, гомоклинические бифуркации могут приводить и к настоящим странным аттракторам. В частности, у трехмерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с неподвижной точкой типа седло-фокус, которая либо обладает гомоклиническим касанием, либо входит в негрубый гетероклинический контур, могут существовать странные аттракторы псевдо-гиперболического типа. Их природа во многом аналогична природе аттракторов Лоренца при малых периодических возмущениях. Указанные аттракторы относятся также к классу диких гиперболических аттракторов, поскольку содержат нетривиальные гиперболические множества, инвариантные многообразия которых пересекаются нетрансверсально.

В докладе будет дан обзор этих и близких результатов.

Литература

1. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. *Современная математика и приложения*, 2003, т.7, 92-118.
2. Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D. *Nonlinearity*, 2008, v.21, 923-972.

О КРАТНОЙ ВОЗВРАЩАЕМОСТИ

Шкредов И.Д. (Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
ishkredov@rambler.ru

Доказан количественный результат о кратной возвращаемости почти всех точек в произвольной динамической системе (X, Ω, μ, G) с группой G, порожденной операторами S, T и T^2, где S и T – коммутируют.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ N 06-01-00383, гранта им. П. Делиня (фонд Бальзана 2004), и гранта НШ-691.2008.1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛИРУЕМОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Галатенко В.А., Костюхин К.А., Малиновский А.С., Шмырев Н.В. (Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва)
galat@niisi.msk.ru, kost@niisi.msk.ru, asm@niisi.msk.ru, shmyrev@niisi.msk.ru

Моделирование сложной распределенной системы вычислений требует наличия формализма, позволяющего описать объекты системы и их взаимодействие, унифицировать подходы к описанию вычислений. В данной работе предлагается модель вычислений, описывающая основные аспекты контролируемого выполнения распределенных ответственных приложений реального времени, включающая в себя следующие положения:

- Статическая и динамическая верификация корректности
- Оптимизация и проверка результатов оптимизации
- Отказоустойчивость
- Представление вычислений с разной степенью детализации
- Возможность описания ресурсов

В качестве модели приложения используется система переходов [1], в качестве общей спецификации – логика действий со временем (TLA - Temporal Logic of Actions) [2].

Отказы моделируются с помощью множества «отказопорождающих» действий, которые изменяют состояние так же, как и обычные вычисления. Отказоустойчивость обеспечивается проведением корректирующих действий. Как показано в работе, доказательство отказоустойчивости в такой модели не отличается от доказательства функциональной корректности.

Программы и спецификации описываются в модели TLA как логические формулы, таким образом позволяя устанавливать правила вывода и описывать выполнение без учета времени, выполнение с учетом времени, отказы и планируемость.

Естественно описывать вычисление несколькими моделями, отражающими различные аспекты приложения, например, модель памяти и модель занимаемой пропускной способности сети могут быть различными, дополняя основную модель вычислений. Кроме того, набор ограничений и утверждений о приложении может быть достаточно разнородным и задаваться:

- результатами тестирования;
- выведенными в процессе анализа приложения утверждениями;
- проверками во время выполнения;

Возможность учета понятия оптимизации является естественным требованием к формальной модели приложения. В работе рассмотрены две проблемы, возникающие при этом - проблема проверки корректности оптимизирующего преобразования и проблема количественного определения результатов оптимизации.

В данной работе предложена формальная модель процесса вычислений, позволяющая описывать и доказывать свойства распределенных, отказоустойчивых вычислений. Эта модель может являться основой для применения формальных методов в среде контролируемого выполнения, обеспечивающей разработку и выполнение встраиваемых приложений [3].

Литература

1. Pnueli A. The temporal logic of programs // 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — 1977. — Pp. 46–57.

2. Lamport L. The temporal logic of actions // ACM Transactions on Programming Languages and Systems. — 1994. — Vol. 16(3). — Pp. 872–923.

3. Вьюкова Н. И., Галатенко В. А., Костюхин К. А., Шмырев Н. В. Организация отладочного комплекса для целевых систем со сложной архитектурой // Информационная безопасность. Микропроцессоры. Отладка сложных систем / под ред. Бетелина. — М.: НИИСИ РАН, 2004. — С. 120–150.

К ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Шукуров Х.Р.
(Таджикский национальный Университет, г. Душанбе)
shavkat58@mail.ru

Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned} s_{xx}+s_{yy}+s_{tt}-2v_{tx}=0,\\ v_{xx}+v_{yy}+v_{tt}-2s_{tx}=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где характеристическое уравнение

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left[(\lambda_1-\lambda_3)^2+\lambda_2^2\right]\left[(\lambda_1+\lambda_3)^2+\lambda_2^2\right]=0$$

имеет комплексные корни $\lambda_2=\pm i(\lambda_1\pm\lambda_3)$. Когда $\lambda_1=\pm\lambda_3,\quad \lambda_3\neq 0$ имеет и ненулевые действительные корни $\lambda_1=\pm\lambda_3,\quad \lambda_3\neq 0,$
$\lambda_2=0.$

Задача Дирихле. Требуется найти в полупространстве $t>0$ решение s,v системы (1) удовлетворяющее при $t=0$ краевым условиям

$$s(x,y,0)=f(x,y),\quad v(x,y,0)=g(x,y), \tag{2}$$

где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – заданные ограниченные на бесконечности функции класса $C^2(R^2)$.

Доказывается, что решение задачи (1) – (2) представимо в виде

$$s(x,y,t) = \frac{2t}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\frac{x+y}{2}+h,y)}{(x-y-2h)^2+4t^2}dh + \frac{2t}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(x,h-\frac{x-y}{2},y)}{(x+y-2h)^2+4t^2}dh,$$

$$v(x,y,t) = \frac{2t}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\frac{x+y}{2}+h,y)}{(x-y-2h)^2+4t^2}dh - \frac{2t}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(x,h-\frac{x-y}{2},y)}{(x+y-2h)^2+4t^2}dh,$$

где α и β линейно выражаются через функции f и g.

Также задача Дирихле исследуется для многомерного аналога системы (1)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2n} s_{x_i x_i} + s_{tt} - 2\sum_{i=1}^{n} w_{x_{2i-1}x_{2i}} = 0,\\ &\sum_{i=1}^{2n} w_{x_i x_i} + w_{tt} - 2\sum_{i=1}^{n} s_{x_{2i-1}x_{2i}} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Сингулярные возмущения в задаче воспламенения частиц металлов

Щепакина Е.А. (Самарский государственный университет)
shchepakina@yahoo.com

К числу традиционных объектов применения методов возмущений относятся динамические системы с быстрыми и медленными переменными, которые обычно описываются сингулярно возмущенными дифференциальными системами. Техника асимптотических разложений Мищенко–Розова используется для приближенного построения специальных траекторий таких систем. Полученные математические результаты применены к исследованию критических явлений в процессах воспламенения частиц металлов.

Воспламенение и горение частиц металлов является важной частью различных приложений, включая аэрокосмические и химические технологии, наземный транспорт и индустриальную безопасность. Использование металлов в качестве высокоэнергетического топлива осложнено формированием окисной пленки на поверхности горючего. Эта пленка препятствует непосредственному взаимодействию между металлом и газообразным окислителем. Как следствие, для большинства законов окисления металлов характерна зависимость от физических свойств и толщины окисной пленки, возникающей на поверхности металла.

Тепло, выделяемое в процессе реакции окисления может, в одном случае, привести к разогреву частиц металла до высоких температур, в результате чего, происходит воспламенение и, как следствие самоускорения химической реакции, взрыв (*суперкритический режим*). В другом случае, когда есть время на отвод тепла, реализуемого в процессе реакции окисления, из реакционной фазы в окружающую среду, воспламенения не происходит; температура частицы достигает максимального значения и затем убывает до температуры окружающего газа (субкритический режим).

В данной работе с помощью специальной асимптотической формулы найдены условия, при которых в химической системе наблюдается критический режим, разграничивающий области субкритических и суперкритических режимов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-01-00169а).

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юмагулов М.Г. (Сибайский институт Башкирского государственного университета, г. Сибай)
yum_mg@mail.ru

Рассматривается зависящее от скалярного или векторного параметра λ дифференциальное уравнение

$$x' = f(x,\lambda), \;\; x \in R^N, \tag{1}$$

в предположении, что оно при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ имеет нестационарное T_0-периодическое решение $x = \varphi_0(t)$.

Линеаризованная при $\lambda = \lambda_0$ в окрестности периодического решения $x = \varphi_0(t)$ система

$$h' = A(t)h\,, \quad h \in R^N\,, \tag{2}$$

где $A(t) = f'_x(\varphi_0(t), \lambda_0)$, имеет нестационарное T_0-периодическое решение $x = \varphi'_0(t)$ и, следовательно, один из мультипликаторов системы (2) равен 1.

В докладе рассматривается ситуация, когда периодическое решение $x = \varphi_0(t)$ системы (1) является негиперболическим. А именно, предполагается, что система (2) имеет в точности два мультипликатора ρ_0 и ρ_1 так, что $\rho_0 = 1$ и $|\rho_1| = 1$. При этом основное внимание уделяется рассмотрению случаев $\rho_1 = 1$ и $\rho_1 = -1$.

В зависимости от указанных случаев возможны различные сценарии локальных бифуркаций в окрестности периодического решения $x = \varphi_0(t)$ системы (1): например, при $\rho_1 = 1$ возможна бифуркация рождения пары циклов, а при $\rho_1 = -1$ – бифуркация удвоения периода цикла.

Предлагается новая схема исследования указанных бифуркаций, основанная на конструировании эквивалентных операторных уравнений и их анализе с использованием специального метода функционализации параметра и итерационных процедур построения решений. Получены новые признаки бифуркаций и асимптотические (по степеням малых параметров) формулы для рождающихся периодических решений системы (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-72552-НЦНИЛ(а) и 08-01-97020).

О НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ

Юнусова Г.Р. (г.Самара, Россия)
E-mail ggg-ggg@mail.ru

Рассмотрим уравнение колебаний прямоугольной мембраны

$$Lu(x,y,t) = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $Q = \Pi \times (0,T), \Pi = \{(x,y) \mid 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$, где p, q, T - заданные положительные действительные числа.

Начально-граничная задача. *Найти в области Q функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q), \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, (x,y,t) \in Q, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \tau(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \nu(x,y),\ 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q, \tag{4}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = 0,\ u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где τ и ν – заданные достаточно гладкие функции.

В данной работе следуя [1] приводится доказательство единст-венности решения задачи (2) – (5), используя только свойство пол-ноты соответствующей системы собственных функций однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной области П. Указаны достаточные условия, близкие к необходимым, относите-льно функций τ и ν, при которых существует решение задачи (2) – (5) в классе $C^2(\overline{Q})$.

Литература

1. *Ильин В.А.* Теорема о единственности и о принадлежности классу W_2^1 классического решения смешанной задачи для несамо-сопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилин-дре // Дифференц. уравнения. - 1975. - Т. 11, 1. - С. 60 - 65.

О АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Яковец В.П. (Киев, Украина), Тарасенко О.В. (Нежин, Украина)
vasyl.yakovets@gmail.com, oxana.tarasenko@gmail.com

Рассматривается управляемый процесс, описываемый линейной неавтономной системой дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

который переводит ее из положения $x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon)$ в положение $x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon)$ за фиксированное время T, доставляя минимум функционалу

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h} \int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u, u)\, dt \to \min_u, \qquad (2)$$

где $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратные матрицы n-го порядка, $C(t,\varepsilon)$ — $(n \times m)$-матрица, $x(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор состояния, $u(t,\varepsilon)$ — m-мерный вектор управления, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малый параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Предполагается, что матрицы $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускают асимптотические разложения по степеням ε с неограниченно дифференцируемыми коэффициентами на отрезке $[0;T]$, матрица $D(t,\varepsilon)$ — симметрическая, положительно определенная.

Рассматривается случай, когда $detB(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$.

Оптимальное управление выбирается из области допустимых значений $u(t,\varepsilon)$, которая совпадает со всем заданным m–мерным пространством.

Используя результаты асимптотического анализа общего решения вырожденных сингулярно возмущенных систем, проведенного в [1], доказано, что задача (1)–(2) имеет единственное асимптотическое решение и построена его асимптотика.

Литература

1.Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. - К.: Вища шк., 2000. .- 294 с.

НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Якубов В.Я. (МГИЭМ)

Известно, что если коэффициент $g(x)$ уравнения

$$y'' + (1 + g(x))y = 0 \qquad (1)$$

удовлетворяет условиям:
а) $g(x) \in C[x_0, +\infty)$ и
б) интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |g(x)|dx$ сходится, то у (1) существует фундаментальная система решений, допускающая при $x \to \infty$ представление

$$y_1(x) = \sin x + O(\int\limits_x^{+\infty} |g(t)|dt), \quad y_2(x) = \cos x + O(\int\limits_x^{+\infty} |g(t)|dt) \qquad (2)$$

Из равенств (2) следует, что при выполнении условий а) и б) все решения уравнения (1) ограничены.
Считалось, что для ограниченности решений уравнения (1) достаточно выполнения условия в) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Но О.Перрон в 1930 году показал, что у уравнения (1) при выполнении в) существует неограниченное решение. Нам удалось построить уравнения вида (1), в которых коэффициенты $g(x)$ удовлетворяют условию в), и, более того сходится интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |g(x)|dx$, а модули решений могут расти как степенные функции и даже как экспоненты.
В качестве примера приведем одно из таких уравнений

$$y'' + (1 + \frac{8\sin 2x}{2x + \sin 2x})y = 0$$

с неограниченным при $x \to \infty$ решением $y = (2x + \sin 2x)\cos x$.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ ПО МНОГОМЕРНЫМ РЕШЕТКАМ

Яровая Е.Б. (МГУ имени М.В. Ломоносова)
yarovaya@mech.math.msu.su

Работа относится к современному разделу теории вероятностей — теории ветвящихся случайных блужданий по $\mathbb{Z}^d$. Рассматриваются две модели случайного блуждания с непрерывным временем с размножением и гибелью частиц в одном из узлов решетки (источнике ветвления). В обеих моделях исследуется эволюция системы частиц, состояние которой описывается числом частиц в момент времени t в каждом узле решетки, а также общим размером популяции частиц на всей решетке, в предположении, что в начальный момент времени система состоит из одной частицы, находящейся в узле x. Частицы совершают случайное блуждание по решетке, причем попадая в источник ветвления частицы могут к тому же давать произвольное потомство или исчезать. Основное различие между моделями определяется поведением процесса в источнике. В модели I случайное блуждание предполагается симметричным на всей решетке, а в модели II вводится дополнительный параметр, позволяющий "искусственно" усилить степень преобладания свойства ветвления или блуждания в источнике, и в результате, нарушающий симметричность случайного блуждания. Получены дифференциальные уравнения для производящих функций численностей частиц как в произвольном узле решетки, так и на всей решетке в модели II. Предложены общие методы исследования надкритических ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам, при которых наблюдается экспоненциальный рост численностей частиц как в произвольных узлах, так и на всей решетке, и установлены условия существования таких процессов в модели модели II.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00362-а и программы "Междисциплинарные научные проекты МГУ имени М.В. Ломоносова".

Литература

1. Vatutin V.A., Topchii V.A., Yarovaya E.B. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. *Teoriya Jmovirnostej ta Matematichna Statistika.*(2003) **69**, 158–172.
2. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. ЦПИ при мехмате МГУ, Москва, 2007, 104 с.

BIFURCATION WITHOUT PARAMETERS AND LOCALIZED STRUCTURES IN VISCOUS FLUID FLOWS

Afendikov A. (Keldysh Institute of Applied Mathematics)
andre@spp.keldysh.ru

There are several examples of viscous fluid flows in unbounded cylindrical domains e.g. convection in fluid layer with insulated boundaries, and Kolmogorov problem on viscous fluid flows on a flat torus, where the analysis of bifurcation problem near the instability threshold can be brought via Kirchgässner reduction to reversible ODE system with nilpotent linear part in $\mathbf{R}^3$. The dynamics is generated by translations in the unbounded spatial direction and the reversibility corresponds to reflection symmetry of the fluid flow. Properties of these systems depend on the dimension of the fixed point set $M_j = \mathrm{Fix}\, R_j$, $\dim M_j = j$, $j = 1, 2$ of the corresponding reversor R_j.

The case with $j = 2$ was studied in [1]. In this problem singularities of the vector field generically form curves. In [2,3] partial results were obtained for R_1 reversible perturbations of R_2 reversible system, which are much smaller then the distance to the corresponding threshold. Notice that this is not the case for the convection problem.

In this problem there is the line of equilibria which is neither induced by symmetries, nor by first integrals. At isolated points, normal hyperbolicity of the line fails due to a transverse double eigenvalue zero and the phenomena of bifurcation without parameter occurs. For convective problem the existence of kink solutions can be demonstrated via transversality arguments thanks to the existence of explicit expression for kink solutions in the quasihomogeneous truncation of the ODE system which can be reduced to VIII Painlevé equation.

Supported by the program 03 OMN RAS, and RFBR 08-01-00454-a.

Literature

1. A. Afendikov, B. Fiedler, S. Liebscher. Standing waves near the Kolmogorov flow. Doklady Mathematics, 2007; 75 (2) pp. 283-286.
2. A. Afendikov, B. Fiedler and S. Liebscher. Plane Kolmogorov flows and Takens-Bogdanov bifurcation without parameters: the singly reversible case. In preparation. 2008.

3. B. Fiedler, S. Liebscher, Bifurcations without parameters: Some ODE and PDE examples, T.-T. Li et al., International Congress of Mathematicians, Vol. III: Invited Lectures, 2002, 305–316, Higher Education Press, Beijing.

STRUCTURAL MATCHING METHOD OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND HIS APPLICATIONS

Alymkulov K. (OshSU, Kyrgyzstan)
keldibay@ mail.ru

Structural matching method of solutions was suggested by this author [1-2] and his is the generalization and the simplification of the method Van Dyke's. The method of Van Dyke [3-5] for the matching of outer and inner solutions must every term of the outer solution expand to series in inner variable also every term of the inner solution expand to series in outer variable and after matched them.

In the structural matching method the structure of the outer solution completely determine the structure of the inner solution, therefore it is not necessary every term outer and inner solution expand to series.

It is possible to apply the structural matching method for construct of asymptotic solutions as the singularly perturbed differential equations with small parameter at the higher derivative (that is type of Prandtle-Tichonov) as singularly perturbed equations of Lighthill type.

Bibliography

1. Alymkulov K and. Zulpukarov A. A Uniform Asymptotics of a Solution to the Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Second-Order Equation with a Weak Singularity, Doklady Mathematics, vol. 70, no. 2, 2004 , 747-750.
2. Alymkulov. K, Zheentaeva Zh. K. Structural joining method for the solution of the model Lighthill equation with a regular singular point,Mat. Zametki, 2006, Volume 79, n. 5, 643-652.
3. Nayfeh A.H. Perturbation Methods , John Wiley, New York, 1973.
4. Dyke, Milton D. Van Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Publisher: Parabolic Press, 1975.
5. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems, AMS (Translations of Mathematical Monographs) 1992,.

LOCALIZATION AND BLOW UP FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH NONSTANDARD GROWTH CONDITIONS

Antontsev S. N. (University of Lisbon, Portugal)
anton@ptmat.fc.ul.pt, antontsevsn@mail.ru
Shmarev S. I. (University of Oviedo, Spain)
shmarev@orion.ciencias.uniovi.es

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with Lipschitz-continuous boundary Γ, and let $Q = \Omega \times (0,T]$. We study the Dirichlet problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}\left(a\,|\nabla u|^{p(x,t)-2}\,\nabla u\right) \pm b\,|u|^{\sigma(x,t)-2} + f \text{ in } Q_T \\ u = 0 \text{ on } \Gamma \times (0,T], \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

The exponents $p(x,t)$, $\sigma(x,t)$, the coefficients $a \equiv a(x,t,u)$, $b \equiv b(x,t,u)$ and the free term $f \equiv f(x,t)$ are given functions of their arguments. It is assumed that $p(\cdot)$, $\sigma(\cdot) \in (1,\infty)$, and that $a(x,t,s)$, $b(x,t)$ are nonnegative.

Such equations occur in the mathematical modelling of various physical phenomena, for example, flows of electro-rheological fluids, fluids with the temperature–dependent viscosity, or processes of filtration through porous media. We discuss the questions of localization of solutions, which means either vanishing of u in the case $-b(x,t)$, or possible blow-up in the case $+b(x,t)$. The main attention is paid to the effects caused by the variable nonlinearity of the equations under study. The analysis is based on the methods developed in [1-3].

References

1. S. N. Antontsev, J. I. Díaz, and S. Shmarev, *Energy Methods for Free Boundary Problems:Applications to Non-linear PDEs and Fluid Mechanics*, Bikhäuser, Boston, 2002. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 48.
2. S. N. Antontsev and S. I. Shmarev, *Extinction of Solutions of Parabolic Equations with Variable Anisotropic Nonlinearities*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia, Volume 61, Number 1/July (2008), 11-21, Pleiades Publishing, Ltd.

3. S. N. Antontsev and S. I. Shmarev, *Localization of solutions of anisotropic parabolic equations*, Nonlinear Analysis (2008), doi:10.1016/j.na.2008.11.025

A CLASSICAL SOLUTION SEMI-PERIODICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Asanova A.T. (Almaty, Institute of Mathematics MES RK)
anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

The semi-periodical boundary value problem for system of integro-differential equations in partial derivatives from two independent variables is considered on $\Omega = \{(t,x) \in [0,T] \times [0,\omega]\}$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) +$$

$$+\int_0^x\int_0^T \Big[K_1(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial u(\tau,\xi)}{\partial \xi} + K_2(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial u(\tau,\xi)}{\partial \tau} +$$

$$+K_3(t,x,\tau,\xi)u(\tau,\xi)\Big]d\tau d\xi + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(0) + \nu(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = u_0(t) + \nu(0), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

where $u = colon(u_1, u_2, ..., u_n)$, $(n \times n)$ - matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n - vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, $(n \times n)$ - matrices $K_i(t,x,\tau,\xi)$ are continuous on Ω, $u_0(t)$ - vector function is continuously differentiable on $[0,T]$ and $u_0(0) = u_0(T)$, $\nu(x)$ - unknown vector function is continuosly differentiable on $[0,\omega]$ which is find in process constructing of classical solutions of the problem (1)-(3).

The non-local boundary value problem with data on characteristics for system of hyperbolic equations without integral summand were considered in [1,2] by the method introduction of functional parameters. In the present communication the sufficient coefficients conditions of the unique classic solvability of the semi-periodical boundary value problem for system of integro-differential equations of hyperbolic type (1)-(3) are obtained and algorithm finding its solution are proposed.

References

1. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations // Differential Equations. 2005. Vol. 41, No 3. P. 352-363.
2. Asanova A.T. A Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Quasilinear Hyperbolic Equations // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 74. No 3. pp.787-791.

NUMERICAL ANALYSIS OF SOME FLOW MECHANISMS ON THE BASE OF MODIFIED DIFFERENCE SCHEMES ON THE MINIMAL STENCIL

Azarova O.A. (A.A.Dorodnicyn Computing Centre of RAS)
olga_ azarova@list.ru

The results of numerical simulations of stochastic pulse flows with instabilities of contact discontinuities during the time period up to quasi steady state establishing are considered. Modeling is based on the Euler system of equations in the divergent form. Modifications of the difference scheme on the minimal stencil are used [1]. The flows originate as the result of the interaction of heated rarefied longitudinal channel with a shock layer. The problem was initiated by the investigations on flow/flight control via microwave energy deposition into a supersonic flow. Pulsing flow mode and instabilities of contact discontinuities like Richtmeyer-Meshkov instability and shear layer instability of Kelvin-Helmholtz type were revealed [2].

Mechanisms of the pulsations and the instabilities generation have been proposed. The details of drag force variation in the dependence of the channel location relatively the symmetry axis are researched. The stagnation point forming in a new position for asymmetrically located heated channel is established, its dynamics is pointed out to be of pulse character [3]. Mach number of the oncoming flow was equal to 1.89 and 3.

The investigations were supported by EOARD, project ISTC 3058p.

Literature

1. *O.A. Azarova*. About one Difference Scheme on the Minimal Stencil for 2D Cylinder Calculations. Examples of Pulsing Flows with Instabilities // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009.

No.4 (to be published).
2. *F. Farzan, D. Knight, O. Azarova, Y. Kolesnichenko.* Interaction of Microwave Filament and Blunt Body in Supersonic Flow // Paper AIAA–2008–1356. P. 1–24.
3. *D. Knight, O. Azarova, Y. Kolesnichenko.* Drag Force Control via Asymmetrical Microwave Filament Location in a Supersonic Flow // Proc. Sixth European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, Versailles, France, Nov. 3-6, 2008. P. 1–8.

ERGODIC PROPERTIES OF EXCLUSION TYPE DISCRETE TIME PROCESSES IN CONTINUUM

Blank M.L. (Russian Academy of Sciences, Institute for Information Transmission Problems)
blank@iitp.ru

A new class of exclusion type processes acting in continuum with synchronous updating is introduced and studied. These Markov processes describe a countably many pure-jump stochastic or deterministic motions of particles interacting through the hard core exclusion rule. Even in the deterministic setting the behavior of such processes is rather complicated: their topological entropy is infinite. In general without some rather restricting assumptions nothing essential can be said about the set of invariant measures of such processes (which even might be empty). Nevertheless another their important statistical feature – ergodic average of particle velocities may be obtained and its connections to other statistical quantities, in particular to the particle density (the so called Fundamental Diagram) may be analyzed rigorously. The main technical tool in our analysis is a (somewhat unusual) coupling construction which is applied in a nonstandard fashion: we do not prove the existence of the so called successful coupling (which even might not hold) but instead use its absence as an important "diagnostic" tool. Despite that this approach cannot be applied to lattice systems directly, it allows to obtain (indirectly) new results for the lattice systems embedding them to the systems in continuum. Note that a seemingly very particular class of lattice exclusion processes introduced first in 1970 by Frank Spitzer appears naturally in a very broad list of scientific fields starting from various models of traffic flows, molecular motors and protein synthesis in biology, surface growth or percolation processes in physics, and up to the analysis of Young diagrams in representation theory.

This research has been partially supported by Russian Foundation for Fundamental Research

PERIODIC SOLUTIONS OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE MULTIDIMENSIONAL TORE

Dang Khanh Hoi (Department of Basic, Hoa binh University, Ha Noi, Viet Nam)
dangkhanhhoi@yahoo.com

In [1] it was discovered that for some partial differential equations the set of periods for which there is only one periodic solution may have an unexpectedly complicated structure.

In this work we study this issue for linear equations on the multidimensional tores. On the tore $\Pi^n = \mathbb{R}^n/(2\mathbb{Z})^n, n \geq 2$, we consider the problem on periodic solution for the nonlocal Schrödinger type equation

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta\right) u(x,t) = \nu G(u-f), \tag{1}$$

with the following conditions :

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}\,; \quad \int_{\Pi^n} u(x,t)dx = 0. \tag{2}$$

$a \neq 0$ and is a given real number, ν is a fixed complex number. f is a given function. $Gu = \int_{\Pi^n} g(x,y)u(y,t)dy$ is an integral operator with kernel $g(x,y) \in C^\infty(\Pi^n \times \Pi^n)$ such that $\int_{\Pi^n} g(x,y)dx = 0$ for all $y \in \Pi^n$. Δ is the Laplace operator. We consider operator $L = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta$ in $\mathcal{H}_0$. Here $\mathcal{H}_0$ is a subspace of space $L_2(\Pi^n \times [0,b])$, $\mathcal{H}_0 = \{u(x,t) \in L_2(\Pi^n \times [0,b]) \mid \int_{\Pi^n} u(x,t)dx = 0\}$. Typical but most interesting is the case where the number $ab\pi/2$ is irrational. In this case $\sigma(L) = \mathbb{R}$. Then in the subspace $\mathcal{H}_0$ the inverse operator L^{-1} is well defined but unbounded. We need to study the structure of the set of periods with which the product operator $L^{-1} \circ G$ is well defined and bounded and therefore problem (1), (2) has a unique periodic solution.

Theorem . For almost every $\nu \in \mathbb{C}$, problem (1), (2) has a unique periodic solution with almost every period $b \in \mathbb{R}^+$.

References

1. *On the set of periods for periodic solutions of some linear integro-differential equations on the multidimensional sphere.* Differential Equations and Related Topics. Moscow, 21-26 May 2007: Thesis, p.68. (Russian)

L^1-GRADIENT ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF SOME ONE-DIMENSIONAL QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEMS

Antontsev S. N. (University of Lisbon, Portugal)
anton@ptmat.fc.ul.pt, antontsevsn@mail.ru
Díaz J. I. (University Complutense of Madrid, Spain)
diaz.racefyn@insde.es

We consider in the cylinder $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega = (0,l)$, quasilinear parabolic systems of the type

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = (\mathbf{A}(t,x,\mathbf{u})\mathbf{u}_x)_x + \mathbf{B}(t,x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x) + \mathbf{f}(t,x), \\ \mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{u}_x(t,0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t,l) = \mathbf{h}. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ is the unknown vector-valued function and $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ is a given constant vector. For the sake of simplicity of presentation, we assume that the matrix $\mathbf{A} = (A_{ij})$ is diagonal: $\mathbf{A} = (A_{ii})$. A special attention is paid to the case of degenerate systems where the corresponding matrix $\mathbf{A}$ is positive-semidefinite and may vanish, at least, for some critical values of the solution $\mathbf{u}_{cr}$: $\mathbf{A}(t,x,\mathbf{u}_{cr}) = \mathbf{0}$. This is in contrast with the *uniformly parabolic case* when the matrix $\mathbf{A}$ is assumed to be positive definite (and that some times are termed as *regular*). Systems of type (1) appear in different contexts such as biology, chemistry or filtration. In particular, (1) arises in the study of the discharge of a laminar hot gas in a stagnant colder atmosphere of the same gas under assumptions the boundary layer approximation [1-2]. We derive the *universal* estimate

$$\|\mathbf{u}_x\|_{L^\infty(0,T:\mathbf{L}^1(\Omega))} \le \|\mathbf{u}_{0x}\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} + \|\mathbf{f}_x\|_{L^1(0,T:\mathbf{L}^1(\Omega))}$$

which remains being true by passing to the limit once it is stated in therms of the BV norms of the involved functions.

References

1. S. N. Antontsev, J. I. Díaz, *Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere*, RACSAM, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat, 101(1) (2007), 119–124.
2. S. N. Antontsev, J. I. Díaz, *Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere*, J. Appl. Mech. Tech. Phys.,Vol.49, N.4 (2008), 681-692. (Russian version, Vol. 49. N. 4 (2008)), 1-14.

APPROXIMATION OF HOMOGENEOUS (AND ISOTROPIC) NAVIER-STOKES STATISTICAL SOLUTIONS IN THE 2-WASSERSTEIN DISTANCE

S. Dostoglou (Department of Mathematics, University of Missouri)
stamatis@math.missouri.edu

Homogeneous statistical solutions of the Navier-Stokes equations were produced by M.I. Vishik and A.V. Fursikov, see [2]. Their method was shown to apply also for isotropic solutions in [1].

Using this approach, and in an attempt to gain information on the correlation of homogeneous and isotropic turbulence, we investigate the approximation of correlations of such statistical solutions by measures on finite dimensional spaces. Techniques from the theory of Wasserstein spaces are used and the standard Galerkin approximation is now replaced by an approximation defined in terms of disintegration of measures.

The geometry of homogeneous measures within the 2-Wasserstein space is also examined and is shown that any two such measures can be joined by a geodesic of homogeneous measures.

References

1. Dostoglou, S.; Fursikov, A. V.; Kahl, J. D. *Homogeneous and isotropic statistical solutions of the Navier-Stokes equations.* Math. Phys. Electron. J. **12** (2006), Paper 2.
2. Vishik, M.I. and A.V. Fursikov: *Mathematical problems of statistical hydromechanics.* Kluwer, 1988.

ON CONVERGENCE TO STATISTICAL EQUILIBRIUMFOR THE KLEIN-GORDON EQUATION COUPLED TO A PARTICLE

Dudnikova T.V. (Elektrostal Polytechnical Institute)
dudnik@elsite.ru

The paper concerns problems of long-time convergence to an equilibrium distribution in a coupled system. In [1] – [3], we have proved the convergence for partial differential equations of hyperbolic type in $\mathbf{R}^n$, for harmonic crystals in $\mathbf{Z}^n$, and for a scalar field coupled to a harmonic crystal.

Now we consider the Hamiltonian system consisting of a real-valued vector field $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, and a particle, with position $q \in \mathbf{R}^3$. The Hamiltonian functional is

$$H(\varphi,q,\pi,p) = \sum_{n=1}^{d}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(\frac{|\nabla\varphi_n(x)|^2}{2}+\frac{m_n^2|\varphi_n(x)|^2}{2}+\frac{|\pi_n(x)|^2}{2}$$
$$+\varphi_n(x)q\cdot\nabla\rho_n(x)\Big)\,dx+\frac{1}{2}\Big(|p|^2+\omega^2|q|^2\Big).$$

Here $m_n \geq 0$, $\omega > 0$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_d(x)) \in \mathbf{R}^d$ and correspondingly for $\pi(x)$. We assume that $\rho_n(x)$ are real-valued smoothfunctions, with a compact support, and $\rho_n(-x) = \rho_n(x)$, $n = 1,\dots,d$.Assume that an initial state $Y_0 = (\varphi^0, q^0, \pi^0, p^0)$ of the coupled system is a random function with a finite mean density of energywhich also satisfies Rosenblatt- or Ibragimov-type mixing condition.Moreover, initial correlation functions are translation-invariant.For a given $t \in \mathbf{R}$, we denote by μ_t the probabilitymeasure defining the distribution of the solution$Y(t) = (\varphi(\cdot,t), q(t), \dot\varphi(\cdot,t), \dot q(t))$to the dynamical equations with the random initial state Y_0.The main result is the weak convergence of the measures $\mu_t$to a limit stationary measure μ_∞ as $t \to \infty$.The measure μ_∞ is Gaussian and translation-invariant. This work is partially supported by the RFBR grant N 06-01-00096.

Bibliography

1. Dudnikova T. V., Komech A.I., Mauser N.,*J. Stat. Phys.* 114 (2004), no.3/4, 1035-1083.
2. Dudnikova T. V., Komech A.I.,*Theory Probab. Appl.* 50 (2005), no.4, 675-710.[3] Dudnikova T. V., Komech A.I.,*Russ. J. Math. Phys.* 12 (2005), no.3, 301-325.

ON INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR QUASILINEAR EVOLUTION EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Faminskii A.V. (Moscow)
andrei_faminskii@mail.ru

Initial-boundary value problems in the following three domains: $\Pi_T^+ = (0,T)\times R_+^n$, $R_+^n = \{x : x_n > 0\}$, $\Pi_T^- = (0,T)\times R_-^n$, $R_-^n = \{x : x_n < 0\}$, and $Q_T = (0,T)\times\Sigma$, $\Sigma = \{x : 0 < x_n < 1\}$, where $x = (x_1,\dots,x_n)$, $n \geq 2$, $T > 0$ – arbitrary, are considered for an equation

$$u_t - \sum_{k=0}^{3} P_k(\partial_x)u + \operatorname{div}_x g(u) = f(t,x), \tag{1}$$

where $u = u(t,x)$, $g = (g_1,\dots,g_n)$, P_k are linear homogeneous differential operators of orders k. Initial and boundary conditions

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u\big|_{\partial^l\Omega} = u_1(t,x'), u\big|_{\partial^r\Omega} = u_2(t,x'), u_{x_n}\big|_{\partial^r\Omega} = u_3(t,x') \tag{2}$$

for $x \in \Omega$, $(t,x') \in B_T = (0,T)\times R^{n-1}$, $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$, where Ω is either R_+^n, R_-^n or Σ respectively and $\partial^l\Omega$, $\partial^r\Omega$ are respectively the left and the right parts of the boundary (if exist), are set. The operators P_k are subjected to the following assumptions:

$$Q_2(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial\xi_n}P_3(\xi) < 0 \quad \forall\xi \neq 0, \qquad P_2(\xi) \geq 0 \quad \forall\xi \in R^n, \tag{3}$$

where $P_k(\xi)$ are the symbols of the operators P_k. The functions $g_j(u)$ are assumed to be in the space $C^1(R)$ and satisfy the following growth restrictions

$$|g_j'(u)| \leq c(|u|^{b_j}+1), \quad 0 \leq b_j \leq 1, \quad \forall u \in R. \tag{4}$$

Results on existence and uniqueness of weak solutions are established. For example, the following theorem is proved for the third problem.

Theorem. *Let the assumptions (3), (4) be satisfied and, in addition, $b_n < 4/n$. Assume that $u_0 \in L_2(\Sigma)$, $f \in L_1(0,T;L_2(\Sigma))$, $u_1,u_2 \in H_{t,x'}^{s/3,s}(B_T)$ for certain $s > (n+1)/2$, $u_3 \in L_2(B_T)$. Then there exists a solution u to the problem (1), (2) in the space $C_w([0,T];L_2(\Sigma)) \cap L_2(0,T;H^1(\Sigma))$. If, in addition, $b_j \leq 2/n$ for all j, the constructed solution is unique in such a class.*

PROPERTIES OF STABLE INVARIANT MANIFOLDS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS

Fursikov A.V. (M.V.Lomonosov Moscow State University)
fursikov@mtu-net.ru

For 2D and 3D Navier-Stokes system with zero right hand side an unbounded ellipsoid in the space H^1 of initial conditions will be described for which there exists (unique) strong solution that decreases exponentially as time t tends to infinity. This assertion is used to construct unbounded stable invariant manifolds for Navier-Stokes system.

Stable invariant manifold is a good tool for solution of (local) stabilization problem for nonlinear evolution PDE in a neighborhood of its steady-state solution $\widehat{v}$ (see [1]). In order to extend this approach on the case when initial condition of stabilized equation is far from $\widehat{v}$ one has to be able to construct unbounded stable invariant manifolds.

Two methods of construction of unbounded stable invariant manifolds for 2D and 3D Navier-Stokes equations around their steady-state solutions will be proposed. The first is based on some modification of the proof for well-known Hartman-Grobman theorem on existence of invariant manifold. To construct the second method we first prove that all stable invariant manifolds for Navier-Stokes equations are analytic. This proof is similar to the proof of analogous assertion in [2] in the case of Ginsburg-Landau equation. Using functional-analytical decomposition of stable invariant manifolds in a neighbourhood of steady-state solution for Navier-Stokes system we prove unboundedness of stable invariant manifolds for these equations.

The auhor was supported in part by RAS Programm "Theoretical problems of modern mathematics", project "Optimization of numerical algorithms of Mathematical Physics problems"as well as by Grants RFBI 04-01-0066 and Scientific Scools-3233.2008.1

References

1. Fursikov, A.V. Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equations with help of boundary feedback control. J. of Math. Fluid Mech., vol. 3, (2001) 259-301.
2. Fursikov, A.V. Analyticity of stable invariant manifolds for Ginzburg-Landau equation.- Applied Analysis and Differential Equations, Iasi, September 4-9, 2006, World Scientific, (2007), 93-112.

QUASILINEAR NON-LOCAL HOPF-TYPE EQUATION

V.A.Galkin (Obninsk State University)

We consider clusters system where each cluster consists of integer non-negative number of elements. At initial time system has N clusters which contain only one element. The evolution of the system based on clusters growth due to interaction of clusters couples. Let we chose couple of clusters with random numbers $1 \leq n_1 < n_2 \leq N$ possessing $m(n_1)$ and $m(n_2)$ elements. The pair of elements in these clusters can establish mutual connection during time interval $0 < \tau \leq 1$ with probability τ. Provided connection established the clusters changes their sizes by the following law:

$$m(n_1) \longmapsto m(n_1) + m(n_2), \quad m(n_2) \longmapsto 0.$$

The Laplas transform $F(p,t)$ of the clusters size distribution generalized function in such system when $N \to \infty$ and $\tau \to 0$ satisfies to the following non-local Hopf-type quasilinear equation:

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial t} + [F(p,t) - F(0,t)]\frac{\partial F(p,t)}{\partial p} = 0, \quad p > 0, \ t > 0, \tag{1}$$

where t is the time. The initial data $F(p,0)$ respects to the Dirac size distribution δ_1 of clusters at the time $t = 0$ and satisfies the condition

$$F(p,0) = exp(-p), \quad p > 0. \tag{2}$$

The global existence and uniqueness theorem for generalized non-negative continuous solution of the problem (1), (2) was proved. The singularities of the solution are located on the axis $p = 0$ at the times $t_c \leq t < \infty$ where $t_c = 1$. Singularities have "gradient catastrophe"type and they are responsible for total middle mass $m(t)$ dissipation in the infinite ($N = \infty$) clusters system (function $F(0,t) = m(t)$). Namely, $m(t) = 1$ for $0 \leq t \leq t_c$ and $m(t) = t^{-1}$ for $t \geq t_c$. The convergence of Monte Carlo simulation for above mentioned model to the solution of the problem (1), (2) was proved.

The paper was supported by RFBR grants 08-01-00338-a and 07-01-96411

References

1. V.A.Galkin. Smoluchowskii equation. FIZMATLIT, Moscow, 2001, 326 p.

ORBITS OF SINGULAR SYSTEMS UNDER PROPORTIONAL AND DERIVATIVE FEEDBACK

M. Isabel García-Planas
(Departament de Matemática Aplicada I Universitat Politècnica de Catalunya, C. Minería 1, Esc C, 1º-3ª 08038 Barcelona, Spain)
maria.isabel.garcia@upc.edu

We consider triples of matrices (E, A, B), representing singular linear time invariant systems in the form $E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, with $E, A \in M_n(C)$ and $B \in M_{n\times m}(C)$, under proportional and derivative feedback and derive miniversal deformations of the Kronecker canonical form by deriving the tangent space to the orbits of equivalent triples. These deformations permit us to study local perturbations an to obtain a bound for the distance to the orbits of less generic triples.

References

1. V. I. Arnold, *On matrices depending on parameters*, Russian Math. Surveys, **26**, 2 (1971), pp. 29–43.
2. A. Edelman, E. Elmroth, and B. Kågström, *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part I: Versal deformations*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **18** (1997), pp. 653-692.
3. J. Ferrer, Mª I. García-Planas, *Structural Stability of Quadruples of Matrices.* Linear Algebra and its Applications **241/243**, pp. 279–290, (1996). Linear Algebra and its Applications **253**, pp. 175–198 (1997).
4. Mª I. García-Planas, M.D. Magret, *Deformation and Stability of Triples of Matrices.* Linear Algebra and its Applications **254**, pp. 159–192, (1997).
5. Mª I. García-Planas, *Regularizing Generalized Linear Systems by means a Derivative Feedback.* IEEE 2003 Int. Conf. "Physics and Control"Proceedings, vol. 4, pp. 1134-1140, (2003).
6. Mª I. García-Planas, A. Mailybaev, *Reduction to versal deformations of matrix pencils and matrix pairs with application to control theory.* SIAM Journal on Matrix Analysis. vol. 24, 4, pp. 943-962, (2003).

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND INCLUSIONS WITH CONSTRAINTS IN TERMS OF MEAN DERIVATIVES AND THEIR APPLICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Gliklikh Yu.E. (Voronezh State University)
yeg@math.vsu.ru

The notion of mean derivative was introduced by E. Nelson [1] for the needs of Stochastic mechanics (a version of quantum mechanics). The equation of motion in this theory (called Newton-Nelson equation) was the first example of equations with mean derivatives. Later some other equations of this sort (e.g., a version of Langevin equation, a certain equation on the group of diffeomorphisms describing dynamics of viscous incompressible fluids, etc.) arising in mathematical physics, were discovered. Some problems were also described by inclusions with mean derivatives (see [2,3]).

We introduce and investigate equations and inclusions with mean derivatives subjected to non-holonomic mechanical constraints. A characteristic feature of this theory is that even for systems on linear configuration spaces it is based on the so-called sub-Riemannian geometry.

We construct a special type of stochastic integral operators with parallel translation relative to reduced connection (generated by the constraint), that are adapted for dealing with the above-mentioned equations and inclusions in the language of sub-Riemannian geometry. We apply this machinery to investigation of Langevin equation and inclusion with constraint, Newton-Nelson equation with constraint, etc. Some existence of solution theorems are proved for systems both on linear spaces and on stochastically complete Riemannian manifolds.

The research is supported in part by RFBR Grants 07-01-00137 and 08-01-00155.

References

1. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics.// Phys. Reviews, 1966.- Vol. 150, No. 4.- P. 1079-1085.
2. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential inclusions with mean derivatives // Dynamic Systems and Applications.– 2007.– Vol.16, No. 1.– P. 49–71.
3. Gliklikh Yu.E. Stochastic and global analysis in problems of mathematical physics.- Moscow: KomKniga, 2005.- 416 p. (in Russian)

ON INTEGRABILITY OF THE CAMASSA-HOLM EQUATION

Golovko V. A. (MSU, Faculty of Physics)
E-mail: golovko@mccme.ru

Using geometrical approach exposed in [3], we explore the Camassa–Holm equation

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1}$$

which was introduced in [1] and was intensively studied afterwards. Since (1) is not an evolution equation, its integrability properties (existence and even definition of Hamiltonian structures, conservation laws, etc.) are not standard to establish.

We consider the Camassa-Holm equation both in the scalar form (1) and in the form of 2×2-system

$$\begin{aligned} w_t &= -2wu_x - w_x u, \\ w &= u - u_{xx}. \end{aligned} \tag{2}$$

Following [3], we treat the equation at hand as a submanifold in the manifold of infinite jets and consider two natural extensions of this equation. The first one is called the ℓ-covering and serves the role of the tangent bundle. The second extension, ℓ^*-covering, is the counterpart to the cotangent bundle. The key property of these extensions is that the spaces of their nonlocal symmetries and cosymmetries contain all essential integrability invariants of the initial equation.

Thus, we find (see [2]) bi-Hamiltonian structures, recursion operators for symmetries (and cosymmetries), symplectic structures, infinite series of symmetries and conservation laws (local and nonlocal).

This work was supported by the NWO–RFBR grant 047.017.015 and RFBR–Consortium E.I.N.S.T.E.I.N. grant 06-01-92060.

References

1. Camassa R., Holm D. D., *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), pp. 1661–1664.
2. Golovko V., Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A. *On integrability of the Camassa-Holm equation and its invariants. A geometrical approach*, Acta Appl. Math. **101** (2008), doi:10.1007/s10440-008-9200-z.
3. Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A., *Hamiltonian operators and ℓ^*-coverings*, J. Geom. and Phys. **50** (2004), pp. 273–302.

QUASI-ENERGY FUNCTION FOR MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISMS

Grines V., Pochinka O. (Nizhny Novgorod State University)
vgrines@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru

According to Pixton [1] there are Morse-Smale diffeomorphisms of S^3 which have no energy function, that is a Lyapunov function whose critical points are all periodic points of the diffeomorphism. A Lyapunov function with the least number of critical points is called quasi-energy function for a Morse-Smale diffeomorphism.

We consider the class G_4 of Morse-Smale diffeomorphisms $f : S^3 \to S^3$ whose nonwandering set consists of exactly four fixed points: one source α, one saddle σ and two sinks ω_1 and ω_2. The closure of each connected component (separatrix) of the one-dimensional manifold $W^u(\sigma)\setminus\sigma$ is homeomorphic to a segment which consists of this separatrix and two points: σ and some sink. Denote by ℓ_1, ℓ_2 the one-dimensional separatrices containing the respective sinks ω_1, ω_2 in their closures. According to [2], ℓ_1 is tame and ℓ_2 can be wild. A Heegaard splitting (P^+, P^-) of S^3 is said to be f-adapted, if $cl(W^u(\sigma)) \subset f(P^+) \subset int\ P^+$, $W^s(\sigma)$ intersects ∂P^+ transversally and $W^s(\sigma) \cap P^+$ consists of a unique 2-disc. An f-adapted Heegaard splitting $S^3 = P^+ \cup P^-$ is said to be minimal if its genus is minimal among all f-adapted splittings. For each integer $k \geq 0$ we denote by $G_{4,k}$ the set of diffeomorphisms $f \in G_4$ for which the minimal f-adapted Heegaard splitting has genus k. According to [3] any $f \in G_{4,k}$, possesses (does not posses) energy function for $k = 0$ ($k > 0$).

Theorem Every quasi-energy function for a diffeomorphism $f \in G_{4,1}$ has exactly six critical points.

Results were obtained in collaboration with F. Laudenbach (France). Authors thank grant RFBR No 08-01-00547 of Russian Academy for partial financial support.

References

1. D. Pixton. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, № 2, 167-172.
2. Ch. Bonatti, V. Grines. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6, 579-602.

3. V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka. Energy function for gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds. DAN. 2008. V. 422, No 3, 299-301.

PARTIAL FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS: METHOD OF INTEGRAL TRANSFORMS

Kilbas A.A. (Belarusian State University, Minsk)
anatolykilbas@gmail.com

We discuss the method of Laplace, Fourier and Mellin integral transforms to investigation of differential equations with ordinary and partial derivatives of fractional order. First we give an overview of results in this field. Then we give applications of Laplace and Fourier integral transforms to solution of Cauchy-type and Cauchy problems for the two- and multi-dimensional diffusion-wave equations with the Riemann-Liouville and Caputo partial fractional derivatives, respectively, and present conditions for the existence of classical solutions of these problems. Finally, we use Laplace and Fourier integral transforms to solution of fractional evolution equations involving partial fractional derivatives of Riemann-Liouville or Caputo with respect to time and partial Liouville fractional derivative with respect to real axis, and indicate applications.

We obtain explicit and fundamental solutions of the above problems in terms of special functions by Mittag-Leffler, Wright and of the so-called H-functions; for example, see [4, Chapters 1-2].

We note that some of the above results were presented in the book [2, Chapters 5-6] and papers [3]-[4].

This investigation was partly supported by Belarusian Fundamental Research Fund (Project F08MC-028).

References

1. Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. – 401 p.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier, 2007. – 540 p.
3. Voroshilov A.A., Kilbas A.A. Conditions for the existence of a classical solution of the Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative. Dokl. Akad. Nauk. 2007. Vol. 414, no. 2. P. 60-64.
4. Voroshilov A.A., Kilbas A.A. Conditions for the existence of a classical solution of the Cauchy-type problem to diffusion equation with the Riemann-Liouville partial derivative. Differ. Uravn. 2008. Vol. 44, no. 6. P. 768-784.

SOME SPECTRAL PROBLEMS OF POROUS MEDIA ACOUSTICS

Shamaev A.S. (MSU, IPM RAS), Gavrikov A.A., Knyazkov D.U. (IPM RAS)
sham@rambler.ru, topol555@gmail.com, knyaz@ipmnet.ru

The current paper concerns problems of finding natural frequency spectrum of media consisting of two fast alternating phases with different mechanical properties (e.g. elastic frame with channels filled with compressible or incompressible viscous fluid, mixture of two liquids with various viscosities and compressibilities etc). In a quite a number of cases macroscopic models of such media (they are usually called homogenized or effective models) are models of materials with dynamics described by integrodifferential equations with integral terms of convolution product by time coordinate type. In the paper (a) there are exact statements on proximity between solutions of original boundary problems for two-phase models and solutions of corresponding boundary problems for the above integrodifferential equations. In addition, (b) various natural oscillations spectra qualitative properties for the mentioned homogenized models are analyzed. It is shown that homogenized problem spectrum consists of two parts: real and complex. Complex part is a union of two complex conjugated sequences of complex numbers where real parts have a limit and imaginary parts tend to infinity or have finite limits (behavior depends on "homogenized"model type and problem parameters). Real part of investigated spectrum is a union of a finite or countable number of limited sequences (lying on nonoverlapping intervals of the real axis), each having a limit. Under some conditions it is possible for some interval to contain continuous spectrum.

Analysis shows, that qualitative properties similar to described above are also valid for a number of other problems with different physical or mechanical origin: dynamics problem for viscoelastic materials with "memory", temperature field evolution problem for nonstandard models of heat conductivity with memory (for which "heat waves"type phenomena are possible), well-known in filtration theory "double-porosity"problem, which is a macroscopic model construction for fluid propagation in a mix of two materials with substantially different filtration factors.

Here we are stating a hypothesis of existence of a general operator model, with use of witch it could be possible to prove the existence of spectra of described above structure in all cases.

The work is carried out under the financial support of RFBR, grants NN 08-01-00180-a, 06-01-00441-a.

ON ANALYTIC THEORY OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kochubei A. N. (Kiev)
kochubei@i.com.ua

We consider fractional differential equations of order $\alpha \in (0, 1)$ for functions of one independent variable $t \in (0, \infty)$ with the Riemann-Liouville and Caputo-Dzhrbashyan fractional derivatives. For the latter case, a solution of the equation with a polynomial coefficient has the form $u(t^\alpha)$ where u is an entire function [1]. A precise estimate for the order of growth of the function u is given. An analog of the Frobenius method for systems with regular singularity is developed. For a model example of an equation with a kind of an irregular singularity, a series for a formal solution is shown to be convergent for $t > 0$ (if α is an irrational number poorly approximated by rational ones) but divergent in the distribution sense.

References

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

ON GLOBAL ATTRACTION TO QUANTUM STATIONARY STATES

Komech A.I. (Moscow)
alexander.komech@univie.ac.at

We consider $U(1)$-invariant nonlinear 1D Klein-Gordon equation
(KG) $\quad \ddot{\psi}(x,t) = \psi''(x,t) - m^2\psi(x,t) + \delta(x)f(\psi(0,t)), \quad x \in \mathbf{R}$
The equation describes the linear Klein-Gordon equation coupled to an oscillator attached at the point $x = 0$. We assume that the oscillator is $U(1)$-invariant i.e. $f(\psi) = -\nabla_\psi U(|\psi|^2) = a(|\psi|^2)\psi$. We consider the solitary waves which are the solutions of type $\phi_\omega(x)e^{i\omega t}$ with real ω from a set $\Omega \subset \mathbf{R}$. The solitary waves form two-dimensional manifold $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}\phi_\omega(x) : \ \omega \in \Omega, \ \theta \in [0, 2\pi]\}$. We assume that the equation (KG) is strictly nonlinear in the following sense: $U(|\psi|^2) = \sum_0^N u_k|\psi|^{2k}$, where $u_N > 0$ and $N \geq 2$. Our main result is the following theorem.

Theorem ([1,2,3]): For any finite energy solution $\psi(\cdot, t) \to \mathcal{S}, \quad t \to \pm\infty$ where the convergence holds in $H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$.

The result has been improved and generalised in collaboration with Andrew Comech:

a) In [4] for $\sum_1^N \delta(x - x_k)f_k(\psi)$ instead of $\delta(x)f(\psi)$,

b) In [5] for $\rho(x)f(\langle\rho(x), \psi\rangle)$ instead of $\delta(x)f(\psi)$. Here $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Supported partly by Alexander von Humboldt Research Award, Faculty of Mathematics of Vienna University, and grants RFBR 07-01-00018a, and FWF P19138-N13.

References

1. A.I.Komech, On attractor of a singular nonlinear $U(1)$-invariant Klein-Gordon equation, p. 599-611 in: Proceedings of the 3^rd ISAAC Congress, Freie Universität Berlin, Berlin, 2003.

2. A.I.Komech, A.A.Komech, On global attraction to solitary waves for the Klein-Gordon equation coupled to nonlinear oscillator, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* **343**, Issue 2, 15 July 2006, Pages 111-114.

3. A.I.Komech, A.A.Komech, Global attractor for a nonlinear oscillator coupled to the Klein-Gordon field, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **185** (2007), 105-142.

4. A.I.Komech, A.A.Komech, On global attraction to solitary waves for the Klein-Gordon field coupled to several nonlinear oscillators, submitted to *J. Mathematiques Pures et Appl.*, 2008.

5. A.I.Komech, A.A.Komech, Global attraction to solitary waves for Klein-Gordon equation with mean field interaction, accepted in *Annales de l'IHP-ANL*, 2008.

DISPERSIVE ESTIMATES FOR DISCRETE SCHRÖDINGER AND KLEIN-GORDON EQUATION

Kopylova E.A. (Institute for Information Transmission Problems RAS)
ek@vpti.vladimir.ru

We establish the long-time behavior of solutions to the discrete Schrödinger and Klein-Gordon equation. We develop general strategy introduced by Vainberg [5], Jensen, Kato [1], Murata [4] concerning the wave, Klein-Gordon and Schrödinger equations, to the discrete case. Namely, we establish the smoothness of the resolvent of a stationary problem at the nonsingular points of continuous spectrum, and a generalized 'Puiseux expansion' at the singular points which are critical values of the symbol. Then, the long-time asymptotics can be obtained by means of the inverse Fourier-Laplace transform. We restrict ourselves to the "nonsingular case" in the sense of [4], where the truncated resolvent is bounded at the singular points of the continuous spectrum, i.e. there

are no resonances or eigenvalues. This holds generically and allows us to get decay of order $\sim t^{-3/2}$ in 1D and 3D cases, and of order $\sim t^{-1}(\log t)^{-2}$ in 2D case.
The result are obtain in collaboration with A.Komech, M.Kunze, and B.Vainberg.
Supported partly by grants RFBR-DFG 08-01-91950-NNIOa, FWF P19138-N13 and DFG 436 RUS 113/929/0-1.

References

1. Jensen A., Kato T., Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, *Duke Math. J.* **46**, 583-611 (1979).
2. Komech A., Kopylova E., Kunze M., Dispersive estimates for 1D discrete Schrödinger and Klein-Gordon equations, *J. Appl. Anal.* **85**, no.12, 1487-1508 (2006).
3. Komech A., Kopylova E., Vainberg B., On dispersive properties of discrete 2D Schrödinger and Klein-Gordon equations, *J. Func. Anal.* **254**, 2227-2254 (2008).
4. Murata M., Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations, *J. Func. Anal.* **49**, 10-56 (1982).
5. Vainberg B., Asymptotic methods in equations of mathematical physics, Gordon and Breach, New York, 1989.

FRACTIONAL CALCULUS OF THE EXTENDED GENERALIZED MITTAG-LEFFLER FUNCTION

Kilbas A.A., Koroleva A.A. (Belarusian State University, Minsk, Belarus)
anatolykilbas@gmail.com; akoroleva@tut.by

Let $\mathcal{E}((\alpha,\beta)_n;z)$ be the extended generalized Mittag-Leffler function defined for real $\alpha_i \in \mathbf{R}$ complex $\beta_i \in \mathbf{C}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ and $z \in \mathbf{C}$ $(z \neq 0)$ by the Mellin-Barnes integral of the form

$$\mathcal{E}((\alpha,\beta);z)_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\beta_i-\alpha_i s)}(-z)^{-s}ds, \tag{1}$$

where $\mathcal{L}$ is a specially chosen infinite contour. Such a function was introduced in [1]. When $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i > 0$, the function in (1) coincide with the generalized Mittag-Leffler function

$$E((\alpha,\beta)_n;z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i k+\beta_i)}. \tag{2}$$

Let $\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$ and $\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$ be the Riemann-Liouville fractional integral and derivative of order $\alpha \in \mathbf{C}$ defined for $x > 0$ by:

$$\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0), \tag{3}$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{n-\alpha}f\right)(x) \quad (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0,\ n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1). \tag{4}$$

Formulas for compositions of the fractional calculus operators (3) and (4) with the extended generalized Mittag-Leffler function (1) are established in terms of the H-functions. The corresponding results for compositions of (3) and (4) with the generalized Mittag-Leffler function (2) are expressed via the generalized Wright hypergeometric functions. Special cases are presented.

This investigation was partly supported by Belarusian Fundamental Research Fund (Project F08MC-028).

References

1. Kilbas A.A., Koroleva A.A. An extended generalized function of Mittag-Leffler type. (Russian) Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. 2005. Vol. 49, no. 5. P. 5-10.

FUNCTIONAL MULTIPLIERS FOR THE LIMIT INTEGRABILITY OF SOLUTIONS TO SOME NONLINEAR PROBLEMS WITH L^1-DATA

Kovalevsky A.A. (Donetsk, IAMM NAS of Ukraine)
alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

In the talk we deal with weak and entropy solutions of the Dirichlet problem for some classes of nonlinear elliptic second- and high-order equations with L^1-data. There exist certain open intervals for the exponents of integrability of these solutions and their derivatives, and generally speaking the exponents do not attain the right end points of the intervals. We describe functional multipliers with which the given solutions and their derivatives belong to the Lebesgue spaces defined by the right end points of the mentioned open intervals.

For instance for a weak solutions $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,1}(\Omega)$ of the Dirichlet problem for the equation

$$\sum_{|\alpha|=1,m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_m u) = f \in L^1(\Omega)$$

with the strengthened ellipticity condition

$$\sum_{|\alpha|=1,m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c\Big\{ \sum_{|\alpha|=1} \nu(x)|\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=m} \nu(x)|\xi_\alpha|^2 \Big\},$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, $n > 2m$, $m \geqslant 3$, $q \in (2m, n)$, $c > 0$ and ν is a positive function in Ω satisfying in particular the condition $1/\nu \in L^t(\Omega)$ with $t > n/q$, we have $u \in L^\lambda(\Omega)$ with $\lambda \in (0, \gamma_t(q-1))$ and $\gamma_t = n/(n-q+n/t)$ and $|u|^{\gamma_t(q-1)} h(u) \in L^1(\Omega)$ for every positive and even function $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ with the properties: h is nonincreasing in $[0, +\infty)$; $|h^{(i)}| \leqslant bh$ in $\mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m-1$, $b > 0$;

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [h(s)]^{1/\gamma_t} ds < +\infty.$$

The results are published in [1] and [2].

References

1. Kovalevskii A.A. A priori properties of solutions of nonlinear equations with degenerate coercivity and L^1-data // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2008. – V. 149, no. 5. – P. 1517–1538.
2. Kovalevsky A., Nicolosi F. On multipliers characterizing summahility of solutions for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1-data // Nonlinear Analysis. – 2008. – V. 69, no. 3. – P. 931–939.

EXISTENCE OF A CLASSICAL SOLUTION AND NON-EXISTENCE OF A WEAK SOLUTION TO A HARMONIC DIRICHLET PROBLEM IN A PLANAR DOMAIN WITH CRACKS

Krutitskii P.A.

We discuss the Dirihlet problem for the Laplacian in an interior or exterior multiply connected domain. The boundary of the domain contains both closed curves and double-sided open arcs (cracks). More precisely, the boundary may contain finite number of smooth cracks of finite length as well as finite number of smooth closed curves. The Dirichlet boundary condition is specified on the whole boundary, and the different boundary data may be specified on the opposite sides of the cracks.

If the boundary data satisfies matching conditions at the ends of the cracks, and so we look for the classical solution, which is continuous at the ends of the cracks, then the well-posed formulation of the problem was given in [1-2]. The existence of the unique classical solution was proved in [1-2] under certain smoothness conditions. The integral representation of the problem has been obtained in the form of potentials. The problem has been reduced to the uniquely solvable integral equation for the densities in potentials. Singularities of a gradient of the solution at the ends of the cracks have been studied.

If the boundary data does not satisfy matching conditions at the ends of the cracks, and so we look for the solution, which is not continuous at the ends, then the well-posed formulation of the problem was given in [3]. The uniqueness of the classical solution has been proved by integral equalities, since maximum principle is not applicable even for an interior domain. The existence of the classical solution has been proved by the boundary integral equation method. The integral representation for a classical solution of the problem has been obtained in the form of potentials. The densities in the potentials satisfy the uniquely solvable integral equations. So, we reduce the original Dirichlet problem to the uniquely solvable integral equations. The singularities of the gradient of the solution at the ends of the cracks have been studied using integral representation for a classical solution. It was shown that the weak solution of the problem does not exists typically unlike the classical solution. We formulate the conditions under which a classical solution exists, while a weak solution does not exist. This result is very important for construction of numerical methods for solving problems in cracked domains, since all finite element and finite difference methods imply existence of a weak solution.

The results presented in the talk have been extended in [4] to the case of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in an interior or exterior domain with cracks.

References

1. Krutitskii P.A. *The 2-Dimensional Dirichlet Problem in an External Domain with Cuts.*// Zeitschr. Analysis u. Anwend., 1998, v.17, No.2, p.361-378.
2. Krutitskii P.A. *The Dirichlet problem for the 2-D Laplace equation in a multiply connected domain with cuts.*// Proc. Edinburgh Math. Soc., 2000, v.43, p.325-341.

3. Krutitskii P.A. *On existence of a classical solution and non-existence of a weak solution to the Dirichlet problem in a planar domain with slits for Laplacian.//* Quarterly of applied mathematics, 2008, Vol.66, No.1, pp.177-190.
4. Krutitskii P.A. *Properties of Solutions of the Dirichlet Problem for the Helmholtz Equation in a Two-Dimensional Domain with Cuts.//* Differential Equations, 2007, Vol. 43, No. 9, pp. 1200-1212.

ON ESTIMATES FOR SYSTEMS OF OPERATORS IN SOBOLEV SPACES OF VECTOR FUNCTIONS

Limanskii D.V. (Donetsk National University, Ukraine)
lim8@telenet.dn.ua

We continue investigations on l-quasi-elliptic and weakly coercive systems of minimal differential operators acting on Sobolev spaces of vector functions. We extend our earlier "scalar" results (see [1]) to the matrix case.

This talk is based on the joint paper [2] with M.M. Malamud.

References

1. D.V. Limanskii, M.M. Malamud, Elliptic and Weakly Coercive Systems of Operators in Sobolev Spaces // Mat. Sbornik. 2008. Vol. 199. No. 11. P. 75-112.
2. D.V. Limanskii, M.M. Malamud, Quasi-Elliptic and Weakly Coercive Systems in Sobolev Spaces of Vector Functions // Russ. J. Math. Phys. 2008. Vol. 15. No. 2. P. 246-266.

ASYMPTOTIC COMPLETENESS FOR SCATTERING IN NONLINEAR LAMB SYSTEM

Komech A.I.(Moscow), Merzon A.E. (Morelia)
alexander.komech@googlemail.com, anatoli@ifm.umich.mx

We consider the asymptotic completeness in the case of zero oscillator mass $m = 0$ for the nonlinear Lamb system of the string coupled to the nonlinear oscillator

$$\ddot{u}(x,t) = u''(x,t),\ x \in R \setminus \{0\};\ m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + u'(+0,\,t) - u'(-0,\,t)$$

where $m \geq 0$ and $y(t) \equiv u(0,t)$. Here $F(y)$ is the force function, $y \in R^d$. The scattering asymptotics for the system have been proved in [1] for $m > 0$ and in [2] for $m = 0$. The scattering data (s_+, Ψ_+) consist of a limit stationary state $s_+ \in Z := \{s \in R :\ F(s) = 0\}$, and of an asymptotic state $\Psi_+(x)$ which is the initial condition of the corresponding outgoing dispersive wave. The wave operator W_+ transforms the initial data $Y_0 = (u_0, u_1)$ to the scattering data (s_+, Ψ_+). We analyze the asymptotic completeness, i.e we find which scattering data (s_+, Ψ_+) are in the range of W_+. We assume that F is the potential vector field: $F(y) = -\nabla V(y)$ where $V(y) \in C^2(R^d, R)$ and $V(y) \to +\infty$ as $|y| \to \infty$. We obtain the following results.

A. For all $d \geq 1$, the pairs (s_+, Ψ_+) with any $s_+ \in Z$ are in the range of W_+ if the asymptotic state $\Psi_+(x)$ has a compact support.

B For $d = 1$, the pairs (s_+, Ψ_+), for an $s_+ \in Z$, are in the range of W_+ for all finite energy asymptotic states $\Psi_+(x)$ if $F'(s_+) \neq 0$.

A crucial role in the proof of **B** plays the following inverse reduced equation: $\dot{y}(t) = -1/2F(y(t)) + P(t),\ t > 0$, where the function $P \in L^2(R^+)$ depends on Ψ_+. We prove that there exists a solution $y(t)$ with $\dot{y} \in L^2(R^+)$ converging to s_+ if $F'(s_+) \neq 0$.

The first author is supported in part by Alexander von Humboldt Research Award, FWF grant P19138-N13, and RFBR grant 07-01-00018a, the second author is supported by Project 00081238 CB-2007-01, CONACYT, SNI, México.

References

1. Komech A.I, On Global Attractors of Hamilton Nonlinear Wave Equations, Lecture Notes of the Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, LN 24/2005, Leipzig, 2005. http://www.mis.mpg.de
2. A.Merzon, M. Taneco, Scattering in the zero-mass Lamb system, *Physics Letters A 372*, (2008) 4761-4767.

CLASSIFICATION OF DIFFEOMORPHISMS OF SURFACES WITH THE FINITE NUMBER OF MODULI OF STABILITY

T. Mitryakova (Nizhny Novgorod State University)
mtm@mm.unn.ru

In the present report the question about topological classification of systems with heteroclinic contact is considered.

Let Ψ be the set of preserving orientation diffeomorphisms $f \in Diff^{\infty}(M^2)$ given on an orientable surface M^2 and satisfying the conditions below: 1) Ω_f consists of a finite number of hyperbolic fixed points and saddle fixed points have negative index; 2) wandering set of f contains a finite number of heteroclinic orbits of transversal and non-transversal intersections. Denote by: $\Delta_f \subset \Omega_f$ the set of sources and sinks; Σ_f the set of saddle points; $\Sigma_f^s \subset \Sigma_f$ the set of saddle points such that their stable manifolds contain points of heteroclinic intersection; $\Sigma_f^u = \Sigma_f \setminus \Sigma_f^s$. Put $\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W^u(\Sigma_f^s) \cup W^s(\Sigma_f^u) \cup \Delta_f)$. The orbit space $\hat{T}_{k_f}$ of the action of diffeomorphism f on $\mathcal{M}_f$ consists of a finite number of tori. Denote by $p_f : \mathcal{M}_f \to \hat{T}_{k_f}$ the natural projection. Let $\delta \in \{u, s\}$. For any saddle point $\sigma_l \in \Sigma_f^\delta$ put $\hat{\gamma}_f^\delta = p_f(W_{\sigma_l}^\delta \setminus \sigma_l)$, $\hat{\Gamma}_f^\delta = \bigcup\limits_{\sigma_l \in \Sigma_f^\delta} \hat{\gamma}_f^\delta$ and $\hat{\Gamma}_f = \hat{\Gamma}_f^u \cup \hat{\Gamma}_f^s$. By the construction the set $\hat{\Gamma}_f^\delta$ $(\delta \in \{u, s\})$ is a union of pairwise disjoint knots. Denote by U_{σ_l} an f-invariant linearizing neighborhood of saddle point $\sigma_l \in \Sigma_f$, $0 < \lambda_{\sigma_l} < 1$, $\mu_{\sigma_l} > 1$ are eigenvalues of $Df(\sigma_l)$. We denote by $g_a(x, y) = (\xi_a(x, y), \eta_a(x, y)) : U_{\sigma_i} \to U_{\sigma_j}$ conversion map. According to [1] put $\tau_a = \frac{\partial \eta_a}{\partial x}(a)$ for $a \in W^s(\sigma_i) \cap W^u(\sigma_j)$.

Collection $S_f = (\hat{T}_{k_f}, \hat{\Gamma}_f, \hat{C}_f)$ is called equipped scheme of diffeomorphism $f \in \Psi$. Here $\hat{C}_f = \{\hat{\Lambda}, \hat{M}, \hat{C}\}$ where $\hat{\Lambda} = \bigcup\limits_{\sigma_j \in \Sigma_f^u} \lambda_{\sigma_j}$, $\hat{M} = \bigcup\limits_{\sigma_i \in \Sigma_f^s} \mu_{\sigma_i}$ and $\hat{C} = \bigcup \tau_a$ is the set of moduli of stability.

Theorem. Diffeomorphisms $f, f' \in \Psi$ are topological conjugate if and only if schemes S_f and $S_{f'}$ are equivalent.

Results were obtained in collaboration with O. Pochinka and V. Grines. Author thanks grant RFBR № 08-01-00547 of Russian Academy for partial financial support.

References

1. W. Melo, "Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms", *Topology*, 19, 9-21 (1980).

КОНТАКТНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПСЕВДОГРУПП СИММЕТРИЙ И НАКРЫТИЯ УРАВНЕНИЙ r-mdKP И r-dDym

Морозов О.И. (МГТУГА)
oim@foxcub.org

Многие важные методы изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУ), такие как обратные задачи рассеяния, преобразования Бэклунда, операторы рекурсии, нелокальные симметрии и т.д., могут быть успешно описаны в терминах теории накрытий [9], также известных как пары Лакса, представления нулевой кривизны и т.д. Для ДУ с тремя и более независимыми переменными задача нахождения накрытий является весьма сложной. Мы применяем технику интегрируемых расширений, [2], к формам Маурера–Картана псевдогрупп симметрий уравнений r-mdKP

$$u_{yy} = u_{tx} + \left(\tfrac{1}{2}(\kappa + 1)\, u_x^2 + u_y\right) u_{xx} + \kappa\, u_x\, u_{xy}$$

и r-dDym

$$u_{ty} = u_x\, u_{xy} + \kappa\, u_y\, u_{xx},$$

см. [1]. Ранее накрытия этих уравнений при различных значениях параметра κ были получены в работах [3–8], [10, 11] с помощью других подходов. Метод интегрируемых расширений позволяет найти новые накрытия этих уравнений.

Литература

1. Błaszak M. *Phys. Lett. A* **297**, 191–195 (2002)
2. Bryant R.L., Griffiths Ph.A. *Duke Math. J.* **78**, 531–676 (1995)
3. Chang J.-H., Tu M.-H. *J. Math. Phys.* **41**, 5391–5406 (2000)
4. Dunajski M. *J. Geom. Phys.* **51**, 126-137 (2004)
5. Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R. *J. Phys. A.: Math. Gen.* **37** 2949–2963 (2004)

6. Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R., Tsarev S.P. *Commun. Math. Phys.* **261**, 225–243 (2006)
7. Konopelchenko B., Martínez Alonso L. *J. Math. Phys.* **43** 3807-3823 (2003)
8. Konopelchenko B.G., Moro A. *Stud. Appl. Math.* **113**, 325–352 (2004)
9. Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M. *Acta Appl. Math.* **2**, 79–86 (1984)
10. Morozov O.I. *Acta Appl. Math.*, accepted, 2009
11. Pavlov M.V. *Internat. Math. Research Not.* **2006**, article ID 46987, 1–43

THE CRITICAL NEUMANN PROBLEM FOR AN EQUATION WITH p-LAPLACIAN

Nazarov A. I., Reznikov A. B. (St.-Petersburg State University)
an@AN4751.spb.edu, reznikov@ymail.com

Let Ω be a bounded domain in $\mathbf{R}^n$, $1 < p < n$. We consider the nonlinear Neumann problem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) &= u^{p-1} \quad \text{in} \quad \Omega; \\ \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u, \mathbf{n}\big) &= u^{q-1} \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where $q = (n-1)p/(n-p)$ is the critical exponent in the trace Sobolev embedding theorem.

For smooth domains, we prove the existence of the ground state solution to the problem (1) for $p < (n+1)/2 + \delta$ where δ depends on Ω. In contrast, for Ω being a polyhedron, the ground state solution does not exist in $\gamma\Omega$ if γ is sufficiently large.

Similar effect was considered earlier for the homogeneous Neumann problem to the Emden–Fowler equations, see survey [1] and references therein.

Supported by RFBR grant 08-01-00748 and by grant NSh-227.2008.1.

References

1. A.I. Nazarov, *Dirichlet and Neumann problems to critical Emden–Fowler type equations*, J. Global Optim. **40** (2008), 289–303.

APROXIMATION OF SEMILINEAR EVOLUTION EQUATIONS

Piskarev S. (Lomonosov Moscow State University)
piskarev@gmail.com

This talk is devoted to the numerical analysis of abstract semilinear parabolic problem

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t)),\ u(0) = u^0,$$

in some general Banach space E. We are developping a general approach of Baskakov [1] to establish discrete dichotomy in a very general setting and prove shadowing Theorems that compare solutions of the continuous problem with those of discrete approximation in space and time. It is well-known that the phase space in the neighborhood of the hyperbolic equilibrium can be split in a such way that the original initial value problem is reduced to initial value problems with exponential decaying solutions in opposite time direction. We use theory compactness principle to show that such a decomposition of the flow persists under rather general approximation schemes. The main assumption of our results are naturally satisfied for operators with compact resolvents [2] and can be verified for finite element as well as finite difference methods.

Research was supported by grants Russian Foundation for Basic Research 07-01-00269, 07-01-92104 by grant SFB 701 "Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics", Bielefeld University, by University of Valencia and by University Roma Tre.

References

1. *A.G. Baskakov, Pastukhov, A. I.* Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 42 (2001), no. 6, 1231–1243; translation in Siberian Math. J. 42 (2001), no. 6, 1026–1035.
2. *W.-J. Beyn, S. Piskarev.* Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.

ELLIPTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIOS WITH DEGENERATION

Popov V. A., Skubachevskii A. L. (People's Friendship University of Russia)
skub@lector.ru

We consider elliptic functional differential operator with degeneration of the second order. Unlike strongly elliptic functional differential equations, smoothness of generalized solutions to elliptic functional differential equations with degeneration can be violated [1,2]. Moreover, generally speaking, generalized solution of such equation does not belong even to the Sobolev spaces of the first order. We obtain a priori estimates of solutions of elliptic functional differential equation with degeneration. Using these estimates, we prove that the above mentioned operator is sectorial and has a Friedrichs extension.

References

1. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 1997.
2. Skubachevskii A.L. Elliptic differential-difference equations with degeneration. Trudy Moskov. Matem. Obshtsh., 1997 (59), p. 240-285; English transl. in Trans. of Moscow Math. Soc. 1997 (59).

A POSTERIORI ESTIMATES FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Repin S. I. (St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences)
E-mail repin@pdmi.ras.ru

A posteriori estimates are intended to evaluate neighborhoods of exact solutions to differential equations. The estimates discussed are derived by purely functional methods with the help of the same methods that are used in the analysis of existence and regularity of partial differential equations (see [1,2]). The first derivation method is based upon convex analysis in the calculus of variations and can be applied to those problems that have a variational form. The second method derives a posteriori estimates by transformations of integral identities (or variational inequalities) that define generalized solutions of PDE's. Estimates give computable minorants and majorants for various measures of the difference between exact solutions and any function in the energy space of the respective problem. They can be used to verify accuracy of approximate solutions and to evaluate errors associated with simplifications of mathematical models and data indeterminacy. The research is supported by RFBR Grant 08-01-00655-a.

References

1. S. Repin. A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2008.
2. P. Neittaanmaki and S. Repin. Reliable Methods for Computer Simulation. Error Control and a Posteriori Estimates, Elsevier, New York, 2004.

BLOW UP OF SMOOTH SOLUTION TO THE BAROTROPIC COMPRESSIBLE MAGNETHYDRODYNAMIC EQUATIONS WITH FINITE MASS END ENERGY

Rozanova O. S. (Moscow State University)
rozanova@mech.math.msu.su

We prove that the classical solutions to the Cauchy problem for the three-dimensional compressible barotropic magnetohydrodynamic equations with conserved total mass and finite total energy lose the initial smoothness within a finite time if the adiabatic exponent $\gamma \geq \frac{6}{5}$ and the conserved momentum is non-zero. Further, we show that the analogous result holds for the solution to the Cauchy problem for the multidimensional ($n \geq 3$) compressible Navier-Stokes system. The latter result is an extension of [1] to a wider class of solutions. Moreover, for the solution with a finite momentum of inertia we get the two-sided estimates of different components of total energy.

Supported by awards of RFBR 06-01-00441-a and DFG 436 RUS 113/823/0-1.

References

1. O.Rozanova, Blow up of smooth solutions to the compressible Navier-Stokes equations with the data highly decreasing at infinity, J.Diff.Equat., V.245 (7), 2008, 1762-1774.

MINIMALITY CONDITION OF THE NUMBER OF INPUTS FOR LINEAR ALGEBRAIC DIFFERENTIAL SYSTEMS

Shcheglova A.A. (Irkutsk, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS)
shchegl@icc.ru

The linear ordinary differential equations

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = [t_0, +\infty), \tag{1}$$

are considered, where $A(t), B(t)$ are known $(n \times n)$-matrices; $x(t)$ is a desired n-dimensional vector function; $U(t)$ is a given $(n \times l)$-matrix; $u(t)$ is an l-dimensional control vector function. It is supposed that $\det A(t) \equiv 0$ on I. Such equations are called algebraic differential systems (ADS). The integer r $(0 \leq r \leq n)$ known as *the index* is used for designation of the unresolvability degree for this system with respect to the derivative.

The issue of the minimum number of inputs $l \leq n$ required for complete controllability of (1) on any segment $T \subset I$ is investigated. An arbitrary high unresolvability index and a time-varying rank of matrix $A(t)$ are assumed. The analysis is conducted under the assumptions guaranteeing existence of some structural forms for system (1) [1,2].

The theorem on the minimum number of inputs for time invariant ADS has been proved under the assumption of regularity of the matrix pencil $\lambda A + B$.

The conditions, which provide for the existence a feedback control $u(t) = D(t)x(t)$ such that the closed-loop system corresponding to (1) is asymptotically stable, has been obtained. The class of nonstationary ADS, for which the pole assignment problem is solvable, has been selected.

The research is supported in part by the Program of Presidium of the Russian Academy of Sciences N 22 (Project N 1.7) and the Program "Leading Russian Scientific Schools"(Project N 1676.2008.1)

References

1. A.A. Shcheglova, Controllability of nonlinear differential algebraic equations, Autom. & Remote Control, 2008, N 10, p. 57–80.
2. V.F. Chistyakov, A.A. Shcheglova, Selected chapters of the theory of differential algebraic equations, Nauka, Novosibirsk, 2003 (in Russian).

VERY SINGULAR SOLUTIONS OF SEMI-LINEAR PARABOLIC AND ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATE ABSORPTION POTENTIAL

Shishkov A.E. (Donetsk, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine)

We study the limit behavior as $k \to \infty$ of solution $u_k(x,t)$ of the Cauchy problem:

$$u_t - \Delta u + h(x,t)|u|^{p-1}u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \times (0,T), \quad u(x,0) = k\delta_0(x), \quad p > 1,$$

where $h(x,t)$ is nonnegative continuous function and $h(0,0) = 0$.

Particularly, if $h(x,t) = h(|x|) = |x|^\beta$, $\beta > N(p-1) - 2$, we prove that limit function $u_\infty(x,t)$ is an explicit very singular solution (v.s.-solution) (see[1] if $\beta = 0$), while such a v.s. solution does not exist if $\beta \leqslant N(p-1) - 2$. Moreover, we prove existence of v.s.- solution $u_\infty(x,t)$ with point-wise singularity localized at $(0,0)$ for arbitrary potential $h(|x|)$ satisfying flatness condition: $\int_0^1 r \ln(1/h(r))dr < \infty$(Dini-like condition). Otherwise, $u_\infty(x,t)$ has a persistent singularity at $(0,t)$ $\forall t > 0$ ("razor blade"solution), if:

$$\liminf_{r \to 0} r^2 \ln(1/h(r)) > 0$$

We study the structure of $u_\infty(x,t)$ for potentials $h(t)$ and for general degenerate potentials $h(x,t)$. Analogous theory of localized and non-localized v.s.- solutions is constructed for stationary diffusion-absorption equations with degenerate absorption potentials too. Some of mentioned results are published in [2]-[4].

References

1. H. Brezis, L.A. Peletier, D. Terman. *A very singular solutions of the heat equation with absorption* // Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986), 185–206.
2.A.Shishkov, L.Veron. The balance between diffusion and absorption in semi-linear parabolic equations // Rend. Lincei Mat. Appl.**18** (2007), 59-96.
3.A.Shishkov, L.Veron. Singular solutions of some nonlinear parabolic equations with spatially inhomogeneous absorption // Calc. Var. Part. Differ. Equat.**33** (2008), 343-375.
4.A.Shishkov, L.Veron. Diffusion versus absorption in semi-linear elliptic equations // J.Math. Anal. Appl.**252** (2009), 206-217.

QUASI-LINEAR ELLIPTIC TYPE EQUATIONS INVARIANT UNDER FIVE-DIMENSIONAL SOLVABLE LIE ALGEBRAS

Spichak S. V. (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine)
stas_sp@mail.ru

The problem of group classification of quasi-linear elliptic type equations

$$\Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

in two-dimensional space is considered. The list of all equations of this type is obtained, which admit five-dimensional solvable Lie algebras of symmetry operators.

Notice that the problem of classification of equations of form (1), which admit Lie algebras of symmetry operators with non-trivial Levi, is solved completely in [1]. Also, we constructed 39 classes of non-equivalent equations depending on an arbitrary functions of one variable. They exhaust all equations of form (1) invariant under four-dimension solvable Lie algebras of symmetry operators. At that, we used the method uniting the direct Lie-Ovsyannikov method of classification and the theory of representation of Lie algebras (see, [2]).

Further, we apply the direct method (but essentially modified) to these 39 classes. As result, the completed list of the equations were obtained invariant under five-dimensional Lie algebras. At that, some of them depend from parameters which can not be reduced to concrete number with the help of the equivalence transformations. For example, in the equation $\Delta u = \lambda\sqrt{y^2 + 2u_x}$, invariant under operators $\langle x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u\rangle \Subset \langle \partial_u, -y\partial_u, \partial_x, \partial_y - xy\partial_u\rangle$, the parameter λ is not reduced.

References

1. Lahno V.I. and Spichak S.V., Group classification of quasi-linear elliptic type equations. I. Invariance under Lie algebras with nontrivial Levi decomposition, Ukrainian Mathematical Journal, 2007, V. 59, № 11, 1532–1545 (in Ukrainian).
2.Basarab–Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R., The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, Acta Appl. Math., 2001, V. 69, № 1, 43–94.

HOMOGENIZATION OF NONSTATIONARY PERIODIC EQUATIONS

Birman M. Sh., Suslina T. A. (St. Petersburg State University
suslina@list.ru

In $L_2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$, we consider a second order differential operator $\mathcal{A}_\varepsilon = b(D)^* g(\varepsilon^{-1}x) b(D)$, $\varepsilon > 0$. Here $g(x)$ is an $(m \times m)$-matrix-valued function in $\mathbf{R}^d$ such that $g, g^{-1} \in L_\infty$, $g(x) > 0$, and $g(x)$ is periodic with respect to some lattice. Next, $b(D)$ is a first order differential operator; its symbol $b(\xi)$ is an $(m \times n)$-matrix-valued linear homogeneous function of $\xi \in \mathbf{R}^d$ such that $\operatorname{rank} b(\xi) = n$, $\xi \neq 0$. We assume that $m \geq n$. We study the following Cauchy problem for the Schrödinger type equation for a function $u_\varepsilon(x, \tau)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $\tau \in \mathbf{R}$:

$$i\partial_\tau u_\varepsilon(x, \tau) = \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon(x, \tau), \quad u_\varepsilon(x, 0) = \phi(x).$$

We also study the Cauchy problem for the hyperbolic equation for a function $v_\varepsilon(x, \tau)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $\tau \in \mathbf{R}$:

$$\partial_\tau^2 v_\varepsilon(x, \tau) = -\mathcal{A}_\varepsilon v_\varepsilon(x, \tau), \quad v_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x), \ \partial_\tau v_\varepsilon(x, 0) = \psi(x).$$

The corresponding "homogenized"problems look as follows:

$$i\partial_\tau u_0(x, \tau) = \mathcal{A}^0 u_0(x, \tau), \quad u_0(x, 0) = \phi(x);$$

$$\partial_\tau^2 v_0(x, \tau) = -\mathcal{A}^0 v_0(x, \tau), \quad v_0(x, 0) = \varphi(x), \ \partial_\tau v_0(x, 0) = \psi(x).$$

Here $\mathcal{A}^0 = b(D)^* g^0 b(D)$ is the effective operator.

Theorem 1. *If $\phi \in L_2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$, then u_ε tends to u_0 in $L_2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$ for a fixed $\tau \in \mathbf{R}$, as $\varepsilon \to 0$. If $\phi \in H^s(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$, $0 < s \leq 3$, then*

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2} \leq \varepsilon^{s/3} C_s(\tau) \|\phi\|_{H^s}.$$

Here $C_s(\tau) = O(|\tau|^{s/3})$ for large values of $|\tau|$.

Theorem 2. *If $\varphi, \psi \in L_2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$, then v_ε tends to v_0 in $L_2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$ for a fixed $\tau \in \mathbf{R}$, as $\varepsilon \to 0$. If $\varphi, \psi \in H^s(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^n)$, $0 < s \leq 2$, then*

$$\|v_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_0(\cdot, \tau)\|_{L_2} \leq \varepsilon^{s/2} \left(C_s^{(1)}(\tau) \|\varphi\|_{H^s} + C_s^{(2)}(\tau) \|\psi\|_{H^s} \right).$$

Here $C_s^{(1)}(\tau) = O(|\tau|^{s/2})$, $C_s^{(2)}(\tau) = O(|\tau|^{1+s/2})$ *for large values of* $|\tau|$.

We also prove analogs of Theorems 1 and 2 for more general class of operators. The results are published in [1].

References

1. Birman M. Sh., Suslina T. A., *Operator error estimates for homogenization of nonstationary periodic equations*, Algebra i Analiz **20** (2008), no. 6, 30–107.

COMPUTATION OF DEGENERATE SOLUTIONS TO ODES

Varin V. (Moscow)
varin@keldysh.ru

The neighborhoods of degenerate solutions in ODEs, i.e. local degeneracies, are usually studied with the method of normal forms [1]. To reduce a system of ODEs to its normal form, we need to know the degenerate solution (a stationary point, a known periodic solution, etc.) in advance. Then, using the normal form of the equations, we can describe solutions in the neighborhood. But there are fairly typical situations in multi-parameter problems when the degenerate solution is not known, but its existence is obvious. For example, a numerical continuation of a family of solutions by a parameter encounters some problems. It can be a bifurcation with another family, or some topological peculiarity in the family. Such degeneracies are non-local, and, until recently [2], they were computed only with the help of interpolation. We propose a method of computation of such degeneracies with the help of variational equations of higher order. The method is based on treating the solutions to an ODE for all possible values of parameters as some surface or characteristic manifold, included in a finite dimensional Euclidean space. Then each solution to the ODE is a function on the manifold; so the partial derivatives of any order of a solution to the ODE with respect to the local coordinates on the characteristic manifold satisfy variational equations, which are obtained recursively by formal differentiation of the ODE with respect to initial data and parameters. This allows to express the degeneracy in terms of geometry of the characteristic manifold and obtain equations for its computation with the same accuracy as an ordinary solution. We give some examples of application.

Rerefences

1. Bruno, A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
2. Varin, V.P. Degeneracies of periodic solutions to the Beletsky equation. Regular and Chaotic Dynamics, 2000, v.5,N 3, p. 313–328.

EULER-TYPE NON-HOMOGENEOUS LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kilbas A.A., Zhukovskaya N.V. (Belarusian State University, Minsk, Belarus)
anatolykilbas@gmail.com; nataljazhukovskaya@gmail.com

Let $\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x)$ and $\left(D_{-}^{\alpha}y\right)(x)$ be the left- and right-sided Liouville fractional derivatives of positive order $\alpha > 0$ defined for $x > 0$ by

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha]+1),$$

$$\left(D_{-}^{\alpha}y\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^\infty \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha]+1).$$

We consider linear non-homogeneous differential equations

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \left(D_{0+}^{\alpha+k}y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0, \quad \alpha > 0) \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{m} B_k \left(D_{-}^{\alpha+k}y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0, \quad \alpha > 0) \tag{2}$$

with $0 < \alpha \leq 1$ and real constant A_k, $B_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, 1, \cdots, m;\ m \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\})$. When $\alpha = n \in \mathbf{N}$, then $\left(D_{0+}^{n}y\right)(x) = y^{(n)}(x)$, $\left(D_{-}^{n}y\right)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)$, and equations (1) and (2) take the forms of the ordinary differential equations of order $m+1$:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k y^{(k+1)}(x) = f(x), \quad \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k y^{(k+1)}(x) = f(x), \tag{3}$$

known as Euler equations. Using the direct and inverse Mellin integral transforms and residue theory, explicit partial solutions of equations (1) and (2) are established in forms of the convolution-type integrals involving $f(x)$ and generalized Wright hypergeometric function or generalized hypergeometric series. The corresponding results are deduced for differential equations in (3). The results for equations (1) and (2) with two fractional derivatives (m=1) were obtained in [1, Section 5.4].

This investigation was partly supported by Belarusian Fundamental Research Fund (Project F08MC-028).

References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier, 2007. – 540 p.

DISSIPATEDNESS OF PROGRAM MANIFOLD OF NONLINEAR CONTROL SYSTEM

Zhumatov S.S. (Almaty, Institute of Mathematics MES RK)
E-mail: anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Let us consider the material system, possessing by the $(n-s)$-dimensional integral manifold [1] $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, the motion of which is described by equations

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \tag{1}$$

where $B \in R^{n\times r}$, $P \in R^{s\times r}$ are matrices, $x \in R^n$ is vector of object state, $f \in R^n$ is vector-function, $\omega \in R^s$ is vector $(s \leq n), \xi \in R^r$ is vector of control on deflection from given program, satisfying of local quadratic connection's conditions. The necessary and sufficient conditions for the manifold $\Omega(t)$ to be the integral for the system (1) are written in the form $\dot{\omega} = \partial\omega/\partial t + Hf(t,x) = F(t,x,\omega)$, $\quad H = \partial\omega/\partial x$. From where choosing [2] $F = -A\omega$, $\quad A \in R^{s\times s}$ is hurwitz matrix, and differentiating $\Omega(t)$ with respect to time t in view of (1) we obtain $\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi$, $\quad \xi = \varphi(\sigma)$, $\quad \sigma = P^T\omega$.

Statement of the problem: to receive the conditions of dissipatedness of the program manifold $\Omega(t)$ with respect to vector function ω.

Definition 1. The program manifold $\Omega(t)$ is called uniform dissipative with respect to vector function ω, if for every solution $\omega(t,t_0,\omega_0)$ exists moment $t_1 = t_0 + T(t_0,\omega_0) \geq 0$ such that after which hold $\| \omega(t,t_0,\omega_0) \| < \eta$ under $t_1 \leq t < \infty$.

Theorem 1. *Let exist such differentiable function $V : I \times \Upsilon \times R^S \to R$, that for some $a,b,c \in \mathcal{K}$ and $\forall\ (t,\omega)$ the following conditions are valid:*

$$a(\|\omega\|) \leq V(t,\omega) \leq b(\|\omega\|), \tag{1}$$

$$\dot{V}(t,\omega) \leq -c(\|\omega\|). \tag{2}$$

Then the program manifold $\Omega(t)$ is uniform dissipative with respect to vector function ω and to initial moment t_0.

References

1. Galiullin A.S., Muchametzyanov I.A., Mucharlyamov R.G., Furasov V.D. Construction of Systems of Program Motion. Moscow. 1971.
2. Zyumatov S.S., Rremtynulo V.V., Maigarin B.J. Second Lyapunov's Method into the Problems of Stability and Motion's Control. Almaty. 1999.

DAMPING OF GRANULAR MATERIALS' DENSITY IN A SCREW CONVEYOR

Zolotarev P.S. (Ulyanovsk State Agricultural Academy)
E-mail: zolotarev.pavel@mail.ru

A screw conveyor is important device for transportation free flowing granular solids. During the convey action granular materials undergoes the flow back effect. If particles were found in some regions in the casing, they were 'captured' by 'holes' and will 'radiate' in the tube or in the feed intake. Let $f\,(r,p,t)$ be the number of particles in the interval of the phase space $d\Gamma = d^3rd^3p$ obeyed the Boltsmann equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = C[f] + \alpha\ - |v| \int \beta(\Gamma,\Gamma')f(\Gamma')d\Gamma', \tag{1}$$

where $\beta(\Gamma,\Gamma')$ describes the scattering on 'holes'. If we consider the case when the source $\alpha\,(r,p,t)$ produces the actual distribution of particles in the tube, we find solution of (1)

$$f = e^{-\tau}\tilde{f},$$

where $\tilde{f}$ obey the standard kinetic equation with 'holes' terms omitted ($\beta = 0$) $\frac{d\tilde{f}}{dt} = \alpha(t)$, the decrease coefficient

$$\tau(t) = \int_0^l \beta_1(r(s))\,ds$$

$\beta = -\beta_1 + \beta_2$ this components express the capture and the radiation of particles by 'holes' with the density $n(r) = \beta_1(r)/\pi\overline{a}^2$, where $\overline{a}$ its the average radius.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Абдувалиев А.О. (г. Ош, Кыргызстан, ОшГУ)

Пусть $D^+ = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, D^- — открытый треугольник, ограниченный прямыми $y + x = 0, y = x - 1$ и $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. Рассмотрим в области $D = D^+ \bigcup I \bigcup D^-$ краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения смешанного типа:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2(\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \varepsilon a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - k(x,y)u = f(x,y,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \sigma = \partial D^+ \backslash I, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = 0, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $a(x,y), b(x,y), f(x,y)$ — заданные функции и справедливо представление $f(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k f_k(x,y) + O(\varepsilon^{N+1}), N \ge 0$ — любое число.

Задача Т (Трикоми). Найти функцию $u(x,y,\varepsilon) \in C(\bar{D}) \bigcap C^1(D) \bigcap C^2(D^+ \bigcup D^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D^+ \bigcup D^-$ и условиям (2), (3).

Ранее был исследован вопрос о существовании и единственности решения этой задачи (см., например, [1]). Асимптотическое разложение решения задачи Т в области D^+ строится так же, как и в работе [2], а в области D^- — как в работе [3]. Здесь особый интерес представляет нахождение угловых погранфункций в окрестности точки (0,0), которое сводится к решению интегральных уравнений вида

$$\int_0^\infty [K_0(k|\xi - \xi_0|) - K_0(k|\xi + \xi_0|)]\mu_k(\xi_0)d\xi_0 +$$

$$+\pi \int_0^\xi J_0(\lambda(\xi - \xi_0))e^{-m(\xi-\xi_0)}\mu_k(\xi_0)d\xi_0 = F_k(\xi), \xi > 0 (\xi = \frac{\pi}{2}), \tag{4}$$

где K_0 и J_0 — известные специальные функции, а $F_k(\xi), k = 0, 1, ...,$ — известные функции. Интегральные уравнения (4) решаются с помощью преобразования Фурье. После этого угловые погранфункции в окрестности точки (0,0) будут определены окончательно.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

3. Абдувалиев А.О. Асимптотические разложения решений задачу Дарбу для сингулярно возмущенных гиперболических уравнений. // Фундаментальная и прикладная математика. 1995, т. I, N 4. с. 863–869.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ РАЗРЕЗОВ НА ПЛОСКОСТИ

Колыбасова В.В. (Физический факультет МГУ), Крутицкий П.А. (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)

kolybasova@phys.msu.ru

Рассматривается задача с косой производной для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости. Разрезов может быть произвольное конечное число, они могут быть произвольной достаточно гладкой формы и не должны пересекаться. Рассматривается произвольное граничное условие для косой производной. Эта задача описывает распределение электрического тока в полупроводнике при наличии тонких электродов и постоянного магнитного поля (эффект Холла [1]). Частным случаем этой задачи является задача Неймана.

Существование и единственность классического решения этой задачи были доказаны в [2]. Численный анализ был проведен в [3] для частного случая одного разреза. Настоящая работа является обобщением работы [3] на случай нескольких разрезов.

Предлагается численный алгоритм решения такой задачи. Задача сводится к решению интегральных уравнений на границе и дальнейшему нахождению решения с помощью потенциалов. Преимущество метода состоит в отсутствии сингулярностей при приближении к разрезам, в том числе и на концах разрезов. Проведены тесты. Сделаны расчеты для разных значений параметров и для разного количества и формы электродов. Сравниваются различные разновидности алгоритма с точки зрения скорости и точности вычислений. Обсуждаются физические эффекты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект номер 08-01-00082.

Литература

1. E.H. Hall. On a new action of the magnet on electric currents // Am. J. Maths. V. 2 (1879), p. 287.
2. P.A. Krutitskii. The skew derivative problem in the exterior of open curves in a plane // Journal for Analysis and its Applications. V. 16 (1997), No. 3, p. 739–747.
3. P.A. Krutitskii, D.Y. Kwak, Y.K. Hyon. Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. Eng. Math. V. 59 (2007), p. 25–60.

ON TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISMS ON MANIFOLDS OF DIMENSION GREATER THEN 3

Gurevich E.Y. (State University of Nizhny Novgorod, Russia)
elena_gurevich@list.ru

Researching are executed in collaboration with V. Z. Grines and V. S. Medvedev.

Let $G_1(M^n)$ is the class of orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms on closed orientable manifold M^n of dimension $n \geq 4$ such that for any $f \in G_1(M^n)$ the set of unstable separatrixes has dimension 1 and does not contain the heteroclinic orbits.

We will associated with any $f \in G_1(M^n)$ the oriented graph $\Gamma(f)$ such that the set of vertices of $\Gamma(f)$ is isomorphic to non-wandering set $\Omega(f)$ and the set of edges of $\Gamma(f)$ is isomorphic to the set of separatrixes of saddle periodic points. Diffeomorphism f induces automorphism $P(f)$ of graph $\Gamma(f)$.

Theorem 1.(see [2], [3]) *Diffeomorphisms $f, f' \in G_1(M^n)$ are topologically conjugated iff there exists isomorphism $\eta : \Gamma(f) \to \Gamma(f')$ such that $\eta P(f) = P(f')\eta$.*

In case $n = 3$ this result contrasts with [1] were, in particular, the authors show, that there are countable set of topologically non-conjugated Morse-Smale diffeomorphisms with isomorphic graphs.

We denote the set $\mathbf{\Gamma}$ of *admissible* graphs.

Lemma. *Graph $\Gamma(f)$ of diffeomorphism $f \in G_1(M^n)$ is admissible.*

Theorem 2. *Let P is any orientation preserving automorphism of admissible graph Γ. Then there is diffeomorphism $f \in G_1(M^n)$ which graph $\Gamma(f)$ is isomorphic to Γ by isomorphism ζ such that $P(f)\zeta = P\zeta$.*

Research partially supported by RFBR, grant 08-01-00547.

References

1. Bonatti Ch., Grines V.Z., Medvedev V.S., Pecou E., *Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds*, Topology, v. 43, p. 369-391 (2004).
2. Grines V.Z., Gurevich E.Y. *About Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimention greater then three*, Doklady akademii nauk, v. 416, N.1, p. 15-17 (2007).
3. Grines V.Z., Gurevich E.Y., Medvedev V.S., *Peixoto's graph for Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three* , Trudy matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova, v. 261. p. 61–86 (2008).

ON A NONLINEAR PARABOLIC PROBLEM WITH SHIFTS

Solonukha O.V. (CEMI RAN, Moscow)
solonukha@yandex.ru

Let $0 < T < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain, $Q_T = (0,T) \times Q$, ∂Q be a boundary of Q, $\Gamma_T = (0,T) \times \partial Q$. We denote $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$, where I_Q is the operator of extension to $\mathbb{R}^n \setminus Q$ by zero, P_Q is the operator of restriction to Q, and the operators R_i are given by

$$R_i y(t,x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ih} y(t, x+h), \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Here $\mathcal{M}$ is a finite set of vectors with integer coordinates, $a_{ih} \in \mathbb{R}$. Similarly we can consider the case of commensurable shifts.

We study the parabolic functional differential equation

$$\partial_t y + \mathcal{A}_R y = f, \tag{1}$$

$$y(0,x) = y_0 \quad \forall x \in Q, \tag{2}$$

$$y(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in \Gamma_T, \tag{3}$$

where

$$\mathcal{A}_R y(t,x) = -\sum_{1\le i\le n} \partial_i A_i\left(t, x, R_{0Q} y, R_{1Q}\partial_1 y, \cdots, R_{nQ}\partial_n y\right),$$

$f \in L_q(0,T; W_q^{-1}(Q))$, $y_0 \in L_2(Q)$, $p \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$.

We formulate sufficient conditions for A_i and R_{jQ} for existence of at least one element $u \in L_p(0,T; \mathring{W}_p^1(Q))$ that satisfies problem (1)–(3). In this research we use the theory of operators that have property S_+ with respect to operator ∂_t.

4. Механика и математическая физика.

ВРАЩЕНИЕ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И СВЕТОВОГО МОМЕНТОВ

Акуленко Л.Д. (Институт проблем механики РАН, Москва),
Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина)
leshchenko_d@ukr.net

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса под действием момента сил светового давления в гравитационном поле. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца. Орбитальные движения вокруг Солнца с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Установлен эффект убывания кинетической энергии вращательных движений спутника. Эволюция оскулирующих переменных происходит с различными средними скоростями по отношению к степеням малого параметра. Применена схема усреднения второй степени, предложенная в [1]. Она позволила решить задачу на интервале времени, длина которого обратно пропорциональна квадрату малого параметра. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. Проведен численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

Литература

1. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами. ПММ. - 2002. Т.66. Вып. 2. С. 165-176.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И ПАРА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Афанасьев А.А. (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
afanasyev@imec.msu.ru

Геотермальные системы представляют собой нагретые до высоких температур насыщенные водой проницаемые пористые среды [1]. Подобные формации расположены, например, в зонах вулканической активности, где имеется приток тепла из недр Земли к системе, способствующий испарению воды и развитию зон фильтрации пара [2]. Могут формироваться конвективные циркуляционные течения, когда в одних зонах геотермального коллектора лёгкая фаза пара течёт вверх, к поверхности резервуара, а в других тяжёлая фаза воды вниз, в его недра. Проведённое исследование стационарных режимов неизотермической фильтрации воды и пара в поле силы тяжести используется в обсуждении возможности определения давления и температуры флюида в недрах геотермальной системы по параметрам фильтрационного течения в её поверхностных проницаемых пластах.

Предложены параметры установившегося течения воды и пара, в плоскости которых удобно проводить анализ его свойств. Исследование стационарных режимов фильтрации сведено к исследованию на плоскости фазовых траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в случае общего положения по свойствам фильтрационного потока в поверхностных слоях геотермальной системы нельзя определить его, интересные для приложения, параметры в недрах резервуара. Однако, если резервуар имеет значительную протяжённость в вертикальном направлении, то энтальпия и водонасыщенность в недрах, а в некоторых случаях, в зависимости от свойств течения в поверхностных слоях, давление и температура определяются однозначно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00016) и программы "Ведущие научные школы"(грант НШ 1959.2008.1).

Литература

1. Grant M.A. Geothermal reservoir modeling, Geothermics. 1983. V.12. 4. P.251-263.

2. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром, Изв. РАН. МЖГ. 1996. 6. С.92-98.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ

Ахтямов А.М. (г. Уфа, БашГУ)
AkhtyamovAM@mail.ru

Исследованиям по прямым и обратным спектральным задачам посвящено большое число статей В.А. Садовничего и его башкирских коллег (подробнее см. библиографию в монографиях [1]–[3]). В последнее время результаты по этим исследованиям стали все больше использоваться в механике, что вылилось по сути в создание нового научного направления — теории идентификации краевых условий. Суть и значение этого нового научного направления лучше понять на примере стержней. Стержни являются элементами многих механизмов и двигателей. В процессе эксплуатации закрепления стержней могут ослабеть или же совсем измениться (например, при ударе). Иногда возникает необходимость в безразборной диагностике (разборка бывает нежелательна ввиду ее дороговизны или возможного нарушения приработки деталей). Поэтому возникает следующая задача диагностирования: идентифицировать вид и параметры закрепления стержня по собственным частотам его колебаний. На математическом языке поставленная задача сводится к определению краевых условий спектральной задачи по ее собственным значениям. Такая же математическая задача возникает и при создании таких закреплений, которые обеспечивали бы колебания стержней в безопасном для здоровья человека диапазоне частот.

Аналогичные задачи, естественно, можно ставить не только для стержней, но и для мембран, пластин и оболочек. Решению подобных задач посвящено большое число статей и монография [3]. Цель доклада — познакомить с результатами по этому новому научному направлению.

Работа поддержана РФФИ и АН Респ. Башкортостан (проекты № 08-01-97026-р_поволжье_а, 08-01-97008-р_поволжье_а).

Литература

1. Муртазин Х.Х., Садовничий В.А. Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1988.

2. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М: Изд-во МГУ, 2008 (в печати).

3. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008.

ЗАДАЧА ГРЕДЕАКСА И РЕШЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ И ГЕОДИНАМИКИ

Баркин Ю.В. (Москва, ГАИШ МГУ)
barkin@inbox.ru

В начале космической эры в 60-70 годах прошлого века мои учителя- профессоры: Е.П. Аксенов, В.Г. Демин и Е.А. Гребеников предложили эффективный подход к исследованию возмущенного орбитального движения спутника в гравитационном поле Земли. Они показали, что структура реального геопотенциала весьма точно описывается гравитационным полем двух фиктивных точек с комплексными массами, расположенными на полярной оси на комплексных рассто- яниях по отношению к центру масс Земли. Задача двух неподвижных центров с комплексными массами (задача ГреДеАкса) была проин- тегрирована в эллиптических функциях и составила основу новой тео- рии невозмущенного и возмущенного движения спутника Земли. В данной работе используется точечное моделирование не постоянного гравитационного поля Земли, а его вековых вариаций, обусловленных многочисленными нестационарными процессами на Земле. Одна (две) модельные точки с массами меняющимися линейно во времени были расположены на поверхности Земли при полюсах геоцентрической оси OP, направленной к географической точке 70 N, 104 E (район полуострова Таймыр). Вековые скорости изменения масс и их положе- ния были определены по известным из спутниковых наблюдений зна- чениям скоростей вековых вариаций коэффициентов второй и третьей зональной гармоник геопотенциала и скорости векового смещения полюса оси вращения Земли. Данная простая модель перераспределе- ния масс Земли и, соответственно, вариаций компонент ее тензора инерции весьма полно и эффектно описывает наблюдаемые на протяжении десятилетий и веков такие фундаментальные геодинами- ческие явления как: неприливное ускорение осевого вращения Земли; вековые вариации коэффициентов второй, третьей, четвертой, шестой и восьмой зональных гармоник геопотенциала; геодезические измене- ния полушарий Земли; вековой дрейф полюса оси вращения Земли; вековое изменение поверхности океана за последние примерно 150 лет; вековые вариации силы тяжести на поверхности Земли; векового дрейфа центра масс Земли.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.А. Бармин, О.Э. Мельник, А.А. Афанасьев (Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова)
barmin@imec.msu.ru

Вулканическое извержение один из наиболее разрушительных типов природных катастроф. Важность изучения извержений методами гидромеханики обусловлена отсутствием прямых методов наблюдения, необходимостью прогноза и определения степени опасности вулканов. Магма – объект, обладающий уникальными физическими свойствами – аномально большой вязкостью, выделением газа при подъеме, сложными физико-химическими переходами.

Авторами доклада разработаны гидродинамические модели течения магмы в канале вулкана. Модель катастрофического эксплозивного извержения показывает возможность смены режима извержения с медленного выдавливания лавового купола на эксплозивный и обратно, что подтверждается многочисленными данными наблюдений. Показано, что взрывное извержение, инициированное обрушением лавового купола, может носить пульсирующий характер. Предсказана возможность резкого усиления извержения при подтока грунтовых вод в канал вулкана (напр., Везувий 79 г. н.э.).

Модель течения магмы в канале вулкана при росте лавового купола с учетом кристаллизации предсказывает наличие нескольких стационарных режимов извержения. Переход между этими режимами приводит к циклическим изменениям расхода магмы, что наблюдается на многих извержениях и не было объяснено ранее.

В зонах активного вулканизма образуются геотермальные системы, являющиеся альтернативными источниками энергии. В них могут присутствовать зоны фильтрации воды или пара и пароводяной смеси. Представлены автомодельные и неавтомодельные решения задач, выявляющие свойства таких течений. При распаде произвольного разрыва образуются чередующиеся зоны смеси, воды и пара, разделённые фронтами фазовых переходов. При закачке пара в пароводяную смесь перед паром образуются зоны пароводяной смеси и чистой воды. В явном виде получено условие гидродинамической устойчивости фронтов фазового перехода, и численно исследована нелинейная стадия развития неустойчивости разрыва.

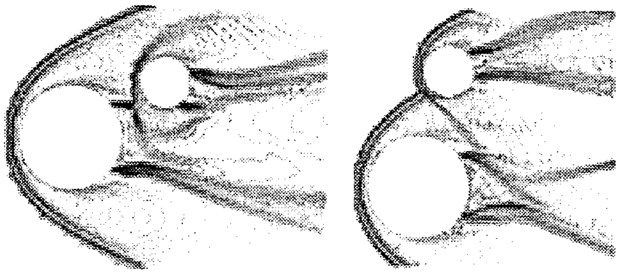
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (07-01-12041, 08-01-00016) и гранта научных школ (НШ-1959.2008.1).

АЭРОДИНАМИКА ФРАГМЕНТОВ МЕТЕОРНОГО ТЕЛА. ЭФФЕКТ КОЛЛИМАЦИИ.

Барри Н.Г. (Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова)
n_barri@imec.msu.ru

Достоверно известно, что метеорные тела разрушаются в атмосфере. Как будет эволюционировать рой фрагментов, зависит от многих факторов: высоты и скорости разрушения, размеров осколков и свойств материала тела. Взаимодействие ударных волн, формирующихся перед фрагментами, может приводить как к увеличению общей площади миделева сечения облака фрагментов, так и к его уменьшению [1], [2]. В данной работе проведено исследование взаимного влияния тел в сверхзвуковом потоке. Рассмотрены аэродинамические свойства конфигураций из двух сферических фрагментов различного радиуса. С помощью численных расчетов найдено распределение давления в течении вокруг фрагментов при их различных положениях относительно друг друга. Построены зависимости коэффициентов расталкивающей силы и силы сопротивления от угла между линией центров и набегающим потоком для различных расстояний между телами. Результаты сопоставлены с расчетами других авторов.

На рисунках представлены два варианта проявления взаимодействия ударных волн: эффект коллимации и расхождение в поперечном направлении.



Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00009.

Литература

1.N.A. Artem.eva, V.V. Shuvalov, Interaction of shock waves during the passage of a disrupted meteoroid through the atmosphere. Shock Waves 5, 359.367 (1996)

2. S.J. Laurence, R. Deiterdingand, H.G. Hornung, Proximal bodies in hypersonic flow. J. Fluid Mechanics 590, 209.237 (2007)

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ С МАЛЫМИ И ТОНКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ СТРУКТУРЫ

Бобылев Д.Е. (Криворожский государственный педагогический университет, г. Кривой Рог, Украина)
dmytrobobyliev@gmail.com

Расчет свойств тел с малыми и тонкими элементами структуры - одна из актуальных вычислительных проблем моделирования. Перспективным есть подход, который базируется на применении теории интегральных уравнений к описанию напряженно-деформированного состояния (НДС) таких структур и его численная реализация методом граничных элементов (МГЭ).

К преимуществам МГЭ относится необходимость дискретизации только границы исследуемой области, которая приводит к системам более низкого порядка, чем в других методах. Но решение задач при наличии малых и тонких областей связано с появлением вычислительной нестойкости и потерей точности. МГЭ не является исключением. При его использовании возможно возникновение нестойкости, которая объясняется близостью границ тонких элементов структуры и использованием интегральных уравнений для перемещений. В большинстве работ используется метод усреднения, а также гипотезы теории пластин. В то же время методы регуляризации не используются в полной мере.

В докладе представлены следующие результаты:

1) разработан эффективный подход к регуляризации решения задач для тел с тонкими элементами структуры, который позволяет получить стойкий численный метод для решения двумерной краевой задачи. Этот подход реализован в программном комплексе;

2) для разных форм элементов структуры (разгружающая щель в контуре выработки) при изменении геометрических, механических параметров и нагрузки исследовано НДС данного многосвязного кусочно-однородного тела; выявлен ряд закономерностей в распределении полей перемещений и напряжений.

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ НАВИГАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ ГЛОНАСС

Богданов О.Н. (Москва)
bogdanov-on@yandex.ru

Российская спутниковая навигационная система ГЛОНАСС до сих пор не является полностью развернутой, число рабочих спутников колеблется в диапазоне 14-17 [1]. Это не всегда обеспечивает достаточное для решения навигационной задачи количество видимых спутников. Кроме того, эфемеридное обеспечение реального времени у спутниковой системы ГЛОНАСС грубее, чем у системы GPS - ошибки определения координат навигационных спутников составляют 3-15м. Ввиду этого, до сих пор в серьезных приложениях измерения спутниковой системы ГЛОНАСС не используются.

Для решения проблемы уточнения координат навигационных спутников предлагается использовать высокоточную эфемеридную информацию, файлы с которой в свободном доступе предоставляет международный центр IGS. Файлы содержат гринвичские координаты каждого навигационного спутника, декларируемый уровень точности которых составляет 5-6см. Координаты каждого спутника записаны в файлах с шагом по времени 15 минут. После решения задачи оценивания положение спутника на уровне точности данных IGS определяется в любой момент времени [2].

Для оценки ионосферной погрешности предлагается использовать фазовые измерения двухчастотного приемника в сочетании с данными, свободно предоставляемыми международной организацией CODE, которые представляют собой коэффициенты разложения величины полного электронного содержания в ряд по сферическим гармоникам.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00430-а.

Литература

1. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Редакция 5.0; М.: КНИЦ ВКС, 2002.
2. Иванов В.Ф. Повышение точности навигационных измерений одночастотной аппаратуры потребителей СРНС ГЛОНАСС/GPS за счет применения оперативных данных о состоянии ионосферы. Навигация и управление движением. Материалы VIII конференции молодых ученых, 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧЕ АЭРОГРАВИМЕТРИИ

Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
aagolovan@yandex.ru

Обзорный доклад посвящен работам сотрудников МГУ в области аэрогравиметрии. Обсуждаются постановки, математические модели, методы решения основных задач камеральной обработки информации, сопровождающих задачу аэрогравиметрии: оценивание аномалий силы тяжести на траекториях полета летательного аппарата [1]; обработка первичных спутниковых измерения систем ГЛОНАСС и GPS с целью определения координат, скоростей, ускорений летательного аппарата [2]; информационная интеграция инерциальных и спутниковых навигационных систем для оценивания положения приборной вертикали [1]; построение и трансформации карт аномального гравитационного поля [3,4].

Дается характеристика разработанного и внедренного программного обеспечения для российских промышленных аэрогравиметрических систем GT1A и Гравитон-М. Приводятся некоторые результаты гравиметрических съемок.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00430-а.

Литература

1. Болотин Ю.В., Голован А.А., Кручинин П.А., Парусников Н.А., Тихимиров В.В., Трубников С.А. Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний. Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 1999. N2. с.36-41.
2. Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Трубников С.А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2001.
3. Голован А.А., Болотин Ю.В., Парусников Н.А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М., Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 120 стр., 2002.
4. Болотин Ю.В., Попеленский М.Ю. Построение карт поля тяжести по данным аэрогравиметрических съемок. М.: Изд-во МГУ, Сборник "Фундаментальная и прикладная математика", 2009.

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ ПРОЦЕССОВ И СООТНОШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Бровко Г.Л. (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)
glb@mech.math.msu.su

Свойства различных типов инвариантности тензорных величин, тензорных процессов и соотношений между ними в механике сплошной среды все более активно привлекаются в последние десятилетия к проведению теоретико-экспериментальных и прикладных исследований, прежде всего к развитию теории определяющих соотношений механических свойств сред, направленной на построение адекватных математических моделей различных сред.

В докладе представлены результаты исследований в современной теории определяющих соотношений, проводившихся на кафедре теории упругости МГУ научной школой А.А.Ильюшина, его последователями с применением методов инвариантности: введены принципиально новые понятия объективных тензоров различных типов (и рангов), диаграмм переплетающих отображений для разнотипных тензоров одного ранга, фундаментальное понятие независимых от системы отсчета отображений, связывающих объективные тензорные процессы различных типов и рангов, изучена общая математическая структура таких отображений, построены пакеты отображений (кондукторов), в рамках которых введены обобщающие понятия объективных производных и объективных интегралов.

Проведенные исследования в значительной мере обобщают и продвигают известные достижения отечественной и зарубежной науки в этой области в следующих основных направлениях:

1) тензорное представление различных характеристик механических процессов и состояний;

2) структура отображений таких тензоров и уравнений связей между ними, включая дифференциальные и интегральные связи, используемые в определяющих соотношениях сред.

Результаты этих исследований, во-первых, устанавливают глубокое внутреннее единство существующих подходов в теории определяющих соотношений, во-вторых, существенно обобщают понятия и принципы, реализованные в предыдущих исследованиях, и предлагают единый математический аппарат в качестве общей основы для развития современной теории определяющих соотношений механики сплошной среды и ее разделов.

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГАЗОВЫХ СКВАЖИНАХ

Булатова З.А. (Стерлитамакская Государственная Педагогическая Академия)
b_za@mail.ru

Своевременное прогнозирование осложнений в процессе работы скважины и возможность контроля призабойной зоны имеют важное значение в практических задачах эксплуатации нефтяных и газовых скважин. К таким задачам относится метод локального акустического контроля. Согласно этому методу, акустическая волна распространяется между поверхностями корпуса зонда и стенки скважины. Обсаженная скважина сообщается с продуктивным пластом посредством перфорации. Выбранный способ перфорации . пулевой, когда отверстия в скважине простреливают перфоратором, заряженным цилиндрическими пулями, в результате получаются трубчатые канальцы.

Приведенные результаты расчетов акустических волн в газовых скважинах показывают, что в необсаженном участке состояние коллекторских характеристик (пористость, проницаемость) окружающих горных пород оказывает в ряде случаев заметное влияние на эволюцию сигналов. Это обстоятельство позволяет надеяться, что рассмотренные идеи могут быть использованы, при определенных ситуациях, для контроля коллекторских характеристик прискважинных областей горных пород

Литература

1. Шагапов В.Ш., Булатова З.А., Щеглов А.В. Динамика волн в каналах с перфорированными стенками, Бурение и нефть. . Москва. 2007. 2. С.23-26.
2. Шагапов В.Ш., Булатова З.А., Щеглов А.В. К возможности акустического зондирования газовых скважин, Инженерно-физический журнал. Минск. 2007. 3. С.51-56.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Буров А.А. (Вычислительный центр им.А.А.Дородницына РАН),
Нечаев А.Н. (Тольяттинский государственный университет)
aburov@ccas.ru, an.nechaev@gmail.com

Рассмотрены классические задачи о движении бусинки, взаимодействующей с вращающимся обручем в случае, когда ось его вращения горизонтальна и вертикальна в предположении о наличии сухого трения. Найдены множества неизолированных установившихся движения указанных механических системы, изучены особенности их устойчивости и бифуркаций.

Рассмотренная задача описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. В настоящее время активно развивается общая теория устойчивости и бифуркаций таких решений, в частности, осуществляется завершение классификации фазовых портретов таких систем на плоскости [1-3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00600а.

Литература

1. Kuznetsov Y., Rinaldi S., Gragnani A., One-parameter bifurcations in planar Filippov systems, Int. J. Bifurcation and Chaos. 2003. 13, 8. P. 2157–2188.
2. Leine Remco I., Nijmeijer Henk, Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. Wien: Springer Verlag. 2004. 236 p.

3. Teufel A., Steindl A., Troger H., On nonsmooth bifurcations in a simple friction oscillator, PAMM. 2005. 5/1. P. 139-140.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. (Московский авиационный институт (государственный технический университет))
tdv902@mai.ru

Рассматривается электромагнитоупругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных возмущений. Движение среды описывается линеаризованными относительно заданного электромагнитного поля уравнениями связанной электромагнитоупругости при учете силы Лоренца. Полагается, что материал полуплоскости является однородным и изотропным, массовые силы отсутствуют, а начальные условия нулевые.

Для решения используются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате вдоль границы полуплоскости. Изображения искомых функций представляются в виде рядов по малому параметру, который характеризует связанность механического и электромагнитного полей. В результате задача сводится к рекуррентной последовательности краевых задач. При этом нулевые члены рядов (нулевые приближения) для перемещений соответствуют чисто упругой задаче при отсутствии массовых сил и неоднородных граничных условиях. Краевые задачи для последующих членов этих рядов (последующих приближений) включают в себя однородные начальные условия и неоднородные уравнения с правыми частями, зависящими от предыдущих членов рядов для координат вектора напряженности электрического поля. Уравнения для коэффициентов последних рядов содержат правые части, определяемые членами рядов по малому параметру для перемещений с теми же номерами.

Решения указанных краевых задач представляются следующим образом: нулевые приближения для перемещений находятся в явном виде, остальные члены рядов записываются интегралами с ядрами в виде соответствующих функций Грина. В пространстве оригиналов этим подынтегральным функциям соответствуют свертки по времени и про-странственной координате. Оригиналы нулевого приближения и функций Грина находят-ся двумя методами: с помощью алгоритма совместного обращения преобразований Лапласа и Фурье, а также посредством определения оригиналов по Лапласу с последующим численным обращением преобразования Фурье. Вычисление внешних интегралов и сверток проводится численно с помощью специальных квадратурных формул, учитывающих особенности ядер.

Приводятся примеры расчетов для случая кинематического возмущения границы полуплоскости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЫВАЛЕ ЛЕСА ТУНГУССКИМ ВЗРЫВОМ

Гендугов В.М. (механико-математический факультет МГУ)
tenzor-home@yandex.ru

Форма вывала леса Тунгусским взрывом (знаменитая "бабочка" Фаста) моделировалась неоднократно экспериментально и численно [1, 2]. Первую "экспериментальную бабочку" получили Зоткин И.Т. и Цикулин М.А. (1966 г.). Похожую численную "бабочку" получила группа Коробейникова В.П. (1975 г.), и Бронштэн В.А. с Бояркиной А.П. (1976 г.), но при разных углах наклона траектории (40^o и 15^o) к горизонту.

Споры по азимуту возможных траекторий пролета, а также детальное изучение тонкой структуры вывала леса в 80-х годах привели к появлению новой "бабочки" Анфиногенова с "усами телеграфного леса" по азимуту продолжения траектории на запад. И эту "бабочку" вывала удалось экспериментально получить при веретенообразной форме области энерговыделения.

Таким образом, решение обратной задачи о форме вывала леса Тунгусским высотным взрывом неединственно, а тонкую структуру вывала леса не описывает ни одна из существующих моделей, следующих из космических гипотез.

В работе получено новое аналитическое решение обратной задачи о форме вывала в рамках геофизической гипотезы А.Ю. Ольховатова [2]. Это решение основано на модификации модели Лаврентьева-Шабата о косом ударе цилиндрической струи идеальной жидкости о плоскую поверхность [3].

Автор благодарит Натяганова В.Л. за постановку задачи и А.А. Чайку за помощь в численных расчетах возможных форм вывала леса.

Работа выполнена при финансовой подержке РФФИ (проект 08-08-00712).

Литература

1. Васильев Н.В. Тунгусский метеорит: Космический феномен лета 1908 г.- М.: НП ИД Русская панорама, 2004.
2. Ольховатова А.Ю. Тунгусский феномен 1908 г.- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2008.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.- м.: Наука, 1973.

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА—ЗОММЕРФЕЛЬДА С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Георгиевский Д.В. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

georgiev@mech.math.msu.su

На основе метода интегральных соотношений аналитически исследуется ряд задач на собственные значения для уравнения Орра – Зоммерфельда [1]

$$\varphi^{IV} - 2s^2\varphi'' + s^4\varphi = \mathrm{Re}[(\alpha + isv^\circ)(\varphi'' - s^2\varphi) - isv^{\circ\prime\prime}\varphi], \quad 0 < x < 1,$$

моделирующего в линеаризованной теории устойчивости развитие со временем плоской картины возмущений, налагаемых на одномерный плоскопараллельный сдвиг вязкой жидкости. В качестве граничных условий выбирается один из трех вариантов: кинематические условия прилипания на обеих границах слоя (в этом случае имеет место классическая задача Орра – Зоммерфельда), условия прилипания на одной из границ и задание касательной компоненты вектора напряжения и нормальной компоненты скорости на другой: $\varphi(1) = 0, \quad \varphi''(1) = 0$, а также условия прилипания на одной границе и требование того, чтобы другая поверхность была свободна:

$$x = 1: \ \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}(\varphi'' + s^2\varphi) = s\Big(\frac{iv^{\circ\prime\prime}}{\mathrm{Re}} - sp^\circ\Big)\varphi \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}(\varphi'' - 3s^2\varphi)' = \alpha(\alpha + isv^\circ)\varphi' - s\Big(i\alpha v^{\circ\prime} + \frac{is^2v^{\circ\prime}}{\mathrm{Re}} + sp^{\circ\prime}\Big)\varphi$$

Граничные условия в последнем случае, выведенные в работе, характеризуются вхождением в них спектрального параметра. Развивается техника метода интегральных соотношений [2], что приводит к новым оценкам устойчивости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00231а и 08-01-00353а.

Литература

1. Лидский В.Б., Садовничий В.А., Формулы следов в случае уравнения Орра–Зоммерфельда, Изв.АН СССР. Сер.математ. 1968. Т.32. 3. С.633–648.
2. Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.,Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости, Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т.25. С.3–89.

АДДИТИВНОЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Голованов А.И. (Казанский государственный университет)

Alexandr.Golovanov@ksu.ru

В работе дается обзор различных способов разложения полных деформаций на упругие и неупругие (пластические) составляющие при использовании мультипликативного представления тензора градиента деформаций. Приводятся новые результаты, позволяющие строить эффективные технологии решения задач указанного класса.

В первой части определяются тензоры, используемые для описания конечных деформаций (градиент деформаций (F); правые и левые тензоры искажения – $(U), (V)$, Коши-Грина – $(C), (B)$, Пиолы – $(C^{-1}), (B^{-1})$, логарифмических деформаций – $(\ln U), (\ln V)$; тензоры деформаций Коши-Грина и Альманси $(E), (A)$ и др.) и произвольных течений среды (пространственный градиент скорости $(h) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1})$, тензор деформации скорости (d) и др.). Приводятся соотношения, связывающие их между собой. При этом вводятся обобщенные объективные производные Грина-Нагди, Олдройда, Ли, логарифмическая и др.

Во второй части анализируется кинематика мультипликативного разложения градиента деформации$(F) = (F_e) \cdot (F_p)$. Показывается, что разложение по главным значениям и главным направлениям соответствующих тензоров искажения обладают следующими свойствами: $V_i = V_i^e V_i^p$, $(R) = (R_e) \cdot (R_p)$, $\vec{c}_i = \vec{c}_i^p$, $\vec{b}_i^p = \vec{c}_i^e$, $\vec{b}_i = \vec{b}_i^e$.

Третья часть посвящена обзору различных способов аддитивного разделения упругих и пластических деформаций на основе мультипликативного разложения градиента деформаций. В частности для тензоров деформации $(E) = (E_e') + (E_p)$, $(E') = (E_e) + (A_p)$ и $(A) = (A_e) + \left(A_p'\right)$, где $2\left(E_e'\right) = (C) - (C_p)$, $2\left(A_p'\right) = \left(B_e^{-1}\right) - \left(B^{-1}\right)$, $(E') = \left(F_p^{-T}\right) \cdot (E) \cdot \left(F_p^{-1}\right)$. Для скоростей деформаций имеем $\left(\dot{E}\right) = \left(\dot{E}_e'\right) + \left(\dot{E}_p\right)$, $(d) = (A^\Lambda) = (A_e^\Lambda) + (A_p'^\Lambda)$, $(d) = (d_e) + \left(d_p'\right) = \left(d_e''\right) + \left(d_p''\right) = \left(d_e'''\right) + \left(d_p'''\right)$, где $\left(d_p'\right) = \left[(F_e) \cdot (h_p) \cdot \left(F_e^{-1}\right)\right]_{Sym}$, $\left(d_e''\right) = (d) - \left(d_p''\right)$, $\left(d_p''\right) = \left(F_e^{-T}\right) \cdot (d_p) \cdot \left(F_e^{-1}\right)$, $\left(d_e'''\right) = \left[\left(V_e^G\right) \cdot \left(V_e^{-1}\right)\right]_{Sym}$, $\left(d_p'''\right) = \left[(V_e) \cdot \left(V_p^G\right) \cdot \left(V_p^{-1}\right) \cdot \left(V_e^{-1}\right)\right]_{Sym}$. В этих соотношениях фигурируют обобщенные производные типа Ли и Грина-Нагди. Для логарифмических деформаций справедливы разложения в терминах главных значений $\ln V_i = \ln V_i^e + \ln V_i^p$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 08-01-00546.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Голубев А.С., Земсков А.В. (Московский авиационный институт (государственный технический университет))
azemskov1975@mail.ru

Рассматривается нестационарная задача термоупругости. Трансверсально изотропная платина конечной толщины по оси Ox_3 и неограниченная в плоскости Ox_1x_2 на поверхности $x_3 = 0$ подвергается нагреву. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой, нижняя поверхность $x_3 = L$ предполагается закрепленной, верхняя свободной. Плотность теплового потока имеет неравномерное распределение по поверхности пластины.

Решение задачи ищется в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε, характеризующего слабую неравномерность теплового импульса по поверхности пластины [1]. После применения интегрального преобразования Лапласа по времени поставленная задача сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, из которой, с учётом краевых условий, находится решение исходной задачи в виде изображений.

Полученные изображения представляют собой нелинейные комбинации иррациональных функций и экспонент. Для приближённого нахождения оригинала, изображения раскладываются в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки параметра преобразования. Затем осуществляется переход к оригиналам, которые представляют из себя асимптотику точных решений задачи при $t \to 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Литература

1.Земсков А.В. Асимптотическое решение задачи о слабо неравномерном нагреве неограниченной композитной пластины. Матер. XIV Междунар. симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред"им. А.Г. Горшкова. Тез. докл. - М.: "ИД МЕДИАПРАКТИКА-М", 2008. - С. 96 - 99.

2. Моргунов Б.И. Математическое моделирование связанных физических процессов. - М.: МИЭМ, 1997. - 216 с.

3. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т.1: Введение в теорию пьезоэлектричества. - М.: КомКнига. - 2005. - 312 с.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ШЕСТИНОГОГО РОБОТА НА ПОДВИЖНОМ ШАРЕ

Голубев Ю.Ф. (МГУ им. М.В.Ломоносова),
Корянов В.В. (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН)
golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru

Исследуется проблема организации целенаправленного устойчивого движения шестиногого робота, имеющего 24 управляемые степени свободы, на подвижном массивном шаре, который может катиться по горизонтальной плоскости [1]. За счет движения корпуса и перестановки ног робот должен заставить шар двигаться в нужном направлении с требуемой скоростью. При этом сам робот должен оставаться на верхней части шара, сохраняя равновесие. Отдельной задачей является переход робота с неподвижной опоры на шар для возможности дальнейшего движения робота вместе с шаром. В качестве такой опоры рассматривается вертикальный уступ с верхней горизонтальной площадкой на высоте, приблизительно равной диаметру шара. Приводится следовое расписание ног и движение корпуса, обеспечивающие статически устойчивый переход робота на шар. Для отработки алгоритмов стабилизации используется 3D-компьютерное моделирование полной динамики робота с учетом масс корпуса, ног и шара. С этой целью применяется программный комплекс "Универсальный механизм" [2], средствами которого создана необходимая виртуальная среда. Предполагается, что компьютерная модель робота имеет полную информацию о движении, и может взаимодействовать с опорной поверхностью только стопами. В контакте стоп с опорой возникает сила сухого трения. В точках соприкосновения шара с опорной поверхностью возникают сила сухого трения и момент трения качения. Движение ног относительно корпуса обеспечивается моделью электродвигателей с учетом самоиндукции. Приводится компьютерная анимация моделирования, свидетельствующая о том, что с помощью построенных алгоритмов робот успешно выполняет поставленную задачу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00134).

Литература

1. Golubev Yu.F., Koryanov V.V. Motion design for an insectomorphic robot on unstable obstacles. Proc. of the 11-th Intern. Conf. CLAWAR-2008. (Coimbra Portugal). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008, pp.654-661.
2. http://www.umlab.ru

ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

Голубятников А.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
golubiat@mail.ru

Дана классификация возможных моделей простых релятивистских сплошных сред, которая основана на описании непрерывных подгрупп полной линейной группы трехмерных преобразований, как групп материальной симметрии, и их инвариантов на множестве тензоров второго ранга (Голубятников, 2003). Эта классификация может быть использована и для моделирования сред с геометрическими связями путем фиксирования указанных инвариантов, что приводит к различным ограничениям на закон движения среды. При этом отдельного анализа требует вопрос правильной формулировки релятивистской теории деформаций.

Решение задачи об одномерном движении абсолютно твердого тела согласно известному определению М. Борна, в частности, дает поле скорости $v = t/x < 1$. Эта формула показывает, что левый конец тела движется со скоростью света $v = 1$, а правый при $x = \infty$ стоит на месте, что явно противоречит любой физике твердотельного движения. Отметим, что уравнения адиабатического движения сжимаемого газа также допускают это парадоксальное решение, хотя, по определению, никакой деформации газа нет.

В связи с этим предлагается новый подход к релятивистской теории деформаций, который использует пространственную метрику системы отсчета специального наблюдателя, в частности, инерциального. Здесь имеется некоторая аналогия с отсчетом упругих деформаций в теории пластичности. При этом уравнения механики сплошной среды при необходимости по-прежнему могут быть представлены в лоренц-инвариантной форме. Хотя величина скорости $|\mathbf{v}| < 1$, удельная внутренняя энергия становится, по существу, нерелятивистской, меняется определение скоростей звука и т.п.

Данный подход позволяют эффективно интегрировать уравнения связей так же, как в ньютоновской механике (Голубятников, 2008). Рассмотрен класс плоских задач с однопараметрическими группами материальной симметрии. Предложен метод, который сводит решение уравнений связей, квадратичных по производным, к интегрированию линейной системы дифференциальных уравнений того же порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00026, 08-01-00401) и грантом НШ 610.2008.1.

МЕТОД КОМПЛЕКСНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЁСТКОСТИ В ЗАДАЧЕ О ШИММИ КОЛЁС САМОЛЁТА

Гончаренко В.И. (Киев)
V_Goncharenko@ukr.net

Наибольший вклад в решение проблемы шимми колёс самолёта у нас внесли Б. А. Глух, Ю. Б. Румер, М. В. Келдыш, А. В. Смрчек и В. С. Гоздек. Эта задача состоит в обосновании выбора параметров системы для обеспечения устойчивого качения колёс с шиной.

Если повороты колёс стойки характеризуются комплексной динамической жёсткостью (КДЖ) $D(j\omega) = c_e + j\omega h_e$, то граница области шимми практически представляет отрезок прямой между осями координат в I квадранте плоскости $D(j\omega) = c_e + j\widetilde{h}_e$.

Демпфер шимми характеризуется двумя физическими параметрами: коэффициентом сопротивления h_i и податливостью a_d; стойка шасси имеет податливость a_g. Поскольку эти элементы соединены последовательно (подход В. С. Гоздека), то в этой идеальной модели жёсткость $c_i = 1/(a_d + a_g)$, и поэтому $D(j\omega) = c_i\, j\widetilde{h}_i/(c_i + j\widetilde{h}_i)$. Между $(c_e, \widetilde{h}_e)$ и $(c_i, \widetilde{h}_i)$ имеется взаимно однозначное соответствие:

$$c_i + j\widetilde{h}_i = |D|^2\,(1/c_e + j/\widetilde{h}_e).$$

Система управления (СУ) имеет КДЖ $D_d(j\omega) = C_e + j\widetilde{H}_e$ и

$$1/(c_e + j\widetilde{h}_e) = 1/(C_e + j\widetilde{H}_e) + a_g,$$

где a_g — податливость остальной части стойки шасси. Это означает, что отрезок прямой на плоскости $D(j\omega) = c_e + j\widetilde{h}_e$ соответствует дуге окружности на плоскости $D_d(j\omega) = C_e + j\widetilde{H}_e$.

СУ можно представить в виде демпфирующего элемента и связанных с ним нескольких упругих элементов. В результате КДЖ СУ изображается точкой в I квадранте комплексной плоскости. При изменении сопротивления $\widetilde{h}_i$ (или частоты) от 0 до ∞ эта точка пробегает дугу полуокружности с центром на действительной оси, от минимального значения жесткости до максимального.

Поэтому для универсальности описания и удобства работы целесообразно рассматривать границу области шимми (устойчивости) на плоскости КДЖ рулевого привода по следующим причинам: это почти окружность; на любом этапе проектирования можно оценить возможные значения КДЖ рулевого привода; фактические значения КДЖ могут быть получены экспериментально.

РАЗРЕШИМОСТЬ И ДВУХМАСШТАБНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАТЕРИАЛА ИШЛИНСКОГО

Гошев И.А. (Московский Энергетический Институт)
goshevia@gmail.com

Продольные колебания вязкоупругопластического материала Ишлинского описываются начально-краевой задачей:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g \quad \text{в } Q = \Omega \times (0,T),\\
\sigma = \frac{\nu[\eta]}{\eta}\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{el}[e] + \mathcal{F}[e], \quad \eta = e + 1 \quad \text{в } Q,\\
e|_{t=0} = e^0(x), \quad u|_{t=0} = u^0(x) \quad \text{на } \Omega = (0,X),\\
\sigma|_{x=0} = \sigma_0(t), \quad u|_{x=X} = u_X(t) \quad \text{на } (0,T).
\end{gathered}$$

Упругопластические свойства материала описываются гистерезисным оператором Прандтля-Ишлинского $\mathcal{F}$.

Однозначная глобальная разрешимость данной задачи установлена в [1]. Для случая быстро осциллирующих периодических данных проведено и строго обосновано двухмасштабное усреднение [2]. В [3] доказана однозначная глобальная разрешимость начально-краевой задачи для усредненной системы. Установлены результаты о дополнительной гладкости обобщенных решений как исходной задачи, так и задачи для усредненной системы [4]. Кроме того, получена оценка погрешности усреднения.

Литература

1. Амосов А.А., Гошев И.А. Дифференц. уравнения. 2007. № 6. Т.43. С.760-779.
2. Амосов А.А., Гошев И.А. Журн. Выч. Мат. и Мат. Физ. 2007. № 6. Т.47. С.988-1006.
3. Гошев И.А. Вестник МЭИ. 2006. № 6. С. 32-48.
4. Гошев И.А. Вестник МЭИ. 2008. № 6 (принято к печати).

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ НАИСКОРЕЙШЕГО ТОРМОЖЕНИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Калинин А.И., Грудо Я.О. (Белорусский государственный университет, Минск)
kalininai@bsu.by

Рассматривается задача оптимального быстродействия для нелинейной сингулярно возмущенной системы

$$I\dot{y}_1 = (I-\mu)y_2 z - cy_1 + bu_1, \quad y_1(0) = y_1^*, \quad y_1(T) = 0,$$

$$I\dot{y}_2 = (\mu - I)y_1 z - cy_2 + bu_2, \quad y_2(0) = y_2^*, \quad y_2(T) = 0,$$

$$\mu\dot{z} = -cz + bu_3, \quad z(0) = z^*, \quad z(T) = 0,$$

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) \le 1, \quad t \in [0, T], \quad J(u) = T \to \min,$$

которая моделирует процесс наискорейшего торможения вращений динамически симметричного твердого тела с малым моментом инерции относительно оси симметрии. В ней учитывается момент сил вязкого трения, направленный против вектора угловой скорости тела. Постоянные μ, I, b, c положительны, причем $\mu \ll 1$.

С помощью результатов, полученных в [1], показывается, что управление

$$u_1 = -\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \quad u_2 = -\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \quad u_3 = 0,$$

переводящее динамическую систему за время

$$T = \frac{I}{c} \ln\left(\frac{c\sqrt{(y_1^*)^2 + (y_2^*)^2} + b}{b}\right)$$

в состояние $O(\mu)$, представляет собой асимптотически оптимальную обратную связь в рассмотренной задаче.

Литература

1. Грудо Я.О., Калинин А.И. Асимптотический метод решения задачи оптимального быстродействия для нелинейной сингулярно возмущенной системы, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2008. — Т. 48, № 11. — С. 1942–1951.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Губина Е.В. (Волжская государственная академия водного транспорта)
gubinael@mail.ru

Рассматривается модель часов, которую Н.Н.Баутин назвал "часы наоборот". В этой модели осциллятор получает импульсы, компенсирующие потери, не через систему хода, а непосредственно от высокоточного кварцевого генератора периодически через заданные промежутки времени при условии, что в момент передачи импульса координата осциллятора удовлетворяет заданным условиям: катушка находится вблизи положения равновесия. Система хода используется для передачи энергии осциллятора на стрелки часов.

Для изучения модели рассматривается автономная динамическая система второго порядка с мгновенными импульсами-скачками координат двух видов. Скачки одного вида происходят при фиксированном значении координаты, другого — периодически в заданные моменты времени. Задача сведена к исследованию точечного отображения плоской области в себя. Пространство параметров системы разбито на области, точкам каждой из которых соответствует определенная качественная структура траекторий точечного отображения. Найдены значения параметров,при которых предельное множество отображения является странным аттрактором.

Рассматриваются четыре отображения отрезка в себя, которые получены при исследовании динамической системы. При изучении сложного характера странного аттрактора для этих отображений вводятся число вращения и интервал вращения.

Множество вращения — это набор чисел вращения для различных точек отображения. Множество вращения может представлять собой замкнутый интервал, возможно тривиальный (т. е. точку).

Если интервал вращения является нетривиальным, то различные точки отрезка имеют разные числа вращения. Нетривиальность интервала вращения указывает на сильную "хаотичность" системы.

Для рассмотренных отображений области параметров разбиты на подобласти, соответствующие как тривиальным, так и нетривиальным интервалам вращений. Это означает, что в реальной конструкции в зависимости от начальных условий устанавливаются различные сложные рабочие режимы.

АЛГОРИТМЫ ТЕСНОЙ ИНТЕГРАЦИИ ИНС С СИСТЕМАМИ ГЛОНАСС И GPS

Голован А.А., Демидов О.В. (Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
ovdemidov@mail.ru

Задача тесной интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем возникает при построении интегрированных навигационных комплексов. Для инерциальных навигационных систем (ИНС) характерны накапливающиеся ошибки при достаточной гладкости решения [1]. Спутниковые навигационные системы (СНС) дают устойчивое решение, обладающее при этом высокочастотными погрешностями [2]. Цель интеграции — получение навигационного решения, вобравшего в себя достоинства обоих систем, а также улучшение точности определения углов ориентации объекта.

Доклад посвящен задаче интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем по первичным данным (кодовые и доплеровские измерения СНС). Особенность полученных алгоритмов интеграции состоит в том, что возможна обработка спутниковых измерений при малом их числе (два, три), когда автономное решение спутниковой навигационной системы невозможно, а значит, не работают и алгоритмы интеграции по вторичным данным (координаты, скорость).

Разработаны алгоритмы тесной интеграции ИНС одновременно с двумя спутниковыми системами GPS и ГЛОНАСС. Алгоритмы строятся как результат решения соответствующей коррекционной задачи в варианте оценивания. Также описывается вариант введения обратных связей в модельные уравнения ИНС. Достоинством полученных алгоритмов является то, что их можно применять для ИНС любого класса точности и для произвольного созвездия спутников GPS/ГЛОНАСС.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00430-а.

Литература

1. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации М.: Изд-во МГУ, 2007.

2. Н.Б. Вавилова, А.А. Голован, Н.А. Парусников, С.А. Трубников. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Изд-во МГУ, 2001

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ НЬЮТОНОВОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТИ ТЕЛ

Диарова Д.М. (Институт нефти и газа, Республика Казахстан)
ddiarova@mail.ru

Исследование посвящено проблеме устойчивости новых классов гомографических решений систем дифференциальных уравнений ограниченной ньютоновой задачи десяти тел, главная конфигурация которой состоит из концентрических ромба и прямоугольника. В их вершинах расположены восемь гравитирующих тел, которые вращаются вокруг центрального тела с одной и той же однозначно определенной угловой скоростью. Существование такого класса гомографических решений задачи 9-ти тел типа "ромб-прямоугольник"нами доказано в работе [1]. Исследуется движение тела с бесконечно малой массой в гравитационном поле указанных выше 9-ти тел [2]. Найдены частные решения типа "положение равновесия"дифференциальных уравнений этой модели и исследована их устойчивость в первом приближении [3] и в смысле Ляпунова [2]. Для этого мы применили теорему Арнольда-Мозера [2], выполнив процедуру нормализации гамильтониана по Биркгофу [2] в окрестности положения равновесия. Были найдены значения геометрических и динамических параметров модели, при которых стационарные решения задачи являются устойчивыми и в первом приближении и по Ляпунову. Аналитические преобразования и вычисления выполнены в системе символьных вычислений Mathematica.

В заключение выражаю благодарность профессору Е.А.Гребеникову за консультации и постоянное внимание к моей работе.

Литература

1. Диарова Д.М. Существование центральной конфигурации с неполной симметрией в ньютоновой проблеме 9-ти тел. Материалы международной научно-практической конференции "Таймановские чтения", г.Уральск, с.87-90, 2007.

2. Гребеников Е.А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. Издание 2-ое, - М.: РУДН, 2002. -209 с.

3. Диарова Д.М. Линейная устойчивость положений равновесия в ограниченной задаче 10-ти тел. Труды ИСА РАН. Сб. "Динамика неоднородных систем"/ Под ред. С.В.Емельянова. Т.29(1).Вып. 11.-М., 2007, с.79-84.

ПРИМЕНЕНИЕ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДАННЫХ АЭРОГРАВИМЕТРИИ.

Дорошин Д.Р. (кафедра прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова)

doroshindr@mail.ru

Задачей аэрогравиметрии является определение удельной силы тяжести по измерениям установленного на борту летательного аппарата гравиметра [1]. При этом необходимо решать обратную задачу для уравнение движения чувствительного элемента гравиметра под действием сил инерции, сил тяжести и удерживающей силы системы управления гравиметра. Основная проблема – выделение слабого полезного сигнала на фоне больших инерциальных помех и погрешностей измерений. Здесь часто используется оптимальное стохастическое оценивание, основанное на предположении, что аномалия силы тяжести является стационарным случайным процессом. В работе предлагается метод адаптивного стохастического оценивания аномалии – для описания последней используется формирующий фильтр первого порядка, причем параметры фильтра переменны в пространстве, неизвестны и определяются в процессе адаптации. Для описания перехода между состояниями используется обобщение метода скрытых марковских моделей (СММ) [2].

С использованием СММ задача решается в три этапа: обучение СММ, то есть оценку параметров распределений случайного процесса на участках стационарности; распознавание СММ, то есть определение моментов смены стационарных участков; Калмановское сглаживания данных с учетом построенной модели для определения аномалии. Методика опробована на модельных данных.

Для применения к реальным данным в силу слабой обусловленности задачи возникла необходимость ее регуляризации. Соответствующий алгоритм находится в стадии разработки.

Литература

1. Голован А.А., Болотин Ю.В., Парусников Н.А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М., Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002.

2. Vaseghi, Saeed V. Advanced digital signal processing and noise reduction (Third Edition). John Wiley and Sons Ltd. 2006.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЯ КОВАЛЕВСКОЙ-ЯХЬИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Андреянов П.П., Душин К.Е., Логачева Н.С. (МГУ им. Ломоносова)

dushinkirill@ya.ru

Задача о движении тяжёлого гиростата, распределение масс которого подчинено условиям С.В.Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии тела, называется задачей Ковалевской-Яхьи. П.В.Харламов указал инвариантное соотношение, позволяющее в эллиптических функциях проинтегрировать этот частный случай. Как показал Х.М.Яхья, интеграл С.В.Ковалевской может быть обобщён на гиростат при условиях, указанных П.В.Харламовым.

Известно, что уравнения движения гиростата являются гамильтоновыми на совместных 4-поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей.

Топологический анализ был полностью проведен в случае нулевой постоянной площадей, в случае нулевого гиростатического момента, и частично в общем случае в работах Морозова П.В., Ошемкова А.А., Рябова П.Е. Мы хотим завершить топологический анализ общего случая, отталкиваясь от уже исследованных частных случаев и собственных результатов. В частности был проведен анализ бифуркационных диаграмм отображения момента и были исследованы типы невырожденных точек положения равновесия в общем случае.

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Зайцева А. В., Полянских С. В. (г.Краснодар, Кубанский государственный университет)
zav mf@mail.ru

Микронасосы с механическими частями являются абсолютно неприемлимыми в микро- и мезо- масштабах в силу очень большого трения, поэтому получили большое распространение микронасосы с внешним электрическим полем в качестве движущей силы и электролитом в качестве рабочей жидкости [1]. В последнее время получила распространение идея об использовании переменного электрического поля [2].

Эти практические применения поднимают ряд новых математических и гидродинамических задач, в частности, проблему нестационарного нелинейного двойного ионного слоя [3] и, возбуждаемого им, электрокинетического течения жидкости.

В настоящей работе впервые предложена модель нелинейного электрокинетического течения во внешнем поле высокой частоты. Эта модель приложима в непосредственной близости к стенке и опирается на построенную нами модель нестационарного двойного слоя. С математической точки зрения это является решением задачи во внутренней области. Получающаяся при решении скорость проскальзывания, использовалась для решения во внешней электронейтральной области. В случае малой напряженности поля, наши результаты хорошо совпадают с теоретическими результатами линейной модели [2]. Более того, при большой напряженности поля и сравнении с экспериментальными результатами тех же авторов предсказание нашей модели намного лучше, чем [2]. Были также проведены численные эксперименты, показавшие границы приложения нашей модели.

Работа финансировалась грантом РФФИ, проект 08-01-00005-а.

Литература

1. Bruus H. Theoretical microfluidics. 2008. Oxford Press. 363 P.
2. Gonzales A. et al. Fluid flow induced by nonuniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes. The Phys. Rev. E. 2003. V. 61. 4. P. 4019.
3. Bazant M. Z., Thornton K. Diffuse-Charge dynamics in electrochemical systems. Preprint. 2004. 26 p.

УПРАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ПОМЕХ

Ухоботов В.И., Зайцева О.В. (Челябинский государственный университет)
ukh@csu.ru, alex62@ph.chel.ru

Рассматривается линейная управляемая система

$$dz = A(t)du + B(t)v, z \in R^n, t \leq p. \quad (1)$$

Допустимым программным управлением $u(t) \in R^k$ является функция с ограниченной вариацией, а допустимая реализация помехи $v(t) \in R^q$ является измеримой, ограниченной функцией. Матрицы $A(t)$ и $B(t)$ - непрерывны. Решение системы (1) определяется обобщенной формулой Коши [1]. На выбор управления и помехи накладываются ограничения

$$\mu(t) = \mu(t_0) - \int_{t_0}^{t} \|du(r)\| \geq 0,$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(r, |v(r)|)dr \geq 0.$$

Цель выбора управления заключается в выводе точки $z(p)$ на заданное множество $Z \subset R^n$. В процессе формирования управления используется процедура коррекции программных управлений $u(t)$ в конечном числе моментов коррекций.

С помощью метода одномерного проектирования [2] найдены необходимые условия возможности осуществления включения $z(p) \in Z$ из начального состояния. Разработан алгоритм построения соответствующего управления. Приведены условия, при которых необходимые условия являются достаточными. Рассмотрены конкретные примеры.

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейной игре с интегральными ограничениями и однотипные игры, Изв. АН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 192-199.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА НА ПРИСТЕННЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Зубарев В.М. (Москва, ИПМмех РАН)
zubarev@ipmnet.ru

Влияние турбулентности набегающего потока на ламинарно-турбулентный переход связано с уровнем интенсивности турбулентности Tu_∞ и величиной её масштаба L_∞ [1]. Работа посвящена проблеме замыкания осредненных уравнений пограничного слоя с помощью моделей турбулентности для расчета областей с низкими локальными числами Рейнольдса, анализу влияния параметров турбулентности в набегающем внешнем потоке на развитие характеристик течения. Для исследования пристенных пограничных слоев рассмотрены различные варианты классических дифференциальных моделей турбулентности, позволяющие рассчитать непрерывным образом области с ламинарными, переходными и турбулентными режимами течения, при большой интенсивности турбулентности набегающего потока. Предложен подход для лучшего описания существующих экспериментальных и теоретических данных по структуре перехода в пограничном слое в диапазоне от малых до больших значений локальных чисел Рейнольдса [2–3]. Детально изучено численными методами влияние масштаба и степени турбулентности набегающего потока на турбулентные характеристики перехода. При обтекании плоской пластинки потоком несжимаемой жидкости расчетные результаты по k-ε моделям сопоставлены с тестовыми экспериментальными данными по профилям скорости и интенсивности турбулентности.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РФФИ № 05-08-33384.

Литература

1. Драйден Х.Л. Переход ламинарного течения в турбулентное. Турб. теч. и теплопередача. Аэродин. больших скоростей и реакт. техн. - М.: ИЛ, 1963, с. 9–82.

2. Zubarev V.M. Comparative analysis of various k–ε turbulence models for laminar-turbulent transition, ИПМех РАН, Препр. № 601, 1997.

3. Алексин В.А., Зубарев В.М. Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на пристеночные переходные течения в пограничном слое, Мат. модел. РАН, 2008, т. 20, № 8, с. 87–106.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Иванов М.И. (ИПМех РАН, Москва)
m-i-ivanov@mail.ru

Рассматриваются малые гармонические колебания свободной поверхности тонкого слоя жидкости, покрывающего вращающийся шар. Жидкость находится в центральном поле тяготения шара, кроме того, на нее действуют центробежная сила и сила Кориолиса. Далее, предполагается, что глубина слоя жидкости h не зависит от долготы ϕ. Возвышение жидкости имеет вид прогрессивной волны $Z = \Theta(\theta)\exp(i(n\phi - \sigma t))$, где σ - ее искомая угловая скорость, θ - дополнение широты, n - широтное волновое число. Функция Θ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} f\frac{d}{d\mu}\left(h(\mu)\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{d\Theta}{d\mu}\right) + \left(n\frac{d}{d\mu}\left(h(\mu)\frac{\mu}{f^2-\mu^2}\right) - \right. \\ \left. -\frac{n^2 f h(\mu)}{(1-\mu^2)(f^2-\mu^2)} + \frac{4\omega^2 a^2}{g} f\right)\Theta = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mu = \cos\theta$, $f = \sigma/2\omega$. Здесь обозначено: ω - угловая скорость вращения шара, g - ускорение свободного падения (считающееся постоянным ввиду малой толщины слоя), a - радиус шара. Решением является пара - безразмерная собственная частота f и собственная функция $\Theta(\mu)$, причем последняя должна быть ограничена на всем интервале интегрирования $-1 \le \mu \le 1$.

Интегрирование уравнения (1) представляет известные трудности, связанные с сингулярным поведением его коэффициентов. Автором разработан метод локального выделения особенностей, позволивший получить решения уравнения (1) при $h = const$ (в этом случае оно известно как приливное уравнение Лапласа) в очень широком диапазоне изменения определяющих параметров [1, 2]. В настоящей работе метод локального выделения особенностей применен к уравнению (1) в случае переменной глубины. Найденные решения сопоставлены с соответствующими модами приливного уравнения Лапласа.

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00562).

Литература

1. Иванов М.И. Неосесимметричные решения приливного уравнения Лапласа и волны Россби, Изв. РАН. МЖГ. 2007. 4. С. 151-161.

2. Иванов М.И. Волновые движения жидкости в сложных областях с учетом вращения: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 2008. 111 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУШКИ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА В КОНВЕКТИВНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

Игошин Д.Е. (Стерлитамакская Государственная Педагогическая Академия)
navydimka@rambler.ru

Для теоретического описания процессов тепломассопереноса при нагреве пористой среды примем следующие допущения. Будем полагать, что температура пористой среды и насыщающей парогазоводяной смеси в каждой точке совпадают, скелет пористой среды несжимаем и неподвижен, т.е. усадкой материала пренебрегаем. Испарение происходит полностью внутри пор, транспорт влаги происходит в газофазном режиме, а жидкая фаза неподвижна. В этом случае можно пренебречь гидравлическим сопротивлением пористой среды. Будем полагать, что суммарное давление парогазовой смеси, состоящее из парциальных давлений пара и воздуха однородно. Причем каждая из компонент (пар и воздух) является калорически совершенной [1]. В работе проведен сравнительный параметрический анализ основных исследуемых величин от начальных и граничных условий для диффузионного и диффузионно-конвективного приближения. Установлено, что координата подвижной границы, температура и влагосодержание на ней различаются незначительно, если исходное влагосодержание близко к 1, исходная температура низка, а снаружи горячий сухой воздух. Учет конвекции показывает, что температура подвижной границы несколько ниже. С ростом как внешней концентрации пара, так и исходной температуры среды это различие увеличивается. Снижение исходного влагосодержания приводи к тому же эффекту. Кроме того, обнаружено, что учет конвекции гораздо реже приводит к накапливанию влаги на границе зон. Происходит это в связи с тем, конвекция способствует тепломассопереносу. Исключение составляет такой режим сушки, когда исходная температура среды приближается к температуре кипения воды. В этом случае учет конвекции приводит к накоплению влаги на подвижной границе и дает существенно большее значение ее координаты. Дело в том, что массоперенос при таком режиме осуществляется преимущественно с помощью конвекции.

Литература

1. У.Р. Ильясов, Д.Е.Игошин. Математическое моделирование сушки влажного пористого материала в диффузионном приближении, Теплофизика и аэромеханика. 2008. 4. С. 39-47.

КИНЕТИКО-ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЦЫ ГЕЛИОСФЕРЫ

Измоденов В.В. (МГУ)
izmod@ipmnet.ru

Структура и свойства внешней гелиосферы определяются характером взаимодействия солнечного ветра с межзвездным окружением Солнца - частично ионизованным локальным межзвездным облаком (ЛМО). ЛМО движется относительно Солнца со скоростью ~26 км/с, имеет температуру $\sim 10^4$ K и концентрацию частиц ~0.2-0.3 $см^{-3}$. Область взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой принято называть гелиосферным ударным слоем. До настоящего времени основная информация о структуре и свойствах гелиосферного ударного слоя получена с помощью методов дистанционного зондирования. Дистанционное зондирование гелиосферного ударного слоя проводится в основном с орбиты Земли, но также и с больших гелиоцентрических расстояний (3-100 а.е.) на КА Ulysses, Voyager 1 и 2, Pioneer 10 и 11.

В докладе будет представлена кинетико-газодинамической многокомпонентная модель взаимодействия солнечного ветра и межзвездной среды. В частности, проводится исследование:

1) эффектов, связанных с кинетическим характером движения межзвездных атомов как внутри гелиосферы, так и в области гелиосферного ударного слоя;

2) хвостовой области взаимодействия в поисках ответа на фундаментальный вопрос: до каких областей распространяется влияние солнечного ветра на окружающую его межзвездную среду?

3) влияния 11-летнего цикла солнечной активности;

4) влияния межзвездного магнитного поля;

5) влияния многокомпонентности солнечного ветра на распределение параметров плазмы и атомов в гелиосфере и на ее границе.

Модель позволяет детально исследовать физические процессы на границе гелиосферы, а также провести анализ экспериментальных данных, полученных на различных космических аппаратах. Будет представлен анализ данных, полученных на космических аппаратах (КА) HST, SOHO, Voyager и Pioneer. Будут представлены первые результаты КА Interstellar Boundary Explorer (IBEX).

Работа выполнена в рамках МНП МГУ "Инновационные решения в области космической механики, физики, астрофизики, биологии и медицины для реализации космической отрасли России".

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛАСТОДИНАМИКИ СО СТАЦИОНАРНЫМИ БЕГУЩИМИ НАГРУЗКАМИ

Л.А.Алексеева , Г.К.Кайшибаева (Институт математики ИМИМ МОН РК, г. Алматы,Казахстан)
alexeeva@math.kz, gkk@math.kz

Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К данному классу относятся задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях. При моделировании таких процессов приходится строить решения краевых задач в классе "бегущих"функций. При этом скорость движения нагрузки существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от чисел Маха.

Здесь излагается метод обобщенных функций (МОФ) для решения краевых задач (КЗ) эластодинамики при сверхзвуковых скоростях движения нагрузок по поверхности цилиндрической полости в упругом пространстве. В этом случае тип уравнений в подвижной системе координат гиперболический и стандартные методы построения ГИУ, характерные для эллиптических задач, непригодны из-за сильных особенностей фундаментальных решений на волновых фронтах. Однако аппарат теории обобщенных функций позволяет справиться с такими трудностями.

Основные идеи МОФ изложены в [2]. Он включает в себя следующие этапы: постановка КЗ в пространстве обобщенных функций; построение тензора Грина и других фундаментальных решений уравнений Ламе в классе бегущих вектор-функций, динамических аналогов формулы Грина в пространстве ОФ и их регулярных интегральных представлений, динамических аналогов формулы Гаусса для тензоров фундаментальных решений, сингулярных граничных интегральных уравнений, определяющих решение задачи. Приводятся результаты расчета напряженно-деформированного состояния среды при действии до-, транс- и сверхзвуковых бегущих нагрузок.

Литература

1. Alekseyeva L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads, Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998, N11, p.37-44

2. Алексеева Л.А.Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения, Математический журнал. Т.6, 1(19), 2006, с.16-32.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

Калугин А.Г. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
kalugin@mech.math.msu.su

Нематической жидкокристаллической фазой обычно обладают вещества, состоящие из сильно вытянутых молекул или частиц, объединяющих несколько молекул. Если каждой такой молекуле приписать единичный вектор, направленный вдоль ее длинной оси, то можно определить новый макроскопический параметр - вектор, обычно называемый директором, задающий среднее направление ориентации молекул в каждой частице сплошной среды. При этом принимается, что для состояний далеких от точек фазовых переходов жидкий кристалл - изотропная жидкость и жидкий кристалл - твердое тело директор имеет постоянную единичную длину. Наличие дополнительной переменной приводит к появлению анизотропной части свободной энергии, зависящей от пространственных градиентов вектора ориентации (энергия Франка) и анизотропии тензоров вязких напряжений и поверхностного натяжения.

В работе рассматривается модель Озеена, в которой тензор вязких напряжений изотропен, а уравнения движения отделяются от уравнений определяющих ориентацию директора. В этом случае уравнения для компонент скорости изотропны, а наличие анизотропных свойств среды оказывает влияние на ее движение за счет граничных условий [1]. Решается задача о распространении плоских гармонических волн малой амплитуды вдоль поверхности несжимаемой тяжелой ориентируемой жидкости с бесконечной глубиной в однородном гравитационном поле, при наличии над поверхностью нематика бесконечного слоя несжимаемой изотропной вязкой жидкости. Получено и исследовано в параметрическом виде дисперсионное соотношение для таких волн, численно построены графики зависимости частоты от волнового числа, показано, что при некоторых отношениях констант в энергии Франка существует интервал значений волнового числа, при котором поверхностные волны неустойчивы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00401 и программы поддержки ведущих научных школы НШ-610.2008.1.

Литература

1. Golubiatnikov A. N., Kalugin A. G. On short surface waves in nematic liquid crystals. Molecular Crystals and Liquid Crystals (MCLC). 2001. V. 366. P. 2731-6.

НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ

Кийко И.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
666krok@rambler.ru

Проблема сверхзвукового панельного флаттера в связи с развитием аэрокосмической техники остается актуальной. Анализ публикаций по этой теме показывает, однако, что остаются вопросы в построении математических моделей, которые позволяли бы с достаточной точностью описывать это сложное и опасное явление. В докладе этот пробел частично восполняется на двух примерах: флаттер бесконечной полосы и конической оболочки при внутреннем обтекании. В обоих случаях рассмотрение проводится в рамках линеаризованной теории сверхзвукового потенциального течения.

1. Тонкая упругая полоса занимает область $0 \leqslant x \leqslant \ell$, $|y| < \infty$; со стороны $z > 0$ она обдувается потоком газа с вектором скорости $V = \{v_x, v_y\}$; для случаев $v_x/a_0 > 1$ и $v_x/a_0 < 1$, $v_y/a_0 > 1$ (a_0 - скорость звука в невозмущенном потоке) построены точные решения для потенциала возмущения, а в первом - и для избыточного давления. Математическая модель флаттера сводится к неклассической задаче на собственные значения для функции w прогибов полосы. Например, в случае $v_x/a_0 > 1$ имеем (принято $w = W\exp(\omega t - i\alpha y)$):

$$\Delta^2 W = B_0\Omega^2 W + A_n \frac{d^n}{dx^n}\int_0^x H(x-\tau;\Omega)W(\tau)d\tau \quad (1)$$

здесь $n = 0; 1; 2$; $\Omega = \ell\omega/a_0$, параметры B_0, A_n зависят от механических свойств системы, Δ - оператор Лапласа. Уравнение (1) дополняется нулевыми условиями на краях полосы.

К сожалению, нам неизвестны работы, в которых обсуждались бы вопросы существования и характера спектра оператора (1).

2. В сферической системе координат упругая тонкая оболочка занимает часть $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ конической поверхности $\{0 \leqslant r < \infty;\ \theta = \alpha; 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi\}$. Внутри конуса в положительном направлении оси r течет газ с параметрами $a_0(r)$, $v_0(r)$; $(v_0/a_0)^2 \gg 1$. Получено приближенное выражение для избыточного давления, после чего задача флаттера сводится к задаче на собственные значения для системы из двух уравнений типа (1).

Автор благодарит Г.Г. Чёрного и А.А. Бармина за обсуждение результатов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ УДАР, ВЗРЫВ И ПРОНИКАНИЕ

Киселев А.Б., Максимов В.Ф., Нехаева О.В. (Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)
akis@mech.math.msu.su

В докладе дается обзор некоторых исследований, проведенных сотрудниками лаборатории динамики деформируемых сред Отдела прикладных исследований по математике и механике Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (зав. Отделом академик РАН В.А. Садовничий), и связанных с проблемой математического моделирования процессов необратимого деформирования и разрушения твердых тел и конструкций, сопровождающих ударное взаимодействие, взрыв, пробивание преград и проникание в плотные среды.

Кроме того, рассматриваются результаты численного решения новой задачи столкновения и разрушения осесимметричной конструкции, представляющей собой двухслойный контейнер (внешний слой - теплозащитное керамическое покрытие; внутренний - алюминиевый сплав), заполненной жидкостью, с препятствием. Жидкость описывается широкодиапазонным уравнением состояния, учитывается кавитация. Задача имеет непосредственное отношение к проблемам ракетно-космической науки и техники, в частности, к проблеме образования техногенного космического мусора [1]. Некоторые результаты исследований по данной задаче были ранее опубликованы в работе [2].

Литература

1. Space Debris. Hazard Evaluation and Mitigation. Ed. by N.N. Smirnov / Anz-Meador P.D., Chobotov V.A., Flury W., Kiselev A.B., Nazarenko A.I., Nikitin V.F., Potter A.E., Smirnov N.N., Yasaka T. - L. and N.Y.: Taylor and Francis, 2002. 229 p.

2. Киселев А.Б., Нехаева О.В. Численное моделирование процессов необратимого деформирования и разрушения двухслойной сферической оболочки, заполненной жидкостью, при столкновении с препятствием // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 320- 338.

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Ковалев В.Л. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

kovalev@mech.math.msu.su

При входе космических аппаратов тел в атмосферу Земли и других планет за счет использования низкокаталитических покрытий тепловые потоки к их поверхности могут быть снижены в несколько раз. В работе анализируются и обобщаются результаты исследований, посвященных указанной проблеме.

Показано, что кинетические модели способны достаточно точно предсказать тепловые потоки к многоразовым теплозащитным покрытиям. Вместе с тем, имеется большая неопределенность в механизмах протекания гетерогенных каталитических процессов на поверхности и величинах основных параметров моделей катализа [1].

По мере того как увеличивались возможности компьютерной техники, стало возможным использование квантовомеханических и молекулярнодинамических методов моделирования. Они позволяют лучше понять механизм гетерогенных каталитических процессов, проанализировать их элементарные стадии и оценить влияние пространственной структуры поверхностного слоя на каталитические явления [2-4] . Теоретическое описание позволяет существенно уменьшить объем экспериментальной работы, необходимой для достоверного описания гетерогенного катализа.

Приводятся конкретные примеры расчетов каталитических свойств теплозащитных покрытий и тепловых потоков к космическим аппаратам при их входе в атмосферы Земли и Марса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 08-01-00230 а).

Литература

1. Ковалев В.Л. Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике Москва. Физматлит. 2002. 224 с.

2. Ковалев В.Л., Погосбекян М.Ю. Известия РАН. МЖГ, 4, 2007. С. 176-183

3. Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Погосбекян М.Ю., Суханов Л.П. Международный форум по нанотехнологиям, 3-5 декабря 2008, Москва, Россия. Сборник тезисов докладов научно - технологических секций. Том 2. С. 229-230.

4. Ковалев В.Л., Погосбекян М.Ю. Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2009. 2. С. 44-49.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЧИЗНЕЛЛА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Кожанов В.С. (Саратовский государственный университет)

kozhanovvs@gmail.com

В работе описывается модификация метода приближенного аналитического решения задачи о сходящейся сферической ударной волне, предложенного Чизнеллом [1].

Чтобы описать автомодельное течение жидкости с отношением удельных теплоемкостей γ за ударной волной (УВ) в задаче о схождении сферической УВ необходимо решить задачу для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Известно, что эта система является нелинейной, и к настоящему моменту получить ее аналитическое решение не удалось.

С целью построения простого приближенного аналитического решение задачи Чизнелл вводит т.н. *пробную* функцию $Z_T = Z_T(V)$. Подстановка выражения для Z_T вместо переменной Z в правые части уравнений разрешенной относительно производных исходной системы ОДУ дает возможность проинтегрировать последнюю и получить в явном виде формулы для приближенного определения параметров течения, а также нелинейное алгебраическое уравнение для определения значения показателя автомодельности α.

Модификация метода заключается в замене пробной функции Чизнелла на более общую, содержащую параметр, зависящий от γ. Определяя вид этой зависимости, можно существенно повысить точность приближенного определения значения α. В работе построена зависимость параметра, фигурирующего в пробной функции, от γ для значений показателя адиабаты из интервала (1,1.8698).

В таблице приведены значения показателя α, вычисленные как по оригинальному методу Чизнелла (α_{Chi}), так и по предлагаемой модификации (α_{ChiMod}) для нескольких значений γ.

γ	α	α_{Chi}	α_{ChiMod}
9/7	0.7365975008	0.7366012865	0.7365974903
7/5	0.7171745015	0.7171607264	0.7171745054
5/3	0.6883768229	0.6883714921	0.6883768238

Автор благодарит Чернова И.А. за внимание к работе.

Литература

1. Chisnell R.F. An analytic description of converging shock waves, J. Fluid Mech. 1998. Vol. 354. pp. 357 – 375.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ РАССЛОЕНИЙ

Козлов И. К. (Мех-мат МГУ)
ikozlov90@gmail.com

Всякое локально-тривиальное расслоение, реализованное отображением момента интегрируемой гамильтоновой системы, является лагранжевым — то есть ограничение симплектической структуры на каждый слой тождественно равно нулю.

Дюйстермаатом в [1] был обнаружен один из инвариантов лагранжевых расслоений — решетка в слоях кокасательного расслоения базы. Это позволило Мишачеву в [2] произвести классификацию компактных четырехмерных расслоений над ориентируемыми поверхностями.

В докладе будут описан полный список инвариантов, определяющих произвольное лагранжево расслоение. Как оказалось лагранжево расслоение полностью определяется решеткой, препятствием к продолжению сечения и классом двумерных когомологий базы. В качестве примера будет завершена классификация компактных четырехмерных лагранжевых расслоений.

Литература

1. J. J. Duistermaat. On global action-angle coordinates. Comm. Pure Appl. Math., 33(6):687-706, 1980.
2. K. N. Mishachev, The classification of lagrangian bundles over surfaces Differential Geometry and its Applications 6 (4) 301-320, 1996

СИНГУЛЯРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (ТЕЧЕНИЯ В СЛОЯХ СМЕШЕНИЯ)

Конюхова Н.Б., Суков А.И. (Москва)
nadja@ccas.ru, aisukov@online.ru

Дается краткое изложение основных результатов [1] в переработанном и дополненном виде: результаты по сингулярным задачам Коши, гладким устойчивым многообразиям решений и экспоненциальным параметрическим рядам Ляпунова применяются к правильной математической постановке и анализу сингулярной "начально-краевой" задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, заданного на всей действительной оси. Задача возникает в механике вязкой несжимаемой жидкости (см. [2], [3] и библиографию там) и описывает автомодельные решения уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное ламинарное течение в слое смешения).

Подход [1] (см. также библиографию там), отличный от достаточно сложных методов [2], [3], позволил не только уточнить математическую постановку сингулярной нелинейной задачи, но и дать ее более полный и строгий математический анализ, а также предложить простой численный метод ее решения. Формулируются достаточные условия существования решений, дается описание асимптотического и глобального поведения решений, приводятся результаты расчетов; некоторые результаты являются новыми или уточненными по сравнению с [1].

Работа поддержана РФФИ (проект N 08–01–00139).

Литература

1. Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Суков А.И. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т.47. N7. С.1158–1178.
2. Диесперов В.Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения, Прикл. матем. и мех. 1986. Т.50. Вып.3. С.403–414.
3. Диесперов В.Н. Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления, Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1986. – 39 с.

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕНАЖЕРОМ ВОЖДЕНИЯ МОТОЦИКЛА

Кручинин П.А., Буданов В.М. (МГУ им. М.В.Ломоносова), Боуш Р.Л., Пустовалов О.А. (РГУФКСиТ, Москва), Денисов С.Г. (ОКБ Марс, Москва)
pkruch@mech.math.msu.su

Доклад посвящен разработке алгоритмов управления прототипом тренажерного комплекса вождения мотоцикла. Тренажер состоит из активного рабочего места водителя и персонального компьютера с монитором. Рабочее место водителя, установлено на стойке, шарнирно закрепленной на неподвижном основании, оснащено органами управления (руль, ножные педали, ручка газа, рычаги ручного тормоза и сцепления) и приводом осуществляющим его наклоны. Органы управления оснащены датчиками, информация от которых поступает в персональный компьютер. Программное обеспечение, аналогично тренажеру [1], включает в себя четыре основных блока: блок моделирования динамики транспортного средства, блок формирования изображения и блок обработки показаний датчиков и дополнено блоком управления движениями тренажера,.

Алгоритм управления стендом имеет двухуровневую структуру. На верхнем уровне моделируется движение мотоцикла, вычисляются углы наклона по крену и тангажу и ускорения движения мотоцикла. В соответствие с этим на верхнем уровне вырабатывается программное значение углов наклона стойки тренажера. Нижний уровень управления обеспечивает отслеживание системой программных значений углов, с учетом требований безопасности пользования тренажером. Одна из основных проблем проектирования управления тренажером заключается в невозможности имитировать линейные ускорения при движении мотоцикла, не вызывая вращательных движений, прежде всего при разгоне и торможении.

Литература

1. И.В.Новожилов, П.А.Кручинин, А.В.Лебедев, А.В.Влахова, Р.Л.Боуш. Модель движения автомобиля как основа математического обеспечения тренажерного комплекса водителя.- Мехатроника, автоматизация, управление. 2007, 7, с. 31-36.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДИНАМИКУ МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА

Кубышкин Е.П., Злобина М.Ю. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)
kubysh@uniyar.ac.ru, garnim@mail.ru

Изучается механическая система, состоящая из твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня постоянного сечения и равномерно распределенной по длине массой. На другом конце стержня жестко закреплено второе твердое тело (груз). Центры масс O_1 и O_2 твердых тел расположены на касательных, проведенных к центральной оси стержня в точках заделки. Поместим в центр масс O_1 две системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_1X'Y'Z'$, расположив их таким образом, чтобы центральная ось стержня находилась в плоскостях $O_1X_1Y_1$ и $O_1X'Y'$. Оси O_1Z_1 и O_1Z' совпадают. Система $O_1X_1Y_1Z_1$ связана с инерциальным пространством, а система $O_1X'Y'Z'$ - с твердым телом. При этом ось O_1X' проходит вдоль касательной к оси стержня в точке заделки. Механическая система может совершать вращательные движения вокруг оси O_1Z_1, относительно которой приложен момент сил $M(t)$. Такая система служит механической моделью манипуляционного робота, переносящего груз, рука которого обладает упругими свойствами. Свяжем с твердым телом еще одну систему координат $OXYZ$, поместив ее начало в точку заделки стержня и направив оси параллельно осям системы $O_1X'Y'Z'$. Положение механической системы можно охарактеризовать углом поворота $\Theta(t)$ между осями O_1X_1 и O_1X' и величиной $y(x,t)$ поперечной деформации стержня в точке x и момент времени t. В рамках линейной теории тонких прямолинейных стержней получены нелинейные динамические уравнения рассматриваемой механической системы и решены следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящий механическую систему из начального состояния в конечное в заданный момент времени T и минимизирующий функционал $\Phi(M) = \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}$. В частности с полным гашением колебаний стержня.

Задача 2. (Задача быстродействия) Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M) \leq L < \infty$, переводящий механическую систему из начального состояния в конечное за минимальное время.

МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ОБЪЁМА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РОСТА ПУЗЫРЬКОВОГО РОЯ В ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Кузьма А. В. (Киев, НТУУ"КПИ")
alexkuz@voliacable.com

Явления роста газовых скоплений в жидкости при вибрации были обнаружены в связи с развитием реактивной техники [1]. В дальнейшем колебания больших скоплений (подушек) исследовались на основании модели цилиндрических газовых объёмов, выявлены уровни динамического равновесия [2,3]. Эти исследования, совместно с большим количеством работ по малому пузырьку [4], посвещены предельным соотношениям размера скопления и диаметра сосуда. В работе [5] рассмотрен случай соотношений порядка 0,1- 0,5, когда форма пузырькового роя близка к сферической. В докладе исследуется поведение газового включения вблизи роя,- сферического газового объема, колеблющегося в несжимаемой жидкости у положения динамического равновесия на оси цилиндрического сосуда. Потенциал скорости движения жидкости, построенный с учетом условий на стенке и свободной поверхности [4,5], дал возможность получить систему уравнений колебаний и исследовать их методами возмущения и осреднения. Проведено сравние зависимостей резонансных частот от глубины для обеих моделей, получины условия, при которых пузырьки движутся к пульсирующему объёму.

Литература

1. Bleich H.H. Effect of vibration on motion of small bubbles in liquid, Jet Propulsion.-1956.-26, 11.-P. 956-978.
2. Апштейн Э. З. , Григорян С. С. , Якимов Ю. Л. Об устойчивости роя пузырьков воздуха в колеблющейся жидкости. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.- 1969. - 3 .- С. 100-104.
3. Авдуевский В. С., Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е., Устенко И. Г. Движение газового включения в капиляре при воздействии вибрации. Изв. РАН. Механика жидкости и газа.-1998.- 3 - С. 85 - 92.
4. Кубенко В. Д., Кузьма В. М., Пучка Г. Н. Динамика сферических тел в жидкости при вибрации. - Киев: Наук. думка, 1989.- 156 с.
5. Kuzma A. V. Axisymmetrical oscillations of a cylindrical volume of an incompressible liquid with a gas bubble, Int. Appl. Mech.- 2000. - 36, 7. - Pp.65 - 71.

ВНУТРЕННИЕ РЕЗОНАНСЫ - ПРИЧИНА ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА

Куликов А.Н. (ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Колебания пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, в случае цилиндрического изгиба описываются следующей нелинейной краевой задачей [1]

$$\begin{aligned} &w_{tt} + gw_t + w_{xxxx} + cw_x + g_1(w_x)^2 + g_2(w_x)^3 = \\ &= [g_3 \int_0^1 w_x^2 dx + g_4 \int_0^1 w_x w_{xt} dx] w_{xx}, \ x \in [0,1], \end{aligned} \qquad (1)$$

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) приведено в перенормированном виде, $w(t,x)$ - прогиб пластинки, $g_1, g_2, g_3, g_4 > 0, g > 0$ - нормированный коэффициент демпфирования, а c - нормированная скорость потока газа.

При $c > c_* > 0$ нулевое решение задачи (1),(2) теряет устойчивость. При g, имеющем порядок 1 и $c = c_* + \varepsilon$ ($|\varepsilon| << 1$), изучить автоколебания позволяет теорема Андронова - Хопфа, распространенная на соответствующий класс нелинейных краевых задач [2].

Иные задачи возникают при малых g ($g = \mu g_0$, $0 < \mu << 1$). Пусть $L(c)v = v^{IV} + cv'$, $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$. Существуют такие $c = c_3, c = c_2, c = c_1$, где $c_3 < c_2 < c_1 < c_*$, что собственные значения оператора $L(c_3)$ находятся в резонансе 1:9 (точки спектра устойчивости - в резонансе 1:3), оператора $L(c_2) - 1 : 4(дляспектраустойчивости 1 : 2)$, наконец, у $L(c_1)$ - кратная пара чисто мнимых собственных значений.

Опираясь на теорию нормальных форм (см., например, [3]) можно показать, что при $c \approx c_j$ $(j = 1, 2, 3)$ в малой окрестности состояния равновесия существуют неустойчивые периодические решения. Поэтому при докритических скоростях возможно жесткое возбуждение колебаний пластинки.

Литература

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.

2. Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И. Об одной математической задачи теории упругой устойчивости,ПММ. 1978. Т.42. Вып. 3. С. 458 - 465.

3. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 432 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМ КЕЛЬВИНА-ЧЕТАЕВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОЛЕСНЫХ ЭКИПАЖЕЙ

Морозов В.М., Лебедев Д.А. (Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

moroz@imec.msu.ru

Математическими моделями движения разнообразных колесных экипажей служат неголономные механические системы с большим числом степеней свободы. Уравнения движения для этих моделей могут быть написаны, например, в форме уравнений Чаплыгина или Эйлера-Лагранжа. Эти системы обладают многообразием стационарных движений, при которых постоянны позиционные координаты и циклические скорости. Линеаризованную в окрестности стационарного движения систему можно представить в виде двух матричных уравнений, отвечающих позиционным и циклическим координатам:

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} + D_1\dot{x} + W_1x + Py = 0 \\ C^T\ddot{x} + B\dot{y} + D_2\dot{x} + W_2x = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $x\,(r \times 1)$ – вектор возмущений позиционных координат, $y\,(m \times 1)$ – вектор возмущений циклических скоростей, матрицы $A, B, C, \ldots$ – матрицы соответствующих размерностей. Размерность указанного многообразия равна числу циклических координат и ему соответствует такое же число линейных интегралов. Исключая из системы (1) возмущения циклических скоростей, получим одно матричное уравнение относительно возмущений позиционных координат:

$$W\ddot{x} + V\dot{x} + K\,x = 0 \quad (2)$$

Таким образом, задача об устойчивости стационарных движений неголономной механической системы приводится к исследованию устойчивости положения равновесия системы (2). Для исследования устойчивости системы (2) можно применить теоремы Кельвина – Четаева. Изложенные теоретические результаты применяются к двум достаточно сложным моделям одноколесных экипажей.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ ГФЕН 08-01-92209 и Программы "Университеты России".

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРОНТОВ ЗАСОРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Леонтьев Н.Е. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

leontiev_n@mail.ru

Рассматривается задача о течении малоконцентрированной суспензии в пористой среде с учетом осаждения взвешенных частиц на скелет. Изучение проводится в рамках феноменологической модели, состоящей из законов сохранения массы для несущей жидкости и взвешенных частиц, закона Дарси и кинетического уравнения, описывающего скорость отложения частиц [1]. В отличие от традиционно используемых упрощенных моделей рассматривается случай, когда на границе чистой и загрязненной зон происходит скачок пористости и концентрации примеси. Такая ситуация может встречаться, если размеры частиц в суспензии существенно различаются или задержка частиц на скелете происходит за счет одновременного действия различных физико-химических механизмов [2].

Строится аналитическое решение задачи о движении фронта засорения в первоначально незагрязненном образце для произвольного вида зависимости скорости оседания от концентрации примеси в суспензии. Учет конечности скачка пористости приводит к тому, что скорость разрыва уменьшается с течением времени. Этим рассматриваемая модель отличается от моделей, приближенно учитывающих изменение пористости, для которых скорость фронта постоянна [3]. Указывается способ нахождения определяющих параметров модели по результатам лабораторных экспериментов на линейных образцах пористой среды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00026, 08-01-00401) и гранта Президента РФ (проект НШ-610.2008.1).

Литература

1. Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P. Flow of suspensions through porous media. Application to deep filtration, Ind. and Eng. Chem., 1970, V. 62, № 5, p. 8–35.

2. Леонтьев Н.Е. О структуре фронта пористости при движении суспензии в пористой среде, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, 2006, № 5, с. 73–76.

3. Altoé J.E., Bedrikovetsky P., Siqueira A.G. et al. Role of dispersion in injectivity impairment: mathematical and laboratory study, SPE 90083 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, USA, 26–29 September 2004.

О РАЗВИТИИ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Маркин А.А., Глаголев В.В. (Тульский государственный университет)
markin@tsu.tula.ru

Предлагается подход к решению задач механики разрушения, в котором выделяется характерный масштаб длины. Данный параметр определяет неделимый элементарный объем, имеющий тот же самый химический состав, что и рассматриваемый макрообъект. Распределение напряженно-деформированного состояния (НДС) в пределах каждого элементарного объема полагается однородным. Описание деформации твердого тела в данном случае можно представить как взаимодействие соответствующих элементарных объемов, его образующих. При выполнении определенного критерия (деформационного или энергетического) элементарный объем считается разрушенным. Однако в силу малости введенного характерного размера по отношению к реальным телам данное описание приводит к существенным вычислительным трудностям. Поэтому в ряде случаев, когда направление разрушения известно наперед, предлагается дискретно представлять область предполагаемого разрушения, а взаимодействие с оставшейся частью тела описывать в рамках гипотезы сплошности. Особенно эффективным данный дискретно-континуальный подход может оказаться в случае линейно упругой среды, когда известны соответствующие фундаментальные решения.

Для случая плоского деформирования рассматривается задача о расклинивании упругой плоскости, ослабленной физическим разрезом. Продолжение физического разреза формирует слой взаимодействия, который может перейти в стадию разрушения. Получена система граничных интегральных уравнений, описывающая момент образования новых материальных поверхностей. При этом учитываются как напряжения действующие в направлении отрыва, так и вдоль слоя. Отметим, что нагрузка на полуплоскости со стороны слоя взаимодействия при значении коэффициента Пуассона ν, равном нулю, эквивалентна действию хрупких связей Л.Прандтля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-96402).

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С УПРАВЛЕНИЕМ В ТОЧКЕ ПОДВЕСА

Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. (Институт механики МГУ имени М.В.Ломоносова), Aoustin Y. (Institut de Recherche en Communications et Cybernetique de Nantes France)
martynenko@imec.msu.ru, formal@imec.msu.ru, Yannick.Aoustin@irccyn.ec-nantes.fr

Рассматриваются колебания тяжелого двухзвенного маятника в вертикальной плоскости, описываемые системой нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К первому звену маятника в точке подвеса прикладывается управляющий момент, в межзвенном шарнире какие-либо моменты отсутствуют. Управляющий момент ограничен по абсолютной величине. В отсутствие управления верхнее положение равновесия маятника, в котором оба звена перевернуты, является неустойчивым.

В виде обратной связи построено управление, которое переводит маятник из нижнего устойчивого положения равновесия в верхнее неустойчивое. Структура предложенного закона управления меняется в зависимости от положения системы в фазовом пространстве. Когда маятник находится в некоторой окрестности нижнего устойчивого положения равновесия, управление обеспечивает рост энергии системы. Вне указанной окрестности управление стремится "выпрямить"двойной маятник (сделать его подобным однозвенному). На последнем этапе процесса управления, когда маятник оказывается в области притяжения верхнего положения равновесия, обеспечиваемой управлением, система переключается на локальный закон стабилизации. Этот локальный закон построен так, чтобы реализовать максимально возможную область притяжения [1].

Построенное управление обеспечивает не только локальную, но и глобальную устойчивость двойного перевернутого маятника.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-92167-НЦНИ-а, 09-01-00593-а).

Литература

1. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.

НЕОБЫЧНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ЭФФЕКТЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ШАРОВОЙ МОЛНИИ

Маслов А.К. (ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова)
AlexM63@mail.ru

При движении шаровой молнии (ШМ) могут наблюдаться необычные звуковые эффекты. Некоторые наблюдатели констатировали, что слышали необычные звуки перед появлением ШМ. Частота звуков в различных наблюдениях изменялась от рокота до писка. Это явление до сих пор не получило однозначного толкования. С другой стороны, аналогичное явление наблюдается в электродинамике моря: при нелинейном взаимодействии гидроаккустической и электромагнитной волны в проводящей среде (в данном случае - морской воде) могут генерироваться новые звуковые гармоники [1].

На примере простой математической модели показано, что аккустические волны при движении ШМ могут быть результатом трехволнового процесса [2], представляющего собой нелинейное взаимодействие дипольной волны, генерирумой ШМ и собственных колебаний ионизированного воздуха. Источником ионизации могут быть грозовые процессы или интенсивная дегазация недр при сейсмической активности. Отметим, что в этих условиях обычно и наблюдается ШМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-08-00712).

Литература

1. Семкин С.В., Смагин В.П., Савченко В.Н. Генерация звуковых волн при нелинейном взаимодействии гидроаккустического и электромагнитного полей в морской среде, Известия Российской академии наук. Сер. Физика атмосферы и океана. - 2008. - Т. 44,№ 2. - С. 266-270.
2. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1988. - 304 с.

МНОГОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Морозов В.М., Каленова В.И., Соболевский П.М. (Москва, Институт механики МГУ)
moroz@imec.msu.ru

Многие динамические объекты в окрестности программных движений моделируются системами линейных нестационарных матричных дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения такого типа возникают при решении задач из различных областей механики и техники (динамика космического полета, гироскопических и электромеханических систем), экономики, экологии и т.д. При исследовании устойчивости таких систем применяются два способа, основанных на использовании прямого метода Ляпунова. В одном случае функция Ляпунова строится непосредственно для исходной системы; в другом - в коэффициентах системы выделяется постоянная часть, соответствующая стационарная система предполагается асимптотически устойчивой, а функция Ляпунова строится на основании этой стационарной системы. Для исследования устойчивости таких систем определенного класса применен подход, основанный на декомпозиции коэффициентов исходной системы на две нестационарные части. При этом для одной из них соответствующая система интегрируется в замкнутой форме, а коэффициенты другой - малы.

Рассмотрен ряд задач механики, моделями которых служат системы указанного типа: задача о колебаниях опоры гибкого вала, задача о гироскопической следящей системе, классическая задача об устойчивости гирогоризонткомпаса.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ ГФЕН 08-01-92209 и Программы "Университеты России".

ПРЕДВЕСТНИКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ КАК ЛОКАЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ СОЛНЕЧНО-ЗЕМНЫХ СВЯЗЕЙ

Дода Л.Н., Степанов И.В., Натяганов В.Л. (Научный центр оперативного мониторинга Земли, Механико-математический факультет МГУ)
l.doda@mail.ru; tenzor@bks-mgu.ru

В Научном центре оперативного мониторинга Земли (НЦ ОМЗ) Роскосмоса разработана эмпирическая схема краткосрочного прогноза землетрясений (ЗТ), которая одновременно отвечает на главную триаду вопросов (Когда? Где? Какой силы?) и для ЗТ с магнитудой $M \geq 6,5$ дает 80% реализации прогноза с ошибками ± 2 суток по дате, $\pm 3^o$ по месту и $\pm 0,3$ по магнитуде. Краткое изложение сути этой эффективной схемы опубликовано в [1] и более подробно представлено на сайте НЦ ОМЗ (http://www.ntsomz.ru). На сайте регулярно размещаются новые прогнозы ЗТ на основе наблюдения и анализа целого комплекса предвестников ЗТ различной природы в литосфере, атмосфере и ионосфере.

В качестве теоретического обоснования отдельных блоков этой эмпирической схемы НЦ ОМЗ и некоторых граней многодисциплинароной проблемы прогноза ЗТ разработаны модели:

- электротеплового пробоя литосферы (как триггера ЗТ) на микро-, мезо- и макроуровне;
- механизмов образования облачных сейсмоиндикаторов над литосферными разломами и световых предвестников ЗТ;
- электромагнитной накачки земных недр магнитными бурями, спровоцированными солнечными вспышками.

Если кратко и образно сформулировать суть развиваемого авторами подхода к прогнозу ЗТ, то ключ к решению этой важной проблемы скорее подвешен к Солнцу, а не зарыт в земных недрах. Близкую точку зрения ранее высказывали Л.А. Чижевский в нашей стране и Б.Гутенберг-патриарх европейской сейсмологии еще в 30-е годы прошлого века. Однако сегодня большинство специалистов считает это почти ересью, но другие схемы прогноза пока не работают!

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-08-00712)

Литература

1. Дода Л.Н. Геосейсмическое эхо солнечных бурь или землетрясения рождаются на Солнце, Новости космонавтики, 2003, т.13, 6

МОДЕЛИ САМОСОГЛАСУЮЩЕЙСЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ МИГРАЦИИ ЧАСТИЦ В НЬЮТОНОВСКИХ СРЕДАХ.

Невский Ю.А. (г. Москва, НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова)
nevskii_u@mail.ru

Предложена новая модель процесса гравитационной конвекции, учитывающая нестационарные и наследственные силы в межфазном обмене импульсом и описывающая процесс гравитационной конвекции в дисперсных средах с инерционными включениями (суспензиях, аэрозолях, запыленных газах, пузырьковых жидкостях). Предложенная замкнутая двухскоростная модель позволяет проводить количественные расчеты процесса гравитационной конвекции в дисперсных системах без привлечения эмпирической информации и предлагает параметры подобия, управляющие процессом разделения фаз.

Для гравитационной конвекции двухфазной смеси в стационарном случае при условиях, что частицы малоинерционные, а течение несущей фазы инерционное (оценка инерционности течения проводится по числу Рейнольдса), найден первый интеграл уравнения суммарного баланса импульса частиц и несущей фазы. Получены критерии существования первого интеграла для двумерного и трехмерного случаев. Для заданного поля концентрации дисперсной примеси найдено достаточное условие существования решения в рамках найденного первого интеграла.

Для случая малоинерционных частиц в малоинерционной жидкости численно исследован процесс осаждения частиц с обратным влиянием на несущую фазу. На примере задачи гравитационной конвекции суспензии в наклонном сосуде исследован механизм уменьшения времени осаждения частиц с наклоном сосуда. Произведено сравнение численного и физического экспериментов и получено их качественное совпадение. Показано, что процесс осаждения зависит от одного определяющего параметра.

Исследована зависимость времени, необходимого для осаждения частиц от угла наклона сосуда. Численно реализован эффект Бойко (Boycott) и найден диапазон углов наклона, при которых процесс осаждения происходит максимально быстро ($15^o - 40^o$). Показано, что наклон сосуда может ускорить процесс осаждения более чем в полтора раза.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (N 08-01-00195).

МЕТОД САГИТТАРНОЙ ФУНКЦИИ В МЕХАНИКЕ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. (ИПМех РАН)
topol555@gmail.com

Разработан качественно новый метод нахождения собственных частот и форм колебаний неоднородных стержней. Метод может быть использован также для решения несамосопряженных краевых задач для уравнений четвертого порядка. В качестве примеров даны решения задачи Кирхгофа о колебаниях стержня конического сечения, дано полное исследование о поперечных колебаниях вращающегося стержня. Введенная сагиттарная функция позволяет сформулировать и доказать теоремы, аналогичные теоремам Штурма для уравнений второго порядка.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЗАИМНО-ГРАВИТИРУЮЩИХ МАССИВНОЙ ТОЧКИ И КРЕСТООБРАЗНОГО ТЕЛА

Никитина М.В. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
nikitinamb@gmail.com

В точной постановке, опирающейся на точные выражения для ньютоновского потенциала, рассмотрена плоская задача о движении крестообразного тела и массивной точки под действием сил взаимного притяжения. Найдены условия существования "прямых" и "косых" стационарных конфигураций, выписаны достаточные условия их устойчивости. Изучено ветвление решений, сопровождающее изменение их степени неустойчивости. Наличие "косых" стационарных конфигураций, на которых, в отличие от "прямых", точка не располагается на одной из главных центральных осей инерции креста, удаётся выявить лишь благодаря рассмотрению точных выражений для потенциала.

Примененный в работе подход не опирается на дополнительные предположения о соотношении между массами тел. Показано, что во вращающихся осях кривые, на которых может располагаться массивная точка, не зависят от величины её массы, т.е. полученные результаты справедливы и в предельных случаях - как в задаче о движении крестообразного спутника и массивной планеты, так и в задаче о движении "космонавта" около массивной крестообразной космической станции, обобщающей классическую задачу о точках либрации равномерно вращающихся тел. Отметим, что изучение задач динамики гравитирующих тел в точной постановке восходит к работе [1]. Существование и устойчивость установившихся движений исследовалась в [2] для гантелеобразного тела. Установившиеся движения крестообразных тел изучались, например, в [3].

Литература

1. Дубошин Г. Н. Об устойчивости регулярных движений искусственных небесных тел, Астрономический журнал. 1959. Т.36. N.4. С.723-733.
2. Окунев Ю.М. О некоторых свойствах поступательно-вращательных движений длинной гантели в центральном силовом поле, Научные Труды Института Механики МГУ. 1971. N.10. С. 87-121.
3. Burov A.A. The motion of cross-shaped bodies around a fixed point in a central Newtonian force field, J. Appl. Maths Mechs. 1996. Vol.60. N.1. pp.25-30.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНУСООБРАЗОВАНИЯ

Никольская Т.А. (Орловский государственный технический университет)
NikolskyaTA@mail.ru

Задача конусообразования одна из сложнейших задач в теории фильтрации. Сложность ее заключается в том, что необходимо найти критический дебит (дебит, при котором время эксплуатации месторождения будет достаточно долгим) и форму водонефтяного контакта в состоянии равновесия.

Задача решается численно в рамках модели Лейбензона - Маскета ("поршневое"вытеснение) методом дискретных особенностей, путем продвижения границы раздела жидкостей из начального в устойчивое положение.

В работе [1] исследована задача конусообразования для случая вертикальной скважины, в работах [2,3] решена задача для случая горизонтальной скважины. Исследовано влияние параметров фильтрующихся жидкостей (плотность и вязкость), параметров грунта (коэффициент проницаемости, пористость) и границ области фильтрации на критический дебит скважины и процесс конусообразования.

Литература

1. Никольский Д. Н., Никольская Т. А. Исследование осесимметричной задачи о работе несовершенной скважины в однородном грунте с подвижным контуром нефтеносности, В сб.: Труды международных школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Орел: Изд-во ОГУ, 2005.- С. 89-93.

2. Никольская Т.А. Математическое моделирование "конусообразования"в кусочно-неоднородном грунте, В сб.: Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ, 2008.-С. 183-189.

3. Никольский Д. Н., Никольская Т. А. Математическое моделирование плоской задачи о конусообразовании методом дискретных вихревых пар, Известия ОрелГТУ. № 2/272 (550). 2008. С.17-22

О СОПУТСТВУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Никольский М.С. (Москва, Математический институт РАН)
mni@mi.ras.ru

На фиксированном отрезке времени $[0, T]$ ($0 < T$) рассматривается стандартная задача оптимального управления при стандартных ограничениях на динамику управляемого объекта. В ней движение фазового вектора $x(t)$ происходит в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, на измеримые управления $u(t)$, $t \in [0, T]$ наложено ограничение : $u(t) \in U$ - непустому компакту из $\mathbb{R}^r$.

Начальное состояние управляемого фазового вектора фиксировано, т.е. $x(0) = x_0$, а на конечное состояние фазового вектора $x(T)$ накладываются ограничения типа неравенства и типа равенства в конечном числе .

В качестве минимизируемого функционала фиксируется некоторый интегральный функционал со стандартными требованиями на подинтегральную функцию.

Пусть допустимая пара $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$ является оптимальной. Тогда для нее справедлив принцип максимума Понтрягина в форме Теоремы 1 , с. 389 из монографии Ф.П.Васильева "Методы оптимизации"(М.,2002г.). Важную роль в этой теореме играет ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^{s+1}$ с компонентами a_i, $i = 0, ..., s$, где целое число $s \geq 0$ и оно определяет общее число ограничений типа неравенства и типа равенства на правом конце траектории в постановке оптимизационной задачи. Вектор a входит в определение функции Гамильтона-Понтрягина и малого лагранжиана . Отметим, что вектор a определен неоднозначно. Это обстоятельство делает интересным вопрос об описании множества всех таких векторов . Оказывается, интересующие нас ненулевые векторы a образуют в $\mathbb{R}^{s+1}$ множество A, которое получается из некоторого выпуклого замкнутого конуса B с вершиной в 0 отбрасыванием 0. Мы называем это множество A сопутствующим множеством для оптимальной пары $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$. Настоящая работа посвящена построению эффективного описания множества A.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРИЕНТАЦИИ ОСИ ТЕЛА, ТОРМОЗЯЩЕГОСЯ СРЕДОЙ

Садовничий В.А., Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
samson@imec.msu.ru

Обсуждается задача об устойчивости винтового торможения оперенного тела в сопротивляющейся среде. Оперение тела состоит из четырех одинаковых лопастей симметрично расположенных на теле. Считается (аналогично [1]), что аэродинамическое воздействие сосредоточено на этих лопастях и обеспечивает авторотацию вокруг оси динамической симметрии тела с угловой скоростью Ω, когда тело движется вдоль нее с некоторой скоростью V.

Рассматривается устойчивость прямолинейного движения вдоль оси динамической симметрии, а также устойчивость по отношению к отклонениям самой оси симметрии. Приводятся необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости рассматриваемого установившегося торможения. Анализируются изменения областей устойчивости в зависимости от параметров тела и его аэродинамических характеристик.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №06-01-00079).

Литература

1. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело, Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 73-78.

ЗАДАЧА КОРРЕКЦИИ БЕСКАРДАННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ РАЗНОРОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ПОСТОБРАБОТКЕ

Вавилова Н.Б., Панев А.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
nb-vavilova@yandex.ru

Рассматриваются методы построения алгоритмов коррекции бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) [1,2] в задачах, решаемых в постобработке. К таким задачам относятся, например, задача топопривязки, задача навигации внутритрубных инспекционных снарядов (ВИС) и др.

В последнее время стала возможной регистрация больших объемов первичной инерциальной информации БИНС (данные датчиков угловой скорости и акселерометров) с высокой частотой. В связи с этим возникают перспективы решать задачу коррекции БИНС в постобработке не только в варианте оценивания, но и в варианте введения обратных связей в навигационный алгоритм БИНС [3]. В качестве сторонней информации может привлекаться позиционная и скоростная информация GPS/ ГЛОНАСС, координаты реперных точек, неявная информация на остановках, данные о пройденном расстоянии, и др. Для оценивания используется алгоритм оптимального сглаживания в двух вариантах - варианте оценки и варианте введения обратных связей в модельные уравнения БИНС.

В качестве приложения рассматривается задача навигации ВИС, актуальная при исследованиях трубопроводов с помощью дефектоскопа, где в качестве внешней информации используются координаты реперных точек, а также счетчик пройденного расстояния - одометр.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00430-а.

Литература

1. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982.

2. Голован А.А.,Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации М.: Изд-во МГУ, 2007.

3. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. К вопросу об информационно эквивалентных функциональных схемах в корректируемых инерциальных навигационных системах. М.:МТТ 2008, N 3.

КАЛИБРОВКА БЕСКАРДАННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ГРУБЫХ СТЕНДОВ

Парусников Н.А., Вавилова Н.Б., Сазонов И.Ю. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

nb-vavilova@yandex.ru

Решается задача определения параметров, входящих в математическую модель инструментальных погрешностей для бескарданных инерциальных навигационных систем. При этом предполагается использование грубых одностепенных стендов в различных вариантах. Особенность алгоритмов, используемых для этой цели, состоит в том, что в них непосредственно не участвуют характеристики датчиков, определяющих работу стенда. Исследуется зависимость точности калибровки от программных вращений, осуществляемых посредством управления платформой стенда.

Бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС) включает в себя три однокомпонентных ньютонометра, три датчика угловой скорости (ДУС) и бортовой вычислитель. Задача калибровки БИНС включает в себя два этапа. Первый этап - вводится априорная математическая параметризованная модель, которой подчиняется поведение инструментальных погрешностей ДУС-ов и ньютонометров. Второй этап состоит в проведении специальных испытаний, в результате которых определяются параметры принятой модели. Обычно для проведения таких испытаний используются высокоточные стенды, позволяющие ориентировать БИНС в различных положениях относительно некоторого координатного трехгранника, жестко связанного с Землей. Кроме того, калибровка чаще всего проводится либо отдельно для каждого из типов датчиков (ДУС-ов и ньютонометров), либо последовательно [2]. В статье описывается метод, позволяющий проводить калибровку на грубых стендах одновременно для обоих блоков чувствительных элементов, т.е. осуществлять калибровку БИНС в сборе.

Литература

1.Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А. Определение инструментальных погрешностей инерциальной навигационной системы на неподвижном основании. Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, N 7.

2.Syed Z.F., Aggarwal P., Goodall C., Niu X. and El-Sheimy N. A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems. Meas. Sci. Technol., vol.18 (2007).

КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУПП ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Петров Н.Н. (Ижевск, Удмуртский госуниверситет)

npetrov@udmnet.ru

Рассматриваются различные задачи конфликтного взаимодействия групп инерционных объектов при одинаковых возможностях всех участниках.

1. Постановка задачи. В пространстве R^k $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n,m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\dots,P_n$ и m убегающих $E_1,\dots,E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t=0$)

$$x_i^{(l)} = u_i, \ \ y_j^{(l)} = v_j, \ u_i, \ v \in V, \ \ x_i^{(s)}(0) = x_{is}^0, \ y_j^{(s)}(0) = y_{js}^0,$$

где $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, $s = 0,\dots,l-1$, V — выпуклый компакт.

2. Поимка одного убегающего. Будем говорить, что в игре $\Gamma(n,1)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $U_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей P_i такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V, t \in [0,T]$ существуют момент времени $\tau \in [0,T]$ и номер q, такие, что $x_q^{(s)}(\tau) = y^{(s)}(\tau)$ для всех s. Обозначим $\lambda_i(z_i, v) = \sup\{\lambda \geq 0 | -\lambda z_i \in V - v\}, z_{is}^0 = x_{is}^0 - y_s^0$.

Теорема 1. *Пусть функции $\lambda_i(z_i,v)$ непрерывны во всех точках (z_{il-1}^0, v) для которых $\lambda_i(z_{il-1}^0, v) > 0$ и $\inf\limits_v \max\limits_i \lambda_i(z_{il-1}^0, v) > 0$. Тогда в игре $\Gamma(n,1)$ происходит поимка.*

3. Поимка группы убегающих. Определим функцию $f : N \to N$ вида $f(n) = \min\{m :$ в игре $\Gamma(n,m)$ происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций$\}$.

Теорема 2. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда существуют $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для всех $n \neq 1$ справедливо неравенство $c_1 n \ln n \leq f(n) \leq c_2 n \ln n$.*

4. Поимка жестко скоординированных убегающих.

Теорема 3. *Пусть $n \geq k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, убегающие используют одно и тоже управление и $0 \in \mathrm{Intco}\{x_{il-1}^0 - y_{jl-1}^0\}$. Тогда в игре $\Gamma(n,m)$ происходит поимка по крайней мере одного убегающего.*

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 09-01-00403).

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ И НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Пивень В.Ф. (Орловский государственный университет)
oryol@au.ru

Ставятся двумерные граничные задачи стационарной и нестационарной фильтрации в анизотропном неоднородном слое пористой среды, которые обобщают известные постановки задач [1]. Проницаемость среды, характеризуемая тензором второго ранга, может терпеть разрыв на некоторых гладких кривых. Исследуется единственность решения этих задач. Найдены решения задач в конечном виде в случае канонических границ (прямая, эллипс). В случае произвольных гладких границ исследование задач сведено к решению граничных интегральных (сингулярных и гиперсингулярных), а так же дифференциальных (для задачи эволюции) уравнений. Эти уравнения решались численно на основе методов дискретных особенностей и разностных методов.

Исследованы конкретные задачи практики разработки водоносных (нефтяных) пластов грунта сложной геологической структуры и мониторинга распространения загрязнения к водозабору в таких пластах.

Литература

1. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости, Орел. Издательство ГОУ ВПО "Орловский госуниверситет". Полиграфическая фирма "Картуш". 2006.– 508 с.

ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОЙ СТРУИ

Полянских С.В. (г.Краснодар, Кубанский государственный университет)
mathf@rambler.ru

Рассматривается задача об устойчивости струи жидкости–электролита, находящейся под действием внешнего сильно осциллирующего тангенциального электрического поля. Задача описывается двумя уравнеими переноса положительных и отрицательных ионов, уравнением Пуассона для электрического поля внутри струи и Лапласа вне, а также гидродинамическими уравнениями Эйлера и неразрывности. Свободная поверхность жидкости предполагается непроницаемой для ионов обоих типов, компоненты скорости связаны кинематическим условием. Вдали от поверхности раздела поле предполагается однородным, колебания – простыми гармоническими.

Исследуется задача линейной устойчивости тривиального решения. С помощью дисперсионного соотношения показано, что увеличение амплитуды колебаний поля влечет за собой стабилизацию струи, тогда как увеличение частоты несколько дестабилизирует струю.

Кроме того, было выведено универсальное нелинейное условие для потенциала электрического поля в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sqrt{2}\,\frac{\delta}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{sh}\Phi = 0,$$

позволяющее рассматривать пограничный слой вблизи свободной границы жидкости как нелинейный конденсатор.

Работа финансировалась грантом РФФИ, проект 08-01-00005-а.

Литература

1. Demekhin E. A., Shapar E. M., Lapchenko V. V. On the existing of Taylor cones in high frequency alternating electic fields, Doklady Physics. 2006. V. 51. 2. P. 64-66.
2. Gonzales A., Ramos A., Green N. G., Castellanos A., Mogran H. Fluid flow induced by nonuniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes. II. A linear double-layer analisys, The Phys. Rev. E. 2003. V. 61. 4. P. 4019.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАЛЫХ МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ БОЛИДНЫХ СЕТЕЙ

Попеленская Н.В. (НИИ механики МГУ)
aero.natap@mail.ru

Проблема метеорной опасности остается актуальной. Существует много вопросов, на которые ученые не могут дать однозначный ответ. Таким вопросом, в частности, является плотность, и, соответственно, масса малых метеорных тел. В работе приводятся два различных метода определения массы малых метеорных тел. Впервые получены оценки для параметров малых метеорных тел с незначительным торможением. Полученные результаты сравниваются с существующими фотометрическими оценками масс. Показано, что фотометрический и динамический подходы дают близкие оценки для малых метеорных тел. На основе сравнения делаются выводы о возможной плотности малых метеорных тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00009-а и 07-08-00247-а).

Литература

1. В.П. Стулов, В.Н. Мирский, А.И. Вислый "Аэродинамика болидов", М.: Наука, 1995. 236с.
2. Halliday I., Griffin A.A., Blackwell A.T. "Detailed data for 259 fireballs from the Canada camera network and inferences concerning the influx of large meteoroids"Meteoritics and Planetary Science. 1996. V. 31. P. 185-217.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЗАДАЧЕ РАСТЯЖЕНИЯ С КРУЧЕНИЕМ

Просвиряков Е.Ю. (Уральский государственный университет),
Стружанов В.В. (Институт машиноведения УрО РАН)
evgen_pros@mail.ru, stru@imach.uran.ru

Рассмотрена задача о растяжении с кручением образца в виде полого цилиндра специальных размеров в механической системе. Определяющие соотношения для материала образца представлены отображениями из пространства деформаций в пространство напряжений, которое обладает особенностями, где вырождается матрица Якоби данного отображения. Эти особенности связаны с переходом материала со стадии упрочнения к разупрочнению, когда при росте деформаций наблюдается падение напряжений. При наличии потенцала напряжений связь между напряжениями и деформациями наглядно представляется двумерными поверхностями с «падающими» участками. В этом случае в пространстве деформаций найдена линия особых точек, разделяющая области упрочнения и разупрочнения. Показано, что после пересечения путем деформирования линии особых точек соответствующий путь в пространстве напряжений разворачивается и стремится к началу координат. Установлено также, что при изломе пути деформирования наблюдаются эффекты, присущие теории малых упругопластических деформаций.

Так как определяющие соотношения имеют особенности, то уравнения равновесия системы могут иметь неединственное и неустойчивое решения, т.е. нарушаютс условия корректности по Адамару. Для исследования устойчивости положений равновесия были использованы методы теории катастроф и теории особенности дифференцируемых отображений. В пространстве управлений при жестком нагружении определены области неединственности решения и бифуркационные кривые, в которых происходит скачкообразный переход в новое положение равновесия. В пространстве, параметризованном компонентами матрицы Гессе потенциальной функции системы, построен дискриминантный конус, разделяющий области устойчивости и неустойчивости. Показано, что потеря устойчивости (катастрофа) происходит тогда,когда изображающая процесс точка пересекат дискриминантный конус при движении из его глубины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07–08–00125)

ОБ УЧЕТЕ ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ О ЗАТУХАНИИ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Пыркова О.А. (МФТИ)
omukha@mail.ru

В работе сделана попытка учесть явление перемежаемости (поочередной смены турбулентного и вязкого режимов) для задачи затухания слабой турбулентности в однородном изотропном потоке несжимаемой жидкости, возникающей при малых значениях числа Рейнольдса. Получено, что зависимость для дисперсии $< u^2 >$ близка к $1/t^2$ [2] при малых значениях времени. Функция для продольного коэффициента корреляции $f = \frac{1}{1+r_*^2/10}$ автомодельна по переменной $r_* = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$; отлична от гауссовской зависимости. Таким образом, учет явления перемежаемости позволяет получить вполне приемлемое описание закономерностей [1] для затухания слабой турбулентности.

Автор благодарит Онуфриева А.Т. за неоценимую помощь в работе.

Работа поддержана АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/500.

Литература

1. Коробицина К.Л., Черных Г.Г. О численном моделировании заключительного периода вырождения однородной изотропной турбулентности, Моделирование в механике, СОАН. – Новосибирск, 1992. – Т. 6 (23). – N 3. – С. 77-86.

2. Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Задача о затухании слабой турбулентности в однородном изотропном потоке: Препринт, МФТИ. - М., 2005. N 1. - 12 с.

ОБ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ КАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ МОНОЛИТНОЙ ВОДЯНОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ГАЗОВОЙ СТРУЙ С НАТЕКАЮЩИМ ПОТОКОМ ВОДЫ

Карликов В.П., Розин А.В., Толоконников С.Л.
(МГУ им. М.В. Ломоносова)
karlikovvp@mail.ru

Представлены результаты выполненного в гидродинамической трубе экспериментального, а также численного анализа закономерностей автоколебательных режимов кавитационного взаимодействия осесимметричных монолитной водяной и соосной кольцевой газовой струи с натекающим встречным потоком воды. Установлены механизм возникновения и диапазоны существования регулярных автоколебаний, построены зависимости частоты автоколебаний от отношения скоростей соударяющихся потоков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00296, 08-01-00401) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-610.2008.1)

СПИРАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ТЕЙЛОРА И ТОЛЛМИНА КАК ОЧЕВИДНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЙ ЧАПЛЫГИНА

Рылов А.И. (Новосибирск, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН)
rylov@math.nsc.ru

Рассмотрим следующий аналог уравнений Чаплыгина

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \qquad U_\psi + V_\varphi = 0 \quad (1)$$

$$U = \frac{z_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2},\ V = \frac{\theta_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2},\ z = \int \frac{\rho dq}{q},\ k = \frac{1 - M^2}{\rho^2}$$

φ, ψ – потенциал и функция тока, ρ – плотность, q, θ – модуль и угол наклона вектора скорости, M – число Маха.

Система (1) была в свое время построена для изучения линий нулевых значений компонент вектора ускорения $U = 0$ и $V = 0$ (Рылов СибЖИМ-1998, 2003, ПММ-2006).

Система (1) обладает двумя очевидными решениями A и B:

$$A: \quad U = const,\ V = const. \qquad B: \quad U = \psi,\ V = -\varphi$$

Непосредственная проверка показывает, что решение A есть ни что иное, как известное спиральное течение Тейлора (Taylor-1930), которому на плоскости годографа отвечает суперпозиция течения от источника и потенциального вихря. Кстати, указанная суперпозиция была использована при построении системы (1).

Более неожиданным является то, что решению B отвечает другое и менее известное спиральное течение Толлмина (Tollmien-1937), в котором на физической плоскости изобары образуют логарифмические спирали. В дополнение к указанной работе Толлмина отметим, что на плоскости потенциала изобары образуют пучок прямых $\varphi/\psi = const$.

Заметная часть доклада посвящена обсуждению решения B системы (1) и отвечающего ему спирального течения Толлмина, в том числе и новых результатов. Данное обсуждение представляется весьма актуальным, так как за исключением, пожалуй, книги Осватича (Oswatitsch-1952) указанное спиральное течение в руководствах по газовой динамике либо совсем не обсуждается, либо о нем делаются неверные утверждения. Кроме того, в ряде работ оно "переоткрыто"другими авторами.

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ И ФРЕТТИНГ-ИЗНОСОМ

Салль Л. (МГТУ им. Н.Э. Баумана, Центральная школа Лиона и SNECMA group SAFRAN(Франция)), Гуськов, А.М. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Блан Л., Туверез Ф. (Центральная школа Лиона (Франция))
loic.salles@ec-lyon.fr

В системах с трением может возникать фреттинг-износ при динамических нагрузках. Нелинейные колебания таких систем сложно изучать, особенно с большими числами степеней свободы. Чтобы найти стационарное состояние систем (без износа), используются расположение переменных величин в ряды Фурье. С учетом износа используются метод многих масштабов [3].

Изменение износа накапливается постепенно, для этого вводится понятие «медленного» времени η. Такие методы позволяют решить возбужденные системы. Для решения автономные системы, нужно использовать понятие нелинейных нормальных мод (ННМ) [1,2]. В этой работе мы предлагаем разложить ННМ в ряды Фурье

$$x = Q^0 + \sum_{n=1}^{N_h} e^{-\beta_n t}(Q^{n,c}\cos(n\omega t) + Q^{n,s}\sin(n\omega t))$$

В связи с износом [2,3] коэффициент ряд Фурье и собственные значения λ зависят от η. После использования процедура Галеркина получаем систему $Z(\lambda(\eta))Q(\eta) + F(Q(\eta), \lambda(\eta)) = 0$. Данная амплитуда и фаза гармоники n одной степени свободы нормируют решения. Для решения такой системы используются метод Нютона-Рафсона и процедура в «частотной – временной области» для вычисления контактных сил. Этот метод позволяет найти изменения мод колебаний рабочего колеса, зависимых от износа.

Литература

1. Л.И. Маневич, Ю.В. Михлин, В.Н. Пилипчук. Метод нормальных колебаний в существенно нелинейных системах. Москва: Наука, 1989.

2. D. Laxalde, L. Salles Non-Linear Modal Analysis for Bladed Disks with Friction Contact Interfaces. ASME Turbo Expo, Berlin, 2008.

3. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A.M. Gouskov. Dynamic Analysis of Fretting-Wear in Friction Contact Interfaces // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, in press.

БИМОДАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.П. Сейранян, А.А. Майлыбаев (НИИ механики МГУ)
seyran@imec.msu.ru, mailybaev@imec.msu.ru

Излагается общая теория бимодальных бифуркаций в потенциальных системах с одной или двумя симметриями. Дается полная классификация бифуркаций и перестроек при изменении параметров системы. Все формулы записаны в явном виде в терминах производных функции потенциальной энергии системы с произвольным числом степеней свободы. В качестве механического примера исследуются потеря устойчивости и закритическое поведение упругого составного стержня, нагруженного продольной силой. Обнаружен эффект потери устойчивости симметричного составного стержня по асимметричной форме.

Bifurcations of equilibria at bimodal branching points in potential systems are investigated. General formulae describing postbuckling paths and conditions for their stability are derived in terms of the original potential energy. Formulae describing unfolding of bimodal branching points due to a change of system parameters are given. A full list of possible cases for postbuckling paths, their stability and unfolding depending on three system coefficients is presented. In order to calculate these coefficients one needs the derivatives of the potential energy and eigenvectors of the linearized problem taken at the bifurcation point. The presented theory is illustrated by a mechanical example on stability and postbuckling behavior of an articulated elastic column having four degrees of freedom and depending on three problem parameters (stiffness coefficients at the hinges). For some of the bimodal critical points numerical results are obtained illustrating influence of parameters on postbuckling paths, their stability and unfolding. A surprising phenomenon that a symmetric bimodal column loaded by an axial force can buckle with a stable asymmetric mode is recognized. An example with a constrained sum of the stiffnesses of the articulated column shows that the maximum critical load (optimal design) is attained at the bimodal point.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ ДЛЯ ИНТНГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Сергеев В.С. (Москва, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН)
vssergeev@yandex.ru

Исследование устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для интегродифференциального уравнения типа Вольтерра с голоморфной правой частью сводится к вычислению постоянной Ляпунова [1], когда коэффициенты разложения постоянны либо являются непрерывными функциями, экспоненциально стремящимися к постоянным,

В данном сообщении указываются достаточные условия неустойчивости в предположении, что коэффициенты разложения правой части представляют собой кусочно-непрерывные ограниченные функции времени.

Есди интегральные ядра имеют экспоненциально-полиномиальную структуру, то интегродифференциальное уравнение приводится к дифференциальному и задача устойчивости решается полностью [2]. Приводится пример исследования устойчивости для интегродифференциального уравнение в особенном случае, когда все постоянные Ляпунова равны нулю. Рассматривается задача о движении железнодорожной колесной пары на прямолинейном участке пути. В качестве модели контактного взаимодействия колеса с рельсом используется теория Картера, которая модифицируется введением интегрального оператора Вольтерра для учета вязкоупругих свойств материала тела Кельвина .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00600, 08-08-00553).

Литература

1. Сергеев В.С. Об устойчивости в критических случаях для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, Математический журнал. Алматы. 2003. Т.3. 3(9). С.91-105.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч. Т.2. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. - С. 7-263.

Осреднение тонкой пластины армированной периодическими семействами разъединенных жестких стержней

Слуцкий А.С. (Санкт-Петербург)
slutskij@gmail.com

Построена и обоснована двумерная модель "чистого" изгиба тонкой пластины (физическая и геометрическая симметрия относительно срединной плоскости), имеющую малую относительную безразмерную толщину h и армированную несколькими симметричными относительно срединной плоскости периодическими семействами близко расположенных, но разъединенных тонких стержней. Материал стержней предполагается значительно более жестким, чем материал пластины: упругие коэффициенты пластины по порядку предполагаются в h раз меньшими, чем упругие коэффициенты армирующих пластину стержней. Из-за того, что взаимодействие стержней осуществляется только через податливый материал матрицы, асимптотические процессы существенно отличаются от классических процедур в теории композитных пластин.

Осредненный дифференциальный оператор четвертого порядка получается суммированием неэллиптических операторов, порожденных каждым из семейств стержней. Этот оператор оказывается эллиптическим в том и только в том случае, если стержни из двух различных семейств не являются параллельными.

Получены явные формулы для эффективных модулей пластины, которые отличаются от случая арматуры, соединенной в цельную двоякопериодическую сеть. Например, если имеется две пары симметрично расположенных взаимно перпендикулярных систем стержней с одинаковыми свойствами то результирующее уравнение принимает вид

$$\frac{\pi}{4}\mu R^4 s_1^{-1} s_2^{-1}\left(\frac{7\lambda+10\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial y_1^2\partial y_2^2}+\frac{7\lambda+10\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial y_2^4}\right)=F$$

где w — прогиб пластины, (y_1, y_2) — декартова система координат в срединной плоскости пластины, λ, μ — коэффициенты Ламе материала тонких круглых стержней, имеющих радиус сечения hR, hs_i — "шаг" прямоугольной решетки в направлении оси y_i.

Работа выполнена при финансовой поддержке Нидерландской организацией по научным исследованиям (the Netherlands Organisation for Scientific Research, NWO) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), код совместного проекта 047. 017. 020, 05-01-89000-НВО_а.

РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Смирнов Н.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
wonrims@inbox.ru

При решении систем уравнений механики сплошной среды, описывающих эволюцию систем с распределенными внутренними источниками, достаточно часто возникают режимы с обострением, а именно, решения, характеризуемые резким возрастанием на определенном этапе значений функций и их градиентов. При этом характерное время эволюции решения в этих зонах на порядки сокращается.

Возникновение режимов с обострением рассмотрено для модели эволюции метастабильной сжимаемой газовой среды, в которой допускается протекание химических реакций с конечным энерговыделением. Показано, что возникновение таких решений отражает реальный хорошо известный в экспериментах факт смены режима распространения волны химических превращений . переход горения в детонацию. В метастабильных средах возможно распространение самоподдерживающихся волн, когда на поддержание волны расходуется энергия, выделение которой инициируется самой проходящей волной. Примерами таких волн могут служить волны горения в химически активных смесях, а также волны вскипания в перегретых жидкостях. Как правило, возможно существование двух принципиально различных режимов распространения: дозвукового и сверхзвукового, - что обусловлено различием механизмов активации среды. Наименее изучены до настоящего времени процессы перехода от одного режима распространения к другому.

Без сомнения, среди всех процессов, связанных с горением и взрывом, переход горения в детонацию (ПГД) . один из наиболее интересных. Изучение этого процесса относится к исследованиям в области взрывоопасности газов и паров. Знание механизмов управления возбуждением детонации весьма важно для выработки эффективных превентивных мер, а именно: мер по предотвращению ПГД в случае возгорания газовой смеси, а также методов по остановке детонационной волны в случае, когда она уже образовалась.

С другой стороны, преимущества детонационного сжигания топлива по сравнению с медленным горением при постоянном давлении в последнее время привлекают все больший интерес к пульсирующим детонационным камерам сгорания и их возможному применению для создания двигателей нового поколения. При этом ПГД может стать основой рабочего цикла в пульсирующем детонационном двигателе, так что знание механизмов этого процесса и способов управления им позволит существенно сократить предетонационное расстояние и оптимизировать конструкцию.

В работе содержится анализ последних результатов теоретических и экспериментальных исследований процессов перехода горения в детонацию в горючих газовых смесях и путей управления этими процессами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-03-00190.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБОБЩЕННОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Сокотущенко В.Н., Тарлаковский Д В. (Московский авиационный институт (государственный технический университет))
tdv902@mai.ru

Рассматривается распространение плоских нестационарных волн в однородном изотропном термоупругом полупространстве с учётом конечности скорости распространения тепла и связанности полей деформации и температуры. Предполагается, что на границе заданы распределенные по пространственным координатам температура и/или нормальное к границе полупространства перемещение, изменяющиеся во времени по закону дельта-функции Дирака. На бесконечности возмущения отсутствуют. Массовые силы отсутствуют. Начальные условия нулевые.

Для решения используются преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате. С учетом ограниченности потенциалов перемещений и температуры на бесконечности получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая далее сводится к одному уравнению четвёртого порядка относительно скалярного потенциала. Для несвязанной задачи уравнение относительно потенциала является однородным.

Далее используется метод малого параметра, за который принимается коэффициент связанности механического и температурного полей. В результате получена рекуррентная система уравнений относительно коэффициентов ряда по параметру для потенциала и найдено общее решение задачи в пространстве изображений.

Для построения решения в пространстве оригиналов проведены обратные преобразования решения задачи в пространстве изображений, и искомые функции представ-лены в виде свёрток по времени и пространственной координате. Представление оригиналов в явном виде для указанной упругой задачи затруднено.

Рассмотрен частный случай для акустической полуплоскости. Показано, что для такой среды даже с учётом волнового процесса распространения тепла удается получить точное решение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.
(Белорусский государственный университет траппорта)
edstar@mail.by, leoden@tut.by

Рассмотрены несимметричные по толщине поперечно нагруженные в температурном поле упругопластические трехслойные стержни и круговые пластины, скрепленные с упругим основанием Винклера.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Их материалы в процессе деформирования проявляют упругопластические свойства. Заполнитель - нелинейно упругий, его деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Деформации малые.

Физически нелинейные свойства материалов несущих слоев описываются соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Построены соответствующие функции пластичности для сплава Д16Т и функции физической нелинейности для фторопласта при изотермических и термосиловых нагружениях.

В начальный момент времени на рассматриваемые трехслойные элементы конструкций начинают действовать внешняя распределенная нагрузка и тепловой поток, направленные перпендикулярно внешнему несущему слою.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия получены вариационными методами. Постановки краевых задач проводились в перемещениях. Для их решения применялись методы последовательных приближений, основанные на методе упругих решений Ильюшина.

Получены аналитические решения задач теории упругости в конечном виде и итерационные рекуррентные решения для физически нелинейных трехслойных стержней и пластин. Численный параметрический анализ решений проводился для элементов конструкций, материалы слоев которых Д16Т-фторопласт-Д16Т.

Работа выполнена при финансовом содействии БРФФИ (проект Ф08Р-227).

СМЕШАННОЕ НАГРУЖЕНИЕ (ОТРЫВ И ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ) ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ В МАТЕРИАЛЕ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Степанова Л.В. (Самара, Самарский госуниверситет)
lst@ssu.samara.ru

Смешанное нагружение элементов конструкций с трещинами, находящихся под действием сложной системы нагрузок в условиях пластического деформирования, ползучести, циклической нагрузки, вызывает особый интерес [1,2]. В настоящем исследовании получено приближенное аналитическое решение задачи о трещине, находящейся под действием растяжения и поперечного сдвига, в материале с дробно-линейным законом ползучести в условиях плоской деформации. Найдены поля напряжений и скоростей деформаций ползучести у вершины трещины в образце, подвергнутому смешанному нагружению при различных значениях коэффициента смешанности нагружения, определяющего вид нагружения. Показано, что поле напряжений состоит из семи клинообразных областей, внутри которых компоненты тензора напряжений определяются различными функциональными зависимостями. Границы секторов находятся численно из решения системы трансцендентных уравнений. Приведено сравнение приближенного аналитического решения с численным решением задачи для материала, следующего степенному закону ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности материала неограниченно возрастает. Аналитическое и численное решения совпадают, что подтверждает достоверность результатов. Решение позволяет пролить свет на поле деформаций вблизи края трещины в идеально пластическом материале, поскольку условие предельного состояния для дробно-линейного закона аналогично условию пластичности Мизеса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №08-01-99023).

Литература

1. Rahman M., Hancock J.W. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress, Int. J. Solids Structures, 2006. – V. 43. – P. 3692 – 3704.
2. Pan J., Lin P.C. Analytical solutions for crack-tip sectors in perfectly plastic Mises materials under mixed in-plane and out-of-plane shear loading conditions, Engng. Fracture Mechanics, 2006. – V. 73. – P. 1797 – 1813.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ГАЗОВЫХ ГИДРАТОВ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ХОЛОДНОГО ГАЗА.

Столповский М.В.
(Стерлитамакская Государственная Педагогическая Академия)
s_ maxim.pmm@mail.ru

Рассмотрена математическая модель образования газовых гидратов в пористой среде, которая в начальный момент времени насыщена газом и водой, при нагнетании холодного газа. Математическая модель строится на основе уравнений сохранения массы газа и притока тепла без учета баротермического эффекта, закона Дарси и уравнения состояния идеального газа. Здесь закон сохранения энергии представляет собой задачу Стефана для распределения температуры. Численная реализация задачи связана с тем, что кроме нахождения полей давления и температуры, определению подлежит единственный фронт гидратообразования. В работе [1] исследования проводится в автомодельных координатах,что ограничивает параметры исследования, в данной работе используется метод ловли фронта в узел сетки [2]. Этот метод существенно расширяет круг поставленных задач. По результатам численных расчетов можно сделать вывод о том, что возможны два различных вида решения в зависимости от параметров нагнетаемого газа. Так, если значения давления закачиваемого газа не превышают определенного значения, то модель с фронтальной поверхностью образования гидрата является непротиворечивой и адекватно описывает процесс. При инжекции газа под высоким давлением фронтальная модель вступает в противоречие с физикой изучаемого процесса; поэтому необходимо строить модель с протяженной (объемной) областью образования гидрата.

Литература

1. В.Ш. Шагапов, Н.Г. Мусакаев, М.К. Хасанов. Нагнетание газа в пористый резервуар, насыщенный газом и водой // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, 4. С. 645-656.
2. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. Вычислительная теплопередача.М.:УРСС, 2005.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ КЭЛИ-КЛЕЙНА В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Стрелкова Н.А. (Пермский государственный университет)
Strelkova@psu.ru

В матричном виде, с использованием параметров Кэли-Клейна, исследуются кинематические уравнения сферического и винтового движений твердого тела.

Рассматривается задача о вращении осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием произвольного внешнего момента. С помощью параметров Кэли-Клейна выводится матричное уравнение движения твердого тела и для некоторых частных случаев осуществляется точное интегрирование данного уравнения.

Дается новый способ вывода классического уравнения Дарбу-Риккати. Представлены различные формы записи решения кинематических уравнений движения твердого тела в параметрах Кэли-Клейна через частное решение уравнения Дарбу-Риккати.

Исследуется задача оптимального по быстродействию управления сближением двух твердых тел, когда в конечный момент времени происходит совпадение систем координат, неизменно связанных с телами. При помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина найдено время винтового перемещения, получены траектории оптимального движения и управления в виде функций, зависящих от дуальных матриц Кэли-Клейна.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-01-97611).

ЭЛЕКТРОФОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ШАРОВЫХ МОЛНИЙ

Суворов А.А. (Механико-математический факультет МГУ)
suvorov.aleksandr@gmail.com

Термином электрофонный болид (ЭФБ) сначала называли редко наблюдаемое явление - аномальные звуки, сопровождающие полет святящихся метеоров в высотных (до 100 км) слоях атмосферы Земли. Аномальность заключается в том, что часто различные звуки (от легкого шипения и гула до сильного свиста, воя и громовых раскатов) отмечались очевидцами раньше, чем они могли видеть болид (или эти звуки опережали визуально наблюдаемый полет ЭФБ).

Долгое время большинство ученых отрицало реальность ЭФБ из-за малой скорости распространения звука в атмосферном воздухе, а это загадочное явление "объяснялось"чисто психофизиологическими эффектами: аномальные звуки объявлялись лишь кажущимися (знакомая история о признании реальности ШМ - шаровых молний). Однако в специализированных каталогах собрано и описано более 500 достоверных случаев наблюдения ЭФБ, правда, с учетом еще более загадочных псевдоболидов или геометеоров по терминологии А.Ю. Ольховатова.

В последнее время к электрофонным "болидам"все чаще стали относить и ШМ, а к электрофонным явлениям - электромагнитные возмущения, которые сказываются на работе бытовых теле- и радиоприемников в виде различных помех и радиошумов от близких пролетов ШМ.

Однако наличие радиопомех прямо следует из электрокапиллярно-вихревой модели ШМ (Натяганов В.Л.), а вот гипотетический механизм "выпрямления"электромагнитных волн и превращение их в звуковые остается загадкой. В докладе на основе ЭКВ модели ШМ, движущейся в неоднородно запыленной и наэлектризованной атмосфере, предложен механизм трансформации электромагнитных волн от классического вибратора Герца в звуковые посредством ионно-звуковых волн в холодной пылевой плазме.

Автор благодарит В.Л. Натяганова за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-08-00712)

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ МАКСВЕЛЛА И ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СУСПЕНЗИЙ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ПРИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ.

Тимохин Е.В. (механико-математический факультет МГУ)
tjenia@mail.ru

Рассматриваются однородные суспензии сферических капель с постоянными свойствами для несущей и внутрикапельной жидкостей в предположении, что переменным является лишь поверхностное натяжение γ , зависящее от температуры T границы раздела фаз; влияние силы тяжести не учитывается.

При наличии приложенного внешнего градиента температуры и и линейной зависимости γ от T в подобной суспензии будет наблюдаться термокапиллярный дрейф, когда вне пробной капли реализуется потенциальный поток, а внутри - сферический вихрь Хилла. В этом случае имеет место парадокс Даламбера, т.е. в вязких средах отсутствует сила сопротивления, действующая на стационарно движущуюся каплю. При квадратичной зависимости зависимости γ от T вблизи минимума термокапиллярной кривой вне пробной капли реализуется термокапиллярное осесимметричное течение деформационного типа, а внутри - тороидальные вихри Тейлора.

В этих двух случаях полученны обобщения классических формул Максвелла и Эйнштейна для эффективных коэффициентов температуропроводности и динамической вязкости соответственно.

При анализе этих случаев использовалась установленная в [1] электротепловая аналогия между задачами электро- и термокапиллярного дрейфа, и учтены тонкие различия в постановках этих задач.

Автор благодарит Натяганова В.Л. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой подержке РФФИ (проект 08-08-00712).

Литература

1. Натяганов В.Л., Суворов А.А., Тимохин Е.В. Аналогия в задачах термо- и электрокапиллярного дрейфа жидких капель. Всероссийская конференция "Современные проблемы механики сплошной среды", посвященная памяти Л.И. Седова. Институт Мех. МГУ, Москва, 2007.

О РЕГУЛЯРНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЯХ ФОНТАНИРУЮЩИХ ПЛОСКИХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ ПРИ РАЗНЫХ СПОСОБАХ СЛИВА ЖИДКОСТИ ИЗ НЕГО

Карликов В.П., Толоконников С.Л., Трушина О.В.
(МГУ им. М.В. Ломоносова)
karlikovvp@mail.ru

Сравниваются найденные в экспериментах и при численном расчете зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда при водосливном и придонном способах стока жидкости из установки. Обнаружено качественное отличие этих зависимостей при сохранении бифуркационной смены режимов фонтанирования. Обсуждается роль протяженности установки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00296, 08-01-00401) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-610.2008.1)

О РАЗВИТИИ КОНЦЕПЦИИ ОБОБЩЕННОГО ВРЕМЕНИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Федоровский Г.Д. (Санкт-Петербургский государственный университет)
g.fed@pobox.spbu.ru

Известно большое количество способов описания деформирования реологически сложных сплошных сред. К основным, наиболее фундаментальным теориям нелинейной ползучести наследственного (интегрального) типа следует отнести пять: кратно-интегральную концепцию Волтерра-Фреше; моноинтегральный, с нелинейным ядром, подход Больцмана-Персо; теорию Работнова, базирующуюся на связи функции деформации с напряжением линейным интегральным соотношением; концепцию Москвитина, являющуюся развитием теории Работнова, основанную на аналогичной связи функции деформации и функции напряжения; и эндохронный способ, с использованием «обобщенного», собственного, внутреннего времени, в моноинтегральном представлении. Обилие подходов может быть объяснено, с одной стороны, - незавершенностью решения проблемы описания нелинейного поведения сред, а, с другой стороны,

- нетривиальным и разнообразным поведением сред, которое приводит к необходимости поиска различных путей. Каждый подход обладает своими достоинствами и недостатками. Возможности подходов до конца не исследованы. Развивающаяся в настоящее время концепция обобщенного времени позволяет унифицировать механические свойства сред при различных физико-химико-механических воздействиях: температуры, радиации, старения, механической нелинейности и т.п. Дает путь модификации других теорий посредством получения параметров эндохронного подхода для них, в частности, получения масштабов (коэффициентов редукции) обобщенного времени в виде «простой», и «сложной» функции, линейного и нелинейного функционалов. Предоставляет возможность расширить способы описания. Такой путь делает доступным проведение унифицированного, единообразного сравнения различных теорий по параметрам эндохронной концепции и, фактически, - обобщить их. В наших работах были получены эндохронные модификации уравнения вязкоупругости Больцмана-Персо, технических теорий ползучести с функциями Бейли и Нортона, нелинейного уравнения ползучести Работнова и Москвитина, уравнения линейной и нелинейной повреждаемости с опорной функцией Журкова, с надбарьерным и подбарьерным (туннельным) переходами.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. (Московский авиационный институт (государственный технический университет))
tdv902@mail.ru

Рассматриваются плоские нестационарные контактные задачи для абсолютно твердых симметричных ударников и упругой полуплоскости. Решение ищется в прямоугольной декартовой системе координат, ось Ох которой совпадает с недеформированной границей по-луплоскости, а Оу направлена вглубь полуплоскости. Математическая постановка задач включает в себя уравнения плоской динамической теории упругости, уравнение движения ударника как абсолютно твердого тела, начальные и граничные условия. В случае, когда ударник ограничен гладкой выпуклой поверхностью, область контакта заранее неизвестна и должна определяться в процессе решения задачи. В нулевом приближении она находится из условия пересечения недеформированной границы полуплоскости с границей ударника. При этом постановка задачи дополняется соответствующим геометрическим соотношением.

Из принципа суперпозиции для линейных задач и граничных условий вытекает основное разрешающее уравнение, которое является двумерным сингулярным интегральным уравнением типа свертки по времени и координате x. До замкнутой системы уравнений оно дополняется уравнением движения ударника в интегральном виде и, если область контакта заранее неизвестна, уравнением для определения положения ее границ.

Решения контактных задач могут обладать особенностями в угловых точках границы ударника и точках смены граничных условий. Для аналитического исследования наличия и характера этих особенностей используется теория многомерных сингулярных интегральных уравнений. Разработана методика, позволяющая свести решение двумерных сингулярных интегральных уравнений к решению парных задач сопряжения для кусочно-аналитических функций и обращению одномерного интегрального уравнения типа Абеля. С помощью предложенного метода исследованы особенности решений ряда нестационарных контактных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

ОСОБЕННОСТИ ДИССОЦИАЦИИ ГАЗОГИДРАТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ОТБОРЕ ГАЗА

Хасанов М.К. (Стерлитамакская государственная педагогическая академия)
hasanovmk@mail.ru

Построена математическая модель, описывающая разложение газогидрата в пористой среде, при тепловом и депрессионном воздействии. Для автомодельной задачи получены аналитические решения, описывающие распределения основных параметров в пласте. Рассмотрено влияние исходных параметров пористой среды, а также интенсивности нагрева и отбора газа на динамику процесса разложения гидрата.

Установлено, что при при тепловом и депрессионном воздействии на пористую среду, насыщенную газом и гидратом, разложение гидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в протяженной области. Показано, что режим с фронтальной поверхностью разложения гидрата характерен для низкопроницаемых пористых сред с высоким пластовым давлением и низкой начальной температурой. В случае отбора газа под давлением ниже значения равновесного давления диисоциации гидрата, соответствующего исходной температуре пласта, разложение газогидрата может происходить только на фронтальной поверхности. Доказано, что для возникновения объемной области разложения газогидрата необходимо, чтобы величина коэффициента пьезопроводности пласта была выше значения его коэффициента температуропроводности.

Также установлено, что в случае объемного разложения гидрата, большая протяженность области диссоциации гидрата реализуется в высокопроницаемых пористых средах с низким исходным давлением и высокой начальной температурой, а также при большой интенсивности отбора газа из пласта.

Литература

1. С.Ш.Бык, Ю.Ф.Макогон, В.И.Фомина Газовые гидраты. М., Химия, 1980.
2. В.А.Истомин, В.С.Якушев Газовые гидраты в природных условиях. М., Недра, 1992.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Хусаинов И.Г., Дмитриев В.Л. (Стерлитамак, Стерлитамакская государственная педагогическая академия)
kig10@mail.ru

Теоретическое и экспериментальное исследование распространения акустических волн в пористой среде является актуальным и существенно для развития представлений о процессах, сопровождающих применение современных технологий использования пористых сред.

В данной работе проведено исследование влияния процесса теплообмена между газом и скелетом на скорость распространения и затухание "быстрой"и "медленной"волн. В отличие от других работ, влияние межфазного теплообмена на распространение волн учитывается на основе введения понятия ячейки.

Основные уравнения записаны при следующих допущениях: все поровые включения имеют сферическую форму и одинаковый радиус; значения длин рассматриваемых в среде волн намного больше размеров пор. Используются макроскопические линеаризованные уравнения массы для скелета пористой среды и газа в порах в двухскоростном приближении, а также уравнения импульсов для скелета и газа. Деформации скелета описываются с помощью модели Фойгта.

Процессы тепловой диссипации в изучаемой системе определяются распределением микротемпературы вблизи межфазных границ. Для описания таких микронеоднородностей температуры производится схематизация структуры среды, используя ячеечную схему.

Для описания распределения температур в ячейке пористой среды записана система уравнений теплопроводности. Учитывается непрерывность температуры и теплового потока на поверхности раздела фаз. Принимая газ калорический совершенным, записывается уравнение состояния газа.

Проведено исследование влияния процесса теплообмена и межфазного взаимодействия на распространение монохроматических волн в насыщенной пористой среде. Показано, что учет влияния межфазного теплообмена растет при переходе от более низких частот к более высоким, а также с увеличением размеров пор среды.

О КОРРЕКТНОСТИ И ДИССИПАТИВНОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Кириченко В. Ф., Чалова Е. А. (Саратов; Саратовский Государственный Технический Университет, Саратовский Государственный Университет)
chalovaea1@mail.ru

Исследуется пологая неоднородная изотропная оболочка, занимающая в параметризованном пространстве R^3 область $D = D_1 \cup D_2$, при этом:
$D_1 \cap D_2 = \varnothing, D_i = \Omega_i \times \left(\frac{-h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right); h_i = const, h_1 \geq h_2 > 0,$
$\overline{\Omega_i} = \Omega_i \cup \partial\Omega_i \cup \gamma, i = \overline{1,2}; \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, (x_1, x_2, x_3) \in D$; Ω_i - измеримые по Лебегу подобласти, Ω - план оболочки; $\partial\Omega_i, \gamma$ - кусочно гладкие кривые. В области D_1 эволюция оболочки описывается в рамках обобщенных гипотез Тимошенко, а в области D_2 - гипотез Киргхофа-Лява. Математическая модель оболочки определяется вариационным уравнением: $\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint\limits_{\Omega} \left(\sum\limits_{i=1}^{2} \left(-\rho\mu_i h_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30}) - \right.\right.\right.$

$\rho\mu_i \frac{h_i^3}{12}\mathrm{grad}\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\mathrm{grad}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30})+$

$+h_i\mu_i\varepsilon_i\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\delta u_{30} + \mu_i\varepsilon_i\frac{h_i^3}{12}\mathrm{grad}\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\mathrm{grad}\delta u_{30} + \mu_1 \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} (\sigma_{ii}^1\delta\varepsilon_{ii}^1 + \sigma_{i3-i}^1\delta\varepsilon_{i3-i}^1$

$+2\sigma_{i3}^1\delta\varepsilon_{i3}^1)dx_3 + \mu_2 \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} (\sigma_{ii}^2\delta\varepsilon_{ii}^2 + \sigma_{i3-i}^2\delta\varepsilon_{i3-i}^2)\ dx_3\ )\ )\ dx_1dx_2\ )\ \}\ dt =$

$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\iint\limits_{\Omega} g(x_1,x_2,t)\delta u_{30}dx_1dx_2\right) dt$ (1) с начальными условиями

$u_{30}(x_1,x_2,t_0) = \varphi_{30}(x_1,x_2), \frac{\partial u_{30}(x_1,x_2,t_0)}{\partial t} = \psi_{30}(x_1,x_2)$, **(2)** где
$\mu_i(x_1,x_2) = 1$, если $(x_1,x_2) \in \Omega_i$ и $\mu_i(x_1,x_2) = 0$, если $(x_1,x_2) \in \Omega_{3-i}$,
$i = \overline{1,2}$ Все условные обозначения соответствуют работе [1].

Теорема. *Пусть* $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ *и* γ *- имеют достаточную гладкость и* $g \in L^2(D \times (t_0,t_1))$, $\varphi_{30} \in H_0^2(\Omega), \psi_{30} \in H_0^1(\Omega)$. *Тогда существует хотя бы одно решение* $\{\ \widetilde{u_{30}}, \widetilde{u_{i0}}, \widetilde{u_{i1}}\ \}$ *первой краевой задачи для эволюционных уравнени из (1) с условиями (2), при этом* $\widetilde{u_{30}} \in L^\infty(t_0,t_1;H_0^2(\Omega))$, $\widetilde{u_{i0}}, \widetilde{u_{i1}}, \frac{\partial\widetilde{u_{30}}}{\partial t} \in L^\infty(t_0,t_1;H_0^1(\Omega))$, *если, кроме того* $essup|g_1|_\Omega < \infty$, *то система эволюционных уравнений из (1) частично диссипативна, т.е .*

$\exists t_2 > t_0$ *и* $\exists\alpha > 0(\alpha \in R)$, *что* $\forall t > t_2, |\frac{\partial\tilde{u}_{30}}{\partial t}|_\Omega^2 + |\mathrm{grad}\frac{\partial\tilde{u}_{30}}{\partial t}|_\Omega^2 + |\Delta u_{30}|_\Omega^2 < \alpha$

Литература

1. Кириченко В. Ф. Разрешимость и частичная диссипативность эволюционных уравнений в обобщенной задаче дифракции для термоупругой пластины //Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Изд-во СГТУ, 2000, с. 11-21

ДВУМЕРНАЯ МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Трапезникова М.А. (Институт математического моделирования РАН)
nata@imamod.ru

В настоящее время ввиду критической транспортной обстановки в Москве и ряде других крупных городов проведение фундаментальных исследований в области математического моделирования потоков автомобильного транспорта становится чрезвычайно актуальным. Авторами разработана оригинальная двумерная модель транспортных потоков в условиях синхронизованного движения, при котором скорости невелики, могут возникать заторы, и стратегии всех водителей примерно одинаковы. Модель основана на приближении сплошной среды и аналогии с квазигазодинамической системой уравнений [1]. Использовано предположение о наличии дополнительного потока массы, сглаживающего решение на расстояниях, меньше которых бессмысленно проводить более детальное описание. Существенное отличие от всех имеющихся моделей — присутствие "боковой"скорости и потока, связанных с переходом транспорта в соседние полосы, что позволяет учитывать реальную геометрию магистрали и ее многополосность [2]. Модель обобщена на случай многофазного движения (фаза — группа автомобилей, объединенных одинаковыми характеристиками или целями). Тестовые расчеты продемонстрировали адекватность модели различным дорожным ситуациям. В дальнейшем модель будет усовершенствована за счет использования статистических данных и введения вероятностных функций, связанных с "человеческим фактором". Доведение модели до уровня практического применения позволит проводить детальные вычислительные эксперименты с целью оптимизации движения транспорта.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-90009-Бел-а).

Литература

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. - М.: МАКС Пресс, 2004. - 332 с.
2. Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель автомобильных потоков, Математическое моделирование. – 2006. – Т.18, N6. – С.85–95.

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА

Черевко А. А., Чупахин А. П. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск)
chupakhin@hydro.nsc.ru

В классических работах по газовой динамике рассматривалась задача о сферически–симметричном автомодельном разлете или фокусировке газа (Седов, Брушлинский и Каждан, Годунов).

Л.В.Овсянниковым в 1995 году было открыто частично инвариантное решение, являющееся обобщением сферически–симметричных движений сплошной среды, названное впоследствии вихрем Овсянникова. В таких движениях инвариантными являются все термодинамические переменные, а также модули касательной H и нормальной к сферам компонент вектора скорости среды. При этом сам вектор скорости инвариантным не предполагается.

Автомодельные решения для модели вихря Овсянникова называются автомодельным вихрем Овсянникова.

Исследование инвариантной компоненты решения в автомодельном вихре Овсянникова сводится к анализу решений четырехмерной автономной системы ОДУ.

В случае $H = 0$ эта система сводится к системе двух ОДУ, описывающих классический сферически–симметричный случай.

Доказано, что при $H \neq 0$ все особые точки системы в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4(w, v, H, h)$ лежат на трехмерных гиперплоскостях $v = \alpha$ и $w = \alpha$, отвечающих звуковым характеристикам. При этом, аналогично сферически–симметричному случаю, интегральная кривая системы, соответствующая течению газа со слабым разрывом пересекает гиперплоскость $v = \alpha$ (или $w = \alpha$) в особой точке. Но, в отличие от классического случая, особые точки полностью заполняют не компактную двумерную поверхность в трехмерной гиперплоскости.

На этой поверхности имеются особые точки различных типов (фокусы, седла, узлы) и распределение этих точек по типам зависит от параметра автомодельности α.

Более сложное поведение интегральных кривых системы приводит к более сложным и разнообразным движениям газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ – 2826.2008.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047а), Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543).

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ

Шамровский А.Д., Лымаренко Ю.А. (Запорожская государственная инженерная академия)
adshamr@rambler.ru, lymarenko@yandex.ru

Существует достаточно большой класс задач, которые при по- пытке их описания в терминах классической теории упругости по- рождают значительные трудности либо на этапе составления опре- деляющей системы уравнений, либо на этапе решения этой системы, либо на этапе интерпретации полученных результатов. В таких случаях, как правило, либо к уравнениям, либо к объекту приме- няют какой-либо из известных приемов дискретизации. Наиболее распространенные на данный момент пружинно-массовые модели приводят к жесткому ограничению на коэффициент Пуассона, $\nu \leq \frac{1}{4}$. В данной работе предлагается альтернативный способ дискретиза- ции, позволяющий снять указанное ограничение.

Рассматривается сплошная упругая среда в условиях обобщен- ного плоского напряженного состояния. В качестве структурного элемента дискретной модели такой среды взят квадратный элемент, составленный из стержней по контуру квадрата и вдоль его диаго- налей (рис.1). Чтобы выразить жесткости стержней через упругие характеристики континуальной среды, рассмотрено две отдельные задачи: 1) растяжение-сжатие ($Q = 0$) и 2) сдвиг ($P_x = 0$, $P_y = 0$). При этом для жесткостей диагональных стержней было получено два разных значения, что нашло в дальнейшем свое обоснование. Объекты конечных размеров «собираются» из указанных элемен- тов. При этом для решения краевых задач применяется специально разработанный итерационный метод, позволяющий избежать реше- ния систем уравнений и накопления погрешностей. Решение тес- товых задач теории пластин показало адекватность предложенной дискретной модели классической континуальной.

НЕЭКВИДИСТАНТНЫЕ РЯДЫ НАЗЕМНЫХ И СПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ФОНЕ ШУМОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Шахпаронов В.М. (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)
rk3arz@rambler.ru

В реальных экспериментах эквидистантные временные ряды, в которых исследуемая величина измеряется через равные промежутки времени, получить трудно или принципиально невозможно. Однако в некоторых случаях нарушение строгого порядка чередования данных может не иметь принципиального характера, что допускает использование стандартного анализа Фурье.

Принципиально другая ситуация сложилась при измерении гравитационной постоянной G на автоматизированной установке, обеспечившей получение длинных неэквидистантных рядов, в которых просматривались временные вариации. Во всех известных работах подобный эффект не наблюдался, автоматизация измерений G не предусматривалась, полученные данные не привязывались к реальному времени. Расхождения данных разных авторов значительно превосходили погрешности конкретных экспериментов. Причина такого разброса окончательно не выяснена. Одна из основных физических констант до сих пор измерена с большой погрешностью. Возникла острая необходимость в объяснении полученных результатов, выявлении природы расхождений, повышении качества измерений, устранении систематических погрешностей.

В работе показано, что спектральный анализ неэквидистантных рядов, в которых результаты измерений физических величин фиксируются через нерегулярные интервалы и даже имеют существенные разрывы во времени, в случае его корректного осуществления позволяет выделить некоторые характерные периоды, несущие информацию о наличии возможных дестабилизирующих факторов.

Литература

1. Садовничий В.А., Панасюк М.И.,..., Шахпаронов В.М. и др. Первые результаты исследований космической среды на спутнике "Университетский – Татьяна". Космические исследования, т.45, 3, 2007, с. 1-15.

2. Шахпаронов В.М., Пархомов А.Г., Карагиоз О.В. Спектральный анализ напряжения солнечных батарей малого космического аппарата "Университетский". Измерительная техника. 2008, 4. С. 26-31.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МОДЕЛИ МУРНАГАНА

Шеина А.А. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)
dime3o@yandex.ru

Теория функций двух комплексных переменных позволила разработать новый метод некоторых решения трехмерных краевых задач нелинейной теории упругости модели Мурнагана. Модель Мурнагана определяется представлением удельной потенциальной энергии деформации полиномом по степеням компонент тензора деформаций Коши-Грина с постоянными коэффициентами, подлежащими экспериментальному определению, и удерживанием всех слагаемый второй степени относительно градиента перемещений.

Рассматривается задача, когда начальная конфигурация области задается в виде куба с цилиндрическими вырезами по двум противоположным боковым граням. На границе куба ставятся следующие условия: на верхней и нижней гранях задаются смещения, при этом в актуальном состоянии все боковые грани предполагаются свободными от нагрузок.

Для решения поставленной задачи вводится пространство четырех независимых переменных x_1, x_2, x_3, x_4 или двумерное комплексное пространство $z_1 = x_1 + i \cdot x_2$, $z_2 = x_3 + i \cdot x_4$. В таком пространстве x_4 - дополнительная переменная, при этом четырехмерная область строится таким образом, что ее сечение плоскостью $x_4 = Const$ совпадает с рассматриваемым трехмерным телом. Производится комплексификация рассматриваемых уравнений теории упругости модели Мурнагана и, используя специальные приемы, удается получить систему комплексифицированных уравнений равновесия, параметризованную четырьмя голоморфными функциями, и решать ее итерационным методом. Для получения приближенного решения краевой задачи из полученного многообразия приближенных решений выделялось решение, наилучшим образом удовлетворяющее задаваемым граничным условиям и комплексифицированным уравнениям равновесия. Таким образом, составляется невязка по граничным условиям, которая минимизируется методом покоординатного одношагового спуска с изменяемым шагом по каждому координатному направлению, что приводит к получению приближенного решение поставленной граничной задачи.

Приводятся численные и графические результаты применения данного метода к решению поставленной краевой задачи.

Литература

1. А.И.Лурье. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980.
2. Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ, часть II, Функции неск. перемен.- М.: Наука, 1976.

ON THE DYNAMICS OF THE PENDULUM WITH PERIODICALLY VARYING LENGTH

Belyakov A.O.,Seyranian A.P. (Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University)
a_belyakov@inbox.ru seyran@imec.msu.ru

Dynamic behavior of a weightless rod with a point mass sliding along the rod axis according to periodic law is studied [1]. This is the pendulum with periodically varying length which is also treated as a simple model of child's swing. Asymptotic expressions for boundaries of instability domains near resonance frequencies are derived. Domains for oscillation, rotation, and oscillation–rotation motions in parameter space are found analytically and compared with numerical study. Chaotic motions of the pendulum depending on problem parameters are investigated numerically.

This research is supported by INTAS grant No. 06-1000013-9019.

Литература

1. Belyakov A.O, Seyranian A.P., Luongo A. Dynamics of the pendulum with periodically varying length. Physica D, (submitted).

DERIVATION OF DOUBLE POROSITY MODEL FOR LIQUID FILTRATION VIA REITERATED HOMOGENIZATION

A. Meirmanov (Belgorod state University)
meirmanov@bsu.edu.ru

A double porosity model for the liquid filtration in a naturally fractured reservoir is derived from homogenization theory. The governing equations of the fluid dynamics on the microscopic level consist of the Stokes system for a slightly compressible viscous fluid, occupying a crack-pore space. In turn, this domain is a union of two independent systems of cracks (fissures) and pores. We suppose that the dimensionless size δ of pores depends on the dimensionless size ε of cracks: $\delta = \varepsilon^r$ with $r > 1$. The rigorous justification is fulfilled for homogenization procedure as the dimensionless size of the cracks tends to zero, while the solid body is geometrically periodic. As the result, for the long-time process we derive the usual equations describing Darcy flow in cracks, while the the liquid in pores is blocked and unmoved. For the short-time processes the homogenized system consists of acoustic equations, describing a two-velocity continuum with three independent parameters: the liquid velocity in pores, the liquid velocity in cracks and the common pressure. The correct double-porosity model is completely different from well-known phenomenological double-porosity model, suggested by G. Barenblatt, Iu. Zheltov and I. Kochina (1960), or homogenized double-porosity model, derived by T. Arbogast, J. Douglas Jn. and U. Hornung (1990). The proofs are based on the method of reiterated homogenization, suggested by G. Allaire and M. Briane (1996).

This research is partially supported by Russian Foundation of Basic Research under grant number 08-05-00265.

THE RELEVANCE OF 3D SINGULARITIES FOR FATIGUE CRACK PROPAGATION

E. Schnack (Institute of Solid Mechanics, Karlsruhe University, Germany), K. Kolk (Institute of Applied Mechanics, University of Erlangen-Nürnberg, Germany)
eckart.schnack@imf.mach.uka.de,kolk@ltm.uni-erlangen.de

In three-dimensional fracture mechanics we have to consider re-entrant corners or wedges for isotropic or in a new direction for layered composites. To describe a stable crack growth of a 3-D crack front, a 3D fracture criterion is needed. But very important is at first to solve the eigenvalue problem behind of this crack front description. Therefore to study the effect of geometrical singularities on the basis of generalized stress intensity factors, we have started with Kondratiev's Lemma on an elliptic boundary value problem. For that we have to consider Dirichlet and Neumann boundary datas which are homogeneous to find the singular field in the vicinity of corner points. In order to find the dominant eigenvalue of the problem we go to a weak formulation by using a Petrov-Galerkin finite element method. This leads us to a quadratic eigenvalue problem which can be solved iteratively by the Arnoldi method and finite element approximation of corner singularity exponents λ_I. So these eigenvalues λ_I are the basis for the definition of generalized stress intensity factors in the neighbourhood of corner points. Here we can answer now a very important question from the past: has the corner singularity from a three-dimensional crack front an influence for crack propagation or not? The theoretical and numerical discussion about that problem with a possibility to compute in very high accuracy the dominant eigenvalue, we can see that the singularity from the corner point can be very important for crack growth, for example for fatigue crack problems. We can show that the crack front is growing not from the smooth crack front but by starting for special applications from these corner points. Based on the results from the fracture group in Nürnberg-Erlangen, we could compare our numerical simulation with realistic experimental test data. The results are coincident and therefore we could answer now on the basis of the eigenvalue problem this open question.

SPECIFICITY OF TRANSITION TO CHAOS IN SOME PENDULUM SYSTEM WITH A LIMITED POWER-SUPPLY

Shvets A.Yu., Pechernyi V.A. (NTUU "Kiev polytechnical institute",Ukraine)
alex.shvets@bigmir.net

The present research is devoted to an analysis of complex non-linear dynamics of a spherical pendulum with a limited power-supply. The spherical pendulum is a good example of an oscillator with two degree of freedom with equal frequencies. Many phenomena taking place for a spherical pendulum are exhibited in dynamical systems with distributed parameters having periodic coordinate, such as rings, cylindrical and spherical shells, round plates, mediums in cylindrical and spherical cavities. The influence of pendulum oscillations on a mechanism of its excitation leads to such new regimes in their dynamics. Such effects are collectively called the effect of Sommerfeld–Kononenko.

We consider the spherical pendulum when the point of suspension is vertically vibrated by an electromotor of a limited power. The mathematical model of this system which takes into account such non-ideal of excitation is built in [1]. In present work the main attention was given to investigation of origin, developing end vanishing of the deterministic chaos at system "spherical pendulum–electromotor". Existence of several types of chaotic attractors is proved in a considered system. Lyapunov's characteristic exponents, phase portraits, sections and maps of Poincare, distribution of invariant measure and spectral density of chaotic attractors are constructed and thoroughly explored. The bifurcation trees of systems are constructed and analyzed. Scenarios of transitions from regular regimes to chaotic are analyzed in details.

It is shown that deterministic chaos in a system is stipulated by exclusively nonlinear interaction between the pendulum and the electromotor. Results of this work allows to extend results of [1,2] and to show new features of chaotic behavior of the considered system.

References

1. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic oscilations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device, Complexity in Physics and Technology.–Singapore: World Scientific.–1992.–P. 77–89.
2. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением.–Москва–Ижевск: R&CD, 2008.–280 с.

5. Математика в естествознании.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ РЕЖИМОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.(Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова)

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su

Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ua_1{x_1}^{\varepsilon} - \mu_1 x_1, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = (1-u)a_2{x_1}^{\varepsilon} - \mu_2 x_2, & x_2(0) = x_{20}, \\ J \equiv x_2(T) \to \max\limits_{u(\cdot)}, & u = u(t) \in [0,1],\ t \in [0,T], \end{cases}$$

где x_1, x_2 — фазовые переменные; u — скалярное управление, положительные параметры a_1, a_2, μ_1, μ_2, x_{10}, x_{20}, T, $\varepsilon \in (0,1)$ считаются заданными. Управление u характеризует долю ресурсов, направляемых на рост первого сектора (переменная x_1), тогда как величина $(1-u)$ характеризует долю ресурсов, направляемых на развитие второго сектора (переменная x_2). При $\varepsilon = 1$ оптимальное управление имеет не более одной точки переключения, особые режимы отсутствуют. При $\varepsilon \in (0,1)$ оптимальное решение может содержать особый участок. Указаны условия на параметры задачи, при которых особый участок существует. Для построения оптимального решения привлекается принцип максимума Понтрягина [1] (необходимые условия оптимальности), достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина [2]. Подробное изложение полученных результатов и соответствующие геометрические иллюстрации содержатся в статье [3].

Работа поддержана грантами НШ-5443.2008.1, РНП 2.1.1.1714, РФФИ 06-01-00359-а

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Москов. обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57-67.
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., М.В. Орлов. Исследование одной экономической модели с возможными особыми режимами // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова / Под редакцией Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. - М. 2008. Вып. 3. С. 3-42.

КОРРЕКЦИЯ ВЕСТИБУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ЗЕМЛЕ И В КОСМОСЕ

Садовничий В.А. (МГУ, Москва), Александров В.В.,(МГУ, Москва), Воронин Л.И., (ЦПК, Звездный городок), Сото Э. (BUAP, Мексика), Шкель А.(IRVINE, США)

vladimiralexandrov366@hotmail.com

В экспериментах на борту орбитальной станции «Мир» сотрудниками Института Медико-Биологических Проблем был обнаружен вестибуло-сенсорный конфликт в условиях невесомости и зафиксировано его проявление в увеличении запаздывания при стабилизации взгляда, что негативно сказывается во время визуального управления космическими объектами. Для улучшения качества визуального управления в этой экстремальной ситуации возможны два варианта коррекции:

а) выработка условного рефлекса у оператора для высокоточного визуального управления в условиях невесомости;

б) разработка корректора сигналов с вестибулярного аппарата оператора с целью уменьшения запаздывания при стабилизации взора.

Первый вариант коррекции был реализован на динамическом тренажере ЦФ-18 в Центре Подготовки космонавтов им.Ю.А.Гагарина с помощью математического обеспечения, созданного в МГУ им. М.В.Ломоносова. Для реализации второго варианта сотрудниками МГУ совместно с сотрудниками Автономного университета штата Пуэбла (Мексика) была создана математическая модель механорецептора углового ускорения — базового элемента корректора.

Опыт, накопленный коллективом за время этих работ, позволил приступить к изучению возможностей по созданию вестибулярного протеза для коррекции вертикальной позы человека на Земле при различных нарушениях вестибулярной функции, могущих привести к ее потере в экстремальных ситуациях. Совместно с сотрудниками лаборатории Микросенсоров (Калифорнийский университет, США) был разработан мобильный имитатор вертикальной позы для предклинического тестирования прототипа вестибулярного протеза, созданного в этой лаборатории, и для сравнительного анализа результатов этого тестирования с функционированием прототипов, созданных другими научными коллективами.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Алексеев Г.В., Терешко Д.А. (ИПМ ДВО РАН)
alekseev@iam.dvo.ru

Исследуются задачи оптимизации и идентификации для стационарных моделей переноса тепла и масс в вязкой несжимаемой жидкости. Указанные задачи заключаются в нахождении неизвестных плотностей распределенных или граничных источников либо неизвестных коэффициентов, входящих в исследуемые модели и граничные условия, по дополнительной информации о решении исходной краевой задачи. Указанные задачи формулируются как задачи условной минимизации определенных функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной краевой задачи, так и управлений. Роль последних играют неизвестные плотности источников или коэффициенты. На основе методов [1,2] доказывается разрешимость указанных задач идентификации, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия минимума, устанавливается единственность и устойчивость решений. Основное внимание уделяется исследованию задачи управления течением жидкости при помощи температурных воздействий. Она сводится к задаче минимизации функционала качества, зависящего от вектора скорости, который вместе с давлением и температурой удовлетворяет исходной краевой задаче.

На основе развитой теории развиваются эффективные численные алгоритмы решения рассматриваемых задач. Указанные алгоритмы основаны на методе конечных элементов дискретизации краевых задач и методе Ньютона численного решения нелинейных уравнений. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по решению конкретных экстремальных задач. Исследуется зависимость решений от основных параметров: числа Рейнольдса, числа Рэлея, а также параметра регуляризации, входящего в выражение минимизируемого функционала качества.

Данное исследование поддержано грантом НШ-2810.2008.1.

Литература

1. Алексеев Г.В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2007. Т. 47, №6. С. 1055–1076.

2. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ХИМИОТЕРАПИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РОСТА НЕОДНОРОДНОЙ ОПУХОЛИ

Антипов А. В., Братусь А. С. (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова)
aleksandr_antipo@mail.ru, applmath1miit@yandex.ru

Рассматривается математическая модель динамики численнос- ти клеток опухоли. Предполагается, что опухоль состоит из клеток двух типов: клеток, поддающихся воздействию химиотерапевтичес- кого средства, и клеток, которые этому воздействию не поддаются. Считается, что законы роста числа всех видов клеток задаются логистическими уравнениями. Мера воздействия химиотерапевти- ческого средства на опухоль определяется функцией терапии. Рас- сматриваются два типа функций терапии: монотонно возрастаю- щая функция и немонотонная функция, имеющая пороговое значе- ние. В первом случае воздействие препарата на опухоль тем силь- нее, чем больше его концентрация. Во втором случае имеется неко- торая пороговая величина концентрации химиотерапевтического средства, при превышении которой интенсивность терапии падает. Также изучается случай, когда на суммарную величину используемого средства накладывается интегральное ограничение.

В работе с помощью принципа максимума Понтрягина найдены необходимые условия оптимальности, на основании которых сдела- ны важные выводы о характере оптимальной стратегии терапии. Численно найдены решения задачи оптимального управления, ког- да целью управления является минимизация общего числа клеток опухоли в случае монотонной и пороговой функций терапии, а так- же с учетом интегрального ограничения на количество химиотера- певтического средства.

Литература

1. M. I. S. Costa, J. L. Boldrini, and R. C. Bassanezi, Optimal chemi- cal control of populations developing drug resistance, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* 9:215 – 226 (1992).
2. M. I. S. Costa, J. L. Boldrini, and R. C. Bassanezi, Drug kinetics and drug resistance in optimal chemotherapy, *Mathematical Biosciences* 125:191 – 209 (1995).
3. M. I. S. Costa, J. L. Boldrini, and R. C. Bassanezi, Chemotherapeutic treatments involving drug resistance and level of normal cells as a criterion of toxicity, *Mathematical Biosciences* 125:211 – 228 (1995).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Бадриев И.Б. (Казанский государственный университет)
Ildar.Badriev@ksu.ru

Предложены приближенные методы решения стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом при наличии точечных источников, моделирующих скважины. Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов, каждый из которых является суперпозицией выпуклого липшиц-непрерывного функционала и линейного непрерывного оператора. Для решения вариационного неравенства применен итерационный метод расщепления (см. [1]). Для рассматриваемых задач анизотропной фильтрации удалось свести каждый шаг метода к решению краевой задачи с линейным сильно эллиптическим оператором, поскольку были получены в явном виде решения возникающих на каждом шаге метода задач минимизации. Построены конечноэлементные аппроксимации, исследована их сходимость. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Результаты численных экспериментов подтвердили эффективность предложенных методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00676, 09-01-00814).

Литература

1. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия ВУЗов. Математика. – 2003. – N 1. – С. 20–28.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ ТЕРМОЯДЕРНОГО ТОПЛИВНОГО СЛОЯ В ЛАЗЕРНОЙ МИШЕНИ

Белолипецкий А.А., Семенов К.О. (Вычислительный Центр им.А.А.Дородницына РАН)
abelolipet@mail.ru

Технология инерциального термоядерного синтеза предполагает использование лазерной мишени (ЛМ), которая представляет собой полистироловую сферическую оболочку. На внутренней ее стенке десублимированы твердые изотопы водорода в виде шарового топливного слоя. Топливный слой является шаровым лишь в идеале. Но и идеальная ЛМ при доставке ее в зону горения реактора подвергается механическим и тепловым нагрузкам, которые частично разрушают топливный слой. При этом высокие технологические требования предполагают, что разнотолщинность слоя не должна превышать 2% от его толщины, равной примерно 100мкм, а шероховатость 0,25%. Обзор проблем, связанных с производством, хранением и доставкой ЛМ, можно найти в [1]. В настоящем докладе решается задача о том, каково должно быть предельное время доставки ЛМ в зону горения, чтобы электромагнитное излучение (ЭМИ) горячих стенок рабочей камеры реактора не привело к таким изменениям геометрических параметров топливного слоя, которые превосходят указанные выше. Эта задача теплообмена с фазовым переходом осложняется тем фактом, что в твердом топливе присутствуют кристаллические зоны, коэффициент теплопроводности которых является тензорной величиной. Из-за этого, а также из-за асимметричного ЭМИ задача нагрева и сублимации слоя становится сферически несимметричной. Математическая модель представляет собой задачу Стефана для системы уравнений теплопроводности с полулинейными краевыми и начальными условиями. Показано, что безразмерная задача сводится к сингулярно возмущенной системе уравнений теплопроводности. Ее решение ищется в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра. Получен аналитический вид первого приближения этого ряда, который хорошо описывает данные эксперимента.

Литература

1.И.В.Александрова, А.А.Белолипецкий, Е.Р.Корешева. Состояние проблемы криогенных топливных мишеней в современной программе инерциального термоядерного синтеза. // Вестник Российской академии естественных наук, 2007, т.7, 2, с. 37-42.

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА

Пасконов В.М. (ВМиК МГУ), Березин С.Б. (ВМиК МГУ), Комарова Е.С. (ВМиК МГУ), Сахарных Н.А. (ВМиК МГУ)

Настоящий доклад посвящен программному комплексу для моделирования трехмерных течений жидкости на системы уравнений Навье-Стокса. Также будут рассмотрены вопросы хранения и визуализации результатов численных экспериментов.

Метод численного исследования был предложен в работе [1]. Для численного решения применяется широко известный вычислительный метод покоординатного расщепления [2]. Процесс расчета при переходе от предыдущего временного слоя к последующему осуществляется в три этапа на промежуточных временных слоях. Окончательное решение получалось на следующем временном слое с помощью глобальных итераций, состоящих в выполнении всех трех этапов расщепления и внутренних итераций. Закон сохранения массы использовался как критерий для определения количества глобальных итераций.

Описанный выше численный метод был реализован на 16-процессорном вычислительном комплексе .Regatta.. В настоящее время создается модификация данного алгоритма для выполнения на суперкомпьютере IBM BlueGene/P.

Были получены интересные теоретические и практические результаты. В частности, было показано, что широко известное течение Пуазейля не реализуется на практике. Был обнаружен факт .запирания. узкого канала, что может оказаться важным результатом при проектировании систем воздушного и жидкостного охлаждения. Ведутся работы по моделированию движения вагона метро в тоннеле.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00288а, 08-01-00463.

Литература

1. Березин С.Б., Пасконов В.М. Численное исследование нестационарного трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения на основе модели Навье-Стокса // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 2006. 1. 16-23.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Бобылёв А. А. (Днепропетровский национальный университет)
abobylov@ukr.net

Рассматриваются контактные задачи для систем упругих тел конечных размеров с односторонними связями при наличии трещин. Особенность их постановки состоит в наличии граничных условий в виде неравенств. Поэтому для численного решения этого класса задач целесообразно использовать специализированные вычислительные алгоритмы, учитывающие односторонний характер связей.

Одним из наиболее перспективных подходов к построению вычислительных алгоритмов для решения контактных задач для тел с трещинами является использование вариационного метода. Применение аппарата преобразования вариационных задач позволяет получить семейство вариационных формулировок, включая внутренний и граничный варианты основной, двойственной и гибридных формулировок, а также вариационные формулировки для функционалов контактных граничных условий.

Для дискретизации внутренних вариационных формулировок применяется метод конечных элементов, а для дискретизации граничных формулировок – метод граничных решений на основе интегральных представлений решения и метода граничных элементов.

Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования с ограничениями в виде неравенств используются варианты методов сопряженных градиентов и последовательной верхней релаксации. Предложено линейное параметрическое преобразование переменных, позволяющее упростить вид ограничений и изменять спектральные свойства матрицы Гессе минимизируемой функции.

Для численного решения задач о нахождении седловых точек применяется вариант алгоритма Удзавы с переменным параметром. Предложен адаптивный алгоритм выбора последовательности значений этого параметра, обеспечивающий сходимость независимо от выбора начального значения.

Исследованы два подхода к численному решению контактных задач с односторонними связями на последовательности сеток. Первый из них заключается в последовательном решении сеточных задач, начиная с самой грубой триангуляции, где решение может быть осуществлено довольно экономично. Затем полученное решение интерполируется на более мелкую сетку и используется в качестве начального приближения в каком-либо итерационном процессе. Второй подход основан на предложенной обобщенной схеме многосеточного метода Федоренко, не использующей понятие «невязка решения» и допускающей его применение для более широкого круга задач, в частности, контактных задач с односторонними связями.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАЗМОСТАТИКИ

Брушлинский К.В. (г. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
brush@keldysh.ru

Обсуждаемые вопросы возникли в связи с численными исследованиями равновесных плазменных конфигураций в магнитном поле ловушек для удержания плазмы, представляющих интерес в программах управляемого термоядерного синтеза. Большое внимание уделяется ловушкам нового типа - галатеям, предложенным А.И. Морозовым, в которых проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем, что допускает большее разнообразие геометрии магнитного поля и возможность повысить параметры удержания. Математические модели формирования конфигураций в ловушках строятся в терминах нестационарных задач магнитной газодинамики. Свойства равновесных конфигураций исследуются в плазмостатических моделях на основе МГД-уравнения равновесия и уравнений Максвелла. Математический аппарат моделей существенно упрощается при наличии симметрии. Двумерные уравнения плазмостатики сводятся к одному скалярному полулинейному эллиптическому уравнению второго порядка для функции магнитного потока - уравнению Грэда-Шафранова. Модель равновесной магнитоплазменной конфигурации включает в себя численное решение краевой задачи с этим уравнением. При решении возникают вопросы существования и единственности, природа которых может быть объяснена в терминах спектральных свойств дифференциального сператора линеаризованной краевой задачи. Они же определяют некоторую разновидность устойчивости решения, неочевидным образом связанную с МГД-устойчивостью конфигурации относительно выводящих ее из равновесия возмущений. Эти вопросы в совокупности составляют фундаментальную главу теории полулинейных дифференциальных уравнений эллиптического и параболитического типов и помимо плазмостатики встречаются в прикладных задачах теории горения, химических реакций, электрохимии и других моделях взаимодействия процессов реакции и диффузии. Им же посвящены теоретические работы по дифференциальным уравнениям. Доклад обращает внимание на общую математическую природу указанных вопросов и их проявление в вычислительной практике.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 06-01-00312

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РАДИОБИОЛОГИИ

А.В.Булинский (МГУ имени М.В.Ломоносова)
bulinski@mech.math.msu.su

Проблемы, связанные с онкологическими заболеваниями, относятся к числу важнейших для современного естествознания. На сегодняшний день достигнуты значительные успехи в диагностике и лечении рака. При этом существенную роль играют как практические, так и теоретические исследования, ведущиеся в крупнейших отечественных и зарубежных научных центрах.

Отметим, что В.Рентген объявил от открытии X-лучей, т.е. фотонов (определенного частотного диапазона), 28 декабря 1895 года, а уже 12 января 1896 года Э.Груббе начал их использование для лечения раковых опухолей. Начиная с 90-х годов 20-го века, в радиобиологии стали активно применяться модели, основанные на идее независимого поведения функциональных единиц, составляющих биологическую систему, подверженную облучению. Наряду с рассмотрением таких моделей предлагается более общий подход (см. [1], [2]), использующий различные формы зависимости случайных величин, характеризующих воздействие на клетки и составные элементы системы. При этом существенную роль играют предельные теоремы, устанавливаемые для сумм зависимых мультииндексированных величин, см. [3]. В частности, рассматривается доказанный автором новый статистический вариант центральной предельной теоремы, вовлекающей двухмасштабные процедуры и самонормировки. Кроме того, обсуждаются варианты сочетания классической модели "критического объема"и кластерных моделей, учитывающих геометрические аспекты расположения поврежденных частей органов и тканей.

Работа выполнены при поддержке гранта РФФИ 07-01-00373а.

Литература

1. Bulinski A. and Khrennikov A. (2005) Generalization of the Critical Volume NTCP Model in the Radiobiology. *http : //arxiv.org/ abs/math/*0504225.

2. Bulinski A. (2008) CLT for random fields with applications. In: C.H.Skiadas (Ed.): *Advances in Data Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1–10 (to appear).

3. Булинский А.В., Шашкин А.П. (2008) *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 1–480.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С.СМЕЙЛА ИЗ ТЕОРИИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ КЛЕТОК

Буркин И.М., Соболева Д.В.(Тульский государственный университет)

bim@klax.tula.ru

Рассмотрим комплекс, состоящий из N биологических клеток, содержащих по n ферментов и взаимодействующих между собой [1]. Динамика каждой клетки в R^n описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\dot{x} = R(x)$, $x \in R^n$. В типичном случае эта динамика такова, что система имеет единственное устойчивое в целом состояние равновесия. Клетки взаимодействуют между собой путем диффузии через мембрану. Добавление диффузионных связей, носящих обычно линейный характер, приводит к уравнению $\dot{x}_k = R(x_k)+\sum M_{ik}(x_i - x_k)$, $k = 1, 2...N$. Суммирование ведется по множеству клеток, примыкающих к клетке с номером k. Здесь M_{ik} - линейные отображения R^n в себя, т.е. $n \times n$-матрицы.

Задача, представляющая наибольший интерес в рамках рассматриваемой модели, была предложена С.Смейлом в работе [2] и состоит в следующем: можно ли "организовать"взаимодействие между клетками таким образом (т.е. так выбрать матрицы M_{ik}), чтобы замкнутая система имела устойчивое нетривиальное периодическое решение. На языке клеточной системы это будет означать, что "мертвые"по отдельности клетки в результате такого взаимодействия "оживают"и система из N клеток начинает пульсировать.

В работе [2] Смейл нашел решение предложенной им задачи для случая двух клеток ($N = 2$) с четырьмя ферментами ($n = 4$), сведя возникающую задачу к исследованию известного уравнения Ван-дер-Поля. В этой же работе Смейл подчеркнул, что проблемой является уменьшение числа веществ до двух или даже до трех, а также "построение модели с тремя клетками и двумя или тремя химикалиями".

Решение одной из сформулированных Смейлом проблем приводится в предлагаемом докладе.

Литература

1. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc., 1925, P. 37-72.

2. Смейл С. Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнения Тьюринга // Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ НА ПОВЕДЕНЧЕСКИЕ АКТЫ

Ветров Д.П., Ломакина-Румянцева Е.И., Кропотов Д.А., Конушин А.С., Анохин К.В.

vetrovd@yandex.ru

Необходимость создания высокопроизводительных и экономически эффективных методов поведенческого фенотипирования (скрининга) лабораторных мышей привела к появлению автоматических домашних клеток, предоставляющих исследователям возможность оказывать на мышей различные стимулирующие воздействия, и оборудованные системами видеонаблюдения [1]. Современные методы анализа поведения, например, выделение поведенческих шаблонов и стереотипии требуют разделения траекторий движения на отдельные поведенческие акты. Эта задача в настоящее время может быть выполнена только с привлечением опытного специалиста в области поведения животных. Существующие системы видеонаблюдения за поведением животных позволяют определять некоторые акты с помощью простейших эвристических метрик, например, сравнивая длину мыши с порогом, что обеспечивает крайне низкую точность распознавания. Автоматические методы сегментации траекторий на данный момент позволяют выделять только периоды двигательной активности и неподвижности, требуют тщательной настройки параметров, что существенно ограничивает их применимость на практике.

Авторами предложено использовать метод скрытых марковских моделей [2] для автоматической сегментации поведения лабораторных животных. На данный момент, сегментация траектории на четыре обобщенных состояния производится с точностью 84.2%, что сравнимо с точностью ручной разметки, так как ручная сегментация, выполненная различными экспертами, различается в среднем в 15-20% моментов времени. Предложенный метод также позволяет разделять поведение на участки стационарности, не используя информации об экспертной разметке.

Литература

1. Spruijt B.M., DeVisser L.(2006) Advanced behavioral screening:automated home cage ethology. Drug Discovery Today: Technologies Vol. 3, No. 2 2006, pp.231-237

2. Elliot R.J., Aggoun L., Moore J.B. (1995) Hidden Markov Models: Estimation and Control. Springer.

ДВОЙСТВЕННЫЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО – БАРЬЕРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОТЫСКАНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ РАВНОВЕСИЙ МАКРОСИСТЕМ

Гасникова Е.В. (МФТИ)

egasnikova@ya.ru

Рассмотрим задачу энтропийно–линейного программирования (такие задачи возникают при нахождении равновесий макросистем):

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \ln(x_k/e) \to \min_{\vec{x}\in \mathrm{A}\,\cap\,\mathrm{R}_{+}^{m}}; \quad \mathrm{A}:\ \mathrm{T}\vec{x}=\vec{q},\ G\vec{x}\le\vec{d}. \tag{1}$$

В работе [1] для отыскания единственного решения (1) было предложено семейство итерационных алгоритмов, которое содержит алгоритмы Брэгмана–Шелейховского, MART, GISM, Ю.С. Попкова:

$$\begin{cases} x_k^n = \exp\left(-\sum\limits_{p=1}^{l} t_{pk}\lambda_p^n - \sum\limits_{q=1}^{w} g_{qk}\mu_q^n\right), & k=1,\dots,m; \\ \lambda_p^{n+1} = \lambda_p^n - \gamma_p\xi_p\left(q_p - \sum\limits_{k=1}^{m} t_{pk}x_k^n\right), & p=1,\dots,l; \\ \mu_q^{n+1} = \mu_q^n - \alpha_q\mu_q^n\zeta_q\left(d_q - \sum\limits_{k=1}^{m} g_{qk}x_k^n\right), & q=1,\dots,w, \end{cases} \tag{2}$$

где шаги $\gamma_p > 0$, $\alpha_q > 0$ - достаточно маленькие, а дважды гладкие функции $\{\xi_p(\cdot)\}_{p=1}^{l}$, $\{\zeta_q(\cdot)\}_{q=1}^{w}$ - монотонно возрастают и равны нулю в нуле. Глобальная сходимость (2) была установлена в [1] при следующих предположениях:

1) $\exists\ \vec{z} > \vec{0}_m:\ T\vec{z}=\vec{q},\ G\vec{z}\le\vec{d}$;

2) Строки матриц $T = \|t_{pk}\|_{p,k=1}^{l,m}$ и $G = \|g_{qk}\|_{q,k=1}^{w,m}$ линейно независимы в совокупности.

При этом было замечено, что предположение 2 не всегда выполняется в прикладных задачах. Оказывается, что от предположения 2) можно отказаться. А именно, если справедливо предположение 1), то найдутся такие достаточно маленькие шаги (зависящие от начального приближения), что итерационные процессы (2) будут глобально сходиться к единственному решению задачи (1). Итерационные алгоритмы (2) особенно эффективны: для $l + w \ll m$; и для сильно разреженных матриц T и G. При этом время работы алгоритмов оценивается, соответственно, как $\mathrm{O}(m\cdot(l+w)|\ln\varepsilon|)$ и $\mathrm{O}((m+l+w)|\ln\varepsilon|)$, где ε - точность полученного решения. Отмеченные случаи часто встречаются в приложениях.

Литература

1. Гасникова Е.В. Двойственные мультипликативные алгоритмы для задачи энтропийно – линейного программирования // ЖВМ и МФ, no. 3, 2009, 12 стр. (в печати).

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В.Г. Грудницкий (Вычислительный центр РАН им. А.А.Дородницына)
grudnitsky@mail.com

Основной аппарат в исследованиях нестационарных течений сжимаемой сплошной среды – характеристический. Он имеет квазилинейный характер. При переходе к ним разрывы выпадают из числа элементов решения. Форма записи законов сохранения, не приспособлена к описанию разрывов.

В цикле работ, в частности [1-3], устранены перечисленные выше методические дефекты. Характеристическая форма получена тождественным преобразованием законов сохранения. В ней приращения потоков относятся к приращениям соответствующих им функций, разрывные величины относятся к разрывным. Непрерывные приращения независимых координат относятся друг к другу. Такие уравнения допускают предельный переход к бесконечно малым приращениям независимых координат всюду, а характеристические скорости включают в себя также скорости ударных волн и контактных разрывов.

На основании нелинейного подхода, получен универсальный метод доказательства устойчивости решения. Доказано, что из устойчивости следует монотонность решения (во всяком случае, в декартовых координатах). Получены достаточные условия устойчивости для ряда вычислительных схем при расчёте течений различного типа. Показана возможность и эффективность применения характеристического преобразования к уравнениям, содержащим эффекты диффузионного вида.

Литература

1. В.Г.Грудницкий, Достаточное условие устойчивости при явном построении разрывных решений системы уравнений Эйлера, Док. РАН, т. 362, №3, с. 298-299, 1998.

2. В.Г.Грудницкий, О достаточных условиях устойчивости для схемы С.К. Годунова, Мат. моделирование, т. 17, № 12, с. 119-128, 2005.

3. В.Г.Грудницкий, Достаточные условия устойчивости в расчётах стационарных сверхзвуковых течений маршевым способом и нестационарных течений с учётом вязкости, Мат. модел., т. 20, № 2, стр. 93-104, 2008

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОФИЗИОЛОГИИ СЕРДЦА

Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В. (МГУ им. Ломоносова, НЦ ССХ им. Бакулева)
den@cs.msu.su, alec.kalinin@gmail.com

Доклад посвящен численным методам решения двух обратных задач, возникающих в электрофизиологии сердца.

Первая задача — обратная задача электрокардиографии. Математическая постановка ее такова. В области $\Omega \subset R^3$, ограниченной изнутри замкнутой поверхностью S_1, а снаружи — замкнутой поверхностью $S = S_2 \cup S_3$, функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u(x,y,z) = 0$. Требуется определить $u(x,y,z)$ в $\overline{\Omega}$, если на S_2 известны значения $u(x,y,z)$, а ее нормальная производная равна нулю. Эта задача, обычно называемая задачей Коши для уравнения Лапласа, является некорректно поставленной, что наряду с достаточно сложной геометрией области, создает существенные трудности при ее решении. Авторами разработан метод численного решения, основанный на применении метода регуляризации Тихонова и метода граничных интегральных уравнений.

Вторая задача связана с исследованием возбуждения в сердечной мышце методом импедансной томографии. Математическая постановка данной задачи состоит в следующем. Пусть область $\Omega \subset R^3$ ограничена замкнутой поверхностью S, а замкнутая звездная поверхность S_1 ограничивает область $\Omega_1 \subset \Omega$. Потенциал $u(x,y,z)$ удовлетворяет в $\Omega \backslash S_1$ уравнению $\mathrm{div}(\gamma \,\mathrm{grad}\, u) = 0$, где γ принимает постоянные значения в Ω_1 и $\Omega \backslash \Omega_1$. На поверхности S_1 выполняются условия непрерывности потенциала и его потока. Требуется определить неизвестную поверхность S_1, если на внешней поверхности S заданы потенциал $u(x,y,z)$ и его нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Метод решения обратной задачи основан на применении метода граничных интегральных уравнений, отыскании неизвестной замкнутой поверхности S_1 в виде разложения по системе сферических функций и использовании методов градиентной оптимизации для нахождения коэффициентов этого разложения.

В докладе будут изложены численные методы решения обратных задач, приведены результаты численных экспериментов и обработки реальных электрокардиографических измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 08-01-00314.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕТЕРМИНАЛЬНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО РЕАКТОРА

Дубовицкий В.А. (Черноголовка)
dubv@icp.ac.ru

Рассматривается задача максимизации устойчивого стационарного режима функционирования в одномерной диффузионно кинетической модели изолированного реактора путем перераспределения активных источников (например, катализатора или тепла). При естественных упрощающих предположениях задача формализуется как

$$\begin{array}{l} \int_0^L F(c(x),u(x))dx \to \max, \quad y(0)=0, \quad y(L)=0 \\ c'=y, \quad y'=f(c,u) \quad ,\Phi(c)\le 0 \quad ,u(x)\in U \\ \lambda((f_c'+f_c'^*)/2)\le 0, \quad 0\le x\le L \end{array} \tag{1}$$

Здесь L длина реактора, $c \in R^m$ вектор концентраций $u(x), U$ управляемая активность в точке источника в точке x и множество ее возможных значений, F, f, Φ есть соответственно функция цели, кинетического источника и фазового ограничения. Ограничение неравества $\lambda \le 0$ гарантирует устойчивость режима к возмущениям. Здесь функционал $\lambda(\sigma)$ (от самосопряженной матричной функции σ) определяется как $\lambda(\sigma) := max\{\lambda : z'' - \sigma z = \lambda z, \int |z|^2 dx = 1, z'(0) = z'(L) = 0\}$ и выражает правую границу Бендиксона комплексного спектра двухточечной несамосопряженной векторной краевой задачи

$$z'' - f_c'(c,u)z = 0, \quad z'(0) = z'(L) = 0 \tag{2}$$

Проблема (1) является задачей оптимального управления (ОУ) нетерминального типа, так как ее постановка содержит функционал, зависящий от фазовой компоненты траектории "в целом". Для ее решения мы применяем обобщенный принцип максимума (ПМ) задач ОУ с функциональными ограничениями, запись которого опирается в данном случае на известное эффективное выражение производной функционала правой границы спектра $\lambda'(\sigma)\bar{\sigma} = -\int z\bar{\sigma}z dx$ где z обозначает правую собственную функцию задачи Штурма-Лиувилля (2). В докладе описаны соотношения этого обобщения принципа максимума, приводятся результаты аналитического и численного исследования его экстремалей на примере моделей реакторов тепловыделения и каталитического синтеза.

ОБ АНАЛИЗЕ И ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО ДИСКРЕТНЫМ ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Жиляков Е.Г.(Белгородский государственный университет)
zhilyakov@bsu.edu.ru

Рассматривается проблема численного дифференцирования и интерполяции функций по эмпирическим данным, которые представляют собой результаты регистрации конечного набора значений некоторого параметра (измерения), характеризующего поведение исследуемого объекта в зависимости от изменений того или иного фактора (аргумента), например, времени. Иными словами предполагается заданным вектор (символ T означает транспонирование) $\vec{u} = (u_0, \ldots, u_N)^T$,компоненты которого представляют собой результаты измерений в дискретном наборе точек области определения исследуемой функции, то есть $u_k = u(t_k), k = 0, \ldots, N$.

В отличие от наиболее распространенных подходов к решению проблемы численного дифференцирования и интерполяции предлагается изначальные требования к классу аппроксимирующих функций $\hat{u}(t)$ формулировать относительно их первых производных $f(t) = d\hat{u}(t)/dt$, имея в виду, что всегда доступная численная реализация формулы Ньютона- Лейбница $\hat{u}(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau$ (1), позволяет в необходимых случаях вычислить и значения самих аппроксимирующих функций. Выполнение при этом равенств $\hat{u}(t_k) - u_0 = \nu_k = u_k - u_0 = \int_0^{t_k} f(\tau)d\tau, k = 1, \ldots, N$ (2), позволяет осуществить и интерполяцию в классическом смысле.

Для повышения устойчивости оценок производных к влиянию случайных компонент в измерениях используется частотное представление $f(\tau) = \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)d\omega/2\pi$ (3), где, и вариационный принцип отбора из этого класса целых функций $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau)d\tau = min$ (4), что адекватно отражает свойство ограниченности доступных исследуемому объекту энергетических затрат.

Получено решение вариационной изопериметрической задачи, определяемой требованием (4) и интерполяционными равенствами (2), и показано, что достаточным условием для осуществления интерполяции является выполнение неравенства $\Omega t_N \ge 2\pi$.

Проведенные вычислительные эксперименты иллюстрируют преимущества разработанного метода в точности и устойчивости получаемых оценок производных и интерполяционных функций перед наиболее часто используемыми для тех же целей методами.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Бадриев И.Б., Задворнов О.А. (Казанский государственный университет)
Ildar.Badriev@ksu.ru, Oleg.Zadvornov@ksu.ru

Изучаются математические модели процессов установившейся фильтрации при наличии точечных источников интенсивности q_i в точках $x^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, находящихся внутри области фильтрации $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$. Требуется найти поля давления u и скорости фильтрации v, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i\, \delta(x - x^{(i)}),\ x \in \Omega \subset R^n,\ n \geq 2, \tag{1}$$

смешанным граничным условиям

$$u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1;\ (v, \nu) = 0,\ x \in \Gamma_2, \tag{2}$$

где ν – внешняя нормаль к Γ_2, а также и многозначному соотношению

$$-v(x) \in \partial\Psi(\nabla u(x)),\ x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\Psi : R^n \to R^1$ – полунепрерывная снизу, собственная, выпуклая функция, определяющая закон фильтрации. Сформулирована вариационная постановка задачи (1) – (3) в виде проблемы поиска минимума выпуклого функционала относительно давления u. При дополнительных условиях на функцию Ψ эта задача сведена к вариационному неравенству второго рода в пространстве Соболева и доказана теорема разрешимости. Более того, установлено существование поля скоростей, удовлетворяющего соотношению (3) и уравнению неразрывности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00676, 09-01-00814).

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА

Ипатова В.М. (МФТИ)
ipatval@mail.ru

Рассматривается уравнение баротропного вихря на вращающейся сфере S

$$\begin{cases} \Delta\psi_t + J\,(\psi,\, \Delta\psi + 2\Omega\mu) + \sigma\Delta\psi - \nu\,\Delta^2\psi \,=\, f, \\ \displaystyle\int_S \psi\, dS \,=\, 0, \quad \psi\,|_{t=0} = \psi_0(\lambda,\, \mu), \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi = \psi\,(\lambda, \mu, t)$ – функция тока λ - долгота, $\mu = \sin\vartheta$, ϑ - широта, σ и ν - положительные постоянные.

Предполагается, что в некоторой подобласти имеются данные наблюдений за поведением решения (1). Расхождение между модельным решением и наблюдаемыми величинами измеряется регуляризованным функционалом стоимости. Ставится задача об отыскании неизвестного начального состояния ψ_0 из условия минимума целевого функционала. Для численного решения (1) используется полуявная аппроксимация с постоянным шагом по времени τ. Дискретизация по пространственным переменным проводится по методу Ритца с проектированием уравнения на подпространства $\mathcal{H}^N$, натянутые на сферические гармоники $Y_{mn}(\lambda, \vartheta)$, $|m| \leq n$, $n \leq N$. По отношению к полученной спектрально-разностной схеме ставится дискретная задача ассимиляции данных. Доказываеся, что при $\tau \to 0$ и $N \to \infty$ численные решения задачи ассимиляции данных сходятся к ее точным решениям.

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/500.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕФТЕДОБЫЧИ

Исраилов С.М., Музафаров Х.А. (г.Ташкент)

Одной из актуальных задач современности является проблема оптимизации режимов воздействия на нефтеносные пласты. Значительная часть запасов углеводородов остается сегодня недосягаемой для разработки в силу нерациональной эксплуатации месторождений. Одним из распространенных режимов эксплуатации нефтеносных пластов является водонапорный, при котором месторождение покрывается сеткой скважин, часть из которых является нефтедобывающими, а часть - водонагнетательными. Характерной проблемой, возникающей при таком воздействии является образование прорывов воды от нагнетательных к добывающим скважинам и, как следствие - высокая обводненность продукции. С одной стороны - это приводит к снижению экономической эффективности разработки пласта, а с другой - к резкому увеличению остаточной нефтенасыщенности, за счет образования практически непромываемых нефтесодержащих зон. Воздействия на пласт является метод математического моделирования. Фактически он является единственной возможностью анализа множества возможных режимов воздействия на сложные физические природные системы. К безусловным преимуществом вычислительного эксперимента относятся его дешевизна, по сравнению с натурным экспериментом, высокая скорость моделирования и неразрушающий характер воздействия - возможность анализа множества вариантов, без изменения состояния месторождения. Современные суперкомпьютерные системы предоставляют широкие возможности в плане численного исследования сложных физических и технологических процессов. Их вычислительная мощность измеряется десятками и сотнями терафлопс, однако, создание методов, позволяющих воспользоваться ими в полной мере, сопряжено со значительными трудностями. Помимо проблем создания адекватных математических моделей, эти трудности обусловлены особенностями современных суперкомпьютеров. Работа посвящена созданию эффективных, учитывающих гетерогенный характер суперкомпьютеров, параллельных алгоритмов моделирования процессов нефтедобычи, в том числе: методов рациональной декомпозиции расчетных сеток, параллельных программ моделирования фильтрационных процессов, протекающих при заводнении нефтеносных пластов; способов анализа и визуализации результатов численного моделирования, полученных на подробных пространственных сетках.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ МИКРОПРОТЕЗА В СТОМАТОЛОГИИ

Кандоба И.Н. (Институт математики и механики УрО РАН)

kandoba@imm.uran.ru

Рассматриваются вопросы применения методов математической теории оптимального проектирования конструкций [1] в стоматологии. Основное внимание уделяется методике протезирования зуба при помощи цельнокерамической реставрации, из которой исключены армирующие реставрацию элементы (металлические штифты) [2]. Реализация такого подхода приводит к необходимости оптимального использования других ресурсов, позволяющих повысить надежность реставрации и увеличить продолжительность жизненного цикла такого микропротеза. Одним из этих ресурсов является геометрическая форма вкладки - той части микропротеза, которая контактирует с тканями зуба. Практика свидетельствует, что за счет оптимального выбора формы вкладки можно во многих случаях добиться достижения указанных целей. Оптимальной формой вкладки считается та, которая при заданной внешней нагрузке и объеме микропротеза обеспечивает наиболее равномерное распределение напряжений на контактной границе - "вкладка - ткани зуба". Выполнение этого условия позволяет избегать возникновения на этой границе локальных запредельных нагрузок, способных привести к разрушению микропротеза.

В работе рассматривается упрощенная постановка задачи упругости, основанная на известном в области сопротивления материалов методе плоских сечений трехмерной конструкции [3]. Исследуется геометрическая форма плоского сечения реставрированного зуба, представляющая собой набор соответствующих различным материалам (дентину, эмали, вкладка) зон. Для определения оптимальной формы плоского сечения вкладки применяется метод последовательных приближений [4]. Задается начальная форма плоского сечения вкладки. Затем строится последовательность форм, приближающая оптимальную. Каждая последующая форма получается из предыдущей при помощи локальной вариации части ее границы - контактной границы. Такая вариация не изменяет площадь плоского сечения вкладки и уменьшает величину разброса напряжений на контактной границе каждой последующей формы. В результате строится близкая к оптимальной форма плоского сечения вкладки. Приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N06-01-00229.

Литература

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, 255с.
2. Коледа П.А., Жолудев С.Е., Кандоба И.Н. Опыт применения цельнокерамических реставраций на депульпированные зубы// Институт стоматологии. Научно- практический журнал. N2 (35), 2007. С.50-52.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М. Госуд. из-во физ.-мат. лит-ры, 1962, 856с.
4. Кандоба И.Н. О методе решения одной задачи оптимизации формы в теории упругости// Прикладная математика и механика. Т.54, вып.3, 1990г., С.506-510.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРИЛИВОВ

Кобельков Г.М., Арушанян И.О., Друца А.В. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)

kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Для системы уравнений мелкой воды, описывающей распространение приливных волн, построена разностная схема на неструктурированной сетке. Исследованы свойства получающейся системы уравнений; в частности, показано, что матрица системы после исключения части неизвестных становится M-матрицей.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 08-01-00415) и Программы РАН "Современные проблемы теоретической математики"(проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики").

Литература

1. Марчук Г.И., Каган Б.А. Океанские приливы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
2. Bogachev K.Yu., Kobelkov G.M. Numerical solution of a tidal wave problem. — in Proceedings of "Parallel Computational Fluid Dynamics", v.2, 2004, J.-Wiley Press
3. Agoshkov V.I., Botvinovsky E.A. Numerical solution of a hyperbolic-parabolic system by splitting methods and optimal control approaches. — Comp. Methods in Appl. Mathematics, v. 7, No. 3, 2007, 193–207.
4. Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V. Construction of a difference scheme for Navier–Stokes equations on unstructured grids. — Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v.23, No. 5, 487–503.

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ В КОСМИЧЕСКОМ ЗЕМЛЕВЕДЕНИИ

Козодеров В.В. (Музей землеведения МГУ им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия)

vkozod@mes.msu.ru

Космическое землеведение - междисциплинарное направление научных исследований и технологических разработок в области использования данных аэрокосмического дистанционного зондирования (ДЗ) для решения прикладных задач гидрометеорологии, океанографии, экологии, геологии, сельского и лесного хозяйства и др. Основная форма отображения данных ДЗ - многоспектральные и гиперспектральные изображения разного пространственного разрешения. Число измерительных каналов многоспектрального зондирования обычно не превышает десяти, а в случае гиперспектрального зондирования могут использоваться данные несколько сотен спектральных каналов. В современных системах гиперспектрального ДЗ разрешение по спектру достигает нанометров, что открывает уникальные возможности дистанционной нанодиагностики состояния объектов природно-техногенной сферы при анализе тонкой структуры обрабатываемых данных.

Виктор Антонович Садовничий стоял у истоков развития приложений методов космического землеведения в МГУ. В конце 1980-х годов по его инициативе в Музее землеведения МГУ был создан сектор космического землеведения. Основные направления начального этапа соответствующих исследо-ваний отражены в книгах «Космическое землеведение» издательства Московского университета под редакцией В.А.Садовничего: Геофизические основы, 1992 г.; Информационно-математические основы, 1998 г.; Диалог природы и общества. Устойчивое развитие, 2000 г.

Космическое землеведение развивается в направлении совершенствования аппаратуры ДЗ в различных областях спектра с миниатюризацией измерительных средств (уменьшение массогабаритных характеристик аппаратуры, энергопотребления и т.д.). Резкое возрастание потоков измерительных данных ДЗ неизбежно затрагивает приложения методов вычислительной математики при автоматизации процесса обработки получаемых изображений с использованием многопроцессорных вычислительных систем. Основа реализации методов и технологий обработки данных - решение прямых задач формиро-вания уходящего излучения, регистрируемого аппаратурой ДЗ, и обратных задач обращения функци-онала регистрируемых данных при восстановлении параметров состояния наблюдаемых объектов для каждого элемента обрабатываемых изображений.

Принципы распознавания образов этих объектов по их многоспектральным (гиперспектральным) изображениям положены в основу первого этапа обработки данных; при этом выделяются такие классы объектов, как «облачность», «водоемы», «почвогрунты», «растительность». Затем для каждого элемента разрешения класса «растительность» восстанавливаются значения таких параметров, как объем зеленой фитомассы и общей биомассы растительности, а для лесной растительности определяется породный состав, типы межкроновой растительности (трава, кустарники, болота и т.д.).

Приложения созданного алгоритмического и программного обеспечения отрабатывались в применении к данным аппаратуры MODIS/Moderate-Resolution Imaging среднего пространственного разрешения и аппаратуры ETM+/Enhanced Thematic Mapper («Усовершенствованный тематический картограф») спутника Landsat-7 высокого пространственного разрешения. Приложения отрабатывались также в процессе летных испытаний отечественного гиперспектрометра (около 200 спектральных каналов, пространственное разрешение около 2 м с высоты 1 км) для выбранного тестового региона. Осуще-ствлялась наземная валидация получаемой информационной продукции обработки данных ДЗ. Приведены оценки достоверности полученных результатов.

Исследования проводятся в рамках проекта РФФИ №08-07-13515 _офи_ц.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ ГЛОБАЛЬНОГО АТТРАКТОРА

Корнев А.А. (Мех.-мат. МГУ им. М.В. Ломоносова)
kornev@dodo.inm.ras.ru

Рассмотрены методы численного решения задач асимптотической стабилизации по начальным данным [1], краевым условиям [2], правой части [3], а также метод численной аппроксимации нетривиальных траекторий глобального аттрактора [1]. Исходные задачи сводятся к задачам проектирования на инвариантные локально устойчивые и неустойчивые многобразия в окрестности неподвижной точки либо траектории седлового типа. Численные алгоритмы строятся на основе классических результатов теории инвариантных многообразий, полученных в общей теории динамических систем частично гиперболического типа. Алгоритмы формально обоснованы для некоторого класса полудинамических систем, и применимы, в том числе, для начально – краевых задач для нестационарных уравнений в частных производных.

Приводятся результаты численных рассчетов для уравнений типа мелкой воды.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00415-а, 08-05-00738-а.

Литература

1. Корнев А.А. О методе типа "преобразование графика"для численного построения инвариантных многообразий // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова. 2007. Т. 256, С. 237-251.
2. Cizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Anal. Math. Modelling. 2003. V.18. No. 5. P.363-376.
3. Kornev A.A. A problem asymptotic stabilization by the right-hand side // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. V. 23. №. 4. P.407-422.

О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Кризский В.Н. (СГПА, г. Стерлитамак)
Krizsky@rambler.ru

Ряд важных физических процессов в анизотропных средах характеризуются полями, описываемыми краевыми или начально-краевыми задачами для уравнений математической физики.

Осуществим разбиение исследуемой области на кусочно- анизотропные подобласти с постоянными симметричными тензорами физических свойств среды и достаточно гладкими границами. Количество подобластей будет определяться задаваемой точностью аппроксимации функций.

Ранее в работе [1] способ использован для вычисления полей в кусочно-однородных средах, где построен рекуррентный алгоритм поэтапного уменьшения числа подобластей, основанный на возможности пересчета функции Грина одной среды в функцию Грина другой - более простой среды. В данной работе описывается применимость этого алгоритма к задачам эллиптического типа с постоянными симметричными тензорами анизотропии в подобластях.

Начально-граничные задачи для уравнений параболического и гиперболического типа в кусочно-анизотропных средах с помощью интегрального преобразования Лапласа сводятся к семейству краевых задач эллиптического типа.

Показывается возможность использования алгоритма и в задачах смешанного типа, когда в одной группе подобластей поле описывается уравнениями эллиптического типа, в другой группе - параболического, а в третьей - уравнениями гиперболического типа.

Решения обратных задач поиска границ кусочно-анизотропных сред ищутся в классе сплайн-функций как экстремали регуляризирующего функционала А.Н. Тихонова.

Алгоритмы могут быть распараллелены и реализованы на многопроцессорных вычислительных комплексах и кластерах. Их универсальность может служить основой построения единого комплекса программ и его использования при комплексировании методов исследований в сложных кусочно-анизотропных средах.

Литература

1. Кризский В.Н. Метод решения начально-граничных задач математической физики в кусочно-однородных средах// Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Уфа: Гилем, 2008. Т.3. С.219-225.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА СИНАПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ В ПЕРВИЧНОМ НЕЙРОНЕ ВЕСТИБУЛЯРНЫХ ОРГАНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Куликовская Н.В., Курилов В.И. (Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова)

nvkpostb@mail.ru

На основе экспериментальных данных, опубликованных в современных источниках, нами предпринята попытка создать математическое описание функционирования ленточной синаптической передачи между волосковой клеткой (HC) и первичным вестибулярным нейроном. Входом математической модели будет являться рецепторный потенциал V_{HC}, а её выходом – величина проводимости рецепторных каналов нейрона. Мы предположили, что модель можно разбить на три части: 1)описание процессов эндоцитоза и экзоцитоза везикул в пресинаптическом окончании волосковой клетки в форме марковской цепи с тремя состояниями, соответствующие вероятности нахождения везикул в каждом из трёх состояний:p_1-готовы к слиянию,p_2-слившиеся с мембраной НС, p_3-в процессе эндоцитоза; 2) описание изменения концентрации глютамата (GLU) в синаптической щели; 3) описание трансформации $AMPA$ и $NMDA$ рецепторов GLU включенных в постсинаптическую мембрану нейрона с помощью кинетической схемы.

Проведённые нами расчёты показали, что с помощью предложенной модели воспроизводятся такие особенности синаптической передачи в первичных афферентах вестибулярных органов, как появление андершутов и овершутов в частоте спайков при ступенчатом изменении V_{HC}, влияние десенсибилизации рецепторных каналов, уменьшение амплитуды миниатюрных составляющих постсинаптического тока при увеличении частоты выхода квантов, эффект насыщения средней величины синаптического тока при повышении концентрации GLU в щели.

Литература

1.Куликовская Н.В., Курилов В.И., Давыдкин С. “Математическая модель преобразования информации в синапсах ленточного типа”. Журнал "Фундаментальная и прикладная математика"том 11(2005) стр. 205-221.

2. Jonas P.,Major G., AND Sakmann B. “Quantal componenets of unitary GLUs at the mossy fibre synapse on CA3 pyramidal cells of rat hippocampus”. J. Physiol. Lond. 472: 615-663, 1993.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ДЛЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ В ВИХРЕВОЙ И ФАЗОВОЙ ФОРМАХ

Лебедев В. И., Ковалишин А. А., Ложников Д. А. Москва (РНЦ «Курчатовский институт»)

В данной работе исследуются вопросы разработки математических моделей сложных гидродинамических течений несжимаемой жидкости, в которых возникают гидродинамические неустойчивости, переходящие в развитое турбулентное течение.

Большинство течений, встречающихся в природе и технике, являются турбулент-ными, поэтому умение правильно моделировать такие течения чрезвычайно важно для понимания процессов, которые исследуются во многих областях науки. Процессы, возникающие в турбулентных течениях чрезвычайно сложны, и механизмы возникновения и развития турбулентности до конца не познаны.

Сложность задачи моделирования турбулентного течения заключается в том, что для того, чтобы получить решение с приемлемой точностью, требуется решать задачи очень большой размерности. Прямое численное моделирование большинства течений, характеризующихся большими числами Рейнольдса, интересных с практической точки зрения, невозможно даже на современных супер-ЭВМ. Поэтому особенную важность приобретает создание устойчивых численных методов, позволяющих проводить расчеты турбулентных течений с приемлемой для практических целей точностью.

В данной работе рассмотрены результаты численных расчетов турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости в плоских каналах с препятствиями при больших числах Рейнольдса. Расчеты проведены для сеточных аппроксимаций по пространству уравнений гидродинамики в вихревой форме Громеки-Лэмба и предложенной авторами фазовой форме. Для интегрирования по времени был использован явный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности с максимальным отрезком устойчивости вдоль мнимой оси.

Работа выполнена по программе РАН "Теоретические проблемы современной математики" (проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики") и при поддержке РФФИ (грант 08-01-00393).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Левченко О.Ю. (Кубанский государственный университет)
Hary70@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель инфекционного заболевания, представленная в виде системы интегро - дифференциальных уравнений, описывающей динамику образования антигенов $V(t)$, антителообразующих клеток (популяцию зрелых и незрелых плазматических клеток и В-лимфоцитов) $C(t)$ и антител $F(t)$, а также степень поражения органа-мишени $u(t)$.

В модели учитывается, что незрелые плазматические клетки, находясь в каскадном процессе на некотором этапе деления и развития, уже производят антитела[1]. А также предполагается, что после нейтрализации антигена антителами токсины данного антигена (продукты его жизнедеятельности и распада) остаются в организме ещё некоторое время (промежуток времени τ_m), оказывая патогенное действие. Тогда модель можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma \cdot F(t)) \cdot V(t) \\ \frac{dC}{dt} = \int\limits_{t-\tau}^{t} \alpha g(t-s)\, \xi(u(t))\, V(s) F(s) ds - \mu_c (C(t) - C^*) \\ \frac{dF}{dt} = \rho \cdot C(t) - (\mu_f + \eta \cdot \gamma \cdot V(t)) \cdot F(t) \\ \frac{du}{dt} = \int\limits_{t-\tau_m}^{t} f(t-s) V(s) ds - \mu_m (e^u - 1) \end{cases} \tag{1}$$

Все параметры системы считаются постоянными и положительными; τ - время, в течении которого осуществляется формирование каскада плазматических клеток. Функции $g(t)$, $\xi(u(t))$ являются непрерывными и неотрицательными. К системе уравнений присоединяем начальные данные на отрезке $[t_0 - \max(\tau; \tau_m); t_0]$:

$$V(t) = \phi_1(t); \quad C(t) = \phi_2(t); \quad F(t) = \phi_3(t); \quad u(t) = \phi_4(t), \tag{2}$$

где $\phi_1(t) \geq 0$, $\phi_2(t) \geq C^* > 0$, $\phi_3(t) \geq F^* > 0$, $\phi_4(t) \geq 0$ - известные непрерывные функции.

Система имеет два стационарных решений. Изучается вопрос об асимптотической устойчивости данных решений.

Литература

1. Ярилин А.А. Основы иммунологии / М.: Медицина, 1999, 606с.

2. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / М.: Наука, 1991, 304с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИЗИСА-2008

Маслов В.П., Поспелов И.Г. (Москва)
v.p.maslov@mail.ru

Предлагается математическая модель, объясняющая, как финансовые пирамиды и «пузыри» приводят к кризису в реальной экономике. Накапливающиеся в экономике долги могут подсчитываться по той же схеме, что и валовый внутренний продукт. По аналогии со скоростью обращения денег вводится понятие скорости долга; объем долга, накапливаемый индивидом в течение года, равен произведению этой скорости на величину долга, создаваемую в единичной транзакции. В предположении, что скорость долга описывается формулой Баумоля–Тобина, доказано, что распределение совокупных объемов долгов по скоростям подчиняется бозе–эйнштейновскому закону. Кризис в этой модели интерпретируется как образование бозе-конденсата — выпадение большой массы долга на нижний уровень, отвечающий ипотечному кредитованию. Показано, что зависимость количества должников от объема долга описывается распределением Парето. Демонстрируется связь между рассматриваемой моделью и законом возрастания энтропии, который в контексте финансового рынка приобретает форму закона возрастания колмогоровской сложности. При этом кризис может интерпретироваться как фазовый переход, возникающий при нарушении этого закона.

Литература

1. В. П. Маслов. Квантовая экономика. М., Наука, 2006.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ: МОЛЕКУЛЯРНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ МОБИЛЬНОГО КОМПОНЕНТА ГЕНОМА У ДРОЗОФИЛЫ

Нефедова Л.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова), Ким А.И. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Плодовая мушка дрозофила является модельным объектом генетики многоклеточных организмов. Геном дрозофилы, как и любого организма, включает в себя не только гены, но и большое количество мобильных элементов. Эти элементы способны перемещаться и вызывать разнообразные геномные перестройки. Особый интерес представляют мобильные элементы, сходные по строению с ретровирусами, - ретротранспозоны.

Компьютерные методы являются основным инструментом для проведения сравнительно-геномного анализа и исследования процессов молекулярной эволюции. Компьютерный анализ последовательностей ретротранспозонов позволил выявить общее происхождение ретротранспозонов и ретровирусов и проследить пути эволюции ретровирусов в геноме дрозофилы [1, 2]. Проведен систематический анализ некодирующего компонента геномов 12 видов дрозофилы и геномов 10 видов других членистоногих. Разработана полная классификация ретротранспозонов дрозофилы, и проведен их эволюционный анализ. Выявлены случаи межгеномного переноса мобильных элементов. Обнаружены гомологи генов ретротранспозонов и установлено время их появления у дрозофилы. Показано, что ген-гомолог gag (CG4680) отличается высоко консервативной структурой у разных видов дрозофилы, что свидетельствует о том, что он находится под действием стабилизирующего отбора и имеет важную геномную функцию [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 08-04-00693.

Литература

1. Л.Н. Нефедова , А.И. Ким "Эволюция от ретротранспозонов к ретровирусам: источник и происхождение гена env ", Журнал общей биологии, 68, No.6, 459-467 (2007).
2. Л.Н. Нефедова , А.И. Ким "Эволюция эррантивирусов Drosophila melanogaster. Стратегия 2: от ретровирусов к ретротранспозонам", Генетика, 43, No.10, 1388-1395 (2007).
3. Л.Н. Нефедова , А.И. Ким "Молекулярная эволюция мобильных элементов группы gypsy: гомолог гена gag у Drosophila", Генетика, 45, No.1, 30-37 (2009).

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК В РИДАХ ПРИ ПИРОСЕКВЕНИРОВАНИИ

Николаев В.К., Галатенко В.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
vvgalatenko@yahoo.com

Пиросеквенирование [1] и, в частности, технология 454 [2], являются сравнительно новыми технологиями секвенирования. Достоинства этих технологий – высокая скорость и низкая стоимость [3], один из недостатков — сравнительно большое число ошибок в ридах (до 1%). Это обстоятельство делает сборку генома из ридов существенно более тяжелой задачей по сравнению со сборкой генома из "идеальных ридов". Оказывается, большинство ошибок в ридах может быть устранено за счет автоматической коррекции, которую можно проводить до сборки генома из ридов.

Для коррекции ридов, полученных с использованием пиросеквенирования, был разработан алгоритм, учитывающий технологические особенности пиросеквенирования и использующий как уже применявшиеся для аналогичных целей идеи (например, [4]), так и идеи других областей, в первую очередь, теории обработки сигналов. Исправление ошибок осуществляется итеративно. На каждой итерации с помощью одного фильтра алгоритм локализует ошибки, а затем с помощью другого ищет наиболее вероятный вариант исправления.

Апробация на реальных данных, включая общедоступные данные Национального центра биотехнологической информации (NCBI), показала высокую эффективность разработанного алгоритма: его применение снижает число ошибок в ридах на два порядка — в 30–200 раз.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-07-89143-а и 09-07-00509-а).

Литература

1. Ronaghi M. Pyrosequencing sheds light on DNA sequencing // Genome Res., 2001, 11. P. 3–11.

2. Margulies M. et al. Genome sequencing in microfabricated high-density picolitre reactors // Nature, 2005, 437. P. 376–380.

3. Wickey,T. et al. (2006) 454 sequencing put to the test using the complex genome of barley // BMC Genomics. 7:275.

4. Chaisson M., Pevzner P., Tang H. Fragment assembly with short reads // Bioinformatics, 20. P. 2067–2074.

ЭВОЛЮЦИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Никольский Д.Н. (Орловский государственный университет)
nikolskydn@mail.ru

Получена основная система интегральных и дифференциальных уравнений, описывающая трехмерную и двумерную эволюцию границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в грунте сложной геологической структуры в случае произвольного расположения источников и стоков течения в постановке Лейбензона-Маскета. На примере плоской задачи об эволюции границы раздела различных жидкостей указан способ доказательства разрешимости основной системы [1].

В случае небольших смещений границы раздела различных жидкостей получены новые дискретные схемы для основной системы уравнений для двумерной эволюции методом дискретных вихревых пар [2] и для трехмерной эволюции методом замкнутых вихревых рамок [3]. В случае смещений границы раздела различных жидкостей на расстояния сопоставимые с ее характерным размером получена новая дискретная схема на базе одной системы точек со сглаженными ядрами в сингулярных интегралах [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (проект МК-491.2008.1).

Литература

1. Никольский Д.Н., Сетуха А.В. О локальной разрешимости уравнений эволюции линии раздела двух фильтрующихся жидкостей в классе аналитических функций// Дифференциальные уравнения, 2008. Т.44. № 9. С.1193-1204.

2. Никольский Д.Н. К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей// Вычислительные технологии. Т.13, № 4. Институт вычислительных технологий Сиб. отд. РАН, 2008. С.89-94.

3. Никольский Д.Н. Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции поверхности раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородном грунте// Ж. Вычислительной математики и математической физики, 2007. Т.47. № 8. С.1401-1414.

4. Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Исследование дискретных схем для задачи об эволюции границы раздела жидкостей в постановке Лейбензона// Сб. Межд. школы-семинара «МДОЗМФ-2008». Выпуск 6. Орел: «Картуш», 2008. С.73-77.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЖИДКОСТИ РИВЛИНА-ЭРИКСЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Никонова М.Г. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН), Александрович А.И. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)
mmeddle@list.ru, aialex@ccas.ru

Рассматривается система четырех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех компонент поля скоростей V_1, V_2, V_3 и гидростатического давления P, описывающая уравнения движения и условия несжимаемости. Уравнения движения в силу зависимости тензора напряжений от тензоров Ривлина-Эриксена получают форму уравнений в частных производных третьего порядка. Вязкость жидкости Ривлина-Эриксена второго порядка описывается тремя константами. Течение жидкости рассматривается в односвязной области, граница которой представляет гиперболоид вращения, ограниченный двумя кругами, перпендикулярными оси вращения. В качестве граничных условий задается поле скоростей на части границы области, а другая часть границы полагается неподвижной. Нелинейность уравнений определяется конвективными составляющими вектора ускорений.

Для решения поставленной краевой задачи производится комплесификация уравнений введением двух комплекснозначных функций скоростей $W_1 = V_1 + iV_2, W_2 = V_3 + iV_4$ и комплекснозначного гидростатического давления P. Комплексные переменные вводятся через действительные переменные $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$. Так как рассматривается трехмерная действительная система уравнений, то полученная комплексифицированная система уравнений движения дополняется условиями независимости W_1, W_2 и P от x_4. Зависимость между голоморфными функциями, получаемая из комплексифицированных уравнений рассматриваемого течения, дополняется условиями $\|ImP\|_D = 0$; $\|W_n - \bar{W}_n^s\|_D = 0; n = 1, 2$ и минимизацией невязок граничных условий.

Для упрощения задачи, предполагается, что область двух комплексных переменных $(z_1, z_2) \in D \subset C^2$ является областью, оболочка голоморфности которой является бикругом, а сечение этой области - гиперплоскостью $x_4 = 0$ совпадает с рассматриваемой трехмерной областью течения жидкости.

Литература

1. К.Трусделл. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.-М.:Мир,1975.

2. А.И.Лурье. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980.

3. Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ, часть II, Функции нескольких переменных.- М.: Наука, 1976.

О КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ КОДОВ АМИНОКИСЛОТ

Одинцова Н.Ю., Попов В.Ю.(Уральский Гос. университет)
odincova_ natalya@mail.ru, vladimir.popov@usu.ru

Известно что любой тройке нуклеотидов (A, T, C, G), кроме трёх выделенных, соответствует одна из двадцати аминокислот. Таким образом одной аминокислоте может ставиться в соответствие более одной тройки. Существуют таблицы соответствия аминокислот и кодирующих их троек нуклеотидов. При построении белка данные тройки равноправны, однако, для различных организмов более характерны те или иные тройки. Причём по участкам ДНК с нехарактерными тройками белки строятся значительно реже. Это создаёт проблемы при создании белковых вакцин (когда берётся участок гена другого организма с полезными свойствами и помещается в ДНК клетки человека). Возникает необходимость замены не характерных для человека троек на эквивалентные.

Достаточно часто при построении белка по ДНК транспортная РНК считывает только два нуклеотида из трёх. Таким образом реально аминокислота может кодироваться двойкой нуклеотидов вместо тройки.

При помощи ДНК-наномеханических роботов в молекуле ДНК можно менять код аминокислоты на другой её код. При этом соответствующее преобразование можно записывать в виде равенств: $U = V$, где U, V слова из двух или трёх букв кодирующих одну и туже аминокислоту. Множество всех таких преобразований может быть представлено свободной полугруппой над четырёх буквенным алфавитом $\{A, C, T, G\}$ с указанными выше равенствами в качестве определяющих тождеств. Эти полугруппы принято называть полугруппами кодов аминокислот.

В зависимости от количества тождеств содержащих двойки такая полугруппа может быть конечной или бесконечной. Очевидно, если нет тождеств содержащих двойки, то полугруппа кодов аминокислот бесконечна. С другой стороны полугруппа содержащая все возможные определяющие тождества для двоек является конечной.

Для конечных полугрупп кодов аминокислот рассматривается задача кратчайшего перехода от последовательности с нехарактерными для человека тройками к эквивалентной в силу определяющих тождеств последовательности с характерными тройками. Следовательно необходимо оценить диаметр этих полугрупп.

Нами получено описание конечных полугрупп кодов аминокислот, а так же оценки их диаметров.

СОВМЕЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ СРЕЗОВ МОЗГА С ПОМОЩЬЮ ЭЛАСТИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Осокин А.А., Ветров Д.П., Кропотов Д.А., Конушин А.С., Анохин К.В.
aosokin@hotmail.ru

Задача совмещения двух изображений мозга является одной из важных задач вычислительной нейроанатомии. Под совмещением понимается такое преобразование ("деформация") мозга, что внутренние анатомический структуры первого изображения переходят в соответствующим внутренние анатомические структуры второго изображения. Конечная цель работы — научиться вписывать изображения в атлас мозга, в котором каждой точке среза поставлена в соответствие анатомическая структура. Актуальность этой задачи вызвана необходимостью определения в каких анатомических структурах мозга происходит активация тех или иных генов.

Для сегментации изображений используется метод [1], основанный на алгоритме GraphCut, позволяющий учитывать априорные знания о форме мозга.

Для поиска нелинейной деформации первого изображения во второе используется метод основанный на разложении в базис по тригонометрическим функциям [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00405).

Литература

1.Pawan Kumar, M., Torr, P., Zisserman, OBJ CUT // CVPR 2005 (2005);
2. J. Ashburner, K. Friston, W. Penny, Human brain function.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ИСХОДА ОПЕРАЦИИ ДЕФИБРИЛЛЯЦИИ У БОЛЬНЫХ МЕРЦАТЕЛЬНОЙ АРИТМИЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОГОДНЫХ УСЛОВИЙ В МОСКВЕ

Переходцева Э.В., Кириллова Н.И. (ГУ Гидрометцентр России)
perekhod@mecom.ru

Представлены результаты исследований влияния погодных условий в Москве на исход операции дефибрилляции предсердий у больных мерцательной аритмией. Работа была выполнена по инициативе и в содружестве с врачами клиники I Московского Медицинского Института им. И.М. Сеченова (ныне Медицинской Академии им. И.М. Сеченова) и сотрудниками группы И.М. Гельфанда межфакультетской лаборатории МГУ им. Ломоносова. Проблема состояла в том, что у некоторой части больных, имевших одинаковое состояние здоровья и проходивших одну и ту же подготовительную терапию перед операцией дефибрилляции предсердий (электроимпульсной терапией по восстановлению сердечного ритма), еще в клинике был отмечен срыв сердечного ритма (рецидив). Однако у более значительной доли больных восстановленный после такой операции сердечный ритм сохранялся от полугода до нескольких лет. По просьбе врачей-кардиологов лаборатория Гидрометцентра России провела анализ состояния погоды в день операции и в день накануне с целью выявить неблагоприятные погодные условия для операции дефибрилляции. С целью проведения строгого анализа неблагоприятных, "плохих"для больных мерцательной аритмией, погодных условий был тщательно отобран для статистического анализа архив дат проведения неудачных операций (выборка наличия "неблагоприятных"явлений). Выборкой отсутствия являлась выборка дат операций у пациентов, удерживавших нормальный сердечный ритм достаточно долго (более полугода). Методами статистической классификации из множества более 20 потенциальных признаков (параметров атмосферы) была отобрана группа наиболее информативных по расстоянию Махаланобиса признаков, построена в зависимости от их значений дискриминантная функция F(X) разделения двух классов явлений: векторов признаков "неблагоприятных"и "благоприятных"метеорологических ситуаций X. Проведенные на независимой выборке испытания функции F(X) оказались достаточно успешными: ошибка "пропуска цели"составила всего 15%, ошибка "ложной тревоги 26%.

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ОПЕРАТОРЫ НЕТЕРА

Плещинский Н.Б. (Казанский государственый университет)
pnb@ksu.ru

Линейные пространства X и X' называются *двойственными* ([1], гл. 8), если на них определен некоторый билинейный функционал $< x, x' >$. Построена теория операторов Нетера в двойственных пространствах без норм. Возможные топологические структуры двойственных пространств не использованы.

Если $M \subset X$, то $M^{\perp} = \{x' \in X' \mid \; < x, x' >= 0 \;\; \forall x \in M\}$. Если $M' \subset X'$, то ${}^{\perp}M' = \{x \in X \mid \; < x, x' >= 0 \;\; \forall x' \in M'\}$. Множество M назовем *замкнутым*, если ${}^{\perp}(M^{\perp}) = M$.

Оператор A назовем *оператором Нетера*, если множество $R(A)$ замкнуто и множества $N(A)$ и ${}^{\perp}R(A)$ — конечномерные.

Доказаны аналоги утверждений классической теории нетеровых операторов в нормированных пространствах (см., напр., [2]).

Оператор $K : X \to Y'$ называется *конечномерным*, если найдутся такие линейно независимые элементы $x'_1, \dots, x'_n$ и $y'_1, \dots, y'_n$, что $K\ :\ x \mapsto < x, x'_1 > y'_1 + \dots + < x, x'_n > y'_n$.

Если K — конечномерный оператор, то $I - K$ — *оператор Фредгольма* ($\dim N(A) = \dim^{\perp} R(A)$. Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда $A = B - K$, где B — обратимый оператор, а K — конечномерный оператор (*теорема Никольского*).

Если $A : X \to Y'$ — оператор Нетера, то найдется такой оператор Нетера $U : Y' \to X$, что $I - AU$ и $I - UA$ — конечномерные *проекторы*. С другой стороны, пусть $A : X \to Y'$ и $U : Y' \to X$ — линейные операторы. Если $I - AU$ и $I - UA$ — конечномерные операторы, то A и U — операторы Нетера (*теорема Аткинсона*).

Каждый оператор Нетера можно представить в виде суммы *характеристического* оператора ($\dim N(A) = 0$ или $\dim^{\perp} R(A) = 0$) и конечномерного оператора. Линейный оператор нетеров тогда и только тогда, когда он имеет *двусторонний регуляризатор*.

Операторы $A\ :\ X \to Y'$ и $A'\ :\ Y \to X'$ называются *двойственными*, если $< x, A'y > = < y, Ax >$ $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$. Если нетеров оператор имеет двойственный, то он тоже нетеров.

Литература

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ: теория и приложения. – М.: Мир, 1969.
2. Рогожин В.С. Теория операторов Нетера. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1973.

РАЗНОСТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ИНТЕГРАЛА КОШИ

Рябенький В.С. (г. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
ryab@keldysh.ru

Около 170 лет назад Коши ввел формулу

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{v_\Gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \notin \Gamma,$$

называемую ныне интегралом типа Коши, которую можно интерпретировать как потенциал для системы Коши-Римана, связывающей вещественную и мнимую части аналитической функции. Плотность $v_\Gamma(\xi)$ этого потенциала задается на произвольном замкнутом контуре Γ на комплексной плоскости. Оснащение системы Коши-Римана потенциалом в форме интеграла типа Коши дало возможность осуществлять редукцию задач, поставленных для системы Коши-Римана в какой-либо области, к уравнениям (интегральным) относительно плотности $v_\Gamma(\xi)$ на границе Γ этой области; дало возможность переносить граничные условия, а также по сумме $u_{in}(z) + u_{ex}(z)\ |_\Gamma$ аналитических соответственно внутри и вне контура Γ функций $u_{in}(z)$ находить каждое слагаемое u_{in} и $(z)\ |_\Gamma\ u_{ex}(z)\ |_\Gamma$

Мы рассматриваем вместо системы Коши-Римана произвольную имеющую одно и только одно решение при произвольной правой части систему линейных разностных уравнений на произвольной многомерной нерегулярной сетке и оснащаем эту систему соответствующим разностным потенциалом, который автор назвал разностным потенциалом типа интеграла Коши. Это дало новые возможности при изучении и вычислении решений рассматриваемой системы разностных уравнений, аналогичные тем, которые дало для системы Коши-Римана оснащение этой системы классическим интегралом типа Коши.

Доклад должен дать представление о методе разностных потенциалов и основных уже реализованных его приложениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00099

Литература

1. В.С.Рябенький. Метод разностных потенциалов и его приложения, Физматлит, 2002.
2. В.С. Рябенький. Введение в вычислительную математику, 3-е издание, гл.13. Физматлит. 2008

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АКТИВНОСТИ НЕЙРОНОВ НА ПОВЕРХНОСТИ МОЗГА МЫШИ

Сенюкова О. В., Конушин А.С., Ветров Д.П., Анохин К.В.
olsen222@yandex.ru

Создание нейробилогических атласов структур мозга мыши [1] дало исследователям мощный инструмент для изучения механизмов его работы. Наборы изображений срезов мозга, полученные, например, с помощью гистологической окраски или с помощью оптической томографии, совмещаются с атласом, после чего можно определить, в каких структурах наблюдается активность нейронов, а также сравнивать распределение активности между разными наборами.

Однако, визуальный анализ таких данных затруднен их объемной структурой, т.к. активность нейронов может быть произвольно распределена по всему трехмерному объему мозга. Одним из вариантов визуализации, более наглядном для человека, является интегральная проекция активности нейронов с заданной глубины мозга на поверхность [2]. Разработка и реализация системы визуализации активности нейронов на поверхностях выбранной структуры мозга является одной из основных задач, которую предполагается решить в рамках совместного проекта между НИИ НФ РАМН и ВМК МГУ.

Алгоритм построения интегральных проекций состоит из нескольких этапов. На первом вычисляется трехмерная поверхность выбранной структуры мозга по набору контуров структуры на срезах в виде трехмерной сеточной модели. На втором с помощью математической морфологии выделяется область срезов на заданной глубине, активность нейронов которой будет проецироваться. На третьем этапе вычисляется каждая точка срезов, на которой активности выше заданного порога, проецируется на поверхность. Получившиеся проекции затем сглаживаются гауссовским фильтром.

Литература

1. Hjournevik T. et. al., (2007) Three-dimensional atlas system for mouse and rat brain imaging data. Frontiers in Neuroinformatics,V.1., pp. 30-41.

2. Holschneider D.P. et. al, (2008) Flattened cortical maps of cerebral function in the rat: A region-of-interest approach to data sampling, analysis and display Neuroscience Letters, v.434, pp.179-184

СИСТЕМА ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ ЗА ПОВЕДЕНИЕМ ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ

Синдеев М.С., Воронин П.А., Конушин А.С., Ветров Д.П., Анохин К.В.

ktosh@graphics.cs.msu.ru

Задача повышения производительности методов поведенческого фенотипирования (скрининга) привела к созданию систем видеонаблюдения за поведением лабораторных животных [1]. В настоящее время для анализа поведения используются только простейшие характеристики, получаемые от систем видеонаблюдения, такие как траектория движения центра масс животного и площадь области изображения животного. Для более детального анализа, например, для распознавания поведенческих актов, необходимо определять и траектории движения характеристических точек животного, таких как нос и точка крепления хвоста.

Авторами предложено использовать метод активных контуров [2] для определения характеристических точек наблюдаемого животного по связанной компоненте, полученной с помощью метода вычитания фона [1]. Для построения статистической модели контура, необходимой для применения метода активных контуров, используется принцип минимальной длины описания [2], что существенно сокращает время разметки тренировочных данных.

В дальнейшем планируется усовершенствовать предложенный метод на случай видеонаблюдения за социальным поведением лабораторных животных, когда животные могут соприкасаться, что приводит к объединению отдельных связанных компонент в одну. Также будет повышена устойчивость метода к изменениям в наблюдаемой сцене, например, если поверхность клетки покрыта опилками, которые животное может перемещать по клетке.

Литература

1. Noldus, L.P., Spink, A.J., Tegelenbosch. R.A. (2001) EthoVision: a versatile video tracking system for automation of behavioral experiments. Behavior Research Methods, Instruments and Computers, 33, pp. 398-414.

2. Davies, R., Twining, C., Cootes, T., and Taylor, C. (2002). A minimum description length approach to statistical shape modelling. IEEE Transactions on Medical Imaging, 21, pp. 525-537.

ДВОЙНЫЕ УТКИ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ МОРСКИХ ФАГОВ

Соболев В.А. (Самарский государственный университет), Конкина А.А. (Самарский государственный областной университет Наяновой)

hsablem@yahoo.com

Системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных, именуемые сингулярно возмущенными [1], широко используются при моделировании систем и процессов разной природы [1, 2]. В последнее время значительное внимание математиков и прикладников привлекают траектории сингулярно возмущенных дифференциальных систем, обладающие свойством смены устойчивости, - так называемые *траектории-утки* [2]. В данной работе вводятся новые математические объекты — *двойные траектории-утки*, обладающие свойством дважды менять устойчивость, и исследуются их свойства.

Использование двойных уток при анализе обобщенной модели Лотки–Вольтерра, описывающей динамику взаимодействия популяций морских фагов и бактерий [3–5], позволило объяснить *эффект мнимого исчезновения* [5].

Авторы благодарны профессорам M. Emmerson, A. Pokrovskii, M. Prentice и Е. Щепакиной за полезные обсуждения и ценные советы. Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00169а.

Литература

1. Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

2. Singular Perturbations and Hysteresis, Edited by M. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, and V. Sobolev, Philadelphia: SIAM, 2005.

3. Phages: Their Role in Bacterial Pathogenesis and Biotechnology. Editors M.K. Waldor, D.I. Friedman, and S.L. Adhya, Washington, D.C.: ASM Press, 2005.

4. K.H. Hoffmann, B. Rodriguez-Brito, M. Breitbart, D. Bangor, F. Angly, B. Felts, J.Nulton, F. Rohwer, and P. Salamon. Power law rank-abundance relationships in marine phage populations, FEMS Microbiology Letters, 273, 224-228, 2007.

5. C. Gavin, A. Pokrovskii, M. Prentice, and V. Sobolev. Dynamics of a Lotka-Volterra type model with applications to marine phage population dynamics J. Phys. Conf. Series, 55, 80–93, 2006.

О ЧИСЛЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ НОВОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ РЕШЕНИЯ 1-ОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ СТОКСА

Пальцев Б.В., Соловьев М.Б. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)

paltsev@ccas.ru, solmb@mail.ru

На основе билинейных конечных элементов построены численные реализации достаточно быстросходящегося итерационного метода с расщеплением граничных условий решения первой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса, получившего обоснование на дифференциальном уровне (см. [1]) для случая полосы при условии периодичности вдоль нее. На итерациях метод приводит к решению гораздо более простых задач: задаче Неймана для уравнения Пуассона при каждом значении временной переменной как параметра, затем к специальной векторной параболической начально-краевой задаче для скорости, после чего итерация завершается простой формулой пересчета на границе.

Приведены результаты исследования скорости сходимости и порядка точности построенного численного итерационного метода в случае полосы при условии периодичности вдоль нее, а также в случае зазора между двумя соосными цилиндрами при условии периодичности вдоль оси и наличии осевой симметрии. Численными экспериментами установлено, что получаемые с помощью построенного метода численные решения как для скорости, так и для давления обладают вторым порядком точности в норме максимума модуля как по пространственным переменным, так и по времени. Как и в рассматривавшемся ранее стационарном случае, возникают аналогичные проблемы повышения на высоких гармониках скоростей сходимости до таковых для дифференциального случая.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00661).

Литература

1. Пальцев Б.В. Об одном итерационном методе с расщеплением граничных условий решения 1-ой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск. 2008. С. 540.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В.П. Танана, Н.М. Япарова (Южно-Уральский государственный университет)

tvp@math.susu.ac.ru, ddjy@math.susu.ac.ru

При численном решении прикладных задач возникает необходимость в замене бесконечномерного оператора конечномерным. Накапливающиеся при этом погрешности оказывают существенное влияние на точность полученного решения.

Пусть $A : H \to H$ - линейный, положительно определенный, вполне непрерывный оператор, где H - сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f; \qquad u, f \in H.$$

Известно, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in M_r$, где $M_r = B\overline{S}_r$, $\overline{S}_r = \{v : v \in H, \ \|v\| \leq r\}$, $B = g(A)$, а $g(\sigma)$ - строго возрастающая функция и $g(0) = 0$.

Регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha(A) : 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$ удовлетворяет условию $P_\alpha(A) = \Phi(A, \alpha)$, где $\Phi(\sigma, \alpha)$ - непрерывная по σ, неотрицательная функция, и $P_\alpha(A)Au \to u$ при $\alpha \to 0$.

Пусть $\overline{A} : H \to H$ — самосопряженный, линейный, неотрицательный, конечномерный оператор, $\|A - \overline{A}\| \leq h$, а $f_\delta \in H$ и $\|f_\delta - f_0\| < \delta$, тогда элемент $\overline{u}_\delta^\alpha = \Phi(\overline{A}, \alpha) f_\delta$ называют конечномерной аппроксимацией регуляризованного решения.

Для оценки уклонения $\overline{u}_\delta^\alpha$ от u_0 используют функцию:

$$\Delta[h, \delta] = \sup_{u_0, f_\delta, \overline{A}} \left\{ \|P_\alpha(\overline{A}) f_\delta - u_0\| \ : \ \|\overline{A} - A\| \leq h, \ \|Au_0 - f_\delta\| \leq \delta \right\}$$

и модуль непрерывности обратного оператора в нуле, определяемый формулой $w(\tau, r) = \sup\{\|u\| : u \in M_r, \ \|Au\| \leq \tau\}$.

Конечномерная аппроксимация оптимальна по порядку на множестве M_r, если $\exists k$ такое, что $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ и $\forall h \in (0, h_0]$ имеет место неравенство $\Delta[h, \delta] \leq k\omega(\tau, r)$.

Найдены условия, устанавливающие зависимость погрешности конечномерной аппроксимации от параметра регуляризации и погрешности исходных данных, при выполнении которых будет справедливо соотношение

$$\Delta[h, \delta] \sim c\omega\big(r\|B\|h + \delta, r\big), \quad \text{при } \delta, \ h \to 0, \ c = const.$$

Работа поддержана грантом р_урал_а 07-01-96001.

СХЕМЫ МКЭ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р., Таюпов Ш.И. (Казанский государственный университет)
sham_tayupov@mail.ru

Работа посвящена построению схем метода конечных элементов высокого порядка точности для систем вырождающихся эллиптических уравнений. Известно, что решения вырождающихся задач имеют неограниченную производную в окрестности особой точки. По этой причине использование стандартных схем дискретизации для подобных задач является неэффективным. Так, в [1] для решения вырождающегося уравнения применяется специальная замена переменных, после чего в новых координатах используется обычная разностная схема. В [2] рассматривались схемы МКЭ со сгущающейся сеткой.

В данной работе метод решения основывается на мультипликативном выделении особенности, предложенном в [3]. Этот метод позволяет строить схемы МКЭ, оптимальные по порядку сходимости, не прибегая к сгущению сетки.

Во всех указанных работах рассматривались задачи с однородными граничными условиями. В настоящей статье исследуется уравнение с неоднородными краевыми условиями. Для того чтобы воспользоваться преимуществами мультипликативного выделения особенности неоднородная задача сводится к однородной с помощью специально построенной функции продолжения граничных значений в область. Доказывается, что предложенные схемы имеют оптимальный порядок сходимости на правых частях заданного класса гладкости. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-01-00674)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-01-00674)

Литература

1. Гусман Ю.А., Оганесян Л.А. Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем физ. - 1965. - Т.5, №2. - С. 351- 357.

2. Рукавишникова Е.И. О порядке сходимости метода конечных элементов для эллиптической краевой задачи с вырождением// Владивосток: ДВО АН СССР. - 1987. - С. 26 - 52.

3. Тимербаев М.Р. Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифф. уравнения. - 2000. - Т.36, №7. - С. 1086-1093.

СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Родина Л. И., Тонков Е. Л. (Ижевск)
rdl@uni.udm.ru, eltonkov@udm.ru

Рассматриваются управляемая система

$$\dot{x} = \int_U f(t, x, u)\eta_t(du) \tag{1}$$

и множество

$$\mathcal{M} \doteq \{(t, M(t)) \in \mathbb{R} \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)\},$$

где $U = U(t,x) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, функция $(t,x) \to U(t,x)$ полунепрерывна сверху, функция $f(t,x,u)$ непрерывна и локально липшицева по x, $M : \mathbb{R} \to \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа.

Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо статистически инвариантным* относительно системы (1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}$ найдётся допустимый процесс $(\varphi(t), \eta_t)$ такой, что $\varphi(t_0) = x_0$ и

$$\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, t_0+\vartheta] : (t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}\}}{\vartheta} = 1.$$

Теорема 1. *Пусть существуют непрерывные функции $V(t,x)$ и $w(t,z)$ переменных $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ и $(t,z) \in \mathbb{R}^2$ такие, что:*

1. Верхнее решение $z^*(t)$ задачи $\dot{z} = w(t,z)$, $z(t_0) = 0$, определено при всех $t \geqslant t_0$ и

$$\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, t_0+\vartheta] : z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1.$$

2. Функция $V(t,x)$ локально липшицева, $V(t,x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in \mathcal{M}$, $V(t,x) > 0$ при всех $(t,x) \notin \mathcal{M}$ и, кроме того, при всех $(t,x) \notin \mathcal{M}$ выполнено неравенство

$$\min_{u\in U(t,x)} V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant w(t, V(t,x)), \tag{1}$$

где $V^o(t,x;q)$ — производная Кларка по направлению вектора q.

Тогда множество $\mathcal{M}$ статистически слабо инвариантно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Литература

1. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 3 (в печати).

К ВОПРОСУ О ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В РАЗРЕЖЕННОМ МОЛЕКУЛЯРНОМ ГАЗЕ

Тюлькина Е.Ю. (Орловский государственный университет)
anel2702@yandex.ru

Рассматривается слой молекулярного газа между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами $R_1 < R_2$, на поверхности которых поддерживается постоянная температура $T_s^1 > T_s^2$. Перепад $\triangle T_s = T_s^1 - T_s^2$ считается достаточно малым, для того чтобы ограничиться линейным приближением. Для описания состояния газа примем уравнение Ван Чанга-Уленбека [1] с интегралом столкновений в форме Хансона-Морзе [2]. В линейном приближении функция распределения представима в виде $f_l = f_l^0(1 + \varphi_l)$, где φ_l- поправка к равновесной функции распределения, определяемая из линеаризованного уравнения $C_r \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \frac{C_\varphi^2}{r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial C_r} = \sum_{m=1}^{6} \psi_m A_m - \varphi_l$; Следуя [4], в первом приближении решение ищется в виде $\varphi_l = \sum_{i=1}^{4} (a_1^i + a_2^i C^2 + a_3^i \varepsilon_l + a_4^i C_r + a_5^i C_r C^2 + a_6^i C_r \varepsilon_l) H_i$. Коэффициенты a_j^i определяются из системы моментных уравнений, процесс составления которой описан в [3]. Значения обезразмеренного потока тепла, полученные в частности для азота, представлены в таблице.

	R_1/R_2					
R_1	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
0.1	0.81445	0.83042	0.83423	0.83762	0.84120	0.84335
1	0.46918	0.69130	0.73431	0.76378	0.79658	0.81717
10	0.07544	0.19098	0.28667	0.39671	0.53767	0.63730
100	0.00793	0.02240	0.03860	0.06660	0.13653	0.23877

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору д.ф.-м.н. Савкову С.А.

Литература

1. Wan Chang C.S., Uhlenbeck G.E., Boer J.// Studies in Statistical Mechanics. - Amsterdam: 1964.

2. Hanson F.B., Morse T.F.// Phys.Fluids. 1967. V.10. N.2. P. 345 - 355.
3. Савков С.А., Тюлькина Е.Ю.// ЖТФ. 2008. Т.78. В.7. С.16-20.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА

Федяев Ю.С. (Орловский государственный университет)
fedyaevys@gmail.com

В работе ставится для поля скоростей двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в кусочно-неоднородном слое грунта. Движение жидкости вызвано источниками и стоками течения, которые являются особыми точками поля скоростей. Они моделируют работу совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин. При этом считается, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Полагается, что границу раздела жидкостей и границу сопряжения слоев грунта в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. В этом случае исследование задачи сводится к решению системы интегральных и дифференциальных (интегро-дифференциальных уравнений) [1].

Предлагается численный алгоритм решения полученных уравнений на основе метода дискретных особенностей [2]. Исследована практическая сходимость численной схемы. В частных случаях произведено сопоставление полученных результатов с аналитическим решением. Исследованы конкретные задачи эволюции границы раздела жидкостей в слое грунта, проводимость которого моделируется степенной функцией координат.

Литература

1. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. — Орел.: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2006. — 508 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 520 с.

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

Чижонков Е.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
chizhonk@mech.math.msu.su

Электронные колебания могут иметь важные приложения (например, проблема плазменного резонанса), а также служить хорошей моделью при изучении кильватерных плазменных волн, возбуждаемых остросфокусированным лазерным импульсом [1].

Хорошо известно (см. [2]), что цилиндрические и сферические (в отличие от плоских!) колебания электронов в однородной плазме разрушаются со временем независимо от малости их амплитуды. В переменных Эйлера процесс численного моделирования колебаний фактически ограничен моментом появления внеосевого максимума электронной плотности. Вслед за этим в сильно нелинейном случае настолько резко ухудшаются свойства гладкости рассчитываемых функций, что измельчение параметров дискретизации не приводит к успеху, т.е. установить как происходит само разрушение практически невозможно даже ценой расходования огромных вычислительных ресурсов. В переменных Лагранжа окончание процесса колебаний происходит в момент пересечения траекторий частиц, расположенных в начальный момент времени сколь угодно близко. При этом гладкость траекторий слабо зависит от их амплитуды и не меняется со временем, что позволяет эффективно использовать численные и асимптотические методы.

В результате исследований установлен любопытный факт, что колебания, как правило, заканчиваются "опрокидыванием", т.е. обращением в бесконечность функции электронной плотности. Дополнительно для колебаний малой амплитуды получены и численно проверены асимптотические формулы: в переменных Эйлера — для момента времени возникновения внеосевого максимума плотности, в переменных Лагранжа — для момента времени пересечения траекторий. Предложенный подход может быть обобщен для моделирования релятивистских электронных колебаний.

Литература

1. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В. О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме. // Вычисл. методы и программ. 2008. **9**, N 1. с. 58-65.
2. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plazma. // Phys. Review. 1959. **113**, No.2. p. 383-387.

ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

Шугаев Ф.В., Терентьев Е.Н., Штеменко Л.С. (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)
shugaev@phys.msu.ru

Полная система уравнений Навье-Стокса и метод параболического уравнения использованы для моделирования турбулентности среды и распространения лазерного излучения в ней. Разработан метод компенсации искажений лазерного пятна, вызванных турбулентностью. Метод найдет применение для компенсации атмосферных искажений в современных телескопах по сигналам с оптимизированных сенсоров волнового фронта. Уравнения Навье-Стокса представляют собой параболическую систему, квазилинейную относительно старших производных. Задача Коши для линейной параболической системы рассмотрена Эйдельманом и Фридманом. Предлагаемый нами метод решения, использующий результаты этих авторов, состоит в сведении дифференциальных уравнений к системе интегральных уравнений с последующим использованием итераций. Прежде всего определяется приближенное решение (параметрикс). Затем строится фундаментальное решение системы. Если n-ая итерация известна, тогда нахождение (n+1)-ой итерации сводится к решению линейной системы. В качестве первой итерации берется решение линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса, представимое в аналитическом виде. Задача ставится в неограниченном пространстве. Решается задача Коши. Начальные значения для Фурье-образов неизвестных величин задаются степенными функциями, коэффициенты в которых - случайные величины с гауссовым законом распределения. Турбулентность моделируется путем усреднения решений уравнений Навье-Стокса по начальным данным. Распространение лазерного луча в турбулентной атмосфере можно описать с помощью метода параболического уравнения. Коэффициент преломления зависит от плотности в соответствии с формулой Гладстона-Дейла. Плотность берется как соответствующее решение уравнений Навье-Стокса. Таким образом, предложен метод решения уравнений Навье-Стокса, не использующий разностных схем. Выполнено моделирование распространения лазерного излучения в турбулентной среде. Задача компенсации оптических искажений, вносимых турбулентностью, решается следующим образом. Если известна функция, характеризующая искажения, то рассчитывается другая функция, компенсирующая эти искажения. Компенсации искажений реализуется с помощью деформируемых зеркал. Выполнено моделирование компенсации лазерного излучения, прошедшего через турбулентную среду.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Юрлова А.В. (Москва, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН)
aialex@ccas.ru

Предлагается метод построения приближенных решений краевых задач для уравнений Навье-Стокса, описывающих плоские стационарные течения нелинейно-вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций имеет нелинейный характер: $S_{ij} = (2\mu - A_2V_u^2)V_{ij}$, где S_{ij} - компоненты девиатора тензора напряжений, V_{ij} - компоненты тензора скоростей деформаций, V_u - интенсивность скоростей деформаций, A_2 - некоторая постоянная ("параметр нелинейности").

При сохранении тензорной линейности этой зависимости отношение интенсивности напряжений к интенсивности скоростей деформаций
предполагается не постоянным, а модифицированным с помощью слагаемого, имеющего вид квадрата интенсивности скоростей деформаций, умноженного на некоторую постоянную A_2.

Для решения краевых задач для уравнений, описывающих течения жидкостей такого вида, предлагается новый метод, в основе которого лежит запись исходных уравнений в комплексной форме и представление искомых комплекснозначных функций в виде специальных разложений по степеням комплексно сопряженной переменной с коэффициентами в виде некоторых голоморфных функций. Подстановка этих разложений в комплексифицированные уравнения приводит к системе зацепляющихся дифференциальных уравнений относительно этих функций, которая разрешается в виде рекуррентных соотношений. Выделяется набор "начальных"голоморфных функций, по которым с помощью полученных рекуррентных соотношений восстановостонавливаются все остальные голоморфные функции, входящие в представления искомых комплекснозначных функций. Чтобы найти эти "начальные"функции используются граничные условия.

Представлены результаты численных экспериментов по построению приближенных решений краевых задач в кольцеобразной области, ограниченной с внешней стороны эллипсом, и с внутренней стороны окружностью.

Литература

1. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
2. Б.В. Шабат. Введение в комплексный анализ, часть I.- М.: Наука, 1976.

НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ФИЗИКЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Ягола А.Г. (Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, физический факультет)
yagola@inverse.phys.msu.ru

В докладе будут изложены общие подходы к решению некорректно поставленных задач в физике и рассмотрены примеры некорректно поставленных задач в астрофизике, электронной микроскопии, колебательной спектроскопии, ядерной физике, акустике.

Автор благодарит РФФИ за финансовую поддержку (грант 08-01-00160).

Литература

1. А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. Численные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1990.
2. А.Н.Тихонов, А.С.Леонов, А.Г.Ягола. Нелинейные некорректные задачи. - М.: Наука, 1995.
3. А.В.Гончарский, А.М.Черепащук, А.Г.Ягола. Численные методы решения обратных задач астрофизики. - М.: Наука, 1978.
4. А.В.Гончарский, А.М.Черепащук, А.Г.Ягола. Некорректные задачи астрофизики. - М.: Наука, 1985.
5. И.В.Кочиков, Г.М.Курамшина. Ю.А.Пентин, А.Г.Ягола. Обратные задачи колебательной спектроскопии. - М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. К.Ю.Дорофеев, Э.И.Рау, Р.А.Сеннов, А.Г.Ягола. О возможности катодолюминисцентной микротомографии. - Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. N 2, 2002, с. 73-75.
7. N.N. Nikolaeva, M.N. Rychagov, A.G. Yagola. Error estimation in applied inverse problems. . In .5th International Conference on Inverse Problems in Engineering:Theory and Practice./ Ed. D. Lesnic, Vol. III, Chapter N 5, Leeds University Press, Leeds, UK, 2005, pp. 1-7.

РОБАСТНЫЙ И ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Яковенко Г. Н.
yakovenko_g@mtu-net.ru

Обсуждаются математические модели взаимодействия популяций. Модели строятся на основе обыкновенных дифференциальных уравнений [1–3]. В настоящей работе в традиционные модели вносятся два уточнения. Во–первых, в модели учитывается робастная неопределенность, которую свойственно вносить природе в взаимодействие экологических субъектов: перепады температуры и давления, дуновения ветра, сезонные изменения и т. д. Эта неопределенность учтена вхождением в уравнения достаточно произвольных функций $u_k(t)$ времени t. Во–вторых, устраняется субъективизм, который вносит в модель конкретный выбор переменных состояния, и следующие из этого выбора рассуждения о линейности-нелинейности. На основе групп и алгебр Ли строятся модели, инвариантные к выбору переменных состояния, т. е. модель не изменяется при любой, в том числе и нелинейной, неособенной замене переменных. Для рассмотренных моделей изучаются также симметрии по состоянию [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07–01–00217).

Литература

1. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 232 с.
2. Яковенко Г.Н. Теоретико–групповой анализ динамики взаимодействующих популяций // Электронный журнал “Исследовано в России”. — 88, 2003. С. 981-990. (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/088.pdf)
3. Яковенко Г.Н. Взаимодействие двух популяций: теоретико-групповые модели // Сборник научных трудов Международной научной конференции “Математика. Компьютер. Образование”. Т. 13, вып. 2 / Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006. С. 133–140.
4. Яковенко Г.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 3, 2002. — С. 40–83. (http://www.neva.ru/journal)

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ ВОДЯНОГО ПАРА

Яшима-Фужита Х. (Университет в Турине, Италия)
hisao.fujitayashima@unito.it

В этой работе рассматриваем систему уравнений движения теплопроводного вязкого газа (воздуха), который содержит водянщй пар и ему позволяет переход в жидкое состояние. В этой системе, уравнения сохранения количества движения и уравнение непрерывности для части сухого воздуха формулируются по классической механике жидкостей (см. например [1]), а в уравнение баланса энергии входят и обычные члены динамики вязкого газа и латентное тепло. С другой стороны закон сохранения массы для водяного пара и для капелек воды выражается уравнеными, формулированными согласно физическим процессам перехода воды (см. например [2], [3]); в частности учитывается роль аэрозолов в образовании маленьких капелек воды (см. например [4]). В этой системе уравнений неизвестными являются скорость воздуха v, скорость $u(m)$ капелек воды массы m, плотность сухого воздуха ϱ, плотность водяного пара π, плотность жидкой воды $\sigma(m)$, содержащейся в капельках массы m, и температура T.

Мы докажем разрешимость этой системы уравнений в малом промежутке времени с удобными начальными и граничными условиями. Для доказательства воспользуемся методами теории уравнений параболического типа (см. [5]) и ее приложения к уравнений типа вязкого газа (см [6]). Но изчение плотности жидкой воды $\sigma(m)$ требует немалой разработки.

Автор благодарит Вычислительный Центр РАН за гостеприимство.

Литература

1. Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М. Гидродиманика. Наука, 1986.
2. Кикойн А.К., Кикойн И.К. Молекулярная физика. Наука, 1976.
3. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. Гидрометеоиздат, 1965.
4. Prodi F., Battaglia A. Microfisica. Grafica Pucci, Roma, 2004.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука, 1967.
6. Buccellato S., Fujita Yashima H.: Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat. vol. 49 (2003), pp. 127–159.

TOPOLOGICAL INDEX OF A MODEL OF p53-Mdm2 -OSCILLATIONS

Golubyatnikov V.P. (Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS), Mjolsness E. (University of Califonia, Irvine, USA)
glbtn@math.nsc.ru, emj@uci.edu

We study phase portrait of a system of 4 nonlinear differential equations of biochemical kinetic proposed in [1] as a model of oscillations in the *p53-Mdm2* DNA damage repair network.

$$\dot{x} = \alpha_0 z + \frac{\alpha_1 x^n}{k_1 + x^n} - \gamma_1 xy - \gamma_2 x; \qquad \dot{y} = \alpha_2 + \frac{\alpha_3 x^4}{k_2 + x^4} - \gamma_3 y;$$

$$\dot{z} = \frac{\alpha_{1s} z(B - z)}{k_{1s} + B - z} - \frac{\alpha_{2s} z}{(k_{0d} + D)(k_{2s} + z)}; \qquad \dot{D} = -\alpha_d Dxz.$$

Here the variables $x = [p53]$ and $y = [Mdm2]$ denote concentrations of *p53* and *Mdm2*, $z = [AtmP]$ is the switch variable, $D(t)$ is the amount of DNA damage. $B = [Atm] + [AtmP]$ appears from the conservation law. The values of parameters were taken close to those of [1].

For small values of t the sum of all indices of the stationary points of the vector field $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ in some domain $Q = [0, C_1] \times [0, C_2] \times [\varepsilon, B] \subset R^3$ of this system equals -1. For large t this sum vanishes.

We have seen that for small values of $z(0)$ and large $D(0)$, the trajectories of the system jump into the domain Q and oscillate there till D becomes sufficiently small. The geometric properties of the graphs of the right hand sides of the equations, are much more important for dynamics of the model than is their analytic representation.

The direct relation of the topological index of the repair system with the presence of the DNA damage demonstrates a new approach to gene networks studies, see also [2]. This approach is based on the comparison of properties of continuous models and discrete models of the same gene network.

The work was supported by the scientific schools grant 8526.2006.1, RFBR grant 09-01-00070, and by US NIH grant P50-GM76516.

References

1. V.Chikarmane, A.Ray, H.M.Sauro, A.Nadim A model for p53 triggered by DNA damage. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2007, 6: 61-76.

2. Likhoshvai V.A., Golubyatnikov V.P., Demidenko G.V., Fadeev S.I., Evdokimov A.A. Theory of Gene Networks // Computational Systems Biology, / Ed. N.A.Kolchanov, Novosibirsk: SB RAS. 2008. P. 397-480.

INTERFACE SCHUR COMPLEMENT PRECONDITIONING FOR PIECE WISE HIGHLY ORTHOTROPIC DISCRETIZATIONS

Korneev V.G. (Sankt-Petersburg State University, Sankt-Petersburg State Polytechnical University)
VadimKorneev@yahoo.com

The aim of the lecture is to present a DD (domain decomposition) algorithm of almost optimal numerical complexity for a piece wise orthotropic discretizations on a domain, composed of rectangular sub-domains of arbitrary aspect ratios. On each subdomain, the elliptic 2-nd order equation is orthotropic with arbitrary aspect ratio axial orthotropy. Rectangular mesh of a compatible finite element discre-tization is uniform in each direction on each subdomain and in the remaining aspects is arbitrary. The main obstacle for designing fast DD algorithms [1] for such a discrete problem is the interface Schur complement preconditioning, which is interrelated with deriving boun-dary norms for discrete harmonic functions on shape irregular domains [2]. The computational cost of the presented Schur complement as well as DD algorithms, initially introduced in [3], is $\mathcal{O}(\mathcal{N}(\log N)^{1/2})$ arithmetic operations, where N is the number of unknowns. Algorithms are highly parallelizable and, therefore, suitable for supercomputing [4].

Research is supported by the grant from the Russian Fund of Basic Research N 08-01-00676-a.

References

1. Korneev V. & Langer U. Domain Decomposition Methods and Preconditioning. In: Encyclopedia of Computational Mechanics, V.1, E. Stein, R. de Borst and Th.J.R. Hudges eds., John Wiley & Sons, Ltd., 2004, 617–647.

2. Mazya V.& Poborchi S. Differentiable functions on bad domains, World Scientific, 1998, 504 p.

3. Korneev V., Poborchi S., Salgado A. Interface Schur comple-ment preconditioning for piece wise orthotropic discretizations with high aspect ratios. В сб.: Быстрые сеточные методы вычислительной механики сплошной среды, под ред. В.Г. Корнеева. С.-Петер-бургский гос. университет, Санкт-Петербург, 2007, 106-159.

4. Васильев Ю.С., Корнеев В.Г. Третий компонент познания – научные компьютерные супервычисления. Ученые записки Казанского гос. университета. Серия физ.-мат. науки. Казань: Казанский гос. университет, 2007, т. 149, кн. 4, 6-35.

CONFLUENCE OF THE NONLINEAR WAVES IN THE STEFAN–GIBBS-THOMSON PROBLEM

Rudnev V.Yu. (MTUCI)
vrudnev78@mail.ru

We study the confluence of free boundaries in the Stefan–Gibbs-Thomson problem in the spherical symmetric case. We assume that the Stefan–Gibbs-Thomson problem has a classical solution until the moment of contact of free boundaries ($t = t^*$) and the free boundaries have continuous velocities until the moment of contact. Under these assumptions, we construct a smooth approximation (as $\varepsilon \to 0$) of the global solution of the Stefan–Gibbs-Thomson problem, which, until the contact($t < t^*$), gives the classical solution mentioned above and, after the contact ($t > t^*$), gives a solution which is the solution of the heat equation.

The main obstacle to the construction of this solution, which could be used to describe the confluence of free boundaries, is the fact that, instead of an ordinary differential equation, in the case of confluence of free boundaries, we must deal with a partial differential equation for which the explicit form of the exact solution is unknown.

In the present work, we use the technique of the weak asymptotics method, which allows us to avoid this problem.

We analyze the constructed formulas and derive the following effects:

Description.

a. the weak asymptotic solution is smooth for $t > t^*$, the absolute values of the free boundaries velocities are equal to each other at the instant of the contact;

b. the temperature as $\varepsilon \to 0$ has a negative jump at the instant and at the point of confluence of the free boundaries, and this jump is equal to

$$[\theta]\big|_{r=r^*,t=t^*} = -\frac{r'_{10} - r'_{20}}{2},$$

where $r = r_{i0}(t)$, $i = 1, 2$ *other positions of the free boundaries till the interaction.*

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant 05-01-00912 and DFG project 436 RUS 13/895/0-1.

6. Преподавание математики в средней и высшей школе.

К ПРЕПОДАВАНИЮ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ПРОБЛЕМ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Аванесов Э. Т. (Пятигорский государственный технологический университет),
Гусев В. А. (Ивановский государственный энергетический университет)

В процессе школьного образования организация внеклассной кружковой работы имеет большое познавательное и воспитательное значение.

Особая, если не главная, роль здесь принадлежит математике и, в частности, теории чисел.

Постановка многих элементарных проблем в этой области вызывает чрезвычайный интерес учащихся, побуждает их к проявлению элементов творческих инициатив и способствует развитию абстрактного мышления.

В докладе рассматриваются предлагаемые задачи, связанные со свойствами чисел Ферма и Фибоначчи, рациональных тетраэдров, фигурных чисел и т.д., излагается методика их решения.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ, ДОСТУПНОЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Виноградов О. П. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
ovinogradov@mail.ru

Предлагается доказательство закона больших чисел для случая бросания симметричной монеты, которое не требует знакомства с такими понятиями, как независимость, математическое ожидание и дисперсия. Доказательство основано на идее Чебышева, которую он использовал при доказательстве неравенства, носящего его имя. Оно может быть обобщено на случай, когда вероятность успеха в испытаниях Бернулли является рациональным числом. Автор на своих уроках в 10-х классах СУНЦ МГУ ознакомил своих учеников с этим доказательством и убедился, что оно вполне доступно для школьников, которые обучаются в классах с углубленным преподаванием математики.

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 08-06-00144а.

Литература

1. Виноградов О. П. Что такое закон больших чисел? М: СУНЦ МГУ, 2008.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ СЛУШАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Михалев А. В., Главацкий С. Т., Адрианов Н. М., Бурыкин И. Г., Иванов А. Б.,
Одинцов А. А. (Факультет дополнительного образования, МГУ им. М. В. Ломоносова)
serge@rector.msu.ru

За последние 15-20 лет произошли значительные изменения в преподавательской деятельности. Существенно обновились технологии работы, средства хранения и распространения информации и знаний. Получило широкое распространение и стало обязательным элементом традиционных образовательных систем открытое и дистанционное обучение.

Информационная среда дистанционного обучения (ИСДО) МГУ предназначена для обеспечения коммуникационной и информационной поддержки всех процессов дистанционного обучения МГУ.

Основная цель системы – предоставить широкому кругу желающих доступ к методическим разработкам, учебному материалу и опыту преподавателей МГУ имени М.В.Ломоносова.

При создании ИСДО МГУ перед командой проектировщиков и разработчиков стоял ряд задач, решение которых необходимо для успешной реализации проекта:

– добиться того, чтобы требования, предъявляемые к рабочему месту обучающегося (студента), были минимальны;

– обеспечить поддержку основных конструкций языка TeX для представления учебных материалов, контрольных заданий и тестов, сообщений внутренней электронной почты и форумов;

– максимально снизить требования к пропускной способности канала Интернет со стороны обучающегося;

– добиться максимальной отказоустойчивости, надежности и масштабируемости системы;

– обеспечить современную информационную защиту системы.

Система дистанционного обучения (СДО) МГУ является основным механизмом поддержки информационной среды дистанционного обучения (ИСДО) МГУ.

В настоящее время в рамках СДО поддерживается факультативное обучение школьников по ряду дисциплин элементарной математики, а также факультативный курс для студентов по графам Гротендика. В течение ближайших двух лет запланирован старт обучения по ряду новых магистерских и аспирантских курсов по высшей алгебре.

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Дьяченко М. И., Потапов М. К. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Курс действительного анализа является одним из основных университетских математических курсов. Его значение чрезвычайно велико. С одной стороны, этот курс, как правило, изучается после того, как студентам прочитывается основная часть курса математического анализа, и ознакомление с основными положениями действительного анализа помогает систематизировать и переосмыслить то, что сообщалось на занятиях по математическому анализу. С другой стороны, для успешного преподавания многих математических курсов (функционального анализа, теории вероятностей, уравнений с частными производными и др.) необходимо знание курса действительного анализа. Кроме того, многие методы исследований, первоначально возникшие в процессе исследований по действительному анализу, с успехом применяются ныне в перечисленных выше разделах математики (да и во многих других), причем некоторые из этих методов излагаются в рамках стандартного университетского курса. В то же время, практика преподавания действительного анализа на механико-математическом факультете МГУ показывает, что при изучении этой дисциплины студенты, зачастую, испытывают значительные затруднения. Одной из основных причин этих трудностей является отсутствие «типовых» задач в курсе. Практически каждая задача здесь представляет из себя мини-теорему и требует индивидуального подхода к доказательству. Такая ситуация является необычной для студентов и требует нестандартных педагогических подходов. На наш взгляд, одним из таких подходов является разработка учебников-задачников. При этом предполагается, что пособие разделено на две части: в первой основные понятия того или иного математического курса излагаются в виде последовательно расположенных задач, а во второй даются полные их решения. При этом набор задач не ограничивается рамками обычного теоретического курса, а включает в себя и задачи, изучаемые на семинарских занятиях, а также, возможно, ряд задач повышенной трудности и задач из смежных разделов. Такое учебное пособие предоставит широкие возможности как для педагогов, так и для обучающихся, в плане выбора сложности материала для занятий и наиболее удобной формы его усвоения.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект №08-06-00144а.

СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК МАТЕМАТИКИ

Ерусалимский Я. М. (Южный федеральный университет)

dnjme@math.rsu.ru

Термин “современный учебник” широко распространен и обычно означает время опубликования. На самом деле, современность означает соответствие требованиям времени. Ниже, опираясь на свой опыт ([1], [2]), сформулируем и поясним требования, которым должен удовлетворять современный учебник математики.

1. Современный стиль изложения. Под этим я понимаю, в первую очередь, использование теоретико-множественной символики.

2. Интерактивность. Под интерактивностью учебника следует понимать использование внутри текста вопросов, указаний, замечаний.

3. Гипертекстовость. Гипертекствость учебника обеспечивается наличием в нем обширного, разветвленного предметного указателя.

4. Современный дизайн. Образцовым в этом смысле представляется оригинал макет американского учебника по дискретной математике ([3]).

5. Компьютеризированность. То есть активное использование для создания иллюстраций и справочных таблиц математических пакетов.

6. Алгоритмичность. Математика выступает основным "поставщиком" алгоритмов, поэтому их изложение нужно доводить до уровня, принятого в компьютерной литературе.

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / М.: Вузовская книга, 9-е изд., 2008, 288 с.
2. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс / СПб.: "Лань", 4-е изд., стер., 2008, 960 с.
3. Rosen, Kenneth H. Discrete Mathematics and Its Applications / McGraw-Hill, Inc., New York, 2nd ed., ISBN 0-07-053744-5

ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМНОСТИ ЗНАНИЙ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Забелин А. В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
d-raver@mail.ru

Системность является важнейшим качеством знаний, ее можно рассматривать как интегративное качество, как результат взаимосвязи осознанности, полноты, систематичности, глубины, конкретности и обобщенности. Таким образом, системность — качество более высокого порядка, чем вышеперечисленные. Анализ литературы показывает, что ключевыми моментами рассматриваемого понятия являются: целостность и наличие множества связей. Актуальным остается вопрос представления, передачи и формирования в сознании учащихся системных знаний в той или иной области. Вслед за Н.Г. Шило будем считать, что «система знаний сформирована, если учащийся понимает ее системообразующую основу, место элементов в системе и наиболее важные связи между ними». Показатели наличия системных знаний у учащихся представляются, прежде всего, в виде определенных умений, причем крайне важных. Среди них: правильное определение учениками существенных признаков понятий, верное соотношение видовых и родовых признаков, умение переносить знания в новые условия, применять их в практической деятельности и т. д. В области математики в настоящее время существует проблема фрагментарности, поверхностности и формализма знаний, проблема неумения применить их на практике. Это обуславливает актуальность вопросов обеспечения овладения учащимися не просто набором, суммой знаний, а их системой.

Нами вопрос формирования системности знаний рассматривается на материале курса математики средней школы, на примере темы «Рациональные уравнения и системы рациональных уравнений». Был проведен анализ материалов и сделана попытка построить систему знаний по этой теме, связать эти знания с другими разделами математики и другими предметами, а также создать методику обучения этой теме, способствующую формированию системности знаний. Методика создается на основе деятельностного подхода (П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина и др.). Особое внимание уделяется обучению школьников выбору метода решения данной системы уравнений.

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ПРОГРАММЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Ю. В. Межевова (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Предлагаемая программа углубленного обучения школьников математике может быть реализована при дистанционном обучении в заочной школе при вузе (например, на заочном отделении Малого Мехмата). В программе выделяются четыре основных раздела: алгебра, геометрия, комбинаторика и *математический анализ.*

Рассмотрим более подробно последний раздел.

Дистанционное изучение математического анализа целесообразно начинать с 9 класса, так как раньше школьники еще не совсем готовы воспринимать этот материал (в 8 классе могут быть введены только некоторые сопутствующие понятия ознакомительного характера).

Элементы высшей математики вообще исключены из представляемой программы, поскольку основательно и углубленно высшая математика изучается в вузе, а в общеобразовательную программу включены лишь начальные ее понятия.

Курс математического анализа распределен по годам дистанционного обучения следующим образом:

9 класс — функции и графики. Сюда входит исследование различных типов функций: линейные, кусочно-линейные, квадратичные и дробно-линейные функции. Изучаются их свойства и графики, а также преобразования графиков вообще.

10 класс — тригонометрия. Раздел содержит определения, формулы тригонометрии, графики функций, а так же доказательства некоторых утверждений. Упор сделан не на обучение решению тригонометрических уравнений, а на глубокое понимание материала, позволяющее решать различные задачи, как вычислительного, так и теоретического характера.

11 класс — степени, радикалы и логарифмы. Эта часть посвящена определению показательной, логарифмической функций и арифметического корня, рассматриваются их графики и основные свойства. Также включен ряд дополнительных тем: гиперболические функции, формула сложных радикалов.

Особенностью разработки является предполагаемая дистанционность обучения. Материал должен быть компактен и в то же время автономен. Кроме того, в нем выделяется минимальный набор задач для проверки усвоения этого материала школьником.

ОБ ОДНОЙ ОШИБКЕ В ШКОЛЬНОМ УЧЕБНИКЕ

Л. Н. Мохова (Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара)
dakar@bk.ru

В 2008 г. я руководила подготовкой 4 выпускных квалификационных работ по математике на физико-математическом факультете Арзамасского государственного педагогического института. Чтобы написать интересную выпускную работу, мои студенты занимаются выбранной темой 3-4 года, пишут по ней сначала курсовую, а затем выпускную работу. Расскажу об одной из 4-х работ, она называется «Неквадрируемые плоские множества», ее автор - Е.Баринова.

В работе подробно рассмотрены пять примеров неквадрируемых множеств, предложенных в качестве задач в книгах Б. Гелбаум, Дж. Олмстед «Контрпримеры в анализе», В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов «Математический анализ» и «Математическом энциклопедическом словаре» под редакцией Ю.В. Прохорова. Самым интересным из рассмотренных неквадрируемых множеств является «канал на острове», границей которого служит вся суша острова. Кроме того изучается неквадрируемое плоское множество, построение которого опирается на канторово множество положительной меры на прямой. Дается общий способ построения бесконечного класса неквадрируемых множеств на плоскости, основанный на свойстве плотности множества рациональных или иррациональных чисел.

Большой неожиданностью при работе над этой темой стало для нас обнаружение в учебном пособии «Алгебра и математический анализ» для 11 класса Н.Я. Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шварцбурда для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики (Москва, «Просвещение», 1996 г., стр. 30-31) примера фигуры, не имеющей площади. Дело в том, что пример приведен без детальных доказательств, они просто не посильны школьнику. Выпускница пединститута Е. Баринова провела подробные построения и доказала, что фигура - квадрируема. Как научный руководитель, я считаю это несомненным успехом своей воспитанницы. В докладе предполагается ознакомить присутствующих с этим доказательством.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДИКИ РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Патронова Н. Н. (Поморский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск)
patronova.nina@pomorsu.ru

Одним из перспективных направлений исследований в области теории и методики обучения математике является усиление развивающих функций обучения теории вероятностей и математической статистике в связи с включением элементов стохастики в содержание общего образования.

Реализация этого направления должна начинаться с выявления как специфики вероятностно-статистического стиля мышления, так и возможностей усиления профессиональной направленности подготовки будущих учителей в вузе.

Разработанная нами методика обучения ориентирована на формирование профессиональных умений и достижение рефлексивного уровня развития вероятностно-статистического стиля мышления. Теоретической основой данной методики выступают разработанные нами принципы развивающего обучения теории вероятностей и пути их реализации, позволяющие в комплексе использовать возможности содержательно-структурной и функционально-процессуальной стороны обучения.

Развертывание содержания курса происходит посредством цепочек задач, состоящих из задач на получение выводов; задач на восстановление посылок сделанных выводов; задач, представляющих комбинацию задач первых двух видов; задач, решение которых требует привлечения поисковых аналитико-синтетических стратегий; рефлексивно-методических задач.

Особенностью разработанной методики является также интеграция содержания курса теории вероятностей с основными вопросами математической статистики путем изучения вопросов, связанных с условиями правильности статистических выводов. Средством раскрытия этих взаимосвязей выступают задачи, предполагающие комплексное использование приемов мышления, относящихся к детерминистической и статистической составляющей вероятностно-статистического стиля мышления.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ

Посицельская Л. Н., Горбачева Н. А., Зорина Т. А. (Москва)
posicelskaja@.yandex.ru, gorbacheva@i.home-edu.ru, zorina@i.home-edu.ru

Современное школьное образование невозможно без применения мультимедийных технологий, на базе которых развиваются новые формы и методы обучения. В Центре образования «Технологии обучения» дети учатся дистанционно, что обусловлено их ограниченными возможностями, связанными с состоянием здоровья. Наши курсы содержат различные учебные материалы: интерактивные лекции, тесты, тренажеры, дидактические игры, снабжены инструментами для виртуальных экспериментов и моделирования. Использование компьютерных программ («Живая Математика», Flash, Excel и др.) позволяет учащимся лучше усвоить математические понятия и методы. Сетевые технологии дают возможность ученикам заниматься в естественном для них темпе и с теми материалами, которые доступны именно им. Использование различных компьютерных программ необходимо многим ученикам как на стадии обучения, так и при контроле за его результатами, в том числе на экзаменах. Технологии обучения, которые развиваются в нашем Центре образования, важны не только в дистанционной, но и в обычной школе. Широкому их внедрению препятствует, в частности, противоречие личностно-ориентированного подхода к обучению и образовательных стандартов. Мы считаем, что при оценке успехов ученика необходимо принимать во внимание степень его продвижения, а не только сумму знаний. К сожалению, существующие нормативные документы не позволяют учитывать различия в здоровье детей, их способностях и особенностях восприятия. Решение этой задачи является насущной проблемой.

Разработка и внедрение дистанционных курсов ЦО «Технологии обучения» финансировалась Департаментом образования города Москвы. Создание комплекта математических курсов было бы невозможно без творческого и слаженного труда всех сотрудников лаборатории математики.

Литература

1. Посицельская Л.Н., Николаева К.А., Горбачева Н.А. От опыта дистанционного образования к проблеме информатизации школьного образования // Математика. Компьютер. Образование. Сб. научных трудов. Том. 1. Москва–Ижевск, 2007. С. 123–127.

СТРУКТУРА ЗАДАНИЙ С5 В ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Семенов П. В. (Моск. городской пед. ун-т)
pavels@orc.ru

Среди разнообразных критических замечаний по поводу ЕГЭ по математике довольно распространен тезис о том, что задания этого вида экзаменационного испытания — не по математике. По крайней мере, не по математике, как понимают ее и представляют себе профессиональные ученые.

Оставляя в стороне вопрос о применимости этого тезиса к задачам явно школьного, аттестационного характера (части 1 и 2 ЕГЭ), хотелось бы в обзорном порядке представить участникам настоящей конференции характер и структуру наиболее сложных заданий с развернутым ответом, заданий С5. Как автору всех этих заданий C5, мне достаточно ясны принципиальные моменты их создания, каждый из которых, на мой взгляд, в основе своей связан с весьма фундаментальными (с научной точки зрения) математическими конструкциями.

Вот краткий, год за годом, перечень соответствующих связей.

2008 г. Итерации функций, символическая динамика, неподвижные точки.

2007 г. Проблемы передачи информации, восстановление входных данных по выходным.

2006 г. Действие функции на множестве, (слабо)инвариантные множества.

2005 г. Самосопряженные задачи с параметром, отождествление пространства с первым сопряженным к нему.

2004 г. Непрерывные числовые характеристики (меры) подмножеств числовой прямой.

2003 г. Дискретные числовые характеристики (меры) подмножеств числовой прямой.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00663.

К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ: О КАЧЕСТВЕ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ РАБОТ

Сергеев И. Н., Пасиченко П. И. (МГУ имени М.В.Ломоносова)
in_serg@mail.ru

В связи с принятием *ЕГЭ* как обязательного экзамена, возникает реальная проблема единого подхода к проверке решений *задач типа С* (с развернутым ответом).

К сожалению, сложившаяся практика оценки работ по математике обладает целым рядом серьезных недостатков, отрицательно влияющих на *качество проверки*:

1) критерии учитывают *единственное решение* задачи – предложенное ее составителями, и не рассчитаны на восприятие всего многообразия возможных подходов к ней, присущего выпускникам с разным творческим потенциалом, которые обучались в разных школах, у разных учителей и по разным программам;

2) критерии отражают те *требования к оформлению* работ, которые возникают лишь на первоначальном этапе обучения, когда школьник впервые знакомится с методами решения задач (так, в демоверсии 2009 г. при описании требований к оформлению решений даже выделяется специальный тип так называемого «*обоснованного решения*», призванного быть понятным, по всей видимости, даже неквалифицированному экзаменатору, — в отличие от просто «*решения*», в котором совершенно очевидные утверждения разрешается не пояснять);

3) критерии не затрагивают *математической сути задачи* — они лишь по формальным или косвенным признакам определяют степень правильности или ошибочности предложенного школьником решения и не учитывают его реального продвижения в заданном направлении.

Работа поддержана РГНФ (проект №08-06-00144а).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

Томилова А. Е. (ПГУ имени М.В.Ломоносова, Архангельск)
tomilova@atknet.ru

В настоящее время тестовая форма контроля учебных достижений обучающихся активно развивается не только в средней, но и высшей школе. При реализации курса истории математики использование тестирования имеет свои особенности: на лекциях тестирование проходит в самом начале, что позволяет осуществлять не только проверку, но и систематизацию знаний студентов, способствует формированию навыков постоянной работы по выполнению заданий для самоконтроля; на семинарских занятиях тестирование проводится в конце его, что позволяет проверить качество работы студентов на семинаре. Предусматривается использование вводного тестирования на первой лекции для установления начального уровня историко-математических знаний студентов, обзорных тестов для контроля по окончанию изучения каждого из пяти разделов курса, итогового тестирования по всему курсу.

В нашей методике тесты помимо контролирующей функции выполняют познавательную и обучающую функции, так как при их выполнении осуществляется не только систематизация знаний студентов, но и получение новой дополнительной информации.

Задания в тестах должны быть как фактологические, так и творческие. К творческим заданиям мы относим задания, близкие по содержанию, но предполагающие разные ответы; задания типа "Чей это «портрет»?", "О ком говорят известные ученые, писатели?", "Чьи это слова?". В формулировках таких задания всегда содержится информация, которая должна быть знакома студентам или уже сообщалась на лекциях. Но часть информации для студентов оказывается новой. Поэтому при выполнении творческих заданий формируются умения анализировать, сопоставлять, выделять главное, делать выводы. При тестировании также используются задания с гуманитарной и методологической направленностью.

История математики богата материалами, позволяющими создать тесты любого уровня сложности и включающие задания различной формы: с выбором ответа, кратким и развернутым ответом. Следует иметь в виду, что тестирование является хорошим дополнением к традиционным формам контроля.

ЭЛЕМЕНТЫ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ухоботов А. В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
av_ukhobotov@mail.ru

Элементы теории вероятностей и математической статистики сравнительно недавно вошли в отечественную школьную программу. Их появление вызвано многими социальными и экономическими причинами. Основной целью изучения основ этой теории является формирование вероятностно-статистического мировоззрения, умения понимать вероятностный характер многих процессов реального мира.

В современных экономических условиях обычный человек встречается с вероятностными моделями чаще всего при покупке страхового полиса. Кто-то страхует машину, кто-то дом, кто-то свою жизнь и здоровье. Возникает задача воспитания у населения культуры пользования страховыми услугами, что, в первую очередь, подразумевает понимание сущности страхования.

Важнейшей составляющей частью теоретической базы страхового дела наряду с экономическими и юридическими дисциплинами является актуарная математика — математика страховых моделей. Современная актуарная математика построена на основе теоретико-вероятностных и статистических методов. Значит, базу страховой культуры населения можно закладывать еще на школьных уроках математики в рамках изучения основ теории вероятностей и математической статистики.

В настоящей работе показано, как можно дать первое представление об актуарной математике школьнику, знакомому с элементарными понятиями теории вероятностей. Задачи, которые призваны помочь в этом, являются маленькими практическими проблемами из страховой отрасли, которые решаются с помощью построения простейших вероятностных моделей. Таким образом, элементы актуарной математики позволяют не только расширить кругозор школьника, но также помочь сформировать его представление о теории вероятностей как о практической науке и развить у него интерес к ее изучению.

Литература

1. Bowers et al. Actuarial Mathematics // Itasca, 1986.
2. Г.И. Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем // Москва, Анкил, 2002.

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ШКОЛЬНЫХ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ

Фефилова Е. Ф. (Поморский государственный университет имени М.В.Ломоносова)
fefilova.helen@pomorsu.ru

Так как линия сюжетных задач представляет собой систему, то одним из положений ее построения мы выделяем принципы системного подхода к обучению:

1. Принцип целостности, который подчеркивает принципиальную несводимость существенных свойств отдельных элементов.

2. Принцип структурности, на основе которого мы изучаем устройство системы, соподчиненность ее частей. Особенность каждой сюжетной задачи проявляется в ее структуре: чем сложнее структура, тем сложнее и деятельность по ее решению.

3. Принцип иерархичности (каждый элемент системы - это тоже система). В выделяемой линии сюжетных задач каждая задача - система.

4. Принцип множественности (система сложная, и можно осмыслить сколько угодно подходов к ее описанию; каждая новая модель системы позволит по-новому осветить некоторую ее сторону). В сюжетной задаче как в сложной системе, можно выделить ее элементы и связи (отношения) между элементами задачи как системообразующие связи. Мы рассматриваем сюжетные задачи со всеми внутренними и внешними связями и их свойствами, которые обеспечивают целостность задачи, ее устойчивость и организацию.

5. Принцип содержательности (каково конкретное содержание каждого элемента системы (задачи), каково содержание всей системы сюжетных задач).

6. Принцип перманентности (система математического знания сложна и требует постепенного, непрерывного наполнения новым содержанием формируемой у школьников системы знаний), при этом обучение осуществляется от простого к сложному. В построении линии сюжетных задач это требование реализуется в системе последовательных шагов, каждый из которых дополняет известные знания и умения дозой новых знаний и умений, которые, в свою очередь, позволяют приобретать учащимися другие знания и умения.

7. Принцип взаимозависимости системы математического знания и среды, то есть реального мира. Сюжетные задачи являются моделями реально существующих, жизненных ситуаций.

8. Принцип деятельности является основным подходом к работе по созданию системы математических знаний.

9. Межпредметный принцип системы.

О БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ В ВУЗЕ

Хаймина Л. Э., Хаймин Е. С. (Поморский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Архангельск)
Jacques@atnet.ru

Высшее профессиональное образование в России находится в состоянии активного изменения, которое сопровождается внедрением новых образовательных и информационных технологий, осмыслением накопленного опыта высшего образования, сравнительным анализом его с зарубежным опытом.

В настоящее время в российских ВУЗах достаточно активно применяется балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов. Достоинствами введения балльно-рейтинговой системы являются: повышение мобильности студентов; увеличение альтернатив в обучении; повышение конкурентоспособности программ обучения (они должны максимально учитывать потребности рынка труда); повышение уровня контроля оценки знаний студентов (оцениваются все виды деятельности студента в течение всего семестра); возможность реализации программ разного уровня сложности; возможность дифференцированного подхода к оценке знаний студентов.

Однако, существует и ряд проблем, связанных с введением новой системы контроля знаний студентов. Во-первых, она предназначена для повышения эффективности учебного процесса и не может быть использована в качестве «фильтра» по отчислению студентов. Во-вторых, тезис «обучение в течение всей жизни» не должен означать для студентов получение высшего образования с любыми перерывами. В-третьих, не все преподаватели хотят качественно выполнять весь перечень работ и могут возникнуть разногласия между преподавателями, принявшими и не принявшими систему. В-четвертых, балльно-рейтинговая система не должна превращать учебный процесс в «игру в обучение». В-пятых, нет единства ВУЗов в выборе системы оценки знаний студентов.

По результатам научного исследования можно констатировать, что введение балльно-рейтинговой системы контроля знаний студентов положительным образом сказывается на качестве учебного процесса. Рейтинг в целом организует студентов и преподавателей, создает условия для творческого развития, стимулирует все виды деятельности, мотивирует постоянно заниматься самообразованием.

О концепциях, практике и перспективах развития преподавания математики на химическом факультете МГУ

Гаврилов В. И., Кузьменко Н. Е., Макаров Ю. Н., Рыжова О. Н., Чирский В. Г. (МГУ имени В.М. Ломоносова)

Преподавание математики на химическом факультете Московского Государственного университета им. М. В. Ломоносова, в основном, осуществляет руководимая академиком В. А. Садовничим кафедра математического анализа. Главная задача университетов состоит в подготовке специалистов, которые, с одной стороны, смогут хорошо представить себе основные направления развития науки, смогут самостоятельно выбрать наиболее перспективную для себя область научно-исследовательской работы и творчески работать в ней, а с другой, будут способны к качественному выполнению конкретных дел и будут востребованы обществом. Фундаментальные естественнонаучные дисциплины используют математические модели и абстракции для описания законов природы, кроме того, с развитием вычислительной техники всё большее количество математических дисциплин приобретает прикладное и важное для естественных наук значение. Однако изложить все интересные, имеющие приложения математические дисциплины, как и любые естественнонаучные дисциплины, просто невозможно, поскольку полнота знаний в каждой конкретной дисциплине из-за необъятной информации никогда не может быть достигнута. Поэтому очевидно, что акцент нужно делать на восприятии идей, законов, принципов, концепций и обобщении, на формировании научного мировоззрения. Сформулируем основную цель обучения студента-химика математике следующим образом: дать возможность специалисту-химику творчески и продуктивно использовать в своей работе быстро развивающиеся математические методы. Поставленные задачи предъявляют серьёзные требования к методике преподавания математики на химическом факультете. Читаемые лекции и семинарские занятия должны учитывать высокий интеллектуальный уровень студентов. Продуманная и научно-обоснованная позиция кафедры математического анализа по этому вопросу базируется на глубоком анализе процесса обучения студентов. Как результат, уровень подготовки выпускников химического факультета в настоящее время позволяет им плодотворно вести научную работу и становиться кандидатами и докторами как химических, так и физико-математических наук.

ПОДГОТОВКА К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Шарич В. З. (Москва, СУНЦ МГУ)
zlatkovich@list.ru

Олимпиады: кому и зачем они нужны?

Основная задача олимпиад, ради которой они создавались, — пробуждение интереса у талантливых детей к занятиям математикой. Но с некоторого момента олимпиады переквалифицировались в очередной политический инструмент. Сейчас олимпиады балансируют между этими двумя аспектами своего существования, а все зависит от людей, которые ими занимаются.

Подготовка к олимпиадам: на пользу или во вред?

Чрезмерное увлечение олимпиадами приводит не только к выдающимся сиюминутным успехам, но и к преждевременному насыщению. У олимпиадников расширяется кругозор в математике, но зачастую сужается набор познаний по остальным дисциплинам. Возникает вопрос преимущественно морального содержания: что лучше – специалист в узкой области или разносторонне развитая посредственность?

Школа и олимпиады: друзья или враги?

Частые поездки на турниры и олимпиады, сборы и тренировки делают жизнь школьника-олимпиадника не только интересной и насыщенной, но и трудной: в школе ему часто предъявляются претензии в связи с пропусками и невовремя изученным материалом. Правильно ли это и как выходить из ситуации?

Благодарности.

Автор желает выразить благодарность администрации СУНЦ МГУ в лице директора Часовских А.А. за возможность заниматься в Школе Колмогорова математическими олимпиадами и подготовкой школьников к ним в том объеме, в котором это необходимо для полноценного развития данного направления деятельности.

Литература

1. Статья в сборнике "45 лет Школе Колмогорова" «Воспитание победителей олимпиад в СУНЦ МГУ в 2004-2008 годы» (Пономарев А.А., Шарич В.З.)
2. «Школа математического творчества» (Вавилов В.В.)

ОБ УЧЕБНИКАХ МАТЕМАТИКИ СЕРИИ «МГУ — ШКОЛЕ»

Шевкин А. В. (ГОУСОШ №2007 г. Москвы), Потапов М. К. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
avshevkin@mail.ru, mkpotapov@mail.ru

В серии «МГУ — школе» Издательство «Просвещение» выпускает учебники «Математика, 5-6», «Алгебра, 7-9», «Алгебра и начала математического анализа, 10-11» (авторы С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин). Их издание является составной частью программы «МГУ -

школе», разработанной по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего и нацеленной на сохранение и развитие лучших традиций отечественного математического образования.

Эти учебники полностью отвечают стандартам по математике, утвержденным Министерством образования и науки РФ. Они рекомендованы министерством в качестве учебников для любых типов общеобразовательных учреждений.

Учебники серии «МГУ — школе» имеют высокий научный и методический потенциал. Они отличаются расположением учебного материала в естественной логической последовательности, позволяющей излагать материал более глубоко, экономно и строго. Учебники нацелены не только на формирование навыков, они учат действовать осознанно. Обычно обучение больше ориентировано на вопрос «как?», на действия по образцу, требует многократных повторений для поддержания навыков. В учебниках серии «МГУ — школе» уделяется достаточно внимания вопросу «почему?», имеющему большой развивающий потенциал. Учебники полностью обеспечивают обучение тех школьников, которые хотят и могут обучаться основам наук, так как нацелены на повышенный уровень математической подготовки учащихся.

Основной методический принцип, положенный в основу изложения теоретического материала и организации системы упражнений, заключается в том, что ученик за один раз должен преодолевать не более одной трудности. Поэтому каждое новое понятие формируется, каждое новое умение отрабатывается сначала в «чистом» виде, потом трудности совмещаются. Так происходит, например, при изучении отрицательных чисел: сначала изучаются целые числа, на которых легче освоить идею знака числа, а уж потом - все рациональные числа.

К учебникам изданы дидактические и методические материалы.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект №08-06-00144а.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ЕСТЕСТВЕННО- НАУЧНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ В СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Шивринская Е. В. (Специализированный учебно-научный центр им. А. Н. Колмогорова)
shivrinsckaya@yandex.ru

В пленарном докладе «Математическое образование: настоящее и будущее» ректор МГУ академик В. А. Садовничий на Всероссийской конференции (2000 г.) «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» сказал: *"Сейчас требуется профессионал-математик — математический эрудит, универсал, который хорошо видит не только обширный математический мир, но и мосты, которые наведены или могут быть наведены с другими мирами знаний."*

В условиях быстро меняющегося научно-технического переоснащения в современном мире сегодня особенно важны навыки к междисциплинарным исседованиям на стыках различных областей знаний. К сожалению, сегодня абсолютное большинство учителей средней школы и преподавателей ВУЗов в силу разных причин являются узкими предметниками и не стремятся к расширению межпредметных связей на занятиях по своей дисциплине. Этой негативной тенденци способствуют и новые правила приема в ВУЗы, ориентированные лишь на результаты ЕГЭ.

Ориентация на результаты ЕГЭ не лучшим образом сказывается и на развитии творческих навыков научно-исследовательской деятельности учащихся в СУНЦ им. А. Н. Колмогорова, чему с момента образования ФМШ 18 при МГУ всегда уделялось особое внимание.

В докладе приводятся примеры успешных ученических разработок в СУНЦ, в частности, впечатляющий результат 10-классника И. Мушаева, который под научным руководством В. В. Вавилова дал полную классификацию двухпараметрического семейства кривых Уатта, играющих фундаментальную роль в теории шарнирных механизмов.

7. Интеллектуальные системы и компьютерные науки.

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ЧАСТИЧНЫХ САМОДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Алексеев В. Б. (МГУ им.М. В. Ломоносова)
vbalekseev@rambler.ru

Пусть P_k^* — множество всех частичных k-значных функций с операцией суперпозиции. Все предполные классы в P_k^* описаны Ло Чжукаем, некоторые фрагменты решетки замкнутых классов в P_2^* описаны в [1].

Пусть S — класс всех полностью определенных функций из P_k^*, самодвойственных относительно подстановки $x+1 \pmod k$, и S^* — класс всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из S.

Пусть M — произвольное непустое семейство подмножеств из множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ (в M может входить и пустое подмножество). Семейство M называем замкнутым относительно циклического сдвига, если для каждого $r \in E_k$ и для каждого подмножества $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \in M$ имеем $\{i_1 + r, i_2 + r, \dots, i_s + r\} \in M$ (сложение по модулю k). Через $U(M)$ обозначим множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ из S^* таких, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ множество $\{i | i \in E_k, f(\tilde{\alpha} + \tilde{i})$ не определено$\}$ принадлежит M (здесь $\tilde{i} = (i, \dots, i)$ — вектор длины n и сложение покоординатное по модулю k).

Теорема. *Любой класс в P_k^*, расположенный между S и S^*, однозначно представляется в виде $U(M_1) \cup U(M_2) \cup \ldots \cup U(M_s)$, где M_1, M_2,..., M_s — семейства подмножеств из E_k, удовлетворяющие условиям: 1) все M_i замкнуты относительно циклического сдвига и объединения подмножеств; 2) ни одно M_i не содержится в другом M_j; 3) $\forall i, j \exists t \forall A, B (A \in M_i, B \in M_j \longrightarrow A \cup B \in M_t)$; 4) ровно для одного i выполняется $\emptyset \in M_i$. И обратно: любой класс указанного типа замкнут и лежит между S и S^*.*

Следствие. *В P_k^* при любом k между S и S^* имеется только конечное число замкнутых классов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00438 и 07-01-00154).

Литература

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.

ОБ ОДНОЙ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЗВЕННЫХ ВИРТУАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЛАБОРАТОРИЙ

М.М.Арипов, Ф.А.Ташпулатов, Б.Халдарова (Национальный Университет Узбекистана)
mirsaidaripov@ mail.ru, farkhodbek@mail.ru, bolganoy@mail.ru

Работа посвящена исследованию средств имитационного моделирования многозвенных виртуальных математических лабораторий. Предложено средство, реализованное в виде инструментальной системы "МАСТЕР"и ядра для открытых компьютерных моделей с переменной структурой, которая позволяет моделировать дистрибутивы для ядра в виде многозвенных виртуальных лабораторий, которые рассчитаны на проведение дистанционного обучения по математическим, физическим и другим дисциплинам. Структурное описание системы:

1. ИС "МАСТЕР"представляет собой среду по созданию древовидной структуры содержания уроков и соответствующих документов к ним в виде лекционных, практических и лабораторных занятий, а также тестовых заданий. Она позволяет, посредством выбранной системы управления базы данных (СУБД), сохранить связи между созданными документами в базе данных.

2.Дистрибутивы для ядра в виде многозвенных виртуальных лабораторий состоят из трех частей:

1)Клиентская часть - представляет собой интерфейс пользователя, которая позволяет проводить компьютерный эксперимент над активными документами в рабоих станциях. 2)Сервер приложений работает на стороне сервера и представляет собой механизм соединения клиентского приложения с сервером базы данных. 3)Сервер базы данных выполняет полученные SQL запросы от сервера приложений над базой данных.

Преимуществом данной системы является автоматизация процесса моделирования многозвенных виртуальных лабораторий. Научная и практическая значимость результатов работы подтверждается памятным сертификатом от Российской компании SoftLine
(www.exponenta.ru/educat/competit/nagrada2_2006.asp).

Литература

1. Aripov M., Tashpulatov F. Learning High Mathematics on MathCAD Base //Journal of the Korea society of mathematical education Series D: Research in Mathematical Education -Korea, 2005 - Vol. 9, No. 3 (ISSUE 23) , 269-273.

СЕМИОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Богомолов С. А. (Саратовский государственный социально-экономический университет)
alexbogomolov@yandex.ru

В сообщении излагаются основные понятия и принципы задания языка описания процессов управления интеллектуально – организационными системами (ИОС), рассматриваемых в качестве моделей научно – производственных предприятий, производящих сложную интеллектуально – техническую продукцию. В силу обширного разнообразия в этапах и процессах, сложности взаимодействия исследовательских, конструкторских и технологических подразделений, непредсказуемости этапов требуется определенный формальный аппарат, позволяющий унифицированно описывать как сами процессы, так и процессы их взаимодействия.

Управление организационными системами принципиально невозможно без привлечения семантической (смысловой, качественной) информации.

Характерной особенностью ИОС является использование разнородных ресурсов, потребляемых различными проектами и разработками, требующих одновременного использования. В этой связи вводится понятие «ресурсного комплекса» как упорядоченной совокупности характеристик потоков определенных видов ресурсов. В качестве характеристик выступают базовые понятия и отношения.

Формальный язык, в терминах которого представляется семиотическая модель, является относительным, многоуровневым и описывает состояние системы. Моделирование начинается с формирования гипотезы о структуре и поведении исследуемого объекта, его ресурсах, операциях и связях между ними. Затем решаются вопросы о средствах построения модели и адекватном языке описания.

Модель структуры ИОС задается множествами операций и предикатов, определяющих временные, причинно – следственные отношения и отношения включения. По аналогии вводятся модели структуры и поведения системы. На основании введенных моделей формулируются задачи моделирования и требования к формальному языку:

- определение формальной взаимосвязи между наблюдаемыми признаками и свойствами;

- анализ высказыванмй языка и выделение множеств свойств ресурсов и операций;

- поиск высказываний языка, в которых определены ресурсы и операции (формирование релационного языка описания
состояний ИОС);

- определение высказываний в моделях операций и структуры;

- определение состояний системы как производных понятий языка, выводимых путем заменой базовых понятий в описании операций на соответствующие понятия конкретных ресурсов, привлекаемых для их осуществления.

Уровни языка формализуются таким образом, чтобы кажлый уровень обеспечивал свой аспект функционирования системы.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Боков Г.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
bokovgrigoriy@gmail.com

В работе излагается обобщение принципа максимума Понтрягина на случай задачи оптимального управления с параметрами запаздывания по времени.

Формулируется задача оптимального управления с постоянным запаздыванием по времени в фазовой переменной и в переменной управления. Параметры запаздывания, входящие в фазовую переменную и управление, предполагаются различными. Задача рассматривается на конечном промежутке времени, фазовые переменные представляют собой кусочно-гладкие, а переменные управления - кусочно-непрерывные вектор-функции. Функционал, для которого ищется минимум, является интегралом по отрезку с гладкой подынтегральной функцией. Уравнение связи для фазовой переменной описывается неавтономным дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием, правая часть которого описывается гладкой вектор-функцией.

Для данной задачи доказывается теорема, дающая необходимые условия оптимальности решения, куда входят уравнения Эйлера, которые представлены системой дифференциальных уравнений с опережающей переменной, принципа максимума с параметром запаздывания и условия трансверсальности.

Кроме того производится обобщение данной задачи на случай бесконечного промежутка времени. Для данного случая также даются необходимые условия оптимальности.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

2. Матвеев А.С. Задачи оптимального управления с запаздыванием общего вида и фазовыми ограничениями, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1988, 52:6, 1200-1229.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976.

4. Харатишвили Г.Л. Оптимальные процессы с запаздыванием. - Т., 1966.

5. Chak-Hong Lee, Nonlinear time-delay optimal control problem: optimality conditions and duality, 1995.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ИНДЕКСА СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

Будников Ю.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

y.budnikov@mail.ru

Пусть $k \geq 2$ - фиксированное натуральное число. Будем рассматривать гиперграфы $G = (V, E)$ – k –однородные, т.е. каждое ребро которых содержит в точности k вершин (причем это число зависит от $n(G)$–числа вершин в G). Упаковка в G – набор P непересекающихся ребер G. $\chi(G)$ – "хроматический индекс"G - минимальное число упаковок, на которые можно разбить все ребра G.

Утверждение 1. *Для* $\forall\delta > 0$, $\forall\delta' > 0$, *для любой возрастающей функции* $g(n)$ *можно построить возрастающую* $k(n)$ *- число вершин на ребре - так, что* $k(n) < g(n)$ $\forall n \in N$ *и класс гиперграфов* $G(n)$, *где* n *- число вершин гиперграфа с ростом максимальной степени* $D(n)$: *при* $n = n_k, k = 1, 2\ldots$ *- возрастающая подпоследовательность натуральных чисел - будет выполнено:* $d(G) \geqslant (1-\delta)D(G)$, $C(G) \leqslant \delta' D(G)$, *но* $\chi(G(n)) = k(n)(D(G(n)) - 1) + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Теорема 1. *Пусть в условиях модели случайного гиперграфа* $G(n,p)$ (k – *число вершин на ребре - растущая функция от* n : $k = o(n)$, $n \to \infty$), *где* $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$, *и функция* $D = o(C_{n-1}^{k-1}), n \to \infty$:

1)*если для некоторой константы* $c > 1$

$$\frac{2\ e^{\frac{n}{kc}}\sqrt{ck}\ (cD)^{\frac{n}{kc}}\ e^{\frac{k}{c}}\left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}} \to 0, n \to \infty$$

$\Rightarrow P\left(G(n,p)\right.$ *содержит упаковку размера* $\left.\frac{n}{kc}\right) \to 0, n \to \infty$

2)*если* $\lim_{n\to\infty} \frac{D}{e^k} > 1 \Rightarrow$ *для любой константы* $c > 1$

$P\left(G(n,p)\right.$ *содержит упаковку размера* $\left.\frac{n}{kc}\right) \to 1, n \to \infty$

Теорема 2. *В условиях Теоремы 1 для любой* $c > 1$ $\Rightarrow P\left(\chi(G) \geq cD\right) \to 1, n \to \infty$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доценту Ирматову А.А., за его ценные указания.

Литература

1. Asymptotic behavior of the Chromatic Index for Hypergraphs, Nicholas Pippenger and Joel Spencer, Journal of combinatorial theory, Series A 51, 24-42(1989).

2. Будников Ю.А., "О мощности ребер гиперграфа"(с.70-72), Материалы IX Международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки", 2006

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ АЛГОРИТМА ADABOOST

Буряк Д.Ю. (С1 Ко., Лтд), Ирматов А.А. (МГУ, С1 Ко., Лтд)
d.buryak@samsung.com, irmatov@intsys.msu.ru

В теории обучаемых классификаторов хорошо известен итерационный подход к построению 'усиленной' комбинации 'слабых' классификаторов, названный AdaBoost [1]. На практике эффективность классификатора оценивают, анализируя зависимость между числом ошибок первого и второго рода, представляемую в виде кривой ROC (Relative operating characteristic). В настоящей работе показано, что площадь под кривой ROC ограничена сверху невозрастающей функцией от числа итераций AdaBoost.

Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ - обучающая выборка с распределением D, $Y = \{y_i\}_{i=1}^C$ - метки классов примеров из X. Пусть задан набор классификаторов $\{f_j\}_{j=1}^L$, где $f_j : X \times Y \to [0,1]$. Выполним T итераций AdaBoost из работы [1] на множестве $\{(x_i, y_{c_i})\}_{i=1}^N$, где x_i принадлежит классу с меткой y_{c_i}, для построения классификатора $g(x,y) = \sum_{t=1}^T \log \frac{1}{\beta_t} f_{j_t}(x,y)$.

Пусть $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_K$ суть пороговые значения, в которых происходит изменение числа ошибок второго рода для классификатора $g(x,y)$ при решении задачи верификации. Классификатор $g(x,y)$ совершает ошибку верификации первого рода на (x_i, y_{c_i}), если для некоторого $t \in \{t_l\}_{l=1}^K$: $g(x_i, y_{c_i}) \leq t$. Определим функцию ошибки $g(x,y)$ в виде:

$$E = \sum_{l=1}^{K} Pr_{i \sim D}(g(x_i, y_{c_i}) < t_l)$$

.

Теорема. *Предположим, что классификаторы $f_{j_1}, f_{j_2}, ..., f_{j_T}$, выбранные алгоритмом AdaBoost имеют ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_T$, тогда существует не зависящая от T константа K, такая что:*

$$E \leq K e^{t_1} 2^T \prod_{t=1}^{T} \varepsilon_t$$

Исследования второго автора были частично поддержаны грантами: РФФИ 08-01-00034, НШ-1562.2008.1.

Литература

1. Y.Freund and R.E.Shapire, A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting. Journal of computer and system sciences 55, 119-139 (1997).

ОБ АВТОМАТНОЙ МОДЕЛИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ.

Волков Н.Ю. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
volkov-n-y@rambler.ru

Изучается процесс преследования коллективом автоматов ("хищников") нескольких независимых друг от друга автоматов ("жертв"). Преследование происходит в плоских областях (лабиринтах) следующих типов: полуплоскость, полоса ширины l, полуполоса ширины l, квадрант и квадрат со стороной l. Показано, что для каждого из первых трех типов лабиринтов существует конечный коллектив хищников, который в любом лабиринте данного типа "ловит" любую конечную независимую систему жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников. Это же утверждение верно для лабиринта, представляющего собой квадрант, если скорость хищников превосходит скорость жертв более чем в 3 раза. Однако, этот результат не имеет место для лабиринтов типа квадрат. Показано, что для произвольного конечного коллектива хищников существует натуральное число l, такое, что для произвольного начального расположения хищников в квадрате со стороной l существует независимая система жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, и их начальное расположение в квадрате со стороной l, при котором все жертвы "убегают" от хищников. В то же время показано, что для произвольной конечной независимой системы жертв существует конечный коллектив хищников, который при любом натуральном l "ловит" данную систему жертв в квадрате со стороной l при любом начальном расположении в квадрате жертв и стартующих из одной точки хищников.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов.* Наука, 1985.
2. Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич. *Независимые системы автоматов в лабиринтах.* Дискретная математика, т. 15 вып. 2, 2003.

3. Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич. *Коллективы автоматов в лабиринтах.* Дискретная математика, т. 15 вып. 3, 2003.
4. Грунская В.И., *О динамическом взаимодействии автоматов.* в кн.: Математическая кибернетика и ее приложения к биологии, МГУ, 1987, стр. 8-18.
5. Н.Ю.Волков. *Об автоматной модели преследования.* Дискретная математика, т.19, вып.2., стр. 131-160, 2007 г.
6. Н.Ю.Волков. *Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях.* Интеллектуальные системы, т.11, вып.1-4, стр. 361-402, 2007г.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕОБУЧЕНИЯ.

Воронцов К. В. (Москва, ВЦ РАН)
vokov@forecsys.ru

Получение точных оценок обобщающей способности остаётся открытой проблемой в теории статистического обучения, начиная с работ В. Н. Вапника и А. Я. Червоненкиса, выполненных около 40 лет назад. Практически все известные оценки сильно завышены и лишь на качественном уровне описывают связь переобучения со сложностью семейства алгоритмов. Они редко подходят для точных количественных предсказаний и управления процессом обучения. Остаётся открытым вопрос, не связано ли переобучение с какими-то более тонкими и пока не изученными явлениями.

В докладе показывается, сначала на экспериментальном материале, что *вероятность переобучения* существенно зависит не только от сложности семейства — числа различных алгоритмов в нём, но и от степени их различности. Для получения точных оценок необходимо одновременно учесть два явления: (1) для каждого алгоритма в семействе существует определённое количество *похожих* на него алгоритмов; (2) в каждой задаче семейство *расслаивается* по уровням частоты ошибок, причём основная масса алгоритмов сосредоточена в области наихудших частот (около 50%), и лишь малая доля алгоритмов имеют шансы быть полученными в результате обучения. Интересно, что пренебрежение одним из этих факторов сводит на нет все усилия, направленные на учёт второго.

Далее вводится *слабая (перестановочная) вероятностная аксиоматика*, и на её основе строится комбинаторная теория переобучения. Пусть для каждого алгоритма семейства можно указать множество *эталонных* объектов, которые обязаны присутствовать в обучающей выборке, и множество *шумовых* объектов, которых не должно быть в обучающей выборке, чтобы в результате обучения был получен именно этот алгоритм. В таком случае выписывается точная оценка вероятности переобучения, а также вероятности получения каждого из алгоритмов. Выведена общая формула и точные оценки для некоторых специальных семейств алгоритмов.

В докладе обсуждаются открытые проблемы и возникающие новые постановки комбинаторных задач.

Работа поддержана РФФИ (проект №08-07-00422) и программой ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

О РОСТЕ БЕЗОПАСНЫХ ЯЗЫКОВ

Галатенко А.В (МГУ,механико-математический ф-т)
agalat@msu.ru

В работе [1] введено определение безопасных языков как множеств слов, не выводящих конечный автомат из заданного множества состояний, и показано, что все безопасные языки регулярны. Безопасные языки являются максимальным классом, для которого проходят индуктивные доказательства безопасности автоматно моделируемых систем [2]; кроме того, они могут быть использованы для решения задачи выявления подозрительной активности.

Пусть L — некоторый регулярный язык, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $L(n)$ слова из L, длина которых равна n. Рассмотрим $G_L : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $G_L(n) = \sum\limits_{i \le n} |L(n)|$. $G_L(n)$ называется функцией роста языка L ([3]). Содержательно она означает число слов в L, длина которых не превосходит n. Функция роста используется для оценки качества приближений языков. Мерой близости языков L_1 и L_2 может служить, например, отношение $\frac{G_{L_1 \cap L_2}}{G_{L_1 \cup L_2}}$. Охарактеризуем возможные предельные значения функций роста безопасных языков.

Теорема. *Пусть SL — безопасный язык. Тогда либо существуют $c, C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\rho \in \mathbb{A}$, $\rho > 1$, такие что $cn^k\rho^n \lesssim GL_{SL}(n) \lesssim Cn^k\rho^n$, $n \to \infty$, либо существуют $N \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что*

$GL_{SL}(n) = c$ *для любого* $n > N$, *либо существуют* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq q$, *такие что* $GL_{SL}(n) = \frac{p}{q}n + o(n)$, *либо существуют* $p, q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, *такие что* $GL_{SL}(n) = \frac{p}{q}n^k + o(n^k)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., проф. В.Б. Кудрявцеву.

Литература

1. Галатенко А.В., "Автоматные модели защищенных компьютерных систем" — "Интеллектуальные системы", т.11, вып. 1–4, Москва, 2007, с. 403–418.

2. Галатенко А.В., "Об автоматной модели защищенных компьютерных систем". — "Интеллектуальные системы", т. 4, вып. 3–4, Москва, 1999г., с. 263–270.

3. А.С. Строгалов "Об ε-моделировании конечных автоматов" — Труды Всесоюзного семинара по дискретной математике, Москва, издательство МГУ, 1986.

КОНСТАНТНЫЙ В СРЕДНЕМ ФОНОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ДОМИНИРОВАНИИ

Гасанов Э.Э. (МГУ имени М.В.Ломоносова)
el_gasanov@mail.ru

Для задач поиска в базах данных типично наличие двух сущностей: поисковой машины и пользователя. В стандартной ситуации взаимодействие этих сущностей происходит по следующей схеме. Пользователь передает поисковой машине запрос на поиск. Далее поисковая машина ищет в базе данных все записи, удовлетворяющие запросу, и выдает их пользователю в качестве ответа. В случае, когда пользователем также является машина, и каждый элемент ответа обрабатывается пользователем некоторое время, для пользователя более выгодна следующая схема взаимодействия. Поисковая машина сразу по нахождению очередного элемента ответа выдает его пользователю и продолжает поиск на фоне обработки пользователем полученных элементов ответа. Такая схема взаимодействия называется фоновым поиском. И с точки зрения пользователя под сложностью фонового поиска понимают суммарное время ожидания пользователем элементов ответа, причем при поиске в базах данных более актуально среднее по запросам время. В частности, если поисковая машина выдает каждый следующий элемент ответа быстрее, чем пользователь успевает обрабатывать элемент, то эта сложность вырождается во время ожидания первого элемента ответа. Второй мерой сложности алгоритма является объем памяти, необходимый для хранения структур данных. Формальное описание модели фонового поиска приведено в [1].

В двумерной задаче о доминировании база данных состоит из точек вещественной плоскости. Запросом также является точка плоскости. Необходимо перечислить все элементы базы данных, по обоим координатам не превышающие запрос. Стандартный алгоритм решения двумерной задачи о доминировании при константном в среднем времени поиска (без учета времени на перечисление ответа) требует квадратичных от размера базы данных затрат по памяти.

Разработан фоновый алгоритм решения двумерной задачи о доминировании с константной временной сложностью и линейным объемом памяти.

АВТОМАТНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ В БИОЛОГИИ

Ю.Г. Гераськина (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
ger_julia@mail.ru

В работе строится автоматная модель процесса транспортировки вещества в легких и изучаются свойства этой модели.

Оказалось, что процесс транспортировки можно достаточно адекватно представить некоторым структурным автоматом.

Рассмотрены две основные ситуации, когда легкие функционируют в чистой среде, а также, когда эта среда не является таковой. В обоих случаях решены задачи времени самоочищения, описания стартовых и финальных состояний соответствующего автомата, найдены критерии переводимости одного состояния в другое, построены семейства попарно непереводимых друг в друга состояний, оценены все основные параметры, характеизующие указанные задачи.

Рассмотрения чистой среды успешно распространены на случай загрязненной, но стационарной среды. Описаны все такие среды, в которых легкие функционируют с заданной долей допустимого загрязнения. Это описание получено как с помощью комбинаторных средств, так и с помощью средств алгебры языков. Рассмотрения модели для стационарных сред удалось распространить на случай легких в переменных по загрязнению средах. Выяснилось, что полученые для предыдущих случаев результаты с помощью "склеивающих"процедур алгебро-алгоритмического характера позволяют практически полностью описать структурный автомат, адекватный функционированию легких в переменно-загрязненных средах и решить весь цикл упомянутых задач для этого общего случая.

Автор выражает благодарность академикам Кудрявцеву Валерию Борисовичу и Чучалину Александру Григорьевичу за постановку задачи и научное руководство.

Литература

1. Гераськина Ю. Г. *Об одной автоматной модели в биологии.* Дискретная математика 2007, Т. 19, вып. 3, стр. 122-139.

2. Гераськина Ю. Г. *Автоматная модель транспортировки вещества по легким в загрязненных стационарных средах.* Интеллектуальные системы 2008, Т. 12, вып. 1-2, стр. 151-179.

3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов* М.: Наука, 1985, 320 с.

О ЧИСЛЕ МАКСИМАЛЬНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В ДЕРЕВЬЯХ ФИКСИРОВАННОГО ДИАМЕТРА

Дайняк А.Б. (Москва, МГУ)
dainiak@gmail.com

Всякое подмножество попарно не смежных вершин графа называется *независимым* (н. м.). Под *максимальными* н. м. (м. н. м.) будем понимать максимальные по включению н. м. графа. Через $i_M(G)$ обозначим число м. н. м. в графе G. *Диаметр* дерева — число ребер в его наибольшей цепи. Всякое дерево диаметра d на n вершинах, имеющее максимальное число м. н. м. среди всех деревьев с данным числом вершин и диаметром, будем называть (n, d)*-максимальным.* Пусть $\psi_k = \psi_{k-2} + \psi_{k-3}$ при $k \geq 3$, и $\psi_0 = \psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$. Для n, d таких, что $4 \leq d < n$, определим величину $M(n, d)$. При $d \geq 4$, $(n-d) = 2k+1$, $k \geq 0$: $M(n,d) = \psi_{d-1} + (2^{(n-d+1)/2} - 1)\psi_{d-2}$. При $n-2 = d \geq 4$: $M(n,d) = \psi_{d-2} + \psi_d$. При $d \in \{5,6\} \cup [8, \infty]$, $(n-d) = 2k$, $k \geq 2$: $M(n,d) = 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1}$. При $d \in \{4,7\}$, $(n-d) = 2k$, $k \geq 2$: $M(n,d) = 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} + 1$. Доказана следующая

Теорема. *Для любых n, d, таких, что $4 \leq d < n$, и любого дерева T диаметра d на n вершинах выполнены неравенства $\psi_{d+1} \leq i_M(T) \leq M(n,d)$. Оценки достижимы при всех указанных n и d. При $d \geq 9$ существует единственное с точностью до изоморфизма (n,d)-максимальное дерево.*

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00444.

КЛАССИФИКАЦИЯ КЛАССОВ ПОСТА ПО ИХ СПОСОБНОСТИ ГАРАНТИРОВАТЬ РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ A-ПОЛНОТЫ ДЛЯ ДЕФИНИТНЫХ АВТОМАТОВ.

Жук Д. Н. (МГУ)
zh_dmitriy@mail.ru

В работе рассматриваются системы вида $M = F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Исследуется задача об A-полноте относительно операции суперпозиции для таких систем автоматов. Все классы Поста были разделены на сильные и слабые по их способности гарантировать разрешимость проблемы A-полноты.

P_2 — множество всех булевых функций. Рассмотрим конечные автоматы, имеющие ровно 1 выход и получающиеся при помощи операции суперпозиции из элементов, являющихся функциями из P_2 или единичной задержкой с начальным состоянием 0 или 1. Такие автоматы будем называть дефинитными. Ясно, что каждой булевой функции из P_2 соответствует дефинитный автомат. Пусть

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3,$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4,$$

$$h_3^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4.$$

Пусть F — замкнутый класс булевых функций. Определим проблему А-ПОЛНОТА(F): дана конечная система ν дефинитных автоматов; требуется установить, A-полна ли система $F \cup \nu$.

ТЕОРЕМА. *Проблема А-ПОЛНОТА(F) алгоритмически разрешима точно тогда, когда для какого-то $f \in \{h_2, h_3, h_3^*, x \oplus y \oplus z\}$ выполняется $f \in F$.*

Автор работы выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00240).

Литература

1. Post E. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. Наука, Москва, 1985.

О СЛОЖНОСТИ СБОРКИ И ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ.

Зайцев Д.В. (Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова)
zaitsev.d@gmail.com

Работа посвящена изучению сложности задания графов. В первой части работы изучается сложность схем построения графов при помощи двух операций склейки вершин, которые заключаются в отождествлении пары вершин с удалением петель и кратных ребер. Первая операция применяется к паре вершин одного графа, вторая – к паре вершин двух графов, не имеющих общих элементов. В качестве простейшего берется граф, состоящий из пары вершин, соединённых ребром. Любой промежуточный результат, т. е. построенный на каком-то этапе граф, разрешено использовать неоднократно. Под сложностью схемы понимается число применений операций над графами. Схемный подход к заданию графов рассматривался ранее, например, в работе С.В. Яблонского [1], но в ней не изучался вопрос о сложности схемы построения графов, и использовались другие операции. В этой работе получены порядки сложности схемного задания для полного двудольного и полного графа [3], порядок функции Шеннона для класса деревьев, асимптотика логарифма функции Шеннона для класса неориентированных связных графов без петель и кратных рёбер [4].

Во второй части изучается сложность универсальных графов [2], которые позволяют получать графы заданных классов в качестве подграфов, порождённых подмножествами их вершин. Получены оценки минимального числа вершин в универсальных графах для двух классов графов, у которых вершины помечены натуральными числами. Для класса неориентированных, необязательно связных графов, не имеющих петель и кратных рёбер, получен порядок. Для класса неориентированных деревьев получена асимптотика. Для первого класса графов рассмотрены также универсальные графы, для которых разрешается варьирование добавлением ограниченного числа рёбер. Получен порядок числа вершин в минимальном универсальном графе данного вида [5]. Рассматриваются также прямоугольные решётки с конечным числом вершин и классы их подграфов. В связи с этим изучается сложность универсальных матриц, которые позволяют получать матрицы заданного класса в качестве подматриц. Под сложностью понимаем число элементов универсальной матрицы. Подобные объекты рассматривались в работах, посвященных циклам и торам де Брёйна. В работе разрешается некоторое варьирование универсальной матрицы при идентификации подматрицы и не требуется однозначность. Получена лучшая по порядку универсальная матрица. Результаты могут быть интересны в связи со сжатием информации, а также при проектировании чипов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.С. Подколзину, под руководством которого выполнена эта работа.

Литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2002, 384 с.
2. Alstrup S., Rauhe T. Small Induced-Universal Graphs and Compact Implicit Graph Representations.–Annual Symposium on Foundations of Computer Science.Vol.43,IEEE Computer Societu Press,2002,p.53-62.
3. Зайцев Д. В. О сложности сборки полных и полных двудольных графов.–Дискретная математика. Т. 20, 2–М.,2008,с.82–99.
4. Зайцев Д. В. О сложности сборки графов. – Интеллектуальные системы. Т. 9, вып. 1–4. – М., 2005, с. 381 – 395.
5. Зайцев Д. В. О сложности вложения графов. – Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. – М., 2007, с. 473 – 492.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЛЛЕКЦИЙ ЯЗЫКОВ В КОНЕЧНЫХ АВТОМАТАХ

Кибкало М. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
mkibkalo@gmail.com

Рассматривается случай совместной представимости семейства языков в конечном автомате. Решена задача о нахождении точного значения максимальной сложности семейства конечных языков в зависимости от максимальной длины слова в них.

Пусть A, B – конечные алфавиты, $|A| = N, |B| = M$. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ определим классы языков $L_k(A) = \{L \subseteq A^* \mid \forall \alpha \in L \Rightarrow |\alpha| = k\}$ и $L_{\leqslant k}(A) = \{L \subseteq A^* \mid \forall \alpha \in L \Rightarrow |\alpha| \leqslant k\}$.

Пусть $L \subseteq A^*$ – регулярный язык, $s \geqslant 2$, $s \in \mathbb{N}$. s–коллекцией языка L назовем семейство языков $\tau(L, s) = \{L_0, ..., L_{s-1}\}$ таких, что: $L_i \cap L_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 0, ..., s-1$; $\bigcup_{i=1}^{s-1} L_i = L$; $L_0 \stackrel{def}{=} A^* \backslash L$

Конечный инициальный автомат $V_{q_0} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_0)$ представляет s–коллекцию языка L $\tau(L, s)$ $(V_q \sim \tau(L, s))$ с помощью системы подмножеств выходного алфавита $\{B_0, ..., B_{s-1}\}$, $B_i \subset B$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 0, ..., s-1$, если

$$\forall \alpha \in L_i \quad \psi(q_0, \alpha) \in B_i, \quad i = 0, ..., s-1.$$

Пусть $N \geqslant 2$, $M \geqslant 2$, $K \subseteq A^*$ – класс регулярных языков над алфавитом A. c–сложностью K назовем

$$S_{cc}(K, N, M) = \max_{L \in K} \max_{\tau(L,M)} \min_{V_q \sim \tau(L,M)} S_{ac}(V_q),$$

где $S_{ac}(V_q)$ - число состояний в автомате.

Теорема. *$\forall N \geqslant 2$, $M \geqslant 2$, $\forall k \geqslant 1$ существует $p \geqslant 0$, конечный язык $L \in L_k(A)$, коллекция $\tau(L, M)$ и ИКА $V_q(k, N, M) \sim \tau(L, M)$, такие что*

$$S_{ac}(V_q(k, N, M)) = S_{cc}(L_k(A), N, M) = \frac{N^{k-p} - 1}{N - 1} + \sum_{i=1}^{p} (M^{N^i} - p + 1)$$

Следствие. *$\forall N \geqslant 2$, $M \geqslant 2$ для $S_{cc}(L_k(A), N, M)$ выполнено*

$$\frac{1}{N-1} \cdot \frac{N^k \cdot \log_N M}{k} \lesssim S_{cc}(L_k(A), N, M) \lesssim \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N^k \cdot \log_N M}{k}$$

Литература

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. Наука, Москва, 1985.

ОБ АЛГОРИТМЕ ЗАКРЫТОГО СУНДУКА

Хамдамов Р.Х., Кодиров Н.Х.

r.hamdamov@msu.uz, nodir_qodirov@yahoo.com

Алгоритм закрытого сундука основывается на задаче о рюкзаке, которая впервые была предложена 1979 году Ральфом Марклином и Мартином Хеллманом. Тот алгоритм использовал рюкзачные системы и элементы рюкзака передались от одного абонента к другому через открытий канал после использования аппарата модулярной арифметики для каждого элемента рюкзака /1/. В предлагаемом новом алгоритме элементы рюкзака (сундука) генерируются каждым абонентом отдельно на основе их закрытого параметра и отсюда происходит названия "алгоритм закрытого сундука". Для генерации закрытых ключей используются псевдослучайные числа, имеющие определенную закономерность распределения.

Предположим абоненты A и B должны обменяться сообщениями. Здесь абонент B - отправитель, а абонент A - получатель. Для обмена сообщением в данном алгоритме они поступают по следующей вычислительной схеме.

1. Абоненты A и B генерируют общий закрытий параметр $e_A^Z = e_B^Z = e^Z$, используя алгоритм генерации закрытых ключей, например Диффи-Хеллмана.

2. Для шифрования открытого сообщения $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$, которое построено в алфавите - Z , абонент B на основе общего закрытого параметра e^Z генерирует n - элементы закрытого сундука $K^Z = \{k_1^Z, k_2^Z, ..., k_n^Z\}$ используя генератор псевдослучайных чисел. После этого берутся коды букв $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$ открытого сообщения в алфавите Z , где длина каждого бинарного кода равняется на d . Бинарные коды символов сообщения сливаются в одну последовательность и разбивается на m количество блоков, в котором каждый из них имеет длину n .

$$X' = \{x'_{11}, x'_{12}, ..., x'_{1n}\ x'_{21}, x'_{22}, ..., x'_{2n}\ ...\ x'_{m1}, x'_{m2}, ..., x'_{mn}\}$$

Скалярно умножив два вектора X' и K^Z, получим вектор - целочисленный шифртекст $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$

$$X' = \{1\ 1 ... 0\ \ 1\ \ 0\ ...\ 1\ \ ...\ \ 0\ \ 1 ... 1\}$$

$$X' = \{x'_{11}\ \ x'_{12} ... x'_{1n}\ \ x'_{21}\ \ x'_{22}\ ...\ x'_{2n}\ \ ...\ \ x'_{m1}\ \ x'_{m2} ... x'_{mn}\ \}$$

$$K^Z = \{k_1^Z\ \ k_2^Z ... k_n^Z\ \ k_1^Z\ \ k_2^Z\ ...\ k_n^Z\ \ ...\ \ k_1^Z\ \ k_2^Z ... k_n^Z\ \}$$

$$S = \{x'_{11} \cdot e_1 + ... + x'_{1n} \cdot e_n = s_1\ \ x'_{21} \cdot e_1 + ... + x'_{2n} \cdot e_n = s_2\ \ ...$$

$$x'_{m1} \cdot e_1 + ... + x'_{mn} \cdot e_n = s_m\}$$

который отправляется абоненту A.

3. Соблюдая вышеизложенную схему, абонент A аналогичным путем генерирует n элементы $K^Z = \{k_1^Z, k_2^Z, ..., k_n^Z\}$ сверхвозрастающего закрытого сундука, используя закрытый параметр e_A^Z.

Для получения *первоначального открытого текста*

$$X' = \{x'_{11}\ \ x'_{12} ... x'_{1n}\ \ x'_{21}\ \ x'_{22}\ ...\ x'_{2n}\ \ ...\ \ x'_{m1}\ \ x'_{m2} ... x'_{mm}\ \}$$

от шифртекста $S = \{s_1,\ s_2, ..., s_m\}$ абонент A анализирует элементы $K^Z = \{k_1^Z, k_2^Z, ..., k_n^Z\}$ один раз справа налево, т.е. для каждого элемента $S_j = \{s_1,\ s_2, ..., s_m\}, j = 1, 2, ..., m$, проверяются условия

$$S_j = \begin{pmatrix} S_j, \text{ если } S_j < k_i^Z \\ S_j - k_i^Z, \text{ если} S_j \geq k_i^Z, i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ...m \end{pmatrix}$$

Здесь, если выполняется условие $S_j \geq k_i^Z$ (это означает: для формирования шифра $S_j = \{s_1,\ s_2, ..., s_m\},\ j = 1, 2, ..., m$ было использовано k_i^Z), то соответствующему индексу $X'_j,\ j = 1, 2, ..., m$, присваивается "1" , в противном случае, этот индекс равняется "0". Повторяя этот цикл для каждого элемента $S_j = \{s_1,\ s_2, ..., s_m\},\ j = 1, 2, ..., m$, получим приведенный открытий текст, где длина их элементов равна - n . Последовательно поставляя все элементы приведенного текста $X'_j,\ j = 1, 2, ..., m$, получим собранное представление открытого текста - X. Разбив его на части, длина которых равно длине бинарного представления букв Z - алфавита получим бинарные коды символов открытого текста. Взяв символы от алфавита соответсвуюшим кодам и поставляя их последовательно восставливаем открытий текст $X = \{x_1,\ x_2, ..., x_l\}$.

Литература

1. Брюс Шнайер, Прикладная криптография, Триумф, 2002.

СИМПЛЕКС-КОДОВЫЙ ПОДХОД К РАСПОЗНАВАНИЮ ЗРИТЕЛЬНЫХ ОБРАЗОВ

В. Н. Козлов (Москва, МГУ,мех.-мат. факультет, кафедра МАТИС)
vnkozlov@mail.ru

Изображение - конечное (непустое) множество точек на плоскости (или в трехмерном пространстве, в случае объемных изображений). Содержательным обоснованием этому может служить то, что любое реальное (нецветное) изображение можно аппроксимировать изображением из точек, причем градации ?серого цвета? передаются разной плотностью точек в разных частях изображения. Не закрывает это дорогу и к рассмотрению цветных изображений, поскольку, как известно, цветное изображение можно представить тремя нецветными. Наконец, все, что мы видим, мы видим посредством глаз. Изображение из среды проецируется на сетчатку глаз, что приводит к возбуждению части рецепторных клеток, т.е в конечном счете - к формированию на сетчатке аналога составленного из точек изображения.

Рассматриваемый подход к распознаванию существенным образом опирается на введение внутренней кодировки изображений, инвариантной к аффинным их преобразованиям.

В плоском и объемном случаях внутренний код изображений, для наглядности - фигур, вводится так. Нумеруются точки фигуры; с учетом ее размерности рассматривается множество всех симплексов, образованных точками фигуры; для каждого симплекса вычисляется мера. Код фигуры образует множество всех троек, состоящих из двух симплексов и числа, являющегося отношением их ненулевых мер.

Для каждой из размерностей доказано, что фигуры с точностью до перенумерации их точек имеют один и тот же код тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Сравнение (и распознавание) произвольных фигур A и B основывается на следующем. Порождаются множества A^* и B^* всех фигур, получаемых из A и B преобразованиями из некоторого класса (в общем случае аффинными). Рассматривается множество величин $r(A', B')$, где A' из A^*, B' из B^*, являющихся расстоянием между множествами A' и B' (расстояние Хаусдорфа). Показывается, что минимум на этом множестве достигается на конечном его подмножестве, что и позволяет его вычислить. Этот минимум и служит мерой сходства и различия фигур. Содержательно это можно представить как такое наложение фигур друг на друга , при котором минимизируется степень их несовпадения по форме, причем независимо от первичной взаиморасположенности и взаимоориентации фигур, их размеров, растянутости или сжатия, локальных погрешностей.

Рассмотрено (на доказательном уровне) восстановление объемных фигур по их плоским проекциям (моделирование стереовосприятия).

К настоящему времени имеются две компьютерные реализации подхода: по распознаванию произвольных фигур и по стереовосприятию.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АВТОМАТОВ : ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Кудрявцев В.Б. (МГУ им. М.В. Ломоносова), Грунский И.С. (Донецк, Государственный университет информатики и искусственного интеллекта), Козловский В.А. (Донецк, ИПММ НАН Украины)

kozlovskii@iamm.ac.donetsk.ua

Доклад посвящен обзору результатов, полученных в последнее время, в том числе, и авторами, в теории представлений автоматов и экспериментов с ними и устанавливающих связи экспериментов и определяющих соотношений. На плодотворность выявления связей автоматов и алгебраических конструкций указывал еще В.М.Глушков, отмечая первую работу Ю.И.Соркина по теории определяющих соотношений для автоматов.

Структурно доклад содержит следующие разделы. Во вводной части обсуждаются прямые и обратные задачи теории автоматов, задачи дескрипции автоматов и их варианты, а также основные задачи теории представлений и контрольных экспериментов: построение, характеризацию, сложность.

Далее вводятся и обсуждаются алгебраические дескрипции и связанные с ними вопросы: задание автоматов определяющими соотношениями; системы определяющих соотношений для частичных автоматов и обобщения определяющих соотношений введением в них неравенств и определяющих пар для групповых автоматов; метрические характеристики систем определяющих соотношений.

Одним из основных видов дескрипций автоматов являются эксперименты и представления автоматов. Рассмотрены условия существования экспериментов и однозначности описания автоматов экспериментами и представлениями,сложность экспериментов и представлений.

Заключительный блок результатов касается взаимосвязи экспериментов и определяющих соотношений. Рассмотрены так называемые размеченные эксперименты и системы определяющих соотношений, приведены результаты, устанавливающие связь экспериментов и определяющих систем типа равенств-неравенств. Для циклических экспериментов групповых автоматов дана характеризация через определяющие пары. Приведены точные оценки параметров таких экспериментов, в том числе, лакунарные оценки их длины, дана алгебраическая интерпретация полученным результатам.

СИНТЕЗ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ.

Кудрявцев В.Б., Алисейчик П.А., Строгалов А.С (МГУ им. М.В. Ломоносова), Вашик К. (Германия)

vbk@lsili.ru, paa.idea@mail.ru, strogalov@mail.ru

В работе показано, что автоматные модели служат удобным языком для формализации реального процесса обучения. Строятся формализованные фрагменты различных моделей обучения на основе систем взаимодействующих автоматов. Рассматриваются возможности функционального языка описания оценок событий, возникающих в процессе обучения, допускающего естественную интерпретацию и облегчающего процесс взаимодействия между экспертами и разработчиками компьютерных систем обучения. Приводятся примеры конкретных разработок компьютерных систем обучения в различных слабо- и среднеформализованных предметных областях, таких как медицина, экономика, гуманитарные науки и т.д.

О РАЗРЕШИМОСТИ СВОЙСТВА ОБРАТИМОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ БИНАРНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Кучеренко И.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

kucherenko@intsys.msu.ru

Двумерные бинарные клеточные автоматы (БКА) формируют простейший “технически реализуемый” класс клеточных автоматов. Одним из наиболее важных подклассов в нем является множество обратимых БКА, которые характеризуются тем, что в процессе их функционирования не происходит потери информации.

Известно, что задача распознавания свойства обратимости одномерных БКА, заданных шаблоном соседства и локальной функцией переходов (ЛФП), алгоритмически разрешима. Для двумерных (и многомерных) БКА эта задача уже не является разрешимой [1]. Более детальный анализ расслоения класса двумерных БКА на подклассы по принадлежности их ЛФП к некоторому классу Поста, проведенный автором в работе [2], позволил очертить множество нетривиальных обратимых БКА.

При дальнейшем исследовании класса БКА автором были выявлены связи между разрешимостью задачи распознавания обратимости и пространственным расположением слагаемых полинома Жегалкина ЛФП. На этом пути возникли понятия "слоев" клеточного автомата. Установлено, что в классе двумерных двухслойных БКА свойство обратимости алгоритмически разрешимо. Для класса трехслойных БКА свойство обратимости уже алгоритмически не разрешимо. Для класса слоистых БКА установлена разрешимость свойства обратимости [3].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В. Б. за постановку задачи и внимание к работе. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-01-00240.

Литература

1. Кучеренко И. В. О свойстве обратимости бинарных клеточных автоматов. — В кн.: Труды XXVI Конференции молодых ученых. — М.: Мех.-мат. факультет МГУ, 2004. — 155–158.

2. Кучеренко И. В. О структуризации класса обратимых бинарных клеточных автоматов. *Интеллектуальные системы,* — 2003. **9** №1-4, — 445–456.

3. Кучеренко И. В. Об условиях разрешимости обратимости булевых клеточных автоматов. *Интеллектуальные системы,* — 2008. **11** №1-4, — 721-726.

О СРЕДНЕЙ СЛОЖНОСТИ ПОИСКА ИДЕНТИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БАЗ ДАННЫХ

Кучеренко Н.С. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
nsk.email@gmail.com

Теория хранения и поиска информации является важным разделом теории интеллектуальных систем. Одним из ключевых объектов этой теории является информационный граф (ИГ) — управляющая система, которая позволяет рассматривать имеющиеся модели данных и задачи, связанные с ними, с более общих позиций [1].

В работе рассматривается средняя сложность оптимальных ИГ, которые реализуют алгоритмы решения задачи поиска идентичных объектов для классов баз данных, являющимися случайными векторами с независимыми компонентами из интервала $(0, 1)$. Данные классы задач задаются функциями плотности распределения запросов f и элементов g.

Автором получены условия на функции f и g, при выполнении которых сложность оптимального ИГ в среднем по классу имеет порядок логарифма от мощности базы данных n [2, 3]. Если функции f и g не удовлетворяют этим условиям, то для любого отрезка вида $[b, b+2], b \in R, b > 1$, можно построить классы задач, на которых сложность оптимального алгоритма в среднем не выходит за пределы отрезка при увеличении мощности базы данных.

Однако функции роста математического ожидания сложности оптимального ИГ не ограничиваются только логарифмом и константой. В работе [3] автором построен класс задач, на котором поведение сложности оптимального алгоритма в среднем отличается от логарифма, но снизу ограничено растущей функцией.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Гасанову Э. Э. за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б. Теория хранения и поиска информации. Физматлит, Москва, 2002.

2. Кучеренко Н.С. Сложность поиска идентичных объектов в случайных базах данных. Интеллектуальные системы, 2007, 11, 1–4, 525–551.

3. Кучеренко Н.С. Средняя сложность поиска идентичных объектов для случайных неравномерных баз данных. Дискретная математика, в печати.

СОЗДАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМОСТИ

И.А. Лавров (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
ilavrov37@mail.ru

Современная Теория вычислимости включает в себя достаточно большое число направлений как по абстрактным, так и прикладным аспектам. Число научной литературы по Теории вычислимости (монографий и статей) постоянно растет. Ориентироваться в этой массе довольно затруднительно.

В настоящее время существуют различные варианты подобных баз, в основном на иностранных языках. Однако в них крайне скупо отражены работы, опубликованные на русском языке. Отсутствуют и многие иностранные работы.

Цель создания данной базы состоит в том, чтобы специалисты в различных направлениях Теории вычислимости имели достаточно полное на данный момент представление о многообразии научных исследований в этой непрерывно развивающейся области теории алгоритмов.

В базу включены более 3000 известных составителю научных монографий и статей по теории рекурсии, степеням неразрешимости, элементарным теориям, обобщенным вычислениям и их приложениям. В меньшей степени указаны работы по вероятностным алгоритмам, реверсивной математике, полиномиальным алгоритмам и обобщениям вычислимости и приложениям в конкретных математических направлениях.

В базе имеется более 800 работ, напечатанных на русском языке, 200 авторов. А также более 2200 работ, напечатанных на иностранных языках, 600 авторов.

Предполагается, что в базу будут вноситься необходимые коррективы и дополнения по мере их поступления.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НА ГРАФАХ, СОХРАНЯЮЩИХ СТЕПЕННУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Лашева М.И. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)

maria.lasheva@gmail.com

В 1962 г. С. Хакими поставил задачу построения эффективного алгоритма для перебора всех графических реализаций заданной степенной последовательности. В 1955 г. В. Гавел предложил процедуру перехода от одного неориентированного графа без петель и кратных ребер к другому с сохранением степенной последовательности. Этот переход есть последовательное выполнение операций переключения ребер (без получения кратных ребер и петель).

Автором получен конечно-автоматный алгоритм A, который позволяет оптимизировать его время работы по сравнению с известным алгоритмом В. Гавела и С. Хакими и может быть использован для оптимизации свойств компьютерных сетей с заданным множеством провайдеров и ограничениями на коммутационные возможности каждого из них. При этом использование конечно-автоматного алгоритма A, в отличие от алгоритма В. Гавела - С. Хакими, не потребует изучения глобальных характеристик всей сети, а лишь знания ее локальных свойств. Также верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Время работы алгоритма A для пары занумерованных графов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, составляет $O(k^2n^2)$.*

Размер задачи для графов с n вершинами - n^2.

Теорема 2. *Объем памяти алгоритма A отличается от размера задачи не более, чем на константу.*

Автором введена операция переключения для орграфов и гиперграфов. А также построены конечно-автоматные алгоритмы, позволяющие распространить результаты теорем 1, 2.

Теорема 3. *Время работы такого алгоритма для пары занумерованных орграфов с n вершинами, степень каждой из которых по сумме входящих и исходящих ориентированных ребер не более k, составляет $O(k^2n^2)$, а объем памяти отличается от размера задачи не более, чем на константу.*

Теорема 4. *Время работы такого алгоритма для пары занумерованных гиперграфов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, и гиперребрами, каждое из которых содержит не более m вершин, составляет $O((max(k,m))^2 2^{2n})$, а объем памяти отличается от размера задачи не более, чем на константу.*

В заключение выражаю благодарность научному руководителю А.А.Часовских за руководство над работой.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Изд-во Наука, 1985.
2. Hakimi S.L. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graphs. I J. Soc. Indust. Appl. Math., 1962. 10, N 3. 496 - 506.
3. Гавел В. Заметка о существовании конечных графов. Cas. Pert. - Mat., 1955. 80, N 4. 477 - 481.
4. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Изд-во Наука, 1990.
5. Ryser H.J. Combinatorial Mathematics. The Garus Mathematical Monographs, N 4. Rahway, N. J.: Mathematical Association of America, 1963.

6. Лашева М.И. Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность. Интеллектуальные системы, 2007. 11, 551-592.

СИНТЕЗ ОПЕРАТОРОВ АГРЕГИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ В НЕЧЕТКИХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПО ЭКСПЕРТНЫМ ОПИСАНИЯМ

Лебедев А.А. (мех-мат МГУ им. М.В.Ломоносова)
lebedev_aa@rambler.ru

Задача выбора оператора агрегирования информации – определение функции, характеризующей зависимость некоторой величины от наблюдаемых параметров – возникает при разработке большинства систем сбора и обработки информации. Особую роль эта задача играет для иерархических систем [2]. В работе [1] был впервые рассмотрен подход на основе нечетких условий: на множестве функций k-значной логики от n переменных на основе экспертных описаний задавалась функция принадлежности, и в качестве оператора агрегирования выбиралась та, степень принадлежности которой максимальна. В докладе предлагается развитие это подхода.

Вводится понятие графа нечеткого условия, определяемого как $G = (X, Y, \rho, T)$, где $X = \{(\alpha, a), \alpha \in E_k^n, a \in E_k\}$ – множество вершин, Y – множество ребер, (неориентированных, допускаются петли и висячие вершины, кратные ребра не допускаются), $\rho : Y \to [0; 1)$ – веса ребер, T – Т-норма.

Тогда для произвольной функции k-значной логики $f \in P_k(n)$ значение функции принадлежности $\mu_G(f)$ определяется следующим образом: выделяется подмножество вершин графа $\{(\alpha, f(\alpha)), \alpha \in E_k^n\}$. Значением $\mu_G(f)$ является значение Т-нормы от весов всех ребер подграфа, индуцированного этим подмножеством вершин.

Этот подход позволяет задавать такие условия на функцию, как, например, на значение функции в точке, на локальное поведение функции по одной или нескольким переменным, а также связывать несколько условий логическими операциями ("И" и "ИЛИ").

Доказана теорема об NP-полноте задачи поиска оптимального оператора агрегирования по условию, заданному графом, а также выделены подзадачи, разрешимые за полиномиальное время.

Литература

1. Рыжов А.П. Об агрегировании информации в нечетких иерархических системах. Интеллектуальные системы. Т.6. Вып.1-4. 2002. с.341-364.

2. Рыжов А.П. Информационный мониторинг сложных процессов: технологические и математические основы. Интеллектуальные системы, Том 11, вып. 1-4, 2008, с. 101-136.

ПОВЫШЕНИЕ СТОЙКОСТИ КРИПТОСИСТЕМ ПРИ ПЕРЕХОДЕ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Лёвин В.Ю., Носов В.А. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
levval@yandex.ru

Хорошо известно, что при взломе криптосистем на основе эллиптических кривых основную криптографическую сложность (стойкость) дает решение соответствующей задачи дискретного логарифмирования на эллиптической кривой. В работе проведен анализ изменения сложности при переходе от конечных полей на эллиптические кривые. В ходе анализа установлено, что возрастание сложности при подобном переходе не приводит к увеличению размеров ключей, а наблюдается эффект уменьшения их длин при сохранении общей криптостойкости системы. Помимо этого, на основе введенного понятия подстановки на точках эллиптической кривой и полученных ранее алгоритмов кодирования конечных алфавитов точками эллиптических кривых [1] разработан метод шифрования текстов, который может быть обобщен на сверхбыстрое шифрование любого рода информации. Построенные криптосистемы, способны работать в системах реального времени на базе маломощных микропроцессоров, что делает их незаменимыми, например, в современной мобильной связи.

Теорема 1. *Пусть C_{DLP}—сложность решения задачи дискретного логарифмирования (DLP) в конечном поле, C_{ECDLP}—сложность решения соответствующей задачи на эллиптической кривой. Тогда $C_{ECDLP}(n) \approx C_{DLP}(l)$, где $n = 2\left(\log_2\left(\exp\left(c_1 l^{1/3}(\ln(l\ln 2))^{2/3}\right)\right)\right)$, $n, (l)$—количество бит на входе в $ECDLP$ (DLP).*

Теорема 2. *Сложность решения задачи дискретного логарифмирования ($ECDLP$) на эллиптической кривой над простым полем F_p эквивалентна решению (DLP) в мультипликативной группе поля F_{p^s}, где $s = O\left(\frac{n^2}{(\ln 2)^2}\right)$, n—количество бит на входе в ($ECDLP$).*

Литература

1. Лёвин В.Ю., Носов В.А., Панкратьев А.Е. Кодирование алфавитов точками эллиптических кривых. 2007г.

О РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ СХЕМАМИ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ, ВЛОЖЕННЫМИ В ГИПЕРКУБЫ

Ложкин С.А., Седелев О.Б. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
lozhkin@cs.msu.su sedelev@gmail.com

Задача синтеза является основной задачей теории управляющих систем [1,2]. Во многих случаях схема, вычисляющая заданную функцию, подвергается дальнейшей "геометрической" реализации, то есть вложению в некоторую геометрическую структуру. В работе рассматривается задача реализации ФАЛ с помощью двоичных решающих диаграмм (BDD) и схем из функциональных элементов (СФЭ), гомеоморфно вложенных в единичный куб. Пусть $R(n)$ ($R_{\text{Б}}(n)$) - функция Шеннона которая равна минимальной размерности единичного куба, допускающего для любой ФАЛ $f(x_1, ., x_n)$ гомеоморфное вложение реализующей её BDD (соответственно СФЭ в базисе Б). Доказано что [3,4] эти функций Шеннона с точностью до константы равны $n - \lfloor \log\log n \rfloor$. В частности: $\lceil n - \log\log n - \log 3 - o(1) \rceil \le R(n) \le n - \lfloor \log\log n \rfloor + 1$ и $\lceil n - \log\log n - \log 3 - o(1) \rceil \le R_{\text{Б}_0}(n) \le n - \lfloor \log\log n \rfloor + 8$, где $\text{Б}_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$.

Для получения указанных результатов разработаны методы вложения схем из рассматриваемых классов и ряда специальных графов в гиперкубы. Предложены, в частности, методы построения в единичных кубах так называемой системы одноцветных связывающих деревьев[4], состоящей из непересекающихся поддеревьев, листья которых содержат все вершины куба, раскрашенные в один цвет. Доказано, что если в подкубе размерности n единичного куба размерности $(n+4)$ каждая вершина раскрашена в один из n цветов, то в этом кубе указанная система существует.

Литература

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
3. Ложкин С.А., Седелев О.Б. О реализации функций алгебры логики BDD, вложенными в единичный куб. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2006. 4, С. 29–35.
4. Седелев О.Б. О реализации функций алгебры логики схемами из некоторых классов, вложенными в гиперкубы. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.ф.м.н., М.: Изд-во ВМиК МГУ, 2008.

О ЧАСТИЧНОМ УГАДЫВАНИИ СВЕРХСЛОВ

Мастихина А.А. (мех-мат МГУ им.М.В.Ломоносова)
anmast@yandex.ru

Рассматриваются конечные инициальные автоматы вида $A = (\{0,1\}, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$, y_α^A — выходное сверхслово автомата A при подаче на вход α. Автомат A *угадывает сверхслово* $\alpha \in \{0,1\}^\infty$ *со степенью* $s \in [0,1]$, если $\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(1 - |y_\alpha^A(i) - \alpha(i+1)|) = s$.

Теорема 1. 1)*Существует сверхслово λ такое, что ни один автомат не угадывает его ни с какой степенью $s \in (0,1]$.* 2) *Ни для какого $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ не существует такого сверхслова, которое все автоматы угадывали бы со степенью $\geqslant s$.*

Были выделены такие классы непериодических сверхслов, для которых можно построить автоматы, которые угадывают их с достаточно большой степенью.

Теорема 2. *Множество периодических сверхслов с помехами не чаще, чем через длину периода n, угадывается с $s \geqslant \frac{n-1}{n}$.*

Теорема 3. $A = \{a_1, ...a_M\}$ *— множество слов, $N = \max_i |a_i|$, $n_0 = \min_i |a_i|$, тогда для $k > (\frac{1}{1-s})\frac{N}{n_0}$ множество сверхслов вида $a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} ... a_{i_p}^{k_p} ...$, $\forall j\ a_j \in A$, $\forall i\ k_i \le k$, угадывается со степенью $\geqslant s$.*

Теорема 4. *Сверхслова, которые образованы общерегулярными выражениями $(a_1 \cup ... \cup a_m)^\infty$, где $a_1, a_2, ..., a_m \in \{0,1\}^l$ разные, угадываются со степенью $\geqslant \frac{l - \log_2 m}{l}$.*

Теорема 5. *Пусть дано множество $A = (a_1 \cup ... \cup a_M)^\infty$. Каждый конечный автомат A_i угадывает это множество со степенью $\geqslant s_i$, и пусть $\exists s_0 = \max_i s_i$ Тогда найдется такое сверхслово λ, что любой автомат угадывает его со степенью $\leqslant s_0$.*

Автор выражает благодарность профессору Э.Э.Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

Литература.

1. Вереникин А.Г., Гасанов Э.Э. Об автоматной детерминизации множеств сверхслов. Дискретная математика. — 2006. — Т.18, 2. — С. 84–97.
2. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

ГРАФОВЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА КОРРЕКТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОГРАММ

Миронов А.М. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
mironov@intsys.msu.ru

Одной из наиболее актуальных задач теоретического программирования является задача анализа корректности компьютерных программ. Данная задача решается при помощи построения математических моделей анализируемых программ. Для класса функциональных программ (ФП) (см. [1]) вопросы анализа их корректности изучены существенно слабее, чем аналогичные вопросы для других классов программ. На взгляд автора, данная ситуация объясняется тем, что существенные продвижения в создании новых методов анализа ФП возможны только на основе построения принципиально новых математических моделей ФП. В настоящем докладе предлагается одна из таких моделей, которая основана на графовом представлении ФП. Суть графового представления ФП заключается в следующем. Напомним, что ФП представляет собой список рекурсивных определений (РО) некоторых функций, и каждое из этих РО имеет вид $f(x_1,\dots,x_k) = e$, где f – имя определяемой функции, $x_1,\dots,x_k$ – список её формальных параметров, и e – выражение, определяющее функцию f, в которое входят имена базовых и определяемых функций, переменные $x_1,\dots,x_k$ и константы. Графовая модель ФП представляет собой список графов, соответствующих тем РО, из которых состоит эта ФП. Граф G, соответствующий РО, имеет выделенную вершину, помеченную именем функции, определяемой этим РО. Вершины графа G помечены именами базовых и определяемых функций и константами, входящими в это РО. Рёбра этого графа делятся на два класса: рёбра из первого класса связывают вершины, помеченные именами функций, с их аргументами (меткой каждого такого ребра является номер соответствующего аргумента), а рёбра из второго класса помечены булевыми формулами, представляющими собой условия, при которые вершины, соединямые такими рёбрами, можно считать эквивалентными. Метод анализа корректности ФП, основанный на данной модели основан на понятии унифицирующих подстановок графов.

Литература

1. Филд А., Харрисон П. Функциональное программирование. М., Мир, 1993. - 637 с.

К ВОПРОСУ О ФОРМУЛЬНОМ ОПИСАНИИ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ

Моисеев С.В. (мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова)
stanislav.moiseev@gmail.com

Идея формульного описания алгоритмических проблем восходит к Р. Фагину [1]. Его результат состоит в том, что каждый словарный предикат R из класса Σ_1^P может быть задан некоторой экзистенциальной второпорядковой формулой φ в том смысле, что все слова, удовлетворяющие предикату R, суть в точности все конечные модели формулы φ, а каждая такая формула задаёт предикат из Σ_1^P. Если известна формула, задающая предикат R, то вычисление значение предиката R на слове α сводится к проверке истинности формулы φ на этом слове. Следовательно, для того чтобы доказать принадлежность словарного предиката R некоторому классу полиномиальной иерархии, достаточно подобрать второпорядковую формулу соответствующей сложности, равносильную предикату R на всех входных словах. Найти такую формулу, однако, может быть нелегко.

Основной результат настоящего исследования состоит в том, что формула, описывающая словарный предикат, может зависеть не только от самого предиката, но и от экземпляра задачи.

Пусть функции $f_{\text{мощн}}, f_{\text{сигн}}, f_{\text{форм}}\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ и предикат $f_{\text{сем}}\colon \{0,1\}^* \to \{\bot, \top\}$ полиномиально вычислимы, причём для каждого слова $\alpha \in \{0,1\}^*$, во-первых, $f_{\text{сигн}}\,\alpha$ — предикатная сигнатура, а во-вторых, $f_{\text{форм}}\,\alpha$ — замкнутая первопорядковая формула класса Σ_d сигнатуры $f_{\text{сигн}}\,\alpha$, расширенной константами из множества $M_\alpha \leftrightharpoons \{\beta \in \{0,1\}^* \mid \beta \overset{lex}{\leqslant} f_{\text{мощн}}\,\alpha\}$. Для каждого слова $\alpha \in \{0,1\}^*$ обозначим через $S\,\alpha$ такую логическую структуру, что если $f_{\text{сигн}}\,\alpha = \langle P_1^{(r_1)},\dots,P_n^{(r_n)}\rangle$, то $S\,\alpha = \langle M_\alpha, P_1,\dots,P_n\rangle$, где $P_k\,\langle a_1,\dots,a_{r_k}\rangle \leftrightharpoons f_{\text{сем}}\,\langle \alpha, P_k^{(r_k)}, \langle a_1,a_2,\dots,a_{r_k}\rangle\rangle$.

Теорема. *Словарный предикат* $R\,\alpha \leftrightharpoons (S\,\alpha \models f_{\text{форм}}\,\alpha)$, *лежит в классе* Σ_d^P.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00240).

Литература

1. Fagin R. Generalized First-Order Spectra and Polynomial-Time Recognizable Sets. Karp R. Complexity of Computation, SIAM-AMS Proceedings 7, 1974, pp.2741.

О 2-КОДАХ ДИСКРЕТНЫХ ФИГУР.

Муравьева А.А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
amuraveva@yandex.ru

n-образом назовем множество из n точек в пространстве заданной размерности. Спектром n-образа A ($S(A)$) – невозрастающую последовательность всех попарных расстояний между различными точками A. Графиком – произвольную конечную невозрастающую последовательность Γ положительных действительных чисел. n-образ A – модель для Γ, если спектр A совпадает с Γ ($S(A) = \Gamma$). В работе [2] было установлено, что существует алгоритм построения по графику всех его моделей в пространстве заданной размерности, а также исследован вопрос о продолжении графика до спектра путем добавления элементов. Здесь изучаются свойства графиков, являющихся спектрами.

Пусть $|\Gamma| = m$. Введем величину

$$const(\Gamma) = \max_{i=1,\dots,m} (j \in \mathbb{N} | d_i = \dots = d_{i+j-1}, 1 \le j \le m - i + 1),$$

длину максимального участка постоянства графика Γ.

Теорема. *Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда имеет место:*

1) $\forall A\ (const(\Gamma(A)) < 3|A|)$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n \ge N_\varepsilon\ \exists A\ (|A| = n$ и $const(\Gamma(A)) > (3 - \varepsilon)n)$

Положим $R(n) = \inf\limits_{A \subseteq \mathbb{R}^2 : |A| = n} \frac{d_1(A)}{d_{C_n^2}(A)}$, где $S(A) = (d_1(A), \dots, d_{C_{|A|}^2}(A))$.

Теорема. $\frac{\sqrt{n}}{2} < R(n) < \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{n}$, $n \ge 13$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В.Б. за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

Литература

1. Козлов В.Н. Математическое моделирование зрительного восприятия. — Математические вопросы кибернетики. Вып.6. М.: Наука, 1996. с. 321–338.

2. Муравьева А.А. Распознавание n-точечников. — Интеллектуальные системы. Том 11. Вып.1–4. 2007. с. 777–780.

РАСШИФРОВКА k-СУЩЕСТВЕННЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ.

Осокин В.В. (МГУ им М.В. Ломоносова)
osvic@mail.ru

Пусть M^n – множество булевых монотонных функций от n переменных, $\mathcal{F}^n$ – множество алгоритмов, решающих задачу расшифровки функций из M^n с помощью запросов на значение функции. Под запросом на значение функции понимается набор значений переменных функции, а под ответом на запрос – значение расшифровываемой функции на этом наборе. Каждый алгоритм из $\mathcal{F}^n$ должен для любой функции f из M^n, сделав некоторое число запросов на значение функции, полностью восстановить таблицу значений функции f.

Через $\varphi(F, f)$ обозначим число запросов на значение функции, требуемое алгоритму $F \in \mathcal{F}^n$, чтобы полностью восстановить таблицу значений функции $f \in M^n$.

Рассмотрим класс $M^{k,n}$ всех монотонных функций от n переменных, существенно зависящих от не более чем k своих переменных. Функции из этого класса будем называть k-существенными монотонными функциями от n переменных.

В работе исследуется сложность расшифровки функций из $M^{k,n}$ в худшем случае, т.е. величина $\varphi(k, n) = \min_{F \in \mathcal{F}^n} \max_{f \in M^{k,n}} \varphi(F, f)$. Ж.Ансель получил точное значение величины $\varphi(n, n)$ [1,2]. В частности, $\varphi(n, n) \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}}$. П.Дамашке [3] показал, что $\varphi(k, n)$ по порядку не превосходит $2^k + k \log n$. Нами получен порядок величины $\varphi(k, n)$.

Теорема. *При $k, n \to \infty$ выполнено $\varphi(k, n) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$.*

Использованная при доказательстве техника чередования собственно расшифровки функций и определения ее существенных переменных была предложена автором при расшифровке функций, задающих разбиение булевого куба на подкубы [4].

Работа выполнена на кафедре МаТИС мех-мата МГУ. Научный руководитель – профессор Гасанов Э.Э.

Литература

1. Hansel G. О числе монотонных булевых функций от n переменных. — Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968.
2. Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Введение в теорию интеллектуальных систем. — Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006.
3. Damaschke P. Adaptive Versus Nonadaptive Attribute-Efficient Learning. — Machine Learning, 41, 2000, 197-215.
4. Осокин В.В. О сложности расшифровки разбиения булевого куба на подкубы. — Дискретная математика, том 20 вып.2, 2008, 46-62.

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛИНЫ ПРОСТОГО ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОДМНОЖЕСТВ СОСТОЯНИЙ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА.

Пантелеев П.А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
panteleev@intsys.msu.ru

В знаменитой работе Э. Мура[1] было введено понятие простого диагностического эксперимента для конечного автомата, позволяющего в случае, если нам известна диаграмма автомата, но не известно начальное состояние определить после проведения эксперимента это начальное состояние. Мур рассматривал простые диагностические эксперименты двух типов: *безусловные* (сокращенно п.б.д.э.), когда подаваемая последовательность не зависит от реакции автомата и *условные* (сокращенно п.у.д.э.), когда каждый следующий подаваемый символ зависит от реакции автомата на уже поданные. Позднее, в книге А. Гилла[2] эти понятия были обобщены на произвольные подмножества состояний автомата и получены первые оценки функции Шеннона длины таких экспериментов. В работе М.Н. Соколовского[3] были установлены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона $L(n,k)$ длины п.у.д.э. для k-элементного подмножества n-элементного множества состояний автомата. Несмотря на то, что при росте k вместе с n эти оценки оказались достаточно близкими друг к другу, при фиксированном (или слаборастущем) k они не давали даже порядка функции $L(n,k)$. Следующая теорема восполняет этот пробел.

Теорема. *$L(n,k) \sim C_{n-1}^{k-1}$, при $k = o(n)$ и $n \to \infty$.*

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность академику Валерию Борисовичу Кудрявцеву и профессору Александру Сергеевичу Подколзину за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе.

Литература

1. Moore E.F. Gedanken-experiments on sequential machines — Automata Studies, 1956, p. 129-153[русский перевод см. "Автоматы" (сб. статей), 1956, ИЛ, с. 179-210]
2. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов — Наука, 1966, 272 с
3. Соколовский М.Н. О диагностических экспериментах с автоматами — Кибернетика, 6, 1971, с. 44-49

АНАЛИЗ СЕМЕЙСТВА ГРАФИКОВ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ АВТОМАТАМИ.

Пархоменко Д.В. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
dcdenis@rambler.ru

Аппарат вероятностных источников (скрытых Марковских моделей) хорошо зарекомендовал себя в задачах обработки речевых сигналов. В докладе будет рассмотрена проблема применения вероятностных источников к задачам распознавания биологических сигналов человека, а именно, сигналов моргания и ЭКГ.

Задача описания морганий состоит в том, чтобы по графику степени открытости глаза человека определить, было ли моргание на графике или нет. Задача имеет прикладной характер, т.к. многие современные устройства, контролирующие бодрствование человека, базируются на анализе морганий. Автор показал, что по обучающей выборке можно настроить вероятностные источники, решающие данную задачу с высокой точностью и помехоустойчивостью. Были подобраны и содержательно интерпретированы все различные состояния процесса моргания, которые и стали состояниями вероятностного источника, переходы между которыми, осуществлялись в соответствие со стохастической матрицей переходов. Настраивая параметры случайных величин выходных функций и стохастической матрицы переходов, удалось добиться того, что выдаваемые источником слова стали адекватно соответствовать семейству заданных последовательностей. Настройка параметров, или обучение, происходит с помощью алгоритма Баума-Уэлша.

В докладе будут рассмотрена специфика моделирования сигналов с помощью вероятностных источников. А именно, будет показано, что не всякое финальное распределение вероятностей на булевом кубе размерности n может быть реализовано с помощью вероятностного источника, и существуют распределения вероятностей, которые не могут быть реализованы вероятностными источниками независимо от числа состояний. Таким образом, применение вероятностных источников в задачах распознавания сигналов ограничено.

Литература

1. Кудрявцев В.Б. Введение в теорию абстрактных автоматов. — 1985
2. Rabiner L., Juang B.H. Fundamentals of Speech Recognition. — Prentice Hall, 1995
3. Manning C. D., Schutze H. Foundations of Statistical Natural Language Processing. — MIT Press, 1999
4. ТИИЭР, т.73, 11, 1985
5. Baum L.E., Eagon J.A. An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes and to a model for ecology. — Bull. Ams, vol.73,1967

ПОИСК ПРЕДСТАВИТЕЛЯ В ЗАДАЧЕ О МЕТРИЧЕСКОЙ БЛИЗОСТИ.

Пивоваров А.П. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
pivizz@gmail.com

Определим двумерную задачу о метрической близости следующим образом. Пусть дано конечное множество точек из квадрата $[0,1]^2$ (это множество называют библиотекой). Запрос на поиск представляет собой некоторую точку квадрата $x \in [0,1]^2$. Задача состоит в том, чтобы перечислить все точки библиотеки, отстоящие от x не более чем на некоторую заранее заданную величину по каждой из двух координат. Такая задача может быть решена за константное в среднем время (без перечисления ответа) при затратах памяти порядка $k^{1+\varepsilon}$ (k — число записей в библиотеке), где константа времени растет обратно пропорционально ε (алгоритм с такими характеристиками описан в [1]).

Поиск представителя представляет собой модификацию задачи информационного поиска, состоящую в том, что требуется найти не все записи из библиотеки, удовлетворяющие запросу, а любую одну из таких записей, если они есть, либо указать, что таких записей в библиотеке нет.

В докладе рассматривается поиск представителя в задаче о метрической близости. Основное утверждение состоит в том, что существует алгоритм поиска представителя в задаче о метрической близости, время работы которого в среднем константа, а затраты памяти имеют порядок k, где k — число записей в библиотеке.

Литература

1. Gasanov E.E. On Functional Complexity of Two-dimensional Manhattan Metrics Closeness Problem. — Emerging Database Research In East Europe. Proceedings of the pre-conference workshop of Very Large Data Base, 2003, 51-56.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.

Подколзин А.С. (МГУ им М.В. Ломоносова)
Alexander.Podkolzin@lsi.com

Интеллектуальная деятельность человека неразрывно связана с использованием логических описаний, позволяющих фиксировать рассматриваемые объекты и связи между ними. Они возникают при решении математических задач, в игровых ситуациях, при анализе текстов естественного языка, понимании изображений, управлении движением, и т.д. Эти описания изменяются во времени - при рассуждениях и получении информации из внешней среды. Таким образом, приходим к понятию логического процесса, являющемуся центральным в искусственном интеллекте. Математика достигла значительных успехов в изучении процессов различных типов. Для анализа непрерывных процессов был создан аппарат теории дифференциальных уравнений; стохастические процессы изучаются в различных разделах теории вероятностей; дискретные процессы вычислительных систем - в теории автоматов. Однако, в математическом изучении логических процессов возникли серьезные трудности, и теория, которая позволила бы создавать эффективные автоматические решатели творческих задач, на сегодняшний день не создана. Единственным выходом из этой ситуации представляется развитие исследований по компьютерному моделированию логических процессов, реализуемых человеком в различных областях. Данное исследование связано с технологией такого моделирования. В основе его лежит концепция "логических векторных полей", складывающихся из многообразий алгоритмов локального планирования действий ("приемов") и развивающихся при обучении компьютерного решателя на последовательностях задач. Для активизации приемов решатель реализует процесс сканирования задачи - своего рода внутреннее логическое зрение.

Компьютерная логическая система обучалась на задачах из различных областей элементарной и высшей математики; в последнее время начато обучение ее в разделах, смежных с математикой. Всего было проработано около 10000 задач, по котором созданы около 30000 приемов. Для обеспечения эффективного диалогового режима обучения создан новый язык, предельно приближенный к пограничному слою между алгоритмами и знаниями. Он позволяет задавать прием в виде теоремы, снабженной специальной алгоритмизирующей разметкой. Важной особенностью языка является наличие в нем двух полноценных логических уровней - уровня предметной области и уровня логики принятия решений, тесно связанных между собой. Его применение открывает перспективы к исследованиям по саморазвитию решателей.

Фактически, созданная логическая система представляет собой альтернативную систему компьютерной математики, ориентированную в первую очередь на такие задачи, где логика играет значительную роль. Обычно эти задачи недоступны традиционным системам компьютерной математики. Помимо элементарной алгебры, планиметрии и комбинаторики, он охватывает многие разделы математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, теории вероятностей, дифференциальных уравнений, комплексного анализа. Решатель достаточно уверенно решает стандартные школьные задачи средней сложности; в отдельных случаях находит решения более сложных задач. Он позволяет прослеживать ход решения "по шагам".

Начато обучение системы в таких областях, как элементарная физика, программирование, понимание естественного языка, анализ изображений, игровые задачи. Представляется, что дальнейшее ее развитие позволило бы провести широкий спектр исследований по логическим процессам и заложить основы для создания искусственного интеллекта.

Автор искренне благодарен В.Б.Кудрявцеву за ту поддержку, которая сделала возможным проведение данной работы.

К ЗАДАЧЕ О ПОЛНОТЕ S-МНОЖЕСТВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ.

Подколзина М.А. (Москва)
maress@mail.ru

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ и P_k^τ — функциональная система, элементами которой являются детерминированные функции, определенные на словах длины τ, составленных из букв алфавита $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, а операциями — операции суперпозиции [3]. Критерий полноты в P_k^τ для S-множеств может быть сформулирован в терминах S-предполных классов. Для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ в [1] представлено описание всех S-предполных в P_k^τ классов. Совокупность отношений, классы сохранения которых совпадают с S-предполными, распадается на шесть семейств: $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

Пусть $\rho(k,\tau)$ — асимптотика числа S-предполных в P_k^τ классов при фиксированном $k \geq 2$ и при τ, стремящемся к бесконечности.

Имеет место

Теорема. *Пусть* $\tau \longrightarrow \infty$. *Тогда*

$$\rho(2,\tau) \sim 3 \cdot 2^{2^{\tau-1}}, \rho(3,\tau) \sim 3 \cdot 6^{3^{\tau-1}}, \rho(4,\tau) \sim 24^{4^{\tau-1}}.$$

а, если $k \geq 5$, *то* $\rho(k,\tau) \sim (p+2)(k!)^{k^{\tau-1}}$

Из множества всех S-предполных нами выделены S-предполные классы, содержащие все одноместные S-функции. С использованием этого описания показано, что существует алгоритм распознавания А-полноты для S-множеств, содержащих все одноместные S-функции [2].

Литература

1. Буевич В.А., Подколзина М.А. Критерий полноты S-множеств детерминированных функций. — Математические вопросы кибернетики. **16**, М. Физматлит, 191-238, 2007
2. Буевич В.А. Условия А-полноты для конечных автоматов, ч.1 — М. Изд-во МГУ, 1986
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику — М. изд-во “Наука”, 1980

К ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ.

Подловченко Р. И. (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
rip@parallel.ru

Алгебраические модели последовательных программ являются моделями вычислений, введенными в [1]. Они предназначены для исследования свойств последовательных программ, заданных в определенной формализации.

Объектами алгебраической модели программ являются схемы программ, в которых сохраняется управляющая структура моделируемых программ. Рассматриваются лишь модели программ, для которых выполнено требование: из эквивалентности схем программ всегда следует эквивалентность программ, представленных этими схемами. Алгоритм решения проблемы эквивалентности в этих моделях пригоден для распознавания эквивалентности самих программ.

Исследованию проблемы эквивалентности в алгебраических моделях программ посвящено много работ. Специальное внимание в них уделяется случаям, когда алгоритм, распознающий эквивалентность схем программ, имеет полиномиальную сложность относительно размеров сравниваемых программ.

Цель нашей работы состоит в том, чтобы найти множество алгебраических моделей программ, для которых проблема эквивалентности решается применением техники следов [2]. Её привлекательность состоит в том, что она обеспечивает полиномиальную сложность решения проблемы эквивалентности. В [3] нами найден широкий класс алгебраических моделей программ, для которых доказана

Теорема. В уравновешенных полугрупповых моделях программ с левым сокращением проблема эквивалентности разрешима техникой следов.

Литература

1. Подловченко Р.И. Иерархия моделей программ. — Программирование, 1981, 2, с. 3-14.

2. Трахтенброт Б.А. Сложность алгоритмов и вычислений. — Новосибирск, НГУ, 1967.

3. Подловченко Р.И. Техника следов в разрешении проблемы эквивалентности в алгебраических моделях программ. — Кибернетика, Киев, 2009 (в печати).

НЕЛИНЕЙНАЯ СЛОЖНОСТЬ НЕЙРОННЫХ СХЕМ СПЕЦИАЛЬНОГ ВИДА.

Половников В.С. (МГУ им М.В. Ломоносова)
polovnikov@intsys.msu.ru

В работах [1,2] была доказана теорема о том, что для любой нейронной схемы без памяти существует эквивалентная ей схема, нелинейной глубины не более двух. Так же показано, что существуют кусочно-линейные функции для реализации которых нейронными схемами единичной нелинейной глубины не достаточно. Подробнее о схемах нелинейной глубины 1 описано в [3]. В настоящей работе будем рассматривать кусочно-параллельные функции (см. [4]), реализуемые нейронными схемами без памяти и без использования элемента F. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная кусочно-параллельная функция в R^n, заданная k гиперплоскостями. Согласно [4], существует S — нейронная схема указанного вида нелинейной глубины два (специального вида), реализующая f. За $L(S)$ обозначим число нелинейных элементов (θ) в схеме S, то есть нелинейную сложность S. Соответственно определим $L(f) = \min L(S)$, где минимум берется по всем нейронным схемам специального вида, реализующим f. Функция Шеннона $L(k) = \max L(f)$, по всем кусочно-параллельным функциям f, заданным k гиперплоскостями. В работе найден порядок и асимптотика функции Шеннона

$$L(k) \sim \frac{2^n}{n!}k^n,\ k \to \infty,\ n = const,\ n > 1.$$

Литература

1. Половников В.С. О некоторых характеристиках нейронных схем. — М., Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика, 2004, 5, 65–67.

2. Половников В.С. О некоторых характеристиках нейронных схем. — М., Интеллектуальные системы том 8, выпуск 1-4, 2004, 121–145.

3. Половников В.С. Критерий нелинейной однослойности нейронных схем. — М., Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика, 2006, 6, 3–5.

4. Половников В.С. О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций. — М., Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика, 2008, 6.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ $\mathfrak{k}$-ВЫПОЛНИМОСТИ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ.

Поцелуевская Е.А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)
potseluevskaya@gmail.com

На сегодняшний день в основе многих систем обеспечения информационной безопасности лежат различные NP-полные задачи, не решаемые в общем случае за полиномиальное время. Одной из них является проблема формульной выполнимости. Однако, несмотря на то, что в общей постановке данная задача не может быть решена за полиномиальное время, для неё могут быть выявлены подклассы задач, решаемых за полиномиальное время с большой вероятностью. Выявление подобных случаев равносильно определению слабых мест в системе защиты, которые могут быть использованы злоумышленником для проникновения в информационную систему.

Пусть $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots, F_s\}$ - любое конечное множество формул. F-формула - это конъюнкция $F_{i_1}(\cdot)F_{i_2}(\cdot)\ldots F_{i_t}(\cdot)$ с переменными $x_1, \ldots, x_n$, расставленными некоторым образом. Проблема F - выполнимости - это проблема выполнимости F-формул.

Основным методом исследования вопроса послужило введение дополнительных ограничений на заданные функции, позволяющих решать задачу за полиномиальное время. Рассматривается случай, когда все функции F_{i_k} зависят не более чем от трех переменных и заданы таблицей истинности либо формулой в КНФ. Для этого случая разработан алгоритм, сочетающий в себе перебор определенного подмножества S переменных и решение для каждого фиксированного набора значений переменных из S полиномиальной подзадачи о 2-выполнимости. В случае, когда для количества перебираемых переменных m верно $m \leqslant log_2|x|$, где $|x|$ - длина входных данных алгоритма, алгоритм решает поставленную задачу за полиномиальное время.

Автор работы выражает признательность В.А. Носову за научное руководство.

Литература

1. Алексеев В.Б., Носов В.А. NP-полные задачи и их полиномиальные варианты. Обзор. — Обозрение прикладной и промышленной математики, т.4, вып.2, 1997, с. 165-193.

2. Гизунов С.А., Носов В.А. Сложность распознавания классов Шеффера. — Вестник МГУ, сер. 1, 1995.

О ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССАХ ВО МНОЖЕСТВО АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Родин А.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
tyman307@rambler.ru

Пусть k – натуральное число, большее или равное двум. Обозначим через P^k множество всех ограниченно-детерминированных функций (автоматных отображений), входы и выходы которых определены на множестве бесконечных последовательностей, составленных из E^k. Будем считать, что определены операции суперпозиции и обратной связи. Замыкание множества $N \subseteq P^k$ относительно этих операций будем обозначать через $[N]$. Множество $N \subseteq P^k$ называется полным в P^k, если $[N] = P^k$. Известно [1], что критерий полноты может быть сформулирован в терминах предполных классов. Поэтому число предполных классов является важной характеристикой эффективности этого критерия. В [1] показано, что мощность множества предполных классов в P^k равна континууму. Вместе с тем, интерес представляет задача о числе предполных классов, обладающих некоторыми наперед заданными свойствами [2]. Имеет место теорема, обощающая один из результатов [3]. Пусть M – произвольный замкнутый класс в P_k (k-значная логика). Обозначим через P^k_M множество ограниченно-детерминированных функций, в каждом состоянии которых реализуется функция k-значной логики, принадлежащая M. Теорема: для любого замкнутого $M \subset P_k$ существует континуум предполных классов в P^k, содержащих множество P^k_M.

Литература

1. Кудрявцев В.Б. О мощности множеств предполных множеств некоторой функциональной системы, связанной с автоматами — Сборник “Проблемы кибернетики” выпуск 13 М. Физматгис, 1965.

2. Марченков С.С. О классах Слупецкого для детерминированных функций — Дискретная математика 1998, 10, выпуск 2.

3. Буевич В.А. Критнрий полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции — Дискретная математика 2000, 12, выпуск 4.

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА КОДИРОВАНИЙ СОСТОЯНИЙ АВТОМАТОВ.

Родин С.Б. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
sergei_rodin@mail.ru

Определение 1. Нумерованной переходной системой назовем тройку (A, Q, φ), где A-входной алфавит, $Q = \{0...n-1\}$, φ - функция переходов. В работе изучаются нумерованные переходные системы с входным алфавитом $A = E_2$ и числом состояний $n = 2^k$.

Определение 2. Кодированием множества $Q = \{0...n-1\}$ назовем взаимоднозначное отображение $F : \{0...n-1\} \to {E_2}^k$. Каждое кодирование F, как для переходной системы, так и для подстановки s на множестве Q порождает булевский оператор [1]. В данной работе изучался вопрос, когда кодирование приводит к набору линейных булевских функций.

Определение 3. Кодирование $F : \{0...n-1\} \to {E_2}^k$ назовем стандартным, если код элемента есть его двоичное представление. Поскольку $n = 2^k$, то подстановки на множестве $Q = \{0...n-1\}$ могут быть представлены как многочлены над полем Галуа F_{2^k} [2].

Обозначим через P_n множество подстановок на множестве E_n.

Обозначим через H_+ перестановки соотвествующие многочленам $x+c$ над полем Галуа F_n, где $c \in E_n$ - константа.

Обозначим через $H_L = \{s, sH_+ = H_+s, s \in P_n\}$.

Теорема.1 *Подстановкам, представляемым многочленами над полем Галуа F_n, являющимися линейными комбинациями над $< x^{2^i} >, i \in \{0...k\}$ при стандартном кодировании соотвествует линейный оператор.*

Теорема 2. *Оператор, соотвествующий подстановке s при стандартном кодировании, линеен тогда и только тогда, когда $s \in H_L$.*

Теорема 3. *Пусть s_0, s_1 - порождающие внутренней полугруппы переходной системы. Переходная система имеет линейную реализацию тогда и только тогда, когда порождающие s_0 ,s_1 принадлежат одному правому классу смежности P_n по H_+ и линейно реализуемы.*

Литература

1. Родин С.Б. Переходные системы с максимальной вариантностью относительно кодирования состояний. — Интеллектуальные системы. Т.4, вып. 3-4. С.335-352.

2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику — М.:Наука, 1979.

СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ И МОНИТОРИНГА СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Рыжов А.П. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

ryjov@mail.ru

Системы информационного мониторинга представляют собой человеко-компьютерные системы, ориентированные на обработку разнородной, разноуровневой, фрагментарной, нечеткой и ненадежной информации по некоторой проблеме. Они базируются на теории иерархических нечетких дискретных динамических систем. Работы по созданию таких систем были начаты на кафедре МаТИС механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в конце 80-х годов. В докладе рассматриваются математические проблемы разработки систем оценки и мониторинга сложных процессов - проблема описания человеком объектов предметной области, проблема поиска информации в нечетких базах данных, проблема выбора операторов агрегирования информации в нечетких иерархических динамических системах [3]. Приводятся решения сформулированных проблем. Обсуждаются приложения разработанной технологии информационного мониторинга в задачах международной безопасности [4], медицине [1], промышленности [2].

Литература

1. Ахмеджанов Н.М., Жукоцкий А.В., Кудрявцев В.Б., Оганов Р.Г., Расторгуев В.В., Рыжов А.П., Строгалов А.С. Информационный мониторинг в задаче прогнозирования риска развития сердечно-сосудистых заболеваний. — Интеллектуальные системы, Т.7, вып. 1-4, 2003, с. 5 - 38.

2. Лебедев А.А., Рыжов А.П. Оценка и мониторинг проектов разработки высокотехнологичных изделий на примере микроэлектроники. — Интеллектуальные системы, Том 11, вып. 1-4, 2007, с. 55-82.

3. Рыжов А.П. Информационный мониторинг сложных процессов: технологические и математические основы. — Интеллектуальные системы, Том 11, вып. 1-4, 2007, с. 101-136.

4. Ryjov A., Belenki A., Hooper R., Pouchkarev V., Fattah A. and Zadeh L.A. Development of an Intelligent System for Monitoring and Evaluation of Peaceful Nuclear Activities (DISNA). — IAEA, STR-310, Vienna, 1998, 122 p.

О ПОСТРОЕНИИ ОБРАТИМЫХ АВТОМАТОВ ИЗ ГИПЕРАВТОМАТОВ.

Самоненко И. Ю. (Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова)

samonenko.i@gmail.com

Пусть $\mathbf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ - конечный автомат, где A - конечный входной алфавит, Q - конечное множество состояний, B - конечный выходной алфавит, $\varphi : Q \times A \to Q$ - функция перехода и $\psi : Q \times A \to B$ - функция выхода. Автомат $\mathbf{B} = (A, Q, A, \varphi, \psi)$ называется *обратимым* если для любого $q \in Q$, функция $\psi(q, \cdot) : A \to A$ - биекция.

Пусть $s \leq |Q|$ - некоторое натуральное число. *Гиперавтоматом* степени s называется автомат $\mathbf{A}^{(s)} = (A, Q^s, B^s, \varphi', \psi')$, где

$$\varphi'((q_1, \dots, q_s), a) = (\varphi(q_1, a), \dots, \varphi(q_s, a))$$

$$\psi'((q_1, \dots, q_s), a) = (\psi(q_1, a), \dots, \psi(q_s, a)).$$

Пусть $f : B^s \to A$ некоторая функция. Через $\mathbf{A}^{(s)} \diamond f$ обозначим автомат $(A, Q^s, A, \varphi', f(\psi'))$.

В работе рассматриваются вопросы построения обратимых автоматов вида $\mathbf{A}^{(s)} \diamond f$. Через $\Phi(\mathbf{A}^{(s)})$ обозначим множество функций $f : B^s \to A$, таких что автомат $\mathbf{A}^{(s)} \diamond f$ - обратим. Через $\Theta(\mathbf{B})$ обозначим множество состояний автомата $\mathbf{B}$ после редукции эквивалентных состояний. Обозначим

$$R(s) = \begin{cases} C_{2t}^{t-1} + C_{2t}^{t+1} & \text{при} \quad s = 2t \\ C_{2t+1}^{t} + C_{2t+1}^{t+1} & \text{при} \quad s = 2t+1 \end{cases}$$

Обозначим $E_2 = \{0, 1\}$.

Теорема. *1. Для любого n и любого $s < n$, такого что, s делит n, существует автомат $A = (E_2, Q, E_2, \varphi, \psi)$, такой что $\Theta(A) = n$, $\Theta(A^{(s)}) = (n/s)^s$ и $|\Phi(A^{(s)})| = 2^{R(s)}$.*

2. Для любого n существует автомат $A = (E_2, Q, E_2, \varphi, \psi)$, такой что $\Theta(A) = n$, $\Theta(A^{(n)}) = n!$ и $|\Phi(A^{(n)})| = 2^{R(n)}$.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М., 1985.

ПРОБЛЕМА КАМЕРОНА-ЭРДЁША ДЛЯ ГРУПП ПРОСТОГО ПОРЯДКА.

Сапоженко А.А. (Москва, МГУ им.М.В.Ломоносова)
sapozhenko@mail.ru

Множество A элементов аддитивной группы называется *свободным от сумм*, (сокращенно, *МСС*), если $a + b$ не принадлежит множеству A для любых $a, b \in A$ (a и b могут совпадать). Обозначим через $s(G)$ число МСС в группе G. Проблема Камерона-Эрдёша для групп состоит в получении оценок для $s(G)$. Пусть Z_p – группа вычетов порядка p. Целью сообщения является асимптотика для $s(Z_p)$, где p — простое. В. Лев и Т. Шон [2] доказали, что

$$(p-1)2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}(1 + O(2^{-\epsilon p})) \leq s(Z_p) \leq 2^{p/2-\delta},$$

где ϵ, δ – положительные константы. Б. Грин и И. Ружа получили в [1] верхнюю оценку вида $s(Z_p) \leq 2^{p/3+o(p)}$. Обозначим через P_α множество простых чисел вида $3k + \alpha$, $\alpha \in \{-1, 1\}$. Здесь доказывается следующая

Теорема. *Существуют абсолютные константы c_α, $\alpha \in \{-1, 1\}$, такие, что для всякого $\epsilon > 0$ существует N, такое, что для любого $p \in P_\alpha$, удовлетворяющего неравенству $p \geq N$, выполняется неравенство*

$$\left| s(Z_p) / \left((p-1) \cdot 2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor} \right) - c_\alpha \right| < \epsilon.$$

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00444.

Литература

1. Green B., Ruzsa I. Z., Counting sumsets and sum-free sets modulo a prime. — Studia Sci.Math. Hungarica 41 (2004), no.3, 285-293.
2. Lev V.F., Schoen T., Cameron-Erdős modulo a prime. — Finite Fields Appl. **8** (2002), no. 1, 108–119.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПАСНОЙ БЛИЗОСТИ ПРИ СЛАБЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ.

Скиба Е.А. (МГУ им М.В. Ломоносова)
lenaskiba@gmail.com

В работе исследуется задача о поиске движущихся объектов, которые могут столкнуться с движущимся объектом-запросом, где под столкновением понимается нахождение объектов в опасной близости.

Пусть заданы две функции $f : [[0, \tau_{max}]] \to [0, 1]$ и $f_q : [[0, \tau^q_{max}]] \to [0, 1]$, называемые законами движения объектов и объектов-запросов, соответственно. Считаем, что имеется счетное множество объектов, движущихся на плоскости таким образом, что их координаты в зависимости от времени задаются парой $(f(t-t_i), y_i)$, где $i \in N$, $y_i \in [0,1]$, а t_i образует строго возрастающую последовательность положительных чисел. Аналогично, движение объекта-запроса задается парой $(x, f_q(t-t_0))$, где $x \in [0,1]$, $t_0 \geq 0$. Библиотекой в момент t_0 назовем множество $V(t_0)$ объектов i, таких что $(f(t_0-t_i), y_i) \in [0,1]^2$.

В задаче требуется для произвольного запроса перечислить все объекты из библиотеки, с которыми он в процессе своего движения будет находиться на расстоянии меньшем, чем ρ по Манхэттену.

Основной характеристикой алгоритма решения этой задачи является сложность поиска, измеряемая в элементарных арифметических операциях и операциях сравнения. Поскольку библиотека динамически меняется со временем, то важными характеристиками являются также сложности вставки и удаления объектов в БД. Еще одной характеристикой является объем памяти, требуемый алгоритму для хранения структур данных.

В [1] рассматривался случай фиксированных скоростей объектов, то есть $f(t) = vt$, а $f_q(t) = v_q t$.

Теорема. *Пусть выражение $f'(t+t') - f'_q(t)$ не меняет знака для любого $t \in [0, \tau^q_{max}]$ и любого t', такого, что $t+t' \in [0, \tau_{max}]$. Тогда существует алгоритм, решающий задачу об опасной близости с логарифмической относительно размера библиотеки сложностью поиска, вставки и удаления и линейным объемом памяти.*

Работа выполнена на кафедре МаТИС мех-мата МГУ.

Литература

1. Е.А.Скиба. *Логарифмическое решение задачи об опасной близости.* Интеллектуальные системы, том 11, вып. 1-4, 2007.

О КОНСТРУКТИВНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ.

Соколов А.П. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
sokolov@intsys.msu.ru

Пороговые функции алгебры логики представляют интерес в связи с простотой технической реализации, а также благодаря своим вычислительным возможностям.

Средством задания пороговых функций являются линейные формы вида $x_1w_1 + \ldots + x_nw_n - \sigma$. Вводится понятие сигнатуры пороговой функции f как набор знаков коэффициентов некоторой линейной формы, задающей f. Оказывается, что отношение равенства сигнатур разбивает множество существенных пороговых функций на 2^n взаимно непересекающихся равномощных классов, одним из которых является класс монотонных пороговых функций.

В работе исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем последовательного изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Для характеризации сложности обучения в худшем случае вводится шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, сколько минимально достаточно выполнить единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных для задания желаемой пороговой функции. В работе показывается, что при стремлении n к бесконечности величина $\log \rho(n)$ растет по порядку как $n \log n$.

Для любой пороговой функции существует бесконечное множество задающих ее линейных форм. Линейные формы назовем эквивалентными, если они задают одну и ту же пороговую функцию. Множество всех существенных линейных форм с целочисленными коэффициентами и свободным членом, задающих пороговую функцию f, обозначим $U(f)$. Легко видеть, что множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. В работе доказано, что всякое множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения линейных форм, который является счетным и разрешимым, а также описан алгоритм, который строит данный базис.

Литература

Hastad J. - On the size of weights for threshold gates., SIAM J. Discr. Math., 1994 г.

Автоматное распознавание двухсвязанных лабиринтов с конечным диаметром циклов

Биляна Стаматович (Университет Доня Горица, Черногория)
biljas@cg.ac.yu

Рассматривается бесконечный класс прямоугольных лабиринтов, с содержательной точки зрения эквивалентных (топологически) цифре ноль. В [1] доказано, что для этого класса не существует распознающего автомата. В [2] доказано, что существует распознающий коллектив типа (1, 1) (коллектив из одного автомата и камня). В работе исследуется проблема существования распознающего автомата для подкласса данного класса прямоугольных лабиринтов с циклами ограниченного диаметра.

Литература

1. Б. Стаматович, О распознавании лабиринтов автоматами, Дискретная математика, 2000, Vol. 12, 51-65.
2. Б. Стаматович,Распознавание двусвязных цифр коллективами автоматов, Интелектуальние системы, Москва, 1999, Том 3, 321 - 337.

О НЕЧЕТКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ.

Тимирова А.Н. (МГУ им. М.В.Ломоносова)
asiya@mail.ru

Работа посвящена исследованию свойств нечетких моделей в экономике. Важным является вопрос зависимости качества работы модели от качества исходной информации. Рассматривается нечеткая модель разделения на торговые зоны [2].

Пусть X, Z, Y – множества покупателей, фирм и признаков фирм соответственно и пусть $r : X \times Y \to [0,1]$. Функция $r(x,y)$ – степень предпочтения признака y по оценке покупателя x.

По исходным данным — матрицам R (покупатель-признак) и S (признак-фирма) — строим матрицу T (покупатель-фирма): $\underset{[n\times m]}{T} = \underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S}$, где $r_{ij}, s_{ij} \in [0,1]$ и $*$ – либо нормированное умножение $t_{ij} = (\sum_{k=1}^{p} r_{ik} \cdot s_{kj}) \backslash \sum_{k=1}^{p} r_{ik}$, либо минимаксная композиция $t_{ij} = \max(\min(r_{i1}, s_{1j}), \ldots, \min(r_{ip}, s_{pj}))$.

Аксиомы *степени нечеткости множества*: $P1.\xi(A) = 0$, когда A - обычное множество; $P2.\xi(A_{0,5}) = 1, A_{0,5}$- матрица, состоящая из 0.5; $P3.\xi(A) \le \xi(B)$, если $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0.5$ и $\mu_A(u) \ge \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0.5$; $P4.\xi(A) = \xi(\bar{A})$ (симметричность по отношению к 0.5) [1].

Степенью нечеткости матрицы A, элементы которой принадлежат $[0,1]$, называется функция $\xi(A) = \frac{1}{|A|} \sum\limits_{i,j} \mu(a_{ij})$, где $|A|$ - количество элементов в матрице.

Пусть $\mathcal{R}$—множество матриц R размера $[n \times p]$, и $\mathcal{S}$— множество матриц S размера $[p \times m]$, элементы которых $\in [0,1]$. Пара $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *удовлетворяет условию монотонности*, если $\forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}, \forall S \in \mathcal{S}$: $\xi(R_1) < \xi(R_2)$ выполнено $\xi(R_1 * S) \le \xi(R_2 * S)$.

Теорема. *Если $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ — все матрицы размера $[n \times p]$и $[p \times m]$ соответственно, то не существует степени нечеткости, которая сохраняла бы монотонность для $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ как в случае нормированного умножения, так и в случае минимаксной композиции матриц.*

Таким образом, анализируемая модель не позволяет гарантировать качество результата как функцию качества исходных данных, что требует осторожности при ее практическом применении.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю А.П. Рыжову.

Литература

1. А.П. Рыжов *Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости.* Москва, Диалог-МГУ, 1998.
2. Й.Леунг *Разделение на торговые зоны в нечетких условиях.* Теория возможностей и ее применение. М.:Наука, 1992 - 272с.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ.

Титова Е.Е. (Москва, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова)
titovaee@yandex.ru

В работе рассматривается задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В каждую клетку прямоугольного экрана $n \times m$ помещено по одному экземпляру одного и того же автомата $\mathcal{A}$ (клеточного), к его входам присоединены выходы автоматов, стоящих в соседних клетках, выход автомата — его текущее состояние. Доопределим нулями крайние входы автоматов n-й строки и m-го столбца. Неопределенные входы автоматов первой строки и первого столбца будем называть свободными входами, а всю эту конструкцию — (n,m)-экраном $S =< \mathcal{A}, n, m >$. Также имеется внешний автономный автомат $\mathcal{A}_e$ с $(n+m)$ выходами, который генерирует входные последовательности для свободных входов клеточных автоматов. Пара $G =< \mathcal{A}_e, S >$, состоящая из экрана и внешнего автомата называется генератором. Задача состоит в построении такого генератора $G =< \mathcal{A}_e, S >$, чтобы через некоторое время $T(\mathcal{A}_e, S)$ после начала работы внешнего автомата на экране появилась любая заранее заданная конфигурация из нулей и единиц, которая при подаче нулей на свободные входы остается неизменной сколь угодно долго (изображение). Тогда экран S — универсальный, $\mathcal{U}(n,m)$ — множество всех универсальных (n,m)-экранов. Через $\mathcal{G}(S,\Im)$ обозначим множество генераторов $< \mathcal{A}_e, S >$, формирующих изображение $\Im$, $\Im(n,m)$ — множество всех изображений размера $n \times m$. Если $S =< \mathcal{A}, n, m >$ — экран, то $Q(S)$ — число состояний клеточного автомата $\mathcal{A}$, $Q(n,m) = \min_{S\in\mathcal{U}(n,m)} Q(S)$. Обозначим $T(S,\Im) = \min_{<\mathcal{A}_e,S>\in\mathcal{G}(S,\Im)} T(\mathcal{A},S)$, $T(S,n,m) = \max_{\Im\in\Im(n,m)} T(S,\Im)$, $T(n,m) = \min_{S\in\mathcal{U}(n,m)} T(S,n,m)$, $T(n,m,q) = \min_{S\in\mathcal{U}(n,m),Q(S)\leq q} T(S,n,m)$.

Показано, что для любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния. Получены оценки времени конструирования изображений в зависимости от числа состояний клеточного автомата.

Теорема 1. *Если $m \geq n \geq 3$, $n,m \in N$, то $Q(n,m) = 3$.*

Теорема 2. *Если $m \geq n \geq 3$, $n,m \in N$, то $T(n,m) = n$.*

Теорема 3 *Если $m \geq n \geq 3$, $n,m,k \in N$, то $T(n,m,2^{k+1}-1) \leq (m-k+2)\cdot]n/k[+k-1$.*

Замечание *Если $m \geq n \geq 3$, $n,m \in N$, то $T(n,m,3) \leq 3mn+1$.*

Автор выражает благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Литература

1. В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов *Основы теории однородных структур.* Москва, "Наука", 1990.

2. В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин *Введение в теорию автоматов.* Москва, "Наука", 1985.

ПРИНЦИП КОНЕЧНОЙ ТОПОЛОГИИ И РАСПОЗНАВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ФОРМ

Фролов А.Б. (Московский энергетический институт (Технический университет))
abfrolov@mail.ru

Изучаемый метод распознавания топологических форм - принцип конечной топологии, заключается в моделировании реального объекта, состоящего из элементов, совокупности которых участвуют в отношениях различной местности, псевдобулевыми функциями с конечными областями значений по числу возможных комбинаций таких отношений, сравнении таких моделей с целью определения метрики на их множестве, построения тестов и последующего применения метрических алгоритмов распознавания.

Принцип конечной топологии относится к комбинаторно-логическому направлению в распознавании образов (С.В. Яблонский, В.Б. Кудрявцев). Задача распознавания топологических форм (типа молекулярных шейпов) изучалась Ф. Харари (F. Harary) и П. Мезеем (P.Mezey) с использованием графов. Моделирование на основе гиперграфов изучалось В.А. Горбатовым. Принцип конечной топологии предложен автором, E. Jako (Венгрия) и P. Mezey (Венгрия, Канада) [1]. Автором и Р.Н. Бредихиным изучались особенности компьютерной реализации метода и области его применимости [2]. Предложено обобщение принципа конечной топологии, допускающее использование частичных функций, интерпретируемых как совокупности описаний топологических форм, чем достигается сокращение описания обучающей выборки и самих объектов. Обоснован метод построения тестов и метрики на множестве обобщенных описаний топологических форм, позволяющий применение метрических алгоритмов распознавания.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00632-а.

Литература

1. Frolov A.B, Jako, E., Mezey, P.G. Logical models of molecular shapes and their families.Metric properties of factor space of molecular shapes. Kluwer Journal of Mathematical Chemistry 30, N4, Nov. 2001, pp 389-429.

2. Фролов А.Б. Бредихин Р.Н. Принцип конечной топологии и классификация топологических форм. Вестник МЭИ, 5, 2008, С. 47–56.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАБОТОЙ НАСОСНОЙ СТАНЦИИ

Р.Х.Хамдамов, Ш.Ш.Каюмов (Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте)
r.hamdamov@msu.uz

Сформулирована задача оптимального управления работой насосной станции, как задача линейного булева программирования в общей постановке. Для этого насосная станция представлена в виде множества m насосных агрегатов, каждый из которых может находиться в n_i положениях, определяемых углом разворота лопасти насоса на выбранный момент. При этом допускается, что насосные агрегаты, установленные на насосной станции, могут различаться количеством углов разворота лопастей, т.е. могут быть разнородными.

Предположим, что насосные агрегаты для каждого положения характеризуются следующими параметрами:

1) производительность $Q - q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, ..., q_{in_i}, (i = 1, 2, 3, ..., m)$, где q_{ij} - расходная характеристика i-го насосного агрегата при j-м положении угла разворота лопастей, т.е. количество воды обеспечиваемое агрегатом;

2) энергопотребление $C - c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, ..., c_{in_i}, (i = 1, 2, 3, ..., m)$, где c_{ij}- потребляемая мощность i-го насосного агрегата при j-м положении угла разворота лопастей, т.е. количество электроэнергии.

В целях перехода к задаче линейного булева программирования вводится булевы переменные по следующему правилу: $x_{ij} = 1$, если i-й насосный агрегат работает в j-м положении; $x_{ij} = 0$ -в противном случае.

Теперь можно перейти к формализации задачи оптимизации работы насосной станции как задачи линейного булева программирования следующего вида:

$$(C, X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min_{x_{ij}\in\{0,1\}}, \tag{1}$$

$$|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}x_{ij} - Q_{plan}| \leq \epsilon, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \leq 1, \qquad (i = 1, 2, ..., m), \tag{3}$$

где: Q_{plan} - заданный плановый объем водоподачи; ϵ - допустимая погрешность отклонения от планового объема водоподачи.

При этом минимизация целевой функции (1) обеспечивает минимизацию затрачиваемой общей электроэнергии насосной станции, выполнение ограничения вида (2) допускает отклонение от заданного планового объема водоподачи не более чем на ϵ , а ограничение (3) обеспечивает работу каждого насосного агрегата только в одном из возможных положений.

Решением задачи (1) - (3) является количество и номера работающих насосных агрегатов, а также углы разворота лопастей для каждого из работающих агрегатов. Нахождение решения осуществляется в 2 шага: построение оптимизирующего ряда и выбор окончательного решения.

Для построения оптимизирующего ряда используется алгоритм метода обобщенных неравенств, для чего исходная задача (1)-(3) преобразуется к следующей задаче дискретной оптимизации:

$$F(x) = \frac{(E, X)}{(D, X)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} e_k x_k}{\sum_{k=1}^{p} d_k x_k} \longrightarrow \max_{x_{ij}\in\{0,1\}} \tag{4}$$

где матрицы $q_{ij}, c_{ij}, x_{ij} (i = 1, 2, , ..., m; j = 1, 2, ..., n_i)$ используемые в (1)-(4) преобразованы в вектора $e_k, d_k, x_k, (k = 1, 2, ..., p; p = \sum_{i=1}^{m} n_i)$ соответственно построчно. Смысл этого преобразования заключается в следующем: максимизация функционала $F(x)$ приводит к минимизации знаменателя и максимизации числителя. Учитывая, что в знаменателе (4) находится суммарное энергопотребление, можно утверждать, что максимизация $F(x)$ даст минимизацию суммарного энергопотребления, т.е. достижение главной цели задачи оптимизации.

Результатом работы алгоритма обобщенных неравенств является ряд упорядоченных переменных x_i^* (j=1,2,...,p) расположенных в порядке убывания оптимизирующей значимости слева направо. Для выборки элементов, включенных в конечное решение, на втором этапе решения используется алгоритм модифицированного метода отсечения первого элемента.

Литература

Каюмов Ш.Ш., Хамдамов Р.Х. Оптимальное управление процессом водоподъема на примере каскада насосных станций // Вестник ТашГТУ 2001 4. Ташкент, 2001 . стр.124-129.

Hamdamov R.H., Ergashev A.K., Kayumov Sh.Sh. Solution of the task of a pumping station operation automation with linear boolean programming usage // World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation (WCIS 2000), Kaufering, b-Quadrat Verlag, 2000 г. стр. 30-33

О СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ МАРКОВСКИХ ЯЗЫКОВ

Холоденко А.Б. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
kholoden@mech.math.msu.su

Известно[1], что превосходство человека над компьютером в точности распознавания речи обусловлено учётом человеком контекста высказывания, то есть наличием у человека определённой «модели» языка. В компьютерных системах распознавания чаще всего используется так называемая n-граммная модель, которая оценивает вероятность очередного слова при условии предыстории фиксированной длины. На практике эта модель легко может быть построена при помощи обучающего корпуса достаточного объёма.

В работе[2] предложено обобщение понятия n-граммной модели на бесконечные регулярные языки. Показано, что не для всех регулярных языков существуют n-граммные модели. Языки, для которых такие модели существуют, выделены в специальные классы, названные классами марковских языков порядка n (в работе они обозначены через $M(n)$). Оказывается, эти классы строго вкладываются друг в друга:

$$M(1) \supset M(2) \supset M(3) \supset \ldots \supset M(n) \supset \ldots$$

Пересечение всех классов $M(n)$ названо классом марковских языков и обозначено через $\mathcal{M}$. Показано, что доля марковских языков среди всех регулярных языков, задаваемых автоматами с N состояниями отлична от нуля. Для произвольного фиксированного регулярного языка $\mathcal{L}$ оказывается возможным установить его принадлежность к классу марковских языков за конечное число шагов.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность академику В.Б. Кудрявцеву и профессору Д.Н. Бабину за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе.

Литература

1. Бабин Д.Н., Мазуренко И.Л., Холоденко А.Б. О перспективах создания системы автоматического распознавания слитной устной русской речи. // Интеллектуальные системы. Т.8, вып. 1-4, 2004, с.45-70.
2. Холоденко А.Б. О марковских регулярных языках. // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», 18-23 июня 2007 года -М., Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. с.358-361.

О ПРОБЛЕМЕ ПОЛНОТЫ В КЛАССЕ ЛИНЕЙНО-АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ НАД ПРОСТЫМИ КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ.

Часовских А. А. (Москва)
chasovskikh@mail.ru

Для класса ограниченно-детерминированных функций с операциями композиции $P_{\text{О.-Д.}}$ задача проверки полноты конечных систем алгоритмически неразрешима [1], а множество всех предполных классов, которое образует критериальную систему, континуально [2]. Если вместо операций композиции рассматривать оператор А-замыкания, то задача проверки А-полноты остается алгоритмически неразрешимой, хотя множество всех А-предполных классов, которое образует А-критериальную систему, счетно [3]. Поэтому задача проверки полноты конечных подмножеств изучалась для содержательных подклассов класса $P_{\text{О.-Д.}}$, одним из котроых является класс линейно-автоматных функций L_k, реализуемых линейными последовательностными машинами над алфавитами, являющимися декартовыми степенями поля P из k элементов. В [4] приведены алгоритмы проверки А-полноты и полноты в L_2 конечных подмножеств, найдены все А-предполные и полные классы в L_2. В настоящей работе задача проверки полноты и А-полноты конечных систем решена для классов L_k с простым k. Оказалось, что, как и в случае $k = 2$, число А-предполных классов здесь конечно (оно зависит от k), число предполных классов счетно, а задачи проверки полноты и А-полноты конечных систем алгоритмически разрешимы.

Автор благодарен заведующему кафедрой МаТИС механико-математического факультета МГУ В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Кратко М. И. *Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов* // ДАН СССР. – 1964.–Т. 155, 1.

2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов.* – М.: Наука, 1985.

3. Буевич В. А. *Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций* // Мат. заметки.– 1972.– Вып. 6.

4. Часовских А. А. *О полноте в классе линейных автоматов* // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. – М.: Наука, 1991. – С. 140-166.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛБОЧЕК С ЯРКОСТНЫМИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ КЛЕТКАМИ.

Бабин Д.Н., Черноризов А.М., Соколов Е.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова)
d.n.babin@mail.ru

Мембранный потенциал нейронов определяется взаимодействием их синаптических мембран. Вклад каждого вида ионных каналов в этот потенциал можно оценить решая во времени систему дифференциальных уравнений. Этот подход использовали Ходжкин и Хаксли [1] для описания потенциала действия и его распространения по аксону и Бызов [2] - для нейронов I и II порядка в сетчатке позвоночных.

В докладе рассматривается имитационная математическая модель взаимодействия колбочек с горизонтальными клетками L-типа в сетчатке карпа, построенная по данным внутриклеточного отведения спектральных реакций горизонтальных клеток. Модель описывает работу ионных каналов в мембранах нейронов и позволяет предсказывать значения спектральных реакций горизонтальных клеток как функцию времени в каждый момент времени светового воздействия, меняющегося по длине волны, площади и интенсивности.

Погрешность полученных решений составляет 6 %, а коэффициент линейной корреляции 0.95-0.99. При использовании общепринятой статической модели взаимодействия погрешность была 12 %, а линейная корреляция - 0.87, при этом пропадали характерные качественные особенности графика реакции на световой стимул. Подробно детали проведенных экспериментов описаны в работе [3].

Литература

1. Hodkin A.L. Huksley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve //Ibid.-1952.-117, N 4.- P.500-544.

2. Бызов А.Л., Голубцов К.Ф. Модель нейрона регулятора эффективности синаптической передачи // Биофизика.- 1978.- 23, N 1.-С.119-125.

3. Бабин Д.Н., Черноризов А.М., Соколов Е.Н., Ерченков В.Г., Динамическая модель взаимодействия колбочек с яркостными горизонтальными клетками в сетчатке карпа. // Нейрофизиология.- 1989.-21, N 4.-С.461-466.

О СЛОИСТОСТИ СХЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.

Членова Т.С.(МГУ имени М.В. Ломоносова)
tatiana-tch@mail.ru

Определение 1. Пусть ϕ - схема с единственным выходом над полной системой $\{g_1,\dots,g_n\}$, $g_i \in P_2$. Пусть, далее, γ =$(g_{i_1},\dots,g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_2},\dots,\ g_{i_s},\dots,g_{i_s})$ - последовательность элементов на одном из путей от какого-то входа схемы ϕ к ее выходу, причем $g_{i_k} \neq g_{i_{k+1}}$, $k = 1\dots s-1$. Назовем число s количеством слоев в пути γ и обозначим его через S_γ .

Определение 2. Слоистостью схемы ϕ с одним выходом над полной системой $\{g_1,\dots,g_n\}$ называется число $S_\phi = \max_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$, где Γ - множество всех путей от какого-то из входов схемы ϕ к ее выходу.

Определение 3. Слоистостью функции $f \in P_2$ над полной системой $\{g_1,\dots,g_n\}$, $g_i \in P_2$, называется число $S_f = \min_{\phi\in\Phi} S_\phi$, где Φ - множество всех схем, реализующих функцию f над полной системой $\{g_1,\dots,g_n\}$.

Определение 4. Слоистостью полной системы $G = \{g_1,\dots,g_n\}$ будем называть максимум слоистостей всех функций $f \in P_2$ над G , если множество чисел $\{S_f | f \in P_2, S_f$ - слоистость f над $G\}$ ограничено. Если это множество чисел является неограниченным, то будем считать слоистость равной бесконечности.

Наша цель - исследование слоистостей полных системы в P_2.

Рассмотрим сначала случай полных систем из P_2, состоящих из функций от двух переменных.

Для этого случая верна теорема:

Теорема 1. *Любая полная система $\{g_1,\dots,g_n\}$, где $g_i \in P_2^2$, имеет слоистость не превышающую 4. Существует полная система функций от двух переменных, у которой слоистость равна 4.*

Далее рассмотрим произвольные базисы в P_2. Можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Любая полная система $\{g_1,\dots,g_n\}$, где $g_i \in P_2$, имеет конечную слоистость.*

Усиление этой теоремы:

Теорема 2*. *Слоистость любой полной системы $\{g_1,\dots,g_n\}$, где $g_i \in P_2$, не превышает 6.*

Литература

1. С.В.Яблонский. Введение в дискретную математику - М.: Высшая школа, 2003.

ВРЕМЕННАЯ СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Шуткин Юрий Сергеевич (МГУ им. М.В.Ломоносова)
yurii.shutkin@gmail.com

Рассматривается задача реализации булевых функций с помощью информационных графов (понятие информационного графа вводится в [1]). Такая реализация дает возможность базируясь на вероятностных свойствах входных данных строить различные информационные графы и минимизировать тем самым количество действий, затраченных на вычисление функции. В нашей задаче эти действия есть ни что иное, как вычисление предикатов на ребрах графа, а суммарно затраченные усилия — сложность этого графа. Такой функционал сложности соответствует времени работы алгоритма, реализованного информационным графом (отсюда и берется понятие временной сложности). Также эта сложность отражает среднее нагревание чипа, имеющего конструкцию контактной схемы и реализующего какую-либо булеву функцию.

В работе отдельно рассматривается задача реализации булевых функций в классе информационных деревьев. Деревья как правило могут быть реализованы проще, поэтому их нельзя полностью заменить графами.

В отличие от обычных контактных схем, где ребрам схемы приписаны переменные либо их отрицания [2], информационные графы изначально определены для произвольных базовых множеств булевых функций, т.е. тех функций, которые приписываются ребрам графа. В этой работе наряду с простым множеством переменных и их отрицаний рассмотрены также случаи обобщенных базовых множеств.

Получены основные оценки сложности реализации, такие как оценка функции Шеннона сложности реализации булевых функции в классе информационных графов и информационных деревьев. Также для почти всех булевых функций получен порядок сложности реализации их информационными графами с простым базовым множеством, а для деревьев установлена асимптотика сложности. Для обобщенных базовых множеств также получены оценки сложности для почти всех булевых функций в разных классах функций.

Результаты данной работы можно найти в [3,4].

Автор выражает благодарность Гасанову Э.Э. за помощь в проведении исследования.

Литература

1. *Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б.* Теория хранения и поиска информации. // Изд-во Физматлит, 2002.
2. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. // Изд-во МГУ, 1984.
3. *Шуткин Ю.С.* Синтез информационных графов для предполных классов булевых функций. // Интеллектуальные системы, 2007, 11:1-4, 733-746.
4. *Шуткин Ю.С.* О реализации булевых функций информационными графами. // Дискретная математика, 2008, 20:4, 31-41.

PROPERTIES OF PROPER BINARY MATRICES

Kozlov A.A., Nosov V.A., and Pankratiev A.E.
(Moscow State University, Dept. of Mechanics and Mathematics)
apankrat@shade.msu.ru

Consider the direct product of n copies of a finite Abelian group G, $H = G^n$, and define a Latin square [1] of size $|H| \times |H|$ over group H as follows. Enumerate the rows and columns of an $|H| \times |H|$-square L by elements of H. Then, $x = (x_1, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$ being elements of H, we define the element $L(x, y) = (z_1, \dots, z_n)$ that stays at the intersection of row x and column y by the formulas

$$z_i = x_i + y_i + f_i(p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

where p_i are functions $G \times G \to G$ and f_i are functions $G^n \to G$.

It is known [2] that formulas (1) determine a Latin square for any functions $p_1, \dots, p_n$ iff the family of functions $(f_1, \dots, f_n)$ is *proper*, i.e., for any distinct n-tuples $p' = (p'_1, \dots, p'_n)$ and $p'' = (p''_1, \dots, p''_n)$, there is an index α, $1 \le \alpha \le n$, such that $p'_\alpha \ne p''_\alpha$, while $f_\alpha(p') = f_\alpha(p'')$.

Let a binary $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ be *proper*, i.e., there exists a proper family of functions $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, such that $a_{ij} = 1$ iff function f_j essentially depends on variable x_i. Then (1) matrix A has zero main diagonal; (2) if $a_{ij} = a_{ji} = 1$, then $\exists k \in \overline{1, n} : a_{ik} = a_{jk} = 1$; (3) matrix $\overline{A}$ obtained by rearranging columns and rows of A in the same way is proper; (4) matrix $\overline{A}$ obtained by replacing any row of A with a zero row is proper; (5) if A contains a zero (ith) column, then matrix $\overline{A}$ obtained by eliminating the ith column and ith row is proper; (6) an $(n+1) \times (n+1)$-matix $\overline{A}$ obtained by extending matrix A by a zero $(n+1)$th row and an arbitrary $(n+1)$th column is proper.

On the other hand, the transpose of A is not necessarily a proper matrix; neither is matrix $\overline{A}$ obtained by inconsistent rearrangement of rows and columns of A. Finally, a matrix that contains exactly one nonzero entry in each row is not proper.

This work was supported by the Council of the President of the Russian Federation for the Support of Young Russian Scientists and Leading Scientific Schools, project no. NSh-1983.2008.1.

References

1. Dénes, J., Keedwell A. D., *Latin Squares and Their Applications.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
2. Nosov, V. A., Pankratiev, A. E., Latin Squares over Abelian Groups, *J. Math. Sci.*, **149**, 3, (2008), 1230–1234.

8. Общие проблемы математики.

СТЕПЕННЫЕ ОЦЕНКИ ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ ПО НЕПОЛНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Абдушукуров А.А. (Национальный Университет Узбекистана, Филиал Московского Госуниверситета в г. Ташкенте)
asi_96@mail.ru

Пусть $\{\xi_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}), i \geq 1\}$-последовательность независимых случайных векторов с общей непрерывной функцией выживания(ф.в.) $F(x,y) = P(\xi_{11} > x, \xi_{21} > y), x, y \in R^2$, цензурируется справа последовательностью $\{\eta_i = (\eta_{1i}, \eta_{2i}), i \geq 1\}$-независимых случайных векторов с соответствующими ф.в. $\{G_i(x,y) = P(\eta_{1i} > x, \eta_{2i} > y), i \geq 1\}, x, y \in R^2$. Наблюдается неоднородно цензурированная справа выборка $V^{(n)} = \{(Z_i, \Delta_i), 1 \leq i \leq n\}$, где $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i}), \Delta_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}), Z_{ki} = min(\xi_{ki}, \eta_{ki}), \Delta_{ki} = I(Z_{ki} = \xi_{ki}), k = 1, 2$ и $I(A)$-индикатор. Рассматривается следующая оценка для ф.в. $F(x,y)$ по выборке $V^{(n)}$:

$$F_n(x,y) = \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} > x, Z_{2i} > y)\}^{R_n(x,y)}, \qquad (1)$$

где $R_n(x,y) = \widetilde{\Lambda}_n(x,y)[\Lambda_n(x,y)]^{-1}, \widetilde{\Lambda}_n$ и Λ_n соответствующие оценки интегральных функций интенсивностей $\widetilde{\Lambda}_n$ и Λ_n. Оценка (1) является обобщением оценки одномерной ф.в., предложенной в [1]. Предварительные результаты по установлению свойств оценки (1) были приведены в [2]. В докладе обсуждается дальнейшие свойства степенной оценки (1).

Литература

1. Абдушукуров А.А. О непараметрическом оценивании показателей надежности по цензурированным выборкам — Теория вероят. и ее примен. 1998. т.43. вып.1. с.141-148.
2.Абдушукуров А.А. Непараметрические оценки функции выжива-ния на плоскости по цензурированным наблюдениям — Узбекский матем. ж-л. 2004. N.2. с.3-11.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Агеев О.Н(МГТУ/МРIМ), Степин А.М.(МГУ), Тихонов С.В.(РГТЭУ)
ageev@mx.bmstu.ru,tikhonovc@mail.ru

Представления счетной группы G преобразованиями, сохраняющими конечную меру, образуют полное (метризуемое) сепарабельное пространство $\mathcal{A}_G$ относительно слабой топологии.

Свойство G-действий называется типичным, если оно выполняется на массивном множестве в $\mathcal{A}_G$. Для класса аменабельных групп типичные свойства соответствующих действий достаточно хорошо изучены. В настоящем сообщении рассматриваются действия групп со свойством (T): тривиальное представление 1_G изолировано в дуальном пространстве $\hat{G}$.

1.Типичное действие кончнопорожденной финитно аппроксимируемой (T)-группы имеет нетривиальную точечную компоненту в спектре(иными словами, групповой фактор).

2. Существуют (явные) примеры счетных групп, для которых типичное действие имеет смешанный спектр. Предложено несколько достаточных условий для наличия этого группового свойства в терминах структуры дуального пространства, ограничивающих класс счетных групп на непустые подмножества.

Утверждение 1 выводится из слабого рохлинского свойства (Группа G обладает слабым рохлинским свойством, если найдется действие, сопряженные к которому сохраняющими меру преобразованиями всюду плотны в $\mathcal{A}_G$.) и следующих фактов:

а) Множество конечномерных неприводимых унитарных представлений конечно-порожденной (T)-группы не более чем счетно.

б) Если действия слабо близки, то близки и соответствующие спектральные компоненты.

В дополнение к 1. и 2. отметим, что для действий (T)-групп типична неэргодичность и равномерная бесконечная кратность точечной компоненты в спектре.

Существуют также локально-компактные недискретные группы для действий которых типично существование группового фактора.

Первый автор благодарит MPIM, Bonn за частичную финансовую поддержку. Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-3038.2008.1)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. (МГУ имени М.В.Ломоносова)
afanas@mech.math.msu.su; ebulinsk@mech.math.msu.su

Интерес к изучению пропускной способности автотрасс возник еще до второй мировой войны, см., напр., [1]. В последние годы модели транспортных потоков интенсивно изучаются с использованием теории клеточных автоматов, методов статистической механики и математической физики и многих других, см., напр., [2], [3] и ссылки в них. В данной работе основное внимание уделяется стохастическим марковским моделям, анализ которых производится с помощью методов теории массового обслуживания, теории восстановления и регенерирующих процессов. В первой части рассматриваются автомобили, движущиеся по трассе в одном направлении с различными скоростями. Они появляются случайным образом, проходят случайные расстояния по трассе и покидают ее. Возникают три различные модели, обусловленные правилами взаимодействия быстрых и медленных автомобилей. Одна из основных задач состоит в подсчете плотности потока автомобилей в модели 1. Две другие модели позволяют получить ее оценки сверху и снизу. Во второй части исследуются транспортные потоки на трассе со светофорами. При анализе работы одного светофора случайные величины, характеризующие его функционирование, предполагаются независимыми и показательно распределенными, так что изучаемые процессы оказываются марковскими. Решается задача оптимизации моментов переключения светофора по критерию минимизации среднего суммарного числа ожидающих автомобилей. Найдена зависимость плотности потока на трассе от параметров системы и работы светофоров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00362.

Литература

1. Greenshields B.D. A Study of Highway Capacity. *Proc. Highway Res.*, 1935, v. 14, p. 448–477.

2. Blank M. Ergodic properties of a simple deterministic traffic flow model. *J. Stat. Phys.*, 2003, v. 111, p. 903–930.

3. Cáceres F.C., Ferrari P.A. and Pechersky E. A slow to start traffic model related to a M/M/1 queue. arXiv: cond-mat/0703709 v2 [cond-mat.stat-mech] 31 May 2007.

ОДНА ОЦЕНКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Бакиров Н.К. (Институт математики УНЦ РАН)
bakirovnk@rambler.ru

В работе оценивается разность вероятностей:

$$\Delta = |P\{X(t) \leq a_2(t), \forall t \in [0,T]\} - P\{X(t) \leq a_1(t), \forall t \in [0,T]\}|,$$

где $X(t), t \in [0,T]$ – случайный процесс (сл.пр.) с ковариационной функцией $r(t,s)$, $a_k(t)$ – непрерывные функции. Пусть $a(t,s) = a_1(t)(1-s) + a_2(t)s, s \in [0,1]$. Для случайного события A обозначим

$$q_t(x, A) = \frac{d}{dx} P\{X(t) < x, A\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $a_k(t), k = 1,2$ и траектории сл.пр. $X(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы,

2) $r(t,t) = 1, \forall t$, существуют непрерывные производные $r_{i,j}(\tau, t) = \partial^{i+j} r(\tau, t)/\partial\tau^i \partial t^j$, $\forall i, j \leq 2$,

3) для всех $t \in [0,T]$ существует непрерывная плотность $p_t(x,y,z)$ распределения случайного вектора $(X(t), X'(t), X''(t))$ (здесь и ниже запись $f'(.), f''(.)$ обозначает производные по параметру t).

Тогда

$$\Delta \leq \int_0^1 ds \int_0^T dt|a_2(t) - a_1(t)| \int_{-\infty}^0 p_t(a(t,s), a'(t,s), z + a''(t,s))dz+$$

$$+|a_2(0) - a_1(0)| \int_0^1 q_0(a(0,s), X'(0) \leq a'(0,s))ds+$$

$$+|a_2(T) - a_1(T)| \int_0^1 q_T(a(T,s), X'(T) \geq a'(T,s))ds.$$

В качестве следствия теоремы 1 можно получить известную оценку для плотности распределения $\max_{t\in[0,T]} X(t)$ из работы Azais J.-M., Wschebor M.— Probability Theory and Related Fields 119, 70.98 (2001),стр. 75. В работе рассматривается также случай многомерного t.

КАЛИБР И ЧИСЛО ШАНИНА ПРОСТРАНСТВА КРУПНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА

Р. Б. Бешимов, А.А.Хужаев (Национальный университет Узбекистана)
rbeshimov@mail.ru, alijon1983@mail.ru

Пусть X- топологическое T_1-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим через $\exp X$. Пусть F-непустое замкнутое подмножество топологического прострaнтва X. Крупным подмножеством гиперпространства $\exp X$ называется множество $F^+ = \{E \in \exp X : F \subset E\}$. Для каждого $F \in \exp X$ множество $F^+ = \{E \in \exp X : F \subset E\}$ является замкнутым подмножеством гиперпространства $\exp X$, т.е. $F^+ \in \exp(\exp X)$. Положим $K \exp X = \{F^+ : F \neq \emptyset$ и F замкнуто в $X\}$. Базу топологии Виеториса в $K \exp X$ образуют множества вида:

$$W\langle O_1, \ldots, O_n\rangle = \{F^+ \in K\exp X : F^+ \subset \bigcup_{i=1}^n O_i, F^+ \cap O_i \neq \emptyset, i = 1, \ldots, n\},$$

где $O_1, \ldots, O_n \in D = \{O\langle U_1, \ldots, U_k\rangle\}$, где D – открытая база топологии $\exp X$, и $U_1, \ldots, U_k$ – открытые множества X. Пространство $K \exp X$ с указанной топологией назовем пространством крупных подмножеств гиперпространство $\exp X$.

Пусть $f : X \to Y$-непрерывное отображение "на". Для каждого замкнутого множества $F \subset X$ множества $F^+ \in K \exp X$ замкнуто в $exp(\exp X)$. Положим $(K \exp f)(fF)^+ = (fF)^+$. Это равенство определяет отображение $K \exp f : K \exp X \to K \exp Y$. Отображение $K \exp f$ действует по формуле

$(K \exp f)^{-1} W\langle U_1, ..., U_n\rangle = W\langle (expf)^{-1}\ U_1, ..., (expf)^{-1} U_n\rangle$.

В работе доказано следующая

Теорема. Пусть X - бесконечное T_1 - пространство. Тогда

$\varphi(K \exp X) \leq \varphi(X)$, где $\varphi \in \{d,k,pk,sh,psh\}$.

Литература

1. В.В. Федорчук , В.В. Филиппов. Общая топология. Основные конструкции. — МГУ, Москва, 1988.

К ФОРМУЛАМ ЧАППЛА–ЭЙЛЕРА, ФУССА И ТЕОРЕМЕ РАДИЧА–КАЛИМАНА

И. С. Богатый, С. А. Богатый (Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова)
bogatyi@gmail.com, bogatyi@inbox.ru

Классическая формула Эйлера

$$d^2 = R^2 - 2rR, \text{ или в другом виде } r^{-1} = (R + d)^{-1} + (R - d)^{-1},$$

(полученная независимо в 1746 году Чапплом) связывает расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника с их радиусами R и r. В 1797 году его ученик Фусс нашел формулу, связывающую величины d, R и r, для вписанно-описанного четырехугольника:

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2, \text{ или в другом виде } r^{-2} = (R + d)^{-2} + (R - d)^{-2}.$$

В 1827 году Штейнер нашел эту формулу в новом виде:

$$r^4 = (R + r + d)(R + r - d)(R - r + d)(R - r - d).$$

В 1802 году Фусс нашел формулу, связывающую величины d, R и r, для вписанно-описанного пятиугольника. Впоследствии такая формула была найдена для вписанно-описанного n-угольника при $n = 6, 7, 8, 9, 12, 16$. С принципиальной точки зрения (существования некоторого функционального соотношения на величины d, R, r и n у вписанно-описанного n-угольника) все эти результаты вытекают из известной теоремы Понселе об n-периодической (n-замкнутой) вписанно-описанной ломанной. Келли был первым, кто выписал это условие n-периодичности в явном виде для произвольного n. В 2005 году Радич и Калиман нашли другое обобщение формулы Чаппла–Эйлера, в котором вписанный треугольник касался некоторой окружности только двумя сторонами.

Предлагается аналог результата Радича–Калимана для четырехугольников и пятиугольников, у которых одна сторона может не касаться внутренней окружности. Даётся также аналог теоремы Радича–Калимана для вписанного, почти внешнеописанного трех-, четырех-, пятиугольника. Доказательство техническое и получено с помощью символьных компьютерных вычислений.

Теорема. *Пусть у четырехугольника $A_0A_1A_2A_3$, вписанного в окружность радиуса R, стороны $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$ и $[A_2A_3]$ касаются окружности радиуса r в точках T_1, T_2 и T_3 соответственно. Тогда*

$$\frac{A_0A_3}{A_0T_1 + A_3T_3} = \frac{|4r^2R^2 - (R^2 - d^2)^2|}{(R^2 - d^2)^2 - 4r^2d^2},$$

где d – расстояние между центрами окружностей.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 06-01-00764.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВПОЛНЕ 0-ПРОСТЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

Волков М.В. (Уральский государственный университет)
Mikhail.Volkov@usu.ru

Многообразие алгебраических систем называют предельным, если оно не имеет конечного базиса тождеств, но каждое его собственное подмногообразие конечно базируемо. Из леммы Цорна легко следует, что каждое бесконечно базируемое многообразие содержит некоторое предельное подмногообразие, но построение явных примеров предельных многообразий, как правило, требует значительных усилий. В классе полугрупп первый явный пример был указан автором [3], дальнейшие примеры нашли [1] и [2] .

Мы указываем новую серию предельных многообразий полугрупп, допускающих (в отличие от ранее известных примеров) весьма прозрачное определение в терминах порождающих полугрупп. Пусть C_p – циклическая группа простого порядка p, A – 5-элементная полугруппа, задаваемая (в классе полугрупп с нулем) копредставлением $A = \langle a, b \mid a^2 = aba = a,\ b^2 = 0,\ bab = b\rangle$.

Теорема. Для каждого простого p многообразие $\mathcal{A}C_p$, порожденное полугруппой A и группой C_p, является предельным. Многообразие $\mathcal{A}C_p$ порождается конечной вполне 0-простой полугруппой с делителями нуля, и каждое предельное многообразие полугрупп, порождаемое вполне 0-простой полугруппой с делителями нуля, совпадает с одним из многообразий $\mathcal{A}C_p$.

Отметим еще, что многообразие $\mathcal{A}C_2$ может быть порождено некоторой 6-элементной полугруппой. Как известно, любая полугруппа с 5 или менее элементами порождает конечно базируемое многообразие, т. е. наш пример в этом смысле неулучшаем.

Изложенные результаты получены совместно с Эдмондом Ли (университет Саймона Фрэйзера, Канада).

Литература

1. Pollák Gy. A new example of limit variety — Semigroup Forum. – 1989. – Vol. 38. – P. 283–303.
2. Sapir M. V. On Cross semigroup varieties and related questions — Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42. – P. 345–364.
3. Volkov M. V. An example of a limit variety of semigroup — Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 24. – P. 319–326.

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЁННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ В ЛИПШИЦЕВЫХ БАЗИСАХ, СОДЕРЖАЩИХ КОНТИНУУМ КОНСТАНТ

Гашков С. Б. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
sergey.gashkov@lsili.ru

Схемой S в базисе B называется произвольная последовательность функций $f_1(X), \ldots, f_{n+L}(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, в которой первые n функций определяются равенствами $f_i(X) = x_i$, а каждая следующая $f_l(X)$ вычисляется через предыдущие с помощью одной из базисных операций w_k, $k = k(l)$.

Сложностью схемы S называется число L. Схема S реализует функцию $F_S = f_L$. Сложностью функции $f(X)$ называется число $L_B(f) = \min_{F_S=f} L_B(S)$. Для любой непрерывной функции $f(X) \in C(I^n)$ определим сложность ε-приближения f схемами в базисе B как $L_B(f,\varepsilon) = \min\{L_B(g) : \|g - f\| \le \varepsilon\}$, где $\|\cdot\|$ — чебышёвская норма в пространстве $C(I^n)$. Для произвольного компакта $K \subset C(I)$ определим сложность его ε-приближения схемами в базисе B как $L_B(K,\varepsilon) = \max_{f\in K} L_B(f,\varepsilon)$. Для класса функций $W = W(M,N,I^n)$, определённых на $I^n = [0,1]^n$, не превосходящих по модулю N и удовлетворяющих по каждой переменной условию Липшица с константой M, и для содержащего одну константу базиса $B = \{x-y,\ x*y,\ |x|,\ 1/2\}$, где $x*y = \min(\max(x,0),1)\min(\max(y,0),1)$, автором ранее было получено при $\varepsilon \to 0$ равенство по порядку

$$L_B(W,\epsilon) = \Theta\left(\frac{H_\epsilon(W)}{\log_2 H_\epsilon(W)}\right) = \Theta\left(\varepsilon^{-n}/\log\varepsilon\right),$$

где $H_\varepsilon(W)$ — колмогоровская энтропия компакта W.

Для базисов, содержащих континуум констант, положение резко меняется. Так, для базиса $B = \{x - y, x*y, |x|\} \cup [0,1]$ в случае $n=1$ автором и Я. В. Вегнером было недавно доказано, что

$$L_B(W,\epsilon) = \Theta\left(\sqrt{H_\epsilon(W)}\right) = \Theta\left(\varepsilon^{-1/2}\right).$$

В случае $n=2$ справедливо равенство по порядку

$$L_B(W,\epsilon) = \Theta\left(\sqrt{H_\epsilon(W)}\right) = \Theta\left(\varepsilon^{-1}\right).$$

По видимому, аналогичное равенство верно для любого четного n.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

О КОРНЕВОМ ТОЖДЕСТВЕ

Гусев Г.И. (г.Саратов)

Пусть $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, O_p — кольцо целых p-адических чисел и U_p — мультипликативная группа единиц,

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha_1\geqslant 0,\ldots,\alpha_n\geqslant 0} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

— степенной ряд с целыми p-адическими коэффициентами, сходящийся на компакте O_p^n.

Теорема 1. Пусть p — нечетное простое число и $F(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет следующему условию: если $\bar a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in O_p^n$ — n-мерная точка, являющаяся решением системы сравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0 \ (mod\, p), \quad 1 \leqslant i \le n,$$

то гессиан аналитической функции $F(x_1,\ldots,x_n)$ в данной точке $det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ является p-адической единицей ε_a.

Тогда существует, и притом только единственная точка $\bar\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) \in O_p^n$, принадлежащая компакту $K_{\bar a} = \bar a + pO_p^n$, которая является решением системы уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1}$$

Теорема 2. В условиях и обозначениях теоремы 1 существует такое семейство изометрий, связанных с компактом $K_{\bar\theta} = \bar\theta + pO_p^n$, что имеет место изометрическая эквивлентность

$$F(x) = F(\bar\theta) + \frac{1}{2!} d^2F \mid_{x=\bar\theta}. \tag{2}$$

Теорема 3. В условиях и обозначениях теоремы 1 имеет место следующее корневое тождество:

$$\sum_{x_1|p^\alpha} \cdots \sum_{x_n|p^\alpha} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} F(x_1,\ldots,x_n)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} F(\bar\theta_s)\right) \left(\frac{2^n \varepsilon_{\theta_s}}{p}\right)^\alpha i^{\left(\frac{p^\alpha - 1}{2}\right)^2 n} p^{\frac{n\alpha}{2}},$$

где $\alpha \geqslant 2$, $\bar\theta_s$ пробегает все решения системы уравнений (1), принадлежащие компакту O_p^n.

О ПОПОЛНЕНИИ НЕПОЛНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ БИТЕТРАЭДРИЧЕСКОГО ТИПА

Гуцул И.С. (Кишинев)
igutsul@mail.ru

В своей известной работе [1] У. Терстон развил метод пополнения неполных гиперболичеких многообразий, названный им методом хирургии Дена. Свои рассуждения он вел на примере неполного многообразия, полученного отождествлением граней треугольной бипирамиды со всеми бесконечно удаленными вершинами.

В данном сообщении мы изложим этот метод с точки зрения синтетической геометрии, выпишем соответствующие уравнения для параметров симплексов.

Кроме того мы параллельно изучим многообразия, получаемые из того же многогранника по другой схеме отождествления граней. Одновременно будут получены условия, когда при пополнении многообразия получаются орбифолды. Рассмотрим в гиперболическом пространстве два симплекса со всеми бесконечно удаленными вершинами, склеенные по грани. Обозначим вершины этого многогранника цифрами $1, 2, 3, 4, 5$, причем симплексы склеены по грани (1,2,3). Пусть двугранные углы этих симплексов будут $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Если мы отождествим грани полученного многогранника по следующим схемам:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 : (1,2,3) \longrightarrow (1,5,3) & \psi_1 : (1,2,4) \longrightarrow (2,3,5) \\ \varphi_2 : (3,1,4) \longrightarrow (3,5,2) & \psi_2 : (1,3,4) \longrightarrow (3,5,1) \\ \varphi_3 : (1,2,5) \longrightarrow (3,4,2) & \psi_3 : (1,2,5) \longrightarrow (3,4,2), \end{array}$$

то получим неполные многообразия M_1 и M_2 если выполнена следующая система уравнений: $(1)\, \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, $(2)\, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi$, $(3)\, \alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2$, $(4)\, \dfrac{sin^2\beta_1}{sin\alpha_1 sin\gamma_1} \cdot \dfrac{sin^2\beta_2}{sin\alpha_2 sin\gamma_2} = 1$. Многообразия M_1 и M_2 будут полными, если оба симплекса правильные, т.е. если все их двуграные углы равны по $\pi \backslash 3$. То что многообразия негомеоморфны друг другу доказывается рассмотрением следующей картины на орисфере. Если же мы начнем деформировать симплексы, то пополнение многообразий M_1 и M_2 сведется к поиску дискретных групп симметрии подобия на орисфере. Мы получим две серии многообразий, которые пополняют неполное многообразие M_1, если к уравнениям (1)–(4) добавим два уравнения: $(5)\, m(\alpha_2 - \gamma_1) + n(2\alpha_2 - 2\gamma_2) = 2\pi$, $(6)\, \left(\dfrac{sin\alpha_1}{sin\beta_1} \dfrac{sin\gamma_2}{sin\beta_2}\right)^m = \left(\dfrac{sin^4\beta_2}{sin^2\alpha_2 sin^2\gamma_2}\right)^n$, где $m + n \geqslant 5$ взаимнопростые натуральные числа.

Если же к уравнениям (1)–(4) мы добавим уравнения: $(7)\, m(\alpha_2 - \gamma_1) + n(2\alpha_2 - 2\gamma_2) = 2\pi$, $(8)\, \left(\dfrac{sin\alpha_1}{sin\beta_1} \dfrac{sin\gamma_2}{sin\beta_2}\right)^m = \left(\dfrac{sin^4\beta_1}{sin^2\alpha_1 sin^2\gamma_1}\right)^n$, то получим другую счетную серию компактных гиперболических 3-многообразий.

Пополнения неполного многообразия M_2 мы получим если к уравнениям (1)–(4) добавим еще два уравнения: $(9)\, m(\gamma_1 - \gamma_2) + n(2\alpha_2 - 2\gamma_1) = 2\pi$, $(10)\, \left(\dfrac{sin\alpha_1}{sin\beta_1} \dfrac{sin\beta_2}{sin\alpha_2}\right)^m = \left(\dfrac{sin\beta_1}{sin\gamma_1} \dfrac{sin\gamma_2}{sin\beta_2}\right)^n$.

Другую счетную серию гиперболических 3-многообразий мы получим, если к уравнениям (1)–(4) добавим уравнения (11)–(12). $(11)\, m(\gamma_1 - \gamma_2) + n(2\alpha_1 - 2\gamma_2) = 2\pi$,

$$(12) \left(\frac{sin\beta_1}{sin\alpha_1} \frac{sin\alpha_2}{sin\beta_2}\right)^m = \left(\frac{sin\beta_1}{sin\gamma_1} \frac{sin\gamma_2}{sin\beta_2}\right)^n$$

Работа выполнена при частичной поддержке грант ASM-RFFI (08.820.08.06 RF).

Литература

1. Thurston W.P. The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Univ. Lecture Notes,(1978)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАТИСТИКИ КРИТЕРИЯ ОДНОРОДНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ

Джамирзаев А.А. (Ташкент, Национальный Университет Узбекистана)
djamirzaev@rambler.ru

Пусть $\overline{X}_N = (X_1, X_2, ..., X_N)$ и $\overline{Y}_N = (Y_1, Y_2, ..., Y_N)$-две независимые выборки, которые состоят из N независимых наблюдений и $N = N_n$-положительная целочисленная случайная величина. При этом $\overline{X}_N$ и $\overline{Y}_N$ выборки со случайными объемами из распределения $L(\xi)$ с функцией распределении(ф.р.) $F_1(x)$ и из распределения $L(\eta)$ с ф.р. $F_2(x)$ соответственно, где ξ, η, N_n определены на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$.

Пусть $\nu_N = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k)$ и $\mu_N = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ векторы частот попадания соответствующих выборочных точек $X_1, X_2, ..., X_N$ и $Y_1, Y_2, ..., Y_N$ на соответствующие интервалы группировки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k$, не имеющих общих точек, где $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k = N$, $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k = N$.

Введем статистику

$$\chi_N^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - \mu_i)^2}{\nu_i + \mu_i}.$$

Известно [1], что при $P\{N = n\} = 1$ и при гипотезе $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\chi_n^2 < x\} = H_{k-1}(x),$$

где $H_{k-1}(x)$-"хи-квадрат"распределение с $k-1$ степенями свободы.

Теорема 1. Пусть при $n \to \infty$ $\frac{N}{n}$ сходиться по вероятности к N_0, где N_0-положительная сл. вел.. Тогда при гипотезе H_0, для любого $A \in F, P(A) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\chi_N^2 < x/A\} = H_{k-1}(x).$$

Из теоремы 1 следует, что $\{\chi_n^2\}$ и $\{\chi_N^2\}$ являются перемешивающимися последовательностями сл. вел. в смысле А. Реньи с предельной функцией распределения $H_{k-1}(x)$ (см.[2]).

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$\lim_{n\to\infty} P\{\chi_N^2 < x, \frac{N}{n} < y\} = H_{k-1}(x)F(y),$$

$\forall x \in R$, и $\forall y \in C(F)$, где $F(x) = P\{N_0 < y\}$

Литература

1. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев "Математическая статистика", Москва, Высш.школа, -1984г.
2. А.А. Джамирзаев "О свойстве перемешивания в смысле А.Реньи для числа положителных сумм", Acta Sceinticarum Math., 1979. V.41. p.p. 47-53.

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Дудакова О. С. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
olga.dudakova@gmail.com

Известно, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис [4], а для любого $k \geq 3$ в P_k существуют замкнутые классы, как со счетным базисом, так и не имеющие базиса [2]. К настоящему времени отсутствует полное описание всех конечно порожденных классов функций многозначной логики даже для семейства всех предполных классов. При $k \leq 7$ все предполные классы в P_k являются конечно порожденными [3], а начиная с $k = 8$, существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [5].

Имеет место следующее утверждение (см. также [1]).

Теорема. Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ всех функций, монотонных относительно $\mathcal{P}$, является конечно-порожденным; (2) любые два несравнимых элемента $\mathcal{P}$ имеют либо точную верхнюю грань, либо точную верхнюю грань второго порядка; (3) в классе $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ существует некоторая мажоритарная функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–4470.2008.1).

Литература

1. Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики — Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 13–104.
2. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса — ДАН СССР. — 1959. — 127. — № 1. — С. 44–46.
3. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik — Z. math Log. und Grundl. Math. — 1978. — 24. — P. 79–96.
4. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions — Amer. J. Math. — 1921. — 43. — № 3. — P. 163–185.
5. Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations — Order. — 1986. — 3. — P. 211–218.

ОБ УРАВНЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕШЕНИЯ В СВОБОДНЫХ МОНОИДАХ

Дурнев В.Г., Зеткина О.В. (Ярославский государственный университет им.П.Г.Демидова)
durnev@univ.uniyar.ac.ru

Через Π_2 мы обозначаем свободный моноид ранга 2 со свободными образующими a и b, через $|x| = |y|$ – предикат "длины слов x и y равны", а через $|x|_\alpha = |y|_\alpha$ – предикат "проекции слов x и y на выделенную букву α равны". Рекурсивный язык L_1 в алфавите $\{a, b\}$ состоит из всех слов w в этом алфавите, для которых выполнено равенство $|w|_a = |w|_b$.

Теорема 1. Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению в свободном моноиде Π_2 с ограничениями на решения вида

$$w(x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x_1, \ldots, x_n, a, b)\ \& \underset{\{i,j\}\in A}{\&} |x_i| = |x_j|\ \&\ |x_1|_b = |x_2|_b$$

определить, имеет ли оно решение.

Теорема 2. Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению в свободном моноиде Π_2 с ограничениями на решения вида

$$w(x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x_1, \ldots, x_n, a, b)\ \& \underset{\{i,j\}\in A}{\&} |x_i| = |x_j|\ \&\ x_1 \in L_1$$

определить, имеет ли оно решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-845.2008.1).

О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ПРИ РАСШИРЕНИИ БАЗИСА ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ КОНСТАНТ

Ермакова Д. И. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
dashul@yandex.ru

Пусть B — произвольное функционально полное множество функций k-значной логики P_k. Обозначим через $L_B(f)$ сложность реализации функции f из P_k в классе схем из функциональных элементов над базисом B (под сложностью схемы понимается число входящих в нее элементов).

Обозначим через B' расширенный базис, полученный из базиса B добавлением всех k констант логики P_k. Как известно, для всякого $k \geqslant 2$ можно указать такую постоянную c, что для любого базиса B и любой функции f из P_k справедливы неравенства

$$L_{B'}(f) \leqslant L_B(f) \leqslant L_{B'}(f) + c.$$

Обозначим через c_k наименьшее возможное значение постоянной c при данном k. Можно показать, что при любом k имеет место грубая оценка $c_k \leqslant k^k - 1$. При $k = 2$ и $k = 3$ удалось найти точное значение величины c_k.

Теорема. Для двузначной и трехзначной логики справедливы, соответственно, равенства $c_2 = 2$ и $c_3 = 7$.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00863), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики" (проект "Задачи оптимального синтеза управляющих систем").

ТРИ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ УСРЕДНЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Захаров А.В. (ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа)
andrewzakhar@mail.ru

Пусть ξ_t, $t \in T \subset R^n$, - случайное поле (случайный процесс), а $\gamma(t,s) = E\left(\xi_t - \xi_s\right)^2$ - его вариограмма. Рассмотрим также обобщенную вариограмму ([2]) между значениями случайного поля в точке t_1 и на множестве $T_1 \subset T$ меры $|T_1|$:

$$\gamma(t_1, T_1) = E\frac{1}{|T_1|}\int\limits_{T_1}\left(\xi_{t_1} - \xi_t\right)^2 dt.$$

Задача 1. Найти множество T_1 такое, чтобы вариограмма $\gamma(t_1, T_1)$ была минимальна.

Задача 2. Для фиксированного множества T_1 найти точку t_1 такую, чтобы вариограмма $\gamma(t_1, T_1)$ была минимальна.

Введем обозначения для усредненных значений случайного поля ξ_t, $t \in T$, на непрерывном подмножестве $T_1 \subset T$ и дискретном подмножестве $T_2 = \{t_i\}_{i=1}^n$:

$$\xi_{T_1} = \frac{1}{|T_1|}\int\limits_{T_1}\xi_t dt, \quad \xi_{T_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_{t_i}.$$

Дисперсия расширения значений с множества T_1 на множество T_2 ([2]) определяется как

$$\sigma(T_1, T_2) = E\left(\xi_{T_1} - \xi_{T_2}\right)^2,$$

Задача 3. Найти расположение точек $\{t_i\}_{i=1}^n$ и разбиение $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ такие, чтобы дисперсия $\sigma(T_1, T_2)$ была минимальна.

В докладе будет показано, что в достаточно общих условиях указанные задачи могут быть сведены к общей задаче квантизации с анизотропным источником и решены при помощи результатов работы [1].

Литература

1. Захаров А.В. Одно обобщение теории квантизации и его применение к задачам оценивания случайных полей по значениям в точках. – Уфа: Гилем. – 2003.
2. Hans Wackernagel. Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. – 1995.

ФУНКТОР I_β И ПЛОТНОСТЬ

Ишметов А. Я. (Национальный Уиверситет Узбекистана)
Azadbek83@mail.ru

Пусть X – компакт, $C(X)$ – алгебра всех непрерывных функций, определенных на X, с обычными поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой. Следуя [1], вводим следующие операции: 1) $\odot$: $R \times C(X) \longrightarrow C(X)$ по правилу $\odot(\lambda, \varphi) = \lambda \odot \varphi = \varphi + \lambda_X$, где $\varphi \in C(X)$ и λ_X–постоянная на X функция, принимающая везде значение λ; 2) $\oplus : C(X) \times C(X) \longrightarrow C(X)$ по правилу $\oplus(\varphi, \psi) = \varphi \oplus \psi = max\{\varphi, \psi\}$, где $\varphi,\ \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \longrightarrow R$ называется [1] идемпотентной вероятностной мерой, если он обладает следующими свойствами: (i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для любого $\lambda \in R$; (ii) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для любых $\lambda \in R$ и $\varphi \in C(X)$; (iii) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in C(X)$. Число $\mu(\varphi)$ называется интегралом Маслова, соответствующим к μ. Множество всех идемпотентных вероятностных мер на X обозначается [1] через $I(X)$. Имеет место $I(X) \subset R^{C(X)}$ [1]. Обеспечим $I(X)$ с индуцированной из $R^{C(X)}$ топологией. Конструкция I является нормальным функтором в категории компактов и их непрерывных отображений [1]. Для идемпотентной верятностной меры $\mu \in I(X)$ определен её носител:
$supp\mu = \cap\{F : F$ замкнуто в X и $\mu \in I(F)\}$.

Для тихоновского пространства X положим $I_\beta(X) = \{\mu \in I(\beta X) : supp\mu \subset X\}$, $I_\beta^n(X) = \{\mu \in I_\beta(X) : |supp\mu| \le n\}$.

Лемма 1. Если A плотно в компакте X, то $I_\beta^n(A)$ плотно в $I(X)$.

Лемма 2. Если A плотно в тихоновском пространстве X, то $I_\beta^n(A)$ плотно в $I_\beta(X)$.

Основным утверждением настоящей заметки является следующее

Предложение 1. Для произвольного бесконечного тихоновского пространства X имеем $dI_\beta(X) \le dX$

Литература

1. M.Zarichnyi. Idempotent probability measures, I — arXiv:math.GN /0608754 v 130 Aug 2006.
2. А.Ишметов. Об идемпотентных вероятностных мерах. — Материалы конф., посв. 90-летию Нац. Ун.-та Узб. 2008. С. 125-126.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ С КРИТЕРИЕМ СИММЕТРИИ

Козин И. В. (Запорожский национальный университет)
ainc@ukrpost.net

Рассматривается конечный граф $G = (V, E)$. Преобразованием графа G называется любое взаимнооднозначное отображение $F : E \to E$ множества ребер этого графа на себя [1]. Группа Γ преобразований графа G изоморфна группе подстановок S_m, где m - число ребер графа G. Всякую подгруппу A группы Γ будем называть группой симметрий графа G.

Для любого ребра $e \in E$ орбитой этого ребра при действии группы симметрии A называется множество

$$O_A(e) = \{f : f = g(e), g \in A\}$$

Орбитой подграфа $G_1 = (W, Y) \subseteq G$ будем называть объединение орбит всех его ребер и обозначать $O_A(G_1)$. Очевидно, орбиты любых двух ребер графа G либо не пересекаются, либо совпадают.

Определим меру симметрии $\mu_A(G_1)$ подграфа $G_1 \subseteq G$ с непустым множеством ребер, как отношение числа ребер этого подграфа к числу ребер его орбиты [2], то есть

$$\mu_A(G_1) = |Y|/|O_A(G_1)|$$

Для подграфа с пустым множеством ребер будем полагать по определению $\mu_A(\oslash) = 1$. Очевидно, что для любого подграфа $G_1 \subseteq G$ справедливо неравенство $|Y|/|E| \le \mu_A(G_1) \le 1$. Инвариантные относительно действия группы симметрии A подграфы - это подграфы с максимальной мерой симметрии, то есть подграфы, для которых $\mu_A(G_1) = 1$.

Исследована простейшая оптимизационная задача на графах с критерием симметрии, которая формулируется следующим образом: для заданного графа G и его группы симметрии A найти подграф с заданным числом ребер m и максимальной мерой симметрии.

Литература

1. Аминов Л. К. Теория симметрии. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002, 192с.
2. Козин И. В. Фрагментарный алгоритм для задачи симметричного размещения. — Радиоэлектроника, информатика, управление. — Запорожье : ЗНТУ, 2006, 1, С.69–73.

ДЕЙСТВИЯ МЕТРИЗУЕМЫХ И ПОЧТИ МЕТРИЗУЕМЫХ ГРУПП.

Козлов К.Л. (Москва, мех-мат ф-т МГУ им.М.В.Ломоносова)
kkozlov@mech.math.msu.su

Присутствие на пространстве алгебраической структуры, согласованной с его топологией, налагает в ряде случаев весьма сильные ограничения на свойства самого пространства. Оказывается, что d-открытое действие [1] (почти) метризумой группы гарантирует (почти) метризуемость фазового пространства [2].

Действие $\alpha : G \times X \to X$ называется (слабо) d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ выполнено $x \in \int(cl(Ox))$ (существует точка $(y \in X)$ такая, что $x \in \int(cl(Oy)))$, где $N_G(e)$ — семейство открытых окрестностей единицы группы.

Теорема 1. Пусть действие на X слабо d-открыто, и существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, такое, что для любых двух различных точек x, y пространства X существует $O \in \mathcal{O}$, такая, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O. Тогда (1) X — субметризуемо; (2) если X — псевдокомпактное пространство, то X — компактное G-пространство.

Следствие. Если X — G-пространство со слабо d-открытым действием метризуемой группы, то X — метризуемое G-пространство.

Теорема 2. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием почти метризуемой группы. Тогда X — почти метризуемое пространство.

При поддержке министерства науки и образования России, проект РНП 2.1.1.7988. Современная дифференциальная геометрия, топология и их приложения.

Литература

1. V. Chatyrko, K. Kozlov. The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions. — Proceedings of the 9-th Prague Topological Symposium (Prague 2001), Topol. Atlas, North Bay, ON, (2002), 15–21.

2. Б. А. Пасынков. О пространствах с бикомпактной группой преобразований. — Докл. АН СССР, 231:1 (1976), 39–42.

О ПОИСКЕ ВСЕХ БУКВЕННЫХ СОСТАВОВ В СЛОВЕ

Колпаков Р. М. (МГУ имени М. В. Ломоносова), Раффино М. (LIAFA, Univ. Paris Diderot, Paris)
foroman@mail.ru, raffinot@liafa.jussieu.fr

Пусть $w = a_1 \dots a_n$ — некоторое слово над конечным алфавитом Σ. Фрагмент $a_i \dots a_j$ слова w называется его подсловом и обозначается через $w[i..j]$. Буквенным составом подслова называется множество всех различных символов, встречающихся в этом подслове, при этом само подслово называется ареалом своего буквенного состава. Подслово называется максимальным ареалом, если оно не является фрагментом более длинного подслова с тем же самым буквенным составом. Нетрудно показать, что число максимальных ареалов в слове w не превосходит $n|\Sigma|$. Отметим, что каждое подслово слова w также является словом над Σ. Два подслова называются различными, если они являются различными словами. Рассматривается задача определения буквенных составов всех подслов в произвольном заданном слове w. Данная задача имеет прикладное значение для выявления и изучения генных кластеров в молекулах ДНК. Ряд результатов для данной задачи получен в работах [1–3]. В частности, в [3] предложен алгоритм, позволяющий решить данную задачу за время $O(n + |\mathcal{L}| \log |\Sigma|)$, где $\mathcal{L}$ — множество всех максимальных ареалов в слове w. В данной работе мы предлагаем более эффективный алгоритм, позволяющий решить рассматриваемую задачу за время $O(n + |\mathcal{L}_c| \log |\Sigma|)$, где $\mathcal{L}_c$ — множество всех различных максимальных ареалов в слове w.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Литература

1. Amir A., Apostolico A., Landau G. M., Satta G. Efficient text fingerprinting via Parikh mapping. — J. Discrete Algorithms, 2003, V. 1, № 5–6, P. 409–421.

2. Didier G., Schmidt T., Stoye J., Tsur D. Character sets of strings. — J. Discrete Algorithms, 2007, V. 5, № 2, P. 330–340.

3. Kolpakov R., Raffinot M. New algorithms for text fingerprinting. — J. Discrete Algorithms, 2008, V. 6, № 2, P. 243–255.

О НОРМАЛЬНЫХ Σ_m-ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

А.П. Комбаров

Выберем базисную точку $s = \{s_\alpha\}$ в произведении $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Для каждой точки $x \in X$ определено множество индексов $Q(x) = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq s_\alpha\}$. Пусть m — бесконечное кардинальное число. Тогда Σ_m-произведение пространств $X_\alpha, \alpha \in A$, определяется как подпространство $\Sigma_m = \{x \in X : |Q(x)| \leq m\}$ произведения X. Легко видеть, что Σ_m-произведение является всюду плотным подпространством произведения. Если $m = \omega$, то определение Σ_m-произведения превращается в определение Σ-произведения пространств X_α, $\alpha \in A$. Σ-произведения были определены Корсоном в 1959 году, но сама конструкция Σ-произведения была известна гораздо раньше. Ещё в 1938 году Л.С.Понтрягин использовал эту конструкцию для построения примера счетнокомпактного некомпактного пространства. С тех пор Σ-произведения весьма интенсивно исследовались многими авторами. В частности, хорошо известно, что Σ-произведение, не совпадающее с произведением не может быть паракомпактным пространством. Поэтому важной задачей является выяснение условий, при выполнении которых Σ-произведение является нормальным пространством. Все доказанные к настоящему времени теоремы о нормальности Σ_m-произведений объединяет то, что сомножители предполагаются паракомпактами. Поэтому из раннее полученных результатов на эту тему не следует, например, нормальность Σ-произведения экземпляров пространства ω_1 всех счетных ординалов. Основным результатом доклада является следующая теорема, в формулировке которой отсутствует требование паракомпактности сомножителей.

Теорема. Пусть любое конечное произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, нормально, и пусть все X_α являются m-ограниченными пространствами тесноты $\leq m$. Тогда Σ_m-произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, коллективно нормально.

Следствие. Σ-произведение несчетного числа экземпляров пространства ω_1 счетных ординалов является нормальным пространством.

Следствие. Σ-произведение несчетного числа компактов тесноты $\leq m$ является нормальным пространством.

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ВЕНТИЛЬНЫХ СХЕМ С КРАТНЫМИ ПУТЯМИ

Кочергин В. В. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
vvkoch@yandex.ru

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными элементами. Вентильной схемой (с предписанным числом путей), реализующей матрицу A, следуя [1], будем называть ориентированный граф без ориентированных циклов (но, вообще говоря, с кратными ребрами), с двумя группами выделенных занумерованных вершин — p входами (с входной степенью 0) и q выходами, такой, что число путей от i-го входа к j-му выходу равно a_{ij}. Сложностью $l_{\mathrm{BC}}(S)$ вентильной схемы S называется число ребер (вентилей) в S. Положим $l_{\mathrm{BC}}(A) = \min l_{\mathrm{BC}}(S)$, где минимум берется по всем вентильным схемам S, реализующим матрицу A. Обозначим через $D(A)$ максимум абсолютных величин миноров матрицы A (максимум берется по всем минорам).

Теорема 1. Для любой ненулевой целочисленной матрицы A с неотрицательными элементами справедливо неравенство

$$l_{\mathrm{BC}}(A) \geq 3\log_3 D(A).$$

Аналогично основному результату из работы [2] устанавливается асимптотическая неулучшаемость этой оценки для матриц размера 3×3.

Теорема 2. Для любой последовательности $\{A_n\}$ целочисленных матриц размера 3×3 с неотрицательными элементами, удовлетворяющей условию $D(A_n) \to \infty$, справедливо соотношение

$$l_{\mathrm{BC}}(A_n) \leq 3\log_3 D(A_n) + o\left(\log_3 D(A_n)\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Литература

1. Pippenger N. The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths. — Math. Systems Theory, 1979, V. 12, № 4, P. 325–346.
2. Кочергин В. В. О сложности вычисления системы из трех одночленов от трех переменных. — Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: Физматлит, 2006. — С. 79–155.

ХАРАКТЕРНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО ЕДИНИЧНЫХ ЦИКЛОВ И ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Курапов С. В. (Запорожский национальный университет), Похальчук Т. А. (Запорожский национальный университет)
kurapov@zsu.zp.ua

Одним из характерных подмножеств графа G, является подмножество единичных циклов графа C_τ, где единичный цикл определяется как простой цикл, между двумя несмежными вершинами которого в соответствующем графе не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты принадлежащие данному циклу. Как показано в [1] из подмножества единичных циклов всегда можно выделить базис R_c подпространства циклов C. Наличие такого характерного подмножества единичных циклов позволяет алгоритмически установить изоморфизм графов. Установление изоморфизма определяет следующая теорема.

Теорема. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их характерные подмножества единичных циклов.

На основании данной теоремы предложен алгоритм установления изоморфизма графов основанный на методах алгебры структурных чисел.

Литература

1. Курапов С. В., Савин В. В. Векторная алгебра и рисунок графа. – Запорожье : Запорожский национальный университет, 2003, 200с.

ОБ ОЦЕНКАХ НЕЛИНЕЙНОСТИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ЧЕРЕЗ АЛГЕБРАЧЕСКУЮ ИММУННОСТЬ

Лобанов М. С. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
misha_msu@mail.ru

Среди криптографических свойств, которыми должны обладать булевы функции, используемые в потоковых шифрах, важное место занимают алгебраическая иммунность и нелинейность высоких порядков. В ряде работ, появившихся в последние годы, затрагиваются вопросы взаимосвязи этих двух свойств. Одной из самых интересных является проблема получения нижних оценок нелинейности r-го порядка $nl_r(f)$ булевой функции f через значение ее алгебраической иммунности $AI(f)$.

Ранее автором были доказаны нижние оценки нелинейности первого и второго порядков через значение алгебраической иммунности, достижимые для всех допустимых значений параметров.

Для нелинейности более высоких порядков до недавнего времени из нескольких известных оценок лучшей была оценка, независимо полученная автором [1] и С. Менаже [2].

Следующая теорема дает оценку нелинейности r-го порядка, которая при $r > 2$ сильней всех ранее известных оценок.

Теорема. Пусть $AI(g) = k$. Тогда

$$nl_r(g) \geq \sum_{i=0}^{k-r-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=k-2r}^{k-r-1} \binom{n-r}{i} + 2 \sum_{i=k-2r-1}^{k-r-2} \binom{n-r-2}{i}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00863), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики" (проект "Задачи оптимального синтеза управляющих систем").

Литература

1. Лобанов М. С. Оценка нелинейности высоких порядков булевой функции через значение ее алгебраической иммунности. — Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. Часть II. — Москва, 2007, С. 11-16.
2. Mesnager S. Improving the lower bound on the higher order nonlinearity of Boolean functions with prescribed algebraic immunity. — Cryptology ePrint archive (http://eprint.iacr.org/). Report 2007/117.

ЕЩЕ РАЗ О ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ МНОГОГРАННИКАХ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Макаров В. С. (МГУ имени М. В. Ломоносова), Макаров П. В. (МГГУ)
vsmak@mail.ru, pvmakaroff@mail.ru

В [1] было доказано, что в E^3, кроме призм и антипризм, существует только 28 простых (выпуклых) правильногранных многогранников.

В [2] было показано, что в Λ^3 имеется по крайней мере еще одна бесконечная серия простых выпуклых многогранников (правильные n-угольные призмы) и несчетное количество составных правильногранных многогранников. В [3] даны некоторые обобщения конструкций, приведенных в [2], для конечных правильногранных многогранников и для бесконечных орисферических и эквидистантных многогранников в Λ^3 и указана возможность построения правильногранных многогранников с бесконечными гранями. В [3] указаны и примеры построения правильногранных многогранников в Λ^4 и Λ^5.

В данном сообщении подробно рассматривается вопрос о правильногранных многогранниках в пространствах Лобачевского Λ^n малых размерностей ($n = 4, 5$) и обсуждается вопрос о правильногранных гиперболических многогранниках произвольной размерности (предположительно, начиная с некоторого n, в Λ^n существуют, кроме четырех правильных многогранников, еще лишь три правильногранных выпуклых многогранника: призма над ортаэдром, "кубические столбы" и симплициальная бипирамида).

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00565 и 08-01-90102 Мол-а.

Литература

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями. — Труды ЛОМИ АН СССР, 1967, Т. 2.
2. Макаров В. С. О правильногранных многогранниках в пространстве Лобачевского. — Известия АН РМ, 1992, № 2 (8), С. 3-6.

3. Макаров В. С., Макаров П. В. О выпуклых многогранниках с правильными гранями в пространстве Лобачевского. — Материалы VIII международного семинара "Дискретная математика и ее приложения". — М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2004. — С. 402–405.

О СВОЙСТВАХ КЛАССОВ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПОРОЖДЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Михайлович А. В. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
anjutam@gmail.com

В работе изучаются классы функций трехзначной логики, порождающие системы которых состоят из однослойных симметрических функций (определения см. в [1, 2]). Множество всех таких функций обозначается через S^1. Рассматривается задача о базируемости и конечной порождаемости этих классов.

Пусть $\mathrm{A} \subseteq P_3$. Обозначим через $< \mathrm{A} >$ множество всех функций из P_3, которые могут быть реализованы простыми формулами над A. Множество всех функций из S^1, тип которых равен (e, d), будем обозначать через F_α, где $\alpha = e/d$.

Теорема 1 [1]. Пусть G — произвольное множество неконгруэнтных функций из S^1, $F = [G]$. Тогда класс F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G содержит конечное число функций; класс F имеет счетный базис тогда и только тогда, когда G содержит бесконечное число функций и каждая функция, принадлежащая G, содержится в некоторой конечной максимальной цепи множества G; в остальных случаях класс F не имеет базиса.

Теорема 2. Имеет место равенство $[\mathrm{S}^1] =< \mathrm{S}^1 >$.

Теорема 3. Пусть $H \subseteq \mathrm{S}^1$, $G = [H]$. Класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда существуют числа $t \in \mathbb{N}$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_t \in \mathbb{Q}$, такие, что $G \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup H >$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00863), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–4470.2008.1) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики" (проект "Задачи оптимального синтеза управляющих систем").

Литература

1. Михайлович А. В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями. — Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика., 2008, № 4, С. 54–57.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001.

ЯДЕРНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ДАННЫМ

Мурадов Р.С. (Национальный Университет Узбекистана)
spaceship_11@mail.ru

Пусть имеется совокупность n независимых систем с одной и той же структурной функцией φ и k статистически независимыми компонентами. Предположим, что $i-$ компонента каждой системы характеризуется случайным состоянием U_j так, что $U_j = 1$ или $U_j = 0$ в зависимости от того, $j-$ компонента в рабочем состоянии или нет. Каждая система сама также может находится в рабочем состаянии или состаянии отказа. Тогда функция надежности системы удовлетворяет представлению

$$1 - F(x) = h_\varphi(p_1, ..., p_k) = \sum_{U \in \{0,1\}} \varphi(U) \prod_{j=1}^{k} p_j^{U_j} (1 - p_j)^{(1-U_j)}, \quad (1)$$

где $U = (U_1, ..., U_k)$, $p_j = 1 - F_j(x)-$ функция надежности $j-$ компоненты ($0^0 = 1$). Пусть $X_{ij}-$время безотказной работы $j-$ компоненты $i-$ системы, при этом $X_{1j}, ..., X_{nj}-$ независимы и имеют общую функцию распределения $F_j(x)$. Время безотказной работы T_j для $i-$ системы подвергается случайному цензурированию с двух сторон. Нами исследованы асимптотические (при $n \to \infty$) свойства непараметрической ядерной оценки для $1 - F(x)$ с учетом представления (1).

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ СЛОЕНИЯ

Нарманов А.Я., Шарипов А.С. (Ташкент, Национальный университет Узбекистана)
narmanov@yandex.ru, asharipov@inbox.ru

Пусть M гладкое многообразия размерности n, на которых зада- на гладкое $k-$ мерное слоения F (где $0 < k < n$).

Определение. Диффеоморфизм $\varphi : M \to M$ класса $C^r(r \geq 0)$ слоеного риманова многообразия M сохраняющий слоение [1] называется изометрией слоения F (изометрией слоеного многообра- зия (M, F)), если он является изометрией на каждом слое слоения F, т.е. для каждого слоя L_α слоения F, $\varphi : L_\alpha \to \varphi(L_\alpha)$ является изометрией.

Обозначим через $G_F^r(M)$– множество всех изометрий класса C^r– слоеного многообразия (M, F), где $r \geq 0$.

В настоящей работе изучаются группы $G_F^r(M)$ с топологией, которая будет введена ниже. Эта топология зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n– мерным слоением. Если коразмерность слоения F равна n, то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть $\{K_\lambda\}$ - семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому либо слою слоения F и пусть $\{U_\beta\}$ - семей- ство всех открытых множеств на M. Рассмотрим для каждой пары K_λ и U_β совокупность всех отображений $f \in G_F^r(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через $[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \to M | f(K_\lambda) \subset U_\beta\}$.

Всевозможные конечные пересечения множеств вида $[K_\lambda, U_\beta]$ образуют базу для некоторой топологии. Эту топологию будем назы- вать F- компактно-открытой топологией.

Теорема 1. Пусть M- полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k, $f_m \in G_F^r(M)$, $r \geq 0$, $m = 1, 2, \ldots$ Предположим, что для каждого слоя L_α существует точка $o_\alpha \in L_\alpha$ такая, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m схо- дящаяся в F- компактно-открытой топологии.

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф1-096 Министерства Среднего Специального Образования Республики Узбекистан.

Литература

1. И. Тамура. Топология слоений. — М. Мир, 1979 г., 319 с.

ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Небалуев С.И., Сусин М.Н. (Саратов)

nebaluevsi@yandex.ru

Толерантные пространства были определены в работе Зимана [1] как пары вида (X, τ), где X — базисное множество, а τ — отношение толерантности, то есть рефлексивное и симметричное бинарное отношение на X. Отношение толерантности является наиболее общей математической моделью приближенного равенства.

В толерантных пространствах нет предельного перехода, тем не менее их можно рассматривать как псевдогеометрические объекты, допускающие применение методов алгебраической топологии. Для толерантных пространств определены группы гомологий $H(X)$ [1,2] и гомотопические группы $\pi_m(X)$, удовлетворяющие обычным свойствам. Первым результатом, связующим эти группы, стал толерантный аналог теоремы Пуанкаре [2].

Теорема 1. Пусть $\pi_1(X)$ — фундаментальная группа толерантного пространства (X, τ), $H_1(X)$ — группа 1-мерных гомологий пространства (X, τ). Тогда существует гомоморфизм $\psi : \pi_1(X) \to H(X)$, естественый по (X, τ). Если (X, τ) — линейно связное толерантное пространство, то ψ сюрьективен и его ядро совпадает с коммутантом группы $\pi_1(X)$, то есть $H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

С помощью спектральной последовательности [3] толерантного расслоения $p : (\wp(X), \kappa_X) \to (X, \tau)$, где $(\wp(X), \kappa_X)$ — толерантное пространство толерантных путей, доказывается толерантный вариант теоремы Гуревича.

Теорема 2. Если (X, τ) — линейно связное толерантное пространство с тривиальной фундаментальной группой $\pi_1(X) = 0$, тогда первые нетривиальные группы гомологий и гомотопий встречаются в одной и той же размерности и изоморфны.

Литература

1. Zeeman E.C. The topology of brain and visual perseption. — The Topology of 3-Manifolds Ed. M.K. Fort, 1962.

2. Небалуев С.И. Гомологическая теория толерантных пространств. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. Небалуев С.И., Кляева И.А. Спектральная последовательность толерантного расслоения. — Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тез. докл. М: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2008.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ СОГЛАСИЯ В РЕГРЕСИОННОЙ МОДЕЛИ КОКСА

Нурмухамедова Н.С. (Национальный Университет Узбекистана)
nargiza5500@rambler.ru

Модель Кокса (D.Cox(1972)) определяется равенством

$$\Lambda(x/\nu) = \Lambda_0(x)exp((\beta^T,\nu)), x \geq 0,$$

где базовая кумулятивная функция интенсивности $\Lambda_0(x) = \Lambda(x/0)$-непрерывна,

$$\Lambda(x/\nu) = \lim_{h \downarrow 0} P(Z \leq x + h/Z \geq 0, V = \nu),$$

$V = (V_1, ..., V_p)$-вектор ковариат, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)$-вектор параметров регрессии, Z-время безотказной работы объекта.

Пусть случайная величина Z подвергается случайному цензурированию с двух сторон величинами L, Y и наблюдается $(p+5)$-мерный вектор $\lambda = (\zeta, L, \chi_1, \chi_2, \chi_3, V)$, где $\zeta = max\{L, min(Z,Y)\}, \chi_1 = I(min(Z,Y) < L), \chi_2 = I(L \leq Y < Z), \chi_3 = I(L \leq Z \leq Y)$ и $I(A)$-индикатор. Заметим, что интересующая нас случайная величина Z наблюдаема лишь в случае $\chi_3 = 1$.

В докладе обсуждаются вопросы проверки гипотезы $H_0^* : \Lambda_0 = \Lambda_0^*$, где Λ_0^*-заданная кумулятивная функция интенсивности отказов и для ее проверки предлагается статистика типа хи-квадрат. При этом для β используется оценка максимального правдоподобия $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_1, ..., \widetilde{\beta}_p)$, являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{\partial log L_n(\beta)}{\partial \beta_k} = 0, \quad k = 1, ..., p,$$

где

$$L_n(\beta) = \prod_{\{i:\zeta \leq T\}} \{\frac{exp((\beta,\nu_i))}{\sum_{j=1}^{n} exp((\beta,\nu_i))I(L_j \leq \zeta_i \leq min(Z_j, Y_j))}\}^{\chi_{3i}}$$

-функция правдоподобия модели.

О ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ ДО БЛИЖАЙШЕГО ЧЕТНОГО

Парусников В.И. (Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва)
parus@keldysh.ru

Среди многих типов числовых одномерных цепных дробей наиболее широкое применение находят классические правильные цепные дроби и цепные дроби до ближайшего целого. Особое положение они занимают из-за их генетической связи с алгоритмом Евклида, простоты и наилучшей аппроксимацией, которую обеспечивают подходящие дроби к ним.

Зафиксируем индекс n и посчитаем число $\nu(n)$ начальных десятичных знаков, совпадающих у n-й подходящей дроби и приближаемого числа. По известным инвариантным мерам связанных с разложениями в данные цепные дроби преобразований можно вычислить асимптотическое поведение величин $\nu(n)$.

Считалось, что цепные дроби до ближайшего целого – наилучшие в том смысле, что для них величина $\nu(n)$ максимальна из возможных. Действительно, подходящие дроби к ним дают примерно в полтора раза больше верных знаков приближаемого числа, чем подходящие дроби правильной цепной дроби.

В работе предложен алгоритм построения цепной дроби, обеспечивающий еще лучший порядок аппроксимации (примерно на 4 процента). Предложенные цепные дроби до ближайшего четного помимо простоты также обладают рядом замечательных свойств: они обрываются для рациональных чисел, периодичны дл квадратичных иррациональностей и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00085, 08-01-00082).

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РАССЛОЕНИЯ

Онищенко А.Ю. (МГУ), Попеленский Ф.Ю. (МГУ)
popelens@gmail.com

Спектральная последовательность Лере расслоения в смысле Серра $\pi : E \to B$ ассоциирована с фильтрацией комплекса сингулярных коцепей $S^*(E)$ прообразами клеточных остовов базы B. В ряде случаев можно построить другие спектральные последовательности, сходящиеся к $H^*(E)$, и удовлетворяющие равенству $E_2 \cong H^*(B, H^*(F))$. Например, для гладкого расслоения можно построить спектральные последовательности для комплексов $\Omega^*(E)$, $\check{C}^*(\mathcal{V}, S^*(V))$ и $\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*(V))$ по фильтрациям k–горизонтальных форм и фильтрации Чеха (в тех комплексах, в которых они определены). Для компактной односвязной базы также определены спектральные последовательности в комплексах, которые возникают в теории минимальных моделей: $\check{C}^*(\mathcal{V}, A^*_{PL}(V))$, $\check{C}^*(\mathcal{U}, A^*_{PL}(U) \otimes \Lambda W)$, $A_{PL}(E)$, и $\Lambda V \otimes \Lambda W$.

Мы строим явные изоморфизмы этих спектральных последовательностей, начиная с членов E_2.

Работа поддержана грантами НШ-660.2008.1, РФФИ 08-01-00034 и 07-01-91555-ННИО

Литература

1. Ф. Гриффитс, Д.В. Морган Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы, Москва, Наука, 1990
2. Р. Ботт, Л.В. Ту Дифференциальные формы в алгебраической топологии, Москва, Наука, 1989
3. Дж. Мак–Клири Путеводитель по спектральным последовательностям. Москва. Изд–во МЦНМО. 2008
4. D.W. Barnes Spectral sequence constructors in algebra and topology. Mem. Amer. Math. Soc., 1985, **53**.
5. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, Москва, Мир, 1982.
6. Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas Rational Homotopy Theory, Springer, 2001

ОБ ОБРАЩЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ В НОЛЬ

Поплавский В. Б.(Саратов)
poplavskivb@mail.ru

Пусть $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ - произвольная булева алгебра и для квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a^i_j)$ с элементами из этой алгебры определим *полуперманенты* $\overset{+}{\nabla} A$, $\overset{-}{\nabla} A$ формулой $\overset{\pm}{\nabla} A = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in \overset{\pm}{P}} (a^{i_1}_1 \cap a^{i_2}_2 \cap \ldots \cap a^{i_n}_n)$ (через $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначаются четные и нечетные n-перестановки верхних индексов соответственно). Перманент квадратной $n \times n$ матрицы A есть $per A = \overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A$, а ее *определитель* есть симметрическая разность полуперманентов: $det A = |\overset{+}{\nabla} A - \overset{-}{\nabla} A| = (\overset{+}{\nabla} A \cap (\overset{-}{\nabla} A)') \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap (\overset{-}{\nabla} A)')$.

Мы распространяем известную теорему Фробениуса - Кенига [1] на случай нулевого перманента матриц с элементами из произвольной булевой алгеброй.

Линейная зависимость строк или столбцов квадратной булевой матрицы является необходимым признаком обращения ее определителя в ноль. Однако, обратное не верно. Мы указываем условия для строк и столбцов квадратной матрицы над произвольной булевой алгеброй, которые необходимы и достаточны для обращения ее определителя в ноль.

Литература

1. Минк Х. Перманенты. М:"МИР", 1982 г. -216 с.

ОБ ОДНОЙ ДВОИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

А.О. Разумов (Новосибирский государственный университет)
anton.razumov@gmail.com

Рассмотрим следующую двоичную линейную задачу оптимизации (Jeroslow, 1974):

$$\min\{x_n | 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n = n\},\ x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots n$$

Применяя метод описанный в работе [2], для любого нечетного n любая процедура ветвей и границ, независимо от правил ветвления, используемых для получения значений дробных переменных, должна исследовать по крайней мере $2^{\lceil n/2 \rceil}$ вершин для того, чтобы обнаружить, что эта задача несовместна.

Автором был проведен эксперимент по численному решению данной задачи методом ветвей и границ, расчеты проводились с использованием системы MATLAB (ver.R2008a). Результаты (t - указано среднее время по серии одной размерности):

n	3	5	7	9	11	13	15	17	19
t,c	0.2433	0.3555	0.6930	1.8567	6.1629	33.7035	308.02	4312.8	71350

Следовательно для решения двоичных задач нужно построить такую вычислительную схему, чтобы заведомо обойти подобного рода трудности. Подходящий алгоритм для решения двоичной задачи стоит искать среди других алгоритмах целочисленной оптимизации: построение справедливых сечений дизъюнктивными методами [3] или прямой алгоритм целочисленной оптимизации [4].

Литература

1. Jeroslow R. Cutting-plane theory: Introduction - Ann. Discrete Math. 5 (1979).

2. Разумов А.О. Многоветвевой алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленной оптимизации. "Программа и тезисы IX Всероссийской конференции молодых ученых". Кемерово, 2008, 28-30 октября.

3. Разумов А.О. Дизъюнктивные методы. Сборник тезисов международной конференции "Мальцевские Чтения". Новосибирск, 2008, 11-13 ноября. Электронный вариант: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/08/Tez.htm

4. Хохлюк В.И. Прямой метод целочисленной оптимизации. Новосибирск, 2002. 38 с. (Препринт.РАН/Сиб. отд-ние. ИМ, 106).

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА ДЛЯ КУБОВ С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Рахмонов З.Х. (Институт математики АН Республики Таджикистан)

zarullo_r@tajik.net

В 1770 г. Варинг [1] выдвинул гипотезу, что при каждом целом $n > 1$ существует число $r = r(n)$, что всякое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

с целыми неотрицательными $x_1, \ldots, x_r$. Эта гипотеза получила название "проблема Варинга", и в 1909 г. она была решена Гильбертом.

Харди и Литтлвуд ввели функцию $G(n)$ – наименьшее k такое, что (1) разрешимо при $N \geq N_0(n)$, и доказали, что $n < G(N) \leq n2^{n-1}h$; $\lim\limits_{n\to\infty} h = 1$. Самым же важным было то, что при $r > (n-2)2^{n-1} + 5$ для числа представлений N в виду (1) нашли асимптотическую формулу. И.М. Виноградов [2] применяя свой метод тригонометрических сумм, доказал, что $G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13)$, а при $r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)]$ имеет место асимптотическая формула. А.А. Карацуба [3] применил к оценке $G(n)$ свой p–адический метод и получил более точный результат $G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12)$.

Автору удалось доказать асимптотическую формулу в проблеме Варинга для девяти кубов с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны.

Теорема. Пусть N— достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$— число представлений N суммою девяти кубов чисел x_i, $i = \overline{1,9}$ с условиями $|x_i - (N/9)^{1/3}| \leq H$. Тогда при $H \geq N^{8/27+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{259723\sqrt[3]{3}}{2240} \cdot \frac{\sigma(N)H^8}{N^{2/3}} + O\left(\frac{H^8}{N^{2/3}L^8}\right),$$

где $\sigma(N)$ – особый ряд, сумма которого не превосходить некоторое число $c = c(N) > 0$.

Литература

1.Waring E. Meditationes algebraicae. Cambridge. 1770.

2.Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2 –е изд. М:, Наука, 1980.

3.Карацуба А.А. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т.49. №5. С.935–947.

О ДИАГНОСТИКЕ СХЕМ В БЕСКОНЕЧНЫХ БАЗИСАХ

Редькин Н. П. (МГУ имени М. В. Ломоносова)

npredkin@yandex.ru

В математической кибернетике большое внимание всегда уделялось изучению зависимости сложности схем из функциональных элементов от базисов, над которыми строятся схемы. Для функционально полных конечных базисов решение подобных задач получается с использованием общего метода синтеза, предложенного О. Б. Лупановым [1]. С увеличением числа входов у элементов было бы естественно предположить, что в этом случае удастся существенно уменьшить сложность схем. Относительно схем, реализующих почти все булевы функции, такое предположение обычно подтверждалось. Крайним случаем усложнения базисов естественно считать переход к бесконечным базисам. В работах ряда авторов (Э. И. Нечипорука, О. Б. Лупанова, О. М. Касим-Заде и др.) было установлено, что переход к бесконечным базисам, как правило, позволяет весьма существенно уменьшить сложность схем.

Результаты подобных исследований сложности схем закономерно наводят на мысль о постановке соответствующих тестовых задач по диагностике схем. Рассмотрим базис $B = \{x_1 \,\&\, x_2,\ x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3,\ \ldots;\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \ldots;\ \overline{x}\}$. Для функциональных элементов будем допускать однотипные константные неисправности на выходах элементов [2].

Теорема. Для любой булевой функции от n переменных можно построить неизбыточную схему над базисом B, допускающую единичный диагностический тест, длина которого не превосходит $2\lceil \log_2(n+1)\rceil + 1$.

Заметим, что аналогичная оценка для конечного базиса $\{x\&y,\ x\vee y,\ \overline{x}\}$ носит линейный по n характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Литература

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М..: Изд-во МГУ, 1984.
2. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

УНИЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Рублев В.С., Федотова Н.П. (Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова)
roublev@mail.ru

В работах [1, 2] было отмечено следующее свойство гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$ n-мерного пространства: для любого многогранника в этой плоскости вида $a_i \le x_i \le b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ существует его точка, норма которой минимальна для многогранника в любом симметрическом пространстве. Свойство это может быть использовано при решении некоторых дискретных оптимизационных задач с соответствующим условием $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$ (см., например, [2]), так как существование единой экстремали симметрических пространств позволяет для ее отыскания выбрать удобный критерий оптимизации.

Исследуется задача описания всех гиперплоскостей конечномерных симметрических пространств, обладающих таким свойством униэкстремальности.

Теорема. Любая униэкстремальная гиперплоскость имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const \quad (\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0).$$

Литература

1. Рублев В.С., Чаплыгина Н.Б. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах — ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, т. 407, № 2, 176–178.
2. Рублев В.С., Чаплыгина Н.Б. Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении — Дискретная математика, т. 17, вып. 4, 2005, 150–157.

ОБ ОБРАЩЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Степанов В. И. (Ангарская государственная техническая академия,Ангарск, Россия)
vlstep@hotmail.ru

А.Н.Колмогоров первым обратил внимание на важность обращения по времени случайных процессов для физических приложений [1, статьи 21 и 22], что нашло свое подтверждение в классической работе Э.Нельсона[6],который показал возможность описания динамики квантовых частиц в терминах марковских случайных процессов, и вывел уравнение Шредингера из закона Ньютона для случайных процессов.При этом существенную роль играет связь сносов диффузионного и обращенного процессов. В том случае когда имеется двупараметрический процесс $\xi(s,t), (t \gtrsim 0, s \gtrsim 0), z = (s,t)$-двумерное время , определенный на полном вероятностном пространстве $< \Omega, \sigma, P >$ и согласованный с неубывающей системой сигма алгебр $(F_z = (s,t))$, то поле $\xi(s,t)$ называется марковским, если для любых $(s_1,t_1) < (s_2,t_2)$ и любого борелевкого множества $B \subset R^n$ выполняется условие

$$P(\xi(s_2,t_2) \in B | F^1_{(s_1 t_1)} \bigvee F^2_{(s_1 t_1)}) = \tag{1}$$

$$= P(\xi(s_2,t_2) \in B | \xi(s_1 t_2), \xi(s_1 t_1), \xi(s_2 t_1)),$$

где $F^1_{(st)} = \bigvee_{(t\geq 0)} F_{(s,t)}$, $F^2_{(st)} = \bigvee_{s\geq 0)} F_{(st)}$, F^1_z и F^2_z условно независимы относительно F_z. Такое условие марковости является более слабым чем условие Р.Леви[2,3], но оно позволяет естественным образом ввести диффузионные поля и приводит к рассмотрению уравнений Колмогорова для многопараметрического случая, когда вместо (1) и (2) мы имеем системы параболических уравнений с коммутирующими дифференциальными операторами. Показывается, что для марковского диффузионного поля в смысле[5] обращенный по времени процесс $\xi(1-s, 1-t)$ является марковским диффузионным полем.

Литература

1. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математичекая статистика. Москва: Наука, 1986.
2.McKean H. P.,Jr. Brownian motion with a several-dimensional time // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 4. С. 357–378.
3. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля. Москва:Наука, 1981.

ОПИСАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕКУРСИВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Таранников Ю. В. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
taran@butovo.com

Свойство корреляционной иммунности булевых функций было сформулировано Т. Зигенталером. С того времени было предложено много конструкций устойчивых функций, как правило, в соединении с другими свойствами, среди которых важна нелинейность. Независимо в нескольких работах, в том числе и в [1], была доказана верхняя оценка $2^{n-1} - 2^{m+1}$ для нелинейности m-устойчивой функции от n переменных. В [1] показано, что эта оценка достижима и предложена рекурсивная конструкция, строящая из двух функций две новые, в которой число переменных возрастает на 3, а степень устойчивости на 2, и при этом как на исходных, так и на получащихся функциях достигается верхняя граница нелинейности. Конструкция была модифицирована в [2]. Большое семейство новых функций с теми же параметрами было построено в [3]. В настоящей работе, развивая подход, предложенный в [4], автор полностью описывает все рекурсивные конструкции с шагом 3 с двумя функциями, сохраняющие достижимость верхней оценки нелинейности при растущей степени устойчивости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07–01–00154 и 08–01–00863, а также программы государственной поддержки ведущих научных школ НШ-4470.2008.1.

Литература

1. Tarannikov Yu. On resilient Boolean functions with maximal possible nonlinearity — Proceedings of Indocrypt 2000 (Calcutta, India, December 10–13). — Lecture Notes in Computer Science. — V. 1977. — P. 19–30. — Springer-Verlag, 2000.
2. Pasalic E., Maitra S., Johansson T., Sarkar P. New constructions of resilient and correlation immune Boolean functions achieving upper bounds on nonlinearity — Electronic Notes in Discrete Mathematics. — V. 6. — Elsevier Science, 2001.
3. Ботев А. А. Об алгебраической иммунности одной рекурсивно заданной конструкции корреляционно иммунных функций — Труды XV Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Новосибирск, 2004). — С. 8–12.
4. Захаров К. В. О порождении бент-функций рекурсивными конструкциями — Дипломная работа. — МГУ, 2008.

О ВЫРОЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ В КОМПАКТИФИКАЦИИ ФИТТИНГА МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Тимофеева Н.В. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)
ntimofeeva@list.ru

В предыдущих работах [1,2] автором построена новая компактификация схемы модулей стабильных по Гизекеру векторных расслоений с данным многочленом Гильберта на гладкой проективной поляризованной алгебраической поверхности (S, H) над полем $k = \bar{k}$ нулевой характеристики. Семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены в новой компактификации локально свободными пучками на поверхностях, являющихся модификациями исходной поверхности S. В представляемой работе [3] получен класс модифицированных поверхностей как алгебраических схем, возникающих в конструкции.

Литература

1. Н.В. Тимофеева "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности— Матем. Сборник, 199:7 (2008) 103 - 122.

2. Н.В. Тимофеева "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, II— Матем. Сборник, в печати.
3. N.V. Timofeeva "On degeneration of surface in Fitting compactification of moduli of stable vector bundles— ArXiv:0809.1148v1 [math.AG] 6 Sep 2008.

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Харин Ю.С. (Минск, БГУ)
kharin@bsu.by

В генетике, медицине, экономике, технике, защите информации возникают задачи вероятностно-статистического анализа дискретных случайных процессов с дискретным временем, или дискретных временных рядов [1]. Пусть $x_t \in A = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ – дискретный временной ряд с пространством значений A мощности $2 \leq N < \infty$ и дискретным временем $t \in N$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P). В случае "непрерывных" временных рядов с пространством значений R разработано достаточно обширное множество моделей, которые неприменимы в дискретном случае.

В докладе рассматриваются следующие вероятностные модели дискретных временных рядов: M_1) однородная цепь Маркова s-го порядка с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{i_1,\ldots,i_{s+1}}), i_1, \ldots, i_{s+1} \in A$; M_2) дискретная авторегрессия s-го порядка DAR(s): $x_t = \alpha_s x_{t-1} + \ldots + \alpha_1 x_{t-s} + \xi_t$, $t = s+1, s+2, \ldots$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in A^s$ – вектор коэффициентов, $\{\xi_t\}$ – н.о.р.с.в.; M_3) модель Джекобса – Льюиса; M_4) MTD – модель Рафтери: $p_{i_1,\ldots,i_{s+1}} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j b_{i_j, i_{s+1}}$, $i_1, \ldots, i_{s+1} \in A$, где $B = (b_{ij})$, $i, j \in A$ – стохастическая матрица, $\lambda = (\lambda_j)$ – распределение вероятностей; M_5) цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями [2], [3].

Для моделей $M_1 - M_5$: 1) проведен сравнительный анализ моделей по числу параметров (сложности); 2) исследованы вероятностные свойства моделей; 3) построены оценки максимального правдоподобия параметров; 4) исследованы асимптотические свойства оценок; 5) проведены компьютерные эксперименты.

Литература

1. Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В. Математические и компьютерные основы криптологии. — Минск : Новое Знание, 2003. 382 с.
2. Харин Ю. С. Цепи Маркова с r-частичными связями и их статистическое оценивание. — Доклады НАН Беларуси, 2004, Т. 48, № 1. С. 40–44.
3. Харин Ю. С., Петлицкий А. И. Цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями и статистические выводы о ее параметрах. — Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 2. С. 109–130.

ОБ ОДНОЙ МЕРЕ СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Чашкин А. В. (МГУ имени М. В. Ломоносова)
chashkin@inbox.ru

Пусть $f, f_1, \ldots, f_m$ — n-местные булевы функции, ε — положительная постоянная, не превосходящая $1/4$. Будем говорить, что функции $f_1, \ldots, f_m$ реализуют функцию f с ошибкой ε, если для любого набора x из $\{0,1\}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} (f(x) \oplus f_i(x)) \leq \varepsilon m.$$

Как обычно, сложность реализации функции f схемами из функциональных элементов в полном базисе обозначим через $L(f)$. Положим

$$L_\varepsilon(f) = \min_m \min_{f_1,\ldots,f_m} \max_{1 \leq i \leq m} L(f_i),$$

где минимумы берутся по всем возможным наборам функций, реализующих f с ошибкой, не превосходящей ε. Используя стандартную технику, нетрудно показать, что неравенство

$$L_\varepsilon(f) = \Omega(L(f)/n)$$

справедливо для любой n-местной булевой функции. С другой стороны, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Существует такое натуральное n_0, что для любого $n > n_0$ и любой положительной постоянной $\varepsilon \leq 1/4$ найдется такая n-местная булева функция f, что

$$L_\varepsilon(f) = O(L(f)/n).$$

Доказательство теоремы основано на конструкциях и результатах из работ [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Литература

1. Чашкин А. В. Об одном разложении булевых функций — Дискретная математика. — 2000. — № 3. — С. 112–123.

2. Чашкин А. В. О задании булевой функции по ее значениям в ограниченном числе областей — Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 242. — С. 108–122.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-СИСТЕМНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕЕ ПРОБЛЕМНОЙ ОБЛАСТИ НЕЙРОРАДИКАЛАМИ

Чечкин А.В. (Военная Академия РВСН им. Петра Великого), Пирогов М.В. (ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина)

chechkin@online.ru

1. Информационно-Системная Безопасность (ИСБ) сложной системы [1] подразумевает во-первых, обеспечение безусловного решения задач жизненного цикла системы вне зависимости от полноты и формы представления входной информации и во-вторых, безусловное сохранение системной целостности сложной системы при решении любой частной задачи жизненного цикла. ИСБ сложной системы обеспечивается путем ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИИ такой системы на основе математического моделирования ее проблемной области нейрорадикалами. Понятие РАДИКАЛА является главным понятием математической информатики [2] и, по-видимому, всей дискретной математики [3]. Под радикалом понимается любая функциональная система, имеющая два доступных извне состояния: АКТИВНОЕ и ПАССИВНОЕ. Активный радикал функционирует, согласно своему предназначению, а пассивный радикал нет. Он как бы выключен. Нейрорадикал - это символьная модель радикала. Множество нейрорадикалов организованы в СРЕДУ НЕЙРОРАДИКАЛОВ, являющуюся своего рода семантической сетью всех понятий проблемной области сложной системы. Вопросами активирования среды радикалов занимаются АКТИВАТОРЫ. В среде радикалов система всех активных радикалов в данный момент времени образует, так называемый, СИСТЕМОКВАНТ, который определяет квант поведения сложной системы в этот момент. За разрешение конфликтов в среде радикалов, то есть за обеспечение ИСБ сложной системы, отвечают РЕГУЛЯТОРЫ. Построенная модель в форме среды нейрорадикалов позволяет решать задачи жизненного цикла сложной системы с обеспечением ее ИСБ.

Литература

1. Чечкин А.В. Обеспечение информационно-системной безопасности сложной системы на основе среды нейрорадикалов ее проблемной области. - Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2008, 7, с. 6 - 11.

2. Чечкин А.В. Математическая информатика. М.: Наука, 1991.

3. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика. - М.: Издательский центр "Академия", 2006.

ЧИСЛО ОБЛАСТЕЙ В РАЗБИЕНИЯХ ПЛОСКОСТИ ПРЯМЫМИ

Шнурников И.Н. (Москва, МГУ)

shnurnikov@yandex.ru

Вопрос о том, на сколько областей n прямых делят плоскость, был впервые поставлен Б. Грюнбаумом в [1]. Он заметил эквивалентность вопросов для аффинной и вещественной проективной плоскостей. Ответ был найден Н. Мартиновым в [2] и доказан по индукции по числу прямых n и вспомогательному параметру k. Не зная об этих работах, В.И. Арнольд в [3] поставил еще раз вопрос о количестве областей и частично его решил. Я дал другое доказательство ответа с помощью леммы. Оказалось, что вспомогательный параметр k доказательства Н. Мартинова имеет смысл максимального количества прямых, пересекающихся в одной точке.

Ответ. Количества областей вещественной проективной плоскости RP^2, разделенной n различными прямыми, образуют (при всевозможных расположениях прямых) множество

$$\bigsqcup_{i=0}^{d_n-1}\left((i+1)(n-i);(i+1)(n-i)+\frac{i(i-1)}{2}\right)\bigsqcup$$

$$\left((d_n+1)(n-d_n); 1+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

где число $d_n = [\sqrt{2n-5\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}]$ при $n \geqslant 3$ и $d_1 = d_2 = 0$.

Лемма. *Если среди n прямых максимум $1 < k < n$ пересекаются в одной точке, то число областей плоскости RP^2, разделенной этими прямыми, не меньше, чем*

$$2\left(\frac{n^2-n+2k}{k+3}\right)$$

Я благодарен В.И. Арнольду за постановку вопроса.

Литература

1. B. Grunbaum, Arrangements and spreads, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 10. AMS Providence, R.I., 1972

2. N. Martinov, Classification of arrangements by the number of their cells, Discr. and Comput. Geometry, Vol 9, 1, 1993, 39-46

3. В.И. Арнольд, На сколько частей делят плоскость n прямых?, Матем. просв., серия 3, 2008, 12, 95.104

О ЛУПОВЫХ ИЗОТОПАХ ЛЕВЫХ И ПРАВЫХ F-, SM- И E-КВАЗИГРУПП

Щербаков В.А. (Кишинев)
scerb@math.md

Большинство понятий есть в [1]. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ – левая F-квазигруппа, если $x \cdot yz = xy \cdot e(x)z$, где $x \cdot e(x) = x$; правая F-квазигруппа, если $xy \cdot z = xf(z) \cdot yz$, где $f(x) \cdot x = x$; левая SM-квазигруппа, если $xx \cdot yz = xy \cdot xz$; правая SM-квазигруппа, если $zy \cdot xx = zx \cdot yx$; левая E-квазигруппа, если $x \cdot yz = f(x)y \cdot xz$; правая E-квазигруппа, если $zy \cdot x = zx \cdot ye(x)$.

Квазигруппа с единицей называется лупой. Автоморфизм ψ лупы $(Q,\circ)$ называется полным, если существует подстановка φ множества Q такая что $\varphi x \circ \psi x = x$ для всех $x \in Q$. Лупа $(Q,\circ)$ является левой S-лупой, если существует такой полный автоморфизм ψ лупы $(Q,\circ)$, что $\varphi(x \circ \varphi^{-1}y) \circ (\psi x \circ z) = x \circ (y \circ z)$.

Теорема. Левая F-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме группы $(A,+)$ и левой S-лупы $(B,\diamond)$.

Правая F-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме группы $(A,+)$ и правой S-лупы $(B,\diamond)$.

Левая SM-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме группы $(A,+)$ и левой S-лупы $(B,\diamond)$.

Правая SM-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме группы $(A,+)$ и правой S-лупы $(B,\diamond)$.

Левая E-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме абелевой группы $(A,+)$ и левой S-лупы $(B,\diamond)$ (решение проблемы Киньона-Филлипса [2]).

Правая E-квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна прямой сумме абелевой группы $(A,+)$ и правой S-лупы $(B,\diamond)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ASM-RFFI (08.820.08.08 RF).

Литература

1. В.Д. Белоусов Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

2. M.K. Kinyon and J.D. Phillips, Axioms for trimedial quasigroups, Comment. Math. Univ. Carolin. 45 (2004), no. 2, 287–294.

EVOLUTIONARY ALGORITHM FOR ONE-DIMENSIONAL PACKING PROBLEM

Bondarenko O. S. (Zaporizhzhya National University)
buenasdiaz@gmail.com

In the paper the question of performance evaluation of evolutionary algorithm [1] for one-dimensional packing problem is considered. In the problem we are given a list L of real numbers, place the elements of L into a minimum number L^* of "bins" so that no bin contains numbers whose sum exceeds some C.

The problem is NP-hard in the strong sense [2]. In [3] it had been shown that for combinatorial problems like considered one it is possible to apply fragmentary algorithms.

In according to [3] we will call fragmentary structures the triples (X, F, R), where X - a finite set of elementary fragments, F - a family of subsets (fragments) of X, R - an union condition, i. e. a rule, which gives an answer about whether an union of subsets from X is feasible.

The one-dimensional packing problem may be formulated as the fragmentary structure. By the fragments in this problem we consider arbitrary ordered sets of items. The union rule is no repetitions in unified sequences. Fragmentary algorithm finds maximal by inclusion fragment, which is feasible solution for the problem.

The fragmentary algorithm is inherently greedy [4]. We propose an evolutionary algorithm hybridized with fragmentary one for finding an approximate solution. The performance of this algorithm has been tested on a large enough sample of randomly generated instances. The results of the test has showed the superiority of the proposed algorithm over random search one and a few heuristic algorithms.

References

1. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. – Boston : MIT Press, 1992.
2. Garey M. R. Computers and Intractibility: A Guide to the Theory of NP-Completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson. – New York : Freeman, 1979.
3. Козин И. В. Фрагментарные алгоритмы в системах поддержки принятия решений // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ, 2006. – С.131–137.
4. Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. – N 1. – 1971. – P.127–136.

PROBABILITY MEASURES AND INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

V.V.Fedorchuk, Yu.V.Sadovnichy (Moscow State University)
vvfedorchuk@gmail.com, uvs@mail333.com

We investigate infinite-dimensionality properties (countable dimensionality, weak infinite-dimensionality, the property C) of spaces $\mathcal{F}(X)$, where $\mathcal{F}$ is either the probability measures functor P or its subfunctor P_n, and X is a paracompact p-space.

Recall that wid-spaces are weakly infinite-dimensional spaces in the sense of Alexandroff, S-wid-spaces are weakly infinite-dimensional spaces in the sense of Ju.M.Smirnov. C-spaces where defined by W.E.Haver [2] and D.F.Addis and J.H.Gresham [1].

Our main results are:

Theorem 1. If X is a compact space, then
$P_n(X) \in C \iff X \in C$.

Theorem 2. If X is a paracompact p-space, then
$P_n(X) \in C \iff X^n \in C$.

Theorem 3. If X is a paracompact p-space, then
$P_n(X) \in S\text{-wid} \iff X^n \in S\text{-wid}$.

Corollary. If X is a compact space, then
$P_n(X) \in \text{wid} \iff X^n \in \text{wid}$.

Theorem 4. If X is an infinite paracompact p-space, then the space $P_R(X)$ of all Radon probability measures is strongly infinite-dimensional.

Acknowledgement. Both authors were supported by the Russian Foundation for basic Research (Grant 06-01-00764). The first author was supported by the Program "Development of the Scientific Potential of Higher School" (Grant 2.1.1. 7988).

References

1. D.F.Addis, J.H.Gresham, A class of infinite-dimensional spaces. I. Dimension theory and Alexandroff's problem, Fund.Math., 101:3 — (1978), 195–205.
2. W.E.Haver, A covering property for metric spaces, Lecture Notes in Math., 275 (1974), 108–113.

ON CENTER OF A RELATIVELY FREE GRASSMANN ALGEBRA

Grishin A.V. (Moscow Pedagogical State University)
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Let $F^{(3)}$ be a relatively free associative algebra over an infinite field of characteristic $p > 0$ corresponding to the Grassmann identity $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, W_p be a T-space generated by all p-words (monomials, in which any their variable is included with the multiplicity p). In [1] — [3] the description of W_p as a subalgebra of $F^{(3)}$ is given. Development of the results and methods of these works leads to

Theorem. *W_p is the center of the algebra $F^{(3)}$.*

The work was supported by RFBR (grant no 07-01-00625).

References

1. Grishin A. V., Surmina L.M. On T-spaces of n-words over a field of characteristic $p > 0$, Russian Math. Surveys, **62**:4(376), 2007, 802–803.
2. Grishin A.V., Tsybulya L.M. On the (p, n)-problem, Vestnik SamGU. Natural science series. Mathematics, 7(57), 2007, P. 35–55. (In Russian).
3. Grishin A.V., Tsybulya L.M. Two theorems on the structure of a relatively free Grassmann algebra, Russian Math. Surveys, **63**:4. 2008, P. 782–783.

THE ANALYTICAL MAPS OF NONCOMMUTATIVE ALGEBRAS AND MODULES OVER THEM

Krein M.N. (Lipetsk)

travkin@lipetsk.ru

Let $\mathcal{A}$ be a noncommutative algebra. The expression $a_1 \cdot x_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot x_n \cdot a_{n+1}$ is said to be a n-degree monomial over $\mathcal{A}$ $(a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathcal{A}$; $x_1, \dots, x_n$ are variables, some of them may be equal). A finite sum of n-degree monomials is called a homogeneous n-degree polynomial and a finite sum of homogeneous polynomials is called a polynomial over $\mathcal{A}$.

A n-degree homogeneous polynomial induces a map called a n-degree map. If $\mathcal{A}$ is a normed algebra, the analytical maps may be defined. The map is called an analytical map whenever it is convergent series of the homogeneous polynomials. Analytical or n-degree maps are the maps from $\mathcal{A}$ or from direct product of some copies of $\mathcal{A}$ (in accordance with the number of variables) to $\mathcal{A}$.

The map from finitely or countable generated $\mathcal{A}$-module to the similar one is called a n-degree (analytical) map if it is a n-degree (analytical) map in each "coordinate". Properties of 1-degree maps were researched in the author's papers [1-3].

The notion of a n-degree map generalises the notion of a linear map and allows to introduce the analogue of the first differential (first "derivative") of the nonlinear map (n-degree or analytical map).

For 1-degree maps of a Hilbert $\mathcal{A}$-module $l_2(\mathcal{A})$ a notion of compact and Fredholm maps are defined in the same way as the similar notions for linear maps in the works of A.S.Mishchenko, A.T.Fomenko, Ju.P.Soloviev, E.V.Troitsky, etc. It allows to define nonlinear Fredholm maps of $l_2(\mathcal{A})$ as the maps having Fredholm "derivatives"(1-degree maps). Similarly to the classical case these maps may be approximated by the maps of finitely generated modules.

References

1. M.N.Krein, "The mappings of degree 1", *Abstract and Applied Analysis*, Special Issue (2006). http://www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/AAA/2006/90837
2. M.N.Krein, "On the structure of the 1-degree maps' algebra", *Proceedings of Voronezh Winter Mathematical School* (2006), pp.114-116. (Russian)
3. M.N.Krein, "The algebraic and topological properties of the some classes of the 1-degree maps", *Proceedings of Voronezh Winter Mathematical School* (2008), pp.194-203. (Russian)

Список авторов

Научное издание

Современные проблемы математики, механики и их приложений

Международная конференция, посвященная 70-летию академика Виктора Антоновича Садовничего

Москва, Россия, 30 марта — 2 апреля 2009 года

Издание подготовлено с использованием:
MiKTeX 2.7, GIMP (GNU), Theses Management System (© A.V.Drutsa)

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии МГУ

119991, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Заказ № 460
Тираж 1200 экз.