MOSCOW
M.V. Lomonosov
STATE UNIVERSITY

RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES
V.A. Steklov
MATHEMATICAL
INSTITUTE

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»,

dedicated to

IVAN G. PETROVSKII

(1901-1973)

XXII Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society

BOOK of ABSTRACTS

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Moscow, May 21–26

2007

http://www.math.msu.su/conference/petr2007

СБОРНИК ТЕЗИСОВ / BOOK of ABSTRACTS

2007

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвящённая памяти

И. Г. ПЕТРОВСКОГО

(1901 — 1973)

XXII совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 21–26 мая 2007

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва 2007

Международная конференция, посвящённая памяти И. Г. Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2007. — 379 с.

Программный комитет

Арнольд В. И., Ильин А. М., Маслов В. П., Моисеев Е. И., Новиков С. П., Синай Я. Г., Трещев Д. В., Фаддеев Л. Д.
и руководители секций:

Миллионщиков В. М., Розов Н. Х. (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)

Кондратьев В. А., Похожаев С. И., Радкевич Е. В. (*Дифференциальные уравнения с частными производными*)

Аносов Д. В., Закалюкин В. М., Ильяшенко Ю. С. (*Динамические системы*)

Вишик М. И., Куксин С. Б., Уральцева Н. Н., Фурсиков А. В. (*Математическая физика и механика*)

Бухштабер В. М., Васильев В. А., Козлов В. В. (*Геометрия, интегрируемые системы и солитоны*)

Шкаликов А. А., Степанов В. Д. (*Функциональный анализ и теория операторов*)

Жиков В. В., Пятницкий А. Л., Шамаев А. С. (*Асимптотические методы и усреднение*)

Кобельков Г. М., Лебедев В. И. (*Численные методы*)

Кашин Б. С., Дьяченко М. И., Конягин С. В. (*Теория функций*)

Организационный комитет

Председатель: Садовничий В. А. (Ректор МГУ им. М.В.Ломоносова).

Сопредседатель: Козлов В. В. (директор МИРАН им. В.А.Стеклова).

Заместители председателя: Чубариков В. Н., Шамаев А. С., Шкаликов А. А..

Секретариат конференции: Быков В. В., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О., Розанова О. С., Филимонова И. В., Чечкин Г. А. (ответственный секретарь), Ширяев Е. А.

Конференция поддержана:
Российским фондом фундаментальных исследований
Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова

ISBN

© Московский государственный университет, 2007

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»

dedicated to the memory of

I. G. PETROVSKII

(1901 – 1973)

XXII joint session of Moscow Mathematical Society
and I. G. Petrovskii Seminar

Moscow, May 21–26, 2007

BOOK of ABSTRACTS

Moscow 2007

International Conference, dedicated to the memory of I. G. Petrovskii (XXII joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar): Book of Abstracts. — Moscow: Moscow University Press, 2007. — 379 P.

Program Committee

Arnold V. I., Faddeev L. D., Il'in A. M., Maslov V. P., Moiseev E. I., Novikov S. P., Sinai Ya. G., Treshchev D. V.
and the organizers of the sections:

Millionshchikov V. M., Rozov N. Kh. (*Ordinary Differential Equations*)

Kondratiev V. A., Pokhozhaev S. I., Radkevich E. V. (*Partial Differential Equations*)

Anosov D. V., Ilyashenko Yu. S., Zakalyukin V. M. (*Dynamical Systems*)

Fursikov A. V., Kuksin S. B., Ural'tseva N. N., Vishik M. I. (*Mathematical Physics and Mechanics*)

Buhstaber V. M., Kozlov V. V., Vasiliev V. A. (*Geometry, Integrable Systems and Solitons*)

Shkalikov A. A., Stepanov V. D. (*Functional Analisys and Operator Theory*)

Pyatnitski A. L., Shamaev A. S., Zhikov V. V. (*Asymptotic Methods and Homogenization*)

Kobel'kov G. M., Lebedev V. I. (*Numerical Methods*)

Kashin B. S., D'yachenko M. I., Konyagin S. V.(*Function Theory*)

Organizing Committee

Chairman: Sadovnichii V. A. (Rector of MSU);

Co-Chairman: Kozlov V. V. (Director of MI RAS).

Vice-Chairmen: Chubarikov V. N., Shamaev A. S., Shkalikov A. A..

Conference Secretariate: V.V.Bykov, G.A.Chechkin (executive secretary), I.V.Filimonova, A.Yu.Goritskii, T.O.Kapustina, O.S.Rozanova, E.A.Shiryaev.

Conference is supported by:
Russian Fund of Fundamental Research
Moscow Lomonosov State University

ISBN

© Moscow State University
2007

Преобразование Фурье в теории ультрараспределений

Абанин А.В. (Южный федеральный университет)

Доклад посвящен обобщению и развитию подхода А. Берлинга к разработке теории ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений, в котором преобразование Фурье выступает стержнем всех методов и результатов. Построенная в рамках предлагаемого обобщения шкала пространств содержит в себе известные шкалы Румье–Коматсу, Берлинга–Бьорка, Циоранеску–Жидо и Брауна–Майзе–Тейлора. Получены аналоги основополагающих результатов классической теории Шварца, часть из которых установлена в новой форме. Последнее относится в частности к структурным теоремам о представлении ультрараспределений и теоремам типа Пэли–Винера–Шварца. В качестве приложений рассмотрена задача о продолжении ультрадифференцируемых функций по Борелю-Уитни.

Краевые задачи для некоторых классов уравнений нечетного порядка

Абдрахманов А. М. (Уфимский государственный авиационный технический университет)

Доклад посвящен изложению вопросов разрешимости некоторых но-вых краевых задач для уравнений нечетного порядка по вырожденной (временной) переменной и четного по пространственным переменным.

В частности, рассматриваются дважды вырождающиеся уравнения

$$K(t)D_t^3 Au + Bu = f(x,t) \tag{1}$$

с функцией $K(t)$, положительной при $t > 0$ и обращающейся в ноль при $t = 0$, и с эллиптико-параболическими операторами A и B второго порядка по пространственным переменным; для этих уравнений доказы-вается существование регулярных решений аналога первой краевой зада-чи.

Далее, для уравнений

$$D_t^3 u + Bu = f(x,t) \tag{2}$$

рассматриваются задачи с заданием на боковой границе цилиндра усло-вия, связывающего значения решения или же его конормальной произ-водной со значениями некоторого интегрального оператора.

О базисности Рисса подсистем собственных и присоединенных функций одной спектральной задачи

Абдрашитов К. Х. (МГУ,г. Москва)

Рассматривается спектральная задача

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad (a\lambda + b)y(1) = (c\lambda + d)y'(1), \tag{2}$$

где $q(x)$ - вещественная суммируемая функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\delta := ad - bc \neq 0$.

Используя методы теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, можно показать, что возможны только 2 случая:

1) спектр состоит из счетного числа простых собственных значений;

2) спектр состоит из счетного числа простых собственных значений и одного собственного значения, которому соответствует одна собственная и одна присоединенная функция.

Пусть λ_k - собственные значения, а $y_k(x)$ - собственные функции этой задачи ($k \in \mathbb{N}$). В случае $q(x) \geq 0$ и $ad - bc > 0$ Моисеев Е.И. и Капустин Н.Ю. в работе [3] показали, что система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ после удаления из нее произвольной функции. Другим методом с помощью работ А.А. Шкаликова [1] и Е.М.Руссаковского [2] мы доказываем, что это свойство сохраняется для любой вещественной суммируемой функции $q(x)$ и $ad - bc \neq 0$ в случае простого спектра.

Теорема 1. Пусть спектр задачи (1),(2) состоит из простых СЗ. Тогда при любом $m \in \mathbb{N}$ система $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq m}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Для отсутствия присоединенных функций достаточным является выполнение одного из условий: 1) $ad - bc > 0$; 2) найдется комплексное (невещественное) собственное значение.

Теорема 2. Пусть задача (1),(2) имеет собственное значение, которому отвечает собственная функция $y_0(x)$ и присоединенная функция $h(x)$. Тогда система корневых функций образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ после удаления из нее произвольной функции, за исключением присоединенной функции $h(x) + \alpha y_0(x)$ при некотором единственном значении $\alpha \in \mathbb{C}$.

Литература

[1] А.А.Шкаликов //Тр.сем.им.И.Г.Петровского.М.,1983.Вып.9,с.190-229.

[2] Е.М.Руссаковский. *Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия.* - Функц.анализ и его прилож., 1975,9,№4 с.91-94.

[3] Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. //Дифференц. уравнения.1997.Т.33,№1, с.16-21.

Асимптотические приближения решений краевых задач для систем линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Абдувалиев А.О. (г.Ош, Кыргызстан)

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon y'' = P(t)y' + Q(t)y + g(t), a < t < b, \tag{1}$$

$$y(a, \varepsilon) = A, y(b, \varepsilon) = B, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $P(t), Q(t)$– n x n - матрицы, $y, g, A, B \in R^n$.

Пусть выполнены следующие предположения.

I. Матрица $P(t)$ имеет простую структуру, т.е. существует невырожденная матрица $S(t)$ такая, что $S(t) \cdot P(t)S^{-1}(t) = \Lambda(t)$, где $\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t))$ - диагональная квадратная матрица.

II. $P(t), Q(t), S(t), g(t) \in C^{\infty}[a, b]$.

Через $m_i^j(t)$ и $r_i^j(t), i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n$, обозначим элементы матриц $M(t) = S(t)Q(t)S^{-1}(t) + S(t)P(t)\frac{d}{dt}(S^{-1}(t))$ и $R(t) = -S(t)\frac{d}{dt}(S^{-1}(t))$, соответственно.

III. Пусть выполняется одно из условий:

1) $\lambda_i(t) > 0$ при $a \leq t \leq b, i = 1, 2, ...n$;

2)$\lambda_1(t_0) = 0, t_0 \in (a, b), \lambda_1(t) \neq 0$ при $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}, m_1^1(t_0) > 0$ и для $i \in \{2, ..., n\}$: $\lambda_i(t) \neq 0$ при $a \leq t \leq b$;

3) $\lambda_1(t_0) = \lambda_2(t_0) = 0, t_0 \in (a, b), \lambda_1(t) \neq 0$ и $\lambda_2(t) \neq 0$ при $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$, для всех $i \in \{3, ..., n\}$: $\lambda_i(t) \neq 0$ при $a \leq t \leq b$ и существуют постоянные $L_1 > 0, L_2 > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$m_1^1(t_0) - \frac{L_1}{L_2}[2|r_2^1(t_0)| + |m_2^1(t_0)|] > 0,$

$m_2^2(t_0) - \frac{L_2}{L_1}[2|r_1^2(t_0)| + |m_1^2(t_0)|] > 0.$

При условиях I-III решение $y = y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) имеет асимптотическое представление

$$y = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^k [\bar{y}(t) + \Pi_k(\frac{t-a}{\varepsilon}) + Q_k(\frac{t-b}{\varepsilon})] + O(\varepsilon^{N+1}), a \leq t \leq b,$$

где $N \geq 0$- некоторые целое число, $\bar{y}(t)$ - регулярные, а $\Pi_k(\frac{t-a}{\varepsilon}), Q_k(\frac{t-b}{\varepsilon})$ - погранслойные функции [1].

Литература

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* - М.: Наука, 1973г. - 272 с.

D'Alembertian Series Solutions of LODE with Polynomial Coefficients

Abramov S.A. (Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia), Barkatou M.A. (XLIM UMR CNRS 6172, University of Limoges, France)

Let E be the shift operator acting on sequences of complex numbers as $Ea_n = a_{n+1}$ for any sequence (a_n). The sequence a is d'Alembertian if for large enough values of the index n the elements a_n of the sequence satisfy a linear recurrence equation $R(a_n) = 0$, where

$$R = (E + f_1(n)) \circ \cdots \circ (E + f_k(n)), \quad f_i(n) \in \mathbb{C}(n).$$

Elements of a d'Alembertian sequence can be explicitly represented as a function of the index n using only rational functions, the gamma function and finite sums, e. g. the sequence $a_n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}$ is d'Alembertian with $R = (E + \frac{2}{n+2}) \circ (E - 2)$. A d'Alembertian series is a formal power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ whose coefficients sequence is d'Alembertian (this notion generalizes the notion of hypergemetric series, where the order k of the operator R is 1). Let L be a linear differential operator with polynomial coefficients, z_0 a fixed point in $\mathbb{C}$ and $\mathcal{A}_{z_0}$ the space of d'Alembertian series solutions of the equation $L(y) = 0$ at z_0. We prove that the dimension of $\mathcal{A}_{z_0}$ is the same for all ordinary (i.e., non-singular) points z_0 of L. In addition, we prove that if z_0 is an ordinary point of L then all d'Alembertian series solutions represent some analytic solutions which have a simple representation of the form

$$g_1(z) \int g_2(z) \int \cdots \int g_m(z) dz \ldots dz dz$$

where $g_i(z)$ is such that $\frac{g_i'(z)}{g_i(z)} \in \mathbb{C}(z)$. However the situation can be different if z_0 is a singular point.

Локализованные и пространственно хаотические течения вязкой несжимаемой жидкости в неограниченных областях

Афендиков А. Л. (г. Москва)

В теории уравнений Навье-Стокса хорошо известно, что в постановках начально-краевых задач в неограниченных областях необходимо задавать условия на бесконечности. В цилиндрических областях в качестве таких условий обычно предполагают выполненными условия периодичности с периодом $2\pi/\alpha$ вдоль оси x $\in R^1$ цилиндра. Однако уже классикам (Сквайр, Синай, Юдович и др.) было известно, что существует ряд примеров, где минимальное по α критическое число Рейнольдса $R_0(\alpha)$ потери устойчивости основного стационарного течения (u_*, p_*) (течения Пуазейля, Колмогорова, etc.) отвечает $\alpha = 0$ и, тем самым, естественно рассматривать решения из пространств, типа пространства равномерно ограниченных по x функций.

На этом пути с использованием редукции Кирхгэсснера удается найти обыкновенные дифференциальные уравнения, ограниченным решениям которых отвечают решения уравнений Навье-Стокса, которые в окрестности бифуркационного значения параметра $R_0(0)$ равномерно по x близки к решению (u_*, p_*). В задачах Пуазейля и Колмогорова и некоторых других, такими уравнениями оказались стационарные уравнения Гинзбурга-Ландау, Кана-Хилларда и их обобщения [1]-[3]. Ограниченные решения этих уравнений могут иметь весьма сложную структуру. В частности имеются решения всюду плотно заполняющие аттрактор с хаотической динамикой на нем. Подобного рода результаты получаются с использованием техники основанной на анализе расщепления сепаратрис [4]. Соответствующие решения уравнений Навье-Стокса имеют хаотическую пространственную структуру (ср. [5]).

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00947.

Литература

[1] Афендиков А. Л. и др. Стоячие волны вблизи течения Колмогорова. *ДАН, 2007, т. 413, № 5, с.1-4*

[2] Афендиков А. Л. и Мильке А. Нелокальные модуляционные уравнения для течений вязкой жидкости в слоях ипространственно локализованные возмущения. *ДАН, 2001, т. 381, № 4, с. 1-5*

[3] Афендиков А. Л. и Мильке А. О семействах обратимых SO-инвариантных векторных полей с четырехкратным неполупростым нулевым собственным значением. *ДАН, 1999, т. 369, № 2, с. 153-157.*

[4] Afendikov A., Mielke A. Bifurcation of homoclinic orbits to a saddle–focus in reversible systems with $SO(2)$–symmetry. *J. Diff. Eqns., 1999, v. 159, p. 370–402*

[5] Afendikov A., Mielke A. Multi–pulse solutions to the Navier–Stokes problem between parallel plates. *Zeits. angew. Math. Physik (ZAMP) 2001, v. 52, p.79-100*

Метод численного решения задачи о граничных функциях в проблеме динамики приливных течений

Агошков В. И., Дегтярев Л. А., Каменщиков Л. П., Карепова Е. Д., Шайдуров В. В. (г. Москва)

The inverse problem of the mathematical theory of tides models is considered: the problem of specifying the function of boundary condition on the liquid boundary. This problem in present-day numerical calculations is solved approximately and, as a rule, with inadequate accuracy.

Let ϕ, λ, r be spherical coordinates, Ω – a part of the sphere of the radius R_3, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ – the boundary of Ω, Γ_1 – "solid" part of Γ , $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ – "liquid" part of the boundary, m_k – the characteristic function of Γ_k, $k = 1, 2$, t is the time variable, $t \in [0, T]$. We study the inverse problem for the following mathematical tide model:

$$\begin{cases} u_t - lv + Ru = mg\xi_x + f_1, \\ v_t + lu + Rv = ng\xi_y + f_2, \\ \xi_t - m[(Hu)_x + (\frac{n}{m}Hv)_y] = f_3, \end{cases}$$

$$Hu_n + \beta m_2\sqrt{gH}\xi = m_2\sqrt{gH}\, d \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T),$$

$$u = u_{(0)}(x, y), v = v_{(0)}(x, y), \xi = \xi_{(0)}(x, y), \quad \text{as } t = 0, \quad \text{in } \Omega,$$

where

$$x = \lambda \in [0, 2\pi], y = \varphi \in [0, \pi], m = 1/(R_3 \sin y), n = 1/R_3, l = -2\omega \cos y,$$

$$d\Omega = R_3^2 \cos\theta d\theta d\lambda = R_3^2 \sin\varphi d\varphi d\lambda,$$

$$R = \gamma_0 R_0(x, y, t) + \gamma_1 r_*(\varepsilon_1^2 + |\mathbf{u}|^2)^{1/2}/(H + (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2|\mathbf{u}|^2)^{1/2}), \ r_* = \text{const} > 0$$

and it's "semidiscrete" analogous.

The solution of the problem considered can be approached by using the procedure of the variational assimilation of observation data. There is a lot of available information, in particular, on the free surface elevation in the considered basin, which is based on satellite or coastal measurements and frequently obtained in the on-line regime. To close the nonlinear system of equations of the tide theory and "additional unknown" ("control") d we introduce the problem of minimization of a cost functional based on available observation data. This problem can be regarded as generalized statements of the corresponding identification problems in which, besides the usual solutions of the tide equations, it is also necessary to find the functions of the boundary values. After the closed system of equations describing this problem is formulated, the solvability of the problems is investigated and the conditions under which the solution is unique are specified. We propose iterative algorithms for constructing the solutions and finite element methods for numerical realizations of the these algorithms. Numerical experiments and results are presented. On the whole all the investigations follow [1-3].

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (07-01-00714).

References

[1] V. I. Agoshkov. *"Optimal Control and Adjoint Equation Methods in Problems of Mathematical Physics."* // Inst. of Numer. Math., Russ. Acad. Sci., Moscow, 2003 (in Russian).

[2] V. I. Agoshkov. *"Inverse problems of the mathematical theory of tides."* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, vol. 20, N1, pp.1-18 (2005).

[3] Kamenshchikov L.P., Karepova E.D. and Shaidurov V.V. *"Simulation of surface waves in basins by finite element method."* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, vol. 21, N4, pp.305-320 (2006).

On regularity of solutions to Dirichlet and Neumann problems for strongly elliptic systems in Lipschitz domains

Agranovich M. S. (Moscow)

In the talk, we consider the Dirichlet and Neumann boundary value problems for a general strongly elliptic system in a bounded Lipschitz domain in R^n, $n \geq 2$. We formulate theorems on unique solvability or Fredholm property of these problems and on regularity of solutions in Lebesgue-Liouville spaces H_p^σ. We also indicate corollaries for eigenfunctions of spectral Dirichlet and Neumann problems.

Dynamical Diophantine approximations

Ai-Hua Fan, Jörg Schmeling, Serge Troubetzkoy

Let (X, d) be a complete metric space. Given a sequence $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ of points in X and a sequence $\{r_n\}_{n\geq} \subset \mathbb{R}_*^+$ of positive numbers. We define

$$I(\{x_n\},\{r_n\}) := \limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n), \quad F(\{x_n\},\{r_n\}) := X \setminus I(\{x_n\},\{r_n\})$$

where $X(x_n, r_n)$ denotes the ball of center x_n with radius r_n. By diophantine approximation we mean the study of the sets $I(\{x_n\},\{r_n\})$ and $F(\{x_n\},\{r_n\})$. The classic diophantine approximation is a special case.

We consider a Gibbs measure and a generic point x of the doubling map T on the circle. We consider a sequence $\{\ell_n\} \subset \mathbb{R}^+$ and the intervals $(T^n x - \ell_n \pmod 1), T^n x + \ell_n \pmod 1))$. In analogy to the classical Dvoretzky cover of the circle we study the covering properties of this sequence of intervals.

Асимптотики решений задач конвективной диффузии с объемной химической реакцией около частицы

Ахметов Р. Г. (г. Уфа)

Рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^3 \Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - F(u), \tag{1}$$

$$u = 1, \ r = 1; \quad u \to 0, \ r \to \infty, \tag{2}$$

где малый параметр $\varepsilon > 0$, Δ - оператор Лапласа, $\psi(r,\theta), F(u)$ - заданные функции.

Задача (1), (2) возникает при исследовании установившейся конвективной диффузии около сферической частицы, обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости, в случае, когда вещество диффундирующее от частицы испытывает химическое превращение (см. напр., [1], гл. 5, (6.1) - (6.3)). При такой интерпретации $\varepsilon^{-3} = Pe$ - число Пекле, $\psi(r,\theta)$- функция тока, $r, \theta-$ сферические координаты. Уравнение (1) получается из уравнения (6.1) ситируемой выше работы ([1], гл. 5) предполагая, что число $Pe \to \infty$, а также постоянная скорости объемной химической реакции $k_v \to \infty$, а величина $k_v/Pe^{2/3}$ - постоянная. Задача (1), (2) исследовалась в работе [2] методом согласования асимптотических разложений [3]. В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №06-01-00138).

Литература

[1] Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. *Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985, 336 с.*

[2] Ахметов Р. Г. *Асимптотика решения задачи конвективной диффузии с объемной химической реакцией в следе за частицей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. N 5. С. 834–847.*

[3] Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.*

Инвариантное свойство и метод построения функции Римана

Аксенов А. В. (г. Москва)

В работе [1], применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными, Б. Риман предложил "метод интегрирования Римана". Для применения метода необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением специальной характеристической задачи Коши. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] Нн подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Н.Х. Ибрагимовым [3], на основе использования результатов Л.В Овсянникова по групповой классификации однородных гиперболических уравнений второго порядка [4], было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения.

В работе [5] был предложен метод нахождения симметрий линейных дифференциальных уравнений с δ-функцией в правой части.

В настоящей работе показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00375 и 06–01–00707) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4474.2006.1).

Литература

[1] Риман Б. *О распространении плоских волн конечной амплитуды* // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ. 1948. С. 376–395.

[2] Copson E.T. *On the Riemann-Green Function* // Archive for Ratioanal Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1. P. 324–348.

[3] Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа.* М.: "Знание". Сер. "Математика и кибернетика". № 7. 1991. 48 с.

[4] Овсянников Л.В. *Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина* // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.

[5] Аксенов А.В. *Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения* // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.

Об обобщенных показателях Ляпунова

Алдибеков Т.М. (КазНУ им. Аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы)

Установлено, что имеет место следующее утверждение

Теорема. Пусть для системы

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) y_k, k = 1, \ldots, n; \qquad (1)$$

где коэффициенты непрерывные действительные функции определенные на полуоси $J = [0, +\infty)$, для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ наJ, выполняются условия

$$1) p_{k-1,k-1}(t) - p_{kk}(t) \geq \alpha\psi(t), t \in J, k \in \{2, \ldots, n\}, \alpha > 0, \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2) \lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, n\}, i \neq k,$$

$$3) \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t p_{kk}(\tau) d\tau = \lambda_k(q), k = \overline{1,n}.$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ тогда система (1) имеет фундаментальную систему решений

$$\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}$$

такую, что

$$\chi[\overline{y_k}, q] = \lambda_k(q), k = \overline{1,n},$$

где $\chi[\overline{y_k}, q]$- обобщенный верхний показатель Ляпунова решения $\overline{y_k}, k = \overline{1,n}$, относительно $q(t)$.

Замечание. Теорема является аналогом теоремы Перрона для системы дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами.

Литература

[1] Ляпунов А.М. Собрание сочинений. М-Л.,1956. Т.2.

[2] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., 1949.

The equations A1-A14 are a (2+1)-dimensional generalization of the Korteweg-De Vries equation

Alexeeva A. V. (The Institute of Mathematics of MON RK)

Multi-dimensional nonlinear soliton equations are an object of the intensive researches in last years. Several (2+1)-dimensional generalizations of the Korteweg-de Vries equation were found. They are universal mathematical models because they describe different physical situations. We present the method of the deduction of new solidly two-dimensional soliton equations:

A1: $\psi_t + \psi_{xyy} + 2[\psi^2]_y + [UV]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$

A2: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3[\psi U]_y = 0, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$

A3: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3[\psi V]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$

A4: $\psi_t + V_{yyy} + 3[V^2]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$

A5: $\psi_t + \psi_{xyy} + 2[V^2]_x + [\psi W]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$

A6: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3[\psi V]_x = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A7: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3[VW]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A8: $\psi_t + W_{xyy} + 3[W^2]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A9: $\psi_t + \psi_{xyy} + Q_{yy} = 0, \quad Q_x = 2U^2 + \psi P, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A10: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3F_{yy} = 0, \quad F_x = PU, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A11: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3M_{yy} = 0, \quad M_x = \psi U, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A12: $\psi_t + V_{yyy} + 3K_{yy} = 0, \quad K_x = \psi^2, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A13: $\psi_t + \psi_{xxx} + 3[U^2]_y = 0, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A14: $\psi_t + \psi_{xxx} + 3B_{yy} = 0, \quad B_x = P^2, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy}$

by the given bilinear forms:

H1: $(D_xD_t + D_x^2D_y^2)(\varphi \circ \varphi) = 0,$
H2: $(D_xD_t + D_x^3D_y)(\varphi \circ \varphi) = 0,$
H3: $(D_xD_t + D_xD_y^3)(\varphi \circ \varphi) = 0,$
H4: $(D_xD_t + D_y^4)(\varphi \circ \varphi) = 0,$
H5: $(D_xD_t + D_x^4)(\varphi \circ \varphi) = 0.$

Here $\psi = \psi(x,y,t)$, $\varphi = \varphi(x,y,t)$ are adequately smooth complex-valued functions, $ln\,\varphi = |\,\varphi\,| + i\,arg\,\varphi, \quad -\pi < arg\,\varphi \le \pi,$

$$D_xD_t(\varphi \circ \varphi) = 2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t),$$

$$D_x^mD_y^n(\varphi \circ \varphi) = (\partial_x - \partial_{x'})^m(\partial_y - \partial_{y'})^n\varphi(x,y,t)\varphi(x',y',t')\,|_{x'=x,y'=y,t'=t}\,.$$

The equations A1-A14 are a (2+1)-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation. The forms H1-H5 are a (2+1)-dimensional generalization of the bilinear form of Hirota:

$$(D_xD_t + D_x^4)(\varphi \circ \varphi) = 0,$$

where $f = f(x,t)$ is an adequately smooth real function.

Глобальная разрешимость задачи Коши для квазилинейных псевдогиперболических уравнений

Алиев А.Б. (Азербайджанский Технический Университет)

В области $[0,\infty) \times R_n$ рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболического уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} + (-1)^k\Delta^k u_{tt} + (-1)^l\Delta^l u + (-1)^r\beta\Delta^r u_t + \gamma u_t = f(u),\ t > 0,\ x \in R_n \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u(x),\ \ x \in R_n. \qquad (2)$$

Здесь $\beta \ge 0, \gamma \ge 0, \beta + \gamma > 0,\ 0 \le r \le k \le l,$

$$f(\cdot) \in C^1(R), \quad |f(u)| \le c|u|^p, \quad |f'(u)| \le c|u|^{p-1},$$

где $\frac{2(l-k)}{n} + 1 \le p < \infty$ при $n < 2(l-k)$ и $2 < p \le \frac{n}{n-2(l-k)}$ при $n \ge 2(l-k)$.

Доказано, что для достаточно малых $\delta = \|u_0(x)\|_{W_2^{l-k}(R_n)} + \|u_1(x)\|_{L_2(R_n)}$ задача (1)-(2) имеет единственное слабое решение $u \in C\left([0,\infty); W_2^{l-k}(R_n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); L_2(R_n)\right)$.

Доказаны также теоремы о глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных псевдогиперболических уравнений с интегральной нелинейности:

$$Lu = a_0\left(t, \int\limits_\Omega |\nabla^l u|^2 dx\right)\Delta^l u \quad \text{при} \quad \beta > 0 \quad \text{и}$$

$$Lu = \sum_{k=1}^{l_0} a_k\left(t, \int\limits_\Omega |\nabla^l u|^2 dx\right)\Delta^k u \quad \text{при} \quad \beta \geq 0,$$

где $a_i(t,\xi) \in C^1\left([0,\infty) \times R_+\right)$, $a_i(t,\xi) = O\left(|\xi|^p\right), \xi \to 0, i = 0, ..., l_0$, $p > 1$, $l_0 < l$, $\Omega \subset R_n$.

О непрерывности в точке решений $p(x)$-гармонических функций

Алхутов Ю. А. (Владимир)

В области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается уравнение

$$Lu = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\ \nabla u) = 0$$

с измеримым показателем $p(x)$, удовлетворяющим условию

$$1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty.$$

Показано, что если в окрестности фиксированной точки $x_0 \in D$ выполнено условие

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \frac{k \ln\ln\ln \frac{1}{|x-x_0|}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}}, \quad 0 < k < \frac{\alpha}{n+1}, \quad x \in D,\ |x - x_0| < \frac{1}{27},$$

то все решения $p(x)$-гармонического уравнения непрерывны в точке x_0 и найдена оценка модуля непрерывности решений.

Diagram formulae for integer valued Vassiliev knot invariant

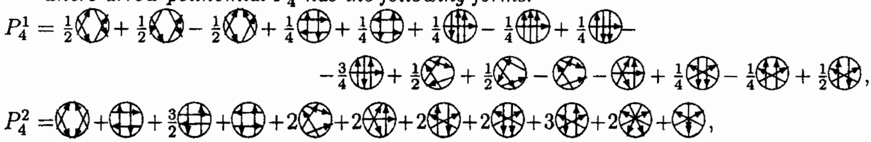
Allyonov S.V. (Kolomna State Pedagogical Institute)

We present two arrow diagram formulae for knot invariant of fourth order.

Theorem. *Let $\mathcal{G}(K)$ be the Gauss diagram of knot K, then two basic Vassiliev knot invariant of fourth order has been given by formulae*

$$V_4^i(K) = \langle P_4^i, \mathcal{G}(K)\rangle \qquad i = 1, 2$$

where arrow polinomial P_4^i has the following forms:



$V_4^1(K)$ *takes values* 1 *on knot* 4_1, 0 *on knots* 3_1, 5_1 *and* 5_2; $V_4^1(K)$ *takes values* 3 *on knot* 3_1, 4 *on knot* 4_1, 25 *on knot* 5_1, 13 *on knot* 5_2.

This formulae is obtained by analysis of linear equation system, evaluating of this invariant by definition. Let us notice, that the square of second order invariant is invariant of fourth order. As a corollary, we obtain full basis invariants up to fourth order. Formulae give us effective algorithm of calculation of these invariants of the complexity $\sim n^4$, where n is the number of crossings of plane diagram of knot K.

This work was supported by grant RFBR № 07-01-00085.

References

[1]. Allyonov S.V. *Arrow-diagram formulas for fourth order invariants of knot//* Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. 2005. V.11. № 5. P.3-17. [2]. Polyak M., Viro O. *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants//* Int. Math. Res. Notices. 1994. V.11. P.445-453. [3]. Vassiliev V.A. *Invariants and cohomology of the first order for spaces of embeding of self-intersection curves in R^n//* Izvestiya Mathematics. 2005. V.69. № 5. P.865-912.

Semiclassical analysis for highly degenerate potentials

Álvarez-Caudevilla Pablo, López-Gómez Julian [1] *(Departamento de Matemáticas Universidad Católica de Ávila, Spain; Departamento de Matemática Aplicada Universidad Complutense de Madrid, Spain)*

This paper characterizes the semi-classical limit of the fundamental energy,

$$E(h) := \sigma_1[-h^2\Delta + a(x); \Omega],$$

and ground state ψ_h of the Schrödinger operator $-h^2\Delta + a$ in a bounded domain Ω, in the highly degenerate case when $a \geq 0$ and $a^{-1}(0)$ consists of two components, say $\Omega_{0,1}$ and $\Omega_{0,2}$. The main result establishes that

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \min\{\sigma_1[-\Delta; \Omega_{0,i}],\ i = 1, 2\}$$

and that ψ_h approximates in $H_0^1(\Omega)$ the ground state of $-\Delta$ in $\Omega_{0,i}$ if

$$\sigma_1[-\Delta; \Omega_{0,i}] < \sigma_1[-\Delta; \Omega_{0,j}], \qquad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}.$$

Равномерное представление решений как бисингулярно возмущенного уравнения с малым параметром при старшей производной, так и возмущенного уравнения с особыми точками

Алымкулов К.

Здесь обобщается метод погранфункций (Вишика—Люстерника—Иманалиева—Васильевой) для построения асимптотики решений для вышеупомянутых уравнений, т. е. решения этих уравнений представляются виде ряда Лорана по степеням малого параметра (нулевое значение малого параметра является полюсом), коэффициенты которого состоят из суммы регулярной функции на рассматриваемом отрезке

[1]Supported by the Ministry of Education and Science of Spain under grant REN2003-00707 and CGL2006-00524/BOS.

и степенно-логарифмически растущей или убывающей погранфункции. Такое представление вытекает из асимптотики решений вышеупомянутых уравнений, полученных методом структурного сращивания (см.[1-3]).

Литература

[1] Алымкулов К., Зулпукаров А. З. *Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью* // ДАН, 2004, Т. 398, N5, С. 1–4.

[2] Алымкулов К, Жээнтаева Ж. К. *Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой* // ДАН, 2004, Т. 398, N6, С. 1–5.

[3] Алымкулов К., Жээнтаева Ж. К. *Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой* //Матем. заметки, 2006, Т. 79, Вып. 5, С. 643–652.

Краевая задача для уравнения смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием

Алешин П.С. (г. Орел)

Уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,t) + \int\limits_0^h R(\xi)u(x,y-\xi)d\xi, y > 0, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u(x-\tau,y), y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1$; $R(\xi)$ - ограниченная функция; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; $0 < \tau, h \equiv$const; D_{0y}^{α} - оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования, действующий на функцию $u(x,y)$ по переменной y, рассматривается в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$, когда $D^+ = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty} D_l^+$,

$D_l^+ = \{(x,y) : x > 0, \quad lh \le y \le (l+1)h\}$; $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k^-$,

$D_k^- = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, \quad -\tau/2 < y < 0\}$; $J = \{(x,y) : x > 0, y = 0\}$.

Задача Q. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D из класса $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t) \in C(\overline{D}^+)$, $y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,t) \in C(D^+ \bigcup J)$, $u(x,y) \in C(\overline{D}^-)$, $u_{xx}(x,y) \in C(D^+ \bigcup D^-)$, $u_{yy}(x,y) \in C(D^-)$, удовлетворяющее граничным и начальному условиям

$$u(0,y) = 0, \quad y > 0; u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), \quad k\tau \le x \le (k+1)\tau/2;$$

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, \quad (x,y) \in D_{(-1)}^+ \setminus D^-, \\ u(x,y), \quad (x,y) \in D^-, \end{cases}$$

условиям сопряжения

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t) \lim\limits_{y\to 0-} u(x,y)\omega(x), \quad x \in \overline{J}, \\ \lim\limits_{y\to 0+} y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,t) \lim\limits_{y\to 0-} u_y(x,y)\nu(x), \quad x \in J, \end{cases}$$

когда заданные функции $\psi_k(x) \in C[k\tau; (2k+1)\tau/2] \bigcap C^2(k\tau; (2k+1)\tau/2)$ и $\psi_0(0) = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

Единственность решения задачи Q доказывается с помощью энергетических неравенств, а вопрос существования решения сведен к разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} \omega''(x) - \Gamma(\alpha)\omega'(x) = \Gamma(\alpha)\delta_k(x) - \\ -\Gamma(\alpha) \sum\limits_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \int\limits_{0}^{x-m\tau} (x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega(\eta)d\eta, k\tau < x < (k+1)\tau, \\ \omega(k\tau) = \psi_k(k\tau) \quad (k = 0, 1, 2..), \end{cases}$$

в классе функции $\omega(x) \in C[0; +\infty) \bigcap C^2(0; +\infty)$.

Известная функция $\delta_k(x)$ выражается через $\psi_k(x)$; $\gamma_m = \left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$.

Краевые задачи для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных с инволютивными отклонениями

Андреев А. А., Саушкин И. Н. (г. Самара)

Под дифференциальными уравнениями с инволютивными отклонениями понимают такие уравнения, в которых помимо искомой функции и её производных входят ещё слагаемые, содержащие отклонения $\alpha(t)$ специального вида: $\alpha(\alpha(t)) = t$. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с инволютивными отклонениями в старших производных не поддаются известной классификации, поэтому возникает проблема уже с постановками задач для таких уравнений. Их можно отнести к классу, по терминологии Дезина А.А., нелокальных дифференциальных уравнений.

Для волнового уравнения с инволютивным отклонением рассмотрены задача Коши и задачи, которые являются аналогами задач Гурса, Коши-Гурса, Дарбу и задач со смещением. Показано влияние инволютивного отклонения на корректность по Адамару поставленных задач. Для телеграфного уравнения, содержащего инволютивное отклонение рассмотрены задача Коши в бесконечной области и аналог задачи Гурса в характеристическом квадрате. Показано влияние инволютивного отклонения на асимптотику решения задачи Коши. Доказано, что такие задачи корректны по Адамару. Для уравнения, полученного в результате возмущения дифференциального оператора другим оператором, вычисленным в инволютивной точке рассмотрены аналоги классических задач Коши, Коши-Гурса, Дарбу. Доказана корректность задач.

Для уравнения Лапласа с инволютивным отклонением рассмотрены задачи Коши, Дирихле и смешанные задачи. Также показано влияние инволютивного отклонения на корректность задач.

Для уравнения теплопроводности с инволютивным отклонением рассмотрены смешанные задачи. Показано, как с помощью дополнительных условий можно избавиться от некорректности этих задач при различных значениях вещественных параметров.

Также рассматриваются видоизменённые задачи Дарбу и Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с инволютивным отклонением. Решения получены методом Римана и показано влияние отклонения на корректную постановку таких задач.

Для уравнений, полученных в результате возмущения операторов Лаврентьева-Бицадзе рассмотрены аналоги задачи Трикоми в бесконечных областях.

On the Representation of Schur function for case of unitary realization

Andreishcheva E.N. (Voronezh)

By S_k we denote the set of all complex functions s which a meromorphic on $\mathbb{D}$ and the kernel $S_s(z,\zeta) = (1 - s(z)s(\zeta)^*)(1 - z\zeta^*)^{-1}$ has k negative squares.
If $s \in S_k$, then exist a Pontryagin space $(\Pi_k, [\cdot,\cdot])$, a contraction T on Π_k, elements $u, v \in \Pi_k$ and a complex number γ such that the operator representation
$s_V = \gamma + z[(I - zT)^{-1}u, v]$ associated with the operator matrix
$V = \begin{pmatrix} T & u \\ [\cdot, v] & \gamma \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \Pi_k \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Pi_k \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}$ coincides with $s(z)$.
In the representation V can be chosen unitary in the $\Pi_k \oplus \mathbb{C}$ and closely connected, which means that $\Pi_k = \overline{span}\{T^m u, T^{*n} v : m, n = 0, 1, \ldots\}$. For this case was proved the following result.

Theorem 1. Let $s(z) = z^l s_l(z)$ with $s_l(0) \neq 0$ .The assertions 1. – 3. holds for some set Ω_θ: 1. $s \in S_k$; 2. $\lim\limits_{z \to 1} s(z) = 1$; 3. $\overline{\lim\limits_{z \to 1}} \dfrac{1 - |s(z)|^2}{1 - |z|^2} < \infty$;
are if and only if there exist a Pontryagin space Π_k, a contractive operator T in Π_k and a generating element $u \in dom(I - T)^{-1}$ for operator T such that:
$s(z) = z^l - \dfrac{z^l(z-1)}{\overline{s_l(0)}}[(I - zT)^{-1}(I - T)^{-1}T^{l+1}u, T^l u], \quad z \in \mathbb{D}, \ \dfrac{1}{z} \notin \sigma_p(T).$

References

[1] M. G.Krein, H. Langer, *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen* Math. Nachr.**77** (1977), 187–236.

[2] D.Alpay, T.Ya.Azizov, A.Dijksma, H.Langer, G.Wanjala *The Shur Algorithm for Generalized Schur Functions IV: Unitary Realizations*, Oper. Theory Adv. Appl., **149** (2004), Birkhäuser, Basel, 23–45 .

О собственных значениях одной нелинейной спектральной задачи

Андрюшин Д. В. (мех-мат МГУ им. М. В. Ломоносова. г. Москва)

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается спектральная задача

$$-y''(x) + (mx^{m-1} - \lambda)^2 y(x) = 0 \tag{1}$$

где $m \geq 3$ целое число, а λ - спектральный параметр.

Определение 1. $\lambda \in \mathbb{C}$ - *собственное значение спектральной задачи* (1), *если существует нетривиальное решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *из пространства* $L_2(\mathbb{R})$.

Известно, что при нечетных $m = 3, 5, \ldots$ и фиксированном λ существуют решения f_λ^+, f_λ^- уравнения (1), имеющие следующее асимптотическое представление:

$$f_\lambda^+ = e^{\lambda x - x^m}|x|^{-(m-1)/2}\left(1 + O(|x|^{-1})\right), \qquad x \to +\infty,$$

$$f_\lambda^- = e^{-\lambda x + x^m}|x|^{-(m-1)/2}\left(1 + O(|x|^{-1})\right), \qquad x \to -\infty$$

Функция f_λ^+ (f_λ^-) экспоненциально убывает на $+\infty(-\infty)$ соответственно. Рассмотрим определитель Вронского

$$W(\lambda) = f_\lambda^+(f_\lambda^-)' - (f_\lambda^+)' f_\lambda^- \tag{2}$$

Определитель Вронского $W(\lambda)$ не зависит от x и является целой функцией по λ. Если λ_0 - ноль определителя Вронского, то $f^+_{\lambda_0}$ и $f^-_{\lambda_0}$ линейно зависимы. Можно показать, см. например [1], что нули определителя Вронского (2) и только они являются собственными значениями спектральной задачи (1).

Сформулируем основной результат .

Теорема 1. *Пусть $m = 3$. Обозначим $\mu = \left[\frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$ и зафиксируем произвольное число $0 < \epsilon < \pi$. Тогда в секторе $|\arg\lambda| < \pi - \epsilon$ определитель Вронского* (2) *имеет при $|\lambda| \to \infty$ асимптотическое представление:*

$$\begin{aligned} W(\lambda) = \quad & exp(-2\mu\lambda^{3/2}) - 2exp(2\mu\lambda^{3/2}) + exp(-2\mu\lambda^{3/2})O(|\lambda|^{-1/2}) + \\ & + exp(2\mu\lambda^{3/2})O(|\lambda|^{-1/2}). \end{aligned}$$

Все собственные значения задачи (1) *при $m = 3$ имеют асимптотическое представление:*

$$\lambda^+_k = e^{i\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\pi k + ln2}{2\mu}\right]^{2/3}\left(1 + O(k^{-1})\right),$$

$$\lambda^+_k = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\pi k + ln2}{2\mu}\right]^{2/3}\left(1 + O(k^{-1})\right)$$

при $k \to +\infty$, k - целое.

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова и поддержана грантом РФФИ № 07-01-00283.

Литература

[1] M. Christ. *Certain sums of squares of vector fields fail to be analytic hypoelliptic.* // Commun. in partial differential equation, 16(10), 1695-1707 (1991).

Анализ дифференциальных операторов отвечающих краевым задачам

Антонец М.А. (г. Нижний Новгород)

Рассматриваются краевые задачи для дифференциальных операторов с краевыми условиями трансмиссии и импедансными краевыми условиями в области $\mathcal{D}$ евклидова пространства R^n, получающейся удалением из R^n границы $\mathfrak{S}$ так, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \bigcup \mathcal{D}_2$ и $\mathfrak{S}$ является границей каждого из множеств $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ (см.[1]). При этом используется резольвента $\hat{R}(\lambda)$ дифференциального оператора $\hat{A}$, отвечающего задаче без граничных условий, то есть замкнутого оператора $\hat{A}$ в пространстве вектор - функций $L^k_2(R^n)$ с областью определения $\mathcal{D}(\hat{A})$, содержащей пространство вектор - функций $S^k(R^n)$ с компонентами из пространства Шварца $S(R^n)$.

Линейные операторы, отвечающие краевым задачам, строятся как замнутые расширения ограничения $\hat{A}_0$ оператора $\hat{A}$ на линейное многообразие основных вектор - функций из пространства Шварца, обращающихся в ноль вблизи границы $\mathfrak{S}$. С помощью оператора $\hat{A}$ удается определить операторы вычисления следов $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}_{\pm}$ на обеих сторонах границы $\mathfrak{S}$ без использования предельных переходов, а также описать пространство следов $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, которое оказывается гильбертовым пространством со скалярным произведением $(g, h)_\lambda = (\hat{R}(\lambda)g, \hat{R}(\lambda)h)$.

В частности для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ и любой обобщенной функции g из пространства следов $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ существуют следы $Tr^{\mathfrak{S}}_{\pm}\hat{R}(\lambda)g$, причем отображения $\hat{t}_{\pm}(\lambda)$, определенные соотношениями $\hat{t}_{\pm}(\lambda)g = Tr^{\mathfrak{S}}_{\pm}\hat{R}(\lambda)g$, являются ортогональными проекторами в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и удовлетворяют соотношению $\hat{t}_+(\lambda) + \hat{t}_-(\lambda) = I$.

Ортогональные проекторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$, являются аналогами проекторов Кальдерона (см. [2], [3]): для любой обобщенной функции g, принадлежащей образу проектора $\hat{t}_+(\lambda)$ $(\hat{t}_-(\lambda))$, функция $\hat{R}(\lambda)g$ является решением уравнения

$$\hat{A}u - \lambda u = 0$$

в каждой из областей $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, причем $u = 0$ в $\mathcal{D}_2$ $(\mathcal{D}_1)$ и $Tr_+^{\mathfrak{S}}u = g$ $(Tr_-^{\mathfrak{S}}u = g)$.

Кроме того, проекторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ присутствуют в явных выражениях для резольвент краевых задач. Так например, для краевой задачи с краевым условием трансмиссии $Tr_+^{\mathfrak{S}}u = \hat{\gamma}Tr_-^{\mathfrak{S}}u$, где $\hat{\gamma}$ непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, резольвента задается выражением

$$\hat{R}(\lambda) + \hat{R}(\lambda)(\hat{t}_+(\lambda) - \hat{\gamma}\hat{t}_-(\lambda))^{-1}(I + \hat{\gamma})Tr_+^{\mathfrak{S}}\hat{R}(\lambda),$$

если только оператор $\hat{t}_+(\lambda) - \hat{\gamma}\hat{t}_-(\lambda)$ непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00-290.

Литература

[1] Антонец М.А. *Препринт НИРФИ, №510, 2007 г. с.1-71.*

[2] Calderon A.P. *Outlines Sov.- Amer.Symp. on PDO. Novosibirsk. 1963, pp 303-304.*

[3] Seely R.T. *Amer. J. of Math., 88,(1966), 781 - 809.*

Mathematical analysis of the discharge of a hot gas in a colder atmosphere

Antontsev S. , Díaz J. I. (Covilha (Portugal), Madrid (Spain))

We study the boundary layer approximation of the already classical mathematical model which describes the discharge of a laminar hot gas into the stagnant colder atmosphere of the same gas [2,3]. This approximation leads to the nonlinear system of partial differential equations

$$\begin{array}{l} (\rho u)_x + (\rho v)_r = 0, \\ \rho u u_x + \rho v u_r = (\mu u_r)_r + G\,(1 - \varepsilon/T)\,,\ \rho u T_x + \rho v T_r = Pr^{-1}\,(\mu T_r)_r\,, \end{array} \tag{1}$$

where $Pr > 0$ is the Prandtl number, $G > 0$ is the Froude number. The system is completed with the constitutive conditions $\rho = 1/T$, $\mu = T^\sigma$ with some $0 < \sigma < \infty$. The unknowns are the velocity vector (v, u) and the temperature T. System (1) is considered in the strip $\Omega = \{(x, r) \in R^2 : 0 < x < \infty, 0 < r < l \le \infty\}$ and the solutions must satisfy some complementary conditions which in our case are given by the boundary conditions

$$\begin{array}{l} u_r = v = T_r = 0 \text{ for } r = 0 \text{ and for } x > 0, \\ u = \delta,\ T = \varepsilon \text{ for } r = l \text{ and for } x > 0, \end{array} \tag{2}$$

$$u(0, r) = u_0(r) \ge \delta,\ T(0, r) = T_0(r) \ge \varepsilon \text{ for } x = 0 \text{ and for } r \in [0, l]. \tag{3}$$

Notice that in spite of the fact that the system arises in the stationary regime it is of parabolic type and that condition (3) looks like the initial condition if the variable x is understood as the "fictitious"time.

We prove existence and uniqueness of solutions of the nondegenerate problem (corresponding to the assumption $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$). We also study the limit case ($\delta = 0$ and $\varepsilon = 0$) leading to the degeneracy of the system for which we prove the generation of some interfaces given as the boundaries of the support of (u, T). Using the method of local energy estimates [1] we show that the solution possesses the localization properties such as finite speed of propagation, the waiting time property, extinction (with respect to x). To prove the existence and uniqueness of solutions we use the so-called von Mises variables (x, ψ), where ψ is the associated stream function that transforms (1) into the purely diffusive system

$$u_x = \left(T^{\sigma-1} u u_\psi\right)_\psi + (TG/u)\left(1 - \frac{\varepsilon}{T}\right), \quad T_x = (Pr)^{-1}\left(T^{\sigma-1} u T_\psi\right)_\psi .$$

References

[1] S.N. Antontsev, J.I. Díaz, S.I. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Series Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications (48), Birkhäuser Boston, 2002.

[2] S.N. Antontsev, J.I. Díaz, *Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere*, to appear in RACSAM.

[3] M. Sánchez-Sanz, A.L. Sánchez and A. Liñán, *Front Solutions in High-Temperature Laminar Gas Jets*, J. Fluid. Mech., **547**, pp.257-266.

Вариационный принцип для некоторых нелинейных гиперболических уравнений и систем

Аптекарев А. И. (г.Москва)

В ситуации когда гиперболическое уравнение теряет единственность и требуется выбирать разрывное решение, обычно конкурируют два основных подхода: либо (исходя из физических соображений) уравнение регуляризуется (добавлением высоких производных с малым параметром), либо работа продолжается с нерегуляризованным уравнением и (опять же исходя из физических соображений) задаются соотношения на разрыве, позволяющие выбирать разрывное решение.

В докладе речь пойдет о некоторых гиперболических уравнениях и системах допускающих "вполне-интегрируемые" регуляризации. Спектральные задачи, лежащие в основе метода "обратной задачи" интегрирования регуляризированного уравнения при стремлении малого (регуляризационного) параметра к нулю, чудесным образом превращаются в вариационные принципы для решений нерегуляризованных уравнений. При потере единственности соответствующий функционал обретает несколько экстремумов, при этом решению соответствует глобальный минимум, а разрыв решения приходится на совпадение значений в локальных минимумах. Оказывается, что такой выбор разрыва для дивергентного примера обеспечивает выполнение соотношений Гюгонио, в случае же недивергентной системы на разрыве выполняются некоторые обобщения соотношений Гюгонио. Результаты этого доклада получены совместно с Ю.Г.Рыковым (см. [1], [2]).

Литература

[1] Аптекарев А.И., Рыков Ю.Г., *Доклады Академии Наук РАН, 2006, 409, № 1, 12-14*

[2] Aptekarev A.I., Rykov Yu.G., *Russian Journal of Mathematical Physics, 2006, 13, № 1, 4-12*

Реализация метода многогранников Ньютона-Брюно

Арансон А. Б. (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва)

Предлагается реализация метода многогранников Ньютона-Брюно (МНБ) [1] для анализа степенных асимптотик решений системы ОДУ вида

$$\frac{\ln dx_i}{dt} = \sum_{j_i=1}^{s_i} a_{j_i} x_1^{q_{1j_i}} \dots x_1^{q_{nj_i}},\ i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Степенные асимптотики ищутся в виде

$$x_i = b_i \tau^{p_i},\ b_i \neq 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

В методе МНБ вводится пространство векторных показателей степеней $Q = (q_1, \dots, q_n)$ и сопряжённое пространство векторных показателей степеней асимптотик $P = (p_1, \dots, p_n)$. Каждому слагаемому в правых частях системы (1) соответствует векторный показатель степени $Q_j = (q_{1j}, \dots, q_{nj})$. Множество всех векторных показателей степеней $\mathbf{S} = \{Q_j\}$ слагаемых в правых частях системы (1) называется *носителем*. Выпуклая оболочка $\mathbf{M}$ носителя $\mathbf{S}$ называется *многогранником Ньютона-Брюно* системы (1). Многогранник $\mathbf{M}$ состоит из граней Γ_r. Каждой грани Γ_r соответствует *укороченная система* системы (1). В правой части укороченной системы, остаются только те слагаемые, у которых $Q_j \in \Gamma_r \cap \mathbf{S}$. Также каждой грани Γ_r соответствует *нормальный конус* $\mathbf{U}_r$ векторов P, нормальных к грани Γ_r. Для исследования степенных асимтотик с показателями из конуса $\mathbf{U}_r$ надо прежде всего проанализировать укороченную систему, соответствующую грани Γ_r.

Для реализации метода МНБ автором создана компьютерная программа [2], позволяющая по носителю системы (1) вычислять все её укороченные системы и их нормальные конусы.

Рассматривается применение метода МНБ к анализу интегрируемости системы (1).

Литература

[1] Брюно А. Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.*

[2] Арансон А. Б. *Computation of collections of correlated faces for several polyhedra. Proceedings of the 6th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, CASC2003 (Passau, Germany, September 20-26, 2003) 2003, pp. 13-17*

A priori estimates for nondiagonal systems with quadratic nonlinearities in the gradient

Arkhipova A.A. (Saint-Petersburg State University, Russia)

We consider the Dirichlet problem for nondiagonal quasilinear elliptic systems of equations with strong nonlinearities in the gradient. We relax an assumption on behavior of a solution near a fixed point to provide an estimate of the Hölder norm of the solution in a neighborhood of this point. More exactly, we assume local smallness of the Campanato seminorm of a solution but not the smallness of its oscillation. For one class of such type systems, we derive an optimal condition ensuring local estimate of the Hölder norm (and the stronger norms) of a solution.

In the parabolic case, the same type result we proved for a solution of the Cauchy-Dirichlet problem. New description of the conditions guaranteeing local smoothness of solutions was obtained with the help of the so-called quasireverse Hölder inequalities derived by the author.

Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки

Арутюнов А. В. (г. Москва)

Рассмотрены замкнутые накрывающие отображения, действующие из одного полного метрического пространства в другое метрическое пространство (вообще говоря неполное). Доказано, что для любого отображения, действующего в тех же метрических пространствах и удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица меньшей, чем константа накрывания, существует точка, в которой значения этих отображений равны. Для многозначных отображений при аналогичных предположениях доказано существование точки совпадения отображений, т.е. точки, в которой образы этих многозначных отображений пересекаются. Указанные результаты обобщают как принцип сжимающих отображений, так и теорему о накрывании.

О краевой задаче с нелокальным условием для системы гиперболических уравнений

Асанова А.Т. (Институт математики МОН РК)

В сообщении на прямоугольнике $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается краевая задача с нелокальным условием для системы гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \quad t \in \Omega = [0,T] \times [0,\omega], \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \mid_{t=0} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \mid_{t=0} + P_0(x)u(t,x) \mid_{t=0} + S_2(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \mid_{t=\frac{T}{\omega^k}x^k} +$$

$$+ S_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \mid_{t=\frac{T}{\omega^k}x^k} + S_0(x)u(t,x) \mid_{t=\frac{T}{\omega^k}x^k} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $k > 0$, $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n - вектор - функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны соответственно на Ω, $[0,\omega]$, n - вектор - функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Краевые задачи типа (1)-(3) возникают при математическом моделировании реальных процессов, с учетом динамики их протекания, когда требуется вести наблюдение, делать всевозможные измерения и передавать информацию, с помощью устройства обратной связи управляющему устройству о состоянии процесса, в каждой точке некоторого непрерывного множества.

Для исследования задачи (1)-(3) используется метод введения функциональных параметров, разработанный автором для решения нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений второго порядка. На основе этого метода были установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости краевых задач с данными на характеристиках, достаточные условия однозначной разрешимости сингулярной краевой задачи на полосе и некоторых краевых задач с нелокальными условиями для систем гиперболических уравнений в терминах исходных данных.

В сообщении получены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения краевой задачи (1)-(3) и построены алгоритмы нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи.

Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для задач на бесконечным полуинтервале времени

Асеев С. М. , Кряжимский А. В. (МИРАН, г. Москва, Россия и IIASA, Laxenburg, Austria)

Доклад посвящен теории принципа максимума Понтрягина для одного класса задач оптимального управления, возникающих в экономике при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Наиболее часто такие задачи возникают при исследовании процессов экономического роста. Рассматриваемый класс задач имеет ряд особенностей, затрудняющих применение стандартного аппарата математической теории оптимального управления. Прежде всего, это бесконечный полуинтервал времени, на котором рассматривается процесс управления системой. Максимизируемый функционал полезности в этих задачах имеет специальный вид. Он задается несобственным интегралом, содержащим экспоненциальный дисконтирующий множитель. В докладе излагается новый аппроксимационный подход к исследованию данного класса задач оптимального управления, ведущий к полному набору необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В центре внимания доклада – характеризация асимптотического поведения сопряженной переменной и гамильтониана задачи на бесконечности.

Литература

[1] С. М. Асеев, А. В. Кряжимский *Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом, Доклады Академии Наук, 204, стр. 583–585, 2004.*

[2] S. M. Aseev, A. V. Kryazhimskiy *The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal cintrol problems with infinite time horizons, SIAM J. on Control and Optimization, 43, pp. 1094–1119, 2004.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект 06-01-00034-а).

Generalized Khintchine inequality in symmetric spaces

Astashkin S.V. (Department of Mathematics and Mechanics, Samara State University, RUSSIA)

Let $r_1, r_2, \dots$ be a sequence of independent random variables with symmetric two-point distribution $\mathbf{P}(r_i = 1) = \mathbf{P}(r_i = -1) = \frac{1}{2}$ (for example, r_i could be the classical Rademacher functions defined on $[0,1]$). By the famous Khintchine inequality, for every $p > 0$ there exists a constant $C_p > 0$ such that for arbitrary real a_k we have

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_{L_p[0,1]} \le C_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\Big)^{1/2}.$$

Necessary and sufficient conditions are found under which the following generalized Khintchine inequality

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|_X \le C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X$$

holds for arbitrary sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ of independent mean zero random variables from a symmetric space X on $[0,1]$. Moreover, a description of the subspace of X generated by Rademacher functions with independent vector coefficients is presented.

Oscillation Criterion for Quasi-linear Differential Equations

Astashova I. V.[2] *(Moscow State University of Economics, Statistics, and Informatics)*

Consider the differential equation

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)}(x) + p(x)\ |y(x)|^k \operatorname{sgn} y(x) = 0 \tag{1}$$

with $n \ge 1$, $k > 1$, and continuous functions $p(x)$ and $a_j(x)$.

A solution to (1) is called *oscillatory* if it has arbitrary large zeros.

Theorem 1. Suppose the functions $p(x)$ and $a_j(x)$ satisfy the conditions

$$\int_x^{\infty} x^{n-1}\,|p(x)|\,dx < \infty\,, \tag{2}$$

$$\int_x^{\infty} x^{n-j-1}\,|a_j(x)|\,dx < \infty\,, \qquad j = 0,\dots,n-1. \tag{3}$$

Then for any $h \ne 0$ there exists a non-oscillatory solution $y(x)$ to (1) tending to h as $x \to \infty$ and having derivatives satisfying the conditions

$$\int_x^{\infty} x^{j-1}\,\left|y^{(j)}(x)\right|\,dx < \infty\,, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Theorem 2. Let $p(x)$ be positive and $a_0(x),\dots,a_{n-1}(x)$ satisfy (3). Then the following conditions are equivalent:

(i) $p(x)$ satisfies (2),

(ii) there exists, in a neighborhood of $+\infty$, a non-oscillatory solution to (1) that does not tend to 0 as $x \to \infty$.

Corollary. Let n be even, $p(x)$ positive, and $a_0(x),\dots,a_{n-1}(x)$ satisfy (2).

Then the following conditions are equivalent:

(i) All solutions to (1) defined in a neighborhood of $+\infty$ are oscillatory,

(ii)

$$\int_x^{\infty} x^{n-1}\,|p(x)|\,dx = \infty\,.$$

[2]This work was partially supported by RFBR (Grant 06-01-00715) and by Grant NSh–2538.2006.1.

Remark. In the case $a_0(x) = \cdots = a_{n-1}(x) = 0$, the oscillation criterion was proved by F. Atkinson [1] for $n = 2$ and generalized by I. T. Kiguradze for higher orders [2] and the case $a_{n-2}(x) \neq 0$ [3].

References

[1] Atkinson F. V., *On second order nonlinear oscillations,* Pacif. J. Math. 5 (1955), No 1, 643-647.

[2] Kiguradze I. T., Chanturia T. A., *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations,* M.: Nauka.(1990), 432 pp. (Russian)

[3] Kiguradze I. T., *On the oscillation criteria for one class of ordinary differential equations,* Diff. uravnenija, 28 (1992), No 2, 207-219. (Russian)

О многомерных интегральных операторах с однородными ядрами и радиальными слабо осциллирующими коэффициентами

Авсянкин О. Г. (г. Ростов-на-Дону)

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$, инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$ и удовлетворяет условию

$$k(e_1,y)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \text{где } e_1 = (1,0,\dots,0),$$

которое обеспечивает ограниченность оператора K в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Далее, пусть $\Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ — множество радиальных функций, слабо осциллирующих в нуле и на бесконечности.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную всеми операторами A вида

$$A = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + T,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, K_j — оператор вида (1), M_{a_j} — оператор умножения на функцию $a_j(|x|) \in \Omega_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$, T — компактный оператор. Для алгебры $\mathfrak{B}$ строится символическое исчисление, в терминах которого устанавливается критерий фредгольмовости и формула для вычисления индекса операторов из $\mathfrak{B}$.

Результаты данного исследования получены совместно с В. М. Деундяком.

Приближение индивидуальных функций в интегральной метрике

Бабенко А. Г., Крякин Ю. В. (г. Екатеринбург, Wroclaw, POLAND)

Рассматривается задача наилучшего интегрального приближения индивидуальных функций на периоде пространством тригонометрических полиномов заданной степени.

В качестве приближаемых функций исследуются, в частности, разрывные функции, принимающие лишь конечное число значений, в том числе — характеристическая функция интервала и функция Хаара. Даже для таких простейших функций задача точного нахождения величины наилучшего интегрального приближения оказалась нетривиальной.

Установлена взаимосвязь рассматриваемой задачи с известным неравенством Бора–Фавара, указывается также связь с задачей о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве C.

Исследования первого из авторов поддержаны РФФИ (проект 05-01-00233), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5120.2006.1). Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (грант 201 016 31/1206).

Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод

Бабич В. М (ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург)

Для широкого класса линейных уравнений в частных производных существуют высокочастотные асимптотические решения, имеющие характер волны, амплитуда которой существенно отлична от нуля лишь в окрестности изолированной точки. Точка эта движется вдоль луча (в квантомеханическом случае вдоль классической траектории) с групповой скоростью. Решения такого типа (мы их будем называть "квазифотонами") строятся начиная с пионерской работы Э.Шредингера. В более поздних работах использовалась либо техника погранслойных раложений, либо методы, восходящие к рассмотрениям монографии В.П.Маслова "Комплексный метод ВКБ в нелинейтых уравнениях"(1977). Это непростые построения. В настоящем докладе аналитические выражения для квазифотонов выводятся примерно также, как члены классических пространственно-временных разложений. Достигнуть такого единообразия позволяет теория формальных степенных рядов. Оказыватся практических во всех случаях, когда удается построить пространственно-временное разложение, вывод формул для квазифотонов оказывается делои почти рутинным, хотя некоторые технические трудности остаются. Применение формальных степенных рядов позволяет, например, легко построить квазифотоны волн Релея. В докладе предполагается проиллюстрировать сответствующую технику на простом модельном примере волнового уравнения с переменной скоростью.

Nonlinear dynamics of a system of particle-like wavepackets

Babin A. V. (University of California, Irvine)

This talk describes our continuing study of nonlinear evolution of a system of wavepackets. We study a wave propagation governed by a nonlinear system of hyperbolic PDE's with constant coefficients with the initial data being a multi-wavepacket. By definition a general wavepacket has a well defined principal wave vector, and, as we proved in previous works [1], [2] the nonlinear dynamics preserves systems of wavepackets and their principal wave vectors. Here we study the nonlinear evolution of a special class of wavepackets, namely particle-like wavepackets. A particle-like wavepacket is of a dual nature: on one hand, it is a wave with a well defined principal wave vector, on the other hand, it a particle in the sense that it can be assigned a well defined position in the space. We prove that under the nonlinear evolution a generic multi-particle wavepacket remains to be a multi-particle wavepacket with a high accuracy, and every constituting single particle-like wavepacket not only preserves its principal wave number but also it has a well-defined space position evolving with a constant velocity which is its group velocity. Remarkably the described properties hold though the involved single particle-like wavepackets undergo nonlinear interactions and multiple collisions in the space (the number of collisions may be high, it is proportional to N^2 where N is the number of particle-like wavepackets in the multi-wavepacket). We also prove that if principal wavevectors of multi-particle wavepacket are generic, the result of nonlinear interactions between different wavepackets is small and the approximate linear superposition principle holds uniformly with respect to the initial spatial positions of wavepackets. See for details [3].

Список литературы

[1] Babin A. and Figotin A., *Wavepacket preservation under nonlinear evolution*, submitted; e-print available online at arxiv.org arXiv:math.AP/0607723

[2] Babin A. and Figotin A., *Linear superposition in nonlinear wave dynamics*, Reviews in Mathematical Physics Vol. 18, No. 9 (2006), pp. 971-1053; e-print available online at arxiv.org arXiv:math.AP/0509359v5.

[3] Babin A. and Figotin A., Nonlinear dynamics of a system of particle-like wavepackets

Stable eigenvibrations in elastic media with mass and stiffness perturbations

Babych N. (Bath, United Kingdom)

We study the spectral properties of inhomogeneous media that consist of two parts with strongly contrasting stiffness and mass density. The small parameter describes the quotient of stiffness coefficients. The m-th power of the parameter is comparable to the ratio of densities. We show that the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions depends on the rate m.

Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with Lipschitz boundary $\partial\Omega$ divided into two nonempty connected parts Ω^- and Ω^+ by noncompact smooth surface Γ. We assume that Ω^- and Ω^+ have Lipschitz boundaries. Let ν be the unit normal to Γ. We assume that the medium is filling up the volume Ω and resonance vibrations of the medium are described by the eigenvalue problem

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon \varepsilon^{-m} r(x) u^\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{1}$$

$$\varepsilon \operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon \rho(x) u^\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u_-^\varepsilon\big|_\Gamma = u_+^\varepsilon\big|_\Gamma, \qquad a\frac{\partial u_-^\varepsilon}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = \varepsilon\alpha\frac{\partial u_+^\varepsilon}{\partial\nu}\Big|_\Gamma, \tag{3}$$

where a, r and α, ρ are positive smooth functions in Ω^- and Ω^+ respectively and $m \in \mathbb{R}$. The inferior indices $-$ and $+$ denote the restrictions of a function defined in Ω to the subdomains Ω^- and Ω^+.

We investigate the question how the resonance vibrations of the media, namely eigenvalues λ^ε and eigenfunctions u^ε, change if the parameter ε tends to 0. The case $m = 1$ with the mass density perturbation being strictly inverse to the rigidity one, was studied in [1]. The case of the *stiff problem* ($m = 0$) was considered in [2], [3].

For each $m \neq 1$ the system supports stable low and high frequency eigenvibrations, which qualitatively differs for certain values of m. We classify the cases of qualitatively different behaviour for the eigenvalues and eigenfunctions. Then complete asymptotic expansions for each type of the vibrations are constructed for a certain geometry of Ω.

Low frequency vibrations have one branching point separating highly contrast limit behaviour, namely $m = 1$. Asymptotics of the low frequency eigenelements are constructed by power series expansions. High frequency vibrations have two branching points of contrast limit behaviour, $m = \pm 1$. Asymptotic expansions of high frequency eigenvibrations (for representative cases of limit behaviour with respect to m) are constructed by combination of the WKB-method with power series.

References

[1] Sanchez Hubert J., Sánchez Palencia E. *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods.* Berlin etc.: Springer-Verlag. xv, 421 pp., 1989.

[2] Golovaty Yu., Babych N. *On WKB asymptotic expansions of high frequency vibrations in stiff problems.* Equadiff '99, Berlin. Proc. of the conference. Singapore: World Scientific. Vol. 1: 103-105, 2000.

[3] Lobo M., Nazarov S., Pérez M.E. *Asymptotically sharp uniform estimates in a scalar stiff problem.* C. R. Mecanique 331 (2003) 325-330.

Positive processes

Bakhtin V. (Belarus State University, Minsk)

The notions of positive flow and positive process generalize the ordinary dynamical systems and stochastic processes. Their main distinctive feature is the presence of not a unique probability measure on the phase space but a family of measures which are defined as follows. For each positive flow or process with phase space X we fix a certain convex functional on the algebra $C(X)$. This functional is called the spectral potential and is nothing else but the logarithm of the spectral radius of the corresponding weighted shift operator. Any subgradient of the spectral potential automatically turns out to be an invariant probability measure on X. As in thermodynamics, we call these measures equilibrium ones. All of them have equal rights because there is no reason to prefer one of them rather than another.

To define a positive flow or a process one should specify some semiordered operator algebra with one distinguished element (which is called evolution operator, or shift operator) and fix in this algebra some Abelian subalgebra isomorphic to the algebra of continuous functions on a Hausdorff compact set. The latter set is called the phase space of the positive flow (process).

In this setting the concept of motion is treated mostly from the algebraic point of view. An abstract semigroup of positive operators (for instance, the family of weighted shift operators) is declared a source of motion; and we investigate evolution of operators rather than individual trajectories in the phase space. This approach is borrowed from quantum mechanics. Within it the very concept of a phase space becomes secondary. This can be seen, in particular, from fact that for one and the same law of motion (evolution) one can consider different phase spaces. They are determined by the set of those functions whose values an observer wishes to measure.

Despite the great generality of the described approach, we succeed to prove within it some quite concrete probabilistic results. For instance, if the spectral potential is differentiable (in the sense of Gâteaux) at some point then for the corresponding equilibrium measure the large numbers law is valid. Moreover, we obtain exponential asymptotics for the probabilities of observation of various empirical measures in terms of the action functional.

[1] Bakhtin V. *Positive processes.* http://arxiv.org/abs/math.DS/0505446.

Многомерные классы Ватермана и сходимость рядов Фурье

Бахвалов А. Н. (г. Москва)

Пусть $T = [-\pi,\pi]$, $m \geq 2$, а $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(T^m)$ — класс Ватермана на T^m (подробные определения см. в [1]).

Нам понадобится следующее условие на $\Lambda^k = \{\lambda_n^k\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^2\ldots\lambda_n^m)^{-1} = \infty. \tag{1}$$

Следующая теорема уточняет результаты автора из [1].

Теорема. Пусть при каждом $p = 1,\ldots,m$ существует $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right) / \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n}\right)$, и он (a) равен нулю; (b) положителен и конечен; (c) равен $+\infty$.

Тогда можно утверждать, гарантирует ли принадлежность измеримой 2π-периодической функции классу $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(T^m)$ сходимость её тригонометрического ряда Фурье по прямоугольникам в каждой регулярной точке. А именно:

- Если хотя бы при одном p выполнено условие (c), то ряд Фурье может расходиться.
- Если при всех p выполнено условие (a), то ряд Фурье сходится.
- Если при некотором $p = p_0$ выполнено условие (b), и для этого p_0 нарушено условие (1) (в частности, если $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \{n\}$), то ряд Фурье может расходиться.
- Если для некоторого $p = p_0$ выполнено условие (b), а для остальных p выполнено условие (a), и для $p = p_0$ выполнено условие (1), то ряд Фурье сходится.
- Если при двух значениях $p = p_1$ и $p = p_2$ выполнено условие (b), а для остальных p выполнено условие (a), и для $p = p_1$ выполнено условие (1), то ряд Фурье сходится.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268) и программ государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МК-6085.2006.1, НШ-4681.2006.1).

Литература

[1] Бахвалов А. Н. *О локальном поведении многомерной гармонической вариации.* Известия РАН, Сер. матем. – 2006. – Т.70, 4. – С. 3–20.

Топологические свойства слабо выпуклых множеств в банаховых пространствах

Балашов М. В., (г. Москва)

Показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве из слабой выпуклости (по Виалю) замкнутого множества следует проксимальная гладкость этого множества. Обратное верно тогда и только тогда, когда шар нормы пространства является порождающим множеством. В частности, для замкнутого множества в гильбертовом пространстве условия слабой выпуклости и проксимальной гладкости эквивалентны.

Показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве из проксимальной гладкости множества (а значит, и из слабой выпуклости по Виалю) следует слабая выпуклость по Ефимову–Стечкину, а обратное неверно. Также показано, что для проксимально гладких множеств метрическая проекция непрерывно зависит не только от проецируемой точки, но и от множества в смысле метрики Хаусдорфа.

Получена теорема об отделимости, утверждающая, что если в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве с порождающим шаром заданы два непересекающихся множества, одно из которых сильно выпукло, а другое — слабо выпукло, то при определенном соотношении параметров выпуклости эти множества можно разделить сферой. Показано, что порождаемость шара нормы необходима для того, чтобы в рассматриваемом пространстве выполнялось указанное условие отделимости.

Работа выполнена совместно с Ивановым Г. Е.

Решение линейно-квадратичной игры для нестационарных операторных объектов

Барабанов А.Е. (Санкт-Петербургский государственный университет)

Стандартная задача $\mathcal{H}^\infty$ субоптимального управления состоит в поиске стратегии одного из игроков в линейной стационарной динамической игре на полубесконечном промежутке времени, при которой заданный на траекториях квадратичный функционал принимает неположительные значения независимо от программной стратегии второго игрока. В последние годы был разработан Ф–подход к решению этой задачи, в котором уравнения Риккати или операции факторизации заменены на решение одного линейного функционального уравнения. Прямое обобщение этого подхода позволило впервые найти эффективные алгоритмы расчёта стратегий для систем с произвольными постоянными запаздываниями. В данной работе метод обобщён на нестационарные системы с операторными уравнениями объекта общего вида, которые возникают при исследовании систем с неполными измерениями после применения принципа разделения управления и оценивания. Решение существенно опирается на абстрактный принцип максимума в гильбертовом пространстве, а также на теорему о малом коэффициенте усиления, теорему двойственности и теорему разделения. Доказаны свойства гладкости ядерных функций для порождающих операторов.

О неравенствах типа Либа-Тирринга

Барсегян Д. С. (г. Ереван)

Нами получены неравенства типа Либа-Тирринга (см. [1]), которые доказываются методом, предложенным Б. С. Кашиным в работе [2].

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^d)$ - ортонормированная система функций, заданных на d-мерном торе S^d, $\varphi_j \perp 1$, $j = 1,\ldots,N$ и $\rho_\varphi = \sum\limits_{j=}^{N} \varphi_j^2$. Имеет место неравенство:

$$\int_{S^d} \rho_\varphi^2 \, d\mu \le C_d \sum_{j=1}^{N} \left\| \varphi_j^{(d/2)} \right\|^2_{L^2(S^d)}.$$

Теорема 2. Для ортонормированной системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^1)$ имеет место неравенство

$$\int_{R^1} \rho_\varphi^k \, dx \le C_k \sum_{j=1}^{N} \left\| |\xi|^{(k-1)/2} \hat{\varphi}_j \right\|^2_{L^2(R^1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\hat{\varphi}_j$ - преобразование Фурье функции φ.

Теорема 3. Для ортонормированной системы функций $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\varphi^2 \, dx \, dy \le C \sum_{j=1}^{N} \|\nabla \varphi_j\|^2_{L^2(R^2)}.$$

Литература

[1] E. Lieb, W. Thirring. '*Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrodinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities*', Studies in mathematical physics. Essays in honor of Valentine Bargmann, Prinecton Univ. Press, Prinecton, 1979, pp. 269 - 303.

[2] Б. С. Кашин, '*Об одном классе неравенств для ортонормированных систем*', Математические заметки, том 80, вып. 2(2006), стр. 204-208.

Об обратном операторе генератора C_0-полугруппы

Барсуков А. И. (г. Воронеж)

Исследование поддержано грантом РФФИ-05-01-00203-а.

Полугруппа ограниченных операторов $\{U(t)\}_{t>0}$, действующих на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ принадлежит классу C_0, если выполнено равенство $\lim_{t\to 0} U(t)x = x$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Оператор A, определенный равенством

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t) - I}{t} x,$$

для всех $x \in \mathcal{H}$, для которых этот предел существует, называется генератором полугруппы $\{U(t)\}_{t>0}$.

Теорема. Пусть ограниченный оператор A является генератором равномерно ограниченной полугруппы класса C_0, $0 \notin \sigma_p(A)$ и $\overline{\mathrm{ran}}(A) = \mathcal{H}$. Тогда A^{-1}является генератором некоторой равномерно ограниченной полугруппы класса C_0.

Теорема дает частичный ответ на проблему, сформулированную в (см. [1]): для генератора A равномерно ограниченной полугруппы класса C_0 ($0 \notin \sigma_p(A)$ и $\overline{\mathrm{ran}}(A) = \mathcal{H}$) является ли оператор A^{-1} генератором некоторой равномерно ограниченной полугруппы класса C_0?

Литература

[1] deLaubenfels R. *Inverse of generators* Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.104. No.2. p. 443-448.

Об импульсных решениях функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Беклярян Л. А. (г. Москва)

В докладе рассматривается краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа

$$\dot{x}(t) = g\left(x(t+n_1), \ldots, x(t+n_s)\right), \qquad t \in B_R, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{2}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \qquad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

$$x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = \varrho_i, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad t_i < t_{i+1}, \quad \varrho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, s$. Отображение $g : \mathbb{R}^{n \times s} \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липщица с константой M. Множество B_R: либо конечный интервал $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, $\hat{t}_0, \hat{t}_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[\hat{t}_0, +\infty[$, $\hat{t}_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ является объединением конечного числа орбит группы сдвигов $Q =$. (Орбитой точки $t \in \mathbb{R}$ называется множество $Q(t) = \{q(t) : q \in Q\}$).

Для любого $\mu \in R_+$ определим банахово пространство (пространство функций с весами)

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(.) : \ x(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \qquad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{-|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\},$$

Теорема. Пусть для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$M_2 \left[\sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} \right] < \ln \mu^{-1}.$$

Тогда для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varrho_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{Z}$, $\sup_{i \in Z} \|\varrho_i\|_{R^n} \mu^{|t_i|} < +\infty$ существует решение $x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ краевой задачи (1)–(4). Такое решение является единственным.

Reachable and unreachable sets in the scattering problem for the acoustical equation in $\mathbf{R}^3$

Belishev M.I., , Vakulenko A.F. (Saint-Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute)

The scattering problem is to find $u = u^f(x,t)$ satisfying

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu = 0, & (x,t) \in \mathbf{R}^3 \times (-\infty, \infty) \\ u\mid_{|x|<-t} = 0, & t < 0 \\ \lim_{s \to \infty} su((s+\tau)\omega, -s) = f(\tau, \omega), & (\tau, \omega) \in [0, \infty) \times S^2 \end{cases}$$

for a real smooth compactly supported potential $q = q(x)$ and a control $f \in \mathcal{F} = L_2([0,\infty); L_2(S^2))$. The corresponding control problem is: given $y \in \mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3)$ find $f \in \mathcal{F}$ providing $u^f(\cdot, 0) = y$; the reachable set is $\mathcal{U} = \{u^f(\cdot,0) \mid f \in \mathcal{F}\}$; the subspace of unreachable states is $\mathcal{D} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}$. The main subject of the paper is the structure of $\mathcal{U}$ and $\mathcal{D}$. We present an example of the finite energy solution u^f satisfying $u^f|_{|x|<|t|} = 0$, i.e., vanishing simultaneously in the past and future cones (reversing wave) and introduce the set of points at which such a "revers effect"occurs. The existence of the reversing waves turns out to be equivalent to the lack of controllability $\mathcal{D} \neq \{0\}$. Cauchy data of such waves belong to the classes $D_{\mp}$ of the incoming and outgoing data simultaneously, providing $D_- \cap D_+ \neq \{0\}$. We also describe the simple conditions on f ensuring $\|u^f(\cdot,t)\|_{\mathcal{H}} \leq c\|f\|_{\mathcal{F}}$ for all $t \in (-\infty, \infty)$.

Численные алгоритмы без насыщения для задачи Неймана в случае трехмерного уравнения Лапласа

Белых В. Н. (г. Новосибирск)

Построен принципиально новый – *ненасыщаемый* (см. [1],[2]) – метод численного решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа в случае C^∞-гладкого тела вращения достаточно произвольной формы. Полученный результат имеет принципиальный интерес, поскольку в случае C^∞-гладкого решения построенный численный метод с точностью до медленно растущего множителя $O(\ln^2 n)$ реализует абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности $O(e^{-n\varrho})$, $\varrho = const$, n – число свободных параметров у функций, из которых конструируется приближение. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровских n-поперечников компакта C^∞-гладких (аналитических) функций, содержащего решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид $O(e^{-n\varrho})$.

В качестве тестового примера с высокой точностью численно решена задача внешнего безотрывного обтекания потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости эллипсоида вращения с удлинением, равным 1000 (см. [3]). Отметим, что эллипсоид вращения, с удлинением, равным 25, становится уже непреодолимым препятствием для любых насыщаемых, т.е. с главным членом погрешности, вычислительных методов таких, как методы конечных разностей, конечных элементов и т.п.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-00250-а.

Литература

[1] Бабенко К. И. *Основы численного анализа.* М.; Ижевск: РХД. 2002. 847с.

[2] Белых В. Н. СМЖ. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.

[3] Белых В. Н. ПМТФ. 2006. Т. 47. № 5. С. 56-67.

Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша

Беспалов М.С. (Владимирский государственный университет)

Фреймом Парсеваля (жестким фреймом с границами 1) в m-мерном действительном пространстве согласно определению [1, с. 74] служит полный набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$, позволяющий восстановить произвольный элемент $f = \sum_{k=1}^M (f, \varphi_k)\varphi_k$.

Пример фрейма Парсеваля в $\mathbb{R}^2$ (получается "нормировкой" системы "мерседес" [2, с. 100]) и в $\mathbb{R}^3$ есть набор векторов из центра правильного треугольника (в случае $\mathbb{R}^2$ или тетраэдра в случае $\mathbb{R}^3$) со стороной $\sqrt{2}$ в его вершины. В [3] дано описание фреймов Парсеваля при $M = m + 1$.

Обозначим W, H, U – матрицы порядка 2^n дискретного преобразования Уолша (ДПУ) в нумерациях Пэли, Адамара и Уолша соответственно; A – любую из ортогональных матриц $\frac{1}{\lambda}W$, $\frac{1}{\lambda}H$, $\frac{1}{\lambda}U$, где $\lambda = \sqrt{2^n}$.

Предложение. *Для матриц ДПУ алгебраическая кратность собственных чисел $\lambda_1 = -\lambda$ и $\lambda_2 = \lambda$ совпадает с их геометрической кратностью и равна: 2^{n-1} для H и U; $(2^n - \lambda)/2$ для числа λ_1 и $(2^n + \lambda)/2$ для числа λ_2 в случае четного n для матрицы W.*

Пространство $\mathbb{R}^{2^n}$ распадается на прямую сумму $E_1 \oplus E_2$ подпространств указанной размерности таких, что $Ax = -x$ для всех $x \in E_1$, $Ax = x$ для всех $x \in E_2$. Оператор с матрицами $\frac{1}{2}(I - A)$ или $\frac{1}{2}(I + A)$ есть ортогональный проектор на E_1 или E_2 соответственно.

Столбцы матриц $\frac{1}{2}(I - A)$ и $\frac{1}{2}(I + A)$ есть фрейм Парсеваля в E_1 и E_2 соответственно. Для $n = 2$ и нумерации Пэли столбцы $\frac{1}{2}(I + A)$ есть описанный выше (при смене знака первого столбца) фрейм Парсеваля в трехмерном пространстве E_2. Доказательство для $n = 4$ и W в [4]. В [5] аналогичная конструкция построена для преобразования Уолша.

Литература

[1] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. - М.:ФИЗМАТЛИТ. 2005.

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. - Ижевск: НИЦ РХД. 2001.

[3] Bespalov M.S. // Int. conf. WAVELETS AND SPLINES.2003. Abstracts. St.Petersburg. 2003. p. 12-14.

[4] Беспалов М.С. // Современная математика и ее приложения. - Т. 38, ч. 3. Тбилиси. 2006. с. 28-36.

[5] Беспалов М.С. // Изв. ВУЗОВ. сер.мат. №3(526). 2006. с. 9-23.

Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations

Beyn W.-J. (University of Bielefeld), Pastor V.J. (University of Valencia), Piskarev S. (Lomonosov Moscow State University)

This paper is devoted to the numerical analysis of abstract semilinear parabolic problem $u'(t) = Au(t) + f(u(t)), u(0) = u^0$, in some general Banach space E. We prove shadowing Theorems that compare solutions of the continuous problem with those of discrete approximation in time. It is well-known fact (see [1,2,3]) that the phase space in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium can be split in a such way that the original initial value problem is reduced to initial value problems with exponential decaying solutions in opposite time direction. We use a compactness principle to show that the decomposition of the flow into growing and decaying solutions persists for this general type of spatial approximation including time discretization by some implicit Euler method.

The main assumption of our results are naturally satisfied for operators with compact resolvents and can be verified for finite element as well as finite difference methods.

References

[1] *W.-J. Beyn, S. Piskarev.* Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. Submitted to Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.

[2] *W.-J. Beyn.* On the numerical approximation of phase portraits near stationary points. SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987), no. 5, 1095–1113.

[3] *Stig Larsson, J.-M. Sanz-Serna.* A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations. Math. Comp. 68 (1999), no. 225, 55–72.

Сингулярная задача Римана — Гильберта и ее приложение к физике плазмы

Безродных С. И. , Власов В. И. (г. Москва)

Пусть $\{x_k\} := \{x_0, x_1, \dots, x_K\}$ — конечное множество точек на границе $\mathbb{R}$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$, причем $x_0 := \infty$, а $n_0, n_1, \dots, n_K$ — заданные числа из $\mathbb{Z}^+$. Рассмотрим задачу (Римана — Гильберта) об отыскании аналитической в $\mathbb{H}^+$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{x_k\}$ функции $\mathcal{P}^+(z)$, удовлетворяющей на $\mathbb{R} \setminus \{x_k\}$ условию $\operatorname{Re}\left[h(x)\mathcal{P}^+(x)\right] = c(x)$ с кусочно–гёльдеровыми h и c (возможно, имеющими разрывы в x_k), в точках $x_1, x_2, \dots, x_K$ удовлетворяющей следующим асимптотическим при $z \to x_k$ условиям: $\mathcal{P}^+ = \mathcal{O}\left[(z - x_k)^{\alpha_k - n_k}\right]$, если $n_k \neq 0$, и $\mathcal{P}^+ = \mathcal{O}(1)$, если $n_k = 0$, а в $x_0 = \infty$ — условию $\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{O}(z^{\alpha_0 + n_0})$, $z \to \infty$. Здесь α_k — дробная часть величины $\pi^{-1}\left[\arg h(x_k + 0) - \arg h(x_k - 0)\right]$ при $k \neq 0$ и величины $\pi^{-1}\left[\arg h(+\infty) - \arg h(-\infty)\right]$ при $k = 0$; соответствующие целые части обозначаем $\varkappa_k$ и $\varkappa_0$. Пусть все $\alpha_k > 0$.

Теорема. (i) *Если индекс* $\varkappa := n_0 - \varkappa_0 + \sum_{k=1}^{K}(\varkappa_k + n_k)$ *неотрицателен, то решение* $\mathcal{P}^+$ *поставленной задачи имеет вид* $\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{X}^+(z)\Big[P_\varkappa(z) + (\pi i)^{-1}\mathcal{S}(z) \times$ $\times \int_{\mathbb{R}} c(t)\left[\mathcal{S}(t)\, h(t)\, \mathcal{X}^+(t)\,(t - z)\right]^{-1} dt\Big]$, *где* $P_\varkappa(z)$ — *произвольный полином степени* $\varkappa$ *с вещественными коэффициентами,* $\mathcal{X}^+(z) := \prod_{k=1}^{K}(z - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k} \exp[\mathcal{M}^+(z)]$ — *каноническое решение задачи,*

$$\mathcal{M}^\pm(z) := \frac{z - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{[\pi/2 - \arg h(t)]\, dt}{(t - \delta)\,(t - \zeta)}, \quad \mathcal{S}(z) := (z - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}}\,(z^2 + 1)^{[\varkappa/2]};$$

здесь $\delta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$.

(ii) *Если* $\varkappa = -1$, *то единственным решением* $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ *рассматриваемой задачи является функция* $\mathcal{P}^+(z) = (\pi i)^{-1}\mathcal{X}^+(z) \int_{\mathbb{R}} c(t)\left[h(t)\, \mathcal{X}^+(t)\,(t - z)\right]^{-1} dt$.

Если $\varkappa < -1$ *и выполняются условия разрешимости* $\int_{\mathbb{R}} t^k c(t)\left[h(t)\, \mathcal{X}^+(t)\right]^{-1} dt = 0$ *при* $k = 0, 1, \dots, |\varkappa| - 2$, *то единственное решение задачи дается той же формулой. Если же* $\varkappa < -1$ *и условия разрешимости не выполнены, то эта задача не имеет решений.*

Приведенные результаты были применены при реализации модели пересоединения магнитного поля, сводящейся к задаче Римана — Гильберта с кусочно–гёльдеро-выми коэффициентами и условиями роста в некоторых точках границы области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503), программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3 и программы РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики".

Усреднение многочастотных систем дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом

Бигун Я.И. (Черновицкий национальный университет, Украина)

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, x, x_\theta)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta), \tag{1}$$

где ε – малый параметр, $\tau = \varepsilon t$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T^m$, $m \geq 1$, $x_\theta(\tau) = x(\theta\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$, $\theta \in (0,1)$.

Принцип усреднения по быстрым переменным для двучастотной системы с аналитическими правыми частями без запаздывания обоснован В.И.Арнольдом. В данной работе, используя идеи А.М.Самойленко и Р.И.Петришина, метод усреднения обоснован на конечном промежутке и полуоси для $m-$частотной системы с переменным запаздыванием.

Усредненная по переменным φ, φ_θ система имеет вид

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\theta), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\theta)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\theta).$$

Предполагается, что существует единственное решение $\overline{x} = \overline{x}(\tau)$ и $x(\tau) \in D - \rho$ $\forall\tau$ и определитель Вронского по системе функций $\{\omega(\tau), \omega(\theta\tau)\}$ отличный от нуля. Последнее условие обеспечивает незастревание системы в малой окрестности резонансов $(k, \omega(\tau)) + \theta(l, \omega(\theta\tau)) = 0$.

В случае $\omega = \omega(\tau)$ для отклонения медленных и быстрых переменных получена оценка $O(\varepsilon^{1/(2m)})$, если вектор частот $\omega = \omega(\tau, x, x_\theta)$, то имеет место оценка $O(\varepsilon^\alpha)$, где $\alpha \in (0, 1/2]$, только для медленных переменных.

Полученные оценки используются для исследования разрешимости системы (1) с многоточечными и интегральными краевыми условиями и обоснования для таких задач метода усреднения.

Литература

[1] Бигун Я.И. Усреднение колебательных систем с запаздыванием и интегральными краевыми условиями *Укр. мат. журн.* – 2004. – **56**, № 2. – С. 257 – 263.

Новые условия коммутирования проекторов и их приложения

Бикчентаев А. М. (г. Казань)

Хорошо известно, что самосопряженные операторы A и B перестановочны тогда и только тогда, когда перестановочны между собой все проекторы $E^A(\lambda)$ и $E^B(\mu)$ из разложений единицы этих операторов. Поэтому *задача нахождения различных условий перестановочности проекторов* постоянно привлекают внимание исследователей.

В сообщении будут доказаны новые условия перестановочности проекторов P и Q из C^*-алгебры Риккарта в терминах носителя оператора PQP, а также в терминах верхней (нижней) грани $P \bigvee Q$ (соответственно, $P \bigwedge Q$) в решетке всех проекторов алгебры [1]. Эти условия оказались полезными в *задаче характеризации следа* в классе всех весов на алгебрах фон Неймана [2]. Новая характеризация охватывает и след Диксмье τ_ω на $B(H)$; τ_ω полностью отличен от канонического следа tr и не нормален. След τ_ω имеет приложения в некоммутативной геометрии, в теории гравитации, в теории поля и физике частиц.

Работа поддержана РФФИ, грант 05-01-00799.

Литература

[1] Бикчентаев А. М. // *Матем. сборник*, (в печати).
[2] Бикчентаев А. М. // *Функц. анализ и его прил.*, (в печати).

Об убывании решений задачи Риккье для эллиптических уравнений четвертого и шестого порядка в неограниченной области

Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М. (г. Уфа)

В неограниченной области $\Omega = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n, \big|\, |x'| < f(x_1),\ x_1 > 0\}$ n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается эллиптический оператор $Lu = L_0u + L_1u - du$,

$$L_0u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}, \quad L_1u = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}.$$

Функция f с положительной производной предполагается трижды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей неравенству

$$f'(r) + |f(r)f''(r)(f'(r))^{-2}| + |f(r)f'''(r)(f'(r))^{-3}| \leq F, \quad r \geq D.$$

Коэффициенты оператора непрерывны в $\overline{\Omega}$, d — неотрицательная постоянная. Коэффициенты a_{ij} симметричны $a_{ij} = a_{ji}$ и удовлетворяют при всех $x \in \Omega$ условию равномерной эллиптичности с постоянными γ и 1.

На границе области $\partial\Omega$ заданы краевые условия первого и третьего типа $u\big|_{x\in\Gamma_1} = 0$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right)\Big|_{x\in\Gamma_2} = 0$. Здесь Γ_1, Γ_2 произвольные множества, такие, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \neq \varnothing$; N — конормаль, $\sigma(x) \geq 0$ — измеримая функция на $\partial\Omega$.

Целью работы является установление скорости убывания решений при $x \to \infty$ для уравнений $L^m u = \Phi$ при значениях $m = 2, 3$ и функции Φ с ограниченным носителем.

Определим функцию $g(x)$ условиями $g(x) = x_1$ при $m = 2$, если $\Gamma_2 = \emptyset$. В оставшихся случаях положим $g(x) = h^{-1}\left(\dfrac{|x'|^2}{2} + h(x_1)\right)$, где $h' = \dfrac{f}{f'}$, h^{-1} — обратная функция к h.

Пусть $\Omega(a,r) = \{x \in \Omega \mid a < g(x) < r\}$, $\Omega(r) = \Omega(-\infty, r)$. Положим $\lambda(r) = \lambda(-\infty, r)$, где

$$\lambda(a,b) = \inf\left\{\int\limits_{\Omega(a,b)} (\gamma|\nabla g|^2 + dg^2)\,dx \Big| g \in C_0^\infty(R^n\backslash\Gamma_1), \int\limits_{\Omega(a,b)} g^2\,dx = 1\right\}.$$

Будем предполагать, что $\operatorname{div} b = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i)_{x_i} = 0$, $b|_{\partial\Omega} = 0$. На коэффициенты будем накладывать требование

$$\sum_{j=1}^{n} |(a_{ij})_{x_j}|^2 \leq \gamma\lambda(r), \quad x \in \Omega(r/2, r)\ \|\nabla b\| \leq d/8.$$

При $m = 3$ будем предполагать, что область имеет отрицательную среднюю кривизну границы, и $L_0 = \Delta$.

Теорема . Пусть $m = 2$ или 3, функция f и коэффициенты оператора L удовлетворяют перечисленным требованиям. Тогда найдутся положительные числа μ, C такие, что для всех $r > D$ решение уравнения $L^m u = \Phi$ удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega(r,\infty))} \leq C\exp(-\mu r\lambda^{1/2}(r))\|\Phi\|_{W_2^m(\Omega)}.$$

Построены примеры решений уравнений $L^m u = \Phi$, $m = 2,3$, показывающие, что неравенство теоремы является точным в том смысле, что постоянная μ не может быть заменена на убывающую к нулю функцию $\mu(r)$.

Hamilton-Jacobi equations in the Heisenberg group

Biroli M. (Politechnic Institute of Milan)

We consider the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations in the Heisenberg group with an Hamiltonian, which depends only on the Heisenberg gradient of the unknown function and we construct a (unique) local solutions by an intrinsic characteristic method,[3], using exponential coordinates, [4]. We use the above result to prove the existence of a local solution in the case where the above Hamiltonian is multiplied by a sort of white noise (see [1], [2] where the Eiclidean case is investigated in a more general framework).

References

[1] Lions P.L., Souganidis P.E.:1998,*Fully nonlinear stochastic partial differential equations*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **326** Série I, pp. 1085-1092.

[2] Lions P.L., Souganidis P.E.:1998,*Fully nonlinear stochastic partial differential equations: non-smooth equations and applications*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **327** Série I, pp. 735-741.

[3] Tran Duc Van, Mikio Tsuj, Nguyen Duy Thai Son: 2000, *The Characteristic method and its generalizations for first order Partial Differential Equations*, Chapmanand Hall/ CRC, Boca raton-London-New York-Washington D.C..

[4] Varadarajan V.S.:1984, *Lie groups, Lie Algebras, and their representations*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

Алгоритм вычисления энтропии кос

Бирюков О. Н. (Коломенский государственный педагогический институт)

Рассматривается гомеоморфизм f двумерного диска D^2, неподвижный на границе ∂D^2, с конечным инвариантным подмножеством из n точек, лежащих во внутренности диска. Группа изотопических классов таких гомеоморфизмов изоморфна группе кос $Br(n)$ из n нитей. Для элементов этой группы существует известная классификация Нильсена-Тёрстона, согласно которой изотопические классы гомеоморфизмов гиперболической поверхности разбиваются на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Каждая коса есть либо псевдоаносовский, либо приводимый класс изотопии.

Итерации гомеоморфизма, представляющего некоторую косу, задают динамическую систему с дискретным временем. Одним из количественных показателей экспоненциального разбегания траекторий при итерациях гомеоморфизма является топологическая энтропия. В качестве энтропии косы можно рассматривать минимум топологической энтропии по соответствующему изотопическому классу. Несложно тогда показать, что энтропия косы равна натуральному логарифму максимального коэффициента растяжения среди псевдоаносовских составляющих косы.

В 1995 году М. Бествина и М. Хендел [1] предложили алгоритм, позволяющий определить, к какому классу по классификации Нильсена-Тёрстона относится данный гомеоморфизм гиперболической поверхности. В случае псевдоаносовского класса алгоритм дополнительно определял коэффициент растяжения λ, что дало возможность для псевдоаносских кос эффективно вычислять топологическую энтропию. Для приводимых кос данный алгоритм не давал никакого результата.

Можно усовершенствовать данный алгоритм, что позволит вычислять энтропию любых кос.

Литература

[1] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. Topology, 34 (1), 109-140, 1995.

Геометрическая интерпретация группы кос коксеттеровского типа B

Бирюков С. Н. (Коломенский государственный педагогический институт)

Группа кос имеет стандартное представление на множестве образующих, определённых Артином ещё в 20-х годах прошлого века. В 1998 году Бирман (Birman), Ко (Ko) и Ли (Lee) дали новое представление, которое впоследствии стало достаточно часто использоваться (например, в работах Т. Брейди (T. Brady) и Д. Краммера (D. Krammer)). В 2006 году Дэн Маргалит (Dan Margalit) и Йон МакКэммонд (Jon McCammond) в своей статье [4] предложили новую геометрическую интерпретацию для группы крашеных кос, используя имеющееся представление Бирман-Ко-Ли. Цель этой работы - развитие перечисленных результатов применительно к группе крашеных кос, ассоциированной с неприводимой системой корней типа B.

Группа кос B_n на n нитях изоморфна фундаментальной группе конфигурационного пространства $C(D^2, n)$, состоящего из неупорядоченных наборов n различных между собой точек в диске D^2: $B_n \cong \pi_1(C(D^2,n), P)$. Отмеченная точка $P = \{P_1, ..., P_n\}$ фундаментальной группы состоит из точек $P_1, ..., P_n$ диска D^2, которые мы будем называть проколами. Элементами группы кос являются классы эквивалентности движений проколов (путей в $C(D^2, n)$), при которых не меняется конфигурация проколов на диске D^2.

Определим выпуклые скручивания типа B. Добавим к имеющемуся множеству проколов на диске ещё один "выделенный" прокол. Скручиванием типа B будет обычное скручивание проколов, включая "выделенный". При этом он не может быть включён в какой-либо поддиск вместе с другими проколами.

Пусть D_A — выпукло-проколотый диск. Тогда группа крашеных кос типа B порождена выпуклыми скручиваниями типа B, и все её соотношения являются следствиями из соотношений для выпуклых скручиваний типа B. В частности, группа крашеных кос типа B изоморфна группе, определённой следующим конечным представлением.

В качестве образующих рассматриваются скручивания $T_{U,V}$ типа B, на которые накладываются указанные соотношения:

1) $T_{U,V}T_{W,Z} = T_{W,Z}T_{U,V}$, если UV и WZ не пересекаются,
2) $T_{U,V}T_{W,Z} = T_{W,Z}T_{U,V}$, если UV и WZ — вложенные пары,
3) $T_{U,VW} = T_{U,V}T_{U,W}$, если (U, V, W) — допустимое разбиение.

Литература

[1] Sofia Lambropoulou, Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manyfolds, Mathematisches Institut, Gottingen Universitat, arXiv:math. GT/0008235 v1

[2] Dan Margalit and Jon McCammond, Geometric presentations for the pure braid group, arXiv:math.GT/0603204

Метод вейвлет-Галеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн

Блатов И.А., Бубнова Н.А. (Самарский государственный университет)

Отыскание функции распределения тока и диаграммы направленности для системы тонких круглоцилиндрических проводников сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для его решения применяется метод вейвлет-Галеркина на базе сплайновых вейвлет. Использование псевдоразреженности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) позволяет применять алгоритмы технологии разреженных матриц. Изучаются свойства матриц и приводятся результаты численных расчетов.

Вычислительные трудности решения интегральных уравнений в задачах электродинамики во многом обусловлены заполненностью матриц, возникающих при их дискретизации. Это приводит к огромному объему вычислений (особенно в трехмерных задачах). Однако, как было показано в [1], в базисе из вейвлет-функций [2], большинство элементов матрицы СЛАУ оказываются очень малыми по абсолютной величине, т.е. она будет псевдоразреженной [3]. Использование этого факта позволяет существенно уменьшить объем вычислений и требования к оперативной памяти компьютера.

Литература

[1] Blatov I.A. *On estimates of the inverse matrices elements for the Galerkin method for singular integral equation based oh the spline wavelets.* Proceedings of the International conference on computational mathemat-ics. Part II. Novosibirsk, 2002. P. 356-361.

[2] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.- 464 с.

[3] Блатов И.А. *Об алгебрах операторов с псевдо-разреженными матрицами и их приложениях.* Сибирский мат. журнал. 1996. Т. 37. N 1. С. 36-59.

Вычислительные методы в контактных задачах теории упругости с односторонними связями

Бобылёв А. А. (Днепропетровский национальный университет)

Контактные задачи теории упругости с односторонними связями являются нелинейными задачами вследствие наличия граничных условий в виде неравенств. Одним из наиболее перспективных подходов к построению вычислительных алгоритмов для решения этого класса задач является использование вариационного метода. Применение аппарата преобразования вариационных задач позволяет получить семейство вариационных формулировок, включая внутренний и граничный варианты основной, двойственной и гибридных формулировок, а также вариационные формулировки для функционалов контактных граничных условий.

Для дискретизации внутренних вариационных формулировок применяется метод конечных элементов, а для дискретизации граничных формулировок – метод граничных решений на основе интегральных представлений решения и метода граничных элементов.

Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования с ограничениями в виде неравенств используются варианты методов сопряженных градиентов и последовательной верхней релаксации, а для решения задач о нахождении седловых точек используется вариант алгоритма Удзавы с переменным параметром.

Разработанные вычислительные алгоритмы реализованы в виде пакета прикладных программ. Проведен сравнительный анализ эффективности используемых вычислительных методов.

Эллиптические и параболические уравнения для мер

Богачев В. И. (г. Москва)

В докладе дается краткий обзор недавних результатов из совместных работ [1]–[4]. Пусть $A = (a^{ij})_{i,j\le d}$ и $b = (b^i)_{i\le d}$ – борелевские операторное и векторное отображения на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$, причем матрицы $A(x,t)$ симметричны и положительны. Положим

$$Lu(x,t) = \partial_t u(x,t) + a^{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x,t) + b^i(x,t)\partial_{x_i}u(x,t),$$

где ведется суммирование по повторяющимся индексам. Ограниченная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$ удовлетворяет слабому параболическому уравнению $L^*\mu = 0$, если коэффициенты a^{ij} и b^i локально μ-интегрируемы и выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d\times(0,1)} Lu(x,t)\,\mu(dx\,dt) = 0, \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,1)).$$

Аналогично определяются слабые решения эллиптического уравнения. Пусть μ имеет вид $\mu(dx\,dt) = \mu_t(dx)\,dt$, где μ_t – вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что μ имеет начальное распределение ν, если ν – такая вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, что

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \zeta(x)\,\mu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(x)\,\nu(dx), \quad \forall\, \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Пусть при некотором $p > d+2$ выполнены следующие условия на A и b: для каждого шара B есть такие числа $M_1 = M_1(B) > 0$ и $M_2 = M_2(B)$, что при всех i,j имеем

$$A(t,x) \ge M_1\cdot \mathrm{Id} \quad \forall\,(t,x)\in(0,1)\times B, \qquad \sup_{t\in(0,1)} \|a^{ij}(t,\,\cdot\,)\|_{H^{p,1}(B)} \le M_2,$$

$$\sup_{t\in(0,1)} \|b^i(t,\,\cdot\,)\|_{L^p(B)} \le M_2.$$

Теорема 1. Предположим, что существуют такие функция $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $C \ge 0$, что $\lim_{|x|\to\infty}\Psi(x) = +\infty$, для некоторой последовательности $r_n \to \infty$ множества $\Psi^{-1}(r_n)$ являются C^1-поверхностями, причем $L\Psi(t,x) \le C + C\Psi(x)$. Тогда для всякой вероятностной меры ν на $\mathbb{R}^d$ найдется семейство $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,1)}$ вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих параболическому уравнению $L^*\mu = 0$ с начальным распределением ν. Если же матрицы A и A^{-1} равномерно ограничены, функции $a^{ij}(x,t)$ равномерно липшицевы по x, выполнены оценки

$$\langle b(x,t), x\rangle \le c(1+|x|^2), \quad |b(x,t)| \le c(1+|x|^{2k})$$

при некотором $k \in \mathbb{N}$, причем начальное распределение ν обладает конечным моментом порядка $2k$ и такой плотностью ϱ, что функция $\varrho\ln\varrho$ интегрируема, то указанное решение единственно.

Литература

[1] Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. *Elliptic equations for measures: regularity and global bounds of densities.* J. Math. Pures Appl., 2006, v. 85, n 6, p. 743–757.

[2] Богачев В.И., Рекнер М., Шапошников С.В. *Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов.* Теория вероятн. и ее примен. 2007, т. 52, в. 2.

[3] Bogachev V.I., Da Prato G., Röckner M. *On parabolic equations for measures.* Comm. Partial Diff. Equations. 2007.

[4] Bogachev V.I., Da Prato D., Röckner M., Stannat W. *Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures.* Proc. London Math. Soc. 2007.

Эффективная вариационная формула для Кляйного простого множителя

Богатырев А.Б. (г. Москва)

Кляйнов простой множитель – это универсальный объект позволяющий воспроизводить мероморфные функции, дифференциалы, ядра Бергмана и Сеге на гиперболических римановых поверхностях. Предлагается вариационная формула для простого множителя в модели Шоттки.

Турбулентность в рамках слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. [3]

Богданов Р.И. , Богданов М.Р. (НИИЯФ МГУ, МГУ ИЕ)

В 60-е годы XX-го столетия в теории динамических систем появилось понятие "странного аттрактора". Спустя полвека термин "странный аттрактор"выглядит устаревшим. Однако, неожиданным было появление в общем положении свойства экспоненциального "разбегания"траекторий динамических систем. Следствием являлось стохастичность свойств решений детерменистических моделей динамики. Анализ проблем турбулентности, выполненный А.Н. Колмогоровым, позднее привёл к появлению классической теории Колмогорова-Арнольда-Мозера, где А.Н. Колмогорову принадлежит основная идея, а Арнольду и Мозеру доказательство математических теорем, лежащих в обосновании теории. В 1990-х годах появилась слабо-диссипативная версия теории Колмогорова-Арнольда-Мозера.

Классическая теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (см.[2]) изучает свойства динамических систем, представляющих собой малое возмущение вполне-интегрируемой гамильтоновой системы в классе всех гамильтоновых систем.

Слабо-диссипативная версия теории Колмогорова-Арнольда-Мозера, появившаяся в конце 90-х годов предыдущего столетия, изучает динамические системы, являющиеся малым возмущением вполне-интегрируемых гамильтоновых систем в пространстве всех гладких динамических систем.

На сегодня наиболее изученным является пример "Bogdanov map"(см.[1],[3]), в котором проявляется ряд особенностей слабо-диссипативной версии теории КАМ.

Пример "Bogdanov map"возникает при простейшей дискретизации (по полуявной схеме Эйлера первого порядка) динамической системы на прямой, возникающей в бифуркации Богданова-Такенса:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + f(x)\,\dot{x}, \tag{1}$$

[3]Работа выполнена частично при поддержке фонда РФФИ грант N 04-01-00115

где потенциал U имеет вид $U(x) = \varepsilon x + {x^3}/_3$, а коэффициент трения выбирается в виде $\mu \pm x$.

Соответственно, дискретизация по Эйлеру берётся в виде

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, y_{n+1} = y_n + kx_n (x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n) y_n, \tag{2}$$

где $k^2 = h$, а $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ - параметры модели.

При подходящем выборе малых параметров $\varepsilon, \mu \sim 10^{-5}$ система (2) может иметь порядка 10^3 периодических орбит, причём период меняется в пределах $1 \div 10^8$.

В общем положении периодические орбиты разбиваются в соответствии с топологическим типом на 3 группы: асимптотически (не)устойчивые орбиты (состояния "out", состояния "in") или гиперболические (рассеивающие центры).

В классической КАМ-теории асимптотически (не)устойчивые орбиты не реализуются, а в общем положении имеют место эллиптические орбиты.

Оценка числа Рейнольдса.

Периодические орбиты, отображения (3) позволяют вычислять адиабатические инварианты динамики. В частности, мы имеем возможность вычислить среднюю вдоль периодической орбиты работу сил диссипации

$$\delta\widehat{A} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon + \mu x_j)\, \dot{x}_j \dot{x}_j \Delta t, \tag{3}$$

а также изменение объёма

$$\delta\widehat{V} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{Dg^j(x)}{Dx} \tag{4}$$

и, следовательно, давление в адиабатическом приближении

$$\delta\widehat{A} - pd\widehat{V} = 0 \Leftrightarrow p = {\delta\widehat{A}}\Big/_{\delta\widehat{V}}. \tag{5}$$

С учётом средних сил трения

$$\widehat{F_{mp}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon + \mu x_j)\, \dot{x}_j,$$

мы получаем распределение чисел Рейнольдса в виде

$$\mathrm{Re} = F_{pres}/F_{visc}. \tag{6}$$

Расчёты показывают, что число Рейнольдса изменяется в пределах 5-ти порядков при изменении периода периодических орбит от 1 до 10^8.

Замечание. С увеличением периода число Рейнольдса уменьшается. Увеличение периода асимптотически (не)устойчивых орбит (т.е. уменьшение масштабов вихрей) происходит по мере приближения к "странному"гиперболическому аттрактору в фазовом пространстве. Поэтому крупномасштабные вихри заменяются мелкомасштабными после чего наблюдается диффузионная динамика пробной частицы (см.[4],[5]).

Литература

[1] Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov-map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system// International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3. №4, p. 803-842.

[2] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978, 304 с.

[3] Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М.: Вузовская книга, 2003. 376 с.

[4] Богданов Р.И., Богданов М.Р. Переход от развитой турбулентности к квазиравновесному состоянию. // Научный вестник МГТУГА, № 114, серия Математика и Физика. М.: МГТУ ГА, 2007, с. 4-10.

О спектральных свойствах краевой задачи для оператора Лапласа.

Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А., Свешников А. Г. (Москва)

Простейшая краевая задача может быть поставлена как задача об отыскании по заданным области U в $\mathbb{R}^n$, кусочно непрерывной функции f в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем и комплексному параметру λ элемента $v \in WU$, удовлетворяющего в обобщенном смысле уравнению $\Delta v + \lambda v = f$. Классические теоремы о спектрах краевых задач были установлены Фр. Реллихом, Д. Джонсом и М.Ш. Бирманом в середине 20 века, в 1990-х годах был достигнут значительный прогресс в исследовании областей, представляющих собой волноводы. В наших работах спектры этой задачи рассматриваются как функции области U, о которых удается доказать следующее:

1. Если области U_1 и U_2 совпадают вне компакта, то $\sigma_{ess}U_1 = \sigma_{ess}U_2$. Эта теорема позволяет вычислять существенный спектр в случае, когда область с произвольной границей вне компакта совпадает с областью, в которой делятся переменные. (Для случая достаточно гладкой границы эта теорема была установлена М.Ш. Бирманом.)

2. Для любой области U в $\mathbb{R}^n$ с какой угодно границей существенный спектр имеет вид $\sigma_{ess}U = [a, +\infty)$, где $a \geq 0$, иными словами существенный спектр не имеет лакун.

3. Пусть F — гладкая поверхность, делящая $\mathbb{R}^n$ на две области U и V, и пусть $\mathbf{n}$ — ее единичная нормаль. Если существует такой постоянный вектор $\vec{a}$, что скалярное произведение $(\vec{a}, \mathbf{n}) \geq 0$ вдоль всей границы ∂U и $(\vec{a}, \mathbf{n}) > 0$ на некотором ее участке, то $\sigma_{disc}U = \sigma_{disc}V = \emptyset$. (Это утверждение обобщает критерий пустоты дискретного спектра, указанный Реллихом) Условие гладкости границы существенно: контрпример фактически был построен П. Экснером в 1991.

О размерностях ядра и коядра в плоской эллиптической краевой задаче с кусочно-гладкими линиями разрыва коэффициентов.

Боговский М. Е., Матрёхина А. А. (г. Москва)

Рассматриваются обобщенные постановки краевых задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения $\operatorname{div}(A\nabla u) = \operatorname{div} f$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей класса C^1, где матрица $A = A(x)$ предполагается вещественной симметричной и кусочно-постоянной. Рассматриваются как ограниченные, так и неограниченные области Ω с компактными границами. Кусочно-гладкие линии $\{\Gamma_k\}$ разрыва коэффициентов $\{A_{ij}\}$ делят область Ω на конечное число подобластей $\{\Omega_m\}$. В случае неограниченной Ω подобласти $\{\Omega_m\}$ и кривые $\{\Gamma_k\}$ могут оказаться неограниченными. На каждой кривой Γ_k задаются обычные условия сопряжения, т. е. условия непрерывности решения u и его производной по конормали $\nu_A = A\nu$, где ν — единичная нормаль к кривой Γ_k. Обобщенное решение ищется в классе$\nabla u \in L_p$, $p \in (1, \infty)$ с заданной вектор-функцией f. Точки негладкости кривых $\{\Gamma_k\}$, их пересечения как между собой, так и с границей $\partial\Omega$ будут особыми точками рассматриваемых обобщенных решений. Здесь для простоты предполагается, что ни одна кривая $\{\Gamma_k\}$ не касается $\partial\Omega \in C^1$. Множество всех особых точек предполагается конечным. Отметим, что в случае гладких непересекающихся линий разрыва коэффициентов рассматриваемая задача была исследована Е.М. Ильиным (1973 г.) в ограниченной области Ω при $p = 2$ в классе решений с односторонней гладкостью W_2^2.

В случае одинаковой знакоопределенности всех матриц $\mathbb{A}_m = A|_{\Omega_m}$ мы вычисляем размерности ядра и коядра рассматриваемого эллиптического оператора в смысле соответствующей обобощенной постановки. При наличии противоположной знакоопределенности каких-либо матриц $\mathbb{A}_m$ размерности ядра и коядра оцениваются снизу. Отметим, что не имеющий прикладного значения случай разной знакоопределенности матриц $\mathbb{A}_m$ существенно сложнее естественного случая одинаковой знакоопределенности.

Полученные результаты проиллюстрируем на простом примере задачи Дирихле в круге $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < 1\}$ с одной линией разрыва коэффициентов, имеющей одну угловую точку строго внутри Ω, когда углы пересечения линий разрыва коэффициентов с $\partial\Omega$ являются прямыми, а матрицы $\mathbb{A}_1 = E$, $\mathbb{A}_2 = \varkappa E$ с единичной матрицей E и любым вещественным положительным $\varkappa \neq 1$. При сделанных предположениях найдется такое $\mu \in (0,1)$, что $\dim \operatorname{Ker} = \dim \operatorname{CoKer} = 0$ при $2/(1+\mu) < p < 2/(1-\mu)$, $\dim \operatorname{Ker} = 1$ и $\dim \operatorname{CoKer} = 0$ при $p < 2/(1+\mu)$, $\dim \operatorname{Ker} = 0$ и $\dim \operatorname{CoKer} = 1$ при $p > 2/(1-\mu)$, $\dim \operatorname{Ker} = 0$ и $\dim \operatorname{CoKer} = \infty$ при $p = 2/(1 \pm \mu)$.

Рассматриваемые задачи описывают, в частности, стационарную теплопроводность многокомпонентных твердых тел, например, композитов, когда каждая компонента имеет свой коэффициент теплопроводности, а поверхности разрыва коэффициента теплопроводности не являются гладкими. Даже если смежные коэффициенты теплопроводности отличаются сколь угодно мало, негладкости поверхностей разрыва могут порождать особенности решений — в частности, неограниченность градиента решения. Другим приложением является теория упругости многокомпонентных материалов, например, задача о равновесии неоднородной многокомпонентной мембраны.

Asymptotics for the solutions of elliptic systems with rapidly oscillating coefficients

Borisov D. (Ufa, Russia)

Let $x = (x_1, \dots, x_d)$ be Cartesian coordinates in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, $B = B(\zeta)$ be a matrix-valued function, $B(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{d} B_i \zeta_i$, where $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$, and B_i are constant $m \times n$-matrix with complex-valued entries. We assume that $m \geqslant n$, and $\operatorname{rank} B(\zeta) = n$, $\zeta \neq 0$. In the space $\mathbb{R}^d$ we introduce a lattice, its elementary cell is denoted by $\square$. By we $A = A(x,\xi)$ denote the matrix-valued function of the size $m \times m$ being hermitian, $\square$-periodic w.r.t. ξ, and satisfying the uniform in $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ estimate $c_1 E_m \leqslant A(x,\xi) \leqslant c_2 E_m$. We employ the symbols $V = V(x,\xi)$, $a_i = a_i(x,\xi)$ to denote $\square$-periodic w.r.t. ξ matrix-valued functions of the size $n \times n$. The matrix V is assumed to be hermitian, the matrix a_j and B_j are supposed to be complex-valued. Let $b_i = b_i(x)$ be $n \times n$-matrix-valued functions with complex entries. We suppose that all the matrices introduced are smooth enough and bounded as well as some of their derivatives.

The aim of the work is the studying of the resolvent and the spectrum of the self-adjoint operator

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -B(\partial)^* A_\varepsilon B(\partial) + a_\varepsilon(x,\partial) + V_\varepsilon,$$
$$a_\varepsilon(x,\partial) := \sum_{i=1}^{d} a_i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_i b_i(x) - b_i^*(x)\partial_i a_i^*\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, having $W^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ as the domain. Here $\partial := (\partial_1,\ldots,\partial_d)$, ∂_i is the derivative w.r.t. x_i.

We obtain the homogenized operator and establish the first two terms of the asymptotics expansion for the resolvent of $\mathcal{H}_\varepsilon$ in the uniform norm. The convergence of spectrum is proven. We also construct complete asymptotics expansions for the eigenvalues converging to the isolated one of the homogenized operator. The asymptotics expansions for the associated eigenfunctions are established, too.

The work is partially supported by RFBR (07-01-00037). The author gratefully acknowledges the support from Deligne 2004 Balzan prize in mathematics.

Модули Соболева-Клиффорда и лево-моногенные функции

Боровиков И. А. (г. Москва)

Пусть A_n — 2^n-мерная алгебра Клиффорда над полем R вещественных чисел и $G \subset R^{n+1}$ — ограниченная область с гладкой границей. Определим правый A_n-модуль Соболева-Клиффорда для $1 < p < \infty$, $m \in N$ как

$$W_p^m(G, A_n) = \{u \in {A_n}^G : \forall\alpha\ u_\alpha \in W_p^m(G)\}.$$

На нем естественным образом вводится норма, как на векторном пространстве над полем R, в которой действие алгебры A_n непрерывно. Для отрицательных m строится правый сопряженный A_n-модуль.

Далее, введем операторы клиффордова анализа (см. [2])

$$\partial = D_{x_0} - D \quad \text{и} \quad \bar\partial = D_{x_0} + D, \text{ где}$$
$$D = \sum_{k=1}^{n} e_k D_{x_k} \text{— оператор Дирака.}$$

Подмодуль лево-моногенных функций модуля $W_p^m(G, A_n)$ обозначим

$$\mathcal{O}_p^m(G, A_n) = \{u \in W_p^m(G, A_n) : \bar\partial u = 0\}.$$

(Именно для этого вводились правые модули $W_p^m(G, A_n)$; чтобы изучать право-моногенные функции, нужно рассматривать $W_p^m(G, A_n)$ как левые A_n-модули.)

Теорема. Пусть $m \in Z$, $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Тогда имеют место представление $W_p^m(G, A_n)$ в виде прямой суммы

$$W_p^m(G, A_n) = \mathcal{O}_p^m(G, A_n) \oplus \operatorname{ann} \mathcal{O}_{p'}^{-m}(G, A_n),$$

а также изоморфизм

$$\partial : W_{p,0}^{m+1}(G, A_n) \to \operatorname{ann} \mathcal{O}_{p'}^{-m}(G, A_n),$$

$$\text{где } W_{p,0}^{m+1}(G, A_n) = \begin{cases} (W_p^{m+1} \cap \mathring{W}_p^1)(G, A_n), & \text{если } m \geqslant 0, \\ W_p^{m+1}(G, A_n), & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

Разложение из данной теоремы при $m \geqslant 0$ известно и было установленно в [1]. Но там модули $W_p^m(G, A_n)$ рассматривались только как нормированные пространства над полем R и, соответственно, при отрицательных m строились сопряженные нормированные пространства, что не соответствует структуре изучаемых объектов. Здесь же при отрицательных m установлено разложение A_n-модулей Соболева-Клиффорда, что делает теорию замкнутой 9ирамках клиффордова анализа.

Разложение теоремы позволило изучать вариационные задачи на подмодуле лево-моногенных функций: описывать включения Эйлера соответствующих вариационных задач в виде нелинейного уравнения с частными производными для минимизирующей лево-моногенной функции и дополнительного комоногенного потенциала.

Литература

[1] Dubinskii Ju., Reissig M. *Variational problems in Clifford analysis. Math. Meth. Appl. Sci. 2002; 25: 1161–1176.*

[2] Ryan J. ed. *Clifford Algebras in Analysis and Related Topics. CRC PRESS, 1996.*

Уравнение эйконала для неоднородной среды

Боровских А. В. (ФГП МГУ)

Приводится классификация уравнений эйконала для трехмерной неоднородной стационарной изотропной среды

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y,z)}$$

и для двумерной неоднородной среды

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y)}.$$

Классификация представляет собой расслоение семейства уравнений на классы эквивалентных уравнений и иерархизацию классов в соответствии с вложением соответствующих групп симметрий. Для двумерных уравнений приводятся условия эквивалентности двух уравнений и условия, при которых среда является слоистой.

Для трехмерных уравнений получена связь между размерностью группы симметрий уравнения и характером среды.

Среда является однородной, если все собственные значения тензора Риччи, порожденного метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/v^2(x, y, z)$ являются константами (в этом случае группа симметрий имеет размерность 15), "слоистой", если не все они константы, но попарно функционально зависимы между собой (для такой среды группа симметрий имеет размерность от 4 до 6), "струистой", если ранг матрицы Якоби для этой системы инвариантов имеет ранг, равный двум (тогда группа симметрий двумерна), и "неструктурированной", если этот ранг равен трем (для нее группа симметрий одномерна).

Для уравнений с "большой"группой симметрий получены явные формулы для фронта волны точечного источника и для лучей.

Работа поддержана грантами РФФИ N 04-01-00049, 04-01-00697.

Компактные экстремумы вариационных функционалов в пространстве Соболева W_2^1

Божонок Е. В. (г. Симферополь)

Как известно, в гильбертовых пространствах Соболева типа W_2^1 дифференциальные и экстремальные свойства основного вариационного функционала существенно хуже, чем в банаховых пространствах типа C^1. В связи с этим в [1] и других работах было введено понятие компактного экстремума (К-экстремума) функционала и соответствующие понятия К-дифференцируемости и К-непрерывности, развита теория К-экстремумов. Выяснилось, что К-экстремумы и (повторная) К-дифференцируемость типичны для основного вариационного функционала типа

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \quad y(\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([a;b], H), \tag{1}$$

где H – гильбертово или ядерное пространство.

В настоящем докладе для функционала (1) рассмотрены условия корректной определенности, К-непрерывности и (повторной) К-дифференцируемости (см. [2]). На случай К-экстремума функционала типа (1) обобщены классические необходимое условие Лежандра и достаточное условие Лежандра-Якоби, как для функционалов от одной переменной, так и для функционалов от многих переменных (см. [3]). Рассмотрены примеры.

Литература

[1] Орлов И.В. *К-дифференцируемость и К-экстремумы*//Український математичний вісник.–2006. – Т.3. – №1. – С. 97-115.

[2] Орлов И. В., Божонок Е. В. *Условия существования K-непрерывности и K-дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1*//Ученые Записки ТНУ. — 2006. — Т.19(58), № 2. — С.10-32.

[3] Божонок К.В., Орлов И. В. *Умови Лежандра-Якобі для компактних екстремумів інтегральних функціоналів*//Доповіді НАН України. – 2006. – № 11. – С. 11-15.

Stability of spatial dynamics for hypercycles in model of prebiological evolution

Bratus' A.S. (Moscow University of Transport Means (MIIT)), Posviansky V.P. (Applied Mathematics Department)

The system of semi-linear parabolic equations which described a mathematical model of natural selforganization is considered [1,2].

Denote by $u_i(x,t)$ $(0 \le x \le l, t \ge 0)$ the density of i–th type of macromolecule. The differential equations for the growth macromolecules in the cases of autocatalyzing and hypercycles respectively has the form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i\left(k_i u_i^p - f_1(t)\right) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\,, \quad u_i(x,0) = \varphi_i(x)\,, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = 0\,;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i\left(k_i u_{i-1}^p - f_2(t)\right) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\,, \quad u_i(x,0) = \psi_i(x)\,, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = 0,$$

$$u_0 = u_n, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

Here p is a parameter, $0 < p < 2$, k is the replication rate, $f_1(t)$, $f_2(t)$ are the following functionals

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l k_i u_i^{p+1}(x,t)dx\,, \quad f_2(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l k_i u_i(x,t) u_{i-1}^p(x,t)dx\,,$$

which assures the integral condition of constancy summary densities u_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 u_i(x)dx = 1\,.$$

Consider the problem of existence and stability of nontrivial solution for the corresponding steady state problem

$$\begin{array}{llll} d_i u_i'' + u_i(k_i u_i - \overline{f_1}) = 0\,, & u_i'(0) = u_i'(l) = 0, & & i = 1,2\ldots n\,; \\ d_i u_i'' + u_i(k_i u_{i-1} - \overline{f_2}) = 0\,, & u_i'(0) = u_i'(l) = 0, & u_0 = u_n, & i = 1,2\ldots n\,. \end{array}$$

Theorem. If the following inequality takes place

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{k_i} < \left(\frac{p}{\pi^2}\right)^{1/p}$$

then in the Sobolev space there exist nontrivial stable solutions of steady state problems. For sufficiently small d_i these solutions are cycles of arbitrarily large length. The results of numerical solution of steady state problem and the initial boundary value problem with the help of Galerkin method are presented.

References

[1] M.Eigen, P. Shuster. The Hypercycle: The principal of natural selforganization. Berlin-Heidelberg. Springer, 1979.

[2] J. Hoffbauer, K. Sigmund. The theory of evolution and dynamical system. Cambridge University Press, 1988.

Обобщенные резольвенты линейных отношений, порожденных дифференциальным выражением гиперболического типа

Брук В.М. (Саратов, СГТУ)

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство; $A(t)$ - сильно измеримая на отрезке $[a,b]$ функция, значения которой - ограниченные неотрицательные операторы в H; норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[a,b]$. Обозначим $l[y] = y'' + \mathcal{A}_1(t)y + q(t)$, где $q(t) = q^*(t)$ - ограниченные операторы, функция $q(t)$ сильно непрерывна на $[a,b]$; операторы $\mathcal{A}_1(t)$ таковы, что $\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_1^*(t) > \gamma E$ $(\gamma > 0)$; область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ не зависит от t; функция $\mathcal{A}_1(t)x$ сильно непрерывно дифференцируема при любом $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. Выражение $l[y]$ и функция $A(t)$ порождают в пространстве $\mathrm{B} = L_2(H, A(t); a, b)$ минимальное L_0 и максимальное L_0^* отношения, $L_0 \subset L_0^*$. Для описания обобщенных резольвент отношения L_0 введем обозначения: $W_j(t,\lambda)$ - операторное решение уравнения $l[y] = \lambda A(t)y$, удовлетворяющее начальным условиям $W_j^{(k-1)}(a,\lambda) = (-1)^{j+1}\delta_{jk}E$ (δ_{jk} - символ Кронекера, $j,k = 1,2$);

$W(t,\lambda)=(W_1(t,\lambda),W_2(t,\lambda))$ - операторная однострочная матрица; Q_0 - множество таких $x\in H^2$, что $A(t)W(t,0)x=0$ почти всюду; $Q=H^2\ominus Q_0$; Q_- - пополнение Q по норме $\|W(t,0)x\|_{\mathrm{B}}$; Q_+ - позитивное пространство относительно Q, Q_-; J - матрица второго порядка, первая строка которой - $(0,-E)$, вторая - $(E,0)$.

Теорема. *Всякая обобщенная резольвента* R_λ *отношения* L_0 *является интегральным оператором* $R_\lambda f = \int_a^b K(t,s,\lambda)A(s)f(s)ds$ *с ядром* $K(t,s,\lambda) = W(t,\lambda)(M(\lambda)+(1/2)\mathrm{sgn}(s-t)J)W^*(s,\bar\lambda)$, *где* $M(\lambda)$ *- голоморфная при* $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ *операторная функция, значения которой ограниченные операторы из* Q_+ *в* Q_- *такие, что* $M^*(\lambda)=M(\bar\lambda)$ *и* $(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}(M(\lambda)x,x)\geqslant 0$ *для всех* $x\in Q_+$.

В этой теореме предполагается, что R_λ порождается самосопряженным расширением с выходом в гильбертово пространство. Можно дать необходимое и достаточное условие на функцию $M(\lambda)$, чтобы R_λ порождалась самосопряженным расширением с выходом в пространство Понтрягина Π_κ.

POWER GEOMETRY AS NEW MATHEMATICS

Bruno A.D. (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow)

Power Geometry (PG) is a new calculus developing the differential calculus and aimed at nonlinear problems. The main concept of PG is the study of nonlinear problems in logarithms of original coordinates. Then many relations nonlinear in the original coordinates become linear. The algorithms of PG are based on these linear relations. They allow to simplify equations, to resolve their singularities (including singular perturbations), to isolate their first approximations, and to find asymptotics and asymptotic expansions of their solutions [1,2].

Algorithms of PG are applicable to equations of various types: algebraic, ordinary differential, and partial differential, and also to systems of such equations. These algorithms include simplifying transformations of coordinates and truncations of equations. PG is an alternative to Algebraic Geometry, Differential Algebra, Group Analysis, Nonstandard Analysis, and other disciplines.

PG was applied to problems of Mathematics (expansions of solutions to general ODEs [3] and to Painleve equations), of Mechanics (motion of a rigid body [4]), of Celestial Mechanics (rotation of a satellite [5] and the restricted three-body problem), of Hydromechanics (the boundary layer on a needle), and to problems of integrability and stability.

References

[1] A.D. Bruno. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer- Verlag: Berlin–Heidelberg, 1989. 350 p. = M.: Наука, 1979. 256 c.

[2] A.D. Bruno. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2000. 395 p. = M.: Физматлит, 1998. 288 c.

[3] A.D. Bruno. Asymptotic behavior and expansions of solutions to an ordinary differential equation // УМН 59:3 (2004) 31–80 = Russian Mathem. Surveys 59:3 (2004) 429–480.

[4] A.D. Bruno. Analysis of the Euler–Poisson equations by methods of Power Geometry and Normal Form // ПММ, 2007, т. 71, N 2, с. 192–226 = J. Applied Mathem. Mech. 71:2 (2007).

[5] A.D. Bruno. Families of periodic solutions to the Beletsky equation // Космические исследования 40:3 (2002) 295–316 = Cosmic Research 40:3 (2002) 274–295.

Энтропийное неравенство для неограниченного оператора в гильбертовом пространстве

Брусенцев А.Г. (Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова)

Пусть T - линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной в H областью определения $D(T)$, областью значений $R(T)$ и нулевым ядром. Рассмотрим семейство $\Im$ конечных, линейно независимых множеств $D_\alpha = \{f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_{n(\alpha)}(\alpha)\}$ векторов из $D(T)$. Индекс $\alpha \in \Lambda$, где Λ - направленное множество. Семейство $\Im$ назовем пробным для оператора T, если для любого вектора $h \in R(T)$ $\lim_\Lambda dist(h, H_\alpha) = 0$, где H_α линейная оболочка TD_α. Пусть $S_j(\alpha) = \sum_{i=1, i\neq j}^{n(\alpha)} |\cos(\widehat{Tf_i(\alpha), Tf_j(\alpha)})|$. Назовем нижней и верхней энтропиями оператора T относительно пробного семейства $\Im$ величины

$$W_\Im(T) = \overline{\lim}_\Lambda \Sigma_{j=1}^{n(\alpha)} S_j(\alpha), \quad V_\Im(T) = \overline{\lim}_\Lambda \left(n(\alpha) \max_j S_j(\alpha) \right)$$

соответственно. Очевидно $W_\Im(T) \le V_\Im(T)$. Назовем также энтальпией оператора T относительно пробного семейства $\Im$ величину

$$E_\Im(T) = \underline{\lim}_\Lambda \left(\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \|f_i(\alpha)\|^2 / \|Tf_i(\alpha)\|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теорема. *Пусть оператор T снабжен пробным семейством, относительно которого он имеет конечную верхнюю энтропию $V_\Im(T)$ и положительную энтальпию $E_\Im(T)$. Тогда для справедливости равенства $\overline{R(T)} = H$ необходимо и достаточно, чтобы при всех $h \in D(T^*)$ было выполнено неравенство*

$$\|T^*h\|^2 \ge E_\Im^2(T) \exp\left(-W_\Im(T) - V_\Im(T)\right) \|h\|^2.$$

В докладе приводится также пример оператора, снабженного пробным семейством $\Im$ с конечной энтропией и положительной энтальпией, и обсуждается вопрос о возможности построения такого семейства в общем случае.

Функционально-дифференциальные включения, не обладающие свойством выпуклости по переключению значений[4]

Булгаков А. И. (г. Тамбов)

В докладе рассматривается функционально-дифференциальное включение с оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. К такому включению могут привести математические модели многокомпонентных систем автоматического управления, у которых в связи с отказом тех или иных приборов и устройств объекты регулируются разными законами управления (разными правыми частями) с разными множествами допустимых значений управления, то есть закон управления объектом состоит из набора подсистем управления. Эти подсистемы могут быть как линейными так и не линейными.

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00305), темплана 1.6.07

Такие случаи возникают, например, в вопросах управления гибридными системами. Для рассматриваемого в докладе функционально-дифференциального включения нарушается равенство между множествами квазирешений и "овыпукленного" функционально-дифференциального включения, впервые установленное Т. Важевским для обыкновенных дифференциальных включений. Дело в том, что в рассматриваемом случае замыкание (в слабой топологии пространства суммируемых функций) значений многозначного отображения не совпадает с его замкнутой выпуклой оболочкой. Вследствие чего не будут выполняться фундаментальные свойства множеств решений: принцип плотности и "бэнг-бэнг" принцип. Данную ситуацию нельзя исправить никакой непрерывностью отображения, не обладающего свойством выпуклости по переключению образов.

В связи с вышесказанным для исследуемой задачи Коши вводится понятие обобщенного решения и изучаются его свойства. Доказано, что для функционально-дифференциального включения с вольтерровым по А. Н. Тихонову многозначным отображением имеет место теорема о существовании локального обобщенного решения и его продолжаемости. Это соответствует одному из сформулированных в монографии А. Ф. Филиппова (см. [1]) требований к обобщенным решениям для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Кроме того, в работе доказано, что в регулярном случае, когда многозначное отображение имеет выпуклые по переключению значения, обобщенное решение совпадает с обычным решением. В то же время, предложенное здесь обобщенное решение не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к обобщенным решениям дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Так например, предел обобщенных (в терминологии данной работы [1]) решений может не быть обобщенным решением. Это связано с тем, что многозначное отображение, с помощью которого определяется обобщенное решение не обладает свойством замкнутости в слабой топологии пространства суммируемых функций, поскольку оно может быть невыпуклозначно.

Литература

[1] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.*

Применение базисов всплесков для линейной и нелинейной аппроксимации функций из анизотропных пространств Бесова

Бурнаев Е. В. (г. Москва)

Для целых J и N, $2^J \geq 2N > 0$, обозначим через $\{\varphi_{J,k}(x)\}_{0\leq k\leq 2^J-1}$, $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j\geq J, 0\leq k\leq 2^j-1}$ – базис всплесков пространства $\mathbb{L}^2([0,1])$, у которого $\int_0^1 x^p \psi_{j,k}(x)dx = 0$ при $p = 0,\ldots,N-1$ (см. [2]). Переобозначим $\varphi_{J,k}(x)$ через $\psi_{J-1,k}(x)$. Базис всплесков пространства $\mathbb{L}^2([0,1]^d)$ состоит из функций $\bigcup_{j_1,\ldots,j_d=J-1}^{\infty} \{\psi_{j_1,k_1}(x)\cdot\ldots\cdot\psi_{j_d,k_d}(x)\}_{k_1,\ldots,k_d}$, где $k_i = 0,\ldots,2^{j_i}-1$ при $j_i \geq J$ и $k_i = 0,\ldots,2^J-1$ при $j_i = J-1$ (см. [2]). Пусть $\bar\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, $\bar p = (p_0,p_1,\ldots,p_d)$, $B^{\bar\sigma}_{\bar p,q}([0,1]^d)$ – анизотропное пространство Бесова (см. [1]). Для $\bar j = (j_1,\ldots,j_d)$, $\bar k = (k_1,\ldots,k_d)$ и $\bar x = (x_1,\ldots,x_d)$ положим $\psi_{\bar j,\bar k}(\bar x) = \psi_{j_1,k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\psi_{j_d,k_d}(x_d)$.

Пусть $\omega_L = \left\{\psi_{\bar j,\bar k}(\bar x) : (\bar j,\bar k) \in \Gamma_L\right\}$, $\Gamma_L = \left\{(\bar j,\bar k) : \sum_{i=1}^d j_i \leq L\right\}$ для целого $L \geq d\cdot J$, $\mathbb{P}_\omega$ – оператор ортогонального проектирования на ω_L, $H(\bar\sigma) = \left[\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i}\right)\right]^{-1}$ – среднее гармоническое гладкости $\bar\sigma$, $p_i^m = \min(p_i,2)$. Обозначим через $\mathrm{Card}(M)$ – мощность множества M, $S(\bar\sigma,\bar p) = \frac{H(\bar\sigma)}{d} + \frac{1}{2} - \frac{H(\bar\sigma)}{d}\sum_{i=1}^d \frac{1}{p_i^m}\cdot\frac{1}{\sigma_i}$.

Теорема 1. Пусть $f(\bar{x}) \in B^{\bar{\sigma}}_{\bar{p},q}([0,1]^d)$, $N > \max\{\lfloor\sigma_1\rfloor, \ldots, \lfloor\sigma_d\rfloor\}$, $\bar{\sigma}$ и $\bar{p}$ таковы, что $S(\bar{\sigma},\bar{p}) > 0$. Тогда $\mathrm{Card}(\omega_L) \asymp L^{d-1}2^L$ и $\|f - \mathbb{P}_\omega f\|_2 = O\left(L^{\frac{d-1}{2}} 2^{-S(\bar{\sigma},\bar{p})\cdot L}\right)$.

Положим $p_0 = \ldots = p_d = p$. Пусть $c(x,a) = \left(2^x \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{d-1} \cdot x^{1+\delta}\right)^{-1}$, где $\delta \in (0,1)$ – произвольное, $\Gamma^r = \left\{(\bar{j},\bar{k}) : \sum_{i=1}^d j_i = r\right\}$. Зададим некоторые целые $\widetilde{J} \geq d \cdot J$ и $\widetilde{L} \asymp \widetilde{J} + 2^{\widetilde{J}} \cdot \left(\widetilde{J}\right)^{d-1}$. Для $\widetilde{J}+1 \leq r \leq \widetilde{L}$ выберем множества индексов $\widetilde{\Gamma}^r \subset \Gamma^r$ так, чтобы $\mathrm{Card}\left(\widetilde{\Gamma}^r\right) = \left[\mathrm{Card}\left(\Gamma^r\right) \cdot c\left(r - \widetilde{J}, \widetilde{J}\right)\right]$ и $\forall \bar{k} \in \widetilde{\Gamma}^r$ соответствовали наибольшим значениям коэффициентов $\left|\alpha_{\bar{j},\bar{k}}\right| = \left|\int_{[0,1]^d} f(\bar{x})\psi_{\bar{j},\bar{k}}(\bar{x})d\bar{x}\right|$. Положим $\widetilde{\omega}_{\widetilde{L}} = \left\{\psi_{\bar{j},\bar{k}}(\bar{x}) : (\bar{j},\bar{k}) \in \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{L}}\right\}$, где $\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{L}} = \Gamma_{\widetilde{J}} \cup \bigcup_{r=\widetilde{J}+1}^{\widetilde{L}} \widetilde{\Gamma}^r$, $\mathbb{P}_{\widetilde{\omega}}$ – оператор ортогонального проектирования на $\widetilde{\omega}_{\widetilde{L}}$.

Теорема 2. Пусть $f(\bar{x}) \in B^{\bar{\sigma}}_{p,q}([0,1]^d)$, $N > \max\{\lfloor\sigma_1\rfloor, \ldots, \lfloor\sigma_d\rfloor\}$, $\bar{\sigma}$ и p таковы, что $S(\bar{\sigma},p) > 0$. Тогда $\mathrm{Card}(\widetilde{\omega}) \asymp \widetilde{J}^{d-1}2^{\widetilde{J}}$ и $\|f - \mathbb{P}_{\widetilde{\omega}} f\|_2 = O\left(\widetilde{J}^{\frac{d-1}{2}} 2^{-\frac{H(\bar{\sigma})}{d}\cdot\widetilde{J}}\right)$.

Работа частично поддержана аналитической ведомственной целевой программой РНП.2.2.1.1.2467, грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-5379.2006.1, программой фундаментальных исследований Президиума РАН 15, грантом РГНФ 06-02-91821 a/G, грантом РФФИ 05-01-00944.

Литература

[1] Бесов О. В. и др. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1996.

[2] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* М.: РХД, 2004.

О разрешимости задачи Коши для кинетического уравнения больцмановского типа

Буробин А. В. (г. Обнинск)

Рассматривается кинетическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}f = St(f), \tag{1}$$

$$t > 0, \quad \mathbf{v} \in R^n, \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (n \geq 1),$$

с начальным условием

$$f|_{t=0} = f_0(\mathbf{v},\mathbf{x}). \tag{2}$$

Предполагается, что оператор столкновений St в правой части уравнения представляет собой нелинейный интегральный оператор больцмановского типа (см. [1]) с конечным набором элементарных инвариантов столкновений.

Изучается нелокальная разрешимость задачи Коши (1), (2) в пространствах обобщенно интегрируемых функций при локально суммируемой по $\mathbf{x}$ начальной функции $f_0(\mathbf{v},\mathbf{x})$. Исследуется переход к локальным законам сохранения уравнения, связанным с инвариантами столкновений оператора St.

Литература

[1] Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.*

Ill-posed boundary value problems, some new links with geometry and algebra problems

Burskii V.P. , Zhedanov A.S. (Donetsk)

The communication is devoted to a connection between ill-posed boundary value problems in a bounded semialgebraic domain for partial differential equations and the Poncelet problem, recently revealed by authors. The Poncelet problem is one of famous problems of projective geometry and it by itself has numerous links with a set of different problems of analysis and physics. Investigations of ill-posed boundary value problems in bounded domains for partial differential equations go back to J.Hadamard. The solution uniqueness of the Dirichlet problem for the string equation $u_{xy} = 0$ in Ω, $u|_C = \phi$ on $C = \partial\Omega$ in a bounded domain Ω is connected with properties of John automorphism $T : \partial\Omega \to \partial\Omega$. In particular, there is the following *sufficient condition of uniqueness:* The homogeneous Dirichlet problem has only trivial solution in the space $C^2(\overline{\Omega})$ if the set of periodic points of T on C is finite or denumerable. We consider this problem in a bounded semi-algebraic domain, the boundary of which is given by some bi-quadratic algebraic curve $F(x,y) := \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x^i y^k = 0$. We show the John mapping in this case is the same as Ponselet mapping in some rational parametrizations of conics. From it we obtain

Theorem. For generic bi-quadratic curve the Dirichlet problem has non-unique solution if and only if corresponding Poncelet problem has periodic trajectory.

From Poncelet theorem we obtain if there exists some periodical point then each point of C is periodical with the same period. On the other hand a Baxter parametrization allows write the Poncelet mapping by means of elliptic Jacoby functions and obtain a criterion of existence of periodical points and a criterion of uniqueness breakdown for above the Dirichlet problem.

In turn the solution uniqueness of the Dirichlet problem is equivalent to solution uniqueness of some class of boundary value problems for the same equation on C and is equivalent to an indeterminacy of some moment problem on C: $\exists\alpha(s) \neq 0, \forall k = 0, 1, \ldots \int_C [x(s)]^k \alpha(s)\, ds = \int_C [y(s)]^k \alpha(s)\, ds = 0$, where (x, y) are Cartesian coordinates of point on C parametrized by s.

Except for that a Cayley determinant criterion of periodicity of Poncelet problem for case of even period can be understood as a criterion of solvable for algebraic Pell-Abel equation $P^2 - RQ^2 = 1$, where for given polinomial R of the order 4 it is required to find polinomials P, Q. The last problem has connections with a lot of different problems of analysis also.

Задача Коши для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка с запаздывающим аргументом по пространственной координате

Бурцев М.В. (Орловский государственный университет)

В области $D = \{(x,t) : \ |x|0\}$ рассматривается неоднородное уравнение дробного порядка с запаздыванием по пространственной координате

$$D_{0t}^{\alpha} U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) - H(x-\tau)U(x-\tau,t) + F(x,t), \ (x,t) \in D \qquad (1)$$

где D_{0t}^{α} - оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования, действующий на функцию $U(x,t)$ по переменной t, $0 < \alpha < 1$; $H(f)$ - функция Хевисайда; $0 < h$, $\tau \equiv const$; $F(x,t)$ - заданная, ограниченная функция.

Задача. Найти в области D решение $U(x,t)$ уравнения (1) из класса $D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) \in C(\bar{D})$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,\xi)$, $U_{xx}(x,t) \in C(D)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,\xi) = \omega(x), \ |x| < +\infty;$$

$$\omega(\pm\infty) = 0;$$

где заданные функции $\omega(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$; $F(x,t) = f(x)g(t) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D)$.

Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи, которое имеет вид

$$U(x,t) = H(x-\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int\limits_{0}^{t} g(\eta)d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)G(x,\xi,t-\eta)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-m\tau-\xi)}t^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(-\lambda^2 t^{\alpha})d\lambda,$$

а $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$ - обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

Система Лоренца как совокупность двумерных управляемых систем

Бутенина Н. Н. , Бирюков Р. С. (г. Нижний Новгород)

Известная система Лоренца рассматривается как совокупность неавтономных систем второго порядка. Каждая из таких двумерных систем принадлежит семейству УДС; управляющей функцией является та, производная от которой не содержится в рассматриваемой системе.

При известных ограничениях на управление (которые можно получить, построив соответствующие осциллограммы) строятся области достижимости для каждой из неавтономных систем при различных значениях параметра r. Показано, что при любых ограничениях на управляющие функции установившиеся движения лежат в ограниченных областях, расположение которых существенно зависит от параметра r.

В каждой из указанных выше неавтономных систем существуют особые точки (векторное поле рассматриваемой системы в этих точках при определённых значениях управляющей функции не определено, см. [1]). Характер этих особых точек существенно зависит от параметра r. Структура окрестности этих особых точек определяет характер решений неавтономной системы на каждой из координатных плоскостей и, следовательно, позволяет описать характер движений в системе Лоренца.

При таком подходе легко объясняется исчезновение хаоса при достаточно больших значениях параметрах r. Причина в том, что увеличение r приводит к затуханию колебаний векторных полей указанных неавтономных систем.

Литература

[1] N.N.Butenina, R.S.Birjukov, A.V.Metrikine "Special trajectory in a mathematical model of static equilibrium of a deep-water catenary riser"// *VI International Congress on mathematical modeling. Book of abstracts. N.Novgorod, 2004, p.150.*

Система Лоренца как совокупность двумерных управляемых систем

Бутенина Н. Н. , Бирюков Р. С. (г. Нижний Новгород)

Известная система Лоренца рассматривается как совокупность неавтономных систем второго порядка. Каждая из таких двумерных систем принадлежит семейству УДС; управляющей функцией является та, производная от которой не содержится в рассматриваемой системе.

При известных ограничениях на управление (которые можно получить, построив соответствующие осциллограммы) строятся области достижимости для каждой из неавтономных систем при различных значениях параметра r. Показано, что при любых ограничениях на управляющие функции установившиеся движения лежат в ограниченных областях, расположение которых существенно зависит от параметра r.

В каждой из указанных выше неавтономных систем существуют особые точки (векторное поле рассматриваемой системы в этих точках при определённых значениях управляющей функции не определено, см. [1]). Характер этих особых точек существенно зависит от параметра r. Структура окрестности этих особых точек определяет характер решений неавтономной системы на каждой из координатных плоскостей и, следовательно, позволяет описать характер движений в системе Лоренца.

При таком подходе легко объясняется исчезновение хаоса при достаточно больших значениях параметрах r. Причина в том, что увеличение r приводит к затуханию колебаний векторных полей указанных неавтономных систем.

Литература

[1] N.N.Butenina, R.S.Birjukov, A.V.Metrikine "Special trajectory in a mathematical model of static equilibrium of a deep-water catenary riser"// *VI International Congress on mathematical modeling. Book of abstracts. N.Novgorod, 2004, p.150.*

О глобальной разрешимости обратной задачи для интегро-дифференциальных операторов[5]

Бутерин С.А. (Саратовский госуниверситет)

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ – спектр краевой задачи $L(q,M)$ вида

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

где $q(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$. Собственные значения λ_k, $k \ge 1$, имеют вид:

$$\lambda_k = \Big(k + \frac{A}{k} + \frac{\kappa_k}{k}\Big)^2, \quad A = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(x)\,dx, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \tag{1}$$

Рассмотрим следующую *обратную задачу*: по заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что функция $q(x)$ известна априори. В [1] доказана разрешимость этой обратной задачи “в малом”, то есть когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ достаточно близка в метрике l_2 к спектру известной модельной задачи $L(q,\tilde M)$. Кроме того, там доказана устойчивость и глобальная единственность решения. Иным методом мы доказываем глобальную разрешимость рассматриваемой обратной задачи.

Теорема. Пусть дана функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$. Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ вида (1) существует единственная (с точностью до эквивалентности) функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что

[5]Работа выполнена при поддержке РФФИ и гранта Президента РФ (проект МК-1701.2007.1).

$\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ является спектром краевой задачи $L(q, M)$. Таким образом, (1) является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.

Доказательство теоремы конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи. В [2] этот результат получен для частного случая $q(x) \equiv \text{const}$.

Литература

[1] Юрко В.А., *Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов* // Матем. заметки, т. 50, вып. 5 (1991), 134–144.

[2] Buterin S.A., *Inverse problem of spectral analysis for a convolution integro-differential operator*, Тез. докл. межд. конф. "Тихонов и современная математика",сек. №4, М: Изд-ий отд. ф-та ВМиК МГУ, 2006, 43–44.

Functional integrals for evolutionary equations on Riemannian manifolds

Butko Ya. (Moscow)

A new approach, introduced by Smolyanov and Weizsaecker ([1], [2]), is used to obtain representations for solutions of some initial and boundary value problems for heat and Schroedinger type equations on a compact Riemannian manifold in the form of limits of finite dimensional integrals over Cartesian products of the manifold. The integrands are elementary functions of initial conditions, coefficients of equations and geometrical characteristics of the manifold. These limits coincide with functional integrals over surface measures of Gaussian type (Smolyanov–Weizsaecker measures) on the space of continuous functions, taking values in the manifold.

We present functional integrals for Cauchy–Dirichlet problem for diffusion with drift in a domain of the manifold and for Cauchy problem for Schroedinger equation on the manifold.

References

[1] O. G. Smolyanov, Smooth measures on loop groups, *Doklady Acad. Nauk*, **345** N 4 (1995), 455-458.

[2] H. von Weizsacker, O. G. Smolyanov, and O. Wittich , Diffusion on Compact Riemannian Manifolds and Surface Measures, *Doklady Mathematics*, **61** N2 (2000), 230-235.

[3] Butko Ya. A., Functional integrals for Schroedinger equation on a compact Riemannian manifold, *Math. Zametki*, **79** N 2 (2006), 194-200.

[4] Butko Ya. A., Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain of a manifold, *to appear.*

Сингулярно возмущенные задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения

Бутузов В.Ф. (МГУ)

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой правая часть быстрого уравнения имеет пересекающиеся корни. Стандартная процедура построения асимптотики решения в этом случае состоит в использовании негладкого корня, составленного из указанных пересекающихся корней. Предлагается другой подход, суть которого заключается в замене негладкого составного корня близким к нему гладким корнем регуляризованного вырожденного уравнения. Это позволяет получить более точную асимптотику решения краевой задачи и, кроме того, доказать, что это решение является асимптотически устойчивым стационарным решением соответствующей параболической системы. Доказательство существования решения и его устойчивости проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Исследование некоторых вычислительных аспектов метода мультиполей

Бузыкин Г. О. (г. Москва)

Мультиполи $\Xi_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ для уравнения Лапласа на плоскости $z = x + iy$ с нулем в точке $z_0 \neq \infty$ и центром в ∞ определяются по формулам $\Xi_{2m-1}(z) := \mathrm{Re}\,(z - z_0)^{m-1}$, $\Xi_{2m}(z) := \mathrm{Im}\,(z - z_0)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Система $\{\Xi_n\}$ является полной и минимальной на любом жордановом кусочно–гладком контуре $\mathcal{C}$, охватывающем точку z_0. Ясно, что решение задачи Дирихле в области $\mathcal{B}$ — внутренности контура $\mathcal{C}$ — может быть построено в виде предела линейных комбинаций функций Ξ_n. Для нахождения коэффициентов в этих комбинациях в настоящей работе используются два различных выриационных принципа, для которых проводится сравнительный анализ эффективности: это, во-первых, принцип наименьших квадратов, т.е. минимизация ошибки $u - u_k$ в норме $L_2(\mathcal{C})$, а, во-вторых, принцип Треффца, т.е. минимизация ошибки в норме $W_2^1(\mathcal{B})$.

Граничные мультиполи $\Omega_n(z)$ для односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с нулем в точке $N \in \partial G$ и центром в $M \in \partial G$ определяются по формуле $\Omega_n(z) := \mathrm{Im}\,[\mathcal{F}(z)]^n$, где $\mathcal{F}$ — такое конформное отображение G на $\{\mathrm{Im}\,w > 0\}$, что $\mathcal{F}(N) = 0$, $\mathcal{F}(M) = \infty$. Пусть Γ — жорданова кусочно–гладкая дуга, содержащаяся в G за исключением своих концевых точек A и B, лежащих соответственно на дугах (MN) и (NM) границы ∂G. Система $\{\Omega_n\}$ полна и минимальна в $L_2(\Gamma)$ и, что очевидно, каждая из Ω_n гармонична в G и обращается в нуль на $\partial G \setminus M$. Ясно, что решение задачи Дирихле в области $g \subset G$, граница которой состоит из Γ и дуги $\gamma = (ANB) \subset \partial G$ с условиями: $\psi = 0$ on γ, $\psi = h \in L_2$ on Γ, может быть построено в виде предела линейных комбинаций функций Ω_n. Коэффициенты в этих комбинациях вычислялись с помощью двух указанных выше принципов, для которых проводится сравнительный анализ эффективности.

Численные исследования показали, что для обоих описанных выше вариантов метода мультиполей имеют место свойства: экспоненциальная скорость сходимости в области и на дуге γ; высокая эффективность вычисления решения и его производных в области и в точках соответствующей гладкости γ; погранслойный эффект для погрешности вблизи $\mathcal{C}$ для первого вырианта и вблизи Γ для второго варианта метода. Кроме того, было проведено исследование поведения коэффициентов в указанных выше линейных комбинациях мультиполей при увеличении длины приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503) и Программы №3 ОМН РАН.

О спектральных свойствах одного пучка операторов

Быченков Ю.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Исследование сходимости обширного класса блочных итерационных методов решения линейных (симметричных и несимметричных) седловых задач может быть сведено к анализу спектра

$$\sigma(\chi) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \ker \chi(\lambda) \neq \{0\}\}$$

операторного пучка

$$\chi(\lambda) \equiv f(\lambda, L)g(\lambda, G) + h(\lambda)G,$$

где $f(\lambda, s)$, $g(\lambda, t)$, $h(\lambda)$ – многочлены с комплексными коэффициентами, а L и G – самосопряженные операторы в конечномерном эрмитовом пространстве U, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{sp} L \subseteq [\delta_1, \delta_2],\ \delta_1 \leq \delta_2, \quad \operatorname{sp} G \subseteq \{0\} \cup [\gamma_1, \gamma_2],\ 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2.$$

Существенной особенностью задачи анализа спектра χ является наличие у оператора G нулевого собственного значения. Универсальную оценку спектра χ дает следующий результат

Теорема. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\chi)$, тогда $g(\lambda_0, 0) = 0$ или найдется $s_0 \in [\delta_1, \delta_2]$ такое, что $f(\lambda_0, s_0) = 0$ или, если такого s_0 не существует,

$$\operatorname{conv}\left\{t^{-1}g(\lambda_0, t) \mid t \in [\gamma_1, \gamma_2]\right\} + \operatorname{conv}\left\{f(\lambda_0, s)^{-1}h(\lambda_0) \mid s \in [\delta_1, \delta_2]\right\} \ni 0,$$

где conv обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества в $\mathbb{C}$.

Применение универсальной оценки в практически важных случаях позволяет получить точные аналитические характеристики спектра пучка χ (см. [1]). Полученные результаты могут быть использованы как для изучения сходимости новых алгоритмов для решения седловых задач, так и для уточнения характеристик существующих алгоритмов.

Литература

[1] Быченков Ю.В. *О спектральных свойствах одного пучка операторов* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 2007, Т 47, N 2, С 194–202.

О классе Бэра мажорант показателей Ляпунова линейных систем с неограниченными коэффициентами

Быков В. В. (г. Москва)

Через $\mathcal{M}_i(\cdot)$ обозначается минимальная полунепрерывная сверху мажоранта i-го показателя Ляпунова, рассматриваемого как функция на множестве линейных однородных n-мерных систем с непрерывными на $\mathbf{R}^+$ коэффициентами, наделенном топологией равномерной на $\mathbf{R}^+$ сходимости коэффициентов.

Пусть M — топологическое пространство, а $A\colon \mathbf{R}^+ \times M \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Для всякого $i = 1, \ldots, n$ функция $\mathcal{M}_{i,A}\colon M \to \overline{\mathbf{R}}$, ставящая в соответствие точке $\mu \in M$ значение функции $\mathcal{M}_i$ на системе $\dot{x} = A(t, \mu)x$, принадлежит второму классу Бэра.

Замечание. Из результатов [1] следует, что существуют такие топологическое пространство M и непрерывное отображение $A\colon \mathbf{R}^+ \times M \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, что функция $\mathcal{M}_{i,A}$ не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема 2. Если M метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке функции $\mathcal{M}_{i,A}\colon M \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 1, \ldots, n$, полунепрерывны сверху, а их сужения на некоторое всюду плотное множество типа G_δ непрерывны.

Теоремы 1, 2 усиливают теоремы [2], в которых содержатся те же утверждения при дополнительном условии на отображение $A\colon \mathbf{R}^+ \times M \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$.

Литература

[1] Ветохин А. Н. *К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №8. С. 1039 – 1042.*

[2] Миллионщиков В. М. *О мажорантах показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, №6. С. 1090.*

Homogenization of scalar problems for a combined structure with singular or thin reinforcement

Cardone G. (University of Sannio - Italy)

The homogenization of quadratic integral functionals for combined structures with singular or asymptotically singular reinforcement is studied in a model case in dimension $N = 2$. Generalizations to more general cases in dimension $N = 2$ or to some model cases in dimension $N > 2$ are discussed. Such results are obtained in the frame of homogenization of problems depending on two parameters developed by V.V.Zhikov in [1], [2] and [3]. In particular an essential tool is the notion of two-scale convergence of sequences of functions belonging to Sobolev spaces with respect to variable measures.

References

[1] Zhikov V.V. *On the homogenization technique for variational problems.* Functional Anal. Appl. 33 (1) (1999), 11-24.

[2] Zhikov V.V. *On an extension of the method of two-scale convergence and its applications.* Mat. Sbornik 191:7 (2000), 973-1014.

[3] Zhikov V.V. *Homogenization of elasticity problems on singular structures.* Izvestia Acad. Nauk of Russia, ser. Math., 66, n. 2 (2002), 299-365.

Lyapunov pairs and applications

Carja O. (Iasi, Romania)

The paper presents a characterization of the Lyapunov pairs for a general initial value problem with a possibly multivalued m-accretive operator on an arbitrary Banach space by means of the contingent derivative related to the operator. The proof is based on tangency and flow-invariance arguments combined with a priori estimates and approximation. A first application treats the existence of global solutions for an initial value problem with a multivalued ω-m-accretive operator and a term satisfying a general unilateral growth condition. A second application provides the null-controllability for a nonlinear control system involving a multivalued ω-m-accretive operator. Here, it is a new approach of the subject of Kocan-Soravia [2] and is a nonlinear version of Carja-Motreanu [1].

References

[1] Carja O. and Motreanu D. *Flow-invariance and Lyapunov pairs*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13B (2006), suppl., 185–198.

[2] Kocan M. and Soravia P. *Lyapunov functions for infinite-dimensional systems*, J. Funct. Anal. 192 (2002) 342-363.

О задачах в неограниченных областях с концентрированными массами.

Чечкин Г. А. (г. Москва)

Рассматривается задача для уравнения Гельмгольца в неограниченной области с концентрированными массами на границе. Доказывается теорема усреднения, строятся решения и их аналитические продолжения и доказывается сходимость полюсов аналитического продолжения к собственным значениям предельной задачи (см. [1]).

Пусть Ω — гладкая область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Предполагается, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, участок Γ_2 принадлежит плоскости $\{x_3 = 0\}$ и состоит из двух частей, γ_ε и $\Gamma_2 \backslash \overline{\gamma}_\varepsilon$, где $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$. Введём следующее обозначение: $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} B_\varepsilon^i$ — объединение полушаров, находящихся внутри области Ω. Поясним теперь построение. Пусть B_ε — гомотетичное сжатие δB, B - область, полученная целочисленными сдвигами множества B^0 на плоскости $\{\xi_3 = 0\}$, с центрами в точках $\widetilde{\xi}_k = (k_1, k_2, 0)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, B^0 — это полушар $\{(\xi_1, \xi_3) \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 < \varepsilon^2,\ \xi_3 < 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^3$, $\xi = \dfrac{x}{\delta}$, $\gamma_0 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 < \varepsilon^2,\ \xi_3 = 0\}$. При этом $\gamma_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon \cap \partial\Omega$. Заметим, что $N_\delta = O\left(\dfrac{1}{\delta^2}\right)$.

Рассматривается случай, когда $\delta = \delta(\varepsilon)$ зависит от ε и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \infty$.

Предположим, что F — функция из $L_2(\mathbb{R}^3)$ с ограниченным носителем. Рассматривается следующая задача в неограниченной области:

$$\begin{cases} \left(\Delta + \rho^\varepsilon k^2\right) u_{\varepsilon,\delta} = F, & \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2}, \\ u_{\varepsilon,\delta} = 0, & \text{на} \quad \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

с условиями излучения

$$u_{\varepsilon,\delta} = O(r^{-1}), \qquad \frac{\partial u_{\varepsilon,\delta}}{\partial r} - iku_{\varepsilon,\delta} = o(r^{-1}) \qquad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{2}$$

где $\operatorname{Im} k \geq 0$, $r = |x|$ и $\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, & \text{в} \quad B_\varepsilon \\ 1, & \text{в} \quad \Omega \backslash B_\varepsilon \end{cases}$, $m < 1$.

Справедлива теорема.

Теорема Предположим, что f и $\widetilde{f}$ — суть сужения функции F на Ω и на $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, соответственно. Тогда решение задачи (1), (2) сходится к функции

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{в} \quad \Omega, \\ \widetilde{u}_0(x), & \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$$

сильно в $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ при $\varepsilon \to 0$, где $u_0(x)$ — решение задачи

$$-\Delta u_0 = k^2 u_0 - f, \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad\qquad u_0 = 0, \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3}$$

а $\widetilde{u}_0(x)$ — решение задачи

$$\left(\Delta + k^2\right) \widetilde{u}_0 = \widetilde{f}, \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \qquad\qquad \widetilde{u}_0 = 0, \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям излучения

$$\widetilde{u}_0 = O(r^{-1}), \qquad \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial r} - ik\widetilde{u}_0 = o(r^{-1}) \qquad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5}$$

Здесь предполагается, что k^2 не является собственным значением оператора задачи (3).

Если $k^2 = k_0^2$ — собственное значение оператора задачи (3), то существует полюс $\tau_{\varepsilon,\delta(\varepsilon)}$ аналитического продолжения решения (1), (2) в полуплоскости $\operatorname{Im} k < 0$, сходящийся к k_0 при $\varepsilon \to 0$.

Автор благодарит РФФИ (грант 06-01-00138) за финансовую поддержку.

Литература

[1] Чечкин Г.А. Об усреднении решений задачи для оператора Лапласа в неограниченной области с большим количеством концентрированных масс на границе // *Проблемы математического анализа.*- 2006.- т. 33.- с. 103–111.

On the relation between the solutions of various 3D α-models of viscous fluid and the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system: attempt to classify α-models

Chepyzhov V.V. (Institute for Information Transmission Problems RAS)

We study the connections between the long-time dynamics of variouse α-models of viscous fluid (e.g. the Leray-α model, the Lagrangian averaged Navier–Stokes-α model or viscous Camassa–Holm equations, the modified-Leray-α model, the simplified Bardina-α model and many other models) and the exact 3D Navier–Stokes system. Different α-models have different nonlinear terms that approximate and regularize in some sense the nonlinear term of the exact 3D Navier–Stokes system. It was demonstrated analytically and computationally in many works that these α-models are useful tools in the study of the motion of large eddy currents. Recently, it was also proved that the Cauchy problems for the mentioned above 3D α-models are well-possed in the corresponding function spaces.

We consider bounded (in the energy norm) families of solutions of a given 3D α-model for $0 < \alpha \leq 1$. For $\alpha = 0$, we formally have the classical 3D Navier–Stokes system for which the uniqueness theorem (on the entire time semi-axis) of the existing weak solution of the Cauchy problem is not proved yet. However, for the 3D Navier–Stokes system, we can construct the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ which describes the dynamics of the system as a whole.

We prove that time shifts $\{T(h), h \geq 0\}$ (here $T(h)u_\alpha(t) = u_\alpha(t+h)$) of bounded sets of solutions $B_\alpha = \{u_\alpha(t), t \geq 0\}$ of the α-models under the study approach the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ of the 3D Navier–Stokes system in the corresponding topology as h tend to $+\infty$ and α approaches zero. In particular, we show that the trajectory attractors $\mathfrak{A}_\alpha$ of the α-model converge to the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ of the 3D Navier–Stokes system as $\alpha \to 0+$.

Using the proved results, we suggest a simple classification of α-models. We partition α-models into two classes depending on the character of attraction of the trajectory attractors $\mathfrak{A}_\alpha$ to the set $\mathfrak{A}_0$ as $\alpha \to 0+$.

These results are based on the joint work with M.I.Vishik and E.S.Titi.

The work is partially supported by the Russian Foundation of Basic Researches (projects no. 05-01-00390 and 04-01-00735) and the Civilian Research & Development Foundation (CRDF) award no. RUM1-2654-MO-05.

Метод полиномиальных квазирешений в теории линейных дифференциально-разностных уравнений

Черепенников В. Б. Ермолаева П. Г. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН)

Рассматривается скалярная начальная задача с начальной точкой для линейного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t-1) + b(t) + f(t), \ t \in R, \ x(0) = x_0, \qquad (*)$$

Предметом исследования являются классические решения, т.е. такие, которые при подстановке в исходное уравнение обращают его в тождество. Известно, что при постоянных коэффициентах однородная начальная задача $(*)$ имеет бесконечное множество аналитических решений, каждое из которых определяется корнем характеристического квазиполинома, порождаемого уравнением $(*)$. При переменных коэффициентах вопросы разрешимости задачи $(*)$ в классе аналитических функций на сегодняшний день остаются открытыми.

В том случае, когда коэффициенты уравнения $(*)$ представляются полиномами, в исследование вводится полином некоторой степени N. Тогда термин "полиномиальное квазирешение"(ПК-решение) понимается в том смысле, что при подстановке его в исходную задачу появляется невязка $\Delta(t) = O(t^N)$. В работе рассматриваются вопросы как нахождения ПК-решений различных степеней, так и точные оценки невязки, характеризующей меру возмущения исходной задачи. Данный подход может быть применен для исследования более общих дифференциально-разностных уравнений запаздывающего, нейтрального и опережающего типов.

Приводятся примеры, иллюстрирующие предлагаемый метод.

Список литературы

[1] V. B. Cherepennikov. Analytic solutions of some functional differential equations linear systems. Nonlinea Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol.30, N.5, 1997, p.2641-2651.

[2] В.Б.Черепенников. Полиномиальные квазирешения линейных систем дифференциально-разностных уравнений. // Изв. вузов. Математика, 1999, N10 – C49-58.

[3] V. B. Cherepennikov, and P. G. Ermolaeva, Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations, Opuscula Mathematica, 26/3, Univ. of Gdansk, Gdansk, 2006, 47-57.

Декомпозиция сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений

Черевко И.М. (Черновицкий национальный университет, Украина)

Рассматривается нелинейная система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, y_t, \varepsilon), \quad \varepsilon\frac{dy}{dt} = L(t, x, y_t) + g(t, x, y_t, \varepsilon), \qquad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $y_t = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0$, $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$.

Пусть выполняются условия:

1) матрица $A(t)$ непрерывная и ограниченная при $t \in \mathbb{R}$;

2) линейный функционал $L(t,x,\xi)$ равномерно ограничен при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$|L(t,x_1,\xi) - L(t,x_2,\xi)| \le l|x_1 - x_2||\xi|, \quad l > 0.$$

Для каждой непрерывной функции $\varphi(t)$ оператор сдвига $T(t,s)$ уравнения $\varepsilon\frac{dy}{dt} = L(t,\varphi(t),y_t)$ удовлетворяет условию

$$|T(t,s)\xi| \le Ne^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(t-s)}|\xi|, N, \beta > 0, t \ge s;$$

3) функции f и g непрерывные и равномерно ограниченные в области

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, |y| < \rho, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}$$

вместе со своими частными производными по t, x, y.

При выполнении этих предположений и достаточно малых ε система (1) имеет интегральные многообразия быстрых и медленных переменных [1].

Построена замена переменных, расщепляющая исходную систему на быструю и медленную подсистемы и медленная подсистема является независимой.

Для функций, описывающих интегральные многообразия, разработан алгоритм построения асимптотических разложений по степеням малого параметра ε [2]. Это позволяет выписывать расщепляющие уравнения с заданной степенью точности.

Литература

[1] Perestyuk M.O., Cherevko I.M. *Investigation of the integral manifolds of singularly perturbed functional differential equations* // Math. Notes. – 2002. – 3, N 1. – P. 47 – 58.

[2] Черевко И.Я. *Об асимптотике интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем с запаздыванием* // Укр. матем. журн. – 1999. – 51, № 8. – С. 1005 – 1111.

Homogenization in perforated domains with Fourier boundary conditions

Chiadò Piat V. (Politecnico-Torino)

We deal with the asymptotic analysis of a variational problem for a functional defined in a perforated medium and combining the bulk (volume distributed) energy and the surface energy defined on the perforation boundary. In the studied model the perforation is obtained by a homothetic dilatation of a given periodic structure of holes, with a small scaling factor denoted by ε. Then the surface measure tends to infinity as ε goes to 0. To compensate this measure growth we assume that the mean value of surface energy as function of independent variable is equal to zero. Then we show that the said functional has a nontrivial Γ-limit for which we provide a representation formula in terms of of an auxiliary variational problem on the perforated torus. It is worth to note that, in contrast with the case of linear partial differential equations studied in [1], the contributions of the bulk and surface energies to the limit Lagrangian are coupled. Also, we study the asymptotic behaviour of the corresponding minimization problems, and show that, if the coercivity constant of the bulk energy is large enough, the minimal energies and minimizers of the ε-variational problems converge to those of the limit functional. The results have been obtained in collaboration with A. L. Piatnitski, and represent a nonlinear generalization of [1].

References

[1] Belyaev, A. G.; Piatnitski A. L.; Chechkin G. A. Averaging in a perforated domain with an oscillating third boundary condition. (Russian) *Mat. Sb.* 192 (2001), no. 7, 3–20; translation in *Sb. Math.* 192 (2001), no. 7-8, 933–949.

Об одном способе исследования разрешимости системы дифференциальных уравнений с отклонением

Чихачева О.А. (Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с отклонением вида

$$T\dot{x}(t) + A(\lambda)\dot{x}(t - f(\varepsilon)) + Bx(t) + C(\lambda)x(t - f(\varepsilon)) + \varphi(t,\mu) = 0, \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, T, B - $(n \times n)$ - матрицы, $A(\lambda)$, $C(\lambda)$ - $(n \times q)$– матрицы, $f(\varepsilon)$– многочлен степени d по ε, $\varphi(t,\mu)$– квазипериодическая по t вектор-функция, ε, λ, μ - малые вектор-параметры.

Исследование системы (1) сведено к разрешению некоторой алгебраической системы

$$(H + G(\varepsilon,\lambda))\gamma = \gamma(\mu). \tag{2}$$

Если $detH = 0$ и $rangH = r$. В этом случае система уравнений (2) элементарными преобразованиями может быть сведена к системе, содержащей r строк и $2n - r$ строк соответственно

$$\begin{aligned} &(N^1 + G^1(\varepsilon,\lambda))\gamma = \gamma^1(\mu), \\ &G^2(\varepsilon,\lambda)\gamma = \gamma^2(\mu), \end{aligned} \tag{3}$$

где $H = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \end{bmatrix}$, N^1 - $(r \times 2n)$ - матрица, $rangN^1 = r$, N^2 - нулевая матрица размера $((2n - r) \times 2n)$.

В предположении, что найдена точка $\bar{\eta} = (\bar{\varepsilon}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma})$, удовлетворяющая условиям $|\bar{\eta}| = 1$ и

$$N^1\bar{\gamma} + G^1(\bar{\varepsilon},\bar{\lambda})\bar{\gamma} = 0, \tag{4}$$

$$G^2(\bar{\varepsilon},\bar{\lambda})\bar{\gamma} = 0. \tag{5}$$

Для системы (2) доказана теорема о существовании, хотя бы одного, ненулевого квазипериодического решения.

О вычислении inf – sup-константы для областей с гладкими границами

Чижонков Е.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Известно [1], что постоянная $\delta = \delta(\Omega)$ в выражении

$$\inf_p \sup_{\mathbf{u}} \frac{|(p, \operatorname{div} \mathbf{u})|}{||\operatorname{grad} \mathbf{u}||\,||p||} = \delta$$

зависит только от геометрических характеристик области $\Omega \subset R^s$ $(s = 2, 3)$ и наряду со своим дискретным аналогом (константой в LBB-условии) определяет качество аппроксимации и эффективность алгоритмов при численном решении уравнений типа Навье – Стокса [2].

В докладе обсуждается применение метода конечных элементов для расчета значений δ в областях с гладкими границами, анализируются результаты численных экспериментов, проводится сравнение с аналитическими исследованиями.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00511).

Литература

[1] Чижонков Е.В. *Релаксационные методы решения седловых задач.* — М.: ИВМ РАН, 2002.

[2] Brezzi F., Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* – New York: Springer–Verlag, 1991.

Гидродинамика на вращающейся сфере

Чупахин А. П. (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН)

В работе выводится и исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая движения жидкости или газа на вращающейся притягивающей сфере в приближении мелкой воды

$$\begin{aligned} &Dv = w^2\mathrm{ctg}\theta + r_0 w\cos\theta + \frac{1}{4}r_0^2\sin\theta\cos\theta - f_0 h_\theta\ , \\ &Dw = -vw\mathrm{ctg}\theta - r_0 v\cos\theta - f_0(\sin\theta)^{-1}h_\varphi\ , \\ &Dh + (\sin\theta)^{-1}h(w_\varphi + (v\sin\theta)_\theta) = 0\ , \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения (1) записаны во вращающейся сферической системе координат: $0 < \theta < \pi$ — дополнение до широты, $h \le \varphi < 2\pi$ — долгота, v и w соответствующие компоненты скорости, h — глубина слоя жидкости, $D\partial_t + (\sin\theta)^{-1}v\partial_\theta + w\partial_\varphi$. Безразмерные параметры r_0 и f_0 выражаются через параметры движения, так называемые числа Россби и Фруда, характеризующие влияние вращения и гравитации.

Система (1) описывает крупномасштабные движения газа и жидкости в атмосферах планет и мировом океане на сфере в целом, когда высота атмосферы мала по сравнению с радиусом планеты.

Для системы (1) исследованы различные классы точных решений.

1) Стационарные решения типа простых волн, в которых все искомые функции зависят только от широты. Доказано существование на всей сфере решений, описывающих движение жидкости из источника, расположенного в одном полюсе в сток, находящийся в другом. Линии тока жидких частиц при движении на сфере могут иметь до двух точек перегиба. При увеличение угловой скорости вращения сферы происходит разделение области существования решения на два шаровых пояса — движение происходит раздельно в каждом полушарии. Подобные решения описывают воздушные потоки с полярных шапок планеты.

2) Уравнения (1) имеют решение соответствующее положению равновесия: $v = w = 0$, $h = h_0 + (r_0^2/8f_0)\sin^2\theta$. Доказано, что такому распределению глубины отвечает целый класс нетривиальных решений, в котором вектор скорости $(v, w) \ne 0$.

Исследование таких решений сводится к анализу переопределённой системы трех дифференциальных уравнений для двух функций v и w. Получена полная система уравнений совместности, данная система приведена в инволюцию. Решение имеет произвол в одну функцию одного независимого переменного и определяется через гиперэллиптические интегралы. Анализируются решения, в которых эти интегралы вырождаются в элементарные функции. Полученные решения интепретируются как движения воздушных потоков в атмосферах планет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05–01–00080, СО РАН, интеграционный поект № 2.15 и Программы поддержки ведущих научных школ.

Boundedness of solutions for isotropic and anisotropic degenerate elliptic equations

Cianci P.

In this talk we shall consider the Dirichlet problem for equation

$$\sum_{|\alpha|=1,2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \qquad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

At first we shall study the case in which the coefficients satisfy isotropic degenerate elliptic and growth conditions, after the case where anisotropic degenerate elliptic and growth conditions are considered. In both case, we shall prove the boundedness of solutions, following a modifications of Moser's iterations.

О длинах лемнискат [6]

Данченко В.И. (Владимирский государственный университет)

Пусть $z_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$,

$$P_n(z) = \prod\nolimits_{k=1}^{n} (z - z_k), \quad L(P_n, r) = \{z : |P_n(z)| = r^n\}.$$

Линии $L(P_n, r)$ называют лемнискатами. Каждая лемниската $L(P_n, r)$ состоит не более чем из n замкнутых жордановых кривых σ_k, $k = \overline{1, m}$, $m \le n$, внутренности которых не имеют общих точек.

Теорема. *Имеет место следующая оценка длины лемнискаты*

$$|L(P_n, r)| = |\sigma_1| + \ldots + |\sigma_m| \le 2\pi n r.$$

Задача об оценке сверху длины $|L(P_n, r)|$ была поставлена в 1958 году P.Erdös, F.Herzog, G.Piranian. Независимо эта задача в 1960-1963 годах рассматривалась Е.П.Долженко. Им было получено неравенство

$$|L(P_n, r)| \le 4\pi n r. \tag{1}$$

В 1961 г. Ch.Pommerenke опубликовал неравенство $|L(P_n, 1)| \le 74n^2$. Результат (1) был неизвестен авторам последующих работ (библиографию см. в [1]). В 1995 году P.Borwein получил оценку $|L(P_n, 1)| \le 8\pi e n$. В 1999 году A.Eremenko и W.Hayman получили уточнение оценки (1) при $r = 1$: $|L(P_n, 1)| \le 9.173n$. Существует гипотеза

[6]Работа поддержана РФФИ (гранты 04-01-00717, 05-01-00962)

о том, что среди всех лемнискат $L(P_n, 1)$ наибольшую длину имеет лемниската типа Бернулли $L(B_n, 1)$, где $B_n(z) = z^n - 1$ (P.Erdös, F.Herzog, G.Piranian, Е.П.Долженко). Ее длину нетрудно вычислить:

$$|L(B_n, 1)| = 2^{1+\frac{1}{n}} \int_0^{\pi/2} \cos^{\frac{1}{n}-1} t\, dt = 2^{\frac{1}{n}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right) = 2n + 4\ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Более подробное изложение истории вопроса имеется в работе [1].

Литература

[1] Wang C., Peng L. *"The arc length of the lemniscate $|w^n + c| = 1$"*, Rocky Mountain J. of Math., **36**:1(2006), 337-347.

О множестве периодов периодических решений некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений на многомерной сфере

Данг Хань Хой (Технологический Почтово-Телекоммуникационный Институт, Ханой)

На сфере $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1, n \geq 2\}$ рассмотрим задачу о периодических решениях для уравнения типа Шредингера

$$\left(\frac{\partial}{i\partial t} + a\Delta\right) u(x,t) = \nu G(u - f) \tag{1}$$

с условиями

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \quad \int_{S^n} u(x,t)dx = 0. \tag{2}$$

Здесь $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{C}$; G - интегральный оператор на пространстве $L_2(S^n \times [0,b])$ с гладким ядром $g(x,y)$, заданным на $S^n \times S^n$ и имеющим непрерывные производные по x до 2n-го порядка, причем $\int_{S^n} g(x,y)dx = \int_{S^n} \Delta_x g(x,y)dx = 0$ $\forall y \in S^n$; Δ-оператор Лапласа на S^n, f-заданная функция. Оператор $L = L_b = \dfrac{\partial}{i\partial t} + a\Delta$ рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 = \{u(x,t) \in L_2(S^n \times [0,b]), \int_{S^n} u(x,t)dx = 0\}$ (зависящем от b). В наиболее типичном случае, когда величина $ab/(2\pi)$ иррациональна, спектр $\sigma(L) = \mathbb{R}$ и оператор L не имеет ограниченного обратного. В этом смысле задача некорректна. Целью работы является исследование структуры множества периодов, при которых оператор $L^{-1} \circ G$ определен и ограничен и задача (1), (2) имеет единственное решение. Справедлива следующая

Теорема 1. Для п.в. $\nu \in \mathbb{C}$ задача (1), (2) имеет единственное периодическое решение для почти всех значений периода $b \in \mathbb{R}^+$.

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность проф. Панову Е.Ю., за внимание к работе.

Асимптотика минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби, зависящего от малого параметра

Данилин А. Р. (г. Екатеринбург)

Рассматривается асимптотика минимаксного решения (см. [1]) следующей задачи Коши, зависящей от малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \partial_t w_\varepsilon - \varepsilon + \ + ||\nabla_y w_\varepsilon|| = 0, \\ &w_\varepsilon(0, x, y) = \sigma(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, A, B – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\sigma(\cdot)$ – известная выпуклая функция, – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{R}^m$, а $||\cdot||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

Обсуждаются различные аспекты этой задачи. В частности, показывается отсутствие регулярного асимптотического разложения по степеням малого параметра.

Литература

[1] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991, 216 с.

Обобщенные решения законов сохранения, содержащие атомарную меру. Определение, существование, формирование, примеры неединственности

Данилов В. Г. (г. Москва)

В докладе будет дано определение решений законов сохранения (в частности, уравнения неразрывности), содержащих в качестве слагаемых δ функции Дирака с носителями на кусочно-гладких поверхностях в $\mathbb{R}^n$ коразмерности ≥ 1.

Будет описано формирование таких решений из непрерывных начальных условий, приведены условия существования таких решений и примеры неединственности.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00912.

Динамическое программирование в задачах синтеза систем с импульсными управлениями

Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. (г. Москва)

Решение задачи синтеза управлений является одной из центральных тем современной теории управления [1]. Во многих прикладных задачах (например, для аэрокосмических систем с мгновенными коррекциями движения, в системах с коммуникационными ограничениями или в гибридных системах, а также в экономико-финансовых моделях) решения могут иметь импульсный характер. Последнее требует управлений обобщённого типа, состоящих из импульсных "дельта-функций" и их производных.

Задача синтеза управлений рассматривается для системы вида

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с k раз дифференцируемыми матрицами $A(t)$, $B(t)$, допускающую в качестве управлений $u(t)$ m-векторные распределения порядка $r \leq k$. Согласно [2], задачи управления для таких систем (1) сводятся к соответствующим задачам для системы, допускающей распределения лишь нулевого порядка, (т.е. управления типа "дельта-функций"), но имеющей вид:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \mathbf{B}(t)dU(t), \quad \mathbf{B}(t) = [L_0, \ldots, L_k]$$

Здесь $L_0(t) = B(t)$, $L_j(t) = A(t)L_{j-1}(t) - L'_{j-1}(t)$.

Указанная форма уравнений позволяет далее применить методы динамического программирования, предложенные в [3].

В докладе приводятся вариационные неравенства типа Гамильтона-Якоби Беллмана [4] для указанных задач и приводится формализация решения задач синтеза импульсных управлений в рамках схем приближённого динамического программирования. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие полученные управления.

Литература

[1] Красовский Н. Н. *Теория управления движением* // М.: Наука, 1968.

[2] Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. *К управлению линейными системами обобщёнными воздействиями* // Дифф. уравн. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360–1370.

[3] Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В. *Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений* // Дифф. уравн. 2005. Т. 41. № 11. С. 1491–1500.

[4] Bensoussan A., Lions J.-L., *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationelles*// Dunod, Paris, 1982.

Явление начального скачка в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях

Дауылбаев М. К. (г. Алматы)

Рассмотрим на $0 \le t \le 1$ линейное интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t)+ \\ + \int\limits_a^1 \left[H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \cdots + H_{n-1}(t,x)y^{(n-1)}(x,\varepsilon)\right] dx \end{gathered} \tag{1}$$

с начальными условиями в точке $t_0 \in (0,1]$:

$$y(t_0,\varepsilon) = \alpha_0, \;\; y'(t_0,\varepsilon) = \alpha_1 \;, \;\ldots,\; y^{(n-1)}(t_0,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где $A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $F(t)$ на $[0,1]$, а $H_i(t,x)$, $i = \overline{0,n-1}$ в области $D = (0 \le t \le 1, a \le x \le 1)$ являются достаточно гладкими функциями и $A_1(t) > 0$, $0 \le t \le 1$, α_i, $i\overline{0,n-1}$ — известные постоянные, $0 \le a < t_0 < 1$.

Решение дифференциального уравнения, получаемого из (1) при $H_i(t,x) \equiv 0, i = \overline{0,n-1}$ с начальными условиями (2) при условии $A_1(t) > 0$, $0 \le t \le 1$ на промежутке $t_0 \le t \le 1$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к решению обычного невозмущенного уравнения $L_0\bar{y}F(t)$, а на полуинтервале $0 \le t < t_0$ уходит на бесконечность и, тем самым, не имеет конечного предела.

В настоящей работе доказано, что решение интегро-дифференциальной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ будет ограниченным на отрезке $a \le t \le 1$ и в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка $(n-2)$–го порядка.

Локальная управляемость двупараметрических семейств бидинамических систем на поверхностях

Давыдов А.А., Комаров М.А. (г. Владимир)

Полидинамическая система на многообразии задаётся конечным числом гладких полей допустимых скоростей. Такие системы естественно появляются при изучении аффинных управляемых систем (см., например, [1]). Движение на некотором промежутке времени с этими скоростями и с переключения между ними называется *допустимым*. Допустимое движение задает ее *допустимую траекторию* системы.

Точка $B \in M$ называется достижимой из точки $A \in M$ за время T, если существует допустимое движение системы, переводящее точку A в точку B за время T. Полидинамическая система называется *локально управляемой в точке* P многообразия, если для любой окрестности U этой точки существует время $T > 0$ такое, что любые две точки из достаточно малой окрестности точки P достижимы одна из другой за время меньшее T и по траектории, лежащей в окрестности U. Если время T можно выбрать сколь угодно малым, то говорят о *локальной управляемости в точке P за малое время*.

Для типичных управляемых систем на поверхностях множества точек, обладающих одинаковыми свойствами локальной управляемости, были полностью расклассифицированы в [1]. Для семейств систем соответствующая теория еще только создается. Точнее, эти множества и их бифуркации изучены для однопараметрических семейств бидинамических систем на поверхностях (см. [2]), а также для типичных однопараметрических семейств афинных систем с неограниченным управлением найдены инварианты таких семейств, связанные со свойствами их локальной управляемости (см. [3]).

Доклад посвящен результатам анализа этих множеств для двупараметрических семейств бидинамических систем на поверхностях, в том числе классификации бифуркаций этих множеств при изменении параметров.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 06-01-00661a.

Литература

[1] Davydov A.A. *Qualitative theory of control systems* // Translations of Mathematical Monographs. 141. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). viii, 147 p. (1994).

[2] Azevedo L. *Transitividade Local de Sistemas Polidinamicos.*// Departamento de Matematica Aplicada Faculdade de Ciencias da Universidade do Porto, 2006.

[3] Jakubczyk B., Respondek W. *Bifurcations of 1-parameter families of control-affine systems in the plane* // SIAM J. Control Optim. Vol. 44 (2006), No. 6, pp. 2038-2062.

Об одном классе систем дифференциальных уравнений и уравнениях с запаздывающим аргументом

Демиденко Г. В. (г. Новосибирск)

В работе рассматривается задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = -k_{n,1}x_1 + g(x_n), \\
&\frac{dx_j}{dt} = k_{n,j-1}x_{j-1} - k_{n,j}x_j, \quad j = 2,\ldots,n-1, \\
&\frac{dx_n}{dt} = k_{n,n-1}x_{n-1} - \theta x_n, \quad \theta > 0, \\
&x_i|_{t=0} = x_i^0, \quad i = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Такие системы возникают при описании многостадийного синтеза вещества [1]. Компоненты $x_i(t)$ решения задачи определяют концентрацию вещества на i-й стадии синтеза, время протекания которой $(k_{n,i})^{-1}$.

Одной из основных целей биологов является определение конечного продукта, т. е. нахождение последней компоненты $x_n(t)$ решения задачи (1). В случае систем небольших размеров ее можно вычислять на ЭВМ с высокой точностью. Однако при моделировании генных сетей необходимо учитывать синтез многих десятков и даже сотен тысяч промежуточных стадий вещества, что приводит к существенным сложностям при расчетах на ЭВМ. Поэтому при изучении соответствующих моделей исследователь сталкивается с необходимостью решать "проблему большой размерности".

В настоящей работе доказано, что при условиях на коэффициенты $k_{n,i}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_{n,i}} \approx \tau, \qquad \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\theta}{k_{n,i}}\right) \approx e^{-\theta\tau}, \quad n \gg 1,$$

значение последней компоненты решения задачи (1) можно приближенно вычислять, решая начальную задачу для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Установлены оценки аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$, из которых вытекает, что возникающая "проблема большой размерности" при моделировании многостадийного синтеза вещества может быть решена с высокой точностью.

Литература

[1] Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. *Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей* // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

О реконструкции полиномиальных нелинейностей в уравнениях математической физики

Демидов А.С. (МГУ)

Характерный пример обсуждаемой темы относится к обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u) + x^2 g(u) \geq 0\,, \tag{1}$$

рассматриваемого в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$, где $x > x_0 > 0$. На границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области задается функция $\Psi : \Gamma \to \mathbb{R}$. Далее, фиксируется достаточно малое число $\varepsilon \geq 0$ и ставится вопрос о реконструкции всех существенно различных (Ψ, ε)-пар полиномиальных функций $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, т.е. таких, для которых найдется решение u уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u\big|_\Gamma = 0 \quad \text{и} \quad \Big|\Phi - \Psi\Big| \leq \varepsilon\,, \quad \int_\Gamma \Phi \neq 0\,, \quad \text{где} \quad \Phi \stackrel{def}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma .$$

При этом пары

$$(f^\#, g^\#) : u \mapsto (\sum_{j=0}^{J} f_j^\# u^j, \sum_{k=0}^{K} g_k^\# u^k) \qquad \text{и} \qquad (f^\flat, g^\flat) : u \mapsto (\sum_{j=0}^{J} f_j^\flat u^j, \sum_{k=0}^{K} g_k^\flat u^k)$$

считаются существенно различными, если $\left(\sum_{j=0}^{J} |f_j^\# - f_j^\flat| + \sum_{k=0}^{K} |g_k^\# - g_k^\flat|\right) \geq C\varepsilon$, где C — некоторая положительная константа.

В докладе будет изложено необходимое условие (являющееся обобщением соответствующего условия леммы из заметки [1] или, что то же самое, леммы 1 из работы [2]; см. также [3]), которому должны удовлетворять существенно различные (Ψ, ε)-пары для уравнения (1) и их аналоги — (Ψ, ε)-ансамбли полиномиальных нелинейностей для стационарных или эволюционных уравнений математической физики (таких, например, как система уравнений, описывающая процессы горения и детонации).

Базирующийся на этом чрезвычайно простом (и почти очевидном) необходимом условии алгоритм позволяет сравнительно быстро (по сравнению с применявшимися ранее методами) отбирать лишь существенно различные (Ψ, ε)-ансамбли из множества испытуемых полиномиальных нелинейностей. Иначе говоря, дается алгоритм реконструкции искомых нелинейностей в классе полиномиальных функций.

Литература

[1]. А.С. Демидов (2000) Об обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. *УМН* **55**, вып. 6, 131–132. 5.

[2]. А.С. Демидов, А.Ю. Попов (2008) Пример области с гладкой границей, в которой обратная задача для уравнения Грэда–Шафранова разрешима однозначно. *Труды семинара им. И.Г. Петровского* (принято к печати).

[3]. A.S. Demidov, M. Moussaoui (2004) An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. *Inverse Problems* **20**, 137–154.

Обратные задачи для квазилинейного волнового уравнения

Денисов А. М. (г. Москва)

В докладе рассматриваются две обратные коэффициентные задачи для квазилинейного волнового уравнения и доказываются теоремы существования и единственности их решения.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x, u_x(x,t))q(x) + F(u(x,t))p(x), \quad (x,t) \in \Delta_d,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq d,$$

где множество $\Delta_d = \{(x,t) : 0 \le t \le \frac{d}{2a}, \quad at \le x \le d - at\}$.

При достаточно стандартных предположениях решение задачи Коши существует и единственно. Сформулируем обратные задачи.

Обратная задача 1. Пусть $q(x) = 0$, функции $F(s)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы, а $p(x)$ неизвестна. Требуется определить $p(x)$, если известна дополнительная информация о решении задачи Коши

$$u(\omega(t), t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $\omega(t)$, $g(t)$ – заданные функции,

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t) \ge at, \quad \omega'(t) > 0, \quad t \in [0, d/2a],$$

а T является корнем уравнения $\omega(t) + at = d$.

Обратная задача 2. Пусть $p(x) = 0$, функции $f(x,s)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы, а $q(x)$ неизвестна. Требуется определить $q(x)$, если задана такая же дополнительная информация о решении задачи Коши, как и в обратной задаче 1.

Доказательство существования и единственности решения обратных задач основано на их редукции к нелинейным операторным уравнениям относительно неизвестных функций и доказательстве однозначной разрешимости этих уравнений.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 05-01-00232.

Разрешимость задачи о движении двух несжимаемых жидкостей без учёта сил поверхностного натяжения

Денисова И. В. (г. Санкт-Петербург)

Мы рассматриваем задачу о движении двух несжимаемых жидкостей, находящихся в областях $\Omega_t^+ \subset \mathbb{R}^3$ и $\Omega_t^- \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_t^+}$ с неизвестной замкнутой поверхностью раздела Γ_t, без учёта сил поверхностного натяжения. Внешняя граница $S \equiv \partial(\Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-)$ задана, при этом $S \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Требуется найти границу раздела Γ_t, а также поле скоростей $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и функцию давления p внешней и внутренней жидкостей, удовлетворяющих начально–краевой задаче для уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^\pm \nabla^2 \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega_t^\pm,\ t > 0,$$
$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad [\mathbf{v}]|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\mathbb{T}\mathbf{n}]|_{\Gamma_t} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0,$$

где $\nu^\pm, \rho^\pm$ — ступенчатые функции вязкостей и плотностей жидкостей, соответственно, $\mathbf{f}$ — заданное поле массовых сил, $\mathbf{v}_0$ — начальное распределение скоростей, $\mathbb{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Ω_t^+; $[\mathbf{w}]|_{\Gamma_t}$ — скачок вектора $\mathbf{w}$ при переходе через Γ_t из Ω_t^+ в Ω_t^-. Кроме того, предполагается, что частицы жидкости не покидают Γ_t с течением времени, при этом в начальный момент $t = 0$ Γ_0 — заданная поверхность.

Для этой задачи при достаточно малых гладких заданных функциях доказывается существование решения $(\mathbf{v}, p)$ в анизотропных пространствах Гёльдера. Доказательство этого факта опирается на существование явного решения и его оценки для модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей (см. [1]).

Литература

[1] Denisova I. V., Model problem connected with the motion of two incompressible fluids (to appear in *Advances in Math. Sciences and Applications*, **17** (2007), no.1).

Спектральные свойства G-самосопряженных операторов

Денисов М. С. (г. Воронеж)

Пусть $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot) \rangle$ — гильбертово пространство. $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$— линейные, непрерывные и самосопряженные операторы, при этом $0 \notin \sigma_p(G)$ и $0 \notin \sigma_p(A)$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с формой $[x, y] := (Gx, y)$ называется сингулярным G-пространством, если $0 \in \sigma_c(G)$, и регулярным G-пространством при $0 \in \rho(G)$.

В работе методами теории пространств с индефинитной метрикой исследуются спектральные свойства операторов AG и GA, если отрицательные части спектров операторов A и G ($\sigma(A) \cap (-\infty, 0)$ и $\sigma(G) \cap (-\infty, 0)$) состоят из n и m собственных значений с учетом их кратности, причем $n \neq m$.

Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Литература

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С *Теория линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. М. Наука 1986. 352стр.*

[2] Langer.H *Spectralfunctionen einer Klasse J-selbstadjungierter Operatoren. — Math. Nachr., 1967, 33, 1-2, S. 107-120.*

Problems in multidimensional scattering theory

Denisov S. A.

I will report on the recent progress in scattering theory for multidimensional Schrodinger and Dirac operators. The main goal is to obtain some analogs of the classical Szego results for polynomials orthogonal on the unit circle. We will discuss the operators defined on Caley tree and in Euclidean space with various types of decaying potentials. These models describe the wave propagation in the media.

О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений в классах экспоненциально растущих начальных функций

Денисов В.Н. (МГУ)

Изучаются достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, при выполнении которых решение задачи Коши

$$\Delta u + \bar{b}(x,t)\nabla u + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in R^N, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{3}$$

равномерно по x на любом компакте K в R^N, при любой начальной функции $u_0(x)$, растущей на бесконечности не быстрее, чем $|x|^m e^{a|x|^n}$, $a > 0$.

О новых асимметричных центральных конфигурациях в ньютоновой проблеме многих тел

Диарова Д.М. (Атырауский институт нефти и газа, Казахстан), Земцова Н.И. (ВЦ РАН), Ихсанов Е.В. (Атытауский инженерно-гуманитарный институт, Казахстан)

Доказано, что в ньютоновой проблеме 9-ти тел существуют "составные"центральные конфигурации в смысле Винтнера, состоящие из двух ромбов или из ромба и прямоугольника. Выведены точные соотношения между геометрическими и динамическими параметрами моделей, гарантирующие существование этих конфигураций. Впервые показано, что в проблеме многих тел существуют конфигурации с "большими"массами. Доказано, что эти конфигурации неустойчивы при воздействии начальных возмущений.

Литература

[1] Е.А.Гребеников, Д.М.Диарова, Н.И.Земцова *Существование и неустойчивость ромбоподобных центральных конфигураций в смысле Уинтнера для ньютоновой модели девяти тел. Сб. "Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа", ВЦ РАН, 2006, с.65-76*

[2] D.M.Diarova, N.I.Zemtsova, E.V.Ikhsanov *Definition of the central configurations in one model of a nine body problem with big masses, -4 International Workshop, Siedlce,Poland, 31.01.07-03.02.07, p.59-66*

Generalized Canonical Maslov Operator for Localized Asymptotics and Tsunami Waves

Dobrokhotov S. (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow)

We suggest a new asymptotic representation for the solutions to the multidimensional wave equations with variable velocity with localized initial data. This representation is the generalization of the Maslov canonical operator. It is based also on a simple relationship between fast decaying and fast oscillating solutions and on boundary layer ideas. Our main result is the explicit formula which establishes the connection between initial localized perturbations and wave profiles near the wave fronts including the neighborhood of backtracking (focal or turning) and self intersection points. We show that wave profiles are related with a form of initial sources and also with the Lagrangian manifolds organized by the rays and wavefronts. In particular we discuss the influence of such topological characteristics like the Maslov and Morse indices to metamorphosis of the profiles after crossing the focal points. We apply these formulas to the problem of a propagation of tsunami waves in the frame of so-called "piston model".

This work was done together with S.Sekerzh-Zenkovich, B.Tirozzi, B.Volkov and was partially supported by RFBR grant N 05-01-00968 and Agreement Between University "La Sapienza", Rome and Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow.

References

[1] S.Yu. Dobrokhotov, S.Ya Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, T.Ya. Tudorovskiy *The description of tsunami waves propagation based on the Maslov canonical operator, Doklady Mathematics, 2006, v.74, N 1, pp. 592-596*

[2] S.Dobrokhotov, S.Sekerzh-Zenkovich, B.Tirozzi, B.Volkov *Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model, Russ. Journ. Earth Sciences, 2006, v.8, ES403, pp.1-12*

Дефектные числа одночленного симметрического иррегулярного дифференциального оператора чётного порядка

Долгих И.Н. (Поморский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное выражение произвольного порядка $2m$ $(m = 1, 2, \dots)$

$$l_{2m}[y](x) = (-1)^m (c(x) y^{(m)}(x))^{(m)},$$

заданное на отрезке $I := [-1, 1]$.

Предположим, что коэффициент $c(x)$ выражения l_{2m} представляется в виде

$$c(x) = \begin{cases} x^p a(x), & \text{если } x \in [0; 1]; \\ x^q b(x), & \text{если } x \in [-1; 0], \end{cases}$$

где $p, q \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$, функции $a(z)$ и $b(z)$ - аналитические функции при $|z| \le x_0 < 1$ и

$$a(z) := a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j, \quad a_0 \neq 0,$$

$$b(z) := b_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j, \quad b_0 \neq 0.$$

Пусть L_0 - минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением l_{2m} в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$. Обозначим общее значение его дефектных чисел в верхней и нижней открытых комплексных полуплоскостях символом n_{pq}.

Теорема. *Дефектное число оператора L_0 определяется по формуле:*

$$n_{pq} = \begin{cases} 4m - \max\{p, q\}, & \textit{если } p, q \in \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\}; \\ 2m + \min\{p, q\}, & \textit{если } p, q \in \{1, 2, \dots, m\}; \\ 3m + p - q, & \textit{если } p \in \{1, 2, \dots, m\},\ q \in \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\}. \end{cases}$$

Литература

[1] Орочко Ю.Б. *Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала* // Матем. сборник. – 2005. – Т. 196, № 5. – С. 53-82.

On the correlation function of statistical solutions of the Navier-Stokes equations

Dostoglou S. (University of Missouri)

We shall address statistical solutions of the Navier-Stokes equations on three dimensions in the spirit of Kolmogorov's theory of turbulence and following the work of M.I. Vishik and A.V. Fursikov.

In particular, we shall discuss results concerning the space-ergodicity of homogeneous solutions, existence of isotropic solutions, and properties of correlation functions and average energy densities of such statistical solutions.

Нелинейные многомерные уравнения, связанные с коммутирующими векторными полями и их интегрирование.

Дрюма. В. С. (г. Кишинев)

Условие коммутативности пары векторных полей

$$[L_1, L_2]\Psi = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1\Psi = l(U_z + U_y)\Psi_l - l\exp(-U)\Psi_z + \Psi_y \tag{2}$$

и

$$L_2\Psi = (l^2(U_y + U_z) + l(U_x + \exp(U)U_z + \exp(U)U_y))\Psi_l - (l^2\exp(-U) + l)\Psi_z + \Psi_x \tag{3}$$

эквивалентно нелинейному уравнению относительно функции $U(x, y, z)$

$$U_{xz} = (\exp(U))_{yy} + (\exp(U))_{yz}. \tag{4}$$

Предлагается метод построения точных решений уравнения (4), а также его обобщений (см. [1]).

Литература

[1] Dryuma V. S. *arXiv:nlin.SI/0612046 v1 20 Dec 2006, pp.1-14*

Асимптотическое разложения решения стационарного уравнения теплопроводности в многопараметрических периодических средах

Дубинская В. Ю. (г. Москва)

В неоднородной периодической среде рассматривается стационарная задача теплопроводности. В зависимости от количества характерных размеров ячейки периодичности полное асимптотическое разложение решения ищется по одному из двух сценариев, основанных на методе асимптотического осреднения (см. [1]).

В области, периодической по трем направлениям, задано уравнение

$$\mathbf{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_m}\left(a_{mn}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f(x_1, x_2), \quad x \in \Omega, \quad \Omega = 0;$$

где $a_{mn}(\xi)$ – 1-периодические бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям симметрии и эллиптичности.

Если $\varepsilon \sim \delta$, то формальное асимптотическое решение задачи ищется в виде ряда по степеням двух малых параметров – ε и h/ε, а если $h \ll \delta \ll \varepsilon$, то трех:

$$u^{(\infty)} \simeq \sum_{p,q,r\geq 0} \varepsilon^p\,(\delta/\varepsilon)^q\,(h/\delta)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi)D^i v(x),$$

где $p, q, r \in \mathbf{Z}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,(x_1/\varepsilon, x_2/\delta, x_3/h)$, $i = (i_1, ..., i_p)$, $D^i * = \partial^p * /\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_p}$.

При наличии двух малых параметров отыскание компонент, зависящих от быстрых переменных, проводится в два этапа, а при наличии трех - в три, но в этом случае все ячеечные задачи решаются явно, а коэффициенты осредненного уравнения вычисляются непосредственно через коэффициенты исходного уравнения.

Лемма. Коэффициенты осредненного уравнения $\tilde{a}_{mn}$ удовлетворяют условиям симметрии и эллиптичности.

Решение уравнения, осредненного по быстрым переменным, вновь отыскивается в виде ряда по степеням тех же малых величин. В случае трех малых параметров это будет ряд

$$v^{(\infty)} \simeq \sum_{k,l,m\geq 0} \varepsilon^k (\delta/\varepsilon)^l (h/\delta)^m v_k^{l,m}(x),$$

Обозначим $u_{(P)}^{(Q,R)}(x;\xi) =$

$$= \sum_{\substack{p=\overline{0,P},\\ q=\overline{0,Q},\\ r=\overline{0,R}.}} \varepsilon^p \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^q \left(\frac{h}{\delta}\right)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi) D^i \sum_{\substack{k=\overline{0,P},\\ l=\overline{0,Q},\\ m=\overline{0,R}.}} \varepsilon^k \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^l \left(\frac{h}{\delta}\right)^m v_k^{l,m}(x).$$

Теорема. Для частичной суммы $u_{(P)}^{(Q,R)}$ верны оценки

$$\left\| u - u_{(P)}^{(Q,R)} \right\|_{L_2(\Omega)} \underline{\underline{O}} \left(\varepsilon^{P+1} + (\delta/\varepsilon)^{Q+1} + (h/\delta)^{R+1} \right),$$

$$\left\| u - u_{(P)}^{(Q,R)} \right\|_{W_2^1(\Omega)} \underline{\underline{O}} \left(\varepsilon^{P} + (\delta/\varepsilon)^{Q} + (h/\delta)^{R} \right).$$

Доказательство проводится с помощью априорных оценок невязки правой части исходного уравнения и (для среды, периодической по двум направлениям) невязки краевого условия.

Литература

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. *Осреднение процессов в периодических средах.* - М: Наука, 1984.

[2] Дубинская В.Ю. Асимптотическое разложение решения стационарной задачи теплопроводности в среде с двумя малыми параметрами // *Труды Московского Математического Общества.* 2001. Т. 62, С. 105-135.

О разрешимости задачи Дирихле для системы Коши-Римана в L_p-шкалах

Дубинский Ю. А. (г. Москва)

Рассматривается задача Дирихле

$$\nabla_{\bar{z}} p(z) = q(z), \quad z \in G \subset \mathbb{C}^n,$$
$$p(z)|_{\partial G} = 0,$$

где $\nabla_{\bar{z}} = \{\partial_{\bar{z}_1}, \ldots, \partial_{\bar{z}_n}\}$ — комплексный градиент Коши-Римана.

Устанавливается нормальная (по Хаусдорфу) разрешимость этой задачи в соболевских шкалах W_p^m, $\overset{\circ}{W}{}_p^m$, а также в градиентно-дивергентной шкале

$$D_p^{m,k} = \left\{ q(z) \in W_p^m \;\&\; \operatorname{div} q(z) \in W_p^{m-1+k} \right\}, \quad m \geq 0, \quad k \geq 0.$$

Применение оптимальных интегральных представлений для корректного восстановления решений в обратной задаче теплопроводности

Дубовицкий В. А.

Рассмотрим граничную задачу для параболического уравнения

$$\begin{gathered}\partial u/\partial t = Lu, \quad (x,t) \in Q^T = G \times [0,T] \\ D_\nu u + h(x)u = 0|_{S_1}, \quad u = 0|_{S_2} = u_0(x),\end{gathered} \tag{1}$$

где G ограниченная область конечного периметра, $Lu = \sum_{i,j=1}^n D_{x_i}(a_{ij}D_{x_j}u)$ сильно эллиптический оператор с гладкими коэффициентами $a_{ij}(x)$, ν - внешняя нормаль к G, а S_1, S_2 есть разбиение границы G на непересекающиеся множества. Решение (1) понимается в классе обобщенных функций $BV^2(QT)$, причем начальное условие $u_0(x)$ есть предел-след $u(x,t)$ при $t \to 0+$ в $L_2(G)$. Известно [1], что граничная задача (1) однозначно разрешима и ее решение выражается методом Фурье.

Рассмотрим связанную с (1) обратную задачу определения начального условия $u_0(x)$ по значениям решения $u(x,T)$ на верхнем слое цилиндра. Эта постановка обобщает классическую обратную задачу ретроспективной теплопроводности и некорректна при любой трактовке, связывающей ее с линейным операторным уравнением первого рода. Традиционно эту трудность пытаются преодолеть техникой регуляризации. Здесь же предложен альтернативный регуляризации прямой путь устойчивого восстановления обобщенного начального условия.

Для $u(x,t)$ известно интегральное представление [1]

$$u(x,t) = \int_G \Gamma(x,t,y)u_0(y)dy,$$

где $\Gamma(x,t,y)$ есть непрерывная при $t > 0, \quad x,y \in \overline{G}$ функция, выражаемая в рамках метода Фурье через собственные функции и спектр (1).

Рассмотрим выпуклую экстремальную задачу

$$\int_G dx(\int_{\overline{G}} \Gamma(x,t,y)u_0(dy) - z(z))^2 \to \min, \quad u_0(dy) \in M(\overline{G}), \tag{2}$$

где $u_0(dy)$ есть неотрицательная борелевская мера на компакте $\overline{G}$, а $M(\overline{G})$ выпуклый конус всех таких мер. Решение (2) называем оптимальным интегральным представлением функции z посредством ядра $\Gamma(x,t,y)$. При $z(x) = u(x,T)$ решение (2) совпадает с начальным условием в (1). Следующая теорема характеризует устойчивость данной концепции обобщенного решения обратной задачи к возмущениям функции $z(x)$.

Теорема. Решение (2) существует, единственно и слабо непрерывно зависит от $z \in L_2(G)$.

При численной реализации уравнение (1) дискретизируется по неявной разностной схеме и соответствующая задача (2) принимает вид линейной задачи метода наименьших квадратов на конусе неотрицательных векторов. Она эффективно решается методом логарифмических штрафов в комбинации со спуском второго порядка, а при малой размерности сетки узлов в G - также конечным алгоритмом NNLS. В докладе приводятся примеры восстановления начальных распределений энергии в обратной задаче теплопроводности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (04-01-97202-р2004наукоград а).

[1] А.И.Вольперт, С.И.Худяев, *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.* М: Наука, 1975.

Critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the *tritronquée* solution to the Painlevé-I equation

Dubrovin B. (SISSA, Trieste, and Steklov Mathematical Institute, Moscow)

We discuss the critical behaviour of solutions to focusing nonlinear Schrödinger equation near the point of "gradient catastrophe" . We argue that this behaviour is described by a particular solution to the Painlevé-I equation restricted onto certain lines on the complex plane. Analytical and numerical evidences supporting this conjecture will be presented in the talk.

On Convergence to Statistical Equilibrium in a Crystal Coupled to Scalar Field

Dudnikova T. V. , Komech A. I. (г. Электросталь, г. Москва)

In [1] - [3], we have started an analysis of convergence for partial differential equations of hyperbolic type in $\mathbf{R}^d$ and for harmonic crystals in $\mathbf{Z}^d$. Here we extend the results to a harmonic crystal coupled to a scalar Klein-Gordon field. We study the Hamiltonian system with the following Hamiltonian functional:

$$\begin{aligned} H(\psi,u,\pi,v) \;=\; & \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big(|\nabla\psi(x)|^2+|\pi(x)|^2+m_0^2|\psi(x)|^2\Big)\,dx \\ & +\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\Big(\sum_{j=1}^{d}|u(k+e_j)-u(k)|^2+|v(k)|^2+\nu_0^2|u(k)|^2\Big) \\ & +\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\int R(x-k)\cdot u(k)\psi(x)\,dx, \end{aligned}$$

involving a real scalar field $\psi(x)$ and its momentum $\pi(x)$, $x\in\mathbf{R}^d$, coupled to a "simple lattice"described by the deviations $u(k)\in\mathbf{R}^n$ of "atoms"and their velocities $v(k)\in\mathbf{R}^n$, $k\in\mathbf{Z}^d$. Here $m_0,\nu_0>0$, $R(x)$ is a $\mathbf{R}^n$-valued smooth function, exponentially decreasing at infinity.

Assume that an initial state $Y_0=(\psi_0,u_0,\pi_0,v_0)$ of the coupled system is a random function with a finite mean density of energy which also satisfies Rosenblatt- or Ibragimov-type mixing condition. Moreover, initial correlation functions are translation-invariant with respect to translations by $\mathbf{Z}^d$. For a given $t\in\mathbf{R}$, we denote by μ_t the probability measure defining the distribution of the solution $Y(t)=(\psi(\cdot,t),u(\cdot,t),\dot\psi(\cdot,t),\dot u(\cdot,t))$ to the dynamical equations with the random initial state Y_0.

The main result (see [4]) is the weak convergence of the measures μ_t to a limit stationary measure μ_∞,

$$\mu_t \rightharpoonup \mu_\infty \quad \text{as} \quad t\to\infty.$$

The measure μ_∞ is Gaussian and translation-invariant with respect to the group $\mathbf{Z}^d$. We give explicit formulas for the covariance of the measure μ_∞.

References

[1] Dudnikova T. V., Komech A.I., Spohn H., *Markov Processes and Related Fields* 8 (2002), no.1, 43-80.

[2] Dudnikova T. V., Komech A.I., Mauser N., *J. Stat. Phys.* 114 (2004), no.3/4, 1035-1083.

[3] Dudnikova T. V., Komech A.I., *Theory Probab. Appl.* 50 (2005), no.4, 675-710.

[4] Dudnikova T. V., Komech A.I., *Russ. J. Math. Phys.* 12 (2005), no.3, 301-325.

Неравенство Гамильтона - Якоби и достаточные условия в оптимальном управлении

Дыхта В. А. (г. Иркутск)

Доклад посвящен применению некласических решений неравенства Гамильтона - Якоби для оценок множества достижимости управляемой системы $\dot{x} = f(t, x, u)$, $u(t) \in U$ и вывода основанных на них достаточных условий абсолютного и сильного экстремума в задаче оптимального управления с общими концевыми ограничениями (типа $(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1) \in C)$.

Чтобы охватить случаи измеримой зависимости функции f от времени и экстремалей с конечным числом переключений управления, естественно рассматривать обобщенные решения $\varphi(t, x)$ неравенства Гамильтона - Якоби

$$\sup_{u \in U} D^{+}\varphi[(t, x); (1, f(t, x, u))] \leq 0$$

(записанного через верхнюю производную Дини по направлению), допускающие разрывы по времени при липшицевой зависимости по x.

Конкретизация базовых достаточных условий оптимальности, основанных на описанном замысле (см. [1]) применительно к исследованию на сильный минимум неособых экстремалей Понтрягина приводит к появлению в системе условий оптимальности разрывных решений матричного дифференциального неравенства (уравнения) типа Риккати. Тем самым расширяется ареал применимости классической теории условий Якоби отсутствия сопряженных точек из вариационного исчисления.

Литература

[1] Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова - Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техн. Совр. математика и ее приложения./ ВИНИТИ РАН. - 2002. - С.52-84

О нелокальных задачах для уравнения теплопроводности со спектральным параметром.

Дженалиев М. Т. , Амангалиева М. М. , Рамазанов М. И. , Туймебаева. А. Е.
(г. Алматы)

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. В области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ во, введенных в работе, классах с весами существенно ограниченных и суммируемых функций рассматриваются следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \\ u(x,0) = 0,\ u(0,t) = \lambda u(x,t)_{|x=t^{\omega}}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) - \overline{\lambda}\delta(x-t^\omega) \otimes v_x(0,t) = g(x,t), \\ v(x,\infty) = v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\omega \in \mathbb{R}$, f, g– заданы.

Граничные задачи (1) и (2) сводятся соответственно в пространствах $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и $L_1(\mathbb{R}_+)$ к интегральным уравнениям:

$$\mu(t) = \lambda \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau + f_1(t), \quad \nu(t) - \overline{\lambda} \int_t^\infty K(\tau,t)\nu(\tau)d\tau = g_1(t), \tag{3}$$

относительно неизвестных функций

$$\mu(t) = t^{3/2-\omega}u(x,t)_{|x=t^\omega}, \quad \nu(t) = t^{\omega-3/2}v_x(0,t),$$

где $f_1 \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $g_1 \in L_1(\mathbb{R}_+)$ определяются соответственно заданными функциями f и g,

$$K(t,\tau) = (t/\tau)^{3/2-\omega} \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right),$$

$$K(t,\cdot) \in L_1(\mathbb{R}_+) \text{ для } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{t\to+0} \int_0^t K(t,\tau)d\tau = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Предельное соотношение (4) отличает уравнения (3) от известных уравнений Вольтерры второго рода.

В докладе в зависимости от значений показателя степени ω показано, что граничная задача (3) является нётеровой:

— с неположительным индексом, убывающим вместе с модулем спектрального параметра λ, при $\omega < 1/2$; — с индексом, равным нулю или единице, при $\omega = 1/2$ (автомодельный случай),

— и с неотрицательным индексом, растущим вместе с модулем спектрального параметра λ, при $\omega > 1/2$.

Частично результаты работы опубликованы в [1].

Литература

[1] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. *"Сиб.мат.журнал", 2006, 47, № 3, 527-547.*

Метод параметризации решения линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений

Джумабаев Д.С. (Институт математики МОН РК)

В сообщении на $[0,T]$ рассматривается двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T] \times [0,T]$.

Отрезок $[0,T]$ делится на части с шагом $h > 0 : Nh = T$, значения решения в начальных точках интервалов разбиения $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, вводятся как дополнительные параметры и задача (1), (2) заменяется эквивалентной многоточечной краевой задачей с параметром для систем интегро-дифференциальных уравнений.

Предлагается алгоритм нахождения решения краевой задачи с параметром. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: а) решение линейной системы уравнений относительно введенных параметров; б) решение специальной задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений. Установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Исследование интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона с помощью нормальной формы

Еднерал В. Ф. (г. Москва)

Рассматривается специальный случай $A = B$, $Mgx_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$ системы уравнений Эйлера–Пуассона, описывающей движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Вблизи одного двупараметрического семейства ее неподвижных решений изучаются ее нормальные формы (см. [1]). На этом семействе выделяются однопараметрические семейства с фиксированными резонансами 1:2 и 1:3. Для них изучается структура нормальной формы и первых интегралов (см. [2]). Существует последовательность необходимых условий наличия дополнительного формального первого интеграла при различных значениях параметра. Невыполнение какого-либо из этих условий является достаточным условием отсутствия формальной интегрируемости системы и, таким образом, отсутствия и локальной, а следовательно и глобальной интегрируемости. Вычислениями нормальной формы (см. [3]-[5]) устанавливается, что условия, необходимые для существования дополнительного локального первого интеграла, не выполняются во всех случаях, кроме классических случаев глобальной интегрируемости. Также найдены неподвижные решения, вблизи которых система локально интегрируема (см. [6]).

Литература

[1] Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1979. 256 с.

[2] Брюно А. Д. *Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы.* Прикладная математика и механика, 2007, т. 71, вып. 2, с. 192–227.

[3] Брюно А.Д., Еднерал В.Ф. *Нормальная форма и интегрируемость систем ОДУ.* Программирование, 2006, т. 32, No 3, с. 22–29.

[4] Брюно А.Д., Еднерал В.Ф. *Вычисление нормальных форм уравнений Эйлера–Пуассона.* Препринт No 1, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2007, 28 с.

[5] Edneral V.F. *Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method.* Differential Equations with Symbolic Computation. Dongming Wang and Zhimming Zheng Eds. Birkhauzer Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005, p. 173–200.

[6] Брюно А. Д. *Локальная интегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона.* Доклады РАН, 2006, т. 409, No 3, с. 1–5.

Attracting Sets and the Smoothness of a Simplest Skew Product of Interval Maps

Efremova L. S. (Nizhny Novgorod)

The description is given of ω-limit sets of a C^1-smooth skew product of interval maps with a closed periodic points set. It is shown the convergence (or, vice versa, the divergence) of the special serieses constructing with the use of the trajectories defines the structure of the ω-limit sets.

Definition. We say a compact set $A \subset I$ is a nonchaotic attractor of a skew product $F : I \to I$ (I is a closed rectangle distinguished by coordinate straight lines in the plane) if there is an absorbing neighborhood (i.e. a neighborhood $U(A)$ satisfying (i) $F(U(A)) \subset U(A)$; (ii) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} F^n(U(A))$), and the restriction $F_{|A}$ has zero topological entropy.

The example is constructed of the C^1-smooth map with closed periodic points set such that there is the one-dimensional nonchaotic attractor (unstable in C^1-norm), which is ω-limit set of some trajectory.

References

[1] Anosov D. V. *Dynamical systems in 60-th years: hyperbolic revolution// In: Mathematical events of XX century. M.:"Phazis". 2003. P.P. 1 -18 (in Russian).*

[2] Efremova L. S. *On the one-dimensional attractor of a simplest skew product of interval maps// Matem. Zametki (in Russian, to appear).*

Об одном классе эллиптических краевых задач с малым параметром

Егоров Ю. В. (г. Тулуза)

Мы рассматриваем эллиптические краевые задачи с малым параметром ε следующего вида : в Банаховом пространстве V найти такой элемент u^ε, что

$$a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Квадратичные формы a и b непрерывны и положительны, а форма $a + b$ коэрцитивна. При каждом $\varepsilon > 0$ задача является эллиптической и однозначно разрешима, но при $\varepsilon = 0$ не существует решения задачи в пространстве распределений.

Такие задачи возникают, например, в теории тонких оболочек. В частности, такие уравнения описывают локальную деформацию кузова легкового автомобиля или фюзеляжа самолета.

Можно показать, что предел решений при $\varepsilon \to 0$ существует в некотором функциональном пространстве, определяемом формами a и b . Хотя этот предел и не является распределением, однако для практических приложений полезно, что существует предел функции $\psi_\varepsilon(D)u^\varepsilon$, который является распределением. Здесь $\psi_\varepsilon(D)$) - псевдодифференциальный оператор с ограниченным сиволом, носитель которого имеет диаметр $\ln 1/\varepsilon$.

Мы рассматриваем ряд примеров.

Работа выполнена совместно с Н. Менье и Э. Санчес-Паленсия.

Литература

[1] Yu. V. Egorov, N. Meunier, E. Sanchez-Palencia , *Rigorous and heuristic treatment of certain sensitive singular perturbations, Journal of Math. Analysis and Applications, to be published*

Об одной задаче динамики тонкого неоднородного вязкоупругого стержня из материала Кельвина-Фойгхта.

Егорова А.А. (НИИ математики при ЯГУ им.М.К. Аммосова, г.Якутск.)

В работе строится полное асимптотическое разложение трехмерной задачи линейной теории вязкоупругости в тонком неоднородном стержне, испытывающем действие сил по всему объему. Усреднение проводится по методу Н.С.Бахвалова [1]. Рассматривается бесконечная область типа тонкого стержня $x \in U_\varepsilon = \mathbb{R} \times \beta_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon = \{x' = (x_2, x_3) | x'/\varepsilon \in \beta\}$, β - двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, и строится асимптотическое по $\varepsilon > 0$ разложение решения системы уравнений:

$$- \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^0_{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^1_{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}\right) = f_\varepsilon(t,x), \quad (1)$$

где A^0_{mj}, A^1_{mj} - некоторые матрицы-функции, удволетворяющие естественным условиям типа эллиптичности соответствующих дифференциальных операторов. Коэффициенты системы уравнений - гладкие функции всюду в U_ε, за исключением некоторого набора поверхностей, где они разрывны, и на которых решение удовлетворяет естественным условиям сопряжения. Граничные и начальные условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv n_m \left(A^0_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A^1_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}\right)|_{(0,T)\times\partial\beta_\varepsilon} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

с условием T-периодичности $u(t,x)$ по x_1. По повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3. В (1)-(2) вектор $u(t,x)$ - трехмерный, T- число порядка 1, $\varepsilon = T/n$, n - натуральное число, (n_1, n_2, n_3) - внешняя нормаль к ∂U_ε.

Предполагается, что трехмерная вектор-функция f_ε имеет вид

$$f_\varepsilon(t,x) = \Phi(x'/\varepsilon)\psi_\varepsilon(t,x_1),$$

где $\Phi(\xi')$ - матрица жестких перемещений ($\xi' = (\xi_1, \xi_2), x' = (x_2, x_3)$)

$$\Phi(\xi') = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a\xi_3 \\ 0 & 0 & 1 & a\xi_2 \end{Vmatrix}, \quad a = \langle \xi_2^2 + \xi_3^2 \rangle_\beta^{-1/2}$$

$$\langle F(\xi) \rangle_\beta \equiv \int_\beta \frac{F(\xi) d\xi}{mes\beta},$$

$$\psi(t,x_1) = \left(\psi^1(t,x_1), \varepsilon^2\psi^2(\varepsilon t, x_1), \varepsilon^2\psi^3(\varepsilon t, x_1), \psi^4(t,x_1)\right)^T,$$

$\psi^i(\theta, x_1) = 0$ при достаточно малых θ, $\psi^i(\theta, x_1)$ - достаточно гладкие функции, T-периодические по x_1.

Решение задачи (1) - (2) отыскивается в классе T- периодических по x_1 вектор-функций.

Показано, что коэффициенты асимптотических разложений решения находятся из вспомогательных задач упругости [2] и задач составного типа [3] на "ячейке периодичности". Выведены усредненные уравнения для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня(на функции, зависящие только от одного пространственного переменного). При наличии дополнительных условий симметрии (см.[4]) система уравнений, описывающая усредненную модель, распадается на уравнения 2-го порядка для продольных и 4-го порядка для поперечных смещений. Показано, что эти уравнения содержат интегральные члены типа свертки, доказана теорема о близости решений для усредненной и исходной задач.

Список литературы [1] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *"Осреднение процессов в периодических средах"* М.:Наука, 1984.

[2] Козлова М.В., Панасенко Г.П., *"Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне"*, Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1991, 10,т.31.

[3] Кожанов А.И. *К теории уравнений составного типа*: Автореферат диссертации доктора физико-математических наук: 01.01.02. Новосибирск, 1993. 26 с.

[4] Panasenko G.P., *"Asymptotic analysis of bar systems I"*

Предельный спектр для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с кубическим потенциалом.

Фахрутдинов В. К. (г. Москва)

Мы изучаем спектральную задачу

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + x^3 y,$$
$$y(-1) = y(1) = 0,$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — физический параметр. Наша цель — дать описание предельного поведения спектра при $\varepsilon \to 0$.

В работах [1], [2], [3] А.А.Шкаликова и С.Н.Туманова были решены задачи о нахождении предельного спектрального множества для потенциала $q(x) = x^2$ на произвольном отрезке, а также для строго монотонного потенциала $q(x)$.

Для потенциала $q(x) = x^3$ при любом $\varepsilon > 0$ спектр задачи дискретен и лежит в полуполосе $\Pi = \{\lambda \mid -1 < \operatorname{Re}\lambda < 1, \operatorname{Im}\lambda < 0\}$

Определение. Точку $\lambda \in \Pi$ назовем непредельной, если найдется δ-окрестность этой точки, которая не содержит собственных значений задачи при любых достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$. Множество остальных точек в Π назовем предельным спектральным множеством, и предельным спектральным графом, если оно состоит из отрезков **кривых.**

Пусть $r^3 = |\lambda|$ и $\varphi = arg\lambda$. Зададим 2 корня ω_1 и ω_2 уравнения $\omega^3 - \lambda = 0$ условиями $\omega_1 = re^{i\frac{\varphi+2\pi}{3}}$, $\omega_2 = re^{i\frac{\varphi+4\pi}{3}}$.

В полосе Π определим следующие кривые:

$$l_0 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \operatorname{Re}\int_{+1}^{-1} \sqrt{i(\xi^3 - \lambda)}d\xi = 0\}$$
$$l_1 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \operatorname{Re}\int_{-1}^{\omega_1} \sqrt{i(\xi^3 - \lambda)}d\xi = 0\}$$
$$l_2 = \{\lambda \in \Pi \mid \quad \operatorname{Re}\int_{\omega_2}^{+1} \sqrt{i(\xi^3 - \lambda)}d\xi = 0\}$$

Кривая l_0 совпадает с отрицательной мнимой осью. Кривые l_1 и l_2 проходят через точки -1 и $+1$ соответственно. Все три кривые имеют единственную точку пересечения — точку-узел λ_0.

Пусть γ_1 – часть кривой l_1, лежащая между -1 и точкой-узлом λ_0; γ_2 – часть кривой l_2, лежащая между $+1$ и λ_0. Обозначим через Γ объединение трех указанных кривых γ_1, γ_2, l_0.

Сформулируем основной результат.

Теорема. Описанное множество Γ является предельным спектральным графом оператора $L(\varepsilon)$.

Доклад основан на совместной работе с проф. А.А.Шкаликовым.

Литература

[1] Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля.* // Изв. РАН. - 2002. - 66, №4. - С.177-204

[2] Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О модельной задаче для уравнения Орра-Зоммерфельда с квадратичным профилем* // Электронная версия: www.arxiv.org/ps/math-ph/0212074

[3] Шкаликов А.А. *Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Совр. матем., Фундам. напр. - 2003. - Т.3. С.89-112

On an initial boundary value problem in a half–strip for the Kawahara equation

Faminskii A.V. , Kuvshinov R.V. (Peoples' Friendship University of Russia)

We consider an initial boundary value problem for the Kawahara equation in a half–strip $\Pi_T^+ = (0,T)\times\mathbb{R}_+$

$$u_t - u_{xxxxx} + uu_x = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,0) = u_1(t), \qquad u_x(t,0) = u_2(t). \tag{2}$$

Let $\Phi_0(x) \equiv u_0(x)$ and for natural m

$$\Phi_m(x) \equiv \Phi^{(5)}_{m-1}(x) - \sum_{l=0}^{m-1} C^l_{m-1}\Phi_l(x)\Phi'_{m-l-1}(x).$$

Theorem. *Let $u_0 \in H^k(\mathbb{R}_+)$, $u_1 \in H^{(k+2)/5}(0,T)$, $u_2 \in H^{(k+1)/5}(0,T)$ for some $T > 0$ and natural $k \geq 2$. Assume also, that $u_1^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$ for any integer $m \in [0,k/5)$, $u_2^{(m)}(0) = \Phi'_m(0)$ for any integer $m \in [0,(k-1)/5)$. Then there exists a unique solution $u(t,x)$ of the problem (1),(2) such, that*

$$\begin{aligned}
&D_t^l u \in C([0,T]; H^{k-5l}(\mathbb{R}_+)), && l \leq k/5,\\
&D_x^n u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(k-n+2)/5}(0,T)), && n \leq k+2,\\
&D_t^l D_x^n u \in L_2(0,T; C_b(\overline{\mathbb{R}}_+)), && 5l+n \leq k+1,\\
&D_t^l D_x^n u \in L_2(\mathbb{R}_+; C[0,T]), && 5l+n \leq k-2.
\end{aligned}$$

The work was supported by RFBR grant 06–01–00253.

Controllability problems for the string equation on a half-axis

Fardigola L. V. (Kharkiv, UKRAINE)

In this work sufficient conditions and necessary conditions for null-controllability and approximate null-controllability are obtained for the control system

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - q^2 w(x,t), \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = u(t), \qquad x > 0,\ t \in (0,T),$$

where $q \geq 0$, $T > 0$, $w(\cdot,t) \in H_0^s$ $(t \in [0,T])$, $s \leq 1$ (H_0^s is a Sobolev space). We assume that the control u satisfies the restriction $|v(t)| \leq U$ a. e. on $(0,T)$ where $U > 0$ is given. Controls solving these problems are found explicitly. Bang-bang controls solving the approximate null-controllability problem are found by means of the solutions of the Markov power moment problem. Continuous controls solving this problem are constructed with the aid of the Cesàro means of a Fourier series generated by the data of the control system.

Об одном интегральном преобразовании функций Эрмита

Фазуллин З. Ю. (г. Уфа)

Утверждение. *Пусть* $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ *и* $\varphi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp(-t^2/2) H_n(t)$, $n \geq 0$, *где* $H_n(t)$ *- полином Эрмита. Тогда имеет место тождество*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\sqrt{2}x_1 + \tau)\varphi_n(\sqrt{2}y_1 + \tau) e^{i\sqrt{2}\tau(x_2 - y_2)} d\tau = L_n(|\bar{x} - \bar{y}|^2) e^{-|\bar{x}-\bar{y}|^2/2 - i(x_1+y_1)(x_2-y_2)}, \quad (1)$$

где $L_n(t)$ *- многочлен Лагерра.*

Отметим, что, с одной стороны, тождество (1) устанавливает новую формулу связи между ортогональными многочленами Эрмита и Лагерра, с другой стороны, из результатов работы [1] следует, что функция

$$\mathcal{P}_n(x,y) = \frac{e^{i(x_1x_2 - y_1y_2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\sqrt{2}x_1 + \tau)\varphi_n(\sqrt{2}y_1 + \tau) e^{i\sqrt{2}\tau(x_2 - y_2)} d\tau$$

является ядром ортогонального проектора P_n на собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_n = 2(2n+1)$, $n \geq 0$ оператора Шредингера $H = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\right)^2$ в однородном магнитном поле в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Литература

[1] Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю. *Спектр и формула следов двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле.*// ДАН РАН. 2003. Т. 390. №6. С. 743–745.

Inhomogeneous Cauchy problem for perturbed Sobolev type equation

Fedorov V.E. , Ruzakova O.A. (Chelyabinsk)

In the work the Cauchy problem

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

for Sobolev type equation

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + Nu(t) + f(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2}$$

with continuous operator $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\ker L \neq \{0\}$, and closed operators $M, N \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ in Banach spaces $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{F}$ are researched by the methods of the theory of degenerate operator semigroups [1, 2].

Theorem 1. Let an operator M be strongly (L,p)-radial, $L_1^{-1}QN_1 \in \mathfrak{P}(L_1^{-1}M_1)$ (see [3]), $\mathrm{im}N \subset \mathfrak{F}^1$, $(I-Q)f \in C^{p+1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{F})$, $Qf \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{F})$,

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^k(0).$$

Then there exists a unique solution $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ of the problem (1), (2). The solution has the form

$$u(t) = S(t)Pu_0 + \int\limits_0^t S(t-s)L_1^{-1}Q\left(f(s) - N\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(s)\right)ds -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t).$$

References

[1] Fedorov V.E. *Degenerate strongly continuous semigroups of operators.* St. Petersburg Math. J., 2001, v.12, no.3, p.471-489.

[2] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[3] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: Едиториал УРСС, 2004.

On the spectral properties of the weighted Laplace operator in unbounded domains

Filinovskii A.V.[7]

(Moscow State Technical University)

Let $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, be an unbounded domain with smooth boundary. We study here the spectral properties of the first boundary problem for operator $l = -\frac{1}{\rho(x)}\Delta$. This operator arises in the investigation of the first mixed problem for the wave equation in non-homogeneous media

$$u_{tt} - \frac{1}{\rho(x)}\Delta u = 0,$$

with positive function $\rho(x) \in C(\overline{\Omega})$.

[7]The work was supported by the program "Scientific Schools"N 1464.2003.1 and RFBR grant N 04-01-00618

Let us denote by $L_{2,\rho}(\Omega)$ the Hilbert space of complex-valued functions $v(x)$ with the norm

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 \rho(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Let L_0 be an operator in $L_{2,\rho}(\Omega)$, defined by l on $\overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$ (functions from $C^\infty(\Omega)$ with compact support in Ω). Operator L_0 is a symmetric non-negative operator in $L_{2,\rho}(\Omega)$. Let L_1 be the closure of L_0 in $L_{2,\rho}(\Omega)$, and let L be its self-adjoint Friedrichs extension. It is known that there exist conditions to function ρ and domain Ω, providing discreteness of spectrum of the operator L ([1], [2]). For $\Omega = R^n$ it is known that there also exist sufficient condition to spectrum of operator L to be continuous ([3]).

In this paper for the case $\rho(x) = r^{-\beta}$, $r = |x|$, in the domains Ω with star-shaped boundary we establish the estimates to the resolvent of L and its derivative with respect to spectral parameter. There exists the critical value of β providing the spectrum of L become discrete. So we use obtained estimates to study the behavior of resolvent when the spectrum transforms from continuous to discrete.

References

[1] Lewis R.T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271., N 2. P. 653–666.

[2] Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravlenija (Russian). V. 64. M.: VINITI. 1989.

[3] Eidus D.M. // Journal of Funct. Anal. 1991. V. 100., N 2. P. 400–410.

Асимптотика спектра оператора Максвелла в негладких областях

Филонов Н. Д.

Электромагнитные колебания заполненного резонатора с идеально проводящей границей описываются оператором Максвелла. Впервые асимптотику спектра оператора Максвелла получил Г. Вейль в 1912г. для случая пустого резонатора с гладкой границей. Наличие среды внутри рассматриваемой области, отказ от гладкости коэффициентов, характеризующих свойства этой среды (в случае вакуума эти коэффициенты – константы), а также отказ от гладкости границы области потребовал преодоления серьезных трудностей. Асимптотика вейлевского типа при произвольных *ограниченных* коэффициентах заполнения, но для *гладкой* границы резонатора, была обоснована в 1976 г. в [1]. С другой стороны, в [2] в 1987 г. была доказана формула Вейля для *пустого* резонатора с *липшицевой* границей. Нам удалось получить вейлевскую асимптотику спектра оператора Максвелла в общем случае негладких коэффициентов и негладкой границы области (липшицевы области и области с экранами).

Работа выполнена совместно с Бирманом М. Ш.

Литература

[1] Алексеев А. Б., Бирман М. Ш., *Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями*, Докл. АН СССР 230 (1976), 3, 505–507.

[2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла для областей с липшицевой границей*, Вестник ЛГУ, сер. 1 (1987), вып. 3, 23–28.

Attractors and bifurcations in sine maps

Fournier-Prunaret D. (Toulouse)

We consider maps defined by :

$$x_{n+1} = a\sin^2(x_{n-k} + b) \qquad (1)$$

with $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.
Our aim is to study the evolution of attractors of (1) when k is fixed. We choose $k = 1, 2, 3$. We present periodic orbits, invariant manifolds and chaotic attractors in the state plane $(x_1, ..., x_{k+1})$. Then, we consider bifurcations of attractors and their basins in the (a, b) plane.

Previous studies have already been done concerning other kind of sine maps ([2].) and also 2-dimensional decoupled maps ([1].).
Possible applications are related to secure transmissions ([3].) or pseudo-random generators.

The presented work is a joint work with Xu J., Taha A.K. and Charge P.

References

[1] Bischi G.I., Mammana C., Gardini L. *Multistability and cyclic attractors in duopoly games.* Chaos, Solitons and Fractals 11 (2000) 543-564.

[2] Maistrenko V.L., Maistrenko Y.L., Mosekilde E. *Chaotic synchronization and anti-synchronization in coupled sine maps.* International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No. 7, (2005), 2161-2177.

[3] Larger L., Fournier-Prunaret D. *Route to chaos in an opto electronic system.* Proceed. European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD 05), Cork, Irlande, (August 2005).

One-phase Stefan problem with vanishing specific heat

Frolova E.V. (St.-Petersburg Electrotechnical University)

We consider the one-phase Stefan problem with a small positive multiplier ε at time derivative in the equation, which corresponds to the assumption that a specific heat of melting material is small. Let $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^n$ be an unknown domain with the boundary $\partial\Omega(t) = \Gamma(t) \cup S$ consisting of two non-intersecting surfaces, where S is a given surface, $\Gamma(t)$ is a free surface lying inside the domain bounded by the surface S. We denote by $\mathbf{n}(t)$ the unit normal vector directed inside the domain $\Omega(t)$. The problem is stated as follows

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_t - \Delta u = 0, && x \in \Omega(t), \quad t > 0,\\
&u\Big|_{x\in\Gamma(t)} = 0, && \mathbf{V}_n = -c_0 \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma(t)},\\
&u\Big|_{x\in S} = f, && u\Big|_{t=0} = u_0,
\end{aligned} \qquad (1)$$

here $\mathbf{V}_n$ is a velocity of moving the surface $\Gamma(t)$ in the direction of $\mathbf{n}(t)$, $c_0 > 0$, f is a known positive function, $\Gamma(0) = \Gamma$, $\frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_\Gamma \geq d_0 > 0$.

We consider also the Hele-Show problem which describes the process of melting materials with zero specific heat and can be regarded as the quasi-stationary approximation to the one-phase Stefan problem. Assuming that the initial position of the free boundary and the given function f in the Hele-Show problem are the same as in problem (1), we analyze the asymptotic behaviour of the difference of solutions to these problems as ε tends to zero. We prove that problem (1) with a small specific heat $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ has a unique solution in a certain time interval $(0, T_0)$ independent of ε.

This is a joint work with V.A. Solonnikov.

Unlocal stable invariant manifolds for Ginzburg-Landau equation

Fursikov A. (Moscow)

In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ we consider the Ginzburg-Landau equation (GLE) with zero Dirichlet condition on $\partial\Omega$. Let $\widehat{v}$ be a steady-state solution of GLE. Define by $\{e_j, \lambda_j\}, \lambda_1 \le \dots \lambda_N < 0 < \lambda_{N+1} \le \dots \lambda_k \to \infty$ as $k \to \infty$ eigenfunctions and eigenvalues of linearization on $\widehat{v}$ for space part of GLE. Let $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ be the phase space of GLE. Then $V = V_+ \oplus V_-$ where $V_+ = [e_1, \dots e_N], V_- = [e_{N+1}, \dots]$. As well-known the stable invariant manifold $M_- \subset V$ exists in a neighborhood of $\widehat{v}$ and

$$M_- = \{\widehat{v} + v_- + F(v_-), v_- \in \mathcal{O}(V_-)\} \tag{1}$$

where $\mathcal{O}(V_-)$ is a neighborhood of the origin in V_-, and $F : \mathcal{O}(V_-) \to V_+$ is a map satisfying $\|F(v_-)\|/\|v_-\| \to 0$ as $\|v_-\| \to 0$.

Existence of M_- is well know when $\mathcal{O}(V_-) \subset B(V_-, r) \equiv \{v_- \in V_- : \|v_-\|_{V_-} \le r\}$ with small enough r. We prove existence of M_- for a $\mathcal{O}_r(V_-) \not\subset B(V_-, r)$ with arbitrary big r. Let $V_-^k = [e_k, e_{k+1}, \dots]$ with $k > N$, and in V_- define the „cruciform" set: $CR_{r,\rho}(k) = B(V_-, r) \cup B(V_-^k, \rho)$.

Theorem 1. For a certain $r > 0$ and for arbitrary $\rho > 0$ one can find $k > N$ such that there exists an neighborhood $\mathcal{O}(V_-)$ satisfying: i) $CR_{r,\rho}(k) \subset \mathcal{O}(V_-)$, ii) A stable invariant manifold (1) with this $\mathcal{O}(V_-)$ exists.

The proof is based on analytical decomposition of stable invariant manifolds ([1]).

References

[1] Fursikov A. *Analyticity of stable invariant manifolds of 1D-semilinear parabolic equations.* Proc.of Sum.Research Conf."Control methods of,к PDE-dynamical systems", AMS Cont.Math.series. Providence (2007)(to appear)

Спектр самосопряжённого дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами

Гадыльшин Р. Р. (г. Уфа)

Исследуется асимптотическое поведение спектра самосопряжённого дифференциального оператора второго порядка на оси. Коэффициенты данного оператора зависят от быстрой и медленной переменных и периодичны по быстрой переменной. Зависимость коэффициентов от быстрой переменной локализована, и на бесконечности коэффициенты перестают зависеть от быстрой переменной. Строятся асимптотические разложения собственных значений и собственных функций данного оператора. Показано, что помимо собственных значений, сходящихся к собственным значения усреднённого оператора, возмущённый оператор может также иметь собственное значение, сходящееся к границе непрерывного спектра. Получены необходимые и достаточные условия существования такого собственного значения.

О сходимости почти всюду разложений по неортогональным системам сжатий и сдвигов

Галатенко В. В. (г. Москва)

Пусть $M \subset L^2[0,1]$ — произвольная нормированная система функций. Доопределим все принадлежащие M функции на $\mathbb{R}\backslash[0,1]$ нулем. Будем говорить, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой двоичных сжатий и сдвигов, порожденной M, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая функция $\widetilde{\varphi}_n \in M$, что $\varphi_n(x) = 2^{k/2}\widetilde{\varphi}_n(2^k x - j)$, где $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $j \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$.

Для функции $f \in L^2[0,1]$ орторекурсивное разложение по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется следующим образом (см. [1]). Индуктивно строятся последовательности остатков $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$: $r_0(x) = f(x)$, $\widehat{f}_{n+1} = \int_0^1 r_n(x)\varphi_{n+1}(x)\,dx$, $r_{n+1}(x) = r_n(x) - \widehat{f}_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}_n\varphi_n(x)$ называется орторекурсивным разложением f по $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Интересен вопрос об условиях на порождающую систему функций M, гарантирующих сходимость орторекурсивного разложения по системе двоичных сжатий и сдвигов, порожденной M, к разлагаемой функции.

Для сокращения формулировки введем следующее обозначение: положим $\omega(\delta, M) = \sup\{|\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(y)| : \widetilde{\varphi} \in M,\ x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta\}$.

Теорема. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty}\omega^2(2^{-n}, M) < \infty$, $\inf\left\{\left|\int_0^1 \widetilde{\varphi}(x)\,dx\right| : \widetilde{\varphi} \in M\right\} > 0$. Тогда для любой системы двоичных сжатий и сдвигов, порожденной M, и для любой функции $f \in L^2[0,1]$ орторекурсивное разложение f по этой системе сходится к разлагаемой функции почти всюду.

Отметим, что при тех же условиях имеет место и сходимость разложения в метрике пространства $L^2[0,1]$ (см. [2]). Также отметим, что в сформулированной теореме сходимость почти всюду нельзя заменить на сходимость всюду даже в случае разложения непрерывных на $[0,1]$ функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00192), программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ–4681.2006.1) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых (МК–4936.2006.1).

Литература

[1] Лукашенко Т. П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. 2001. №1. С. 6–10.

[2] Галатенко В. В. *О системах сжатий и сдвигов, порожденных несколькими функциями* // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию академика С. М. Никольского: Тезисы докладов. — Москва: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2005. С. 81.

Отсутствие ненулевых вещественных особенностей решения задачи теории рассеяния

Галимов А. Н. (Уфа, БашГУ)

В пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ рассмотрим оператор Шредингера $H = \sum_{k=1}^{3}(p_k + a_k(x))^2 + V(x)$, где $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ и $V(x)$ - соответственно магнитный и электрический потенциалы, $p_k = i^{-1}\partial/\partial x_k$, $a_k(x) = \overline{a_k(x)}, (k = \overline{1,3})$, $V(x) = \overline{V(x)}$.

Цель данной работы - это обобщение результатов работы (см. [1]) на случай $a(x) \neq 0$. Пусть $\Phi(x) = a^2(x) + i\mathrm{div}\, a(x) + V(x)$, $\quad a^2(x) = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k^2(x)$ и выполняются условия:

(i) $(|\Phi(x)| + |a(x)|) \in L(\mathbb{R}^3)$

(ii) для всех $\delta > 0$ функции

$$f_\delta(x) = \int\limits_{|x-y|\le\delta} |\Phi(y)||x-y|^{-1}dy, \quad g_\delta(x) = \int\limits_{|x-y|\le\delta} |a(y)||x-y|^{-2}dy$$

ограничены в $\mathbb{R}^3$, причем

$$\lim_{\delta\searrow 0} f_\delta(x) = \lim_{\delta\searrow 0} g_\delta(x) = 0$$

равномерно в $\mathbb{R}^3$.

Уравнением Липпмана-Швингера с магнитным потенциалом назовем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda,\omega) + \int\limits_{R^3} (4\pi|x-y|)^{-1} e^{i\lambda|x-y|}[\Phi(y) + 2(\lambda|x-y|^{-1} + \\ + i|x-y|^{-2})\langle x-y, a(y)\rangle] \cdot \varphi(y,\omega,\lambda)dy = e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}. \end{aligned} \tag{1}$$

По аналогии со случаем, когда $a \equiv 0$, решение $\varphi(x,\lambda,\omega)$ уравнения (1) назовем решением задачи теории рассеяния. Уравнение (1) при вещественном λ имеет единственное решение, если однородное уравнение $f + K(\lambda)f = 0$ имеет только нулевое решение, где $K(\lambda)$ - это интегральный оператор уравнения (1). Обозначим через $\mathcal{E}$ множество тех точек λ, $Im\lambda \ge 0$, для которых это однородное уравнения имеет нетривиальное решение. Введем множества $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \{\lambda | Im\lambda > 0\}, \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_1\backslash\{0\}$. Мы доказываем что справедливы

Теорема 1. Пусть выполнены условия $(i) - (ii)$. Тогда множество $\mathcal{E}_2$ не имеет конечных предельных точек. При этом, если $\lambda \in \mathcal{E}_2$, то λ^2 - есть собственное значение оператора H конечной кратности, а соответствующая собственная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^2 |f(x)| < \infty.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия $(i) - (ii)$, $\lambda_\circ \neq 0$, $\lambda_\circ \in \mathcal{E}_2$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\lambda_0} \varphi(x,\lambda,\omega)$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}^3, \omega \in S^2$.

Литература

[1] *Муртазин Х. Х., Садовничий В. А.* Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера.// Изд-во МГУ, 1988, 229 С.

Научный руководитель: д.ф. - м.н. Муртазин Х.Х.

Математические модели динамики систем сталкивающихся частиц и нелинейные уравнения физической кинетики

Галкин В. А. (г. Обнинск, ИАТЭ)

Рассматривается физическая система, состоящая из частиц, движущихся вдоль пространственных координат $x \in \mathbb{R}_n$. Каждая частица характеризуется параметром k — состоянием частицы, принимающим значения во множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, причем скорость v_k переноса частиц в $\mathbb{R}_n$ является функцией состояний частицы. В процессе движения частицы могут участвовать в парных соударениях с вероятностью Φ_{k_1,k_2} (k_1, k_2 — состояния взаимодействующих частиц). Пусть концентрация частиц в состоянии k в окрестности точки $x \in \mathbb{R}_n$ в момент времени $t \geq 0$ равна $u_k(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Принятой в физике моделью описания эволюции множества концентраций $u(x,t) = \{u_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ служит задача Коши для пространственно неоднородного уравнения (см. [1]): ?ginequation

$$\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x} S_k(u(x,t)), \quad x \in \mathbb{R}_n, \ k \in \mathbb{N}, \ t \geq 0, \tag{1}$$

где S — оператор столкновений, являющийся квадратической формой относительно неизвестной u. Уравнение (1) дополняется начальными данными

$$u_k(x,0) = u_k^0(x) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}_n. \tag{2}$$

В настоящей работе рассмотрены ряд моделей динамики систем сталкивающихся частиц, которые при неограниченном возрастании числа частиц приводят к задаче Коши (1)–(2) и доказанны теоремы существования обобщенных решений этой задачи Коши методом компенсированной компактности для последовательности гладких неотрицательных решений конечномерных задач.

Литература

[1]. Галкин В. А. Уравнение Смолуховского. М.: Физматлит, 2001, 336 С.

[2]. Галкин В. А. Сходимость разностных схем и метода непосредственного моделирования к решениям уравнения Смолуховского кинетической теории коагуляции //Докл. РАН. 2004. Т. 397, С. 4–11.

Сходимость по форме решения начальной задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа к системе волн

Гасников А. В. (г. Москва)

В работе изучается асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ u(0,x) = u_0(x). \tag{1}$$

Предположение 1. $u_0'(x) \geq 0$; $\lim_{x\to\pm\infty} u_0(x) = u_\pm$; $\eta(u), \varphi(u) \in C^2([u_-, u_+])$; $\forall\, u \in [u_-, u_+] \to \eta'(u) > 0$.

Оказывается, что если справедливо предположение 1, то задача Коши (1) поставлена корректно. Кроме того, $\forall\ t > 0, -\infty < x < \infty \to u_x(t,x) > 0$, $\forall\, t \geq 0 \to \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = u_\pm$.

Обозначим через $H(y)$ - нижнюю границу выпуклой оболочки множества $\left\{(y,v) : \ y \in [\eta(u_-), \eta(u_+)], \ v \geq \varphi\left(\eta^{-1}(y)\right)\right\}$.

Основным результатом работы является следующая теорема (для случая $\eta(u) = u$ см. [1]).

Теорема 1. Пусть справедливо предположение 1. Тогда, равномерно по $u \in [u_-, u_+]$

$$u_x(u,t) \to W(u) = \varphi(u) - H(\eta(u)), \text{ при } t \to \infty.$$

Если сделать дополнительное предположение о скорости сходимости $u_0(x)$ к $u_\pm$, то в теореме 1 можно оценить скорость сходимости.

Предположение 2. $\exists a > 0, b > 0, \mu > 0 : \forall x \geq a \to u_+ - u_0(x) \leq bx^\mu$, $\forall x \leq -a \to u_0(x) - u_- \leq b|x|^\mu$.

Теорема 2. Пусть справедливы предположения 1, 2. Тогда

$$\exists\, C > 0,\ t_0 > 0 :\ \forall\, t \geq t_0,\ u \in [u_-, u_+] \to |u_x(u,t) - W(u)| \leq C\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}}.$$

Доказательство теорем 1, 2 базируется на принципе сравнения на фазовой плоскости для уравнений параболического типа. Это особый тип теорем сравнения, где сравниваются не два различных решения уравнения, а их производные по координате. Первой такой теоремой можно считать теорему 11 работы [2].

Литература

[1] Mejai M., Volpert Vit. A. *Convergence to system of waves for viscous scalar conservation laws // Asymptotic Analysis, 1999. Т. 20. С. 351–366.*

[2] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937. Т. 1. Вып. 6. С. 1–26.*

Asymptotic Analysis of the Eigenvalues of a Laplacian Problem in a Thin Multidomain

Gaudiello Antonio (DAEIMI, Università degli Studi di Cassino, Italia.)

This is a joint work with Ali Sili (Université du Sud Toulon-Var, e-mail: sili@univ-tln.fr).

We consider a thin multidomain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, consisting of two vertical cylinders, one placed upon the other: the first one with given height and small cross section, the second one with small thickness and given cross section. In this multidomain we study the asymptotic behavior, when the volumes of the two cylinders vanish, of a Laplacian eigenvalue problem and of a L^2-Hilbert orthonormal basis of eigenvectors. We derive the limit eigenvalue problem (which is well posed in the union of the limit domains, with respective dimension 1 and $N-1$) and the limit basis. We discuss the limit models and we precise how these limits depend on the dimension N and on the limit q of the ratio between the volumes of the two cylinders.

References

[1] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, A Justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model, *J. Mècanique* **18** (1979), n.2, 315-344.

[2] A. Gaudiello, B. Gustafsson, C. Lefter, J. Mossino, Asymptotic Analysis of a Class of Minimization Problems in a Thin Multidomain, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **15** (2002), n.2, 181-201.

[3] A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino, F. Murat, A. Sili, Junction of Elastic Plates and Beams, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, to appear.

[4] A. Gaudiello, E. Zappale, Junction in a Thin Multidomain for a Fourth Order Problem. *M^3AS: Math. Models Methods Appl. Sci.*, **16** (2006), n.12, 1-32.

[5] M. Vanninathan, Homogenization of Eigenvalue Problems in Perforated Domains, *Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **90** (1981), 3, 239-271.

[6] L. Tartar, Cours Peccot, Collège de France (March 1977). Partially written in F. Murat, H-Convergence, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger (1977-78). English translation in Mathematical Modelling of Composite Materials,

A. Cherkaev and R.V. Kohn ed., Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser - Verlag (1997), 21-44.

Интерполяционная задача в классе целых функций с ограничением на рост

Герасименко В. А. (г. Сумы)

Пусть γ – некоторая функция роста. Целая функция $f(z)$ называется функцией конечного γ-роста, если при некоторых $A, B > 0$ (зависящих от f) для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство: $\ln|f(z)| \le A\gamma(B|z|)$. Обозначим через $\mathcal{E}(\gamma)$ класс целых функций конечного γ-роста. Дивизор $D = \{a_k; q_k\}_{k=1}^{\infty}$ (т.е. множество различных комплексных чисел a_k вместе с их кратностями q_k; $q_k \ge 1$ - целое число) называется интерполяционным в классе $\mathcal{E}(\gamma)$, если для любой последовательности комплексных чисел $b_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, q_k$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\gamma(|a_k|)} \ln \max_{1\le j\le q_k} \frac{|b_{k,j}|}{(j-1)!} < \infty,$$

существует функция $F(z) \in \mathcal{E}(\gamma)$ такая, что

$$F(a_k)^{(j-1)} = b_{k,j}, \quad j = 1, 2, \dots, q_k, k = 1, 2, \dots .$$

Пусть $C(a, r)$ – открытый круг с центром в точке a радиуса r. По дивизору D определим меру $n_D(G) = \sum\limits_{a_k\in G} q_k$ и семейство функций:

$$\Phi_{z,B}(\alpha) = \frac{\max\{n_D(C(z, \alpha|z|)) - q_n; 0\}}{\gamma(B|z|)}, \quad B > 0,$$

где a_n – точка, ближайшая к z. Пусть дивизор D является γ-допустимым (см. [1]). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Дивизор D является интерполяционным в классе $\mathcal{E}(\gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{q_k \ln r_k}{\gamma(Br_k)} < \infty, \quad \sup_{z\in\mathbb{C}} \int_0^{1/2} \frac{\Phi_{z,B}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty,$$

при некотором $B > 0$.

Литература

[1] Малютин К. Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции // Труды ИПММ НАН Украины.* – 1988. – *Т.* 3. – *С.* 146 – 157.

Численная схема для системы уравнений гетерогенной сплошной среды

Гирин А.Г. (Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова)

Для нахождения решений системы нелинейных уравнений механики гетерогенной среды предлагается численный метод, основанный на применении консервативных разностных схем. Расчет решения в произвольной счетной ячейке производится в три этапа. На первом при замороженных правых частях находятся предварительные значения решения гиперболической подсистемы для несущей фазы и положения границ ячеек в новый момент времени. Применяется консервативная схема Годунова с расчетом на шаге "предиктор" задачи о распаде произвольного разрыва для определения значений на боковых гранях ячейки. Она дает возможность выделить подвижные сильные разрывы в решении для несущей фазы, что необходимо для точного учета сильного влияния правых частей уравнений в области релаксации решений подсистем за разрывом, и позволяет избежать осцилляций. Возможно разбиение несущей фазы на лагранжевы ячейки, что упрощает описание физико-химических превращений в гетерогенной среде. Затем определяются правые части уравнений. На втором этапе находится решение подсистемы для дисперсной фазы, причем на шаге "предиктор" для определения значений на боковых гранях ячейки, движущейся произвольно по отношению к дисперсной фазе, используется явная конечно-разностная схема, а на шаге "корректор" - первое приближение для несущей фазы. На третьем этапе производится учет влияния правых частей и уточнение значений решения для несущей фазы. Результаты тестирования согласуются с известными численными решениями, полученными модифицированным методом крупных частиц в Институте Механики МГУ. Предлагаемая методика успешно применена для решения задач о поршне, вдвигающемся с постоянной скоростью в дисперсную смесь, а также об исчезновении ударной волны в запыленном воздухе. Идея этой схемы допускает применение на первом этапе иного численного метода для гиперболических уравнений, например, обратного метода характеристик.

Nonlocal initial boundary value problem for semilinear parabolic equation

Gladkov A. L. (Vitebsk State University)

We consider the following nonlocal initial boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - c(x,t)u^p & \text{for } x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{for } x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $p > 0$ and $l > 0$. Here, $c(x,t)$ is a nonnegative locally Hölder continuous function defined for $x \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$ and $k(x,y,t)$ is a nonnegative continuous function defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$. The initial data $u_0(x)$ is a nonnegative continuous function satisfying the boundary condition at $t = 0$.

We prove uniqueness of solution with any initial data for $l \geq 1$ or $l > (p+1)/2$ and with nontrivial initial data otherwise, nonuniqueness of solution with trivial initial data for $l < \min\{1, (p+1)/2\}$, local existence theorem. Criteria on this problem which determine whether the solution blows up in a finite time for sufficiently large or for all nontrivial initial data or the solution exists for all time with sufficiently small or with any initial data are also given. Our global existence and blow-up results depend on the behavior of the coefficients $c(x,t)$ and $k(x,y,t)$ as t tends to infinity.

This is joint talk with M. Guedda.

On the Floquet-Favard theory for linear almost-periodic systems

Glavan V. (Moldova State University)

The well known Floquet-Liapunov theorem for linear periodic systems gives us the structure of the extended phase space: a spectral vector subbundle is attached to each Liapunov exponent, and each such bundle consists of flags of invariant vector subbundles, the supports of "secular solutions".

A series of obstacles prevent to extend the Floquet theory for almost periodic differential systems: a) the irregular systems (V.M.Millionshchikov, 1968), and closed intervals in the "dynamical spectrum" (R.Sacker and G.Sell, 1975); b) existence of topologically nontrivial vector bundles over the Bohr's compact (I.U.Bronshtein and V.F.Cernii, 1976; B.F.Bylov, R.E.Vinograd, V.Ja.Lin and O.B.Lokutsievski, 1977; K.Palmer, 1980); c) small denominators (I.N.Blinov, 1967) and generated by them topological effects (R.Johnson, 1980; M.G.Lubarski 1984; M.Nerurkar, 1987; A.M.Samoilenko and V.Glavan, 1989; A.Jorba, C.Nunez, R.Obaya and J.C.Tatjer, 2005).

The Favard theory for almost periodic systems is concerned with the separability conditions of bounded solutions to assure existence of almost periodic solutions (V.V.Zhikov and B.M.Levitan, 1977).

R.Sacker and G.Sell (1978) were the first who used the Favard condition to give a "threechotomy" structure theorem for linear systems without secular solutions.

To catch the "secular solutions", the author proposed to extend the Favard condition up to all the exterior powers of the linear system. Under these conditions "zero" is an isolated point in the Sacker-Sell spectrum, and the corresponding spectral subbundle admits a flag of invariant vector subbundles - the supports of "secular solutions". These Favard-type conditions permit to obtain for linear almost-periodic systems a Floquet-type structure theorem as well as some reducibility results. The talk will be concerned with some relaxations of the Favard conditions, still enough to obtain further structure theorems for linear almost-periodic systems.

О скорости стабилизации при $t \to \infty$ решений начально-краевых задач теплопроводности

Глушко А.В., Рябенко А.С. (Воронежский государственный университет)

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial v(\overline{x},t)}{\partial t} - a^2(x_3)\,\Delta v(\overline{x},t) = g(\overline{x},t)\,; \tag{1}$$

$$v(\overline{x},t)\,|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$v(\overline{x},t)\,|_{x_3=0} = v(\overline{x},t)\,|_{x_3=\infty} = 0, \tag{3}$$

где $t \geq 0$, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x_1, x_2) \in R^2$, $x_3 \in [0,\infty)$, $a^2(x_3) \in C([0,\infty))$ и существуют такие ε_1 и ε_2 что при $x_3 \in [0, \infty)$: $0 < \varepsilon_1 \leq |a(x_3)| \leq \varepsilon_2$.

Изучение разрешимости и поведения при $t \to \infty$ задачи (1)-(3) сводится к исследованию геометрии области аналитичности образа Фурье-Лапласа решения задачи (1)-(3) (преобразование Фурье проводится по x', а преобразование Лапласа проводится по t).

В связи с отсутствием явного представления решения выделение контуров потери аналитичности образа Фурье-Лапласа решения задачи (1)-(3) проводится на основании априорной оценки, полученной для образа Фурье-Лапласа решения задачи (1)-(3).

При выполнении некоторых условий гладкости и убывания при $|\overline{x}| \to \infty$ и $t \to \infty$ на функцию $g(\overline{x},t)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема. У задачи (1)-(3) существует единственное классическое решение, для которого справедлива оценка $|v(\overline{x},\, t)| \leq c\,t^{-7/4}$ $(c > 0)$, равномерная по $\overline{x}$ при $x' \in R^2$, $x_3 \in [0,\, d]$, где $d > 0$ - любое.

Отметим, что соответствующая задача с неоднородным граничным условием при $x_3 = 0$ сводится к рассмотренной при помощи замены искомой функции. Для задачи с неоднородными граничными условиями получен аналогичный результат.

В случае, когда рассматривается начально-краевая задача для уравнения (1) в полосе $x' \in R^2$, $x_3 \in [0,\, d]$, где $d > 0$ и в (3) условие $v\,(\overline{x}, t)\,|_{x_3=\infty} = 0$ заменяется на условие $v\,(\overline{x}, t)\,|_{x_3=d} = 0$, при аналогичных условиях на $a^2(x_3)$ можно показать, что для решения задачи в полосе будет справедлива оценка $|v(\overline{x},\, t)| \leq c\,e^{-\varepsilon\, t}$, где $c > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Траектории–утки и критические бегущие волны в задаче горения.

Голодова Е. С., Щепакина Е. А. (Самарский государственный университет)

Работа посвящена изучению связи между траекториями–утками сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и бегущими волнами в одной задаче горения. Исследование волн горения традиционно является одной из фундаментальных проблем теории горения. Рассматривается неадиабатическая модель автокаталитического горения с учетом расхода реагирующего вещества в случае одномерной пространственной переменной. Установлено существование и изучены свойства бегущей волны нового типа — волны–утки.

На основе анализа соответствующей краевой задачи сделан вывод о возможности выбора параметров системы дифференциальных уравнений, моделирующих процесс горения, таким образом, что проекция соответствующей гетероклинической траектории лежит в малой окрестности траектории–утки (одномерного устойчиво–неустойчивого медленного интегрального многообразия сингулярно возмущенной системы), описывающей критический режим. Соответствующее решение и является бегущей волной нового типа, которую назовем бегущей волной–уткой. Показано, что бегущая волна–утка играет роль промежуточной формы, разделяющей волны медленного выгорания и волны самовоспламенения.

Асимптотика высокочастотных собственных колебаний с квантованием малого параметра

Головатый Ю. Д. (Львов, Украина)

Доклад посвящен исследованию спектральных свойств упругих сред, состоящих из конечного числа компонент с разными физическими характеристиками. Моделирование таких систем приводит к изучению асимптотик спектра и собственных подпространств краевых задач для дифференциальных операторов с сингулярно возмущенными коэффициентами. Как правило, возмущенной задаче ставится в соответствие неограниченный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$, обладающий дискретным положительным спектром $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ и набором собственных функций $\{u_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$, образующих базис в $\mathcal{L}$. Типичной является ситуация, когда все собственные значения λ_k^ε суть непрерывные функции малого параметра, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$ (т. н. *низкие частоты*). Асимптотику собственных функций $u_k^\varepsilon = v_k + \alpha_\varepsilon$, $\|\alpha_\varepsilon\|_{\mathcal{L}} \to 0$, для каждого фиксированного номера k называем *низкочастотной*. В случае сильных возмущений исходное пространство распадается в прямую сумму $\mathcal{L} = H_0 \bigoplus H_\infty$, причем все предельные функции v_k принадлежат лишь H_0, образуя базис этого подпространства. Возникает естественный вопрос, почему подпространство H_∞ осталось "незаполненным".

Получить другие устойчивые формы колебаний, присущие системе при сколь угодно малых ε, можно следующим образом. Рассмотрим двухпараметрическое семейство собственных функций $\{u_k^\varepsilon \colon \varepsilon \in (0,1], k \in \mathbb{N}\}$, лежащее на единичной сфере в $\mathcal{L}$. Замыкание этого множества в слабой топологии дает новые предельные точки при $\varepsilon \to 0$. Как правило, эти точки лежат строго внутри единичного шара, что свидетельствует о частичной "диссипации энергии" в пределе. Из них можно составить базис в H_∞. Эти предельные точки реализуются последовательностями $\{\lambda_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}\}$, $\{u_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}\}$, где $\varepsilon_s \to 0$ и $k(\varepsilon_s) \to +\infty$. Следовательно, при уменьшении малого параметра нужно сдвигаться вверх по спектру, поддерживая собственные значения на определенном энергетическом уровне. Такие колебания мы называем *высокочастотными*. Из свойств спектра оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ легко следует, что любое неотрицательное число является пределом некоторой последовательности $\{\lambda_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}\}$. Однако, для почти всех таких последовательностей соответствующая последовательность собственных функций стремятся к нулю слабо в $\mathcal{L}$. Доказать существование высокочастотных собственных колебаний означает доказать существование последовательностей $\{u_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}\}$ с нетривиальным пределом.

В докладе будет рассмотрен ряд задач, для которых доказано существование высокочастотных колебаний. Комбинируя степенные и ВКБ асимптотики, можно получить явные формулы для последовательностей $\{\varepsilon_s\}$, "вдоль" которых строятся асимптотические приближения $\lambda_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}$ и $u_{k(\varepsilon_s)}^{\varepsilon_s}$ любого порядка точности.

О многомерных движениях газа с плоскими траекториями

Головин С. В. (г. Новосибирск)

Рассматриваются многомерные нестационарные движения идеального газа, в которых траектории частиц являются плоскими кривыми. Для таких движений выделяется специальный подкласс, отвечающий следующему свойству. Предположим, что в пространстве, занятом течением газа, задано семейство поверхностей уровня некоторой функции $h(x, y, z)$. Разложим вектор скорости каждой частицы газа на две компоненты, одна из которых ортогональна, а другая касательна к соответствующей поверхности уровня $h = \mathrm{const}$. Потребуем, чтобы модули нормальной и касательной компоненты вектора скорости, а также термодинамические функции зависели только от времени t и от функции h, т.е. при фиксированном t были постоянны на каждой поверхности уровня. При этом на угол поворота вектора скорости вокруг нормали к поверхности уровня никаких ограничений не накладывается.

Выделенный таким образом класс движений содержит известные движения газа типа вихря Овсянникова, в котором поверхностями уровня функции h являются сферы с фиксированным центром. В работе ставится задача изучить все типы функции h, производящие описанные движения газа. Из уравнений газовой динамики в силу сделанных предположений следует, что функция h должна удовлетворять уравнению эйконала $|\nabla h| = 1$, а также алгебраические инварианты матрицы Гессе для этой функции должны зависеть только от самой функции h. В результате анализа этих условий все возможные типы функции h сводятся к трем типам: плоскому, цилиндрическому и сферическому. Проводится анализ решения уравнений газовой динамики в каждом из описанных случаев.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00080) и Президентского гранта для молодых ученых (проект МК-1521.2007.1).

Вариационные структуры Пуассона-Нийенхейса для нелокальных операторов

Головко В. А. (г. Москва)

Известно, что практически все классические интегрируемые системы могут быть описаны в терминах бигамильтоновых структур на фазовом пространстве. Частным случаем бигамильтоновых структур являются структуры Пуассона–Нийенхейса, которые возникают при попытке построить бигамильтонову пару как композицию пуассонова бивектора P и тензора Нийенхейса N типа $(1,1)$ с нулевым кручением. При этом возникает несколько условий совместности, одно из которых необходимо для того, чтобы композиция $N \circ P$ также являлась бивектором, а другое, чтобы этот бивектор был пуассоновым.

Структуры Пуассона–Нийенхейса рассматривались различными авторами, и были получены разные интерпретации условия совместности на пуассонов бивектор и тензор Нийенхейса, см., например, [3].

В данной работе пуассонов бивектор P и тензор Нийенхейса N рассматриваются в бесконечно мерном случае как операторы в полных производных на соответствующих пространствах бесконечных джетов (струй), то есть как гамильтонов оператор и оператор рекурсии, соответственно, причем возможно и нелокальные, т.е. содержащие члены вида D_x^{-1}.

Из работы [2] следует, что операторы рекурсии и гамильтоновы операторы можно понимать как тени в ℓ- и ℓ^*-накрытиях, являющихся аналогами касательного и кокасательного расслоений, соответственно. Тени являются обобщениями симметрий и возникают, например, при действии операторов рекурсии на симметриях. В отличие от симметрий, которые являются векторными полями на рассматриваемом дифференциальном уравнении $\mathcal{E}$ (или на накрывающем многообразии $\tilde{\mathcal{E}}$ в нелокальном случае), тени являются лишь дифференцированиями вдоль проекции накрытия $\tau : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$, см. [1]. Несмотря на этот факт, структура накрытия позволяет построить коммутатор теней, являющийся обобщением скобки Якоби симметрий.

В данной работе показано, что условие совместности на структуру Пуассона-Нийенхейса, а также и условие гамильтоновости и нийенхейсовости соответствующих операторов, возможно нелокальных, может быть выражено как условие равенства нулю скобки Якоби соответствующих теней.

Литература

[1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.*// Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С.— М.:Факториал, 1997.— 464 с.

[2] Kersten P., Krasil'shchik I. S., Verbovetsky A.V. *Hamiltonian operators and ℓ^*-coverings.*// J. Geom. and Phys. — 2004. — **50**.— C. 273–302.

[3] Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F., *Poisson-Nijenhuis structures.*// Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. — 1990. — **53**, No 1. — C. 35–81.

О тензорных структурах, связанных с квантовым оператором Дирака, и спинорных структурах, ассоциированных с обобщенными уравнениями Книжника-Замолодчикова

Голубева В.А. (ВИНИТИ РАН, Москва)

Рассмотрим оператор Дирака на q-деформации G_q группы G (G.Fiore, 1998). Пусть V - конечнометный $\mathfrak{g}$-модуль с фиксированной инвариантной симметрической формой. Алгебра Клиффорда $Cl(V)$ полупроста и не имеет нетривиальных деформваций. Для фиксированного изоморфизма алгебр $\phi : U_h(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})[[h]]$ имеется отображение $V[[h]] \to Cl(V)[[h]]$, совпадающее с вложением $V \to Cl(V)$ по модулю h и $U_h\mathfrak{g}$-эквинвариантное. Такое отображение получается при использовании скручивания с помощью элемента $\mathcal{F} \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})$, такого что $(\phi \otimes \phi)\hat{\Delta}_h = \mathcal{F}\hat{\nabla}\phi(\cdot)\mathcal{F}^{-1}$.

Оператор Дирака на G рассматривается как элемент $\mathcal{D}$ в тензорном произведении $U\mathfrak{g} \otimes Cl(\mathfrak{g})$. Так как аналитические свойства скручивария трудно исследовать, на помощь приходят свойства универсальной R-матрицы и ассоциатора в подходящей тензорной категории $U_h\mathfrak{g}$-модулей (В. Дринфельд), связанной с монодромией уравнения Книжника-Замолодчикова. Таким образом, аналитические свойства квантового ператор Дирака определяются более естественно не через скручивание, а через указанный ассоциатор.

С другой стороны, исследование полной интегрируемости обобщенных многопараметрических уравнений Книжника-Замолодчикова, коэффициенты которых в классическом случае определяются через базисные элементы тензорного квадрата соответствующей алгебры Ли, приводит естественно к необходимости в качестве коэффициентов уравнения рассматривать спиноры. Будут рассмотрены спинорные решения системы уравнений полной интегрируемости для уравнений КЗ, ассоциированный с системой корней типа B_n. Коротко будут рассмотрены связи этой задачи с теорией спинорных уравнения в геометрии Вейля (уравнения Дирака, система уравнений для спиноров Киллинга).

Модели сплошных сред с геометрическими связями

Голубятников А. Н.

Проводится анализ возможных аффинных симметрий анизотропно жестких сплошных сред, их устойчивости и причин возникновения при разрушении структуры материалов.

Рассматриваются свойства уравнений, определяющих закон движения $x^i(\xi^\alpha, t)$ однородных сплошных сред при наличии связей, вида

$$x_{i,tt} = \left(\lambda_k \frac{\partial I^k}{\partial x^i_\alpha}\right)_\alpha, \qquad I^k(g_{\alpha\beta}) = 0, \qquad g_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta.$$

Нижние индексы типа t, α обозначают частные производные; $i, \alpha = 1, 2, 3$; $k = 1, \dots, N \le 6$.

Предельными случаями являются абсолютно твердое тело ($N = 6$) и пыль – среда без связей. Идеальная несжимаемая жидкость имеет одну связь вида $\det(x^i_\alpha) = 1$. На этом пути можно дать описание множества всех возможных связей и, следовательно, соответствующих сплошных сред, а также их фазовых переходов, основываясь на классификации непрерывных подгрупп полной линейной группы преобразований переменных ξ^α, как групп материальной симметрии, и их инвариантов $I^k(g_{\alpha\beta})$. Таких групп около 80 типов, считая по одной конечные и непрерывные серии [1].

Исследование гиперболичности уравнений движения сводится к выполнению неравенства

$$\lambda_k \frac{\partial^2 I^k}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\beta} m^i m^j n_\alpha n_\beta \geq 0$$

при всех ненулевых m^i и n_α, удовлетворяющих соотношениям $\left(\partial I^k/\partial x^i_\alpha\right) m^i n_\alpha = 0$. Среды, не удовлетворяющие этому неравенству, являются неустойчивыми. Соответствующий анализ проведен для групп симметрии с $N \leq 2$ и $N = 5$. В качестве примера рассматривается плоская стационарная задача для сред с двумя связями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00375, 05-01-00839) и грантов Президента РФ (проекты НШ 4474.2006.1 и МК 9352. 2006.1).

Литература

[1] Голубятников А.Н. *Симметрии сплошных сред* – Успехи механики. 2003, т. 2, No 1. С. 126-183.

Задачи управляемости для модифицированного управления переноса

Голубничий К. В. (Рос. ун-т дружбы народов)

Рассмотрены прямая и обратная задачи для интегро-дифференциального уравнения, являющегося модифицированным уравнением переноса:

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla)u(x,v,t) + \Sigma(x,v,t)\, u_0(x,v,t) =$$

$$= \int_V J\,(x,v,t,v')\, u(x,v',t)\, dv' + F(x,v,t)$$

(в обычном уравнении переноса вместо u_0 стоит u [1]). Это уравнение более удобно для исследования некоторых его нелинейных возмущений. Функция внешних источников излучения представлена в виде

$$F\,(x,v,t) = f\,(x,v)\, g\,(x,v,t) + \, h\,(x,v,t),$$

Множитель $f(x,v)$ играет роль управления. Решением обратной задачи является пара $(u,f) \in H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$ (на самом деле только f), и смысл задачи состоит в переводе с помощью f системы из начального состояния $\varphi(x,v)$ в финальное состояние $\psi(x,v)$. Полученные результаты являются предварительными для нелинейных задач (линейные задачи иследованы ранее; см., например, [2]). При рассмотрении прямой задачи для нашего уравнения использован известный метод [2], состоящий в сведении исходной задачи к интегральному уравнению. После этого с помощью принципа сжимающих отображений доказана корректная разрешимость интегрального уравнения.

Литература

[1] Хамди Н. *Задачи управляемости для нелинейных уравнений переноса.* Дис. канд. физ.-мат. наук. - М.: РУДН, 2004. - 155 с.

[2] Прилепко А.И., Волков Н.П. *Обратные задачи определения параметров нестационарного уравнения переноса по переопределениям интегрального типа.* // Дифф. уравнения. 1987. - Т. 23.

О некоторых управляемых системах второго порядка с фазовыми ограничениями

Гончарова М.Н. (Учреждение образования "Гродненский государственный университет имени Янки Купалы")

Рассматриваются управляемые системы второго порядка вида $\dot{x} = Ax + Bu$, где двумерный вектор x описывает состояние объекта, $u = (u^1, u^2)$ - вектор управления, матрица B не вырождена, а область управления U определяется неравенствами $|u^1| \leq 1, |u^2| \leq 1$. На траекторию наложено линейное фазовое ограничение, которое должно выполняться на протяжении всего движения. Требуется перевести объект из произвольной точки x_0 , удовлетворяющей фазовому ограничению, в начало координат за наименьшее время.

Решение поставленной задачи зависит от параметров, определяющих фазовое ограничение, и от расположения начальной точки. В фазовом пространстве выделяется множество начальных состояний, для которых решения задачи не существует, множество начальных состояний, для которых фазовое ограничение не является существенным и на множество начальных состояний, для которых оптимальная траектория отлична от оптимальной траектории в задаче без фазовых ограничений. В последнем случае для анализа решения применяются необходимые [1] и достаточные [2], [3] условия оптимальности. В случае, когда матрица A имеет различные действительные собственные значения, сопряженная функция, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности, является приемлемой для выполнения достаточных условий [2] и [3]. Во случае, когда матрица A имеет комплексные собственные значения с отрицательной действительной частью, сопряженная функция, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности [1], не удовлетворяет требованиям достаточных условий [2]. Однако оптимальность рассматриваемых траекторий можно доказать с использованием достаточных условий [3].

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969.

[2] Blagodatskikh V.I. Sufficient Conditions for Optimality in Problems with State Constraints//App. 1. Math. Optim. - 1981. -№7 - P.149-157

[3] Гончарова М.Н. Достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия. Известия РАН. Теория и системы управления, 2005, №5, с.53-61.

The Phragmen-Lindelöf principle for solutions of elliptic equations in a Banach space

Gorbachuk M.L. (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

We consider a differential equation of the form

$$y''(t) = By(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

with a positive operator B on a Banach space. We set $s = s(B) = \inf\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(B)\}$, $\varphi = \varphi(B) = \inf\{\varphi' \in [0, \frac{\pi}{2}) : \Sigma_{s,\varphi'} \supset \sigma(B),\ \mathbf{C} \setminus \Sigma_{s,\varphi'} \subset \rho(A)\}$, where $\sigma(B)$ and $\rho(B)$ are the spectrum and the resolvent set of the operator B, respectively, $\Sigma_{s,\varphi'} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg(\lambda - s)| \leq \varphi'\}$. It follows from the positivity of B that $s > 0$.

Theorem 1. Let $y(t)$ be a solution of equation (1) inside the interval $(0, \infty)$. If

$$\exists\, a > 0,\ \exists\, c_a > 0 : \|y(t)\| \leq c_a e^{at^\beta},\ t \geq t_0,$$

where $\beta < \frac{\pi}{\pi+\varphi}$, $t_0 > 0$ is fixed, then for any $\varepsilon > 0$ there exists a constant $c_\varepsilon > 0$ such that

$$\|y(t)\| \leq c_\varepsilon e^{-(\sqrt{s}-\varepsilon)t},\ t \geq t_0.$$

In the case when B is a positive normal operator on a Hilbert space, Theorem 1 may be made more precise.

On stability of solutions of abstract parabolic equations

Gorbachuk V.I. (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

We consider a differential equation of the form

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

where A is the generator of a bounded analytic C_0-semigroup $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ of linear operators on a Banach space.

The equation (1) is said to be uniformly (uniformly exponentially) stable if, for any solution of this equation on $(0, \infty)$,

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = 0 \quad (\exists\, \omega > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{\omega t}\|y(t)\| = 0).$$

We show that equation (1) is uniformly (uniformly exponentially) stable if and only if $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$ $(0 \in \rho(A))$, where $\rho(A)$ and $\sigma_c(A)$ are the resolvent set and the continuous spectrum of the operator A, respectively. In the case where equation (1) is uniformly, but not uniformly exponentially stable, the behavior at infinity of the solutions for equation (1), depending on the smoothness degree of their initial data with respect to the operator A^{-1}, is studied.

Positive Definite Functions and Generalizations of the Prime Number Theorem

Gorin E.A. (Moscow Pedagogical State University)

A refinement of the B.M.Bredihin theorems (see, e.g., [1]) concerning the asymptotic behavior of the number of basis elements of a free Abelian semigroup with countable basis is presented under the assumption that the semigroup is a locally finite part of the semigroup of nonnegative real numbers.

Standard analytic tools are used, including the Fourier — Laplace transforms; however, we also explicitly use the fact that some specific functions, including the function $t \to \log\zeta(\sigma + it)$, $\sigma > 1$, are positive definite, and apply the algebraic approach to the

Tauberian theorems due to G.E.Shilov; this enables one to substantially simplify the exposition as compared with the elementary approach used by Bredihin and to establish much more (for example, an analog of the Dirichlet theorem). For details see [2],[3].

Remark. I am going to report in Russian.

References

[1] А.Г.Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел,* М., Наука, 1971.

[2] E.A.Gorin, Russian Journal of Math. Physics, **13,** *No.*1 (2006), pp.31–54.

[3] Е.А.Горин, Чебышевский сборник, **6**, вып. 2(14), Тула (2005), с.100–128.

Positive Definite Functions and Generalizations of the Prime Number Theorem

Gorin E.A. (Moscow Pedagogical State University)

A refinement of the B.M.Bredihin theorems (see, e.g., [1]) concerning the asymptotic behavior of the number of basis elements of a free Abelian semigroup with countable basis is presented under the assumption that the semigroup is a locally finite part of the semigroup of nonnegative real numbers.

Standard analytic tools are used, including the Fourier — Laplace transforms; however, we also explicitly use the fact that some specific functions, including the function $t \to \log \zeta(\sigma + it)$, $\sigma > 1$, are positive definite, and apply the algebraic approach to the Tauberian theorems due to G.E.Shilov; this enables one to substantially simplify the exposition as compared with the elementary approach used by Bredihin and to establish much more (for example, an analog of the Dirichlet theorem). For details see [2],[3].

Remark. I am going to report in Russian.

References

[1] А.Г.Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел,* М., Наука, 1971.

[2] E.A.Gorin, Russian Journal of Math. Physics, **13,** *No.*1 (2006), pp.31–54.

[3] Е.А.Горин, Чебышевский сборник, **6**, вып. 2(14), Тула (2005), с.100–128.

Методы апостериорного контроля точности для задач вязкой несжимаемой жидкости с вращением

Горшкова Е. И., Репин С. И. (г. Санкт-Петербург)

Задачи вязкой несжимаемой жидкости с вращением возникают при исследовании движения жидкости в относительной (вращающейся) системе координат, что бывает необходимо, например, при расчете движения океанических масс в средних широтах. В данной работе представлены новые апостериорные оценки для линейной модели вязкой несжимаемой жидкости с вращением. Оценки получены при использовании метода, описанного в [2]. Для моделей задач вязкой несжимаемой жидкости, не включающих вращение, такие оценки были получены в работах [3], [4]. Оценка функционального типа для задачи с вращением была получена недавно в [1]. В настоящей работе представлены оценки отклонения от точных решений в нормах более общего вида и исследовано их численное применение.

Полученные оценки не зависят от способа аппроксимации и решения системы, не содержат неизвестных констант, зависящих от структуры сетки. Помимо реалистичной индикации распределения ошибки по области, оценки позволяют напрямую и, что наиболее важно, гарантированно оценить энергетическую норму отклонения приближенного решения от точного. Практическая эффективность предложенного подхода проверяется на серии численных примеров, демонстрируется эффективность индикации ошибки для конечномерных аппроксимаций, использующих адаптивные сетки.

Литература

[1] Gorshkova E., Mahalov A., Neittaanmäki P., Repin S. *A posteriori error estimates for viscous flow problems with rotation.* J. Math. Sci. New York, V. 142, N1, 2007, pp. 1749-1762.

[2] Neittaanmäki P., Repin S. *Reliable methods for computer simulation.* Error Control and a posteriori estimates, Elsevier 2004.

[3] Repin S. *A posteriori estimates for the Stokes problem*, J. Math. Sci. (New York), 109 (2002), 5, pp. 1950-1964.

[4] Репин С. И. *Оценки отклонения от точных решений некоторых краевых задач с условием несжимаемости*, Алгебра и анализ, Том. 16, Вып. 5 (2004), 121-164.

Все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве.

Горючкина И. В. (г. Москва)

Получены все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи всех трех его особых точек $x = 0, x = 1$ и $x = \infty$ при всех значениях его четырех комплексных параметров. Они образуют 105 семейств и включают разложения четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. В этих разложениях независимая переменная x может иметь комплексные показатели степени.

Сначала методами степенной геометрии [1] получены все асимптотические разложения решений всех четырех типов вблизи особой точки $x = 0$, у которых порядок первого члена меньше единицы (см. [2], [3], [4]). Эти разложения названы базовыми. Они образуют 18 семейств. Все другие асимптотические разложения решений вблизи трех особых точек уравнения вычисляются из базовых разложений с помощью симметрий уравнения.

Подавляющее большинство этих разложений – новые. Приводятся примеры и сравнения с известными результатами [4].

Литература

[1] Брюно А. Д. *Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31 - 80.*

[2] Брюно А. Д., Горючкина И. В. *Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. Т. 410. №3. С. 331 - 334.*

[3] Брюно А. Д., Горючкина И. В. *Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$ // Препринт №13. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2006. 32 с.*

[4] Горючкина И. В. *Экзотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Препринт №3. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2007. 29 с.*

О необходимых и достаточных условиях существования гомографических решений в ньютоновой проблеме многих тел

Гребеников Е.А.[8] (ВЦ РАН)

[8]Работа написана в соавторстве с Прокопеней А. Н.

Выведены необходимые и достаточные условия существования гомографических решений в ньютоновой проблеме произвольного числа взаимно притягивающихся тел. Показано, что необходимые условия можно интерпретировать как равенство между собой угловых скоростей "собственных"вращающихся систем координат каждого из тел. Выведены достаточные условия, выраженные системой нелинейных функциональных уравнений, исследование которых можно эффективно реализовать, например, в Системе Компьютерной Алгебры "Mathematica".

Литература

[1] Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел, - М.:, Изд-во РУДН, 2002.*

[2] Wolfram S. *The Mathematica Book. Cambridge University Press, Cambridge (1996)*

Heat kernels for Schrödinger operators

Grigoryan A. (Bielefeld)

We present the results on two-sided estimates for the heat kernel and the Green function of an elliptic Schrödinger operator $L = \Delta - \Phi$, where Δ is the Laplace operator in the n-dimensional Euclidean space and Φ is a smooth function. The results include a critical potential Φ of the form $\Phi(x) = c|x|^{-2}$, for large $|x|$. Our approach rests on the observation that if $h(x)$ is a positive solution to the equation $Lh = 0$ then the operator L is conjugate to the weighted Laplace operator $\Delta_h = h^{-2} div\left(h^2\nabla\right)$. The latter is a symmetric operator with respect to measure h^2dx and can be studied in the context of general weighted manifolds. Using the results for the stability of the parabolic Harnack inequality under a non-uniform change of measure on weighted manifolds, we estimate the heat kernel of the operator Δ_h, which implies the estimates for the heat kernel of L.

Новые бифуркации диффеоморфизмов Морса-Смейла

Гринес В. З. (г. Нижний Новгород)

Доклад посвящен изложению результатов, полученных автором в сотрудничестве с Хр. Бонатти, В. Медведевым и О. Починкой.

Сравнительно недавно было обнаружено принципиальное различие в топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях по сравнению с классификацией аналогичных потоков и диффеоморфизмов на поверхностях. Это связано, в частности, с возможностью дикого вложения сепаратрис седловых периодических точек в окрестности стоков и источников. Так в работе [1] показано, что в классе G_4 диффеоморфизмов Морса-Смейла трехмерной сферы S^3 с неблуждающим множеством, состоящим из четырех неподвижных точек: двух стоков, одного источника и одной седловой точки, существует счетное множество топологически не сопряженных диффеоморфизмов. Этот феномен есть следствие наличия счетного множества неэквивалентных типов дикого вложения сепаратрис седловых неподвижных точек.

Пусть $Diff_+(S^3)$ — пространство всех сохраняющих ориентацию C^r-диффеоморфизмов ($r \geq 2$) на S^3, снабженное C^1-топологией. Напомним, что семейство $\{f_t\}$ называется гладкой дугой, соединяющей диффеоморфизмы $f, f' \in Diff_+(\mathbf{S}^3)$, если существует гладкое отображение $F : S^3 \times [0,1] \to S^3$ такое, что отображение f_t, заданное формулой $f_t(x) = F(x,t)$, принадлежит $Diff_+(S^3)$ для каждого $t \in [0,1]$ и $f_0 = f$, $f_1 = f'$. Обозначим через G_2 класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на S^3, чье неблуждающее множество состоит в точности из одного стока и источника.

Теорема Для любых диффеоморфизмов $f, f' \in G_4$ существует гладкая дуга $\{f_t \in Diff_+(\mathbf{S}^3)\}$ и числа t_1, t_2 такие, что:

1) $f_0 = f$, $f_1 = f'$;

2) $f_t \in G_4$ для всех $t \in [0,t_1) \cup (t_2,1]$;

3) $f_t \in G_2$ для всех $t \in (t_1,t_2)$;

4) неблуждающее множество диффеоморфизма f_{t_i}, $i = 1,2$, состоит из двух гиперболических точек: источника и стока и одной негиперболической неподвижной точки типа седло-узел.

Работа поддержана грантом 05-01-00501 РФФИ и грантом 9686.2006.1 президента для поддержки ведущих научных школ.

Литература

[1] Bonatti Ch., Grines V.Z. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. // Journ. Dyn. and Control Syst.– 2000. N6. p. 579-602.

Ньютоновская динамика на плоскости, отвечающая движению с постоянной геодезической кривизной на кривой $\mu^2 = \nu^n - 1, n \in Z$: эргодичность, изохронность периодичность и фракталы

Гриневич П. Г., Сантини П. М. (г. Москва)

Классическая теорема об интегрируемости по Лиувиллю утверждает, что если $2n$-мерная гамильтонова система (мы предполагаем Пуассонову структуру невырожденной) имеет n интегралов в инволюции, то невырожденные компактные поверхности уровня $H_i = c_i$ являются n-мерными вещественными торами и порождаемая этими интегралами динамика реализуется как движение по прямолинейным обмоткам. Наиболее интересные примеры интегрируемых по Лиувиллю систем высокой размерности возникают в методе обратной задачи, и при этом все они интегрируемы в более сильном смысле: торы Лиувилля для них – это вещественные подторы n-мерных **комплексных** торов, возникающих как якобианы спектральных кривых. В частности, это означает что при продолжении в область комплексных времен мы получаем мероморфную квазипериодическую динамику.

В данной работе мы изучаем поведение решений в области комплексного времени для одномерного ангармонического осциллятора высокой степени с мономиальным потенциалом

$$\ddot{x} = -nx^{2n-1}. \tag{1}$$

В значительной мере эта работа была мотивирована идеей Ф.Калоджеро о построении изохронных систем путем введения введем комплексного времени $t = R\exp(i\tau) + t_0$. При этом получающаяся τ – динамика для уравнения (1) подходящей заменой переменной может быть сделана автономной. При достаточно малых R мы находимся в области голоморфности решения (1) имеем строгую 2π-периодичность по τ. Однако с увеличением R картина усложняется. При этом достаточно естественной заменой переменных задача может быть сведена к движению с постоянной геодезической кривизной на специальной римановой поверхности с почти всюду плоской метрикой с тривиальной голономией. Предельный случай $R \to \infty$ отвечает переходу к прямолинейной динамике на таких римановых поверхностях. В этом случае движение происходит по геодезическим, вектор скорости становится интегралом движения и порядок системы понижается до первого. Эта задача исследовлась рядом авторов (Masur, Weech, Зорич, Eskind, Концевич и многие другие). Случай конечного R начал изучаться лишь недавно авторами работы, а также Ю.Федоровым и D. Gomez-Ullate. Мы приводим результаты компьютерных экспериментов, которые позволяют сформулировать следующую гипотезу: все траектории периодичны при $n = 2, 3, 4, 5, 6$, а при $n > 6$ часть фазового пространства с положительной мерой заполнена фрактальными (апериодическими) траекториями. Предлагается идея возможного объяснения этого феномена.

О полулинейном эллиптическом уравнении с сингулярной нелинейностью

Гришина Г. В. (г. Москва)

Мы рассматриваем эллиптическое уравнение второго порядка с ограниченными измеримыми коэффициентами

$$(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + p(x)|x|^s u^{-\sigma} = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \{O\},$$

где $\sigma > 0$, s — произвольное действительное число, $0 < C_1 < p(x) < C_2$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, содержащая начало координат O.

Изучается поведение положительных слабых решений в окрестности точки O. В частности, показано, что не существует положительных решений $u(x)$, таких, что $u(x) \to 0$ при $x \to O$.

Все результаты являются новыми и для модельного уравнения

$$\Delta u + |x|^s u^{-\sigma} = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \{O\}.$$

On measure of maximal entropy for Teichmüller flow

Gurevich B.M. (Moscow State University)

The Teichmüller flow g_t on the moduli space $\mathcal{M}_\kappa$, $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$, of Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ endowed with a holomorphic differential of area 1 with zeros of orders $k_1, \ldots, k_n > 0$ is known to preserve a natural absolutely continuous probability measure μ_κ on a connected component $\mathcal{K}$ of $\mathcal{M}_\kappa$. Veech [1] proved that g_t on $\mathcal{K}$ is a Kolmogorov flow and its Kolmogorov–Sinai entropy (with respect to μ_κ) equals $2g - 1 + n$. We claim that μ_κ *is a measure of maximal entropy for* g_t and that *such a measure is unique.*

The proof is based on the relationship established by Veech [2] between g_t and a flow (also called after Teichmüller) on the Veech's space of "zippered rectangles". The latter flow admits a representation as a suspension flow induced by the countable state Bernoulli shift (X, T) and a function $f > 0$ ("roof function") on X. The T-invariant measure on X obtained from μ_κ as a result of a few transitions has a property that resembles the Margulis uniform expansion property of the measure on an unstable manifold of Anosov's system. Combined with some information on f this leads to the assertion stated above.

The talk is based on a joint work with A.I. Bufetov.

References

[1] W. Veech. *Ann. Math., 124 (1986), 441–530.*

[2] W. Veech. *Ann. Math., 115 (1982), 201–242.*

Полный топологический инвариант в классе диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей 3

Гуревич Е. Я. (г. Нижний Новгород)

В докладе излагаются результаты полученные совместно с В.З.Гринесом и В.С.Медведевым.

Решается задача топологической классификации сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на связном замкнутом ориентируемом многообразии M^n размерности $n > 3$, таких, что любой диффеоморфизм f из рассматриваемого класса удовлетворяет следующим условиям:

1) неустойчивое многообразие любой седловой периодической точки диффеоморфизма f является одномерным;

2) неустойчивые и устойчивые многообразия различных седловых периодических точек диффеоморфизма f не пересекаются.

Для $n = 2$ решение поставленной задачи следует из [1]. Топологические инварианты в этом случае являются не принципиальным обобщением схемы Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майера (1966 г.) и графа М. Пейксото (1973 г.). Случай $n = 3$ существенно отличается от $n = 2$, поскольку, в силу [2], уже в классе диффеоморфизмов трехмерной сферы с неблуждающим множеством, состоящим из четырех неподвижных точек, существует счетное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов (при этом все диффеоморфизмы имеют один и тот же граф Пейксото). Построению топологических инвариантов для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях размерности 3, в предположениях различной общности посвящены работы [2]-[4].

В докладе показывается, что для размерности большей трех полным топологическим инвариантом вновь является ориентированный граф Пейксото с заданной на нем подстановкой на вершинах.

Работа частично поддержана грантом 05-01-00501 РФФИ и грантом 9686.2006.1 Президента РФ ведущим научным школам.

Литература

[1] Bezdenezhnykh A. N., Grines V. Z. *Dinamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds.* Selecta Math.Sov., 1992. V. 11. № 1. P.1-11, 13-17.

[2] Bonatti Ch., Grines V. Z. *Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3.* Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London). 2000. V. 6 № 4. P. 579-602.

[3] Bonatti Ch., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E. *Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds.* Topology. 2004. V. 43. P. 369-391.

[4] Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В. *Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях.* Труды Матем. института им В.А. Стеклова. 2005. 250. С. 5-53.

On measure of maximal entropy for teichmüller flow

Gurevich B. M. (Moscow State University)

The Teichmüller flow g_t on the moduli space $\mathcal{M}_\kappa$, $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$, of Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ endowed with a holomorphic differential of area 1 with zeros of orders $k_1, \ldots, k_n > 0$ is known to preserve a natural absolutely continuous probability measure μ_κ on a connected component $\mathcal{K}$ of $\mathcal{M}_\kappa$. Veech [1] proved that g_t on $\mathcal{K}$ is a Kolmogorov flow and its Kolmogorov–Sinai entropy (with respect to μ_κ) equals $2g - 1 + n$. We claim that μ_κ *is a measure of maximal entropy for* g_t and that *such a measure is unique.*

The proof is based on the relationship established by Veech [2] between g_t and a flow (also called after Teichmüller) on the Veech's space of "zippered rectangles". The latter flow admits a representation as a suspension flow induced by the countable state Bernoulli shift (X, T) and a function $f > 0$ ("roof function") on X. The T-invariant measure on X obtained from μ_κ as a result of a few transitions has a property that resembles the Margulis uniform expansion property of the measure on an unstable manifold of Anosov's system. Combined with some information on f this leads to the assertion stated above.

The talk is based on a joint work with A.I. Bufetov.

References

[1] W. Veech. *Ann. Math., 124 (1986), 441–530.*
[2] W. Veech. *Ann. Math., 115 (1982), 201–242.*

Periodicity of solutions for nonlinear parabolic problems modelling thermo-control processes.

Gurevich P. (Moscow, Heidelberg), (Moscow, Heidelberg), Jäger W. (Heidelberg), (Heidelberg), Skubachevskii A. (Moscow)

We consider mathematical models of thermo-control processes occurring in chemical reactors and climate control systems. The temperature in a domain is controlled by a thermostat acting on the boundary. The feedback is based on temperature measurements performed by thermal sensors inside the domain.

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ be a bounded domain with boundary Γ of class C^∞, $Q_T = Q \times (0, T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$, $T > 0$. Let $w(x, t)$ be the *temperature* at the point $x \in Q$ at the moment $t \geq 0$ satisfying the initial-boundary problem

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{2}$$

$$w(x,t) = K(x)(u(t) - u_c) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{3}$$

where $K \in C^\infty(\Gamma)$, $u_c > 0$. We introduce the *"mean" temperature* $w_m(t) = \int_Q \mu(x) w(x,t)\, dx$, where $\mu \in L_\infty(Q)$ is determined by characteristics of the thermal sensors, and let u satisfy the Cauchy problem

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t) \quad (t \in (0,T)); \qquad u(0) = u_0, \tag{4}$$

where $u_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$. The functional H takes the values 0 or 1 according to the rule: $H = 1$ for $w_m(t) \leq w_1$, $H = 0$ for $w_m(t) \geq w_2$, and $H = \text{const}$ for $w_1 < w_m(t) < w_2$, where w_1 and w_2 $(w_1 < w_2)$ are fixed.

Instead of the Dirichlet condition (3), one can consider the Neumann or the Robin boundary condition.

The existence of solutions for corresponding mathematical models was studied in [1] (in the case of the Robin boundary condition). We investigate the periodicity of solutions for problem (1)–(4). In particular, we prove that the existence of a periodic pair $(w_m(t), u(t))$ implies the existence of a periodic solution $(w(x,t), u(t))$ for a.e. $x \in Q$. We also give an example in which a periodic pair $(w_m(t), u(t))$ (hence, a periodic solution $(w(x,t), u(t))$) exists.

This research is supported by RFBR (project No. 07-01-00268) and the Alexander von Humboldt Foundation.

References

[1] Colli P., Grasselli M., Sprekels J., *Appl. Math. Optim.*, **39**, 229–255 (1999).

Усиленная гёльдерова непрерывность решений эллиптического уравнения

Гущин А.К. (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

Хорошо известно, что обобщенные (из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$) решения линейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка с измеримыми ограниченными коэффициентами непрерывны по Гёльдеру внутри рассматриваемой области $Q \subset \mathbf{R}_n$ с некоторым, зависящим лишь от размерности пространства и постоянной эллиптичности показателем α. Настоящее сообщение посвящено изложению результата, объединяющего в терминах принадлежности специальному функциональному пространству "интегральное"свойство принадлежности решений $W^1_2(Q')$ $Q' \subset\subset Q$, "точечное"свойство его непрерывности по Гёльдеру в $\overline{Q}'$ и свойства, занимающие "промежуточное"положение. Причем среди этих промежуточных свойств есть и такие, которые не вытекают из принадлежности $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q) \cap C^\alpha(Q)$. Доказана принадлежность введённому пространству любого решения однородного уравнения в самосопряженной форме без младших членов и справедливость оценки его нормы в этом пространстве через W^1_2-норму в более широкой подобласти.

Введённое функциональное пространство состоит из непрерывных в $\overline{Q}'$ функций u, для каждой из которых ограничено семейство интегралов $\int\int \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\|x-y\|^\alpha} d\phi(x,y)$, где ϕ – специальным образом нормированная (не обязательно конечная) борелевская мера на множестве $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}_{2n} : x \neq y\}$ с носителем в $\overline{Q}' \times \overline{Q}'$ из некоторого класса. Этот класс мер порождает банахово пространство зарядов. Свойства решений являются следствиями ограниченности в этом пространстве различных семейств мер. В частности, ограниченность множества всех единичных ($\phi(\mathcal{D}) = 1$) мер дает гёльдерову непрерывность. В близких терминах исследуется гладкость вплоть до границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 04-01-00377) и гранта президента РФ (НШ – 6705.2006.1).

Strange limit sets in impulsive linear oscillators

Guţu V. (Moldova State University)

We are concerned with linear oscillators governed by differential equations under instantaneous changes of velocity:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (c \neq 0), \qquad \Delta\dot{x}\big|_{t=n} = \xi_n. \tag{1}$$

Suppose that $\xi_n \in D = \{\Delta_1 v, \Delta_2 v, \dots, \Delta_m v\} \subset \mathbf{R}$ for any $n \in \mathbf{N}$. We will say that the sequence $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is *universal* if it contains every word in the alphabet D.

If $(x_n, \dot{x}_n)$ denotes the state of the system immediately after the n-th kick, then the system (1) generates a Poincaré system, consisting of m affine maps $\Phi_{i_n} : (x_n, \dot{x}_n) \mapsto (x_{n+1}, \dot{x}_{n+1})$ $(i_n \in \{1, \dots, m\})$ of the $(x, \dot{x})$ phase space.

In case $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is constant or periodic the behaviour of the system (1) is quite simple: there exists an unique (attracting or repelling) periodic solution. However, this situation may be drastically changed in the general case.

Consider the Iterated Function System (IFS) $\{\mathbf{R}^2; \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m\}$ and let K denote its invariant set, which is an attractor or a repeller. If $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is universal, then the orbit of a typical point of K under the Poincaré system is dense in K.

Consider the two-dimensional linear system associated to (1) and defined on the cylinder $[0,1) \times \mathbf{R}^2$. Let A denote the matrix of this system. Denote by $\varphi(\cdot, x_0, \tau)$ the solution, which verifies the initial condition $\varphi(t, x_0, \tau)|_{t=\tau} = x_0 \in \mathbf{R}^2$.

We show that:

- there exists an invariant subset $\tilde{K} = \{(t, e^{tA}x) : t \in [0,1), x \in K\} \subset [0,1) \times \mathbf{R}^2$ such that the solution $\varphi(\cdot, x_0, \tau)$ is bounded if and only if $(\tau, x_0) \in \tilde{K}$;
- if the sequence $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is universal, then the motions on $\tilde{K}$ are chaotic;
- the system (1) has the Shadowing Property.

Abel-summation in Hermite-type Weighted Spaces with Singularities

Horváth Ágota P. (Budapest)

Investigating the connection of the weighted norm of the Hardy-Littlewood maximal function with the weighted norm of the original function the following question arised by Benjamin Muckenhoupt in 1972 : There is an orthonormal system $(\{\varphi_n\})$ in a space/ with respect to a weight w on $[0, 2\pi)$, and there is another weight u on the same interval. The Poisson integral of a function f is defined by $P_r(f,x) = \sum_n r^n a_n(f)\varphi_n$, where $a_n(f)$-s are the Fourier coefficients of f with respect to w. The question is the following: Under what conditions will this Poisson integral converge to the function (with $r \to 1-$) according to the weighted norm with u? B. Muckenhoupt gave the answere in two cases: in the trigonometric case (that is $w \equiv 1$), and in ultraspheric, or Gegenbauer case ($w(\theta) = \sin^{2\lambda}(\theta)$). In these cases the necessary and sufficient condition was that u had to fulfil the A_p- or the weighted A_p-condition.

If u is an A_p-weight, then u may has only "week"zeros. The whole situation changes, when u has "strong"zeros, like $\sin^k \frac{x - x_0}{2}$. On the trigonometric system the question was generalized (in this direction) by Kazaros S. Kazarian in 1987 . Developing the multiplicative completion method of R. P. Boas and H. Pollard, he gave a method for giving the fundamental system in the weighted space with respect to u with "strong"zeros, and for giving the modified Poisson kernel here. Roughly speaking the new system (with respect to u) can be get from the old one by deleting some consecutive φ_n−s, and the number of the members has to be deleted depends on the zeros of u. The characterization of the existence of the solution of Dirichlet's problem in a weighted L^p-space on the unite disk was given also by K. S. Kazarian.

A sufficient condition for the similar problem in the continuous case was given by K. S. Kazarian and the author in 2007.

Turning to the real line we have to mention that Abel-summability for Hermite weights ($w(x) = e^{-x^2}$) was proved by B. Muckenhoupt in 1969. He showed in this paper, that to get and to solve a Dirichlet-problem here, a modified Poisson integral has to be introduced. With the original Poisson integral, the differential equation is lost, but we can discuss the Abel-summability.

In this talk we give give a sufficient condition for Abel-summability by the combination of the real line- and the unite disk-methods, when besides the Hermite weight ($w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$) we have another weight ($s(x)$) with finite many "strong"zeros. We want to get a wider class of functions to be Abel-summable than in the original Hermite case, so we will suppose that $s(x)$ has no singularities, and $s(x)$ is bounded on the whole real line.

Variational Modeling of the Transient Non-linear Flow in Porous Media, its Geometrical Interpretation and Numerical Simulation

Ibragimov A. , Aulisa E. , Toda M. (Texas Tech University, Lubbock, Texas)

Our report is focused on certain theoretical aspects of non-linear flows in porous media, inspired by problems in reservoir and petroleum engineering. The goal of this paper is to develop a mathematically rigorous framework to prove the existence of time invariants for the transient dynamic processes associated to the Darcy-Forchheimer flow in a reservoir. This approach is based on our recent results on modeling transient Forchheimer flows. It was observed that for transient non-linear Forchheimer flow in porous media, there exists a steady state invariant. This invariant is called diffusive capacitance and has a clear physical and engineering meaning, in terms of productivity index. For linear Darcy flows, the diffusive capacitance is usually computed by solving a transient problem via certain analytical or semi-analytical tools. These methods are very difficult and sometimes impossible to apply for non-linear cases. In our previous papers [1] [2], we showed that the ratio expressed as diffusive capacitance/productivity index is actually time-independent in the class of the time-dependent solutions. This class appeared to be closely related to a certain non-linear elliptic equation, which can be regarded as the degenerate equation of a constant mean curvature (CMC) graph. It was proved that the value of the time-independent productivity index can be computed by solving the steady state problem for the non-linear PDE only once. We showed that the non-linear equation for the Forchheimer two-term law can be transformed by some appropriate mapping into an equation, that can be interpreted as a Laplace-Beltrami equation on a Riemannian manifold. We have obtained relations between the well productivity index and the energy-type characteristics of CMC graphs or minimal surfaces with degenerate metrics. The relationship between these very different objects is interesting in itself. In addition, we showed that the newly obtained properties of fast flows through this geometrical interpretation can be used as analytical tools for some new numerical methods.

References

[1] Aulisa E, Ibragimov A, Valko P and Walton J. *Mathematical Framework of the Well Productivity Index For Fast Forchheimer (Non-Darcy) Flows in Porous Media.* Submitted

[2] Aulisa E, Cakmak A, Ibragimov A and Solynin A. *Variational Principle and Steady State Invariants for Non-Linear Hydrodynamic Interactions in Porous Media.* Submitted.

Бифуркационные задачи со слабоосцилирующими параметрами

Ибрагимова Л.С. (Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета)

Рассматривается задача о локальных бифуркациях в окрестностях стационарных состояний динамических систем с параметрами, эволюционирующими по периодическому закону. Изучаются сценарии бифуркационного поведения системы, даются критерии ее устойчивости. Показано, что в естественной постановке бифуркация двукратного равновесия преобразуется в бифуркацию вынужденных колебаний, а бифуркация Андронова-Хопфа – в бифуркацию почти периодических колебаний. Определены асимптотические формулы для возникающих колебаний, а также рекомендации по процедуре построения решений.

Analyticity and small scales for the solutions of the damped-driven 2D Navier–Stokes equations

Ilyin A.A. (Keldysh Institute of Applied Mathematics)

We consider the 2D space periodic Navier–Stokes system with damping

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i u = -\mu u + \nu \Delta u - \nabla p + f, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

where $x \in [0, L/\gamma] \times [0, L]$. Here the damping μu represents the Rayleigh friction term. In the geophysical context the viscosity plays a much smaller role in the mechanism of dissipating energy than the Rayleigh friction. That is why the friction coefficient $\mu > 0$ will be fixed and we consider the system at the limit when $\nu \to 0^+$.

The fractal dimension of the global attractor of the system (1) satisfies

$$\dim_F \mathcal{A} \le c_1 D, \qquad D = \frac{\|\operatorname{rot} f\|_\infty |\Omega|}{\mu\nu}, \tag{2}$$

where c_1 is an absolute constant ($c_1 \le 12$). This estimate is sharp as both $\nu \to 0$ and $\gamma \to 0$. Therefore the small length scale defined as $l_f \sim \left(\frac{|\Omega|}{\dim_F \mathcal{A}}\right)^{1/2}$ is of the order of

$$l_f \sim \frac{|\Omega|^{1/2}}{D^{1/2}}. \tag{3}$$

This heuristic estimate is, in fact, a rigorous bound for the small length scale expressed in terms of the number of determining modes and nodes, which means that any lattice of points in Ω at a typical distance $l \le l_f$ is determining for the long time dynamics.

Finally, we show that the analyticity radius l_a of the solutions of (1) (with analytic f) lying on the attractor satisfies the lower bound:

$$l_a \ge \frac{c_2 |\Omega|^{1/2}}{D^{1/2}(1 + \log D)^{1/2}},$$

which up to a logarithmic correction agrees both with the smallest scale estimate (3) and the rigorously defined typical distance between the determining nodes.

This a joint work with E.S. Titi.

Граничное управление процессом колебаний струны за достаточно большой промежуток времени.

Ильин В.А. , Моисеев Е.И. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Формулы обращения и критерии ограниченности линейных операторов в пространстве Крейна[9]

Иохвидов Е.И. (Воронежский государственный технический университет)

Исследуются линейные операторы A, принадлежащие классу Γ, т.е. удовлетворяющие условию $\ker(P_+ + P_- A) = \{0\}$, где P_+ и P_- - взаимно-дополнительные ортопроекторы, определяющие индефинитную метрику в пространстве Крейна. Для оператора $A \in \Gamma$ имеет смысл преобразование Потапова-Гинзбурга

$$B = \delta(A) = (P_- + P_+ A)(P_+ + P_- A)^{-1}.$$

Основные результаты.

Теорема 1. Имеют место следующие формулы обращения:

$$(P_+ + P_- A)^{-1} = P_+ + P_- B, \qquad A(P_+ + P_- A)^{-1} = P_- + P_+ B.$$

Теорема 2. Ограниченность оператора $P_- B$ эквивалентна ограниченности оператора $(P_+ + P_- A)^{-1}$, а ограниченность оператора $P_+ B$ эквивалентна ограниченности оператора $A(P_+ + P_- A)^{-1}$.

Доказанные теоремы позволили оценить нормы операторов $(P_+ + P_- A)^{-1}$ и $A(P_+ + P_- A)^{-1}$ в случае, когда $A \in \Gamma_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$. Напомним, что операторное семейство Γ_α характеризуется тем, что оператор $B = \delta(A)$ ограничен и при этом $||B|| \leq \sqrt{\alpha}$. Ранее было известно лишь то, что в частном случае J-нерастягивающего оператора $(\alpha = 1)$ оператор $(P_+ + P_- A)^{-1}$ является ограниченным.

Разрешимость задачи инициализации для основных уравнений динамики океана

Ипатова В. М. (г. Долгопрудный, Московская обл.)

[9]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203.

Разрешимость основных уравнений динамики океана (РЕО) была ранее изучена в предположении, что плотность воды $\rho = \rho(T, S)$ линейно зависит от температуры T и солености S (см. [1-3]). В настоящей работе рассматривается случай, когда плотность является нелинейной непрерывной по Липшицу функцией, $|\rho(T_1, S_1) - \rho(T_2, S_2)| \leq L\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (S_1 - S_2)^2}$ $\forall T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathbf{R}$, а также исследуется существование решений задачи о восстановлении неизвестного начального состояния по имеющимся данным наблюдений.

Пусть Ω – открытое подмногообразие сферы радиуса R с кусочно-гладкой границей, x, y, r – сферические координаты, $G = \{(x, y) \in \Omega, 0 < z < H(x, y)\}$, $0 < t_1 < \infty$, $D = \Omega \times (0, t_1)$; $(u, v, w) \equiv (\mathbf{u}, w)$ – вектор скорости, $w = w(\mathbf{u}) = div \int_z^{H(x,y)} \mathbf{u} dz'$, $\xi = \xi(x, y, t)$ – возвышение уровня поверхности океана; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla + w(\mathbf{u})\partial/\partial z$, $A = -\mu\Delta - \nu\partial^2/\partial z^2$.

Система РЕО записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + g\nabla\xi + g/\rho_0 \nabla \int_0^z \rho dz' = \mathbf{f},$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad \xi_t + div \int_0^{H(x,y)} \mathbf{u} dz = Q_w,$$

где $B(u)\mathbf{u} = (2\omega \sin y + u \mathrm{tg} y/R)(-v, u)$.

Для указанной системы доказывается существование решений начально-краевой задачи в классе функций $\mathbf{u}, T, S \in L_L c0, t_1; W_2^1(G)) \cap L_\infty(0, t_1; L_2(G))$, $\xi \in L_\infty(0, t_1; L_2(D))$.

Предполагается, что на измеримом подмножестве $D_1 \subset D$ известны наблюдения за возвышением уровня $\xi = \xi_{obs}(x, y, t)$ и за поверхностной температурой $T|_{z=0} = T_{obs}(x, y, t)$, которые используются для отыскания значений функций $\mathbf{u}$, T, S, ξ в момент времени $t = 0$. Расхождение между решением РЕО и наблюдаемыми величинами характеризуются регуляризованным функционалом стоимости. Доказывается разрешимость оптимизационной задачи при всех $T_{obs}, \xi_{obs} \in L_2(D_1)$.

Работа выполнена в рамках проекта "Методы решения задач вариационного усвоения данных наблюдений и управления сложными системами"по теме 3 ОМН РАН и при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

Литература

[1] Lions J.L., Temam R., Wang S. *On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. 1992. N5. P. 1007–1053.*

[2] Temam R., Ziane M. *Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam: Elsevier. 2004. Vol. 3.*

[3] Агошков В.И., Ипатова В.М. *Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. 2007. Т. 412, N2. С. 1–3.*

Об одном аналоге теоремы Амбарцумяна

Ишкин Х. К. (г. Уфа)

Практически все результаты по асимптотике спектра несамосопряженных дифференциальных операторов получены в предположении аналитичности коэффициентов соответствующего дифференциального выражения (см.[1-2] и имеющуюся в них библиографию). В связи с этим возникает вопрос: насколько это условие существенно?

В предлагаемой работе изучается оператор L, порожденный в пространстве $L^2(0;\infty)$ дифференциальным выражением $ly = -y'' + qy$ и краевым условием $y(0) = 0$, где $q(x) = e^{i\theta}x^\alpha + r(x)$, $\alpha > 0$, $0 < |\theta| < \pi$, функция $r(x)$ аналитична в угле, ограниченном лучами $\{\arg z = 0\}$, $\{\arg z = -\theta/(2+\alpha)\}$ и удовлетворяет равномерной по $\arg z$ оценке $r(z) = o(z^\alpha)$, $z \to \infty$.

Асимптотика собственных чисел оператора L хорошо известна [1]:

$$\lambda_k \sim \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}dx \cdot k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} e^{\frac{2i\theta}{2+\alpha}}, \quad k \to \infty. \tag{1}$$

Пусть V — оператор умножения на финитную суммируемую функцию $V(x)$ с носителем $\operatorname{supp}(V) = [0;b]$, $\quad b > 0$.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1) Спектр оператора $L + V$, помимо основной серии $\{\mu_k^{(1)}\}$, удовлетворяющей (1), имеет дополнительную: $\mu_k^{(1)} \sim (\pi k/b)^2$, $k \to \infty$;

2) Если спектр оператора $L + V$ состоит только из одной серии $\{\mu_k\}$, удовлетворяющей (1), то $V \equiv 0$.

Утверждение 2) напоминает известную теорему Амбарцумяна. Однако, аналогия здесь только формальная. Дело в том, что в ходе доказательства мы получаем более сильное утверждение: в условиях утверждения 2) функция V имеет аналитическое продолжение в некоторую окрестность полуоси $(0;\infty)$. Это и есть ответ на поставленный выше вопрос: условие аналитичности коэффициентов — по существу.

Работа поддержана РФФИ, гранты №№ 05-01-97914 и 05-01-00515а.

Литература

[1] Федорюк М. В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1983.*

[2] Шкаликов А. А. *Спектральные портреты оператора Орра — Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса. Современная математика. Фундаментальные направления. Том 3 (2003). с.89-112.*

Расчёт минимальных блоков обратной связи для управляемых систем

Исламов Г.Г. (Удмуртский госуниверситет)

Пусть $x(t) = \operatorname{colon}(x_1(t), ..., x_n(t))$ есть набор показателей управляемой системы, описываемой дифференциальным уравнением $x'(t) = A\,x(t) + u(t) + \nu(t), t \in R$, где R - числовая ось, $\nu(t)$ - воздействие внешней среды, $u(t)$ - управление, которое формируется по методу обратной связи с запаздыванием: $u(t) = -K\,x(t-h)$. Здесь $h > 0$ - величина запаздывания блока обратной связи, K - матрица этого блока. Ранг r этой матрицы определяет число управляющих воздействий на систему со стороны блока обратной связи. Блоки обратной связи с минимальным рангом матрицы K, обеспечивающие заданный характер поведения, мы называем минимальными блоками обратной связи. Минимальный ранг матрицы блока обратной связи, обеспечивающей важное свойство системы с обратной связью: сохранение "частоты колебаний" внешнего возмущения $\nu(t) = e^{\lambda t}\psi$, где вектор-столбец $\psi = \operatorname{colon}(\psi_1, ..., \psi_n)$ может быть любым элементом из пространства C^n, а параметр λ - любым числом из заданной области Ω комплексной плоскости C, а также непрерывную зависимость "амплитуды колебаний" системы

$x(t) = e^{\lambda t}\varphi$ от "амплитуды колебаний" $\nu(0) = \psi$ этого возмущения для указанного класса возмущений, даётся равенством $\min \operatorname{rank} K = \max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\lambda E - A)$, где E-единичная матрица порядка n. При построении матрицы K используется результат работы [1].

Литература

[1] Islamov G.G. *On the exact formula for eigenvalue geometric multiplicity* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. Воронеж: ВГУ, 2005. - с.7.

Квазиоптимальные непрерывные стратегии в дифференциальных играх с эллипсоидальными штрафами

Иванов Г. Е. (г. Москва)

Рассматривается антагонистическая линейная дифференциальная игра

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \qquad x(0) = x_0$$

на отрезке времени $t \in [0;\vartheta]$ с функционалом качества

$$J = \frac{1}{2}\|x(\vartheta)\|^2 + \int_0^{\vartheta} \gamma(t)\sqrt{1 - v^T G(t) v}\, dt$$

и эллипсоидальными геометрическими ограничениями на управления игроков

$$u^T(t)\, F(t)\, u(t) \le 1, \qquad v^T(t)\, G(t)\, v(t) \le 1, \qquad \forall t \in [0;\vartheta].$$

Цель игрока u — минимизировать J, цель игрока v — противоположная.

Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — управления игроков, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы. Заданы непрерывная функция $\gamma : [0;\vartheta] \to (0;+\infty)$ и непрерывные матрично-значные функции $A : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{n\times p}$, $C : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{n\times q}$, $F : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{p\times p}$, $G : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{q\times q}$, причем для любого $t \in [0;\vartheta]$ матрицы $F(t)$, $G(t)$ симметричны и положительно определены.

Пусть матрично-значная функция $\Phi : [0;\vartheta] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\Phi}(t) = -A(t)\,\Phi(t)$, причем $\Phi(\vartheta)$ — единичная матрица. Определим матрично-значные функции

$$P(t) = \Phi(t)\, B(t)\, F^{-1}(t)\, B^T(t)\, \Phi^T(t), \qquad Q(t) = \Phi(t)\, C(t)\, G^{-1}(t)\, C^T(t)\, \Phi^T(t).$$

Теорема. Пусть

$$\left\| \int_0^{\vartheta} \gamma^{-1}(t)\, P(t)\, dt \right\| < 1.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует и единственен вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий уравнению

$$\psi + \int_0^{\vartheta} \left(\frac{P(t)\,\psi}{\sqrt{\varepsilon^2 + \psi^T P(t)\,\psi}} - \frac{Q(t)\,\psi}{\sqrt{\gamma^2(t) + \psi^T Q(t)\,\psi}} \right) dt = \Phi(0)\, x_0. \qquad (1)$$

При этом результат игры, гарантированный стратегией

$$u_\varepsilon(t) = -\frac{F^{-1}(t)\, B^T(t)\, \Phi^T(t)\, \psi}{\sqrt{\varepsilon^2 + \psi^T P(t)\, \psi}}$$

не превышает результат, оптимальный для игрока u, плюс $\varepsilon\vartheta$.

Замечание. Для решения уравнения (1) построены быстросходящиеся алгоритмы, имеющие полиномиальную сложность относительно размерности задачи.

Поведение у границы слабых решений задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений

Ивочкина Н. М. (г. Санкт-Петербург)

Для m-гессиановских уравнений рассматривается взаимосвязь вязкостных решений и слабых решений в смысле Трудингера (T-решения). Для непрерывных T-решений имеется принцип максимума А.Д. Александрова, что позволяет доказать существование и единственность непрерывных T-решений задачи Дирихле, а также построить апостериорные оценки их постоянной Гельдера в замкнутой области. При этом правые части уравнений принадлежат L_p с достаточно большим p. Мы приведем также более точный по p аналог этого принципа максимума, анонсированный в работах Н. Трудингера.

Оценки характеристических показателей линейных дифференциальных систем Коппеля–Конти

Изобов Н. А. , Прохорова Р. А. (Минск, Беларусь)

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ коэффициентами, фундаментальной матрицей $X_A(t)$ и младшим $\lambda_1(A)$ и старшим $\lambda_n(A)$ характеристическими показателями.

Для множеств Коппеля–Конти [1, с. 131; 2, 3] систем (1) приведем эквивалентное

Определение. Будем говорить, что система (1) принадлежит множеству L^pD с параметром $p > 0$, если для неё существует пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2, $P_1 + P_2 = E$, таких, что выполнены условия

$$C_p(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \int\limits_0^t \|X_A(t)P_1X_A^{-1}(\tau)\|^p d\tau < +\infty,$$

$$D_p(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \int\limits_t^{+\infty} \|X_A(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p d\tau < +\infty.$$

В случаях $P_1 = E$ и $P_2 = E$ множество L^pD обозначают соответственно L^pS и L^pN.

Теорема 1. Старший характеристический показатель $\lambda_n(A)$ системы (1) из множества L^pS при любом фиксированном значении параметра $p \in (0, +\infty)$ удовлетворяет оценке $\lambda_n(A) \leq -[pC_p(A)]^{-1}$.

Теорема 2. Для младшего характеристического показателя $\lambda_1(A)$ системы (1) из множества L^pN справедлива оценка $\lambda_1(A) \geq [pD_p(A)]^{-1}$, $p > 0$.

В общем случае множества L^pD, $p > 0$, с ненулевыми проекторами P_1 и P_2 справедлива

Теорема 3. Характеристические показатели $\lambda[x_1]$ и $\lambda[x_2]$ любых нетривиальных решений x_1 и x_2 системы (1) из множества L^pD, $p > 0$, с начальными векторами $x_i(0) \in P_iR^n \setminus \{0\}$, $i = 1,2$, удовлетворяют оценкам $\lambda[x_1] \leq -[pC_p(A)]^{-1}$, $\lambda[x_2] \geq [pD_p(A)]^{-1}$, $p > 0$.

Рассмотрим также возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с возмущением $f \in U_{m>1}F_m$ высшего порядка малости, где F_m – множество кусочно-непрерыв ных по $t \geq 0$ и непрерывных по $y \in U_\rho \equiv \{x \in R^n : \|x\| < \rho\}$, $\rho = \rho(f) \in (0,1]$, вектор-функций f, удовлетворяющих условию $\|f(t,y)\| \leq L\|y\|^m$, $m > 1$, $(t,y) \in [0,+\infty) \times U_{\rho(f)}$.

Теорема 4. Пусть система (1) принадлежит множеству L^pS при $p \geq 1$. Тогда для характеристического показателя $\lambda[y]$ всякого решения y с начальным значением $y(0)$ из достаточно малой окрестности начала координат возмущенной системы (2) с $f \in U_{m>1}F_m$ выполнена оценка $\lambda[y] \leq -[C_1(A)]^{-1}$.

Литература.

[1] Coppel W. A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations: Heath Math. Monographs. D.C. Heath and Company. Boston., 1965.*

[2] Conti R. // *On the boundedness of solutions of ordinary differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. V. 9, N. 1. P. 23–26.*

[3] Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // *О решениях дифференциальной системы с неустойчивым линейным приближением Коппеля–Конти //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 61–72.*

Asymptotic Optimization of Nonlinear Singularly Perturbed Systems

Kalinin A. I. , Grudo J. O. (Belarusian State University, Minsk)

Within the framework of the theory of optimal control, great attention is given to the singularly perturbed problems. As is known, the numerical solution of optimal control problems entails repeated integration of the original and conjugate systems. In singularly perturbed problems, these dynamic systems are stiff, and, as a result, serious difficulties arise with the computations. For this reason, the asymptotic approach is preferred, especially because it allows decomposition of the original control problem into problems of lower dimension.

In the report, we consider the time-optimal problem for a nonlinear singularly perturbed system with multidimensional control the values of which are bounded in the Euclidean norm. There are a lot of applied problems with such control constraints. First of all, this refers to control problems for mechanical systems, where the control actions are, as a rule, forces bounded in magnitude.

In the class of multidimensional controls $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_r(t)\big)$ with piecewise-continuous components we consider the time-optimal problem

$$\begin{gathered} \dot{y} = a_1(y,t) + A_1(y,t)z + B_1(y,t)u, \quad y(0) = y_0, \\ \mu\dot{z} = a_2(y,t) + A_2(y,t)z + B_2(y,t)u, \quad z(0) = z_0, \\ y(T) = 0, \quad z(T) = 0, \quad \big\|u(t)\big\| \leqslant 1, \quad t \in [0,T], \quad J(u) = T \to \min, \end{gathered} \tag{1}$$

where μ is a small positive parameter, y is a n-dimensional vector, z is a m-dimensional vector, and $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_r^2}$. Matrix $A_2(y,t)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, is Hurwitz, that is, the real parts of all its eigenvalues are negative.

We propose an algorithm by means of which asymptotic approximations to the solution to problem (1) can be constructed. It is essential that its realization presupposes the decomposition of the original problem into problems of lower dimension, and, what is more, the algorithm does not contain integrations of stiff systems. It is conceptually close to the algorithm developed by Kalinin and Semenov [1] for linear singularly perturbed systems.

References

[1] Kalinin A. I., Semenov K. V. *Asymptotic Optimization Method for Linear Singularly Perturbed Systems with Multidimensional Control. Comput. Math. and Math. Phys., Vol. 44, No. 3, 2004, pp. 432–443.*

Nonlinear elliptic systems in dual Morrey spaces

Kalita E. (Donetsk)

We consider high order nonlinear elliptic systems of tupe $div^m A(x, D^m u) = f(x)$, $x \in R^n$, with the natural energetic space W_p^m and standard structure conditions. Although existence and correct behavior of solution in the natural energetic space is known by a long time, there are very few results in weaker spaces (a priori estimates in $W_{p-\epsilon}^m$ and solvability in dual Morrey spaces for $p = 2$). We present the a priori estimates in dual Morrey spaces in general case $p \in (1, \infty)$.

We define the dual Morrey spaces $L_{q,a} = L_{q,a}(R^n)$, $1 < q < \infty$, $0 < a < n(q-1)$, by the norm $\|f\|_{q,a} = \inf_\sigma \left(\int_{R^n} |f|^q \omega dx \right)^{1/q}$, where $\omega(x) = \left(\int_{R_+^{n+1}} r^{a/(1-q)} 1_{\{|x-y|<r\}} d\sigma(y,r) \right)^{1-q}$, inf takes over nonnegative Borel measures σ on $R_+^{n+1} = \{(y,r) : y \in R^n, r > 0\}$ with normalization $\sigma(R_+^{n+1}) = 1$. Let I_m be a fractional integral of order m, $1/p + 1/p' = 1$. For the solutions of system we establish the estimate

$$\| \, |D^m u|^{p/q} \|_{q,a} \leq c \| \, |I_m f|^{p'/q} \|_{q,a}$$

for $1 < q \leq p'$, $a \in (0, \min\{a^*, b(q-1)\})$, where $a^* > 0$ depends on n, m, p and a modulus of ellipticity of system, $b < n$.

In case of p close to 2 the correct behavior of solution is established on the arbitrary big part of scale of spaces. Namely, for arbitrary $a^* < n$ and $1 + a^*/n < q_1 < q_2 < 2$ there exists $\delta > 0$ such that for $|p-2| < \delta$ and systems which are sufficiently close to (m,p)-Laplacian (in terms of a modulus of ellipticity) the estimate above holds true for $a \in (0, a^*)$, $q \in (q_1, q_2)$. In particular, it allows to extend the estimates of solutions near the singular point as well as the existence of the fundamental solutions (known for $p = 2$) to (m,p)-Laplacian with p close to 2 and to close systems.

Системы уравнений Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами

Калитвин А.С. (Липецкий государственный педагогический университет)

Пусть операторы L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}, K_{ij}, K, M определяются равенствами

$$(L_{ij}u)(t,s) = \int_a^t l_{ij}(t,s,\tau)u(\tau,s)d\tau, \quad (M_{ij}u)(t,s) = \int_c^d m_{ij}(t,s,\sigma)u(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(N_{ij}u)(t,s) = \int\limits_G\int n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \quad K_{ij} = L_{ij} + M_{ij} + N_{ij},$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix},$$

где $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$, G – одно из множеств $[a,t] \times [c,d]$, $[a,b] \times [c,s]$, D; l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ – заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

В пространстве $C^n(D)$ непрерывных на D вектор-функций со значениями в C^n, где C — поле комплексных чисел, рассматривается система уравнений Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами

$$x(t,s) = (Kx)(t,s) + f(t,s), \tag{1}$$

где $x(t,s) = (x_1(t,s),...,x_n(t,s))^T$, $f(t,s) = (f_1(t,s),...,f_n(t,s))^T$ и $f_1,...,f_n$ — заданные непрерывные на D функции.

Оператор K действует в $C^n(D)$ точно тогда, когда в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций действуют операторы K_{ij} $(i,j = 1,...,n)$. При этом оператор K непрерывен в $C^n(D)$, однако не является компактным даже в общем случае непрерывных ядер. Поэтому уравнение (1) вообще говоря не является фредгольмовым в $C^n(D)$.

Пусть $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных на D вектор–функций со значениями в $L^1(\Omega)$, где Ω — одно из множеств $[a,b]$, $[c,d]$, D.

Теорема. *Если $l_{ij} \in C(L^1([a,b]))$, $m_{ij} \in C(L^1([c,d]))$, $n_{ij} \in C(L^1(D \times D))$ $(i,j = 1,...,n)$ и $f \in C^n(D)$, то в $C^n(D)$ фредгольмовость уравнения $x = Kx + f$ равносильна обратимости оператора $I - M$.*

Критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа

Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. (Центр физико-математических исследований МОН РК, г. Алматы)

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача Коши. Найти в области Ω решение уравнения Лапласа

$$Lu = u_{tt} + u_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u\Big|_{t=-1} = \tau(x), \quad u_t\Big|_{t=-1} = \nu(x). \tag{2}$$

Ж.С. Адамар [1] в случае $f = 0$, $\tau(x) = 0$, $\nu(x) = \dfrac{1}{k}\sin k(t+1)\sin kx$ указал на некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.

В работах Тихонова А.Н. [2], Лаврентьева М.М. [3]-[4] и других, задача (1) – (2) сведена к интегральным уравнениям первого рода и дана различные методы регуляризации этой задачи и установлена ее условная корректность.

Предположим, что решение задачи (1) – (2)$u \in C^2(\overline{\Omega})$ существует и

$$u\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u\Big|_{x=\pi} = \psi_2(t), \tag{3}$$

где $\psi_i(t)$, $i = 1,2$ неизвестные функции, подлежащие определению.

Вместо задачи (1) – (2) рассмотрим следующую задачу:

Смешанная задача Коши. Найти в Ω решение уравнения

$$Lu = \Delta u(x,t) = f(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{t=0} = \tau(x), \ \ u_t\Big|_{t=0} = \nu(x), \ \ u\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \ u\Big|_{x=\pi} = \psi_2(t). \tag{5}$$

Пользуясь заменой $\omega(x,t) = u(x,t) - \tau(x) - (t+1)\nu(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\psi_1(t) - \frac{x}{\pi}\psi_2(t)$, задача (4) – (5) сведём к смешанной задаче Коши с однородными граничными и начальными данными:

$$\Delta\omega = L\omega = f - \tau''(x) - (t+1)\nu''(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\psi_1''(t) - \frac{x}{\pi}\psi_2''(t) = \widetilde{f}, \tag{6}$$

$$\omega\Big|_{t=-1} = 0, \ \ \omega_t\Big|_{t=-1} = 0, \ \ \omega\Big|_{x=0} = 0, \ \omega\Big|_{x=\pi} = 0. \tag{7}$$

Пользуясь критерием сильно разрешимости смешанной задачи Коши (6)–(7) доказана (см.[5]).

Теорема. Пусть $\tau(x), \nu(x) \in C^2[0,\pi]$, $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, тогда сильное решение задачи Коши (1) – (2) ограничен в $L_2(\Omega)$, тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sum_{j=0}^{k} P_{2k2j}(\tau_{2j} + \nu_{2j} - f_{2j1})|^2 < \infty, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sum_{j=0}^{k} P_{2k+12j+1}(\tau_{2j+1} + \nu_{2j+1} - f_{2j+11})|^2 < \infty, \tag{9}$$

где P_{2k2j} – матрица ортогонализации системы $\varphi_{2k}(t)$, а $P_{2k+12j+1}$ – матрица ортогонализации системы $\varphi_{2j+1}(t)$. Здесь $u_{k1}(x,t) = \sin kx\varphi_k(t)$ – собственные функции спектральной задачи

$$\Delta u_{k1} = \lambda_{k1}u_{k1}(x,-t), \ \ u_{k1}\Big|_{x=0} = u_{k1}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \ u_{k1}\Big|_{t=-1} = \frac{\partial u_{k1}}{\partial t}\Big|_{t=-1} = 0 \tag{10}$$

соответствующие наименьшему собственному значению λ_{k1} при фиксированном $k = 1,2,3...$, а τ_k, ν_k, f_{k1} – коэффициенты Фурье разложения функции $\tau''(x), (t+1)\nu''(x), f(x,-t)$ по ортонормированной системе $u_{k1}(x,t)$.

Литература

[1] Адамар Ж.С. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.

[2] Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода//Доклады АН СССР. 1965, Т. 161, №5.С. 1023-1026.

[3] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Доклады АН СССР. 1955, Т. 102, №2.С. 205-206.

[4] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Известия АН СССР. 1956, Т.20, №6.С. 819-842.

[5] Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа// Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. Алматы, 2006, №1(48),С. 36-44.

Геометрический способ обоснования редукции Ляпунова-Шмидта в задаче о бифуркации периодических решений из цикла автономной системы[1]

Каменский М. И., Макаренков О. Ю. (г. Воронеж)

Пусть предложена задача об изучении существования решений системы двух уравнений $b^2+\varepsilon g_1(a,b,\varepsilon)=0$ и $b+\varepsilon g_2(a,b,\varepsilon)=0$ при малых значениях $\varepsilon>0$. Редукцией Ляпунова-Шмидта называется следующий метод решения этой задачи: 1) сначала, с помощью теоремы о неявной функции, устанавливается существование $B:\mathrm{R}\times[0,1]\to\mathrm{R}$ такого, что $b(a,\varepsilon)=\varepsilon B(a,\varepsilon)$ удовлетворяет второму уравнению при ограниченных a и малых $\varepsilon>0$; 2) затем найденное значение $b(a,\varepsilon)$ подставляется в первое уравнение, что дает

$$\varepsilon B^2(a,\varepsilon)+g_1(a,\varepsilon B(a,\varepsilon),\varepsilon)=0; \qquad (*)$$

3) наконец, предполагается, что для некоторого нуля a_0 функции $M(a)=g_1(a,0,0)$ выполнено условие его простоты $M'(a_0)\neq 0$ и теорема о неявной функции применяется вторично для доказательство существования $a(\varepsilon)$ разрешающего уравнение (*) при малых $\varepsilon>0$.

На редукции Ляпунова-Шмидта основана теорема Малкина [3] о бифуркации T-периодических решений в системе $\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(t,x,\varepsilon)$ из предельного цикла x_0 системы

$$\dot{x}=f(x). \qquad (**)$$

Редукция приводит к задаче о существовании простых нулей у функции $M_{x_0}(\theta)=\int_0^T\langle z(\tau),g(\tau-\theta,x_0(\tau),0)\rangle d\tau$, где z – T-периодическое решение системы $\dot{z}=-(f'(x_0(t)))^*z$.

Возвращаясь к примеру, можно заметить, что если $\Delta>0$ таково, что

$$M(a_0-\Delta)\cdot M(a_0+\Delta)\neq 0, \qquad (***)$$

$\delta>0$ достаточно мало и $\varepsilon\in(0,\delta^2)$, то векторное поле $F(a,b)=(b^2+\varepsilon g_1(a,b,\varepsilon),b+\varepsilon g_2(a,b,\varepsilon))$ может быть переведено невырожденной на границе множества $V_\delta=(a_0-\Delta,a_0+\Delta)\times(-\delta,\delta)$ деформацией в векторное поле (M,I). Таким образом условие (***) гарантирует существование у поля F нулей внутри V_δ при малых $\delta>0$ в отсутствии условия $M'(a_0)\neq 0$.

В докладе будет рассказано о результате из [1][10], где такой геометрический подход развит для доказательства соответствующего аналога теоремы Малкина. Положим $(Qx)(t)=x(T)+\int_0^t f(x(\tau))d\tau+\varepsilon\int_0^t g(\tau,x(\tau),\varepsilon)d\tau$ и $W_V=\{x\in C([0,T],\mathrm{R}^n):\Omega(0,t,x(t))\in V,\ t\in[0,T]\}$, где $\Omega(\cdot,t_0,v)$ – решение системы (**), принимающее значение v в момент времени t_0. Кратко говоря, методами из [2] мы покажем, что отображение Q на W_{V_δ} гомотопно векторному полю (M_{x_0},A) на V_δ, где $\{V_\delta\}_{\delta>0}$ – подходящие аналоги множеств V_δ из примера и A – невырожденная $n-1\times n-1$-матрица.

Литература

[10]Работа поддержана РФФИ, гранты 07-01-00035, 06-01-72552 и 05-01-00100, а также грантом BF6M10 Минобрнауки РФ и CRDF(США)

[1] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P., A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems, *Mathematische Nachrichten,* принято к печати.

[2] Красносельский М. А., Забрейко П. П., *Геометрические методы нелинейного анализа,* – М. : Наука, 1975. – 512 с.

[3] Малкин И. Г., К теории периодических решений Пуанкаре, *ПММ*, 13 (1949), 633–646.

On solvability of inverse problems for parabolic equations with integral overdetermination in time

Kamynin V.L. (Department of mathematics, Moscow Engineering Physics Institute)

We investigate the existence of the solution of the following inverse problem in $Q_T =\equiv [O,T] \times \Omega$

$$\rho(t,x)u_t - a(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + d(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0, \ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(t,x) = \Phi(t,x), \ (t,x) \in (O,T) \times \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\int_0^T u(t,x)\omega(t)dt = \chi(x), \ x \subsetneq [0,T]. \tag{4}$$

Here Ω is bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$, the pair $\{u(t,x), a(x)\}$ is unknown.

We find the conditions on input data functions which sufficient for solvability of the problem (1)–(4). We show by the examples that such conditions are fulfilled either for sufficiently small Ω or for sufficiently large T.

This research was supported by RFBR, Grant N 06–01–00401.

Регулярные дифференциальные операторы не могут иметь лишь конечное число собственных значений.

Кангужин Б. Е. (г. Алматы)

В данной работе исследуется спектр обыкновенных дифференциальных операторов. Точнее доказывается, что существование хотя бы одного собственного значения при довольно общих предположениях гарантирует их бесконечность. Таким образом, отсутствуют дифференциальные операторы с непустым конечным спектром. Указанное свойство типично для дифференциальных операторов независимо от их типа, порядка и количества независимых переменных. При доказательстве существенно используется свойство локальности дифференциальных операторов. Основная идея доказательства принадлежит Т.Ш. Кальменову. Отметим, что базисные свойства фундаментальных систем функций обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка систематически изучались в работах В.А. Ильина и его учеников. Пусть $b < \infty$. В гильбертовом пространстве $L_2(0,b)$ рассмотрим оператор L_Q, задаваемый дифференциальным выражением

$$L_Q y(x) = l(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x)$$

с достаточно гладкими на $[0,b]$ коэффициентами $p_k(\cdot)$ и краевыми условиями

$$Q_k(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{jk} y^{(j)}(0) + b_{jk} y^{(j)}(b) \right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где a_{jk}, b_{jk} произвольные числа. Известно [1], что если оператор L_Q в пространстве $L_2(0,b)$ имеет ограниченный обратный, то он будет вполне непрерывным оператором. Цель сообщения: доказать следующий основной результат

Теорема 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения $l(\cdot)$ подчинены условиям: найдется постоянное число C_1 такое, что выполняется $\left|p_j^{(k)}(x)\right| < C_1$, $\forall j = 0, 1, \ldots, n-2$; $\forall k$; $\forall x$. Если оператор L_Q имеет хотя бы одно собственное значение, тогда спектр оператора L_Q — бесконечное множество.*

Работа выполнена совместно с Кальменовым Т. Ш.

Литература

[1] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы. М.:Наука, 1969. - 528с.*

Об одном свойстве семейств морфизмов в категории векторных расслоений

Капшаев И. Р. (г. Алматы)

Исследуется свойство насыщенности семейства морфизмов в категории векторного расслоения, определяемые линейными системами дифференциальных уравнений, введенное В.М.Миллионщиковым в [1,2]. В [2] доказывается, что семейства морфизмов, определяемые произвольными линейными дифференциальными системами, являются насыщенными.

Пусть (E,p,B) - векторное расслоение со слоем R^n и базой B (B - полное метрическое пространство). На (E,p,B) фиксируется некоторая риманова метрика (см. [3], стр. 58-59).

Рассматривается семейство морфизмов $\mathfrak{G}$ линейного расширения динамической системы (см. [4]), вида:

$$(X(m), \chi(m)) : (E,p,B) \to (E,p,B),$$

$(m \in N)$, векторного расслоения (E,p,B), где

$$B = M_n, \quad E = B \times R^n, \quad p = pr_1, \tag{1}$$

$$X^t(A,x) = (\chi^t A, \mathfrak{X}(t,0,A) \cdot x),$$

$$\chi^t A(\cdot) = A(t + (\cdot)),$$

здесь M_n - пространство систем дифференциальных уравнений, эквивалентных линейному дифференциальному уравнению n-го порядка (см. [5]), $A \in B$, $x \in R^n$, $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ - оператор Коши системы $\dot{x} = A(t) \cdot x$.

Теорема 1. Семейство морфизмов $\mathfrak{S}$ векторного расслоения (1) не является насыщенным.

Литература

[1] Миллионщиков В. М. // *Дифференциальные уравнения. 1981. Т 17. № 3. С. 431 – 468.*

[2] Миллионщиков В. М. // *Дифференциальные уравнения. 1981. Т 17. № 8. С. 1394 – 1410.*

[3] Хьюзмоллер Д. *Расслоенные пространства. М. 1970. 442 с.*

[4] Миллионщиков В. М. // *Дифференциальные уравнения. 1980. Т 16. № 8. С. 1408 – 1416.*

[5] Рахимбердиев М. И. // *Математические заметки. 1982. Т 31. № 6. С. 925 – 931.*

Инвариантные тензоры и дифференциальные уравнения с частными производными

Капцов О. В. (г. Красноярск)

В докладе рассматриваются тензоры с коэффициентами, принадлежащими коммутативной дифференциальной алгебре A. С помощью производной Ли вводится понятие тензора инвариантного относительно дифференцирования на идеале алгебры A. Доказывается ряд утверждений об инвариантных тензорах и дифференциальных формах, среди них алгебраический вариант теоремы Фридмана о сохранении линий и интенсивностей трубок векторного поля. Каждая система уравнений с частными производными порождает идеал в некоторой дифференциальной алгебре. Это позволяет изучать инвариантные тензоры на идеале, порожденном такой системой. В качестве примеров рассматриваются уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики.

On singularly perturbed elliptic–parabolic equation

Kapustina T. (Moscow State University)

This work is devoted to one singularly perturbed boundary value problem for elliptic–parabolic equation, and is based on results of V.G.Sushko and N.Kh.Rozov.

Let us consider the rectangle domain in $\mathbb{R}^2$ plane. Consider the mixed type equation which is parabolic in one part of the domain and elliptic in the other, and contains small parameters by the second–order and first–order derivatives. Let us supply the equation with Dirichlet boundary condition at the border of the domain and two conditions sewing the solution and its normal derivative at the line where type of the equation changes. Thus, the solution of our problem is a function of C^1 class in the entire domain. Under appropriate presumptions this boundary value problem has unique solution.

Our aim is to construct the asymptotic representation for the solution of our problem. The structure of asymptotics essentially depends on the ratio of small parameters. We consider several principally different situations. The similar problem under other assumptions was studied in the work [1].

Asymptotic methods used in the theory of singularly perturbed differential equations are the basic means of this research. Asymptotics is constructed using the method of boundary functions (see [2]). Asymptotic solution consists of regular part, a number of boundary layer functions, and interior layer functions which appear near the line of type change. Interesting effects arise when boundary layer intersects interior layer, especially when the scales of intersecting layers are different.

As the problem is considered without any concordance conditions between the coefficients of the equation and boundary value, then we can construct only finite number of terms in asymptotic solution. In each case we determine the maximal order of asymptotics possible to construct. At the certain step of algorithm some boundary layer functions, which are the solutions of parabolic problems with discordant initial and boundary conditions, have unbounded derivatives. Hence, the boundary layer functions of the next step don't vanish at infinity, and this fact doesn't allow to continue the process.

Finally, we obtain the estimate of difference between the approximate and exact solution. The proof of this estimate is based on the maximum principles for elliptic and parabolic equations. Thus, the main result can be summarized in the following statement: the formal asymptotics is a uniform representation for the exact solution of our problem.

This research is supported by the program "Leading Scientific Schools", project NSh–2538.2006.1.

References

[1] Sushko V.G. *Asymptotic representations for solutions of bisingular problems.* // Memoirs on Diff. Equations and Math. Physics. Tbilisi, 1999. Vol. 18. P. 51–159.

[2] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asymptotic methods in singular perturbation theory.* Moscow: Vysshaya shkola, 1990. 208 P.

Компактные радиальные операторы в весовых пространствах Бергмана и преобразование Березина

Карапетянц А. Н. (г. Ростов-на-Дону)

Рассматриваются радиальные операторы в весовых пространствах Бергмана $A^2_\lambda(D)$, $\lambda > -1$ на единичном диске D. Оператор A назовем радиальным, если он совпадает со своей радиализацией: $Rad(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t^* A U_t dt$, где U_t - унитарный в $A^2_\lambda(D)$ оператор $U_t f(z) = f(e^{-it}z)$, $f \in A^2_\lambda(D)$. Приводятся достаточные условия, при которых убывание преобразования Березина радиального оператора при приближении к границе диска влечет компактность этого оператора в весовом пространстве Бергмана. Особое внимание уделено операторам Теплица с радиальными символами.

Quantum Magnetonics, Hamiltoniancy of Maxwell Equations, and Geometric Superconductivity

Karasev M.V. (Moscow Institute of Electronics and Mathematics)

The motion of a charge in a magnetic field along a 2-dimensional film (thin layer) posesses a hidden quantum structure, which becomes a dominant in the nano-momentum regime. In this case the "light" vortex component [1] of the motion is separated from the dynamics of the "heavy" quasiparticle. The original surface of the film (the cofiguration manifold) is found to be the phase space for the quasiparticle. The Poisson bracket is determined by the inverse tensor of the magnetic field. In the quantum version, the bracket is replaced by the commutator,and the surface becomes quantum manifold, e.g.,in the sense of [2]. The Hamiltonian of the quasiparticle [3] is given via the joint geometric invariants of the magnetic and metric tensors, and the Hamilton system coincides with the second Maxwell equation on the surface (the first Maxwell equation is the Jacobi identity for the Poisson bracket).

The surface is found to be stratified by quasiparticle orbits. In the quantum case, closed orbits carry the discrete magnetic flux. Under a collective motion, on the surface there appears an irrotational flow of a "liquid" of quasiparticles. This provides a possible geometrical explanation to the effect of localized 2-dimensional superconductivity oserved in experiments. Moreover, the density of such a supercoductive current is given by the 2-dimensional Maxwell (- Loretz –Einstein) equation + quantum corrections.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 05-01-00918.

References

[1] V. Kozlov, General Theory of Vortices, Springer-Verlag, 2003.

[2] M. Karasev, V. Maslov, Nonlinear Poisson Brackets. Geomtery and Quantization, Nauka, Moscow, 1991 (Transl. by Amer.Math.Soc., 1993).

[3] M. Karasev, Magneto-metric Hamiltonians on quantum surfaces in the configuration space, Russ. J. Math. Phys., 2007, 14, N1, 57-65.

Newton's polyhedron and eigenvalue distribution of a differential operator

Karol' A.I. (Saint Petersburg State University)

Let $P(x, D_x) = \sum_\alpha p_\alpha(x) D_x^\alpha$, $D_{x_j} = -i\partial/\partial_{x_j}$, be a formally selfadjoint differential operator with C^∞ coefficients in a bounded domain $\Omega \in R^d$. Define a Newton's polyhedron of a symbol $P(x,\xi)$ as a convex hull of the set $\{\beta \in R^d \mid 0 \le \beta_j \le \alpha_j, 1 \le j \le d$, for a multi-index $\alpha, p_\alpha(x) \ne 0\}$. We suppose that so defined polyhedron doesn't depend on point $x \in \Omega$. Under natural conditions of nondegeneracy of P with respect to its Newton polyhedron operator P is semibounded in $L_2(\Omega)$ and the spectrum of its Friedrichs extension is discrete. We obtain the asymptotics of the corresponding counting function N : $N(t) = at^{1/s} \ln^k t(1 + o(1)), t \to \infty$, here s is the coordinate of the intersection point of the line $s_1 = s_2 = \cdots = s_d$ with the face of Newton's polyhedron, k is the dimension of the normal cone at that point. The coefficient a is classical if at the intersection point there exists the normal vector with positive coordinates, in the other case the coefficient is expressed in terms of the corresponding operator valued symbol. The proof uses the Approximate Spectral Projector Method and calculus of pseudodifferential operators, associated with given Newton polyhedron.

Об одном частном случае уравнения Клейна-Гордона

Карюк А. И. , Редькина Т. В. (г. Ставрополь)

В работе [1] получено уравнение

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}\right) u_z - \frac{k}{2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right) u_x + \frac{1}{k}(\ln u)_{zz} - \\ -\alpha_{11}^2 k (\ln u)_{xx} - \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2} u \ln u = 0, \tag{1}$$

которое имеет пару Лакса. Рассмотрим частные случаи.

1. Полагая в уравнении (1) коэффициенты $\alpha_{31} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}$, $\alpha_{11} = \frac{1}{k}$, $k = 2$ и выполняя преобразования координат $\tilde{x} = z+x, \tilde{z} = z-x, u(\tilde{x}, \tilde{z}) = e^{w(\tilde{x},\tilde{z})}$, получим частный случай уравнения Клейна-Гордона

$$2w_{\tilde{x}\tilde{z}} + \alpha_{21}\alpha_{32}e^{w}(w_{\tilde{x}} + 5w_{\tilde{z}} - w) = 0, \tag{2}$$

где α_{ij} - постоянные коэффициенты.

а) Найдено решение в виде $w = \prod_{k=0}^{\infty} w_k$, где $w_0 = e^{\tilde{x}} + e^{\frac{1}{5}\tilde{z}}$ также решение уравнения (2), и каждый последующий множитель w_k получается из системы:

$$\begin{cases} w_{kx} + 5w_{kz} = 0, \\ w_{(k-1)x}w_{kz} + w_{(k-1)z}w_{kx} + w_{(k-1)}w_{kxz} = 0. \end{cases}$$

б) Используя замену $\xi = \tilde{x} + \alpha\tilde{z}$ и $\frac{dw}{d\xi} = p(w)$, (2) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка $e^{w}(Aw - Bp) = pp'$, где $A = \frac{1}{2\alpha\alpha_{21}\alpha_{32}}$, $B = (5\alpha + 1)A$.

в) Уравнение (2) допускает преобразование координат, переводящее данное уравнение само в себя: $\tilde{x}' = 5\tilde{z}'$, $\tilde{z}' = \frac{1}{5}\tilde{x}'$, $\tilde{w}' = w$.

2. Если в уравнении (1) $\alpha_{32} = 0$, то с помощью линейных преобразований независимых переменных и замены $u = e^{w}$ получим известное уравнение [2]

$$w_{\tilde{x}\tilde{z}} O^{w} w_{\tilde{z}}, \quad C - const, \tag{3}$$

для которого существует преобразование Беклунда $w_{\tilde{x}} - \tilde{w}_{\tilde{x}} = -Ce^{-w}$, $w_{\tilde{z}} = e^{\tilde{w}-w}$, переводящее исходное к однородному гиперболическому уравнению $\tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{z}} = 0$. Решение уравнения (3) имеет вид $w = \phi(\tilde{x}) + \ln(\xi)$, $\xi = \int e^{\psi(\tilde{z})}d\tilde{z} - C\int e^{-\phi(\tilde{x})}d\tilde{x}$, где $\phi(\tilde{x})$, $\psi(\tilde{z})$ - произвольные функции.

Литература

[1] Карюк А. И., Редькина Т. В. *Нелиненое уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка// Современные методы физико-математических наук. С.Т.М.К., г.Орел. Т.1 - Издат. ОГУ, 2006г. - С.70-75*

[2] Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике.-М.: Наука, 1983г. - С.153*

Многомерные краевые задачи в пространствах постоянной кривизны с точечными особенностями

Катрахов В.В. , Зайцев П.Н. , Ляхов А.В. (Воронежский Государственный Университет)

В докладе предполагается изложить новые результаты по многомерным сингулярным эллиптическим краевым задачам с точечными особенностями в областях всех типов пространств с постоянной кривизной, то есть в евклидовых, гиперболических (пространств Лобачевского) и на сфере.

Будет изложена теория операторов преобразования, теория функциональных пространств в одномерном и многомерном случаях и собственно теория краевых задач. В теории функциональных пространств основное внимание будет уделено новому в рассматриваемых случаях понятию сигма-следа и прямым и обратным теоремам вложения с этим следом.

Основной результат состоит в том, что поставленные краевые задачи в указанных функциональных пространствах имеют единственное и корректное по Адамару решение.

Intersection theory on moduli spaces and the KP hierarchy.

Kazarian M. (Moscow)

Equations of integrable hierarchies govern many enumerative problems appearing in physical models. They appear in the theory of Hurwitz numbers enumerating ramified coverings of the sphere as well as in the intersection theory on moduli spaces of complex curves. The relationship between the two theories is described by the Ekedahl-Lando-Shapiro-Vainshtein formula. Starting from this formula, we derive a number of new equations on the generating functions for Hodge integrals over the moduli spaces. This gives a new simple and uniform treatment of certain known results on Hodge integrals like Witten's conjecture, Virasoro constrains, Faber's λ_g-conjecture etc. Among other results we show that properly arranged generating function for Hodge integrals satisfies the equations of the KP hierarchy.

Литература

[1] M. Kazarian, *KP equations for Hodge integrals*, preprint.

On a model equation arising in nonlinear diffusion theory

Kersner Robert (Budapest)

The equation (and the like ones)

$$u_t + bu^k u_x = (au^k u_x)_x + cu(1 - u^k), \tag{1}$$

where $a, b, c \geq 0, k > 0$ are constants, can encapsulate the essence of several diffusion processes the realistic description of which might be quite complex: chemical reactions, combustion fronts, thermal waves in plasma, spread of favorite genes, population dynamics.

The special form (one can even take $k = 1$) is chosen because this model in some sense is explicitly solvable which happens not very often in the theory of nonlinear PDEs.

I will discuss some Fisher-KPP-type results about travelling wave solutions, about compactly supported generalized self-similar solutions and about the relation of (1) with a nonhomogeneous purely diffusive model

$$\rho(z)v_\tau = (a(z)v^k v_z)_z. \tag{2}$$

A part of results are joint with B. Gilding and A. Tesei; I also will mention some works of Shoshana Kamin and of Ph. Rosenau.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПО ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Халилов Ш.Б. (Институт математики АН Республики Таджикистан)

В [1,2] разработан метод сведения граничных задач для эллиптических систем уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. Однако вопрос об эквивалентности этих интегральных уравнений исходной задаче изучен недостаточно. Поэтому возможность сведения граничных задач к интегральным уравнениям не всегда позволяет исследовать граничные задачи достаточно полно. Используя особенности структуры системы,некоторые граничные задачи удается привести к интегральным уравнениям другими способами. Эти способы пригодны не только для сильноэллиптических систем, но и для не сильноэллиптических систем. А эквивалентность исходной задачи интегральным уравнениям очевидна. Одна такая система в n-мерное пространство будет рассмотрена ниже.

Пусть $D-$ ограниченная область евклидового пространства R^n с ляпуновской границей S, и пусть в области D задана система дифференциальных уравнений в частных производных

$$-\Delta u_j + \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = f_j(x), \quad j=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где

$$\lambda_j(\cdot)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}(x)\frac{\partial\cdot}{\partial x_k}, \quad j=\overline{1,n},$$

$$L_{ji}(\cdot)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(j)}(x)\frac{\partial\cdot}{\partial x_k}+b_{ji}(x)\cdot, \quad j,i=\overline{1,n},$$

$$\lambda_{jk}=-\lambda_{kj}, j\neq k, \lambda_{11}=\lambda_{22}=\cdots=\lambda_{nn}=\lambda(x),$$

причем

$$\lambda_{jk}(x), a_{ik}^{j}(x), \in C^2(D), b_{ji}(x), f_j(x)\in C_1(D).$$

Задача Дирихле. *Найти регулярные в области $T\subset D$ решения $u_1,u_2,\ldots,u_n$ системы (2) удовлетворяющее на границе S_1 области T краевым условиям*

$$u_j\mid_{S_1}=h_j(x), \quad j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где

$$h_j(x)\in C^1(D), \quad j=\overline{1,n}.$$

Теорема. *Задача Дирихле (2) для системы (1) в области T с ляпуновской границей S_1 при всех $x\in T\cup S_1$ и $1-\frac{1}{2}\lambda(x)\neq 0$ при $x\in S_1$ всегда фредгольмова, а при $\lambda(x)-1>0, x\in T\cup S_1$ и $1-\frac{1}{2}\lambda(x)=0$ при $x\in S_1$ поставлено некорректно.*

Литература

[1] Шапиро З.Я. Изв.АН СССР.Сер. мат.1953.Т.17.№6.С.530-562. [2] Лопатинский Я.Б. Укр.матем. журн.1953.Т.5.№2.С.123-151.

Интегральные операторы с инволюцией[11]

Хромов А.П. (Саратовский государственный университет)

[11]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

где $\theta(x)$ — инволюция, т. е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$. Примеры инволюций: а) $\theta(x) = 1 - x$; б) $\theta(x) = \dfrac{1-x}{ax+1}$, где $a > -1$; в) $\theta(x)$ находится из уравнения $\varphi(x) + \varphi(y) = 1$, где $\varphi(x)$ монотонно возрастает и $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Теорема 1. *Если $\Phi(x,y)$ вещественна, симметрична при $x, y \in [0,1]$ и для каждого $x \in [0,1]$ существует только одно $y = \theta(x)$ такое, что $\Phi(x, \theta(x)) \equiv 0$, то $\theta(x)$ — инволюция.*

Теорема 2. *Если $\theta(x)$ — инволюция, то существует вещественная симметричная функция $\Phi(x,y)$ такая, что $y = \theta(x)$ является единственным решением уравнения $\Phi(x,y) = 0$.*

Теорема 3. *Пусть $\theta(x)$ определяется из* в), *причем $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi'(x) > 0$. Если $A(x,x) \equiv \varphi'(x)$ и $A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2}$ $\left(A_{x^st^j} = \dfrac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)\right)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$, то для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - T\sigma_r(T^{-1}f, x) \right\|_{C[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $Tf = f(\theta(x))$, $S_r(f,x)$ - частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < r$.

Теорема 4. *Пусть $\theta(x)$ и $A(x,t)$ те же, что и в теореме 3 с той лишь разницей, что теперь $A(x,x) \equiv 1$. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - T_0^{-1}\sigma_r(T_0 f, x) \right\|_{C[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $T_0 f = f(\varphi_0(x))$, $\varphi_0(x)$ определяется из соотношения

$$\int\limits_0^{\varphi_0(x)} \sqrt{-\theta'(t)}\, dt = x.$$

On Boundary Value Problems at Resonance for Nonlinear Differential Equations

Kiguradze I. (Tbilisi, Georgia)

Let $-\infty < a < b < +\infty$, n be a natural number, and $f : [a,b] \times R^n \to R$ and $f_0 : [a,b] \to R$ be continuous functions. For the differential equation

$$u^{(n)} = f(t, u, \dots, u^{(n-1)}) + f_0(t), \tag{1}$$

there are found optimal in a sense conditions for the solvability of boundary value problems at resonance, including the problem with integral conditions

$$\int_a^b \phi_i(t)u^{(i)}(t)dt = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \tag{2}$$

where $\phi_i : [a, b] \to [0, +\infty)$ $(i = 1, \dots, n)$ are Lebesgue integrable functions.

In particular, the following theorem is proved.

Theorem. Let

$$\int_a^b \phi_i(t)dt > 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \int_a^b \phi_n(t)f_0(t)dt = 0,$$

and let there exist numbers $\sigma \in \{-1, 1\}$ and $r > 0$ such that on the set $[a, b] \times R^n$ the inequality

$$0 \le f(t, x_1, \dots, x_n)\mathrm{sgn}(\sigma x_1) \le r$$

holds. Then problem (1), (2) has at least one solution.

Supported by INTAS (Grant # 03-51-5007).

Differential Equations of Fractional Order

Kilbas A. A. (Belarusian State University, Minsk, Belarus)

Our report is devoted to some aspects of the so-called differential equations of fractional order in which an unknown function is contained under the operation of fractional differentiation. Some methods and results in the theory of such differential equations are discussed. The method based on the reduction of the Cauchy-type and Cauchy problems for the one-dimensional fractional differential equations to the Volterra integral equations is presented. The operational and compositional methods to solve in closed form some classes of fractional differential equations are given. Methods of the Laplace, Fourier and Mellin integral transforms for the solution of linear partial differential equations of fractional order are presented. Problems and new trends of research are discussed.

Existence of solutions to stochastic Navier–Stokes equation

Kirillov A. I.

We begin with a general theorem on existence of solutions of stochastic equations and apply it to the stochastic Navier–Stokes equation.

Let H be a real separable Hilbert space w.r.t. $(\cdot, \cdot)_H$ and W be such that (H, W) be an abstract Wiener space. Let $e_1, e_2, \dots$ be an orthonormal basis in H that belongs to some dense subspace X of H and is such that $\forall x \in X$ the sequence of projections on $Span\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ converges to x w.r.t. a norm $\|\cdot\|_X$ which is not weaker than $\|\cdot\|_H$. The space X is Banach w.r.t. $\|\cdot\|_X$. The space Y is the completion of X w.r.t. a norm $\|\cdot\|_Y \le \|\cdot\|_H$.

A Lyapunov function $V : X \mapsto \mathbb{R}$ is called a reducible Lyapunov function iff there is an orthogonal basis $e_1, e_2, \dots$ in H such that $\forall j, k, n \in \mathbb{N}$ and $\forall x \in X$

$$k > n \Rightarrow \partial_k V(\pi_n x) = 0 \qquad j > n \text{ or } \; k > n \Rightarrow \partial^2_{jk} V(\pi_n x) = q_k(\pi_n x)\delta_{jk},$$

where $q_k(\cdot) \geq 0$.

Theorem. *Let these conditions be satisfied*

1. *The imbedding $X \subset H$ is compact.*
2. *For some reducible Lyapunov function V, some $c > 0$, and any $x \in Y^*$,*

$$\widehat{L}V(x) \leq cV(x) - Q(x),$$

where $Q(x) \geq c_1 \|x\|_X^2$ and $Q(x) \geq c_2 \|x\|_H^{2+\alpha}$ for some $\alpha, c_1, c_2 > 0$.

3. *For some $C > 0$ and any $x, y \in X$,*

$$\|B(x) - B(y)\|_Y + \|\sigma(x) - \sigma(y)\|^2_{\mathcal{L}_{HS}(W;H)} \leq\leq C\,[Q(x) + Q(y)]^{1/2} \|x - y\|_H.$$

Then the equation

$$dx(t) = B(x(t))\,dt + \sigma(x(t))\,dw(t)$$

with $B(\cdot)\,:\ X \mapsto Y$, $\sigma(\cdot)\,:\ X \mapsto \mathcal{L}(W;H)$, $\mathrm{E}\,(w(s), e_i)_H (w(t), e_j)_H = \delta_{ij}\, s \wedge t$, and generator $\widehat{L}$ has a weak solution $x \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H) \cap C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; Y)$.

Let U be an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary ∂U,

$X = \{u \in W^{2,1}(U)^{\times n} : u\big|_{\partial U} = 0 \ \text{ and } \ \partial_k u_k = 0\}$,

$H = L^2(U)^{\times n}$, $Y = (C_0^{(2)}(U)^{\times n})^*$,

$B(u) = \Delta u - u_k \partial_k u$, and $\sigma(u) = \sigma$.

Then the Theorem implies that the stochastic Navier–Stokes equation

$$du(t) = (\Delta u - u_k \partial_k u)\,dt + \sigma\,dw(t)$$

has a weak solution $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2(U)^{\times n}) \cap C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (C_0^{(2)}(U)^{\times n})^*)$.

Инварианты Васильева и динамические системы вихрей Декарта на плоскости[1]

Кирин Н.А. (г. Коломна)

В механике движение системы материальных точек описывают с помощью канонических уравнений движения. Эти уравнения представляют систему дифференциальных уравнений, которая, как правило, является гамильтоновой системой. Сама функция Гамильтона является интегралом этой системы.

В данной статье рассматривается обратная задача. Мы будем строить гамильтоновы системы по заданному движению и исследовать динамические свойства таких систем.

Как известно, геометрические косы из n нитей тесно связаны с динамикой движения точек плоскости. Они представляют пространственно-временную диаграмму движения n материальных точек и определяют динамическую систему на конфигурационном пространстве $X_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i \neq z_j, i \neq j\}$. В свою очередь, геометрические косы определяются инвариантами Васильева конечного порядка. В статье исследуется связь свойств инвариантов Васильева и свойств динамических систем, которые они определяют. В качестве гамильтониана мы будем брать мнимые части комплекснозначных аналитических функций, представляющие инварианты Васильева конечных порядков. Такие функции выражаются суммой итерированных

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00085

интегралов Чена от логарифмических дифференциальных форм, порожденных формами $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$.

В статье обсуждаются свойства динамических систем, порожденных инвариантами Васильева первого и второго порядка. Выявляется связь, построенных таким образом гамильтоновых систем, с гамильтоновыми системами, определяющими динамику движения вихрей на плоскости. Выясняются условия сохранения коллинеарных конфигураций и томсоновских конфигураций вихрей.

Литература

[1] Berger M.A.*Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 1363-1374*

[2] Борисов А.М., Мамаев И.С. *Математические методы динамики вихревых структур.- Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.- 368с.*

[3] Кирин Н.А. *Гамильтоновы системы, отвечающие инвариантам Васильева первого порядка. Сборник научных статей аспирантов и соискателей "Начало". - Вып. 5. - Коломна: КГПИ, 2006. -216 с.*

[4] Козлов В.В. *Общая теория вихрей. - Ижевск. Издательский дом "Удмуртский университет", 1998 (24-34).*

Литература

[1] Иванов И. И. и др. *Название источника.*

Несамосопряженные операторы с почти эрмитовым спектром: слабая аннуляция

Киселев А. В., Набоко С. Н. (Санкт-Петербург)

Рассматривается класс несамосопряженных, недиссипативных аддитивных возмущений $L = A + iV$ ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H.

Спектральные подпространства $N_i^+, N_i^-, N_i^0 \subset N_i$ выделяются естественным образом для произвольного несамосопряженного оператора L из указанного класса. Здесь подпространство N_i^+ (N_i^-) соответствует точечному спектру в верхней полуплоскости и части вещественного сингулярного спектра (точечному спектру в нижней полуплоскости и части вещественного сингулярного спектра, соответственно) и вполне аналогично сингулярному подпространству диссипативного (сопряженного к диссипативному) вполне несамосопряженного оператора. Подпространство N_i^0 соответствует части вещественного сингулярного спектра и играет особую роль в спектральной теории несамосопряженного, недиссипативного оператора. В некотором смысле большая часть новых свойств недиссипативных операторов (по сравнению с диссипативными и сопряженными к диссипативным) связана с наличием и свойствами N_i^0.

Нами получено описание этого подпространства, а также установлено другое важное свойство спектрального подпространства N_i^0, которое состоит в том, что по существу его свойства в некоторой степени напоминают свойства сингулярного спектрального подпространства самосопряженного оператора. С этим связано наше предложение называть операторы, для которых $N_i^0 = H$, операторами с *почти эрмитовым* спектром. Именно, справедлива следующая теорема, являющаяся естественным обобщением хорошо известного тождества Кели:

Теорема 1. Пусть $L = A + iV$ – несамосопряженный оператор, причем все четыре сжимающие оператор-функции, участвующие в факторизации Гинзбурга-Потапова его характеристической функции, обладают скалярными кратными. Тогда как оператор L, так и его сопряженный L^*, слабо аннулируются некоторыми скалярными ограниченными аналитическими функциями в том и только том случае, когда один из них является оператором с почти эрмитовым спектром.

Здесь использовано следующее *определение*: внешняя в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, равномерно ограниченная скалярная аналитическая функция $\gamma(\lambda)$ называется *слабым аннулятором* несамосопряженного оператора L, если выполнено условие

$$w - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma(L + i\varepsilon) = 0,$$

а такой оператор L, соответственно, – слабо аннулируемой функцией $\gamma(\lambda)$.

Литература

[1] А. В. Киселев, С. Н. Набоко, *Несамосопряженные операторы с почти эрмитовым спектром: слабые аннуляторы, Функциональный анализ и его приложения, т. 38, вып. 3 (2004).*

[2] A. V. Kiselev, S. N. Naboko, *Non-Self-Adjoint Operators with Almost Hermitian Spectrum: Matrix Model. I, J. Comp. App. Math., vol. 194 (2006), pp. 115–130.*

[3] A. V. Kiselev, S. N. Naboko, *Non-Self-Adjoint Operators with Almost Hermitian Spectrum: Cayley Identity and Some Questions of Spectral Structure, submitted.*

Плоские волны с поперечной структурой в произвольно анизотропной упругой среде

Kiselev A. P. (г. С-Петербург)

Строятся новые точные решения системы уравнений, описывающей смещения однородной трехмерной упругой среды $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$,

$$c_{ijkl}\partial_j\partial_k u_l - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$\partial_p \equiv \partial/\partial x_p$. Это распространяющиеся плоские волны, амплитуды которых являются линейными функциями декартовых координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Плотность ρ и упругие модули c_{ijkl}, обладающие обычными свойствами симметрии и обеспечивающие положительность энергии деформации, предполагаются постоянными.

Distributed Order Calculus and Equations of Ultraslow Diffusion

Kochubei A.N. (Kiev)

We consider equations of the form

$$\left(\mathbb{D}^{(\mu)}u\right)(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

where $\mathbb{D}^{(\mu)}$ is a distributed order derivative, that is

$$\mathbb{D}^{(\mu)}\varphi(t) = \int_0^1 (\mathbb{D}^{(\alpha)}\varphi)(t)\mu(\alpha)\,d\alpha,$$

$\mathbb{D}^{(\alpha)}$ is the Caputo-Dzhrbashyan fractional derivative of order α (see [1]), μ is a positive weight function.

The above equation is used in physical literature for modeling diffusion with a logarithmic growth of the mean square displacement. In this work we develop a mathematical theory of such equations, study the derivatives and integrals of distributed order.

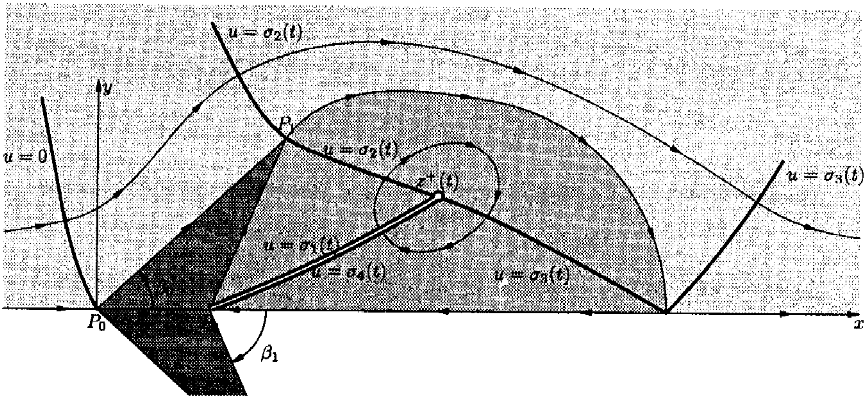
References

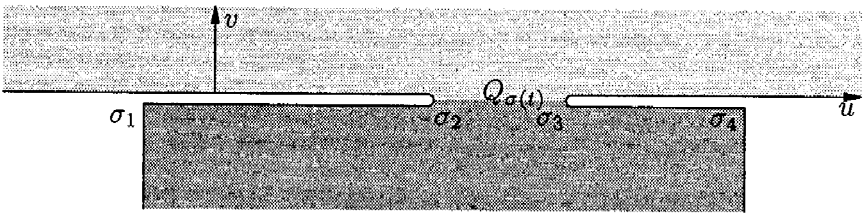
[1] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. Birkhäuser, Basel, 2004.

Явная формула, выражающая зависимость лобового сопротивления от геометрии препятствия при обтекании его плоским нестационарным потенциальным потоком с вихревыми особенностями

Горицкий М. А., Кочуров А. С. (МГУ)

Пусть скорость плоского нестационарного симметричного течения $t \mapsto z(t) = x(t)+iy(t)$ несжимаемой жидкости потенциальна вне искомых вихревых центров $z^+(t)$ и $z^- = \overline{z^+}(t)$ в следе за препятствием, например, четырехугольником, определяемым (с точностью до линейных размеров) углами $t \mapsto \beta_0(t)$ и $t \mapsto \beta_1(t)$ (см. верхний рис.). Чтобы явно выразить зависимость лобового сопротивления от этих углов, достаточно найти явную формулу для скорости течения, как функцию углов $\beta_0(t), \beta_1(t)$.





Теорема [1]. *Искомая зависимость определяется формулой*

$$t \mapsto z(t) = \int_0^{w(t)} \exp\{A(\xi,\eta) + iB(\xi,\eta)\}\, d\zeta\,, \quad \zeta = \xi + i\eta \in Q_{\sigma(t)}\,.$$

Здесь $Q_{\sigma(t)}$ — область, представленная на нижнем рис., $A+iB$ — это аналитическая в $Q_{\sigma(t)}$ функция, подчиненная таким краевым условиям: $A\big|_{v=+\infty}=0$, а

$$B(u,+0)=\beta_0(t) \quad \text{при} \quad u\in(0,\sigma_2), \quad B(u,+0)=0 \quad \text{при} \quad u\notin[0,\sigma_2],$$

$$B(u,-0)=\beta_1(t) \;\; \text{при} \;\; u\in(\sigma_1,\sigma_2), \quad B(u,-0)=-\pi \;\; \text{при} \;\; u\in(\sigma_3,\sigma_4)$$

$$\text{и} \quad B(\sigma_1,v)=B(\sigma_4,v)+2\pi\,, \qquad \partial_u B(\sigma_1,v)=\partial_u B(\sigma_4,v) \;\; \text{при} \;\; v<0.$$

Параметр $\sigma(t)=(\sigma_1(t),\sigma_2(t),\sigma_3(t))$ — является решением системы из 3-х уравнений, выражающих через функцию $A+iB$ координаты $(x_1(t),y_1(t))$ точки P_1 (см. верхний рис.) и абсциссу $x_2(t)$ точки P_2. Тем самым, σ выражается как функция углов β_0,β_1. Далее, $\sigma_4(t)=\sigma_1(t)+\omega$, где ω — заданная интенсивность вихря, ассоциированного с точкой $z^-(t)$. А функция $t\mapsto w(t)=u(t)+iv(t)$ — это решение системы уравнений

$$\dot u=\sum_{j=1}^{j=3}F_{1j}(u,v,\sigma,\beta)\dot\sigma_j+\sum_{k=0}^{k=1}G_{1k}(u,v,\sigma,\beta)\dot\beta_k+H_1(u,v,\sigma,\beta)\,,$$

$$\dot v=\sum_{j=1}^{j=3}F_{2j}(u,v,\sigma,\beta)\dot\sigma_j+\sum_{k=0}^{k=1}G_{2k}(u,v,\sigma,\beta)\dot\beta_k+H_2(u,v,\sigma,\beta)$$

с явными формулами для коэффициентов F_{lj},G_{lk},H_l.

Доказана единственность функции $A+iB$ и получена формула, ее задающая,

Работа выполнена совместно с А.С. Демидовым и В.Ю. Протасовым при поддержке РФФИ (проекты 05-01-22001, 05-01-00066, 07-01-00500).

[1] А.С. Демидов (2006) Метод Гельмгольца–Кирхгофа и граничное управление при обтекании плоским потоком. *Фундам. и прикладная математика*, Т. 12, № 4, 65–77.

Характеризация функций из $BMO^1_\lambda(V^2)$ в терминах преобразования Березина

Kodzoeva F. D. (г. Ростов-на-Дону)

В настоящей работе вводится весовое пространство $BMO^1_\lambda(V^2)$ функций на бидиске V^2 в $\mathbb{C}^2$ с ограниченной средней осцилляцией по отношению к лебеговой мере и некоторой метрике, построенной по гиперболической метрике Бергмана в диске. Показано, что преобразование Березина функции из $BMO^1_\lambda(V^2)$ удовлетворяет условию Липшица. Результаты данного исследования получены совместно с А.Н. Карапетянцем.

Homogenization of an Optimal Control Problems for Blowing up Systems on Thin Structures with Mixed Boundary Controls

Kogut P.I. (Dniepropertovsk National University, Ukraine)

We study an optimal control problems on the thin periodic planar structures Ω_ε whose geometry depends on two small parameters, ε and $h(\varepsilon)$, related to each other and determining the cell of periodicity and thickness of components. We focus our attention on the control objects which are described by the singular parabolic equations with the Robin boundary conditions on the boundary of holes, and with two different types of boundary controls - the Dirichlet and Neumann controls - on the external boundary of Ω_ε. Having admitted that blowing up phenomenon can appear in the original problem we provide its asymptotic analysis as the small parameter ε tends to zero. It is shown that the structure of the homogenized problem depends essentially on how h tends to zero as $\varepsilon \to 0$ (so-called "scaling effect"). We derive also the conditions under which in the limit we obtain not an optimal control problem, but rather some initial-boundary value problems with or without controls. In conclusion, using the approach of homogenization theory, we construct so-called asymptotically suboptimal controls for the original problem and show that an approximation properties of such controls for small enough ε are close to the true values of optimal characteristics.

Катастрофа голубого неба в релаксационных системах

Колесов А. Ю., Розов Н. Х.

Катастрофой голубого неба принято называть нелокальную бифуркацию коразмерности один, которая в простейшем случае состоит в следующем. Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство векторных полей X_μ в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что при $\mu = 0$ поток X_μ имеет периодическую траекторию L_0 типа простой седло-узел. Рассмотрим, далее, некоторую достаточно малую окрестность $\mathcal{U}$ траектории L_0, разделяемую двумерным сильно устойчивым многообразием $W^{ss}(L_0)$ на две области: узловую $\mathcal{U}^+$, все траектории из которой стремятся к L_0 при $t \to +\infty$, и седловую $\mathcal{U}^-$, в которой лежит двумерное неустойчивое многообразие $W^u_{loc}(L_0)$ с краем L_0. Следующее ограничение носит существенно нелокальный характер и состоит в том, что все траектории системы X_0 с начальными условиями из $W^u_{loc}(L_0)$ при увеличении t сначала покидают окрестность $\mathcal{U}$, а затем снова возвращаются в нее, попадая в узловую область $\mathcal{U}^+$. Тогда, очевидно, каждая из упомянутых траекторий оказывается двоякоасимптотической к L_0. И наконец, будем считать, что множество $W^u(L_0)$, получающееся из $W^u_{loc}(L_0)$ после продолжения по траекториям потока X_0, не является топологическим многообразием (в трехмерном случае это означает, что оно не гомеоморфно двумерному тору).

Как показано в [1], при сформулированных ограничениях и при некоторых дополнительных условиях технического характера исчезновение в системе X_μ, $0 < \mu \ll 1$ седло-узлового цикла L_0 приводит к появлению устойчивой замкнутой траектории $L(\mu)$, период и длина которой стремятся к бесконечности при $\mu \to 0$. Сама же траектория $L(\mu)$ имеет своим верхним топологическим пределом при $\mu \to 0$ множество $W^u(L_0) \cup L_0$. Описанная бифуркация получила название "катастрофа голубого неба".

В работе [2] проиллюстрирована реализуемость упомянутой выше бифуркации в сингулярно возмущенных системах с одной медленной и m, $m \geq 2$ быстрыми переменными. Нами же решается в некотором смысле противоположная проблема. А именно, устанавливаются условия, при которых катастрофа голубого неба наблюдается в релаксационных системах вида

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, функции f, g бесконечно дифференцируемы по своим переменным. Как оказывается, интересующая нас катастрофа голубого неба может происходить в таких системах при выполнении ряда стандартных условий (см. [3, с.194

– 200]), гарантирующих существование так называемых классических релаксационных колебаний.

Литература

[1] *Тураев Д. В., Шильников Л. П.*// ДАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 596–599.

[2] *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.*Blue sky catastrophe in singularly-perturbed systems. Preprint WIAS. № 841. Berlin, 2003.

[3] *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.*Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.

Reversible and Hamiltonian dynamics near a homoclinic orbit

Koltsova O. Yu. (Nizhny Novgorod University)

We considered a reversible vector field having a homoclinic orbit Γ to a singular point p of the saddle-center type. We obtained a classification of the (generic) linear part of the return map which has highlighted different types of global dynamics near Γ. For each of these types, the dynamics has been studied. Under some generic condition we prove the existence of a two-dimensional manifold Σ filled by symmetric homoclinic orbits to the center manifold W^c. We also established the existence of a countable set of two-dimensional manifolds accumulating to Σ. These manifolds consist of one parameter families of symmetric periodic orbits.

If we consider a Hamiltonian reversible vector field then all obtained manifolds are foliated by Hamiltonian level sets such that:

- There exists a countable set of symmetric periodic orbits on the level where p is located. These orbits are accumulated to Γ.
- There exist two symmetric homoclinic orbits to each periodic orbit on W^c and a countable set of symmetric periodic orbits accumulated to these homoclinic ones.
- There are a finite number of periodic orbits for all other level of Hamiltonian.

Comparison of the results for reversible systems with those obtained in the Hamiltonian category has already led to a number of observations of differences, most notably the occurrence of non-symmetric heteroclinic cycles.

This research was supported by Royal Society, Russian Foundation of Basic Research (grant 04-01-00483a) and program of supporting Russian scientific schools (grant 9686.2006.1).

Global Geometry of Generalized Lienard Equations and Limit Cycles

Kolutsky G. A. (Lomonosov Moscow State University)

The main result is the upper bound of limit cycles for a special class of polynomial vector fields on the plane. This class is called generalized Lienard equations (in the canonical form):

$$\begin{cases} \dot{x} = yH(x) - xF(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{1}$$

Our results are very natural continuation of Ilyashenko-Panov investigation for (standard) Lienard equations [1]. Their results based on the theorem of Ilyashenko and Yakovenko that binds the number of zeros and the growth of a holomorphic function [2].

We split the space of the parameters of system (1) into pieces with topologically different phase portraits. For one of these types we find the Bendixson trap for all limit cycles of (1) using pure geometrical arguments for the vector field only. We consider the type determined by following conditions:
i) The degree n of the polynomial $F(x)$ is even and degree of polynomial $H(x)$ is not greater than n,
ii) Modules of the coefficients of polynomials $F(x)$ and $H(x)$ are smaller than some constant $C > 100$,
iii) For every real x polynomial $H(x)$ is not smaller than some constant θ, which belongs to the interval $(0, 1)$.

We estimate the number of limit cycles of (1) in the bounded nest through the attributes of the Poincare map, which is continued in a complex domain. The estimate is a function of four parameters: n, C, θ and Δ, where Δ is a function of $F(0)$ and $H(0)$. Informally speaking, the parameter Δ means "distance (in the space of parameters)" between linearization of (1) and one that defines center.

References

[1] Yu. Ilyashenko, A. Panov *Some Upper Estimates of the Number of Limit Cycles of Planar Vector Fields with Applications to Lienard Equations, Moscow Math. J. vol. 1 (1999), no. 4, 583-599.*

[2] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko *Counting real zeros of analytic functions satisfying linear ordinary differential equations, J. Differential Equations vol. 126 (1996), no.1, 87-105.*

On relation between the Cauchy data in scattering problems on a wedge

Komech A. I. (Russia), Merzon A. E. (México)

The nonstationary scattering problem of a plane wave by a wedge is reduced to a boundary value problem for the Helmholtz equation $(\Delta + \omega^2)u(x, y) = 0$, $(x, y) \in Q := \mathbf{R}^2 \setminus K$ in complement of a plane convex angle K [1]. To solve this problem, the method of the complex characteristics [2] is used. The central role in this method plays so-called "Connection Equation" which is an algebraic relation between restiction of the Fourier-Laplace transforms of the Cauchy data of solution onto the Riemannian suirface $z_1^2 + z_2^2 - \omega^2 = 0$ of the complex characteristics. In the case of convex angle Q this connection equation is obtained directly from by the Paley-Wiener Theorem. In the case of the nonconvex angle the theorem does not work. Nevertheless, we find an analogue of the relation in this case too. Let us consider the angle $K : x, y > 0$ for simplicity of exposition, and denote $v_1^0(x_1) := u(x_1, 0)$, $v_2^0(x_2) := u(0, x_2)$, $v_1^1(x_1) := u_{x_2}(x_1, 0)$, $v_2^1(x_2) := u_{x_1}(0, x_2)$. Let $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$, $\operatorname{Im} z_l > 0$, $l = 1, 2$ be the corresponding Fourier-Laplace transforms, and $\check{v}_l^\beta(z_l(w))$ be the restrictions onto the Riemannian surface, where $z_1(w) = \sinh w$, $z_2(w) = -i \cosh w$ (in the case of $\omega = i$). The functions $\check{v}_l^\beta(w) := \tilde{v}_l^\beta(z_l(w))$ are analytic in the parallel strips $\operatorname{Im} w \in [0, \pi]$ and $\operatorname{Im} w \in [-3\pi/2, -\pi/2]$ for $l = 1, 2$ respectively.

Theorem The functions $\check{v}_1^1(w) - \check{v}_1^0(w) \cosh w$ and $\check{v}_2^1(w) - \check{v}_2^0(w) \sinh w$, admit an analytic continuation to $\operatorname{Im} w \in [-\pi/2, 0]$ and their sum is equal to zero.

Список литературы

[1] A.I.Komech , A.E.Merzon, Limiting amplitude principle in the scatterind by wedges, Math. Meth. Apll. Sci. 20 (2006), 1147-1185.

[2] Komech A, Merzon A, Zhevandrov P. A method of complex characteristics for elliptic problems in angles and its applications. Amer. Math. Soc.Transl (2), 206 (2002), 125-159.

К исследованию резонансов в системах с двумя степенями свободы

Kondrashov R. E. Korolev S. A. Morozov A. D. (*г. Нижний Новгород*)

Рассматривается задача исследования резонансов в системе двух слабосвязанных осцилляторов. Предполагается, что невозмущенные уравнения нелинейные. В окрестности резонансных значений интегралов энергии невозмущенных уравнений исходная система приводится к удобной для исследования трехмерной системе. На модельном примере проводится ее анализ, включающий компьютерную визуализацию фазовых кривых.

Работа поддержана грантами РФФИ, №06-01-00270 и НШ, №9685.2001.1.

Первая краевая задача для параболических уравнений второго порядка в пространствах Зигмунда

Konenkov A. N (*г. Москва*)

Разрешимость первой краевой задачи в области Ω для параболических уравнений второго порядка в анизотропных пространствах Гельдера $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, $m \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, хорошо известна [1]. При меньших требованиях на данные задачи разрешимость в пространстве $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ установлена Е.А. Бадерко [2]. Естественно возникает вопрос, что можно сказать о решениях при целых значениях параметра гладкости ($\alpha = 0$ или $\alpha = 1$). Известно, что утверждение, подобное указанным выше, неверно для пространств $C^m(\bar{\Omega})$ и анизотропных пространств Липшица $C^{m,1}(\bar{\Omega})$.

Мы получаем разрешимость первой краевой задачи в анизотропных пространствах Зигмунда $H_m(\bar{\Omega})$, $m \geq 3$, которые являются аналогами анизотропных пространств Гельдера $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ для целых значениях показателя гладкости и получаются из определения пространств Липшица $C^{m-1,1}(\bar{\Omega})$ заменой в определении разностей первого порядка на разности второго, см. [3]. Данные задачи и коэффициенты уравнения предполагаются принадлежащими соответствующим пространствам Зигмунда. Область Ω может быть нецилиндрической и неограниченной, ее "боковая" граница – из класса Зигмунда H_m и может быть некомпактной. Устанавливается, что при четных m для принадлежности решения к $H_m(\bar{\Omega})$ требуются дополнительные (по сравнению с пространствами Гельдера) разностные условия согласования между начальной, граничной функциями и правой частью уравнения.

Литература

[1] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1968.

[2] Бадерко Е. А. //*Дифференц. уравнения.* 1992. Т. 28. N 1. С.17-23.

[3] Конёнков А. Н. //*Доклады РАН.* 2005. Т. 4004. N 1. С. 18-20.

On a singularity condition for solutions of ordinary differential equations.

Kon'kov. A. A. (*Moscow*)

We consider the problem

$$w^{(m)} = (-1)^m f(r) g(w) \quad r > a, \tag{1}$$

$$(-1)^i w^{(i)}(r) \geq 0 \quad \text{for all } r \in [a, \infty),\ i = 0, \dots, m-1, \tag{2}$$

of order $m \geq 2$, where $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ is a continuous function and $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ belongs to the space $L_{loc}([a,\infty))$, $a > 0$.

The capacity $\operatorname{cap}_{f,m}(\Omega)$ of a bounded measurable set $\Omega \subset [a,\infty)$ is defined by

$$\operatorname{cap}_{f,m}(\Omega) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} (\xi - r_{i-1})^{m-1} \chi_\Omega(\xi) f(\xi)\, d\xi \right)^{1/m},$$

where χ_Ω is the characteristic function of Ω and the infimum in the left-hand side is taken over all increasing sequences of real numbers r_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, such that $r_0 = a$ and

$$\lim_{i \to \infty} r_i = \infty.$$

For an arbitrary measurable set $\Omega \subset [a,\infty)$, we put

$$\operatorname{cap}_{f,m}(\Omega) = \lim_{r \to \infty} \operatorname{cap}_{f,m}(\Omega \cap [a, r)).$$

Theorem 1. Let $\operatorname{cap}_{f,m}([a,\infty)) = \infty$ and, moreover,

$$\int_1^{\infty} g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1}\, dt < \infty$$

for some real number $\theta > 1$, where

$$g_\theta(t) = \inf_{(t/\theta, t\theta)} g.$$

Then any solution of problem (1), (2) is identically equal to zero in a neighborhood of infinity.

Bibliography

[1] I. T. Kiguradze, T. A. Chanturiya. *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*, Kluwer, Dordrecht 1993.

[2] I. T. Kiguradze, G.G. Kvinikadze. *On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations*, Ann. Mat. Pure Appl. **130** (1982), 67–87.

[3] A. A. Kon'kov. *On non-extendable solutions of ordinary differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **298** (2004), 184-209.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ В $\mathbb{R}^3$

Kononenko L. I. (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН)

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x_1, x_2, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$; ε — малый положительный параметр; f_1, f_2, g — достаточно гладкие функции по всем переменным; $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}$ — производные по времени.

Приведены достаточные условия существования релаксационных колебаний в данной системе [1].

Для существования релаксационных колебаний достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) медленная поверхность $g(x_1, x_2, y, 0) = 0$ состоит из трех листов:

$$g(x_1, x_2, y, 0) = (y - \varphi_1(x_1, x_2))(y - \varphi_2(x_1, x_2))(y - \varphi_3(x_1, x_2)),$$

где $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ i = 1, 2, 3,\ \varphi_3(x_1, x_2) \leq \varphi_2(x_1, x_2) \leq$$

$$\leq \varphi_1(x_1, x_2);$$

2) листы $y = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y = \varphi_3(x_1, x_2)$ — устойчивые, а $y = \varphi_2(x_1, x_2)$ — неустойчивый;

3) в плоскости (x_1, x_2) существует инвариантная притягивающая прямая, которая трансверсально пересекает общую часть проекций устойчивых листов на плоскость (x_1, x_2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00302).

Литература

1. Кононенко Л.И. Влияние формы интегрального многообразия на возникновение релаксационных колебаний // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. IX. №2(26). С. 75–80.

Малые колебания стратифицированной жидкости

Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. (г. Симферополь)

Изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы состоящей из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкой, а верхняя — идеальной.

Проведено построение, которое позволяет получить аналог известного ортогонального разложения Вейля, пространства вектор-функций суммируемых с квадратом по области, приспособленного к исследованию данной задачи. Путем проектирования уравнений движения на соответствующие ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов начально-краевая задача, описывающая малые движения данной гидродинамической системы, проводится к задаче Коши:

$$\mathcal{J}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad 0 << \mathcal{J} = \mathcal{J}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

$$\mathrm{Re}\mathcal{A} \geq 0,$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Выясняется, что оператор $\mathcal{A}$ является аккретивным, но незамкнутым. Замыкая оператор $\mathcal{A}$ и используя известные теоремы о разрешимости задачи Коши для абстрактно параболических уравнений, удается доказать теорему о существовании и единственности сильного решения исходной начально-краевой задачи.

Для соответствующей спектральной задачи установлено, что весь спектр задачи лежит в правой замкнутой полуплоскости. Спектр лежащий вне отрезка $[-iN_{0,2}, iN_{0,2}]$ ($N_{0,2}$ — максимальное значение частоты плавучести для идеальной жидкости) состоит из собственных значений конечной кратности. Непрерывный спектр соответствующего операторного пучка совпадает с отрезком мнимой оси $[-iN_{0,2}, iN_{0,2}]$. Установлено, что точками сгущения спектра могут быть только точки отрезка $[-iN_{0,2}, iN_{0,2}]$ и бесконечность. Существует три ветви собственных значений с предельными точками на бесконечности. Одна ветвь локализована у действительной положительной полуоси и две у мнимой. Получены асимптотические формулы для этих ветвей собственных значений.

О суммируемости коэффициентов Фурье функции из обобщенных пространств Лоренца

Kopezhanova A. N. Nursultanov E. D. (Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана)

В работе изучается суммируемость коэффициентов Фурье $c = \{c_n(f)\}$ по системе $\{\varphi_n\}$ функции из весового пространства Лоренца.

Ортонормированная система ограниченная в совокупности, если $|\varphi_n(t)| \leq M, t \in [0,1], n \in N$.

Пусть f периодическая функция с периодом 1 и интегрируемая на $[0,1]$.

$$c_n = c_n(f) = \int_0^1 f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt, n \in Z$$

будут ее коэффициентами Фурье по системе $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. *Пусть $0 < \beta \leq \infty$ и пусть λ неотрицательная функция на $[0,\infty)$. Если существует $\delta > 0$, удовлетворяющая условию: $\lambda(t)t^{-\delta}$ является возрастающей функций, $\lambda(t)t^{-(\frac{1}{2}-\delta)}$ является убывающей функций, тогда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^*\lambda(n))^{\beta}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\int_0^1\left(f^*(t)t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\beta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где $\{c_n^*\}_0^{\infty}$ является невозрастающей перестановкой последовательности $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $f^*(t)$ является равноизмеримой по $|f(t)|$ и невозрастающей функцией.

В случае $\beta < \infty$, $\Phi = \{e^{2\pi ikx}\}$-тригонометрическая система, утверждение доказано в работе Персона Л.Е.[1]

Теорема 2. *Пусть $0 < \beta \leq \infty$ и пусть λ неотрицательная функция на $[0,\infty)$. Если существует $\delta > 0$, удовлетворяющая условию: $\lambda(t)t^{-\delta}$ возрастающая функция и $\lambda(t)t^{-1+\delta}$ убывающая функция. Тогда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{c_n}\lambda(n))^{\beta}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq c\left(\int_0^1\left(f^*(t)t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\beta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где $\bar{c_n} = \frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{n}c_m(f)\right|$

Когда $\lambda(t) = t^{\gamma}$ весовая функция, то теорема 2 была доказана в работе[2].

Литература

[1]Persson L.E. *Relation between summability of functions and Fourier series*//Acta Math.Acad.Sci.Hung. Tomus 27(3-4),1976,p.267-280

[2]Нурсултанов Е.Д.*О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространстве* //Известия РАН, 2000, Т.64,N1,с.95-122.

The periodic magnetic Schrödinger operators: spectral gaps and tunneling effect

Kordyukov Yu.A. (Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia)

Let M be a noncompact oriented manifold of dimension $n \geq 2$ equipped with a properly discontinuous action of a finitely generated, discrete group Γ such that M/Γ is compact. Suppose that $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Let g be a Γ-invariant Riemannian metric and $\mathbf{B}$ a real-valued Γ-invariant closed 2-form on M such that $\mathbf{B} = \mathbf{dA}$ for some real-valued 1-form $\mathbf{A}$ on M.

Consider a Schrödinger operator with magnetic potential $\mathbf{A}$:

$$H^h = (ih\,d + \mathbf{A})^*(ih\,d + \mathbf{A})$$

(here $h > 0$ is a semiclassical parameter, which is assumed to be small).

For any $x \in M$, denote by $B(x)$ the anti-symmetric linear operator on the tangent space T_xM associated with the 2-form $\mathbf{B}$. Consider the function $\mathrm{Tr}^+ B$ on M defined as $\mathrm{Tr}^+(B(x)) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}([B^*(x) \cdot B(x)]^{1/2})$.

Put $b_0 = \min\{\mathrm{Tr}^+(B(x)) \,:\, x \in M\}$.

Theorem 1 *Assume that there exist a (connected) fundamental domain $\mathcal{F}$ and a constant $\epsilon_0 > 0$ such that $\mathrm{Tr}^+(B(x)) \geq b_0 + \epsilon_0$ for any $x \in \partial\mathcal{F}$. Then, for any natural N, there exists $h_0 > 0$ such that, for any $h \in (0, h_0]$, the spectrum of H^h in the interval $[0, h(b_0 + \epsilon_0)]$ has at least N gaps.*

We also obtain more precise statements on the existence of spectral gaps for H^h in several cases when the magnetic field vanishes in a regular way at some points. The proofs are based on the study of the tunneling effect for the corresponding quantum particle.

This is a joint work with B. Helffer.

К задаче асимптотической стабилизации по правой части

Kornev A. A. (Мех.-мат. МГУ им. М.В. Ломоносова)

Для оператора S, действующего в банаховом пространстве H, заданных точек z_0, $a_0 \in H$ и конечномерного подпространства $\mathcal{L} \subset H$ рассматривается задача построения такого набора поправок $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, что траектории $\{S^i(z_0)\}$ и $\{a_{i+1} = S(a_i) + f_i\}$ асимптотически сближаются. Решение данной задачи формулируется в терминах приближенного проектирования точек a_i вдоль подпространства $\mathcal{F}$ на локальное устойчивое многообразие

$$\mathcal{W}^-(S, \mathcal{O}) = \{m_0 \in \mathcal{O} : \exists m_{i+1} \in \mathcal{O}, m_{i+1} = S(m_i), i = 0, 1, 2, ..\},$$

определенное в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ траектории $\{z_i\}$.

Предлагаются численные алгоритмы решения данной задачи при наличии различного типа ограничений на множество $\mathcal{F}$, приводятся результаты расчетов для уравнения типа Чафе – Инфанта.

Теория функционально-дифференциальных уравнений в частных производных и проблемы моделирования биологических процессов

Королева Н.И. (Московский государственный институт электроники и математики (технический университет))

Современное состояние исследований в области динамики биологических процессов побуждает исследователей привлекать не только новейшие подходы, связанные с их моделированием, но и по-новому переосмысливать исходные базовые постановки задач с учетом более тонких и детальных фактов, появляющихся на этапе экспериментальных опытов.

Сложность поведения биологических процессов, избыток недостоверной априорной информации наряду с недостаточным количеством данных о существенных, определяющих характер динамики компонентах состояния рассматриваемой динамической системы вынуждает исследователей не только неоправданно упрощать математическую модель, но и многие "факты", утверждения принимать интуитивно, на веру, без теоретического обоснования, не говоря уже о строгих доказательствах. Этому способствует и сама природа биологических проблем. Не так просто, например, сделать шаг от простейшей диффузионной модели типа "хищник-жертва"к пространственно-временному аналогу с учетом предыстории и очевидных факторов неопределенности.

В докладе рассматривается класс функционально-дифференциальных уравнений в частных производных и дается обоснование использования элементов теории ФДУ для моделирования процесса неспецифической клеточной защиты респираторного тракта при ингаляционном воздействии непатогенных микроорганизмов.

Работа поддерживается Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 06-01-00356).

О константе в неравенстве Фридрихса

Королева Ю. О. (г. Москва)

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Пусть ε — малый параметр. Предполагаем, что в случае $n = 2$ длина границы $\partial\Omega$ — единичная, при этом

$$\partial\Omega = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon, \quad \Gamma_1^\varepsilon = \bigcup_i \Gamma_{1i}^\varepsilon, \quad \Gamma_2^\varepsilon = \bigcup_i \Gamma_{2i}^\varepsilon,$$

$$|\Gamma_{1i}^\varepsilon| = \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad |\Gamma_{1i}^\varepsilon + \Gamma_{2i}^\varepsilon| = \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{|\ln\varepsilon|}\right) \ (\varepsilon \to 0),$$

где Γ_{1i}^ε и Γ_{2i}^ε чередуются. В многомерном случае геометрические конструкции схожи. Мы считаем, что $\partial\Omega = S \cup \Gamma, \Gamma$ принадлежит гиперплоскости $x_n = 0$ и $\Gamma = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$. Обозначим ω ограниченную область на гиперплоскости $x_n = 0$, содержащую начало координат. Без ограничения общности, $\omega \in K$, $K = \{\hat{x} : -\frac{1}{2} < x_i < \frac{1}{2},\ i = 1, \dots, n-1\}$, $x = (\hat{x}, x_n)$. Пусть ω_ε это область $\{\hat{x} : \frac{\hat{x}}{\varepsilon} \in \omega\}$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ целочисленные сдвиги ω_ε на гиперплоскости в x_i направлении $i = 1, \dots, n-1$. Наконец, $\Gamma_1^\varepsilon = \{x : \frac{x}{\delta} \in \widetilde{\Gamma}\} \cap \Gamma$. В многомерном случае $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{n-2})$ $(\varepsilon \to 0)$.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема.

Для $u \in H^1(\Omega, \Gamma_1^\varepsilon)$ справедливо следующее неравенство Фридрихса:

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \le K_\varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \quad K_\varepsilon = K_0 + \varphi(\varepsilon),$$

где K_0 является константой в неравенстве Фридрихса для функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, т.е не зависит от малого параметра, а $\varphi(\varepsilon) \sim \left(\frac{\pi}{|\ln\varepsilon|}\right)^{\frac{1}{2}}$, если $n = 2$, и $\varphi(\varepsilon) \sim \left(\varepsilon^{n-2}\frac{\sigma_n}{2}c_\omega\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}\sigma_n c_\omega}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\delta(\varepsilon)|\ln\varepsilon|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, если $n > 2$, при $\varepsilon \to 0$, где σ_n– площадь единичной n-мерной сферы , а $c_\omega = cap\ \omega$ — гармоническая ёмкость области ω.

Граничная задача для уравнения четвертого порядка составного типа

Корзюк В. И., Конопелько О. А. (ИМ НАН Беларуси, БГУ)

Для функции u независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ $n+1$ - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Delta u - a^2 b^2 \Delta^2 u + A^{(3)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где постоянные $b^2 \geq a^2 > 0$, оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$,

$$A^{(3)}u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq 3} a^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u,$$

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, оператор дифференцирования $\boldsymbol{D} = (D_0 \ldots D_n)$, $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = \partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u/\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$, $a^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x})$ – заданные функции.

Уравнение (1) задается в цилиндрической области $Q = (0,T) \times \Omega$. Граница $\partial\Omega$ состоит из нижнего основания $\Omega_0 = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | x_0 = 0\}$, верхнего основания $\Omega_T = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | x_0 = T\}$ и боковой поверхности $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | 0 < x_0 < T\}$, которая является кусочно гладкой.

На нижнем основании Ω_0 заданы условия

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{x_0=0} = 0, \tag{2}$$

а верхнем основании Ω_T – условие

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{x_0=T} = 0, \tag{3}$$

на боковой поверхности Γ – условия

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно Q нормали к гиперповерхности Γ.

В подходящих функциональных пространствах при некоторых ограничениях на данные доказано существование и единственность сильного решения задачи (1)–(4). Доказательство проведено методом энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом, используя методы функционального анализа.

О функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре

Koshanov B. D. (Центр физико-математических исследований МОН РК, г.Алматы)

В данной работе в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений пространстве произвольной размерности. В частности, получены явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения, которое имеет важное место в теории упругости.

Постановка задачи. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset R^n$ (n – натуральное число, δ – положительное число) с границей $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^{\,i}} u\right|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., m-1, \tag{2}$$

где $\vec{n}_x = \dfrac{x}{|x|}$ – нормаль к $\partial\Omega_\delta$ в точке x, Δ – оператор Лапласа.

Используя свойств симметричности фундаментального решения доказана следующая:

Теорема. *A) В случае нечетного n функция Грина задачи Дирихле (1) – (2) представима в виде:*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n},$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n},$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)\, c_{2m,n}\cdot$$

$$\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, k = 2, ..., m$$

$$c_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)!\,2^{m-1}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2-n)}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}.$$

B) Утверждение A) остается справедливым при четных n, если $2m < n$.

C) Когда n четное и $2m \geqslant n$, то функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде:

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|,$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n} \ln|x-y|,$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)\,c_{2m,n}\cdot$$

$$\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n} \cdot \ln|x-y|\cdot$$

$$\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},$$

$$k = 2,...,m,$$

$$c_{2m,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}.$$

Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областях (см. [3],[4]). Отметим, что явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости впервые приведены (см. [5]).

Работа выполнена в соавторстве с Т.Ш.Кальменовым.

Литература

[1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частыми производными // М.: Мир, 1966.-351 с.

[2] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1982. 336 с.

[3] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А. Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений // Препринт. Алматы, 2005, 54с.

[4] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Доклады НАН РК, Т.5, 2006, С. 9-12.

[5] Begehr H., Vanegas C.J. Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation. Math. Nachr. 279 (2006), P.38-57.

Применение универсальных итерационных процессов к некоторым задачам механики

Кошелев А.И. (Санкт-Петербургский государственный университет)

Для довольно широкого класса краевых задач нелинейной механики рассматриваются универсальные итерационные процессы, предложенные автором. Они характерны тем, что сходятся, начиная с любого начального приближения, не только в энергетическом пространстве, но иногда и в гладких нормах. В докладе изучаются методы, в которых связующий итерационный оператор может быть выбран различными способами (оператор Лапласа, оператор Ламе, оператор теплопроводности). В частности, из сходимости итерационных процессов иногда вытекает существование гладких решений рассматриваемых краевых задач. Полностью результаты будут опубликованы в начале 2008 года в выпуске журнала "Вестник СПбГУ", посвященном столетию со дня рождения С.Г. Михлина.

Некоторые вопросы акустики пористых сред

Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С. (г. Москва)

В докладе рассматриваются спектральные свойства трех усредненных задач механики сильнонеоднородных сред: проблемы "двойной пористости", проблемы колебания смеси (микстуры) двух вязких сжимаемых жидкостей и колебания среды, состоящей из упругого каркаса и вязкой слабосжимаемой жидкости. Получены результаты о структуре спектра и наличии так называемых "спектральных лакун"во всех трех случаях.

Также рассматривается вопрос о формулировке теорем о близости решений в случае малых колебаний среды "упругий каркас-сжимаемая жидкость"в классических функциональных пространствах, то есть без использования понятия двухмасштабной сходимости.

Дробные интегралы Римана — Лиувилля и $S_{p,\varphi}$ пространства Степанова

Костин А. В. (г. Воронеж)

В соответствии с [2], обозначим через $S_{p,\varphi}[0,\infty), 1 \le p < \infty$, или сокращенно, через $S_{p,\varphi}$ совокупность всех измеримых на $[0,\infty)$ функций, для которых

$$||f||_{S_{p,\varphi}} = \sup_{s\in[0,\infty)} \left[\int_{\varphi(s)}^{\varphi(s+1)} |f(t)|^p dt\right]^{1/p} < \infty,$$

где $\varphi(s)$ — неубывающая достаточно гладкая неограниченная функция, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(s) \le 0$.

В этих пространствах рассматривается интеграл дробного порядка Римана — Лиувилля на полуоси $t \in [0,\infty)$

$$\left(J_{0+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \qquad (\alpha > 0)$$

где $\Gamma(\alpha)$— гамма-функция Эйлера.

Обозначим через Ψ_γ классы функций $\psi(t)$, обладающих следующими свойствами: $\psi'(t) > 0$, $\psi(t) > 0$ и для $\gamma \ge 0$ выполняется неравенство $t^\gamma \psi(t) \le M\psi'(t)$, где константа M от t не зависит.

Сюда относятся, например, функции вида $\psi(t) = (1+t)^n e^{\omega t^{\gamma+1}}$, $\psi(t) = e^{at} e^{\omega t^{\gamma+1}}$ $(n \ge 0,\ \omega > 0,\ a > 0)$.

Если $\psi_1 \in \Psi_\gamma$ и $\psi_2 \in \Psi_\gamma$, то их линейная комбинация с положительными коэффициентами также из Ψ_γ.

Кроме того, если $\psi_1 \in \Psi_\gamma$ и $\psi_2 \in \Psi_\gamma$, то и их суперпозиции $\psi_{12} = \psi_1(\psi_2)$ и $\psi_{21} = \psi_2(\psi_1)$ также принадлежат Ψ_γ.

Теорема. Если функция $\varphi \in \Phi$ такая, что $(1+\varphi^{-1}(t)) \in \Psi_\gamma$, где $\gamma = \max(\alpha - \frac{1}{p}, 0)$ и $\alpha > 0$, то операторы дробного интегрирования Римана–Лиувилля J_0^α непрерывны в пространствах $S_{p,\varphi}$, $(p \ge 1)$.

Литература

[1] Самкор С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

[2] Костин В. А. *Неравенства для норм производных в пространствах $L_{p,\varphi}$* Мат. заметки, т.6, N4 (1969), с.463 — 473.

Анализ ветвления равновесных конфигураций неоднородной балки

Костин Д. В. (г. Воронеж)

Доклад посвещен схеме анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании, в условиях двухмодового вырождения. Решение аналогичной задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым [1]. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения. В предлагаемой схеме условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки.

В построении требуемой пары векторных полей ведущую роль сыграла взятая из монографии В.П. Маслова [2] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$).

Литература

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. *Дискриминантные множества и раскладыбифурцирующих решений фредгольмовых уравнений* // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси. 2003. Т.7. – С.72-86.

[2] Маслов В.П. *Асимптотические методы и теория возмущений.* – М.: Наука. 1988. – 312 с.

S – весовые пространства Степанова и преобразование Лапласа

Костин В. А. (г. Воронеж)

Обозначим через $S_{p,\varphi}[0,\infty), 1 \leq p < \infty$, или, сокращенно, через $S_{p,\varphi}$ совокупность всех измеримых на $[0,\infty)$ функций, для которых

$$||f||_{S_{p,\varphi}} = \sup_{s\in[0,\infty)\left[\int_{\varphi(s)}^{\varphi(s+1)}|f(t)|^p dt\right]^{1/p}} < \infty,$$

где $\varphi(s)$ — неубывающая достаточно гладкая неограниченная функция, такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(s) \leq 0$.

Пространства $S_{p,\varphi}$ при $\varphi(x) = t$, являются классическими пространствами В.В. Степанова. Здесь мы рассматриваем $\varphi(t) = \frac{ln(1+\omega t)}{\omega}$ $(\omega > 0)$, где $S_{p,\varphi} = S_{p,\omega}$ Пространства $S_{1,\omega}$ являются расширением классической алгебры функций, растущих не быстрее экспоненты. Справедлива теорема об обращении преобразования Лапласа.

Теорема. Если $f \in S_{1,\omega}$ и $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ $(p = \gamma + i\xi)$ – ее преобразование Лапласа, то при $\gamma > \omega$

$$f(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\gamma-i\xi}^{\gamma+i\xi} H_{-1}(2\sqrt{\tau}p)F(p)dp = \lim_{\tau\to 0}(T(\tau)f)(t)$$

в том смысле, что

$$\lim_{\tau\to 0} \|f(t) - (T(\tau)f)(t)\|_{S_{1,\omega}} = 0.$$

$H_{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(s^2+2sp)}ds$— функция Эрмита с первым отрицательным индексом, нормированная так, что $H_{-1}(0) = 1$.

Литература

[1] Костин В. А. *Неравенства для норм производных в пространствах* $L_{p,\varphi}$ Мат. заметки, т.6, №4 (1969), с.463 — 473.

Об особых точках на поверхности, сопряженной с винтовой поверхностью алгеброидного типа.

Ковалева М. И. (г. Воронеж)

Тема сообщения связана с объяснением механизма образования линий особых точек (линий негладкости) на поверхности, геометрически сопряженной с симметричной алгеброидной винтовой поверхностью. Основу обсуждаемых в докладе результатов составляет теорема о том, что однопараметрическая деформация симметричной винтовой поверхности (параметр — диаметр поперечного сечения) приводит, в некоторых естественных условиях, к бифуркации регрессивных точек (точек возврата) на аналитически сопряженной поверхности по типу "ласточкин хвост" [1], т.е. бифуркация регрессивных точек идентична бифуркации точек $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ на дискриминатной поверхности полинома $f = t^4 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$, соответствующих 3−кратным корням полинома f.

Пара винтовых поверхностей — важнейший конструктивный элемент турбовинтового насоса. Герметичность насоса, его кинематические и пр. характеристики определяются геометрическими свойствами поперечных сечений винтов [2],[3]. Минимальность зазоров между винтами и симметричность схемы силовых нагрузок позволяют насосу работать устойчиво в разнообразных режимах. Обеспечение минимальности зазоров — важнейшая задача в конструировании ТН, известная в литературе как задача оптимизации шестеренчатого зацепления пары винтов.

Поверхность винта задается "винтовым вращением" заранее заданного профиля поперечного сечения — замкнутого плоского контура (гладкого, кусочно гладкого и т.п.), определяемого посредством периодических профильных функций $r = r(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ (в полярных координатах), удовлетворяющих условиям $r(s) \equiv r(s + 2\pi)$ и $\varphi(s + 2\pi) \equiv \varphi(s) + 2\pi$. В докладе рассмотрен профиль в виде неособой компактной линии уровня однородного полинома от двух переменных с поворотной симметрией.

Работы выполнена совместно с Костиным В. А. и Сапроновым Ю. И.

Литература

[1] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.* М.: Наука. 1982. 304 с. [2] Пыж О.А., Харитонов Е.С., Егорова П.Б. *Судовые винтовые насосы.* - Л.: Судостроение, 1969. - 196 с. [3] Валюхов С. Г., Костин В. А., Сапронов Ю. И., Семенов С. М. *Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей.* - Воронеж: ВорГУ. 2005. - 177 с.

On the sets of boundedness of solutions to degenerate fourth-order equations with strengtheningly monotone principal parts, absorpition and L^1 - data

Kovalevsky A.A. (Ist.Appl.Math.Mech., NAS of Ukraine),
Nicolosi F. (University of Catania, Italy)

We consider the Dirichlet problem for a class of degenerate non linear elliptic fourth-order equations with strengtheningly monotone principal parts, absorbing lower-order terms and L^1-right-hand sides. We establish existence of solution of the given problem bounded on the sets where the behaviour of the data of the problem and involves weighted functions is regular enough.

Убывание решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях

Кожевникова Л. М. (г. Стерлитамак)

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1} = \{\overline{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y}) \mid x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_n\}$, не лежащей в полупространстве вида $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x < r\}$, рассматривается уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathcal{S}} (-1)^j D_x^j \widehat{T}^{\overline{\beta}}(a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) T^{\overline{\alpha}} D_x^i u) = \Phi, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega. \tag{1}$$

Φ — линейный непрерывный функционал с ограниченным носителем. Комплексные псевдодифференциальные операторы $T^{\overline{\alpha}}$, $\widehat{T}^{\overline{\alpha}}$ определяются сопряженными символами $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, $\overline{A}^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, соответственно. Комплекснозначные функции $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, $\overline{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$ удовлетворяют следующим условиям. Пусть $\mathcal{D}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ — действительная неотрицательная непрерывная функция такая, что $\mathcal{D}(\mathbf{z}) \neq 0$ для $\mathbf{z} \neq 0$. Существует число $\nu(\overline{\alpha}) \in \left[0, 1 - \frac{i}{k}\right]$ такое, что при некотором $A > 0$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ таких, что $\mathcal{D}(\mathbf{z}) \geq 1$, для п.в. $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $| A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z}) | \leq A\mathcal{D}^{\nu(\overline{\alpha})}(\mathbf{z})$. Существует число $\mu(\overline{\alpha}) \in [0, \infty)$ такое, что при некотором $A > 0$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ таких, что $\mathcal{D}(\mathbf{z}) \leq 1$, для п.в. $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $| A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z}) | \leq A\mathcal{D}^{\mu(\overline{\alpha})}(\mathbf{z})$. Действительные функции $a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}})$, $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathcal{S}$ измеримы и удовлетворяют некоторым условиям малости.

Рассматриваются обобщенные решения уравнения (1) в классе функций, соответствующем однородной задаче Дирихле. Исследуется зависимость поведения на бесконечности решения уравнения (1) от геометрии неограниченной области.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем λ-последовательностью, если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\frac{1}{\theta(x_{N+1} - x_N)^{2[k,q]}} \leq \lambda(x_N, x_{N+1}) \equiv$$

$$\equiv \inf \left\{ J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) \;\middle|\; g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} g^2 d\overline{\mathbf{y}} = 1 \right\},$$

где

$$J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) = \int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \left(|D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2\right) d\mathbf{y}dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}^2(\mathbf{z})|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z}dx, \; N=\overline{0,\infty},$$

$\rho^{[k,q]}$ равно ρ^k или ρ^q при $\rho < 1$ или $\rho \geq 1$, соответственно, q — целое неотрицательное число, k — натуральное число, $q \leq k$.

Теорема. *Пусть для области Ω существует λ-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$. Тогда существуют положительные постоянные κ, M такие, что для решения $u(\overline{\mathbf{y}})$ уравнения* (1) *при всех $N \geq 2$ справедлива оценка*

$$J_{x_N}^{\infty}(u) \leq M \exp(-\kappa N). \tag{2}$$

Показано, что для областей с нерегулярным поведением границы оценка (2) является более точной, чем оценка, установленная О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян в работе [1] для эллиптического уравнения второго порядка. В случае эллиптического уравнения второго порядка для некоторого класса симметричных областей доказана точность оценки (2).

Литература

[1] Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 4. С. 588—610.

Coincidence of the continuous and discrete p–adic wavelet transforms

Kozyrev S.V. (Steklov Mathematical Institute)

We show that translations and dilations of a p–adic wavelet

$$\chi\left(p^{-1}x\right)\Omega\left(|x|_p\right)$$

coincides (up to the multiplication by some root of one) with a vector from the known basis of discrete p–adic wavelets. In this sense the continuous p–adic wavelet transform coincides with the discrete p–adic wavelet transform.

The p–adic multiresolution approximation is introduced and relation with the real multiresolution approximation is described.

Markovian Fields in Frame of Noncommutative Probability and Fourier Transform of their Distributions

Kpekpassi M. (Moscow)

We start with a natural number $k \in \{1,2,3...\}$ (fixed), an arbitrary real vector space S_0, with such space S_0' of linear functionals on S_0 which generate a measurable space $(S, B_0 = \sigma(S_0; S_0'))$ with countably-generated σ-algebra B_0 (for example, S_0' is a separable dual to a real normed space S_0 and B_0 is Borel), and with arbitrary measure ν defined on B_0 taking values in an algebra $\mathbb{A}$ of all $n_{\mathbb{A}} \times n_{\mathbb{A}}$ matrices ($n_{\mathbb{A}} = 1,2,...$) with complex coefficients.

We shall denote $S_{n+1} = (S_n)^k$, $S'_{n+1} = (S'_n)^k$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, and $B_n = \sigma(S_n; S'_n)$, $F_0 = \nu$, $F_{n+1} = N_{F_n, k, 0}$ are measures, $F_n : B_n \to \mathbb{A}$, where

$$N_{\nu,k,x}(A_1 \times ... \times A_k) = \int_{A_k \ni z_k} f_\nu(x; dz_k) \cdots \int_{A_2 \ni z_2} f_\nu(z_3; dz_2) \cdot$$

$$\cdot \int_{A_1 \ni z_1} f_\nu(z_2; dz_1)$$

and for any measure $\mu : B \to \mathbb{A}$ defined on a translation-invariant σ-algebra B of a real vector space S, $f_\mu(x; A) = m(A - x)$, $(x \in S,\ A \in B)$.

F_n can be regarded as a distribution of (an analogue of) a Markov type n-temporal stochastic field with non-commutative transition functions.

Theorem. Let $n \in \mathbb{N}$ and let a function $y : \{1, 2, ..., k\}^n \to S'$ define a linear functional L_y on real vector space

$$S^{\{1,2,...,k\}^n} = \{x : \{1, 2, ..., k\}^n \to S\} \cong$$

$$\cong (S_{n-1})^k = \{x : j \mapsto x(\cdots, j) \in S^{\{1,2,...,k\}^{n-1}}\}$$

by formula $L_y(x) = \sum_{j \in \{1,2,...,k\}^n} y_j(x_j)$ where $y_j = y(j)$ and $x_j = x(j)$ for any multi-index $j \in \{1, 2, ..., k\}^n$.

Then

$$\widetilde{F_n}(L_y) = \prod_{j_n=k}^{1} \prod_{j_{n-1}=k}^{1} \cdots \prod_{j_n=k}^{1} \widetilde{\nu} \left(\sum_{i_n=1}^{j_1} \sum_{i_{n-1}=1}^{j_2} \cdots\cdots \sum_{i_1=1}^{j_n} y(i_n, i_{n-1}, \cdots, i_2, i_1) \right).$$

This construction is motivated by the fact that the case $n = 1$ corresponds to Markov type chains with non-commutative transition functions (cf. [1], where these functions are commutative but complex-valued, hence non-probabilistic, see also [2] on another approach to this complex-valued case), which approximate matrix-valued Maslov-Poisson type measure giving solution to the Dirac electron equation [3] as well as analogous complex-valued measures are giving solution to the Schroedinger electron equation [1] and to the stochastic Schroedinger–Belavkin equation [2].

References

[1] Maslov V.P.: Complex Markov Chains and Feynman Path Integral for Non-linear Equations. — Moskow: Nauka, 1976.

[2] Smolyanov O.G.: Stochastic Schroedinger–Belavkin equation and related Kolmogorov and Lindblad equations.// Vestnik of Moscow Univ., ser. 1: mathematics, mechanics. 1998. No 4. 19-24.

[3] Shamarov N.N.: Functional integral with countably additive measure representing solutions of the Dirac equation.// Trudy Mosk. Matem. Ob., 2005, v.66., 263–276.

О необходимых и достаточных условиях разрешимости первой краевой задачи для дивергентного уравнения

Красногорский А. М. (г. Москва)

Пусть область $G \subset \mathbb{C}$, $1 < p < \infty$. Определим функциональное пространство $\widetilde{W}^1_{p,0}(G)$ как пополнение пространства финитных бесконечно гладких комплекснозначных функций $\mathcal{D}(G) \equiv C_0^\infty(G)$ по норме $\|u\|_{\widetilde{W}^1_{p,0}(G)} \|\nabla u\|_{(L_p(G))^2}$, где $\nabla u \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$, и пространство $\widetilde{W}_p^{-1}(G) = \left(\widetilde{W}^1_{p,0}(G)\right)^*$. Обозначим символом N ядро оператора ∇ в пространстве $L_p(G)$. Таким образом, $N = \mathbb{C}$, если $\operatorname{mes} G < \infty$, и $N = \emptyset$, если $\operatorname{mes} G \infty$. Пусть $L_p(G)/N$ означает фактор-пространство $L_p(G)$ по его подпространству N, наделяемое фактор-нормой $\|u\|_{L_p(G)/N} \inf_{c \in N} \|u + c\|_{L_p(G)}$.

Символами $\mathcal{O}_p(G)$, $\overline{\mathcal{O}}_p(G)$, $H_p(G)$ обозначим, соответственно, подпространства аналитических, антианалитических (т.е. комплексно-сопряженных с аналитическими) и гармонических (комплекснозначных) функций в области G функций. Как обычно, будем называть гармонические функции u и v сопряженными, если они удовлетворяют в области G системе уравнений Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

a) для произвольной функции $u \in L_p(G)$ справедливо неравенство LBB (Ладыженской-Бабушки-Брецци)

$$\|u\|_{L_p(G)/N} \leq M_1 \|\nabla u\|_{\left(\widetilde{W}_p^{-1}(G)\right)^2},$$

где константа $M_1 > 0$ не зависит от функции u;

b) пространство $\mathcal{O}_p(G) + \overline{\mathcal{O}}_p(G)$ замкнуто в $L_p(G)$;

c) для сопряженных гармонических функций $u \in H_p(G)$, $v \in H_p(G)$ справедливо неравенство Харди-Литтльвуда

$$\|v\|_{L_p(G)/N} \leq M_2 \|u\|_{L_p(G)/N},$$

где константа $M_2 > 0$ не зависит от функций u, v.

Как известно, утверждение a) есть необходимое и достаточное условие разрешимости первой краевой задачи для уравнения $\operatorname{div} u = f$ в пространстве $\left(\widetilde{W}^1_{p',0}(G)\right)^2$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Полученная теорема обобщает результат Хогана и Пейна (см. [1]) на случай $p \neq 2$ и областей G с негладкими границами. Доказанная эквивалентность неравенств LBB и Харди-Литтльвуда позволяет дополнить известные результаты о их справедливости.

Литература

[1] Horgan C. O., Payne L. E. *On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz // Arch. Ration. Mech. Anal. Vol. 82, 1983, P. 165–179.*

Structure of the solution space of PDEs

Krasnov Y. (Bar-Ilan University)

A symmetry operators approach to the raising the order of the exponential polynomial solutions to linear PDEs is proposed. A procedure of a construction of general solutions for some classes of partial differential equations (PDEs) will be present.

We touch upon an *"operator analytic function theory"* as the solution of a frequent classes of the PDEs of, when its symmetry operators forms vast enough space.

As an example we discuss a possibilities of an algebraic operations lead in the subspaces of the solution space of PDEs.

In particular, necessary and sufficient conditions are given for a quadratic polynomial to be a divisor of a nonzero harmonic polynomial in R^n.

Алгоритмы построения оптимальных траекторий в моделях экономического роста

Krasovskii A. A. Tarasyev A. M. (г. Екатеринбург)

Для задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом разработаны алгоритмы построения оптимальных траекторий. Актуальность таких задач мотивируется моделями экономического роста. Рассматривается модель с вогнутыми производственными функциями. Управляющие параметры интерпретируются как инвестиции. В качестве функционала оптимизации выбирается интегральный показатель дисконтированного индекса потребления на бесконечном горизонте. В рамках принципа максимума Понтрягина получены достаточные условия оптимальности траекторий роста для систем с вогнутыми гамильтонианами. Проведено исследование качественных свойств соответствующей Гамильтоновой системы: существование и единственность установившегося состояния, характеристика свойств собственных чисел и собственных векторов линеаризованной системы. На основе этого исследования разработаны вычислительные алгоритмы построения оптимальных траекторий, сходящихся к установившемуся состоянию. Модель калибрована на эконометрических данных для экономики США. Компьютерные эксперименты показывают, что модель адекватно описывает пропорции основных экономических факторов и тренды оптимального роста.

Discrete analog of Novikov-Veselov hierarchy and charcterization of Prym varieties.

Krichever

We prove that Prym varieties are characterized geometrically by the existence of a symmetric pair of quadrisecant planes of the Kummer. We also show that Prym varieties are characterized by certain (new) theta-functional equations satisfied on the theta divisor. For the we construct and study a difference-differential analog of the Novikov-Veselov hierarchy.

Явное решение дифференциального уравнения Гойна

Круглов В.Е. (Одесский национальный университет)

Решение уравнения Гойна в окрестности нулевой точки ищется в виде степенного ряда. Получены формулы для коэффициентов этого ряда, что позволило выяснить некоторые асимптотические свойства общего члена этого ряда и получить формулу решения уравнения Гойна. Она состоит из двух гипергеометрических функций и одной новой специальной функции, представленных в виде степенных рядов, а также — из остаточных членов этих рядов.

Helmholtz equation in domains bounded by closed curves and open arcs

Krutitskii P.A. (MSU)

Boundary value problems for the Helmholtz equation are studied in planar domains bounded by closed curves and open arcs. Either Dirichlet or Neumann bondary condition is specified on the whole boundary (i.e. on both closed curves and open arcs). Theorems on existence and uniqueness of a classical solution are proved. The integral representation for a solution in the form of potentials is obtained. Each boundary value problem is reduced to the uniquely solvable Fredholm equation of the 2-nd kind and index zero for the density in potentials. Dirichlet and Neumann problems for the propagative Helmholtz equation are studied for exterior domain [5-8], while problems for dissipative Helmholtz equation [1-4] are studied in both interior and exterior domains. Problems in domains bounded by closed curves and problems in the exterior of open arcs in a plane are particular cases of our problems.

References

1. Krutitskii P.A. // Hiroshima Math.J., 1998, v.28, 149-168.
2. Krutitskii P.A. // ZAMM, 1997, v.77, No.12, p.883-890.
3. Krutitskii P.A. // Zeitschr. Analys. Anwend., 1997, v.16, No.2, p.349-362.
4. Krutitskii P.A. // Int.J.Maths.Math.Sci., 1998, v.21, 209-216.
5. Krutitskii P.A. // Nonlin. Anal., TMA, 1998, v.32, 135-144.
6. Krutitskii P.A. // J. Math. Kyoto Univ., 1998, v.38, No.3, p.439-452.
7. Krutitskii P.A. // Math. Comp. Simul., 2000, v.52, 345-360.
8. Krutitskii P.A. // ZAMM, 2000, v.80, No.8, p.535-546.

On grazing bifurcation of vibro-impact systems

Kryzhevich S. G. (Saint-Petersburg)

The grazing bifurcation has been first described by A. Nordmark. It appears in a vibro-impact system provided the impact velocity of a periodic solution vanishes as the parameter changes. For different examples of vibro-impact systems the chaotic behavior of solutions in the neighborhood of grazing has been established numerically. The main target of this report is to show analytically how the "Smale horseshoes" may appear in the neighborhood of grazing.

Let $0 \in U \subset \mathbb{R}^2$ be the domain, $J = [0, \mu^*]$. Consider the function $f(t, x, y, \mu)$ of the class $C^1(\mathbb{R} \times U \times J \to \mathbb{R})$. Suppose that $f(t, x, y, \mu) \equiv f(t + T, x, y, \mu)$. Consider the mechanical system, described by the equation $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu)$, which can be reduced to the system

$$\dot{x} = y; \qquad \dot{y} = f(t, x, y, \mu),$$

which is defined for $x \geqslant 0$. Define $f_0(t, \mu) = f(t, 0, 0, \mu)$. Let the following impact conditions take place.

A. Let $z(t) = (x(t), y(t))$ be the solution. If $x(t_0) = 0$, then $y(t_0 + 0) = -ry(t_0 - 0)$, where $r \in (0, 1]$.

B. If $z(t_0 - 0) = 0$, $f_0(t_0, \mu) \leqslant 0$, and t_1 be such that $f_0(t, \mu)| \leqslant 0$ for all $t \in I = [t_0, t_1]$, then $z(t)|_I \equiv 0$.

Denote $z = (x, y)$, the obtained vibro-impact system by (1) and the solution of the system (1) with initial data $z(t_0) = z_0$ and a fixed value of the parameter μ by $z(t, t_0, z_0, \mu)$. Consider the Poincaré mapping defined by the formula $F_{\mu,\theta}(z_0) = z(T(\mu) - \theta + 0, -\theta, z_0, \mu)$.

Theorem 1. Let there exists a continuous family of T - periodic solutions

$$\varphi(t, \mu) = (\varphi_x(t, \mu), \varphi_y(t, \mu)) \qquad (\mu \in J)$$

of the system (1), satisfying following properties.

1. $\varphi(t, \mu) \in U$ for all $\mu \in J$, $t \in [0, T]$.
2. Every function $\varphi_x(t, \mu)$ has exactly $N + 1$ zeroes $\tau_0(\mu), \dots, \tau_N(\mu)$ on the segment $[0, T)$.
3. The velocities $y_k(\mu) = \varphi_y(\tau_k(\mu) + 0, \mu))$ are such that $y_0(\mu) > 0$ for $\mu > 0$, $y_0(0) = 0$, $f_0(\tau_0(0), 0) > 0$; $y_k(\mu) > 0$, for all $\mu \in J$, $k = 1, \dots, N$.
4. Denote $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lim\limits_{\mu,\theta \to 0+} DF_{\mu,\theta}(\varphi(-\theta, \mu))$. Suppose that $a_{12} \neq 0$, $a_{11} + a_{22} \neq 0$.

Then there exist such values $\mu_0 > 0$ and $\theta_0 > 0$, that for any $\mu \in (0, \mu_0)$, $\theta \in (0, \theta_0)$ there is a compact set $K = K_{\mu,\theta}$, invariant to the respect of the mapping $F^2_{\mu,\theta}$ and such that the following conditions are satisfied.

I. The mapping $F^2_{\mu,\theta}|_{K_{\mu,\theta}}$ has infinitely many periodic points.

II. The periodic points of the mapping $F^2_{\mu,\theta}$ are dense in $K_{\mu,\theta}$.

III. There is such a point $p_\mu \in K_{\mu,\theta}$, whose orbit $\{F^{2n}_{\mu,\theta}(p_{\mu,\theta}) : n \in \mathbb{Z}\}$ is dense in $K_{\mu,\theta}$.

Parametrix for hyperbolic systems with multiplicity of order higher or equal to three

Kucherenko V. V. Kryvko A. (Instituto Politecnico Nacional - ESFM, Mexico)

Consider a linear real symmetric hyperbolic system of the form

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} A_r(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_r} = f(x, t). \tag{1}$$

The parametrix is constructed under the following conditions. Let $x' = (t, x)$, $N := \{(x', \xi') \mid \det Q(x', \xi') = 0\}$ be the characteristic set of the symbol $Q(x', \xi')$ of system ((1)) and $\Sigma := \{(x', \xi') \in N : \dim KerQ(x', \xi') > 1\}$. The set Σ is called the set of multiplicity and suppose $\Sigma \neq \varnothing$. Suppose $\det Q(x', \xi') = \Pi_{j=1}^{k}(\lambda_j + \eta)$. Denote by Σ_1 the projection of Σ onto $\mathbb{R}^{2n+1}_{x',\xi}$. Evidently, Σ_1 is the set of points (x', ξ) at which some two roots coincide, i.e. $\lambda_m(x', \xi) = \lambda_l(x', \xi)$. Suppose that $\Sigma_1 \cap R^{n+1}_{x'}$ is a compact set. Suppose that Σ_1 is a C^∞-manifold outside the points $\xi = 0$. Let $\lambda_1\left(x', \xi\right)$ be the eigenvalue of multiplicity r of the matrix symbol $A\left(x', \xi\right) = \sum_{j=1}^{n} A_j\left(x'\right)\xi_j$, and suppose that there exist r eigenvectors $e_j\left(x', \xi\right), j = 1, \dots, r$, corresponding to $\lambda_1\left(x', \xi\right)$ in $R^{2n+1}_{x',\xi} \backslash \Sigma_1$. Suppose that $\lambda_1 \in S^1(R^{2n+1}_{x',\xi})$ and $e_j \in S^0\left(\mathbb{R}^{2n+1}_{x',\xi}\right)$ for $j = 1, ..., r$. Now, let $\lambda_2, \lambda_3 \in S^1(R^{2n+1}_{x',\xi})$ be other eigenvalues of the symbol, such that

$$\lambda_1|_{\Sigma_1} = \lambda_2|_{\Sigma_1} = \lambda_3|_{\Sigma_1}; \ \lambda_1 \neq \lambda_2, \ \lambda_1 \neq \lambda_3, \ \lambda_2 \neq \lambda_3 \text{ in } \mathbb{R}^{2n+1}_{x',\xi} \backslash \Sigma_1. \tag{2}$$

Let e_{r+1}, e_{r+2} be the unique eigenvectors corresponding to the eigenvalues λ_2, λ_3 in $R^{2n+1}_{x',\xi} \backslash \Sigma_1$. Suppose that

$$e_{r+1}, e_{r+2} \in S^0\left(\mathbb{R}^{2n+1}_{x',\xi}\right); \ |\xi| \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3} \in S^0\left(\mathbb{R}^{2n+1}_{x',\xi}\right); \tag{3}$$

$$|\xi| \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3}\Big|_{\Sigma_1} \neq 0, \tag{4}$$

and

$$\{\lambda_1, \lambda_2\}|_{\Sigma_1} \neq 0, \{\lambda_1, \lambda_3\}|_{\Sigma_1} \neq 0, \{\lambda_2, \lambda_3\}|_{\Sigma_1} \neq 0. \tag{5}$$

We assume that the symbol $A(x', \xi)$ does not have any other eigenvalues different from λ_2, λ_3 and coincident with λ_1 on the set Σ_1. Suppose that other eigenvalues $\lambda_4, ..., \lambda_k$ of the symbol $A\left(x', \xi\right)$ do not change their multiplicity and belong to $S^0(R^{2n+1}_{x',\xi})$. Also suppose that eigenvectors $e_{r+3}, ..., e_n$ corresponding to this eigenvalues belong to $S^1(R^{2n+1}_{x',\xi})$.

Исследование квазипериодических решений систем дифференциальных уравнений путем перехода к многопериодическим системам

Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. (г. Актобе)

В докладе исследуется задача о существовании периодического решения нелинейной системы по многомерному времени $(\tau, t) \in R \times R^m$ вида

$$D_a x = A(\sigma)x + F(\tau, t, \sigma, x) \tag{1}$$

с оператором $D_a = \partial_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \partial_j$, где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $(j = \overline{1,m})$, $(1, a_1, ..., a_m)$ – постоянный вектор. Вектор-функцию $\sigma = t - a\tau$ назовем характеристикой оператора D_a.

Пусть $n \times n$-матрица $A(\sigma)$ и заданная n-вектор-функция $F(\tau, t, \sigma, x)$ обладают свойствами периодичности и гладкости вида

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C^{(1)}_{\sigma}(R^m), \tag{2}$$

$$F(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega, x) = F(\tau, t, \sigma, x) \in C^{(0,1,1,1)}_{\tau,t,\sigma,x}(R \times R^m \times R^m \times R^n_{\Delta}) \tag{3}$$

для всех $k \in Z^m$, где $\theta(\sigma)$ – положительно определенная ω-периодическая и непрерывно дифференцируемая функция, причем $\theta(0) = \omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ – рационально несоизмеримые постоянные, $R^n_{\Delta} = \{x \in R^n \mid \ |x| \leq \Delta = const > 0\}$.

Предположим, что действительные и мнимые части всех собственных значений $\lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) + i\beta_j(\sigma)$, $(j = \overline{1,n})$ матрицы $A(\sigma)$ обладают свойствами знакоопределенности, разделенности, ω-периодичности, непрерывной дифференцируемости и некритичности. Следовательно, однородная система, соответствующая системе (1), не имеет $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических решений, кроме тривиального.

Тогда система (1) удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$x(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)} K(\tau,\sigma,h_0)F(h_0,h,\sigma,x(h_0,h,\sigma))ds, \qquad (4)$$

где $K(\tau,\sigma,s) = [X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),\sigma)-X^{-1}(\tau,\sigma)]^{-1}X^{-1}(s,\sigma)$ – ядро, интегрирование проводится вдоль характеристики $h_0=s$, $h=\sigma+as$ оператора D_a.

Итак, задача о периодических решениях системы (1) свелась к решению интегрального уравнения (4) в пространстве многопериодических функций. Для этого определим оператор $(Tx)(\tau,t,\sigma) = \int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)} K(\tau,\sigma,h_0)F(h_0,h,\sigma,x(h_0,h,\sigma))ds$ и устанавливаем, что оператор имеет единственную неподвижную точку в пространстве непрерывных, равномерно ограниченных, $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических n-вектор-функций $x(\tau,t,\sigma)$ с нормой $\|x\|=\sup|x(\tau,t,\sigma)|$, где $|\cdot|$ – знак евклидовой метрики.

Теорема. При выполнении условий (2), (3) и отсутствии периодического решения соответствующей однородной системы, кроме нулевого система (1) допускает единственное $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическое решение.

Результат о существовании квазипериодического решения системы, полученной из (1) при переходе на характеристику оператора D_a, следует из теоремы при $t=a\tau$.

Асимптотическое решение дискретных задач оптимального управления[1]

Курина Г.А. , Некрасова Н.В. (ВГЛТА)

Рассматриваются следующие три типа дискретных задач оптимального управления с малым параметром:

1. $J_\varepsilon(u)=\sum\limits_{k=0}^{N-1} F_k(y(k),\varepsilon z(k),u(k)) \to \min\limits_u,$

$y(k+1)=f_k(y(k),\varepsilon z(k),u(k)),$

$z(k+1)=g_k(y(k),\varepsilon z(k),u(k)),\ k=\overline{0,N-1},$

$y(0)=y(N),\ z(0)=z(N),$

2. $J_\varepsilon(u)=F_N(y(N))+\sum\limits_{k=0}^{N-1} F_k(y(k),z(k),u(k)) \to \min\limits_u,$

$y(k+1)=f_k(y(k),z(k),u(k)),$

$\varepsilon z(k+1)=g_k(y(k),z(k),u(k)),\ k=\overline{0,N-1},$

$y(0)=y^0,\ z(0)=z(N),$

[1]Работа частично поддержана грантами РФФИ: 06-01-00296, 05-06-80237.

$$3.\ J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^{N} F_k(x(k)) + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} G_k(x(k), u(k)) \to \min_u,$$

$$x(k+1) = f_k(x(k)) + \varepsilon^p g_k(x(k), u(k)),\ k = \overline{0, N-1},\ x(0) = x^0,$$

где $y(k)$, $x(k) \in R^n$, $z(k) \in R^m$, $u(k) \in R^r$, число шагов N фиксировано, $\varepsilon > 0$ - малый параметр. Функции F_k, G_k, f_k, g_k принимают значения в соответствующих пространствах и предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Для задач 1-3 построено асимптотическое разложение решения в виде рядов по целым неотрицательным степеням малого параметра, доказана однозначная разрешимость возмущенной задачи в окрестности нулевого приближения для управления, получены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению задачи по управлению, траектории и функционалу, а также доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим асимптотическим приближением оптимального управления.

Новый подход к математическому моделированию процесса высокоскоростного упругопластического деформирования

Курохтин В. Т. (Московский Государственный Технический Университет им.Н.Э.Баумана)

Результаты экспериментов показывают наличие вихревых движений в зоне контакта, образующихся при соударении медных образцов при относительных скоростях соударения от 200м/сек до 500м/ сек. Эти данные подтверждают гипотезу, сформулированную автором о появлении вихрей в процессе импульсного деформирования и делают актуальным построение матемактической модели данного процесса. Автором отмечалось также большое сходство феномена возникновения вихрей при высокоскоростном ударе с явлением турбулентности, описанным А.Н.Колмогоровым.Такой подход ведёт к отказу от детерминизма, свойственного механике деформируемого твёрдого тела. Приходится также отказаться от представления вектора перемещения в виде непрерывной вектор-функции времени и начальных данных. Следуя Е.Оровану ,автор предлагает отказаться от уравнения состояния в виду функции напряжения от деформации.иместо такого уравнения предлагается использовать зависимость скорости деформации, поглощаемой в процессе деформирования.Поэтому начальное условие в математической постановке задачи логичнее задавать как некоторую известную функцию энергии, выделяемой в зоне контакта взаимодействующих тел, от времени. Подобный подход использовался Л.И. Седовым при решении задачи о сильном взрыве. В работах А.Н. Колмогорова и Л.Д. Ландау отмечено,что энергия диссипации при турбулентности пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости.А при построении модели упругопластического деформирования предлагается ввести кроме параметра,аналогичного коэффициенту вязкости, второй параметр, характеризующий диссипацию энергии в связи с трансформацией кристаллической решётки.

Итерационное решение смешанных гибридных схем МКЭ для вариационных неравенств

Лапин А.В.

Рассматриваются вариационные неравенства с линейным или квазилинейным основным дифференциальным оператором второго порядка и ограничениями на решение внутри или на границе области. Классическими примерами таких вариационных неравенств служат задача о препятствии и задача Синьорини.

Далее рассматриваем задачу Синьорини с линейным основным оператором: найти $u \in K = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0$ на $\Gamma_D,\ u(x) \geqslant 0$ на $\Gamma_C\}$:

$$\int\limits_\Omega a(x)\nabla u \nabla(q-u)dx \geqslant \int\limits_\Omega f(q-u)dx\ \forall q \in K. \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – многоугольная область, $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C}$, $\operatorname{mes}\Gamma_D > 0$.

Пусть $\bar\Omega = \bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \bar\Omega_1 \cap \bar\Omega_2 = \Gamma$. Строим конформные триангуляции Ω_k, частично согласованные на Γ.

Используя смешанную гибридную формулировку задачи (1) и конечные элементы первого порядка, получаем смешанную гибридную схему МКЭ, алгебраическая форма которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} M & B^T & G^T \\ B & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar v \\ \bar u \\ \bar\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -C(\bar\lambda) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar f \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $M = \operatorname{diag}(M_1, M_2), B = \operatorname{diag}(B_1, B_2), G = \operatorname{diag}(G_1, G_2)$. Многозначный максимально монотонный оператор $C = C_1 + C_2$, где C_1 “отвечает” за односторонние ограничения на Γ_C, в то время как C_2 – за условия “непрерывности” решения на Γ.

Задача (2) имеет единственное решение $(\bar v_1, \bar v_2, \bar u_1, \bar u_2, \bar\lambda_1, \bar\lambda_2)$.

После исключения переменных $\bar u_k,\ \bar v_k,\ k = 1, 2$ из (2) получаем конденсированную систему

$$P\bar\lambda + C(\bar\lambda) \ni \bar g, \tag{3}$$

с симметричной и положительно определенной матрицей P.

Для решения (3) используем метод расщепления, сходимость которого обоснована и решается вопрос выбора оптимальных итерационного параметра τ. Реализация итерационного метода состоит в решении простого нелинейного включения и задачи с линейным седловым оператором

$$\begin{pmatrix} M & B^T & G^T \\ B & 0 & 0 \\ G & 0 & -\dfrac{1}{\tau}E \end{pmatrix}, \quad E - \text{ единичная матрица.}$$

Условия отсутствия глобальных положительных решений эллиптических неравенств в R^N для общей правой части

Лаптев Г.И. (Российский государственный социальный университет, Москва)

Пусть на функциях $u(x)$, $x \in R^N$, $N \geq 2$, определен дифференциальный оператор A с частными производными. Задача об отсутствии глобальных неотрицательных решений неравенства $Au \geq u^p$ привлекает внимание многих исследователей. Значительное развитие эта теория получила в монографии Э. Митидиери и С.И. Похожаева (Труды МИАН, т.234, 2001). Естественно искать обобщения для неравенств вида $Au \geq f(u)$. Предположим, что функция $f(u)$ имеет различные асимптотики при $u \to +0$ и $u \to +\infty$. Более точно, введем функцию $f_0(u) \equiv \{u^{p_0}: \ u \leq 1; \ u^{p_1}: \ u \geq 1\}$.

Теорема 1. *Пусть $f(u) \geq cf_0(u)$ с некоторой постоянной $c > 0$. Неравенство $-\Delta u \geq f(u)$ в R^N не имеет глобальных положительных решений, если $p_0 \leq N/(N-2)$. При этом степень p_1 может быть любым числом.*

Утверждение показывает, что существенной является только степень p_0, которая характеризует поведение функции $f(u)$ при $u \to +0$. Степень p_1 роли не играет. Подчеркнем, что обе степени p_0 и p_1 могут быть отрицательными числами. Для функции $f(u) = u^p(a^2 + u^q)^{-1}$ условия отсутствия глобальных решений неравенства $-\Delta u \geq f(u)$ можно представить в виде: $p \leq N/(N-2)$; $q > 0$.

Теорема 1 допускает расширение на более общие правые части вида $f(x,u)$. Пусть для всех достаточно больших $R \to \infty$ на множестве $R < |x| < 2R$ справедливы соотношения: $f(x,u) \geq c_0|x|^{\alpha_0}u^{p_0}$, если $u \to +0$, и $f(x,u) \geq c_1|x|^{\alpha_1}u^{p_1}$, если $u \to +\infty$. Неравенство $-\Delta u \geq f(x,u)$ не имеет глобальных положительных решений, если $\alpha_0 > -2$, $\alpha_1 > -2$, $p_0 \leq (N+\alpha_0)/(N-2)$, $p_1 \in R$. Например, для функции $f(x,u) = |x|^\alpha u^p(|x|^\beta + u^q)^{-1}$ при $p, q > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ приведенные выше условия принимают такой вид: $\alpha - \beta > -2$, $p \leq (N + \alpha - \beta)/(N-2)$, $q \geq 0$.

Аналогичные результаты справедливы для квазилинейных дифференциальных операторов в дивергентной форме.

Feynman diagrams and topological conformal field theories

Lazarev A. (Paris)

The relationship between operadic algebras and various moduli spaces goes back to Kontsevich's seminal papers [4] and [5] where graph homology was also introduced.

Kontsevich proposed two constructions producing classes in the ribbon graph complex. The first, 'direct' construction, has as the input, a $\mathbb{Z}/2$-graded A_∞-algebra with an invariant scalar product. The output is a collection of homology classes in the ribbon graph complex (or a corresponding collection of cohomology classes in the moduli spaces of Riemann surfaces with marked points). This construction has now been well-understood from various standpoints, see, e.g. [3], [1].

The other, 'dual' construction starts with a differential graded contractible Frobenius with an odd scalar product and gives rise to a collection of cohomology classes in the ribbon graph complex. By pairing the direct and the dual construction it is possible to prove the non-triviality of both; this leads to the so-called matrix integrals.

The dual construction was motivated by the combinatorics of Feynman graphs in the quantum Chern-Simons theory. The purpose of this talk, which is joint work with J. Chuang, is to give a conceptual and general formulation of Kontsevich's 'dual construction' from the point of view of modular operads (cf. [2]) or, equivalently, topological conformal field theories. We introduce the notion of a 'dual Feynman transform' $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{O})$ for a differential graded modular operad $\mathcal{O}$. It turns out that that $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{O})$ is itself a modular operad. Moreover, the vacuum part of $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{O})$ (which corresponds to graphs without legs) is indeed **k**-dual to $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ while the parts corresponding to graphs with legs are contractible, in marked contrast with $\mathcal{F}(\mathcal{O})$.

Furthermore, the algebras over $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{O})$ are precisely $\mathcal{O}$-algebras supplied with a contracting homotopy. Applying this construction to the modular operad OTFT whose algebras are (noncommutative) Frobenius algebras we recover Kontsevich's dual construction. In fact we find that its original formulation needs to be modified in order for it to produce cohomology classes. This can be done in several ways. One should either impose a rather stringent condition on the Frobenius algebra or modify the ribbon graph complex by allowing one to contract certain (or all) loops. That corresponds to compactifying the moduli space of metric ribbon graphs and the dual construction in fact produces cohomology classes on these compactifications.

We also introduce a certain generalization of the dual Feynman transform for a modular operad $\mathcal{O}$ whose algebras are $\mathcal{O}$-algebras supplied with a decomposition into a direct sum of its homology and the contractible part. Note that the de Rham algebra on a smooth manifold has such a structure as follows from Hodge theory. This suggests a possible application to Chern-Simons theory on general manifolds.

References

[1] K.Costello Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories. arXiv:math.QA/0412149

[2] E. Getzler, M. M. Kapranov. Modular operads Compositio Math. 110 (1998), no. 1, 65-126.

[3] A. Hamilton, A. Lazarev. Characteristic classes of A_∞-algebras. arXiv:math.QA/0608395.

[4] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. First European Congress of Mathematics, Vol 2 (Paris, 1992), 97-121, 1994.

[5] M. Kontsevich. Formal noncommutative symplectic geometry. The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992, pp. 173-187, 1993.

Об одной краевой задаче для разнопорядковых дифференциальных уравнений на геометрическом графе

Лазарев К. П. (Воронежский госуниверситет, г. Воронеж)

Пусть Γ - геометрический граф в $\mathbb{R}^3$ (см. [1]), $J(\Gamma)$, $\partial\Gamma$ и $V(\Gamma)$ - множества внутренних, граничных и всех вершин, $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ - множество ребер, Γ^0 - объединение точек всех ребер из E, $E(a)$ - множество ребер из E, примыкающих к вершине a. Пусть множество ребер E разбито на два подмножества E_1 и E_2, образующих подграфы Γ_1 и Γ_2 и заданы неотрицательные функции $p \in C^2(\Gamma^0)$ и $q \in C^1(\Gamma^0)$ такие, что $\inf\limits_{x\in\Gamma_1^0} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in\Gamma_2^0} q(x) > 0$ и $p(x) \equiv 0$ на Γ_2^0.

Введем дифференциальное выражение $l(u)$, имеющее вид $-(q(x)u')'$ на Γ_2^0 и $(p(x)u'')'' - (q(x)u')'$ на Γ_1^0, и рассмотрим краевую задачу

$$l(u) = f, \ f \in C(\Gamma^0), \tag{1}$$

$$u_{\gamma_i}(a) - u_{\gamma_j}(a) = 0, \ \gamma_i, \ \gamma_j \in E(a), \quad i < j \ , \ a \in J(\Gamma), \tag{2}$$

$$(p_\gamma u''_\gamma)(a) = 0, \quad \gamma \in E_1(a), \ a \in V(\Gamma), \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma\in E_1(a)} (p_\gamma u''_\gamma)'(a) - \sum_{\gamma\in E(a)} (q_\gamma u'_\gamma)(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \tag{4}$$

$$u_\gamma(a) = 0, \quad \gamma \in E(a), \ a \in \partial\Gamma. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть подграф Λ образован множеством точек тех ребер из Γ_1, на которых $q(x) \equiv 0$, и $J(\Lambda) = \emptyset$.*

Тогда размерность пространства решений однородной задачи равна числу компонент связности множества $\Gamma \setminus \Lambda$, не примыкающих к $\partial\Gamma$.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны.*

1^0 *Для однородного уравнения с условиями (2)-(4) выполнен принцип максимума.*

2^0 *Задача (1)-(5) невырождена.*

3^0 *Граф Γ не имеет компонент множества $\Gamma \setminus \Lambda$, не примыкающих к $\partial\Gamma$.*

Для невырожденной задачи построена функция Грина, и установлена ее симметричность, непрерывность, неотрицательность.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах // М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 272с. - ISBN 5-9221-0425-X.*

О преобразовании уравнений Навье-Стокса к угловым переменным

Лебедев В. И., Ковалишин А. А. (г. Москва)

Известно, что при турбулентном течении процессы переноса энергии и диссипации сильно разнесены по масштабам. Для уравнений Навье-Стокса в существующем виде, когда в качестве переменных выступают компоненты скорости, такое разделение провести не представляется возможным из-за их равноправного вхождения в уравнения. Удобно преобразовать уравнения Навье-Стокса таким образом, чтобы в них входили искомые величины, имеющие разные характерные масштабы их изменений. В докладе приводятся преобразования уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости относительно новых величин, различных по масштабам изменения. Для такого видоизменения воспользуемся тем, что энергия потока, которая в основном определяется модулем скорости, меняется относительно слабо, а диссипация в основном определяется изменением направления скорости движения жидкости. Обозначим через u модуль скорости $\vec{V}$, через θ и φ – два угла Эйлера при преобразовании декартовой системы координат. Заменяя искомые переменные: $\vec{V} = ue, e = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, где $u = u(x,y,z,t), \theta = \theta(x,y,z,t), \varphi = \varphi(x,y,z,t)$, получим новую форму уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности относительно переменных u, θ, φ.

Оказалось, что в уравнении для $\frac{\partial u}{\partial t}$ отсутствуют первые производные по пространству от u, а в уравнениях для $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ содержатся вырождающиеся на границах прилипания области нелинейные эллиптические операторы второго порядка. В связи с этим возникли задачи о постановке краевых условий для функций θ и φ. Для преобразованных уравнений получены качественно правильные предельные решения задачи течения жидкости в трубе (задача Пуазейля) для случая ламинарного и развитого турбулентного режимов течения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-00582 и программы РАН "Теоретические проблемы современной математики"(проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики").

Монодромия и изомонодромные деформации многомерных фуксовых систем

Лексин В.П. (КГПИ, Коломна)

Рассматривается специальный класс интегрируемых линейный фуксовых систем на комплексных линейных пространствах $\mathbb{C}^n$. Системы из этого класса определяются по конечному набору неколлинеарных векторов $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}^n$, порождающих $\mathbb{C}^n$ и имеют следующий вид $d\Psi(z) = \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{B_\alpha d(\alpha, z)}{(\alpha, z)}\right)\Psi(z)$, где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, B_α, $\alpha \in R$ являются линейными операторами на $\mathbb{C}^n$ ранга один или два и независят от переменных $z_1, \dots, z_n$ (их будем называть коэффициентами фуксовой системы). Здесь (α, z) есть стандартное эрмитово произведение векторов линейное по второму аргументу. Функция Ψ принимает значения в $\mathbb{C}^n$. Приводится описание представлений монодромии определенных фуксовых систем. Обсуждаются различные варианты постановки задачи об изомонодромной деформации таких систем. Если исходная система и, следовательно, её монодромия гладко зависят от некоторых параметров, матрицам монодромии разрешается гладко изменяться в зависимости от параметров деформации, но при сохранении типа представления. Например, представление монодромии системы может быть представлением Бурау и при деформации системы оно остаётся представленитv Бурау, однако параметр представления Бурау теперь оказываются функцией от параметров деформации и, вообще говоря, изменяется при деформации. Доказано, что в классе описанных выше фуксовых систем с коэффициентами ранга один не существует нетривиальных изомонодроиных деформаций, то есть деформаций отличных от умножения всех параметров системы на общий скалярный множитель, зависящий от параметров деформации. Работа ведется при содействии гранта президента России поддержки ведущих научных школ НШ-6849.2006.1.

Список литературы

[1] V.P.Leksin, *Monodromy of Cherednik-Kohno-Veselov connections.* IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **9**(2007), 255-268.

[2] R.Randell, *Lattice-isotopic arrangements are topologically isomorphic.* Proc.London Math.Soc. **19**, no.4(1989), 555-559.

[3] A.P.Veselov, *On geometry of a special class of solutions to generalized WDVV equations.* in "Intagrability: Seiberg-Witten and Whithem equations"(Edinburg 1998), Gordon and Breach, Amsterdam 2000, 125-136.

Гомоклиническая динамика шестимерных гамильтоновых систем.

Лерман. Л. М. (г. Нижний Новгород)

В докладе обсуждается динамика 6-мерной гамильтоновой системы в окрестности гомоклинической траектории к особой точке. Для системы с гамильтонианом H имеет шесть типов невырожденных особых точек, пять из которых (седло, седло-фокус, седло-седло-центр, седло-фокус-центр, седло-центр-центр) допускают существование гомоклинических траекторий. Гомоклиническая динамика в случае седла и седло-фокуса аналогична 4-мерному случаю. В частности, 2-эллиптических периодических траекторий здесь нет.

В случае седло-центра и седло-фокус-центра есть общий результат (см. [1]): при некоторых условиях общего положения каждая ляпуновская периодическая траектория (они заполняют двумерное центральное многообразие для p) имеет 4 трансверсальные гомоклинические траектории. Однако, в случае седло-центра, из-за наличия глобального центрального 4-мерного многообразия, структура аналогична окрестности петли в 4-мерном случае (Кольцова-Лерман, Grotta Ragazzo). В частности, здесь также нет 2-эллиптических периодических траекторий.

В случае седло-фокус-центра ситуация значительно богаче, в частности, справедлива следующая

Теорема 1. Существует последовательность непересекающихся интервалов I_n значений гамильтониана, стремящаяся к $H(p)$, для значений в которых система с гомоклинической траекторией к седло-фокус-центру на соответствующем уровне гамильтониана имеет 2 эллиптическую периодическую траекторию.

В случае гомоклинической траектории к седло-центр-центру (коразмерность 4) справедлив результат, аналогичный [2]

Теорема 2. При некотором условии общего положения на 4-мерном центральном многообразии точки p существует множество инвариантных 2-торов положительной меры, для которого каждый инвариантный тор имеет не менее восьми трансверсальных гомоклинических траекторий.

Автор благодарит РФФИ за финансовую поддержку (гранты 07-01-00715а, 07-01-00566а, 06-01-72023-МНТИа)

Литература

[1] Koltsova O. Yu., Lerman L. M. *Int. J. Bifurcation& Chaos, V.6, No.6 (1996), 991-1006.*

[2] Koltsova O. Yu., Lerman L. M., et al. *Physica D 201 (2005), 268-290.*

Многоточечные полурегулярные краевые задачи

Лесных А. А. (г. Москва)

Рассматривается следующая многоточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$l(y,\lambda) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x,\lambda)y = 0, \tag{1}$$

$$U_j(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_{jkl}(\lambda)y^{(k-1)}(h_l) = 0, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{2}$$

где $p_s(x,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{s} p_{\nu s}(x)\lambda^{\nu}$, $p_{\nu s}(x) \in C^{\infty}[0,1]$, $p_{ss}(x) = \mathrm{const}, s = 1,\dots,n$, $p_{nn} \neq 0$, $a_{jkl}(\lambda)$ – полиномы, $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = 1$. В случае двухточечной краевой задачи $m = 1$ в работе [4] определено понятие регулярности. Действуя аналогичным методом, можно определить регулярность этой задачи в правой и левой полуплоскостях. Регулярность определяется в терминах неравенства нулю некоторых определителей, которые явно выписываются через нули характеристического определителя и коэффициенты $a_{jkl}(\lambda)$.

Также, в [4] по двухточечной краевой задаче был построен оператор, линеаризующий эту задачу. Метод [4] применяется без существенных изменений к многоточечной задаче (1), (2), и строится оператор $\mathcal{H}_r$ в пространстве $\mathcal{W}^r_{p,U} \oplus \mathbb{C}^N$, линеаризующий задачу (1), (2).

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Оператор $\mathcal{H}_r$ (оператор $-\mathcal{H}_r$) порождает C_0-полугруппу тогда и только тогда, когда задача (1), (2) регулярна в правой (левой) полуплоскости.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{H}_r$ порождает C_0-группу тогда и только тогда, когда задача (1), (2) регулярна.

Краевая задача вида (1), (2) и оператор вида $\mathcal{H}_r$ возникают в теории функционально-дифференциальных уравнений, а результаты, полученные в данной работе, используются для получения оценок решений широкого класса функционально-дифференциальных уравнений. Кроме того, теорема 1 используется для доказательства теорем устойчивости в теории управления. Например, для существенного усиления результатов работ [1],[2],[3]. Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова.

Литература

[1] Chen G., Krantz S. G., Ma D. W., Wayne C. E., West H. H. *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation* in Ed. Sung J. Lee "Operator Methods for Optimal Control Problems" // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1987, 108, 67-96. New York Marcel Dekker Inc.

[2] Grabowski P. *Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems using Shkalikov's theory* // Opuscula Mathematica, 2006, v.26, N1, 45-97

[3] Guo B.-Z., Yu R. *The Riesz basis property of discrete operators and application to Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control* // IMA J. of Mathematical Control and Information, 2001, v.18, 241-251

[4] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1983, вып.9, с.190-229

Теорема Канторовича и обоснование асимптотики решений дифференциальных уравнений 2-го порядка с большими высокочастотными слагаемыми

Левенштам В. Б. (г. Ростов-на-Дону)

В докладе рассматривается задача о периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с высокочастотными слагаемыми, среди которых имеются пропорциональные частоте. Построена усредненная (предельная) задача и полная асимптотика периодического решения возмущенной (исходной) задачи. С помощью теоремы Л.В. Канторовича об операторном варианте метода Ньютона осуществлены обоснование метода усреднения и оценки погрешностей построенных асимптотик. Исследован вопрос об устойчивости (и неустойчивости) периодического решения исходной задачи. Эффективность полученного результата продемонстрирована на классическом примере перевернутого маятника с вибрирующим подвесом.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00287-а).

Южный научный центр РАН

On weak coercivity in the Sobolev spaces $W_p^l(\mathbb{R}^n)$

Limansky D. V. (Donetsk, Ukraine)

Let $l := (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $D_j := -i\partial/\partial x_j$, $D := (D_1, \dots, D_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Let $P(x, D)$ be differential operator of the form

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

and let $P^l(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^\alpha$ be its l-principal part.

Definition 1. An operator $P(x, D)$ of form (1) is said to be l-quasielliptic if $P^l(x, \xi) \neq 0$ whenever $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

We describe all vectors l such that there exist l-quasielliptic systems.

Definition 2.[2] An operator $P(D)$ of form (1) is said to be weakly coercive in the (anisotropic) Sobolev space $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, if and only if the estimate

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|P(x, D) f\|_p + C_2 \|f\|_p \tag{2}$$

holds with constants $C_1, C_2 > 0$ not depending on $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De Leeuw and Mirkil [1] proved that an operator $P(D)$ with constant coefficients of order $l \ge 2$ in $n \ge 3$ variables is weakly coercive in the isotropic Sobolev space $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ (i.e., if $l = l_1 = \dots = l_n$) if and only if $P(D)$ is and elliptic operator. A generalization of this criterion to the anisotropic Sobolev space $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ has been obtained in [2].

We will discuss another generalization of the de Leeuw and Mirkil criterion for operators $P(x, D)$ with variable coefficients. The proof is essentially based on topological reasonings.

We also describe wide classes of weakly coercive in $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ operators that are not l-quasielliptic for almost all vectors l.

This is a joint talk with Mark Malamud based on [3].

References

[1] De Leeuw K., Mirkil H. *Illinois J.Math.*, **8**, 1964, 112-124.

[2] Limanskii D.V., Malamud M.M. *DAN*, **397**, 2004, No.4, 453-458.

[3] Limanskii D.V., Malamud M.M. *DAN*, 2007, to appear.

Boundary stabilization of the wave equations by means of a rotated multiplier method

Jean-Pierre Lohéac (École centrale de Lyon, Institut Camille-Jordan)

The rotated multipliers method is performed in the case of the boundary stabilization of the wave equation by means of a (linear or non-linear) Neumann feedback. This method leads to new geometrical cases concerning the "active" part of the boundary where the feedback is applied. Due to mixed boundary conditions, these cases generate singularities. Under a simple geometrical condition concerning the orientation of boundary, we obtain stabilization results.

References

[1] Bey, R., Lohéac, J.-P., Moussaoui, M., it Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation, 1999 *J. Math. pures et appli.*, **78**, 1043-1067.

[2] Komornik, V., Zuazua, E., 1990, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, 1990, J. Math. pures et appl., **69**, 33-54.

[3] Osses, A., 2001, *A rotated multiplier applied to the controllability of waves, elasticity and tangential Stokes control*, 2001, SIAM J. Control Optim., **40**, no 3, 777-800.

Преобразование Шура для обобщенной функции Каратеодори в точке $z_1 \in \mathbb{D}$

Лопушанская Е. В. (г. Воронеж)

Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Функция f называется обобщенной функцией Каратеодори, если она мероморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и ядро $K_f = \frac{f(\lambda)+\overline{f(\mu)}}{1-\lambda\bar{\mu}}$ имеет конечное число отрицательных квадратов.

В работе (см. [1]) было определено преобразование Шура для обобщенной функции Неванлинна в точке $z_1 \in \mathbb{C}_+$. Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Неванлинны с помощью дробно-линейного преобразования аргумента. Мы определяем преобразование Шура для обобщенной функции Каратеодори в точке $z_1 \in \mathbb{D}$.

Литература

[1] D.Alpay, A.Dijksma, and H.Langer, J_l- *unitary factorization and the Schur algorithm for Nevanlinna functions in an indefinite setting*, to appear in Lin. Algebra Appl.

Групповой подход в динамике сплошной среды

Лукацкий А.М.

В докладе разбирается подход к построению решений уравнений математической физики, основанный на погружении конфигурационного пространства описываемого физического объекта в некоторую бесконечномерную группу Ли-Фреше G с моделью на борнологическом пространстве, отождествляемым с ее алгеброй Ли g. Предполагается, что в алгебре Ли g имеется скалярное произведение, которое индуцирует на группе Ли G лево-(или право-) инвариантную метрику в зависимости от физического смысла задачи. Геодезические этой метрики являются решениями уравнений Эйлера на группе Ли G.

В терминах алгебры Ли g и коалгебры формулируются достаточные условия продолжения решений уравнений Эйлера на бесконечность во времени.

Далее в докладе рассматриваются уравнения Эйлера на группе диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема ориентированного риманова многообразия M, являющегося областью течения идеальной несжимаемой жидкости. В качестве M может выступать либо компактное многообразие с краем, либо R^n, в последнем случае рассматриваются векторные поля, быстро убывающие на бесконечности. Берется разложение в некотором ортогональном базисе $\{e_k\} \subset g$ поля скоростей $u^t = \sum_k u_k^t e_k$ идеальной несжимаемой жидкости и для коэффициентов u_k^t строятся оценки производных по времени.Стартуя от оценок для уравнений Эйлера, получаются аналогичные оценки и для вязкой несжимаемой жидкости (решений уравнений Навье-Стокса).

Кратные ряды Фурье-Уолша в пространствах Лоренца

Лукомский С. Ф. (г. Саратов)

Пусть $\psi(t)$ – функция Лоренца, т.е. положительная, убывающая, выпуклая на $(0,1]$ функция такая, что $\int_0^1 \frac{dt}{t\psi^p(t)} < \infty$ $(1 \le p < \infty)$. Определим пространства Лоренца

$$\Lambda_{\psi,p}([0,1)^d) = \left\{ f \in L(0,1)^d : \|f\|_{\psi,p} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\psi(t)} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим вопросы сходимости кратных рядов Фурье-Уолша в пространствах Лоренца $\Lambda_{\psi,p}([0,1)^d)$ с дополнительным условием $\psi(t^2) \le C\psi(t)$. Такие пространства Лоренца являются промежуточными между $L_p([0,1)^d)$ и $L_\infty([0,1)^d)$. Мы докажем, что для прямоугольных частичных сумм

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = S_{n_1,n_2,\dots,n_d}(f,\mathbf{x})$$

d-кратного ряда Фурье-Уолша функции $f \in \Lambda_{\psi,p}([0,1)^d)$ справедливо неравенство

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\Lambda_{\tilde{\psi},p}} \le C\|f\|_{\Lambda_{\psi,p}},$$

где

$$\tilde{\psi}(x) = \left(\log\frac{2}{x}\right)^{d-1} \int_x^1 \frac{\psi(t)}{t} dt.$$

Полученная оценка является точной в том смысле, что для любой функции $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \to 0$ существует функция $f \in \Lambda_{\psi,p}([0,1)^d)$ такая, что нормы $\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\Lambda_{\tilde{\psi}\alpha,p}}$ неограничены для кубических сумм.

Преобразование Радона радиальных функций и операторы преобразования Пуассона и Сонина

Ляхов Л.Н. (Воронежская гос.технологическая академия)

Преобразование Радона $R[\cdot]$ приспособлено для функций многих переменных, но, как оказалось, для радиальных функций его можно рассматривать как преобразование Радона-Киприянова (см. [1]) $K_\gamma[\cdot]$ с индексом $\gamma = n-1$. При этом имеет место формула

$$R[f(|x|)](\theta;p) = |\Sigma_n| K_{n-1}[f](p),$$

где $|\Sigma_n|$ — площадь сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$, а переменные x, ξ, и p связаны уравнением плоскости (в $\mathbb{R}^n$) $\langle x,\xi\rangle = p$, $|\xi| = 1$.

Для преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной справедливы формула представления через cos-преобразование Фурье и преобразование Ганкеля

$$K_\gamma[f](p) = F_c H_\gamma[f](p).$$

Однако суперпозиция преобразований Фурье и Ганкеля (применяемых к четным функциям), известны (см.[2]) и называются операторами преобразования Сонина и Пуассона, соответственно

$$S_\gamma = F_c\ H_\gamma, \quad \Pi_\gamma = H_\gamma\ F_c.$$

Обозначим через S_+ подпространство пространства Л.Шварца, состоящее из четных функций. Опираясь на исследования работы [2], получаем следующий результат.

Т е о р е м а. Пусть $f \in S_+$. Имеют место следующие формулы.

$R[f(|x|)](p) = |\Sigma_n|\ S_{n-1}[f(r)]$;
$\Pi_{n-1}\ R[f(|x|)] = |\Sigma_n|\ f(|x|)$;
$B\Pi_{n-1}[f(|x|)](p) = \Pi\left[\frac{d^2 f(r)}{dr^2}\right]$, $\frac{d^2 f(r)}{dr^2}\ R[f(r)] = |\Sigma_n|\ S_{n-1}[Bf(r)]$, где B сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\ \frac{d}{dr}$.

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона. // ДАН. 1998. том 360. N 2, с/157-160.

2. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы. СМЖ. 1980 т. XXI, N 1, с. 86-97.

Проекционно-разностные схемы для нестационарного уравнения с вырождающимся эллиптическим оператором четвертого порядка

Ляшко А. Д. (г. Казань)

Рассматриваются проекционные и проекционно-разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений с вырождающимся одномерным оператором четвертого порядка. Сначала строятся полудискретные схемы с дискретизацией по МКЭ эллиптической части. Схемы строятся с учетом выделения особенности, связанной с вырождением коэффициента. Это позволяет получить оценки погрешности, адекватные регулярному случаю. Для полученной полудискретной схемы предлагается разностная схема с дискретизацией временной переменной. Полученная проекционно-разностная схема исследуется с помощью критериев устойчивости операторно-разностных схем А.А. Самарского, А.В. Гулина. Исходные задачи формулируются в абстрактной форме, что позволяет исследовать вопросы разрешимости на основе общих теорем Ж.-Л. Лионса. Приведены оценки скорости сходимости.

О классах существования и единственности неограниченных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

Лысухо П. В. (Новгородский государственный университет)

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \mathrm{div}_x\,\varphi(u) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R})$, $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$. Известно, что при $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ задача (1) имеет единственное ограниченное обобщенное энтропийное решение (о.э.р.) решение в смысле С.Н.Кружкова [1]. Оказалось (см. [2,3]), что в классе локально ограниченных о.э.р. нарушаются ключевые свойства существования и единственности о.э.р. В работе [3] найдены классы корректности задачи Коши в случае степенного ограничения на рост вектора потока. В настоящей работе рассмотрен более общий случай когда вектор потока удовлетворяет условию $|\varphi'(u)| \le C|u|^{\alpha-1}\ln^\beta|u|$, $|u| \gg 1$, $\alpha > 1$. Определим классы

$$B^0_{\alpha,\beta} = \left\{\ u_0(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)\,|\,\exists C > 0 : |u_0(x)| \le C|x|^{\frac{1}{\alpha-1}}\ln^{\frac{\beta}{1-\alpha}}|x|,\ \ |x| \gg 1\right\},$$

$$B_{\alpha,\beta} = \{ \; u(x,t) \in L^{\infty}_{loc}(\Pi_T), |\, \exists C(t) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+) : |u(t,x)| \leq$$
$$C(t)|x|^{\frac{1}{\alpha-1}} \ln^{\frac{\beta}{1-\alpha}} |x|, \quad |x| \gg 1 \; \}.$$

Теорема. *Пусть* $u_0(x) \in B^0_{\alpha,\beta}$. *Тогда о.э.р.* $u(t,x) \in B_{\alpha,\beta}$ *задачи (1) единственно и существует в некотором слое* Π_T. *При этом, если*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{|x|\to\infty} |u_0(x)||x|^{\frac{1}{1-\alpha}} \ln^{\frac{\beta}{\alpha-1}} |x| = 0,$$

то можно положить $T = +\infty$.

Литература

[1] Кружков С.Н. *Математ. Сборник. 1970. Т. 81. N 2. С. 228-255.*

[2] Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю. *Труды МИРАН им. В.А.Стеклова. 2002. Т. 236. С. 120-133.*

[3] Панов Е.Ю. *Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. N5. С. 175-188.*

Continuous maps of dendrites with positive topological entropy

Makhrova E. N. (N. Novgorod)

Dendrite is a locally connected continuum without arcs homeomorphic to a circle.

In [1] it is shown that continuous maps of dendrites with zero topological entropy admit the existence of homoclinic points.

In the report the sufficient conditions of positiveness of topological entropy in terms of homoclinic points for continuous maps of dendrites is represented. It is shown that such conditions is not necessary.

References

[1] Efremova L. S., Makhrova E. N. *On Homoclinic Points of Piecewise Monotone Mappings of Dendrites.* Progr. in Nonlin. Science. Proc. of the Intern. Conf. dedicated to the 100th Anniversary of A.A.Andronov. Nizhny Novgorod. Russia. July 2–6. 2001. V.1.Math. Probl. of Nonlin. Dynamics. Nizhny Novgorod. 2002. pp. 225 – 228.

Об одном классе задач управления для линейных абстрактных функционально-дифференциальных систем

Максимов В.П. (Пермский государственный университет)

Линейным абстрактным функционально-дифференциальным уравнением [1] называется уравнение

$$\mathcal{L}x = f, \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : D \to B$ - линейный ограниченный оператор, D и B - банаховы пространства, причем пространство D изоморфно прямому произведению $B \times R^n$. Предполагается, что оператор $\mathcal{L}$ нетеров индекса n и существует такой линейный ограниченный вектор-функционал $r = [r_1, ..., r_n] : D \to R^n$ с линейно независимыми компонентами $r_1, ..., r_n$, что краевая задача $\mathcal{L}x = f, rx = \alpha$ однозначно разрешима для любых $f \in B$ и $\alpha \in R^n$. Рассматривается задача управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f, \; rx = \alpha, \; \ell x = \beta, \tag{2}$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству H, $F : H \to B$ - линейный ограниченный оператор, $\ell : D \to R^N$ - линейный ограниченный вектор-функционал, задающий цель управления.

В докладе формулируются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2), приводятся примеры задач управления для систем дифференциальных уравнений с последействием, сингулярных и импульсных систем, которые могут быть записаны в виде (2), и обсуждаются возможности эффективного исследования таких задач с использованием современных компьютерных технологий.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерн. иссл., 2002.

О динамическом восстановлении правой части дифференциальных включений

Максимов В. И. (г. Екатеринбург)

Рассматривается задача устойчивого восстановления неизвестного входа динамической системы, описываемой дифференциальным включением

$$\dot{x}(t) + \mathrm{A}(x(t)) \ni Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta],$$

в гильбертовом пространстве H. Здесь A: $H \to H$ — максимально монотонное многозначное включение, $f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция, B — линейный непрерывный оператор. Решение включения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия $u(\cdot)$. Как вход $u(\cdot)$, так и траектория $x(\cdot)$ неизвестны. В ходе развития процесса измеряются фазовые состояния $x(t)$. Эти измерения, вообще говоря, неточны. Задача состоит в конструировании алгоритма приближенного восстановления входа, обладающего свойствами динамичности и устойчивости. Описанная задача вкладывается в проблематику обратных задач динамики управляемых систем. Представляемые в настоящей докладе алгоритмы опираются на конструкции теории устойчивого динамического обращения, основанные на соединении методов теории некорректных задач и теории позиционного управления. Суть предлагаемой методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой, моделью. Такой алгоритм, выходом которого служит, в частности, реализация управления в модели, по своему определению является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени приближает неизвестный вход.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00359), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН 22 “Процессы управления”, и Программы поддержки ведущих научных школ России 7581.2006.1.

Perturbations of singular difference equations which create horseshoes

Malkin M.I. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

Chaotic properties for solutions of difference equations $\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$, of order m with parameter λ are studied. We consider two cases when the non-perturbed operator Φ_{λ_0} depends either on a single or two variables respectively. More precisely, in the first case one has $\Phi_{\lambda_0}(y_0, \ldots, y_m) = \varphi(y_N)$, where N is an integer with $0 \le N \le m$ and φ a piecewise C^1-function; and in the second case, $\Phi_{\lambda_0}(y_0, \ldots, y_m) = \psi(y_N, y_M)$ with $0 \le N < M \le m$ and a piecewise C^2-function ψ.

We show for the first case that if φ has k simple zeros then for λ close enough to λ_0, the difference equation has, among its solutions, a k-horseshoe, i.e., the full shift on k symbols. Moreover, we show that these horseshoes change continuously in the uniform topology as λ varies near λ_0 (see [1]). For the second case we show that if the function $\psi(x, y)$ has a branch $y = f(x)$ with positive topological entropy $h_{top}(f)$, then the topological entropy of the shift map on the set of solutions $\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) = 0$ for λ close enough to λ_0, is bounded below by the constant arbitrarily close to $h_{top}(f)/(M - N)$.

As applications, we establish the horseshoe structure in families of generalized high dimensional Hénon-like maps and of Arneodo-Coullet-Tresser maps near their anti-integrable limits. Next applications are discrete versions for several partial differential equations of evolution type in the form of lattice dynamical systems. For discrete versions of Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation, of Huxley equation, of Frenkel-Kontorowa model and of two dimensional FitzHugh-Nagumo equation with diffusion coefficient small enough, we establish the horseshoe structure in their steady states and traveling waves.

The research was supported by RFBR (grants 05-01-00501, 05-01-00558) and by President Program for supporting leading scientific schools (grant 9686.2006.1).

References

[1] Li M.-C., Malkin M. I. Topological horseshoes for perturbations of singular difference equations. *Nonlinearity*.- 2006. v.19. p.795-811.

Системы Уизема и деформации

Мальцев А. Я. (г. Черноголовка)

Мы рассматриваем деформации систем Уизема, включающие высшие производные параметров точных m-фазных решений исходной системы. При этом показано, что после правильной перенормировки параметров главного приближения можно выписать полную систему, описывающую эволюцию медленно промодулированных m-фазных решений и включающую все высшие производные их параметров. Продеформированные системы имеют вид бесконечных разложений по высшим пространственным производным параметров (разложение Дубровина - Жанга), что соответствует разложению по малой дисперсии. Показано, что исходная система однозначно определяет при этом класс деформации системы Уизема с точностью до преобразований тривиальности в смысле Дубровина - Жанга.

Обобщенные канонические представления субгармонических функций

Малютин К. Г. (г. Сумы)

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup_{\mathbb{C}_+ \ni z \to t} v(z) \le 0$ для любого числа $t \in \mathbb{R}$ (см. [1]).

Пусть γ – некоторая функция роста. Класс истинно субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, рост которых не превышает γ, обозначим через $JS(\gamma)$. Пусть λ – некоторая мера, сосредоточенная в $\overline{\mathbb{C}}_+$. В [2] доказано, что мера λ является полной мерой функции $v \in JS(\gamma)$ тогда и только тогда, когда она является γ-допустимой. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$ $\liminf_{r\to\infty} \gamma(r)r^{-p} > 0$, и $p[\gamma] = \min\{p : p \in \mathbb{N}, \liminf_{r\to\infty} \gamma(r)r^{-p} = 0\}$ в противном случае. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r;k,\lambda) = \frac{1}{\pi k}\iint_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im\zeta}\, d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\, d\lambda(\zeta)\,,$$

$$S'_+(r;k,\lambda) = \frac{1}{\pi k r^k}\iint_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\tau^k \sin k\varphi}{\Im\zeta}\, d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}\,,$$

где $r_0 > 0$ – фиксированное число. Для меры λ определим числа $\{\alpha_k\}$ равенствами: $\alpha_k = -S_+(r_k;k)$, $1 \le k < p[\gamma] \le \infty$ (где r_k зависит от γ), $\alpha_k = -\lim_{j\to\infty} S_+(r_j;k)$, $k \ge p[\gamma]$ ($r_j \to \infty$ при $j \to \infty$). Коэффициентами Фурье меры λ называются функции

$$c_k(r;\lambda) = r^k\left\{\alpha_k + S_+(r;k)\right\} - S'_+(r;k), \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Если мера λ является γ-допустимой, то существует (см. [2]) единственная субгармоническая функция $v_\lambda \in JS(\gamma)$, такая, что 1) коэффициенты Фурье функции v_λ совпадают с коэффициентами Фурье меры λ, 2) полная мера функции v_λ равна λ, 3) $v_\lambda(0) = 0$. Функция v_λ называется канонической функцией меры λ.

Теорема. Пусть функция $v \in JS(\gamma)$, λ – её полная мера. Тогда справедливо представление

$$v(z) = v_\lambda(z) + \Im f(z)\,, \tag{1}$$

где $f(z)$ – целая вещественная функция, $\Im f(z) \in JS(\gamma)$.

Представление (1) называется обобщенным каноническим представлением субгармонической функции v. Заметим, что если $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточнённый порядок в смысле Бутру, то представление (1) совпадает с представлением Неванлинны субгармонической функции конечного порядка.

Литература

[1] Гришин А. Ф. *Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций* // *Матем. физика, анализ, геом.* – 1994. – *Т.* 1, №2. – *С.* 193 – 215.

[2] Малютин К. Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости* // *Матем. сб.* – 2001. – *Т.* 192, №6. – *С.* 51 – 70.

Теоремы существования "в целом"для уравнений некоторых многомерных моделей вязкой сжимаемой неньютоновской жидкости

Мамонтов А. Е. (г. Новосибирск)

Уравнения движения вязких сжимаемых жидкостей имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbb{P}_r + \rho\mathbf{f}; \tag{1}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u}$ — скорость, $\mathbf{f}$ — заданные силы, $\mathbb{P}_r$ — тензор напряжений, div действует по пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а t — время. Выбор определяющего уравнения (ОУ), связывающего $\mathbb{P}_r$ с ρ и $\mathbf{u}$, определяет модели различных сред. Обоснование математической корректности "в целом"модели (1) является трудной задачей; для $n > 1$ она была "освоена"недавно благодаря усилиям таких математиков, как P.L.Lions, А.В.Кажихов, В.А.Вайгант, E.Feireisl, и др. Эти результаты касались модели линейной вязкости, соответствующей ОУ вида

$$\mathbb{P}_r = (-p(\rho) + \lambda(\rho)\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}, \tag{2}$$

где $\mathbb{D} = \mathrm{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций. Значительный интерес как с математической, так и с прикладной точки зрения представляют также модели неньютоновских жидкостей, в которых ОУ (2) заменяется на нелинейные по $\mathbf{u}$. В докладе пойдет речь о нескольких результатах автора, касающихся теорем существования в целом (по времени и входным данным) решений задачи

$$\rho|_{t=0} = \rho_0; \quad \rho\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w}_0; \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$$

для системы (1) с различными ОУ, описывающей движение в ограниченной области Ω неньютоновских жидкостей нескольких типов. Среди них рассмотрено ОУ

$$\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \begin{cases} \mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ \text{любой из } \overline{\mathcal{P}}, & \mathbb{D} = 0 \end{cases}$$

— многозначная функция, что соответствует жидкости Бингама (не текущей при малых напряжениях), где $\mathcal{P}$ — ограниченная выпуклая область в пространстве симметричных тензоров, $\mathbb{T}$ — тензорное поле со значениями в $\partial\mathcal{P}$, а $\mathbb{P}_f$ — тензор напряжений "обычной"(стоксовой) жидкости. Эти результаты основаны, в частности, на анализе свойств уравнения переноса, входящего в систему (1), в пространствах Орлича [1], и на экстраполяции дифференциальных операторов в этих пространствах [2].

Литература

[1] Кажихов А. В., Мамонтов А. Е. *Сиб. мат. журн., 1998, 39(4).*

[2] Мамонтов А. Е. *Сиб. мат. журн., 2006, 47(1,4).*

Квантование поверхностей отрицательной размерности

Маслов В.П. (Московский государственный университет)

В недавней работе "Понятие размерности в геометрии и алгебре" Ю.И.Манин рассматривает, в частности, и поверхности отрицательной (дырочной) размерности. Квантование поверхностей дырочной размерности приводит к новым неожиданным явлениям, которые проявляются в конкретных реальных задачах.

Уравнение Бюргерса на римановых многообразиях

Мацкевич С. Е.

Уравнение Бюргерса — это уравнение в частных производных на функцию $f : R \times X \to X$. Простейший вариант этого уравнения для $X = R^1$ имеет вид:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) \cdot \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{2}\Delta f(t,x).$$

Уравнение Бюргерса для ковекторного поля $f : R \times M \to T_1^0(M)$ на многообразии можно определить так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, \nabla f) = \frac{1}{2}\Delta f,$$

где $(f, \nabla f) = f_i \nabla^i f$. Аналогично можно определить уравнение Бюргерса на многообразии для векторного поля. Заданное таким образом уравнение определено корректно.

Хорошо известна трансформация Коула–Хопфа (см. [1]) $f(t,x) = -\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}/u(t,x)$, $f : R \times R \to R$, связывающее уравнение Бюргерса и уравнение теплопроводности. Для уравнение Бюргерса на многообразии возможно аналогичное преобразование, только соответствующее уравнение для $u(t,x)$ уже не будет уравнением теплопроводности. Это связано с тем, что коммутатор ковариантной производной и лапласиана от скалярной функции на многообразии не равен нулю, а выражается через тензор Риччи.

Основная теорема. Пусть M — гладкое риманово многообразие постоянной кривизны со скалярным тензором $R_i^k = r \cdot Id$ (или что тоже самое — тензор Риччи пропорционален метрике). Пусть $u(t,x)$ — действительнозначная функция на многообразии M, являющаяся решением уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\frac{scal(x)}{n}\ln u \cdot u, \tag{1}$$

для всех $x \in M$, $t \geq 0$ с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$. Здесь $scal(x)$ — скалярная кривизна, n — размерность многообразия M, $scal(x) = r \cdot n$ — след тензора Риччи. Тогда $v(t,x) = -\frac{\nabla u(t,x)}{u(t,x)}$ является решением уравнения Бюргерса с начальным условием $v(0,x) = v_0(x) = -\frac{\nabla u_0(x)}{u_0(x)}$.

Литература

[1] Belopolskaya Ya.I. *Smooth diffusion mesuares and their transformations,* Preprint SFB 256, 1999.

[2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Т. 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. — М.: Эдиториал УРСС, Добросвет, 2001, стр. 71—73.

Задача Коши для псевдопараболических систем

Матвеева И. И. (г. Новосибирск)

В работе рассматривается задача Коши для одного класса систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной по времени

$$A_0 D_t u + A_1(D_x)u = f(t,x),$$

где A_0 — вырожденная числовая матрица, $A_1(D_x)$ — матричный дифференциальный оператор по $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Этот класс был введен в книге [1] и называется классом псевдопараболических систем.

Задача Коши и смешанные краевые задачи в R_{n+1}^{++} для псевдопараболических систем рассматривались в [1], и для этих задач были доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах $W_{p,\gamma}^l$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$. Характерной особенностью этих теорем является тот факт, что разрешимость краевых задач устанавливается не во всей шкале пространств $W_{p,\gamma}^l, 1 < p < \infty$. В большинстве случаев возникают ограничения на показатель суммируемости вида

$p > p^*$, где число $p^* > 1$ зависит от порядка системы и размерности n. В случае, когда $p \leq p^*$, для разрешимости на данные необходимо накладывать дополнительные требования типа условий ортогональности некоторым полиномам. Отметим, что такая ситуация является типичной в теории краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной (см., например, [1, 2]).

В настоящей работе исследуется разрешимость задачи Коши в специальных весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, введенных в [3], с экспоненциальным весом по t и степенными весами по x. Пространства такого типа оказываются более удобными при доказательстве существования решений уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной (см., например, [1, 4, 5]), при этом, как показывают примеры, при соответствующем выборе степенного веса могут иметь место теоремы о безусловной разрешимости краевых задач во всей шкале пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, $1 < p < \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00529) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 2.2).

Литература

[1] Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

[2] Матвеева И. И. *Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для систем не типа Коши – Ковалевской* // Сиб. журн. индустр. мат. 2001. Т. 4, № 2. С. 184–204.

[3] Демиденко Г. В. *Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа* // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1986. С. 69–84.

[4] Matveeva I. I. *On a class of boundary value problems for systems of Sobolev type* // J. Anal. Appl. 2005. Vol. 3, № 2. P. 129–150.

[5] Матвеева И. И. *О разрешимости задачи Коши для псевдопараболических систем в весовых соболевских пространствах* // В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2005. С. 177–185.

Об интерполяции кубическими многочленами на треугольнике

Матвеева Ю.В. (г. Саратов)

Пусть $\overline{T} = (A_1A_2A_3)$ - замкнутый невырожденный треугольник на плоскости, функция $f \in C^4(\overline{T})$, $\mathrm{e}_{i,k}$ - единичные векторы, коллинеарные сторонам $\overrightarrow{A_iA_k}$ треугольника T. Строим полином Q степени три с действительными коэффициентами, интерполирующий функцию f вместе с ее производными по направлению сторон T в вершинах $A_i, i = \overline{1,3}$, и удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial^2 Q(A_1)}{\partial \mathrm{e}_{12}\partial \mathrm{e}_{13}} = \frac{\partial^2 f(A_1)}{\partial \mathrm{e}_{12}\partial \mathrm{e}_{13}}.$$

В работе (см. [1]) такое условие берется в вершине среднего или наибольшего по величине угла треугольника и получены оценки аппроксимации всех частных производных до третьего порядка включительно в терминах синуса наибольшего угла. Мы получим оценки погрешности для производных функции по направлениям до третьего порядка включительно, не зависящие явно от геометрии треугольника. Для построенного выше полинома Q справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на треугольнике $\overline{T}$ и имеет на нем непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, d - диаметр $\overline{T}$,*

$$M_4 = \max_{0 \le i_j \le 4, \sum i_j = 4} \max_{x \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right| .$$

Тогда существует единственный интерполяционный полином $Q(\mathbf{x})$, и справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^k \partial \mathbf{e}_{13}^{n-k}} \right| \le C M_4 d^{4-n}, \quad 1 \le n \le 3, \quad 0 \le k \le n,$$

Литература

[1] Байдакова Н.В. *"Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике"*, Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН, **11**:2 (2005), 47-52.

Многомерные системы счисления

Максименко И. Е. (г. Санкт-Петербург)

В данной работе исследован вопрос о разложении любого d-мерного вектора по степеням матрицы растяжения, то есть целочисленной матрицы M размера $d \times d$, такой, что все ее собственные числа по модулю больше единицы. Такое разложение можно рассматривать как многомерную систему счисления, где основанием является матрица, а цифрами – векторы. Подобные системы счисления могут быть использованы в обработке изображений. Так в университете Eotvos Lorand University (Венгрия) методом компьютерного перебора были построены системы счисления вплоть до 12 размерности для матриц, модуль определителя которых равен двум (см. http://szdg.lpds.sztaki.hu/szdg/desc_numsys_ed.php).

Нами предложен конструктивный метод разложения целочисленных векторов по степеням матрицы растяжения, доказано существование разложения произвольного d-мерного вектора. Пусть здесь и далее, M – матрица растяжения.

Лемма. Множество $H(M) := \mathbb{Z}^d \cap M[0,1)^d$ можно взять в качестве M-цифр (то есть векторов, участвующих в разложении).

Количество M-цифр равно модулю определителя матрицы M (см., например, [1]). Назовем вектор z_0, для которого выполнено соотношение $z_0 = M^r z_0 + M^{r-1} s_{r-1} + \ldots + M s_1 + s_0$, где $s_0, \ldots, s_{r-1} \in H(M)$, зацикливающим вектором матрицы M длины r.

Теорема 1. Для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ существует представление $x = M^{N+1} z_0 + \sum\limits_{k=0}^{N} M^k s_k$, где $N \in \mathbb{N}$, $s_0, \ldots, s_N \in H(M)$, а вектор $z_0 \in \mathbb{Z}^d$ либо зацикливающий, либо нулевой. Представление единственно, если при разложении будем останавливаться на первом зацикливающем.

Теорема 2. Пусть вектор z_0 – зацикливающий длины r. Тогда $-z_0 = \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l$, где $y_l = y_{rk+n} = s_n$, $n = 0, \ldots, r-1$, $k \in \mathbb{Z}^d$. И обратно, если целочисленный вектор z представим в виде $z = \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l$, $y_l \in H(M)$, то либо z нулевой вектор, либо вектор $-z$ зацикливающий.

Теорема 3. Любой вектор $x \in \mathbb{R}^d$ представим в виде $x = M^{N+1}z_0 + \sum\limits_{l=-N}^{\infty} M^{-l}y_l$, $y_l \in H(M)$, где $N \in \mathbb{N}$, z_0 либо зацикливающий, либо нулевой.

Литература

[1] Wojtaszczyk P. A mathematical introduction to wavelets. *London Math. Soc. Student texts 37. 1997.*

Бимодальные бифуркации положений равновесия в потенциальных системах с симметрией

Майлыбаев А.А. Сейранян А.П. (Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова)

Исследуются бифуркации положений равновесия потенциальных систем с симметриями, характеризующихся двумя линейно независимыми формами потери устойчивости (бимодальные бифуркации). Развита общая теория бимодальных бифуркаций в потенциальных системах с симметриями. Дается классификация бифуркаций и перестроек при изменении параметров системы. В качестве приложений рассмотрен пример упругого составного стержня, потеря устойчивости которого происходит по несимметричной форме.

Некоторые дифференциальные тождества и их применение

Меграбов А. Г. (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск))

Получен ряд дифференциальных тождеств 2-го и 3-го порядка, связывающих лапласиан $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ произвольной гладкой функции $u(x,y)$, модуль ее градиента и величину $arctg\,(u_y/u_x)$.

Основное тождество. Пусть $u(x,y) \in C^2(D)$, D — некоторая область, $g \overset{\text{def}}{=} u_x^2 + u_y^2 = |\operatorname{grad} u|^2$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты по осям x, y, z. Тогда

$$\bar{Q} \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta u}{g} \operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\ln g\right) + \operatorname{rot}\left\{arctg\,\frac{u_y}{u_x}\,\bar{k}\right\}.$$

Следствие 1. Для любой $u(x,y) \in C^2(D)$

$$\Delta u = \frac{1}{2}\left\{u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y}\right\}\ln g - \left\{u_y\frac{\partial}{\partial x} - u_x\frac{\partial}{\partial y}\right\}arctg\,\frac{u_y}{u_x}.$$

Следствие 2. Для любой $u(x,y) \in C^3(D)$

$$\Delta \ln\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \left(u_x\frac{\Delta u}{g}\right)_x + \left(u_y\frac{\Delta u}{g}\right)_y = \operatorname{div}\bar{Q}, \tag{1}$$

$$\Delta arctg\,\frac{u_y}{u_x} = \left(u_y\frac{\Delta u}{g}\right)_x - \left(u_x\frac{\Delta u}{g}\right)_y = -(\operatorname{rot}\bar{Q}\cdot\bar{k}),$$

$$\operatorname{div}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{grad} g - \Delta u \operatorname{grad} u\right\} = 2\{u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\}.$$

Тождество (1) получено в статье автора в Докладах РАН, 2004, т. 395, № 2. Данные тождества удобно применять к линейным и нелинейным уравнениям, содержащим выражения Δu, $u_x^2 + u_y^2$, $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}$, например, к уравнениям эйконала, волновым, идеальной жидкости для функции тока, Монжа — Ампера и др.

Homogenized models for filtration processes and acoustic wave propagation in elastic porous media

Meirmanov A.M. (Belgorod State University, Russia)

We consider a problem of a joint motion of a deformable solid, perforated by a system of channels (pores) and a fluid occupying a porous space. In dimensionless variables differential equations of the problem for the dimensionless displacement vector $\mathbf{w}^\varepsilon$ of the continuum medium have a form:

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \div_x \{\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - (q^\varepsilon + \pi^\varepsilon)\mathbb{I}\} + \rho^\varepsilon \mathbf{F},$$

$$q^\varepsilon = -\chi^\varepsilon \alpha_p^\varepsilon \div_x \mathbf{w}^\varepsilon, \quad \pi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\eta \div_x \mathbf{w}^\varepsilon = 0.$$

In this model the characteristic function of the porous space χ^ε, coefficient $\rho^\varepsilon = \rho_f \chi^\varepsilon + \rho_s(1-\chi^\varepsilon)$ and a dimensionless vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ of distributed mass forces are known functions. Dimensionless parameters α_i $(i = \tau, \nu, \ldots)$ depend on the small parameter $\varepsilon = l/L$, where l is a characteristic size of pores and L is a characteristic size of the entire porous body. Although the problem is linear, it is very hard to tackle due to the fact that its main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients, both big and small, under the differentiation operators. We suggest the rigorous justification for homogenization procedures as ε tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. As the results we derive Biot's equations of poroelasticity, or system, consisting of non-isotropic Lamé's equations for the solid component and acoustic equations for the liquid component, equations of viscoelasticity, or decoupled system consisting of Darcy's system of filtration or acoustic equations for the liquid component (first approximation) and non-isotropic Lamé's equations for the solid component (second approximation) or different type of acoustic equations for the solid and liquid components, depending on ratios between physical parameters. The proofs are based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures.

Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней

Мещеряков В.В. (Коломенский государственный педагогический институт)

Пусть R — приведенная и неприводимая система корней в n-мерном вещественном векторном пространстве V, R_0 — множество простых корней, а R_+ — положительная система корней. Группой Вейля $W(R)$ системы R называется группа, порожденная отражениями относительно корней этой системы. Будем считать пространство V евклидовым со стандартным скалярным произведением $(\ |\ )$. Тогда отражение s_α относительно вектора α отображает $x \in V$ в вектор

$$s_\alpha x = x - 2\frac{(x \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}\alpha.$$

Для каждой системы корней можно построить единственную билинейную форму $F_R(x,y)$ [3] на V, которая инвариантна относительно действия $x \to wx,\ y \to wy$ группы $W(R)$ и удовлетворяет следующему условию

$$F_R(x,y) = \sum_{\alpha \in R} F_R(x,\alpha) F_R(\alpha, y).$$

Пусть $|R| = N$ — число корней в системе R, $\mathbb{C}^N$ — комплексное пространство, ассоциированное с R. Через $\{ u_\alpha,\ \alpha \in R \}$ обозначим координаты в $\mathbb{C}^N$, упорядоченные относительно порядка, выбранного в R.

В работе [1] для каждой приведенной, неприводимой системы корней построены универсальные операторы Дункла

$$\nabla_\gamma = -\sum_{\alpha \in R} F(\gamma,\alpha) \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{F(\gamma,\alpha) k_\alpha}{u_\alpha - u_{-\alpha}} s_\alpha,$$

где k_α — неотрицательное целое число, зависящая только от длины корня α.

При подходящем отображении пространства V в $\mathbb{C}^N$ получаются дифференциально-разностные операторы, сопряженные обычным операторам Дункла, свойства которых описаны в [2]. Одно из этих свойств утверждает, сумма квадратов операторов Дункла является оператором Лапласа.

Для универсальных операторов Дункла это свойство перестает быть верным.

Определение. Алгебраическое подмногообразие пространства $\mathbb{C}^N$, определенное уравнениями

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha,\beta)}{(u_\alpha - u_{-\alpha})(u_\beta - u_{-\beta})} = 0,$$

где $w \in W(R)$, называется многообразием Бете для системы R.

На многообразии Бете (и только на нем) выполняется равенство

$$\sum_{\gamma \in R} \nabla_\gamma^2 = -H_C,$$

где H_C — "универсальный" гамильтониан типа Сазерленда [1].

В докладе для классических систем корней (типа A_{n-1}, B_n, C_n, D_n) будут представлены в явном виде уравнения, определяющие многообразия Бете, вычислена их размерность. Также будет показано, что в случае B_n и C_n многообразие Бете является подмножеством пересечения ультрагиперболических поверхностей.

Литература

[1] Golubeva V.A. Leksin V.P. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models // J. Math. Sci., 98, no 3 (2000), 291–318.

[2] Dunkl C.F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc., 311, no 1 (1989), 167–183.

[3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.

[4] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Перев. с англ. Б.Р. Френкина. М.: МЦНМО, 2003.

[5] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли / Перев. с английского и французского А.Б. Волынского. М.: Мир, 1969.

К исследованию устойчивости движения опоры шасси летательного аппарата с учетом частотных характеристик демпфера

Метрикин В. С. (НИИ ПМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского)

На этапе проектирования шасси летательных аппаратов (ЛА) наряду с расчетами амортизации, прочности, ресурса и т.п. производятся расчеты демпфирующих и жесткостных параметров опоры и колес с использованием дифференциальных уравнений (ДУ) большой размерности. По результатам расчетов динамических характеристик (ДХ) опоры и колес ЛА для предотвращения шимми опоры ЛА обычно оборудуются демпфером. В большинстве известных математических моделях характеристика демпфера описывается в виде линейной, либо квадратичной функций, когда как известно они представляют собой существенно нелинейные функции. В работе приведена новая математическая модель для расчета устойчивости качения колес опоры шасси ЛА с демпфером с учетом экспериментально найденных нелинейных частотных характеристик демпфера. Обсуждаются результаты численного и аналитического исследования устойчивости движения опоры шасси летательного аппарата с учетом и без учета экспериментально найденных нелинейных частотных характеристик демпфера. В результате приводятся новые методики и подходы расчета эффективных значений демпфирующих и жесткостных характеристик демпфера шимми.

О существовании предельных значений на границе производных полигармонической функции в шаре

Михайлов В.П.

Установлены теоремы существования предельных значений на границе в гильбертовой шкале соболевских пространств у полигармонической в шаре $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ функции и её производных. Найдены условия, обеспечивающие существование предельных значений у одних производных в зависимости от существования предельных значений у других производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 04-01-00377) и гранта президента РФ (НШ – 6705.2006.1).

Spectra of singular periodic differential operators of even order

Mikhailets V., Molyboga V. (Kyiv)

The point spectra of the form-sums

$$S_{\pm}(V) := D_{\pm}^{2m} \dotplus V(x), \quad m \in \mathbb{N}$$

in the Hilbert space $L_2(0,1)$ are studied. It is assumed that periodic (D_+) and semiperiodic (D_-) operators $D_{\pm} : u \mapsto -iu'$ and $V(x)$ be a 1-periodic complex-valued distribution in the Sobolev spaces $H_{per}^{-m\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$.

The following questions are investigated:

- Precise non-asymptotic and asymptotic formulae for the eigenvalues;
- Extension of the Marchenko – Ostrovsky theorem for the case $m = 1$, $-\alpha \in \mathbb{N}_0$ on considered values of parameters m and α;
- Sharp estimates of lengths of the gaps (γ_n) in continuous spectrum of self-adjoint Schrödinger operator on the line with periodic potential $V(x)$;
- Necessary and sufficient conditions on $V(x)$ under which either $(\gamma_n) \in \mathbf{l}_\infty$ or $(\gamma_n) \in \mathbf{c}_0$.

Some results of the talk are published in the papers [1-6].

References

[1] Molyboga V. *Estimates for periodic eigenvalues of the differential operator* $(-\mathbf{1})^{\mathbf{m}}\mathbf{d}^{\mathbf{2m}}/\mathbf{dx}^{\mathbf{2m}} + \mathbf{V}$ *with V – distribution* // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 163 – 178.

[2] Mikhailets V., Molyboga V. *Singular eigenvalues problems on the circle* // Meth. Func. Anal. and Top. – 2004. – **10**, № 3. – P. 44 – 53.

[3] Mikhailets V., Molyboga V. *Uniform estimates for the semiperiodic eigenvalues of the singular differential operators* // Meth. Func. Anal. and Top. – 2004. – **10**, № 4. – P. 30 – 57.

[4] Mikhailets V., Molyboga V. *The spectral problems over the classes of periodic distributions* (Ukrainian). – Preprint. – Kyiv, 2004. – 46 pp.

[5] Mikhailets V., Molyboga V. *Perturbation of periodic and semiperiodic operators by the Schwartz distribution* (Russian) // Reports of NAS of Ukraine. – 2006. – **7**. – P. 26 – 31.

[6] Mikhailets V., Molyboga V. *Gap estimates of the spectrum of a periodic Schrödinger operator with a distribution as potential* (in preparation).

Towards classification of integrable systems

Mikhailov A.V., Novikov V.S., Wang J.P. (University of Leeds, Leeds, UK)

Inspired by the success of the global classification of integrable evolutionary equations [1], we developed and applied the symbolic method to homogeneous systems of two (and more) equations of odd order ($n = 2k+1, k = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{cases} u_t = \lambda_1 u_n + F_1(u_{n-1}, v_{n-1}, \ldots, u, v) \\ v_t = \lambda_2 v_n + F_2(u_{n-1}, v_{n-1}, \ldots, u, v) \end{cases}$$

We have studied conditions for the existence of infinite hierarchies of symmetries. We formulate necessary and sufficient conditions for the existence of *approximate symmetries* (c.f. [2]). These conditions impose constraints on possible spectra (dispersion laws) of the linearised systems. In the case of the above system of two equations the most interesting spectra are given by

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(1+q)^n}{1+q^n},$$

where

$$q = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad n = 1, 3, 7, 9 \bmod 10$$

or

$$q = e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad n = 1, 5, 7, 9 \bmod 12.$$

We have classified integrable homogeneous systems of two variables of order 3 of the KdV type. We also have found a few new examples of integrable systems of order 5, such as

$$\begin{cases} u_t = 15u_5 + 30u_1u_2 - 30u_3v - 45u_2v_1 - 35u_1v_2 - 10uv_3 - 6u^2u_1 + 6u^2v_1 + 12v^2u_1 + 12uvv_1, \\ v_t = -\frac{5}{3}v_5 - 10uu_3 - 15u_1u_2 + 10vv_3 + 25v_1v_2 - 6u^2u_1 + 6u^2v_1 + 12uvu_1 - 12v^2v_1. \end{cases}$$

We extended the theory to the systems of 3 dependent variables and found a new integrable system of the form

$$\begin{cases} u_t = u_3 + (10+2\sqrt{5})v_2w + (10-2\sqrt{5})vw_2 - \frac{8}{3}u^2u_1 + \frac{160}{9}(1-\sqrt{5})v^3w + \frac{160}{9}(1+\sqrt{5})vw^3, \\ v_t = \frac{1}{2}(-7-3\sqrt{5})v_3 + (3+\sqrt{5})u_2w + (6+2\sqrt{5})u_1w_1 + (5+\sqrt{5})uw_2 - \frac{8}{3}(uu_1v + u^2v_1) \\ \quad +\frac{8}{3}(5+3\sqrt{5})v^2v_1 -, \frac{8}{3}(5+3\sqrt{5})(v_1w^2 + vww_1) - \frac{32}{9}\sqrt{5}uv^2w + \frac{16}{9}(5+3\sqrt{5})uw^3, \\ w_t = \frac{1}{2}(-7+3\sqrt{5})w_3 + (3-\sqrt{5})u_2v + (6-2\sqrt{5})u_1v_1 + (5-\sqrt{5})uv_2 - \frac{8}{3}(uu_1w + u^2w_1) - \\ \quad \frac{8}{3}(5-3\sqrt{5})(vv_1w + v^2w_1) + \frac{8}{3}(5-3\sqrt{5})w^2w_1 + \frac{16}{9}(5-3\sqrt{5})uv^3 + \frac{32}{9}\sqrt{5}uvw^2 \end{cases}$$

References

[1] Sanders J.A., Wang J.P On the integrability of homogeneous scalar evolution equations, J. Diff. Equations, **147**, 410-34.

[2] Mikhailov A.V., Novikov V.S. Perturbative symmetry approach, J. Phys, A: Math. Gen, **35**, 4775-4790.

Wave and Schrödinger operators on the half line. Connection of the dynamical and spectral data

Mikhaylov V. S. (Fairbanks AK, USA)

We established the representation of the *Weyl function* for the Schrödinger operator $H = -\partial_x^2 + q(x)$ on the half line:

$$m(-k^2) = -k + \int_0^\infty e^{-kt} r(t)\, dt, \tag{1}$$

where for $q \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $q \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $q \in l_\infty(L_1(\mathbb{R}_+))$ the integral converges absolutely in the certain domain of k. Here $r(t)$ is a *response function* for the following initial boundary value problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0, & x > 0,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = f(t), & f \in L_2(0,T). \end{cases} \tag{2}$$

Representation ((1)) allows us to establish the correspondence between the $A-$amplitude (see [3], [4]) and the response function (see [1]): $A(t) = -2r(2t)$. We offered a linear Volterra type equation which can be used for the calculation of $A-$amplitude.

$$A(x,y) = q(x) - \int_0^y \left(\int_v^x A(u,v)du \right) q(x-v)dv\,;\ x, y > 0\,. \tag{3}$$

then

$$A(\alpha) = A(\alpha, \alpha). \tag{4}$$

For the case $q \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ such that the operator H is a limit point case at infinity, we derive the analog of ((1)) with the error term. This together with the arguments of Boundary

Control theory (see [1]) leads to the another proof of the local Borg-Marchenko theorem (see [3], [4]).

References

[1] S.A. Avdonin, M.I. Belishev, and S. A. Ivanov, *Matrix inverse problem for the equation* $u_{tt} - u_{xx} + Q(x)u = 0$, Math. USSR Sbornik 7 (1992), 287–310.

[2] S.A. Avdonin, V.S. Mikhaylov, A.V. Rybkin, *BC-method for Sturm-Liuville problem and A-function.* Comm. Math. Phys. to appear.

[3] Barry Simon *A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism.* Annals of Mathematics, 150 (1999), 1029-1057.

[4] Fritz Gesztesy, Barry Simon *A new approach to inverse spectral theory, II. General real potential and the connection to the spectral measure.* Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 2, 593–643.

Оснащённая схема как полный топологический инвариант простейших негрубых диффеоморфизмов сферы $\mathbf{S}^2$

Митрякова Т. М. (г. Нижний Новгород)

В работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $f \in Diff^r(\mathbf{S}^2)$, $r \geq 5$, заданных на сфере $\mathbf{S}^2$ и удовлетворяющих следующим условиям: 1) неблуждающее множество $\Omega(f)$ состоит из шести неподвижных гиперболических точек: трех стоков ω_1, ω_2, ω_3; одного источника α и двух седел σ_1, σ_2; 2) множество $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ не пусто и состоит из конечного числа орбит, среди которых в точности одна орбита одностороннего касания.

Согласно работе [3], C^1-окрестность любого диффеоморфизма $f \in \Phi$ пересекает континуум классов топологической сопряженности и параметром, описывающим окрестность, является следующее отношение: $c(f) = \frac{\ln \mu(\sigma_1)}{\ln \lambda(\sigma_2)}$, где $\mu(\sigma_1)$ — собственное значение $Df(\sigma_1)$, большее единицы и $\lambda(\sigma_2)$ — собственное значение $Df(\sigma_2)$, меньшее единицы. В общем случае, для диффеоморфизмов $f, f' \in \Phi$ равенство $c(f) = c(f')$ является лишь необходимым условием топологической сопряженности, но не является достаточным, в силу возможного различия геометрической структуры пересечения инвариантных многообразий седловых точек.

Для диффеоморфизмов класса Φ найден полный топологический инвариант (оснащенная схема), содержащий параметр $c(f)$ и различающий геометрию пересечения.

[1] Melo W. *Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. Topology, v. 19, 1980, 9 - 21.*

[2] Melo W., Strien S. J. *Diffeomorphisms on surfaces with a finite namber of moduli. Ergod. Th. and Dynam. Sys., v. 7, 1987, 415 - 462.*

[3] Palis J. *A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. Asterisque, v. 51, 1978, 335 - 346.*

On a version of the directional derivative problem

Moiseev T.E.

Существование собственных значений в задаче о диэлектрических волноводах

Мокейчев В.С. (Казанский университет)

Существуют ли собственные волны в математической модели $-\Delta u = (\lambda + c_j)u$, $x \in \Omega_j$, $\cup\Omega_j = R^n$, где $(-c_j)$– диэлектрическая постоянная в слое Ω_j, решения $u_j(x)$ (в слое Ω_j) должны быть состыкованы на общих границах слоев так, чтобы $u(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$? При такой постановке возникает сложная проблема состыковки, не говоря о существовании собственных значений. Предлагается рассмотреть задачу $-\Delta u = (\lambda + c(x))u$, $x \in R^n$, $u \in L^2(R^n)$, в которой $c(x) = c_j$ при $x \in \Omega_j$. Тогда проблема состыковки решается автоматически, и следует вести речь о существовании собственных значений. Изучается более общая задача

$$P(D)u = (\mu + g(x))u,\ x \in R^n,\ u \in L^2(R^n), \tag{1}$$

в которой $P(i\xi) \geq 0$– символ псевдодифференциального оператора $P(D)$, не зависящий от x, $i^2 = -1$, $P(i\xi) = P(-i\xi)$, при $\mu < 0$ имеет место $(P(i\xi) - \mu)^{-1} \in L^2(R^n)$, если $\mu \to -\infty$, то $\int_{R^n}(P(i\xi) - \mu)^{-2}d\xi \to 0$, функция $\int_{|\xi|<\delta}(P(i\xi) - \mu)^{-1}d\xi$ неограничена при малых δ и $\mu < 0$, $g(x)$ измерима, ограничена и равна нулю вне Ω. В случае $P(i\xi) = |\xi|^2$ предположения выполняются при $n \leq 3$.

Теорема

Theorem 2 *При $g(x) \leq 0$ задача (2) не имеет отрицательных собственных значений; в случае $g(x) > 0$ на Ω и ограниченности Ω задача (2) имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение.*

Для (1) за Ω следует взять дополнение к Ω_j, для которого $(-c_j)$– наибольшее; в случае его ограниченности по теореме существует собственное значение , для которого $\min(-c_j) < \lambda < \max(-c_j)$.

Transition from the network of the thin fibers to the quantum graph

Molchanov Stanislav (University of North Carolina at Charlotte)

The talk will contain the review of our recent results with Prof. B. Vainberg on the asymptotical analysis for $\varepsilon \to 0$ of the wave and heat equations in the network Ω_ε of the cylindrical waveguides (or optical fibers) of the thickness ε. We impose on $\partial\Omega_\varepsilon$ the boundary conditions (BC). In the optical applications the most interesting are the Dirichlet BC, the case of the high conductivity of $\partial\Omega_\varepsilon$. The domain Ω_ε approaches (if $\varepsilon \to 0$) to the 1D object: quantum graph Γ. The vertices of Γ correspond to the junctions of network Ω_ε and the edges are the axis of the cylinders.

The most interesting problem here is the form of the gluing condition (GC) in the vertices of Γ for the "limiting"wave or heat equations on Γ. These symplectic GC depend on the scattering properties of the individual junctions (spider-like domains) and are typically not the Kirchhoff's ones.

The spectral analysis of the Laplacian $\varepsilon^2\Delta$ in Ω_ε and the study of associated asymptotic problems for the evolution equations are based on the ideas of the scattering theory, averaging, diffusion processes (in the case of the heat equations) etc.

On the well posedness of an initial boundary value problem for linear isotropic elasticity

Morando A. (Brescia, Italy)

We give an L^2-well posedness result concerning an initial boundary value problem (ibvp) for the system of linear isotropic elasticity in two or three space dimensions, under the uniform Kreiss-Lopatinskii condition (cf. [4], [5]). The well posedness is achieved providing explicitly an everywhere smooth non degenerate dissipative Kreiss symmetrizer of the ibvp (cf. [2]). Because of the characteristic boundary and the lack of a technical assumption given by Ohkubo [6] (cf. also [1]), the key point in the construction consists of building the symbolic symmetrizer near some special "boundary points". It is worthwhile noticing that in dimension three the analysis of Majda-Osher [3] does not apply to the elasticity system.

References

[1] Benzoni-Gavage S., Serre D. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations. First order systems and applications.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2006.

[2] Kreiss H.-O. *Initial boundary value problems for hyperbolic systems.* Comm. Pure Appl. Math., 23: 277-298, 1970.

[3] Majda A., Osher S. *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary.* Comm. Pure Appl. Math., 28(5): 607-675, 1975.

[4] Morando A., Serre D. *A result of L^2-well posedness concerning the system of linear elasticity in 2D.* Commun. Math. Sci., 3(3): 317-334, 2005.

[5] Morando A., Serre D. *On the L^2-well posedness of an initial boundary value problem for the 3D linear elasticity.* Commun. Math. Sci., 3(4): 575-586, 2005.

[6] Ohkubo T. *Regularity of solutions to hyperbolic mixed problems with uniformly characteristic boundary.* Hokkaido Math. J., 10: 93-123, 1981.

О бифуркациях резонансов в уравнениях с немонотонным вращением.

Морозов А. Д. (г. Нижний Новгород)

Рассматриваются гладкие гамильтоновы периодические по времени системы, близкие к двумерным автономным интегрируемым. Предполагается, что невозмущенная система нелинейная и имеет ячейку, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. Предполагается также, что зависимость частоты ω движения по замкнутым фазовым кривым от действия I является немонотонной функцией с особенностью конечного порядка $j > 1$ при некотором I_0. Уровень $I = I_0$ называется вырожденным уровнем. Уровень $I = I_{pq}$ называется резонансным, если $\omega(I_{pq}) = (q/p)\nu$, где ν – частота возмущения, $p, q \in Z$. Уровень называется вырожденным резонансным, если $I_{pq} = I_0$. Используя усредненную систему, установлены бифуркации, связанные с перестройками в окрестности вырожденного резонанса. Показано, что в случае низшего порядка вырождения ($j = 2$) эти бифуркации связаны с перестройками сепаратрис и бифуркациями вырожденных состояний равновесия (бифуркации стягивания петель сепаратрис). Для $j > 2$ наряду с бифуркациями петель возможен другой тип бифуркаций, связанный с бифуркациями "вихревых пар". Доказано, что для $j = 2$ вихревые пары отсутствуют. Для $j > 2$ приведен пример уравнения, для которого у отображения Пуанкаре существуют вихревые пары.

Приведен пример симплектического отображения цилиндра с немонотонным вращением ($j = 2$), в котором возможны оба типа бифуркаций: "петель" и "вихревых пар".

Работа поддержана грантами РФФИ, №06-01-00270 и НШ, №9685.2001.1.

Maurer-Cartan forms for symmetry pseudo-groups and coverings of differential equations

Morozov O.I. (Moscow)

The aim of my talk is to reveal a relationship between two important constructions in geometry of differential equations: Lie symmetry pseudo-groups and coverings (or zero-curvature representations, or Lax pairs, or Wahlquist-Estabrook prolongation structures). I demonstrate that the known coverings for Liouville's equation, the Boyer-Finley equation, and the Khokhlov-Zabolotskaya equation can be defined by invariant combinations of the Maurer-Cartan forms of their symmetry pseudo-groups. Also, I apply Cartan's method of equivalence to find new covering equations for the modified Khokhlov-Zabolotskaya equation and a two-dimensional deformation of the generalized Hunter-Saxton equation.

Sharp norm bounds on variation of spectral subspaces

Motovilov A.K. (Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia)

We establish several optimal bounds on variation of spectral subspaces of a self-adjoint operator under off-diagonal perturbations. In particular, we obtain an *a priori* sharp norm estimate on variation of the spectral subspace associated with a part of the spectrum whose convex hull does not intersect the remainder of the spectrum. This bound makes sense of a new, already *a priori*, $\tan\Theta$ Theorem. Furthermore, we extend the Davis–Kahan $\tan 2\Theta$ Theorem to the case of some unbounded perturbations. We also obtain sharp norm estimates on solutions to the associated Riccati equations.

The report is based on joint work with A.V. Selin.

Об ограниченных решениях линейных дифференциальных уравнений

Мухамадиев Э. М. (ВоГТУ)

Рассмотрим задачу о существовании ограниченного решения дифференциального уравнения в форме

$$Jx(t) \equiv x(t) - x(0) + \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau = g(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

где $A(t)$ - непрерывная, не обязательно ограниченная на полуоси, матрица-функция. Предположим, что непрерывные скалярные функции $a(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют условиям $||A(t)|| \leq a(t)$, $\int_t^{\beta(t)} a(\tau)d\tau = 1$. Пусть $C = C[0,\infty)$ - пространство непрерывных и ограниченных на полуоси вектор-функций с равномерной нормой

$||\cdot||$, а $CV_\beta = CV_\beta[0,\infty)$ пространство, состоящее из непрерывных вектор-функций $g(t), g(0) = 0$, для которых $||g||_\beta = \sup_{t\geq 0} \max_{t\leq s\leq \beta(t)} |g(s) - g(t)| < \infty$.

Теорема 1. *Интегральный оператор J действует из пространства C в пространство CV_β и непрерывен. Уравнение (1) разрешимо в пространстве C для любой вектор-функции $g \in CV_\beta$ тогда и только тогда, когда задача об ограниченном решении интегрального уравнения (1) допускает априорную оценку:* $||x|| \leq M(||Jx||_\beta + |x(0)|), \quad x \in C$.

Рассмотрим матрица-функцию $A(s,t) = A(t + s/a(t))/a(t)$ и скалярную функцию $a(s,t) = a(t + s/a(t))/a(t)$ двух переменных (s,t) с областью определения $t \geq 0, a(t)t + s \geq 0$.

Лемма. *Пусть $a(t)t \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\limsup_{t\to\infty} \max_{|s|\leq T} a(s,t) < \infty, \quad \forall T > 0$. Тогда для любой последовательности t_k существуют подпоследовательность t_{k_j} и ограниченная, измеримая на каждом отрезке матрица-функция $\tilde{A}(s)$ такие, что*

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^s A(\tau, t_{k_j}) d\tau = \int_0^s \tilde{A}(\tau) d\tau \tag{2}$$

равномерно на каждом отрезке.

Через $H(A,a)$ обозначим множество всех матрица-функций $\tilde{A}(t)$, определенных равенством (2), когда t_k пробегает всевозможные последовательности, стремящееся к бесконечности при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы. Уравнение (1) разрешимо в пространстве C для любой вектор-функции $g \in CV_\beta$ тогда и только тогда, когда семейство однородных уравнений $y' + \tilde{A}(t)y = 0$, $\tilde{A} \in H(A,a)$ не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений.*

Elliptic boundary-value problems in refined scale of function spaces

Murach. A. (Kyiv)

The talk deals with applications of some spaces of generalized smoothness to the theory of elliptic boundary-value problems (EBVPs). We consider the special Hilbert scale of the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyakh

$$H^{s,\varphi} := H_2^{\langle\cdot\rangle^s \varphi(\langle\cdot\rangle)}, \quad \langle\xi\rangle := \left(1 + |\xi|^2\right)^{1/2},$$

parametrized by means two parameters. The first parameter is a real number, but the second one is a slowly varying at $+\infty$ function in the Karamata's sense. In particular it is possible that the standard function

$$\varphi(t) = (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \ldots (\log\ldots\log t)^{r_n},$$

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

This scale is refined with respect to a scale of the Sobolev spaces $\{H^s\} \equiv \{H^{s,1}\}$.

The following main questions are studied:

- interpolation with functional parameter and the refined scale;

- local refined regularity of the solution of EBVP;
- refined a priori estimates of the solution of EBVP;
- Fredholm property of EBVP in the refined scale;
- semihomogeneous EBVPs in the complete two-sided refined scale;
- EBVPs with a parameter.

The results of the talk are obtained jointly with V. Mikhailets and are published in [1-3].

References

[1] Mikhailets V. A., Murach A. A. *Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I, II, III // Ukr. Math. J.* ***58*** *(2006), № 2, 244 - 262; № 3, 398 - 417;* ***59*** *(2007), № 5, 679 - 701.*

[2] Mikhailets V. A., Murach A. A. *An elliptic operator with homogeneous regular boundary conditions in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Mpth. Bull.* ***3*** *(2006), № 4, 547 - 580.*

[3] Mikhailets V. A., Murach A. A. *Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J.* ***58*** *(2006), № 11, 1536 - 1555.*

Оценки спектра одного класса гиперболических операторов в неограниченной области с растущими и колеблющимися коэффициентами

Муратбеков М.Б. (Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им А.Ясави)

Известно, что для эллиптических операторов асимптотическое распределение собственных значений в случае неограниченной области с коэффициентами растущими на бесконечности исследовано достаточно полно. В тоже время для гиперболических операторов этим вопросам посвящено гораздо меньше работ.

На $C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$ рассмотрим дифференциальный оператор гиперболического типа

$$L_0 = u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u,$$

где

$$\Omega = \{(x,y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\},$$

$C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$ - множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям: $u(-\infty,y) = u(\infty,y)$, $u_x(-\infty,y) = u_x(\infty,y)$ и финитных по переменной y.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие i):* $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, $|c(y)| \geq \delta > 0$. *Тогда оператор* $L + \lambda E$ *при достаточно больших* $\lambda > 0$ *непрерывно обратим.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие i). Тогда резольвента оператора* L *компактна тогда и только тогда, когда для любого* $w > 0$

$$\lim_{|y|\to\infty} \int\limits_{y}^{y+w} c(t)dt = \infty.$$

Введем следующую функцию $N(\lambda) = \sum\limits_{s_k=1} 1$ количество s_k больших $\lambda > 0$, где s_k – s-числа оператора L^{-1}.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-1/2}mes\left(y\in R: Q_n^*(y)\le c^{-1}\lambda^{-1/2}\right)\le N(\lambda)\le$$

$$\le c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-1}mes\left(y\in R: K_n^*(y)\le c^{-1}\lambda^{-1}\right),$$

$$\text{где}\quad Q_n^*(y)=inf\left\{\frac{1}{d}: d^{-3}\ge\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}\left|n^2+ina(x)+c(x)\right|^2dx\right\},$$

$$K_n^*(y)=inf\left\{\frac{1}{d}:\frac{1}{d}\ge\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}\left(|na(x)|+c(x)\right)dx\right\},\quad c>0.$$

Ранее такого вида функции впервые, случае эллиптических операторов, были введены в работе [1].

Пример.

$$L_0u=u_{xx}-u_{yy}+\left(e^{|x|}sin^2(exp\,exp\,exp\,x^2)+2\right)u_x+\left(|x|sin^2(exp\,exp\,exp\,x^2)+1\right)u.$$

Литература

1. Отелбаев М.О. *Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля.* //Алма-Ата, Гылым. 1990г., 191 с.

2. Муратбеков М.Б. // Дифференциальные уравнения, 1991г., т.27, №16, с.2127-2137с

3. Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.//Математический журнал. Алматы. 2005. т.5, №2. с58-67.

$*$ - Алгебры τ - измеримых операторов

Муратов М.А. (Таврический Национальный Университет, Симферополь)

Пусть M - полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, $P(M)$ - решетка всех ортопроекторов из M, $S(M)$ $*$-алгебра измеримых операторов, присоединенных к M, $Tr(M)$ множество всех точных нормальных полуконечных следов на M и $\tau\in Tr(M)$.

Замкнутый линейный оператор T с областью определения $D(T)\subset H$, называется *τ-измеримым относительно алгебры фон Неймана M*, если $T\eta M$, $D(T)\eta M$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такой проектор $P\in P(M)$, что $P(H)\subset D(T)$ и $\tau(P^{\perp})\le\varepsilon$.

Обозначим через $S(M,\tau)$ множество всех τ- измеримых операторов.

Ясно, что

$$M\subset\bigcap_{\tau\in Tr(M)}S(M,\tau)\subset\bigcup_{\tau\in Tr(M)}S(M,\tau)\subset S(M).$$

Теорема 1. 1) Если M - фактор типа I, то

$$M = \bigcap_{\tau \in Tr(M)} S(M,\tau) = \bigcup_{\tau \in Tr(M)} S(M,\tau) = S(M).$$

2)Если M - фактор типа II_∞, то

$$M \neq \bigcap_{\tau \in Tr(M)} S(M,\tau) = \bigcup_{\tau \in Tr(M)} S(M,\tau) = S(M).$$

Пример. Пусть M - коммутативная алгебра фон Неймана, являющаяся C^* - произведением континуального числа экземпляров алгебры фон Неймана $L_\infty([0,1],m)$ всех ограниченных измеримых комплексных функций, заданный на отрезке $[0,1]$ с линейной мерой Лебега m. Тогда $\bigcup_{\tau \in Tr(M)} S(M,\tau) \neq S(M)$.

Теорема 2. 1) Пусть $\tau_1, \tau_2 \in Tr(M)$,. Следующие условия эквивалентны:
(i) $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$;
(ii) $P(M,\tau_1) = \{P \in P(M) : \tau_1(P) < \infty\} \subset \{P \in P(M) : \tau_2(P) < \infty\} = P(M,\tau_2)$.
2) Для $\tau \in Tr(M)$ следующие условия эквивалентны:
(i) $S(M) = S(M,\tau)$;
(ii) $P(M,\tau) = \{P \in P(M) :\ P$ - конечный проектор$\}$.

On asymptotic closeness of solutions of differential and differential-difference parabolic equations

Muravnik A.B. (Voronezh, Russia)

The Cauchy problem with a bounded continuous initial-value function is considered for the differential-difference equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{(a,b)}u \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}u(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+b_{ij},x_{i+1},\dots,x_n,t), \tag{1}$$

where m_i are natural, while a_{ij} and b_{ij} are real.

The main result presented is as follows:

If the operator $\frac{\partial}{\partial t} - L$ *is parabolic, then the solutions of the above Cauchy problem for Eq.* (1) *and of* $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right)u = 0$ (*with the same initial-value function*) *are asymptotically closed with the weight* $e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}}$, *where L stands for the differential operator obtained from $L_{(a,b)}$ by replacing of all its nonlocal terms by their Taylor expansions up to the second-order terms* (*i.e., the order of the equation*).

Note that the *weighted* solution of the Cauchy problem for Eq. (1) is asymptotically closed to the solution of the Cauchy problem for a differential parabolic equation different from $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right)u = 0$ (see [1]).

References

[1] A. B. Muravnik, On the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for some differential-difference parabolic equations, *Differ. Equ.*, **41** (2005), No 4, 570–581.

О спектре возмущений дробных степеней дифференциальных операторов

Муртазин Х. Х. (г. Уфа)

В $l^2(\mathbb{N})$ изучается оператор $L = L_0 + V$, где L_0 и V бесконечные матрицы, $L_0 = diag\{k^\gamma\}_{k=1}^\infty$, $\gamma \geq 1$, V симметрическая L_0-компактная матрица. Тогда L самосопряжен, $D(L) = D(L_0) = \{u = (u_k)_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \mid (k^\gamma u_k)_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})\}$. Отметим, что оператор L унитарно эквивалентен возмущению дробной степени оператора $H_0u(x) = -u''(x)$, $u(0) = u(\pi) = 0$, заданного в $L^2[0,\pi]$.

Оператор L имеет дискретный спектр. Мы исследуем асимптотику спектра и формулы следов. Сформулируем результаты, относящиеся к случаю $\gamma = 1$, $(Ve_k, e_m) = b_{k-m}$, $b_k = \bar{b}_{-k}$, где $e_k = (\delta_{km})_{m=1}^\infty$ - базисные векторы в $l^2(\mathbb{N})$. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность собственных чисел оператора L, пронумерованная в порядке роста и с учетом кратностей. Сформулируем один из основных результатов наших исследований.

Теорема. Пусть $\gamma = 1$, $\sum_k |b_k|^2 < \infty$. Тогда $\lambda_n = n + b_0 + \mu_n$, где при $n >> 1$ $\mu_{n+1} \leq \mu_n \leq 0$, $\sum_k |\mu_k| < \infty$, причем справедлива формула следа $\sum_{n=1}^\infty [n + b_0 - \lambda_n] = \sum_{l=1}^\infty |b_l|^2$.

Работа выполнено при поддержке гранта РФФИ 05-01-00515а.

Почти периодические колебания в системах с медленно меняющимися параметрами

Музафаров С. М. (Сибайский институт Башкирского государственного университета)

В докладе изучается нелинейная система

$$x' = A(\lambda)x + a(x,\lambda), x \in R^n, \lambda \in R^1,$$

где $A(\lambda)$ квадратная матрица, завиящая от параметра λ, а нелинейность $a(x,\lambda)$ - удовлетворяет условию $a(x,\lambda) = o(|x|)$, $|x| \to 0$.

Предполагается, что значение λ_0 параметра является точкой бифуркации Андронова-Хопфа, при этом параметр λ меняется по периодическому закону $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\varphi(t)$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр. Показано, что бифуркация Андронова-Хопфа преобразуется в бифуркацию почти периодических колебаний. Определены асимтотические формулы для возникающих колебаний, а также исследована их устойчивость. В качестве приложения рассмотрено классическое уравнение Ван-дер-Поля.

Понятие запаса устойчивости равновесной консервативной системы

Мышкис А.Д., Филимонов А.М.

Запасом устойчивости (потенциальным барьером) консервативной системы, находящейся в изолированном состоянии устойчивого равновесия, мы называем наибольшее значение кинетической энергии, после сообщение которой системе она возвращается, при включении как угодно малой диссипации энергии, в исходное состояние при неограниченном возрастании времени. В докладе приводятся примеры подсчета запаса устойчивости для конкретных механических систем, рассматриваются соответствующие численные методы.

Об одном свойстве дифференциального уравнения на графе

Мустафокулов Р. (Таджикский государственный национальный университет)

Пусть Г-связный геометрический граф в R^3, состоящий из ребер γ_i $(i = \overline{1,n})$ и множество $J(\Gamma)$ внутренних вершин. Множество граничных вершин графа Γ обозначим через $\partial\Gamma$. Объединение внутренних точек ребер γ_i обозначим через $R(\Gamma)$, а множество номеров ребер, содержащих вершину a обозначим через $I(a)$.

Под дифференциальным уравнением на граф Γ мы будем понимать дифференциального уравнения на $R(\Gamma)$

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \tag{1}$$

в совокупности с условиями согласования в вершинах $a \in J(\Gamma)$:

$$y''(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} \left[(p_i y_i'')' - q_i y_i'\right](a+0) + \rho(a)y(a) = 0. \tag{2}$$

Для уравнения на графе мы будем рассматривать краевую задачу, задавая в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$ условия

$$y(b) - \alpha(b)\left[(py'')' - qy'\right](b-0) = 0, \quad \beta(b)y'(b-0) + \delta(b)y''(b) = 0. \tag{3}$$

Далее всюду предполагается, что задача (1) – (3) является невырожденной.

Теорема. *Пусть* $f(x) \equiv 0$ *вне некоторого подграфа* Γ_0, *состоящего из цепочки ребер* $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = \overline{1,k})$, *где* a_0, a_k *принадлежат множеству* $\partial\Gamma$, *а* $a_1, \ldots, a_{k-1}$ *- множеству* $J(\Gamma)$.

Тогда задача (1) – (3) на Γ *сводится к задаче на* Γ_0, *где условие согласования во внутренних вершинах* $a_i (i = \overline{1, k-1})$ *имеет вид*

$$\left[(py'')' - qy'\right](a_i+0) - \left[(py'')' - qy'\right](a_i-0) + \rho_i(a_i)y(a_i) - \sum_{j\neq i}\rho_j(a_i)y(a_j) = 0.$$

Такое сведение оказывается очень удобным, например, при анализе спектральных свойств соответствующей задачи на графе, у которой правая часть сосредоточена лишь на некоторой части графа.

Название.

Наимов А.Н. (ВоГТУ)

Рассматривается вопрос о существовании нестационарных ограниченных траекторий у автономной системы

$$z' = \overline{(z-a)^{m_1}(z-b)^{m_2}(z-c)^{m_3}}, \tag{1}$$

где $z = x + iy \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ - комплексная плоскость, a, b, c - попарно различные комплексные числа, m_1, m_2, m_3 - натуральные числа. Данный вопрос представяет интерес при исследовании условий существования периодических решений для систем вида $w'' = \overline{Q_m(w, w')} + f(t, w, w')$, $\quad w \in \mathbf{C}$, где Q_m - однородный многочлен степени m, f - непрерывное отображение из $\mathbf{R} \times \mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}$, периодическое по t и удовлетворяющее условию $(|w_1| + |w_2|)^{-m}|f(t, w_1, w_2)| \Rightarrow 0$ при $|w_1| + |w_2| \to \infty$.

Для любого решения $z(t)$ системы (1) имеем: $(d/dt)V(z(t)) = 0$, $(d/dt)U(z(t)) = |(d/dz)F(z(t))|^2$, где $F(\zeta) = \int_0^\zeta (s-a)^{m_1}(s-b)^{m_2}(s-c)^{m_3}ds$, $V(\zeta) = Im(F(\zeta))$, $U(\zeta) = Re(F(\zeta))$. Отсюда, в силу общих свойств траекторий автономных систем на плоскости (см. [1]), следует, что у системы (1) может существовать не более двух нестационарных ограниченных траекторий, и таких траекторий вовсе не существует, если попарно различны $V(a), V(b), V(c)$. Поэтому достаточно рассмотреть два случая: $V(a) = V(b) = V(c)$ и $V(a) = V(b) \neq V(c)$.

Теорема 1. *Для системы (1) в случае* $V(a) = V(b) = V(c)$ *существуют две нестационарные ограниченные траектории, а в случае* $V(a) = V(b) \neq V(c)$ *при выполнении условия*

$$V(c) \neq V((1-\mu)a + \mu b) \quad \forall \mu \in [0, 1]. \tag{2}$$

существует ровно одна нестационарная ограниченная траектория.

В общем случае из существования ровно одной нестационарной ограниченной траектории не следует выполнение условия (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $a = 0$, $b = \exp(i\varphi)$, $V(b) = 0$, $V(c) \neq 0$. *Тогда* $\sin(4\varphi) \neq 0$, $c = 0,5\exp(i\varphi) + \lambda\exp(-i3\varphi)$, λ *- вещественное, и у системы (1) существует ровно одна нестационарная ограниченная траектория только в том случае, когда* $4\lambda^2 > k_0$, *где* k_0 *- наименьший положительный корень уравнения*

$$\sin(12\varphi)k^2 - 6\sin(4\varphi)k + 3\sin(4\varphi) = 0.$$

Литература

[1] Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.*

The Dirichlet problem to critical semilinear Schrödinger equation

Nazarov A.I. , Demyanov A.V. (St.-Petersburg State University)

We consider the embedding theorem

$$\lambda_\sigma = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla v\|_{p,\Omega}}{\||x|^{\sigma-1}v\|_{p^*_\sigma,\Omega}} > 0; \tag{1}$$

here $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 2$, $\quad 1 < p < \infty$, $\quad 0 \leq \sigma \leq \min\{1, \frac{n}{p}\}$, $\quad p^*_\sigma = \frac{np}{n-\sigma p}$.

Since p^*_σ is the limit embedding exponent, the embedding (1) is not compact, and the problem of existence of a minimizer to the problem (1) is nontrivial.

Remark. Under suitable normalization the minimizer of (1) is a positive solution of the Dirichlet problem to the nonlinear Schrödinger equation

$$-\Delta_p u = \frac{u^{p^*_\sigma - 1}}{|x|^{(1-\sigma)p^*_\sigma}} \quad \text{in} \quad \Omega; \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

If $p = n$ then the power of $|x|$ in (2) does not depend on σ and equals n.

For $p < n$ and $0 \in \Omega$ the infimum in (1) is never attained if the complement of Ω is not negligible. The case $0 \in \partial\Omega$ is more complicated.

In [1] the existence of minimizer in (1) and, therefore, the solvability of the problem (2) was proved for $0 < \sigma < \min\{1, \frac{n}{p}\}$ if Ω is a cone. The survey [2] contains some results for Ω being a "perturbed" cone.

We prove the attainability of the infimum in (1) for $p = 2$ in a bounded domain Ω. The boundary is assumed to be **average concave** at zero, with some additional regular behaviour conditions. Our requirements are considerably weakened, compared with [3], where this problem was investigated for $n \geq 3$.

This work was supported by grant NSh 8336.2006.1 and by RFFR grant 05-01-01063.

References

[1] A.I. Nazarov, *Hardy - Sobolev inequalities in a cone*, Problems of Math. Anal., 2005, V.31, P.39–47 (Russian). English transl. in J. Math. Sci., V.132 (2006), N4, P.419–427.

[2] A.I. Nazarov, *Dirichlet and Neumann problems to critical Emden–Fowler type equations*, Journal of Global Optimization, to appear.

[3] N. Ghoussoub, F. Robert, *Concentration estimates for Emden–Fowler equations with boundary singularities and critical growth*, Int. Math. Res. Papers,. V.2006 (2006), P.1–85.

[4] A.V. Demyanov, A.I. Nazarov, *On solvability of Dirichlet problem to semilinear Schrödinger equation with singular potential*, ZNS POMI, V.336 (2006), P.25–45 (Russian). To be translated in J. Math. Sci.

Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions under the boundary concentration of heavy masses

Nazarov Sergueï A. (Institute of Mechanical Engineering Problems, St Petersburg)

In the rectangle $\Omega = (0, H) \times (0, 1)$ the spectral Dirichlet problem is considered for the equation

$$-\Delta u(\varepsilon, x) = \lambda(\varepsilon)(1 + \varepsilon^{-2-m}\rho(\varepsilon^{-1}x)u(\varepsilon, x),$$

while $\lambda(\varepsilon)$ denotes a spectral parameter, $\varepsilon = N^{-1}$ a small geometrical parameter, $m \geq 0$ the heaviness exponent and ρ the function which vanishes everywhere except for the family of the sets $\omega_n(\varepsilon) = \{x : (Nx_1 - n, Nx_2) \in \omega\}$ where it is equal to 1. By ω, a domain in the semi-strip $\Pi = (0, 1) \times (0, +\infty)$ is understood and $n = 0, \dots, N - 1$.

The asymptotic behavior of the eigenvalues $\lambda_k(\varepsilon)$ is to be described with the help of several limit problems in the domains Ω and Π. In dependence on distribution of their eigenvalues, there appear several asymptotic ansätze for the eigenvalues and eigenfunctions, for example, in the case $m = 2$

$$\lambda_{k,j}(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon\mu_j + \dots,$$

$$\lambda^{\pm}_{k,j}(\varepsilon) = \Lambda \pm \sqrt{\varepsilon}M_j + \dots,$$

where λ_k, μ_j and Λ, M are eigenvalues of certain differential and algebraic spectral problems which will be listed during the talk. The asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions are justified with different and adequate merit of precision.

The results are obtained in cooperation with Prof. Dr. M.-E. Pérez (Santander, Spain).

The research of the special subset of Hilbert space for the nonvoid content

Nazyrova R. R. (г.Казань)

Theorem 1. Let there is the set $\Gamma = [\overline{\gamma}|\overline{\gamma} = (x_1, x_2, ...), x_j > 0, \forall j = 1, 2, ...] \subset l_2$, for the each point $\overline{\gamma} = (x_1, x_2, ...)$ of which the structure $\sum_{j=1}^{\infty} x_j(\alpha_j - \beta \ln x_j)$, $|\alpha_j| \leq \overline{\alpha}$, $\forall j = 1, 2, ...$, $\beta > 0$, presents the absolute convergent progression. Let for the each point $\overline{\gamma} = (x_1, x_2, ...)$ of the set Γ there are correct equations

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \pi_0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = \pi_i,$$

where $a_{ij} \geq 0$, $\pi_0 > 0$, $\pi_i > 0$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, 2, ...$ The set Γ isn't empty and at least includes the points by the coordinates

$$x_j = \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{1}{\phi(p_k)} \frac{1}{p_k^j},$$

or the points by the coordinates

$$x_j = \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{1}{\psi(r_k)} \frac{1}{j^{r_k}},$$

where $p_k > 1, \forall k = 1, .., m$, and

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^j} = \phi(p_k),$$

$r_k > 1, \forall k = 1, .., m$, and

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{r_k}} = \psi(r_k),$$

$t_k \geq 0, \forall k = 1, .., m$, and

$$\sum_{k=1}^{m} t_k = \pi_0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} t_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{r_k}} \frac{a_{ij}}{\psi(r_k)} = \pi_i,$$

$$\sum_{k=1}^{m} t_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^j} \frac{a_{ij}}{\phi(p_k)} = \pi_i.$$

Численный анализ абсолютной и конвективной устойчивости ламинарных течений в каналах

Нечепуренко Ю. М. (г. Москва), Бойко А. В. (г. Новосибирск)

Линейные части u', v', w', p' возмущений компонент скорости и давления для течения $u = 0$, $v = 0$, $w = W$ вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале $\{(x, y, z): (x, y) \in \Sigma, -\infty < z < \infty\}$ постоянного сечения Σ с кусочно гладкой границей удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + W\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + W\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v' = 0,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}u' + \frac{\partial W}{\partial y}v' + W\frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

с нулевыми граничными условиями для u', v', w' на стенках канала.

Особый интерес представляют задачи об абсолютной и конвективной устойчивости [1], которые состоят в исследовании свойств решений двух следующих видов:

$$u' = u''e^{\mathrm{i}\alpha z},\ v'v''e^{\mathrm{i}\alpha z},\ w' = w''e^{\mathrm{i}\alpha z},\ p''p''e^{\mathrm{i}\alpha z},$$

где α заданная вещественная константа, а u'', v'', w'', p'' функции x, y и t, не зависящие от z, и

$$u'u'''e^{\mathrm{i}\omega t},\ v' = v'''e^{\mathrm{i}\omega t},\ w' = w'''e^{\mathrm{i}\omega t},\ p'' = p'''e^{\mathrm{i}\omega t},$$

где ω заданная вещественная константа, а u''', v''', w''', p''' функции x, y и z, не зависящие от t. Предполагается, что $u'' = v'' = w'' = 0$ и $u''' = v''' = w''' = 0$ при $(x, y) \in \partial\Sigma$.

Данный доклад посвящен постановке, обоснованию и численному исследованию отвечающих этим решениям задач Коши. Особое внимание уделяется редукциям, позволяющим существенно уменьшить алгебраическую размерность соответствующих задач, полученных после дискретизации по пространственным переменным. В качестве иллюстрации рассматривается течение Пуазейля в канале прямоугольного сечения.

Литература

[1] P. J. Schmid, D. S. Henningson *Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer, 2000.*

Moving Internal Layers in the Singular Perturbed Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations[2]

Nefedov N.N. , Nikitin A.G. (Moscow State University),
Recke L. (Humboldt-Universität zu Berlin)

Mathematical problems concerning reaction-advection-diffusion equations describe many important practical applications in chemical kinetics, synergetics, astrophysics, biology, etc. Recently there is an increasing interest to more complicated models, which include the effects of feedback or non-local interaction. These models are represented by integro-differential equations. In this work we consider the initial boundary value problem

$$-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon A(x, \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} -$$

[2] This work was partially supported by RFBR-DFG grant N06-01-04004 and the program of cooperation of the Moscow State University and the Humboldt University of Berlin.

$$- \int_a^b g(u(x,t,\varepsilon), u(s,t.\varepsilon), x, s, \varepsilon)\, ds = 0, \quad a < x < b, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b,t,\varepsilon) = 0, \quad u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon) \tag{2}$$

and investigate the existence of moving internal layer solutions($\varepsilon > 0$ is a small parameter).

The corresponding stationary boundary value problem for the case $A \equiv 0$ was considered in [1]. Our results develop and extend methods proposed in [1] and [2] to a new more complicated class of problems.

The reduced equation is a integral. Following to the investigation in [1], in order to describe internal layer solution we introduce a family of discontinuous solutions of this integral equation. We show that, under some assumptions, problem (1), (2) has moving internal layer solution which is close to the some discontinuous solutions of this family when the small parameter ε tends to zero.

References

[1] Nefedov N.N. and Nikitin A.G., Elaboration of the Asymptotic Method of Differential Inequalities for Step-Like Solutions to Singularly Perturbed Integro-Differential Equations, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2001. vol. 41. no. 7. pp. 1057–1066.

[2] Nefedov N.N., Radziunas M., Schneider K.R., Vasil'eva A.B., Change of the Type of Contrast Structures in Parabolic Neumann Problems, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2005. vol. 45. no. 1. pp. 41–55.

О критериях применимости теорем Чернова и Троттера

Неклюдов А. Ю. (г. Москва)

Теоремой Чернова ([1] , [2]) называют следующее утверждение:
Пусть F — *отображение из* $[0,\infty)$ *в пространство непрерывных линейных операторов* $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ *в банаховом пространстве* $\mathbf{X}$ *такое, что* $\mathrm{F}(0) = \mathrm{I}, \|\mathrm{F}(t)\| \leq \exp(at)$ *для некоторого* $a \in \mathbb{R}$. *Пусть* $\mathbf{D}$ — *существенная область определения для генератора* C *полугруппы* $\exp(t\mathrm{C})$ *и ограничение* $\mathrm{F}'(0)$ *на* $\mathbf{D}$ *совпадает с ограничением* C *на* $\mathbf{D}$. *Тогда* $\mathrm{F}(t/n)^n \to \exp(t\mathrm{C})$ *при* $n \to \infty$ *в сильной операторной топологии равномерно относительно* $t \in [0,T]$ *для каждого* $T > 0$.
В реальных задачах часто неясно, существует ли такой генератор C, для которого область определения $\mathrm{F}'(0)$ будет существенной областью и, следовательно, вышеприведённая теорема непосредственно не может быть использована для доказательства существования предела последовательности $\{\mathrm{F}(t/n)^n\}$, при $n \to \infty$ в какой-либо топологии и не проясняет вопрос существования решения задачи Коши уравнения $\dot{x} = \mathrm{F}'(0)x$. В данной статье доказываются утверждения, дающие естественные критерии, когда область определения $\mathrm{F}'(0)$ будет существенной областью для некоторого генератора C, а также рассматриваются различные другие вопросы, связанные с этой проблематикой. Как одно из следствий полученных результатов в работе выводится критерий, когда сумма генераторов полугрупп будет также генератором некоторой полугруппы. Также результаты статьи могут быть использованы для доказательства существования решения бесконечномерного уравнения Шрёдингера и представления этого решения в виде Фейнмановских интегралов.

Литература

[1] Chernov P. R. *J. Funct. Anal. 84, 238 (1968).*

[2] Davies E. B. *One-Parameter Semigroups, St. John's College, Oxford, England (1980).*

Effective transmission conditions for reaction-diffusion processes in domains separated by an interface

Maria Neuss-Radu, , Willi Jäger (University of Heidelberg, Germany)

We present multiscale methods appropriate for the homogenization of processes in domains containing thin heterogeneous layers. Our model problem consists of a nonlinear reaction-diffusion system defined in such a domain, and properly scaled in the layer region. Both the period of the heterogeneities and the thickness of the layer are of order ε. By performing an asymptotic analysis with respect to the scale parameter ε we derive an effective model which consists in the reaction-diffusion equations on two domains separated by an interface together with appropriate transmission conditions across this interface. These conditions are determined by solving local problems on the standard periodicity cell in the layer.

Our asymptotic analysis is based on weak and strong two-scale convergence results for sequences of functions defined on thin heterogeneous layers. For the derivation of the transmission conditions, we develop a new method based on test functions of boundary-layer type.

Multiscale simulation of diffusion and absorption in chloroplasts

Neuss N. (University Karlsruhe, Germany)

Protein translocation is a necessary biological process in cells structured by compartments. As a model for a protein translocation process we consider the chloroplasts of plant cells. Chloroplasts have an own genome, but not all proteins needed for example in photosynthesis are produced inside the chloroplast. A large set of such proteins still has to be imported into the thylakoids (where the actual photosynthesis is taking place) from the cytoplasm of the plant cell. In this contribution, we model this translocation process by diffusion through a complex medium with absorption occurring at the boundary of a complex inlay. The direct numerical simulation of is then demanding because of the intricate structure of the boundary. As a remedy, we present a homogenization approach where we replace nonlinear absorption at the boundary of the porous structure by a nonlinear sink term. We will estimate the modelling error numerically, and also demonstrate the validity of these estimates by numerical experiments.

О существовании решений краевых задач для (p, q)-нелинейных эллиптических уравнений

Нежинская И.В. (Санкт-Петербургский государственный университет)

Рассматривается класс (p,q)-нелинейных эллиптических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u_x) = b(x, u), \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Функции a_i, b считаем достаточно гладкими и предполагаем выполненными следующие условия:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x,\xi)\lambda_i\lambda_j \geq \nu\,(1+|\xi|)^{p-2}\,|\lambda|^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x,\xi)| \leq \mu\,(1+|\xi|)^{q-2}\,,$$

$$2 \leq p < q,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x,\xi)| \leq \mu_1\,(1+|\xi|)^{q-1}\,,$$

для $\xi, \lambda \in \mathbb{R}^n$, где ν, μ, μ_1 – положительные постоянные.
Для уравнения (1) изучается краевая задача Дирихле

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

и краевая задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma_a}(x) + \psi(x, u) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial \gamma_a}$ – конормальная производная на $\partial\Omega$. Для каждой из краевых задач устанавливаются допустимые ограничения на $q-p$ и границу области Ω, при которых можно доказать теорему существования гладких решений. При этом наиболее трудным этапом является получение априорной оценки максимума модуля градиента решения в приграничных подобластях области рассмотрения.

Работа поддержана грантами НШ 8336.2006.1 и РФФИ 05-01-01063.

Литература

[1] И.В. Нежинская, *Оценка на границе области градиента решения задачи Дирихле для (p,q)-нелинейного уравнения*, Проблемы математического анализа, вып. 27, (2004), 137–150.

[2] И.В. Нежинская, *О разрешимости краевой задачи для (p,q)-нелинейных эллиптических и параболических уравнений*, Проблемы математического анализа, вып. 29, (2004), 55–69.

[3] И.В. Нежинская, *Оценка градиента решения задачи Неймана для (p, q)-нелинейного уравнения*, Проблемы математического анализа, вып. 31, (2005), 47–57.

[4] И.В. Нежинская, *Проблема разрешимости для (p,q)-нелинейных уравнений*, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Санкт-Петербург, (2006).

On the smoothness with respect to time variable of generalized solution of the second initial boundary value problem for strongly Schrödinger systems in cylinders with nonsmooth base

Nguyen Manh Hung (Faculty of Mathematics, Hanoi National University of Education)

In this talk, we consider the second nonhomogeneous initial boundary value problem for strongly Schrödinger systems in cylinders with nonsmooth base. Some results on the unique solvability and the smoothness with respect to time variable of generalized solution of this problem are given.

О некоторых задачах идентификации в теории управления движением

Никольский М.С.

Теория идентификации является важной составной частью современной математической теории управления. В неё естественным образом включается теория наблюдаемости, в основе которой лежат известные результаты Р. Калмана. Целью теории идентификации является восстановление некоторых характеристик управляемого движения по наблюдениям, например, проекции фазового вектора.

Сообщение состоит из 3-х частей. В первой части для линейной задачи управления рассматривается вопрос о вычислении начального состояния управляемого объекта и постоянного управления по дискретным наблюдениям проекции фазовой траектории. Здесь оказываются полезными некоторые результаты из теории неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Во второй части опять же для линейной задачи управления рассматривается вопрос о вычислении начального состояния объекта и переменного управления по наблюдениям проекции фазовой траектории. Здесь продолжены прежние исследования автора по идеальной наблюдаемости. В частности, были использованы некоторые результаты из операторного исчисления Я. Микусинского, которое ранее использовалось в работах Р.В. Гамкрелидзе и автора в теории дифференциальных игр для задач убегания при рассмотрении соответствующих векторных интегральных уравнений первого рода типа Вольтера в свёртках. Интересно отметить, что при найденных условиях на пара- метры задачи для приближенного нахождения неизвестного управления по дискретным наблюдениям здесь оказываются полезными известные конструктивные результаты Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского по обратным задачам математической теории управления.

В третьей части результаты второй части применяются для одного класса задач управления с нелинейной динамикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00193, 05-01-08034-офи_п, 06-01-00359-а).

Исследование одного частного случая уравнения нелинейной теплопроводности

Никольский И. М.

В работе исследуется нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1) \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $0 < u_0 < u_1$.

Построено семейство точных периодических решений уравнения (1), имеющих вид $u(x,t) = p(t) + q(t)\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, где коэффициенты $p(t)$, $q(t)$ удовлетворяют некоторой автономной динамической системе.

Аналитическое исследование этой системы показало, что среди решений из данного семейства существуют как функции, развивающиеся в режиме с обострением, так и релаксирующие к фону u_0. Было установлено, что при определенных начальных условиях на $p(0)$, $q(0)$ функции $p(t)$ и $q(t)$ существуют в течение конечного промежутка времени $[0, T_0)$, причем $\lim\limits_{t\to T_0^-} p(t)/q(t) = 1$.

Также исследовалась задача Коши для уравнения (1). Среди начальных функций наибольшее внимание было уделено локализованным возмущениям ненулевого фона u_0. С помощью теорем сравнения и метода пробных функций были получены различные условия на начальное возмущение, при которых соответствующее решение может развиваться в режиме с обострением или затухать (т.е. поточечно стремиться к u_0).

Численное исследование уравнения показали наличие локализации неограниченных решений (такое же явление наблюдается для решений уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}$, см. [1], [2]).

Литература

[1].Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* // М.: Наука, 1987.

[2].Курдюмов С.П., Куркина Е.С. *Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с исток-источником.* // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. N 9. С. 1619-1637.

[3].Galaktionov, V.A. *Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A., 1995, N 2, 225-246.

The existence of step-type structure solutions for a class of singularly perturbed optimal control problems [3]

Ni Ming Kang (Department of Mathematics, East China Normal University Shanghai; Division of Computational Science, E-Institute of Shanghai Universities, at SJTU)

The existences of step-type structure solutions for a class of variational problems were discussed in [1],[2], and the asymptotic solutions are constructed. It was late 90's last century to begin studying the equations with the solutions of space comparison structures [3]-[5]. In those papers, it was mainly discussed the solutions with step-type structures and strike-type structures, which is the mainstream direct to research singular perturbation recently. In this paper, the existence of step-type structure solutions is proved, for optimal control problems of continuous systems, under the control actions with no constraint conditions. So it is shown that these problems have the space comparison structures. The constructive problems of asymptotic solutions for step-type structures will be discussed separately in other papers.

[3]Supported by National Science Foundation of China, grant No 10671070r. Supported in part by E-Institutes of Shanghai Municipal Eduction Commissionr N.E03004r. Funded by Open Research Funding Program of LGISEM; 05PJ14040

The following optimal control problems will be discussed.

$$J[u] = \int_0^T f(y,u,t)\,dt \to \min_u,$$

$$\mu y' = a(y,t)u + b(y,t),$$

$$y(0,\mu) = y^{\bullet}, \quad y(T,\mu) = y^T,$$

where $M > 0$ is a small parameter, $y(t)$,$u(t)$,$f(y,u,t)$ are scalar functions.

A₁ Suppose that $f(y,u,t)$ is twice continuously differentiable, and $a(y,t) > 0$, for $0 \le t \le T$.

A₂ Suppose that $f_{u^2}(y,u,t) > 0$, $f_{y^2}(y,u,t)$ for $0 \le t \le T$.

A₃ Suppose that there exist two functions $\bar{y} = \varphi(t)$, $\bar{y} = \psi(t)$, such that

1) $\min\limits_u f(\bar{y},\bar{u},\bar{t}) = \begin{cases} f(\varphi(\bar{t}),\bar{u}^{(-)},t), & 0 \le t \le t_0, \\ f(\psi(\bar{t}),\bar{u}^{(+)},t), & t_0 \le t \le T. \end{cases}$

2) $\lim\limits_{t\to t_0+} \psi(t) = \psi^+ \ne \varphi^- = \lim\limits_{t\to t_0-} \varphi(t)$. $\varphi(0) = y^0$, $\psi(T) = y^1$.

where the main value t_0 of transfer points of step-type structure solutions is determined by the following equation:

$$f(\varphi(t_0), u^{(-)}(t_0), t_0) = f(\psi(t_0), u^{(+)}(t_0), t_0),$$

If the above conditions are satisfied, the following main result can be obtained:

Theorem If the conditions A_1-A_3 are satisfied, then, for enough small value $\mu > 0$, there exists a step-type structure solution $y(t,\mu)$ for the above optimal control problems, which satisfies:

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,u) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \psi(t), & t_0 \le t \le T. \end{cases}$$

Литература

[1] Ни Минь Кань, Дмитриев М.Г. Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика// Автоматика и телемеханика. 1998. №5. С.41-52.

[2] Ни Минь Кань и др. О контрастной структуре типа ступеньки для задачи вариационного исчисления// Ж.вычисл.матем. и матем. физики. 2004. Т.44. №7. С.1269-1278.

[3] Бутузов В.Ф.,Васильева А.Б. Об асимптотике решения типа контрастной структуры// Матем.заметки. 1987. Т.42. №6. С.31-41.

[4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. -М.: Высшая школа. 1990.

[5] Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Об асимптотической теории контрастных пространстных структур// Ж.вычисл.матем. и матем. Физики. 1988. Т.26. №3. С.346-361.

Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа

Новиков С. И. (г. Екатеринбург)

Пусть $n \ge 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B_R^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\}$ – открытый единичный шар радиуса $R > 0$ с центром в нуле, а $\left\{x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)})\right\}_{s=1}^N \subset B_R^n(0)$ – конечное множество точек интерполяции.

Определяем класс интерполируемых данных

$$M_\infty \;=\; \left\{z:\; z=\{z_j\}_{j=1}^N,\; \|z\|_{l_\infty^N}\le 1\right\},$$

где $\|z\|_{l_\infty^N}=\max\{|z_j|:\; j=1,2,\dots,N\}$, и класс интерполирующих функций

$$Y_\infty(z) \;=\; \Big\{f\in C^2(B_R^n(0))\bigcap C(\overline{B_R^n(0)}):\; f|_{|x|=R}=0,$$

$$f(x^{(s)})=z_s,\; s=1,2,\dots,N\Big\}.$$

Через Δ стандартно обозначается оператор Лапласа.

Рассматривается следующая величина:

$$A_\infty^N(B_R^n(0)) \;=\; \sup_{z\in M_\infty}\; \inf_{f\in Y_\infty(z)} \|\Delta f\|_{C(B_R^n(0))}.$$

Теорема. Если точки интерполяции выбраны так, что $|x^{(s)}|=R(\frac{s-1}{N})$, $s=1,2,\dots,N$, то

$$C_1\,\frac{N}{R^2}\le\; A_\infty^N(B_R^n(0))\;\le C_2\,\frac{N^2}{R^2},$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные константы, не зависящие от N и R.

Эти исследования были выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00949) и программы поддержки ведущих научных школ России (проект НШ – 5120.2006.1).

Discrete Complex Analysis.

Novikov S.P.

Few years ago we developed discrete version of Complex Analysis on the Equilateral Triangle Lattice in the joint work with Dynnikov. Key ideas were borrowed from the theory of Completely Integrable Systems.

Альтернативные дуальные фреймы для фрейма Парсеваля

Новиков С. Я. (г. Самара)

Пусть $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ — фрейм для гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Семейство $\{\psi_i\}_{i\in I}$ называется *альтернативным дуальным фреймом для* $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, если

$$x=\sum_{i\in I}\langle x,\psi_i\rangle\varphi_i, \qquad x\in\mathcal{H}.$$

Известно, что фрейм имеет единственный альтернативный дуальный фрейм тогда и только тогда, когда он является базисом Рисса.

Фрейм $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ называется *фреймом Парсеваля*, если

$$x=\sum_{i\in I}\langle x,\varphi_i\rangle\varphi_i, \qquad x\in\mathcal{H}.$$

Теорема 1. Если $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ является фреймом Парсеваля для $\mathcal{H}$, то он имеет единственный альтернативный дуальный фрейм Парсеваля, который совпадает с $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.

Теорема 2. Если $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ является фреймом Парсеваля для $\mathcal{H}$, то он имеет бесконечно много неэквивалентных между собой жестких альтернативных дуальных фреймов.

Определение. Последовательность $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *фреймом* для $\mathcal{H}$, если существуют постоянные $A > 0$, $B > 0$ такие, что

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Числа A и B называются *границами фрейма*. Если возможен выбор границ $A = B$, то фрейм называется *жестким*.

Резонансное возбуждение нелинейных волн в интегрируемых системах

Новокшенов В. Ю. (г. Уфа)

Нелинейные волны в интегрируемых моделях типа уравнений синус-Гордон и нелинейного Шредингера могут возбуждаться путем периодической накачки колебаниями малой амплитуды. Для достижения конечных амплитуд возбужденных волн следует выбирать частоты и волновые числа накачки близкими к собственным частотам и волновым числам. С ростом амплитуды должно выполняться "условие авторезонанса", то есть синхронизация волн с подходящей модуляцией частот и волновых чисел накачки (см. [1]). Для интегрируемого уравнения $\vec{u}_t + P(\vec{u}) = 0$, где $P-$ нелинейный дифференциальный оператор по пространственной переменной, рассматривается возмущение вида

$$\vec{u}_t + P(\vec{u}) = \varepsilon\vec{f}(x,t), \quad \varepsilon << 1, \tag{1}$$

с условно-периодической функцией $\vec{f}(x,t) = \vec{f}(\theta_1, \ldots \theta_n)$, $\theta_j = \kappa_j x - \nu_j t$, и нулевым начальным условием $\vec{u}(x,0) = 0$. Найдем условие возникновения n-частотного авторезонанса, то есть существования решения $\vec{u} = \vec{u}(\theta_1, \ldots \theta_n)$, такого что

$$\|\vec{u}\| = O(1), \quad t = O(\varepsilon^{-1}). \tag{2}$$

При почти всех начальных условиях n-периодические возмущенные решения (1) являются деформацией точных n-зонных решений невозмущенной системы (см. [2]). Их параметры зависят от первых интегралов системы, которые являются функциями медленных переменных $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$ и удовлетворяют уравнениям Уизема. Эти уравнения легко выводятся из усреднения правых частей путем зануления "секулярных" возмущений. Фазовые функции являются квазипериодическими, причем частоты однозначно определяются из (деформированных) первых интегралов.

Для анализа условий авторезонанса обратим описанную процедуру, а именно, для заданной деформации n-периодического решения найдем отвечающие ей правую часть f. Более точно, предположим, что существует деформация системы (1), переводящая n-периодическое решение в m-периодическое за конечный интервал медленного времени ($t \approx O(\varepsilon^{-1})$). При этом правая часть εf, вообще говоря, не будет мала, более того, может разрушиться гамильтонова структура системы. Чтобы избежать этого, наложим условия Уизема на первые интегралы, осуществляющие деформацию. Тогда, согласно теореме [2] о существовании уиземовских деформаций с заданными граничными условиями, правые части останутся малыми, система останется вполне интегрируемой в главной части по ε и выполнится условие (2).

Можно показать, что указанная процедура демонстрирует все характерные черты авторезонанса – медленный захват фазы и синхронизацию собственных частот с частотами накачки. Для широкого класса физически интересных систем [2] это описание представляется адекватным.

Литература

[1] Friedland L., Shagalov A. G., Phys.Rev. Lett., **90**, (2003) 1123 [2] Kuksin S. B., *Fifteen years of KAM for PDE*, Amer. Math. Soc. Transl. **2**, (2004) 237

Разрешимость в целом для некоторого класса гиперболических нелинейных уравнений

Нурлыбаев Н.А.

В области $(0,\infty) \times R^N \times R^N$ рассматривается задача Коши для квазилинейного гиперболического уравнения

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dl}u(t,\mathbf{x},\mathbf{c}) + u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})Q(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})) = P(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})), \\ u(0,\mathbf{x},\mathbf{c}) = u_0(\mathbf{x},\mathbf{c}) \end{array} \tag{1}$$

здесь $\frac{d}{dl} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\nabla_x$.

Лемма 1. Пусть $u(0,\mathbf{x},\mathbf{c}) > 0$, $P(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u) > 0$ при $u > 0$, $Q(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})) < \infty$ при $u0$ для всех $(t,\mathbf{x},\mathbf{c}) \in (0,\infty) \times R^N \times R^N$.

Доказательство методом от противного интегрируя уравнение вдоль характеристики $\frac{d}{dl} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\nabla_x$. Очевидно также, что условие положительности решения с помощью предельного перехода можно заменить заменить на условие неотрицательности.

Легко видеть, что уравнение Больцмана

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}) =$$

$$= \int_{R^N} [f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}')f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}_1') - f(t,\mathbf{x},\mathbf{c})f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}_1)]g d\sigma(g,\Omega)d\mathbf{c}_1, \tag{2}$$

и производные от него кинетические уравнения, в том числе и дискретные модели [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c^i\nabla_{\mathbf{x}}\right)u_i = \sum_{l\neq j,k\neq i}^{n} \mu_{ij}^{kl}(u_k u_l - u_i u_j), \tag{3}$$

удовлетворяют Лемме 1, из которой следует оценка снизу (неотрицательность) решения сразу для всего класса квазилинейных уравнений (1). Используя идею доказательства Леммы 1 можно получить в некоторых случаях ограниченность решения сверху, из которой следует разрешимость в целом.

Рассмотрим задачу Коши для одномерной дискретной модели Карлемана [2].

$$\begin{cases} u_{1t} + u_{1x} = u_2^2 - u_1^2 & u_1(0,x) = u_1^0 \geq 0 \\ u_{2t} - u_{2x} = u_1^2 - u_2^2 & u_1(0,x) = u_1^0 \geq 0 \end{cases}$$

и ее N-мерное обобщение с диагональным столкновительным оператором

$$(\frac{\partial}{\partial t}+c^i\nabla_{\mathbf{x}})u_i \equiv \frac{d}{dl_i}u_i = \sum_{l,k\neq i}\mu_{kl}^{ii}(u_k u_l - u_i^2), \qquad \sum_{l,k\neq i}\mu_{kl}^{ii}=1 \tag{4}$$

Тогда для уравнений вида (4) справедливо следующее утверждение:
Пусть константа $0 < a$ такова, что все $u_i^0(\mathbf{x}) < a$, тогда $u_i(t,\mathbf{x}) < a$ для всех t и $\mathbf{x}$. Из этой априорной оценки следует глобальная разрешимость (4).

Литература

[1] N.Nurlybaev, Discrete Velocity Method in the Theory of Kinetic Equations, Transport Theory & Statistical Physics 1, (1993), 109-119.

[2] T.Carleman, Problemes Mathematiques de la Theorie Cinetique des Gas, Almquist and Wilksell, Upsala (1957).

Математическое моделирование бифуркационных задач в системе Maple

Нуров И.Д. (Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе)

Математическое моделирование часто требует детального изучения динамических систем, содержащих параметры. Одними из наиболее интересных явлений при изучении таких систем представляются различные бифуркации, означающие качественную перестройку функционирования системы. Обнаружение бифуркации является одним из важных этапов исследования динамической системы.

В настоящем докладе основным объектом является динамическая система описываемом неавтономным уравнением

$$x' = f(x,t,\lambda), \tag{1}$$

где вектор функция $f(x,t,\lambda)$ является гладкой по x и λ, непрерывной и T – периодической по t. Можно считать, что система (1) определена при $|\lambda-\lambda_0| \le \delta$. Пуст выполнено условие $f(0,t,\lambda)\equiv 0$, т.е. система (1) при всех λ имеет нулевое решение.

Значение λ_0 параметра λ называют точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (1), если существует последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ такая, что при $\lambda = \lambda_n$ уравнение (1) имеет ненулевое T–периодическое решение $x = x_n(t)$, причем $\max_t \|x_n(t)\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Через $A(t,\lambda)$ обозначим матрицу Якоби правой части системы (1), вычисленную в точке $x=0$, т. е. $A(t,\lambda) = f'_x(0,t,\lambda)$. Тогда система (1) может быть представлена в виде

$$x' = A(t,\lambda)x + a(x,t,\lambda), \quad x\in R^N, \tag{2}$$

$$\lim_{\|x\|\to 0}\max_{0\le t\le T}\frac{a(x,t,\lambda)}{\|x\|}=0.$$

Интерес представляет случай, когда параметр λ в системы (2) меняется по закону $\lambda=\lambda_0+\varepsilon t$ или $\lambda=\lambda_0+\varepsilon\sin\varepsilon t$. Предполагается, что выполнено условие отсутствия резонанса $T\neq\frac{2\pi k}{\omega_0}$, $\quad k=1,2,3,\ldots$ Уравнение (2) принимет вид

$$x' = A[t,\lambda_0+\delta\varphi(t)]x + a[x,t,\lambda_0+\delta\varphi(t)], \tag{3}$$

здесь $\varphi(t)$– периодическая функция, $\delta>0$. В качестве примера проведены результаты компьютерного моделирования уравнения Ван-дер-Поля и Дуффинга для различных функций $\varphi(t)$. Моделирование системы реализованы в среде Maple.

Литература

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560 с.

2.Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.// М.: Мир, 1985, № номер выпуска. 280 с.

3.Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1966. 332 с.

4.Нуров И.Д., Юмагулов М.Г. Автоматика и телемеханика. // 2002. N 5. С. 34-40.

5. Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. ДАН России, 1999. Т.365. N 2. С.162-164.

Boundedness of integral operators in Lorentz spaces.

Nursultanov E. (Astana), Tikhonov S. (Moscow)

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ be a measurable space where μ is σ-additive measure, $\mathfrak{F}$ is the algebra of the measurable sets with identity Ω. The distribution of a measurable function f on Ω is given by

$$m(\sigma, f) = \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\}.$$

Then $f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}$ is the decreasing rearrangement of f.

Let $0 < p \le \infty$ and $0 < q \le \infty$. We will say that f belong to the Lorentz space $L_{pq}(\Omega, \mu)$ if for $0 < q < \infty$,

$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty$$

and for $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{pq}} = \sup_t \ t^{1/p} f^*(t) < \infty.$$

The following result provides the sufficient conditions for the integral operator

$$Tf(y) = \int_D K(x,y) f(x) d\nu_x$$

to be bounded from $L_{p\theta}(D, \nu)$ into $L_{qr}(\Omega, \mu)$.

Let $M_1 = \{e \subset \Omega : 0 < \mu(e) < \infty\}$, $M_2 = \{w \subset D : 0 < \nu(w) < \infty\}$. For $e \in M_1$ and $w \in M_2$ we define

$$F(e, \omega) := F(e, \omega; K) := \frac{1}{\nu(\omega)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\mu(e)^{\frac{1}{q'}}} \left| \int_e \int_\omega K(x,y) d\nu \, d\mu \right|.$$

Theorem. Let $1 \le r, \theta, h \le \infty$, and $1/r + 1 = 1/h + 1/\theta$. If there exists $\gamma > 0$ such that

$$B = \left(\int_0^\infty \left(\sup_{\mu(e)/\nu^\gamma(w) = t} F(e,w) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{h}} < \infty \qquad \text{if} \quad h < \infty$$

and

$$B = \sup_{e \in M_1, \ \omega \in M_2} F(e,w) < \infty \qquad \text{if} \quad h = \infty,$$

then the integral operator Tf is bounded from $L_{p\theta}(D,\nu)$ into $L_{qr}(\Omega,\mu)$, $1 < p, q < \infty$, and

$$\|T\|_{L_{p\theta}\to L_{qr}} \leq C(p,q)\, B.$$

Moreover, in the case of $r = \infty$, $\theta = 1$, the condition $B < \infty$ is also necessary.

This work was supported by INTAS (05-1000008-815), the Russian Foundation for Fundamental Research (grant no. 06-01-00268), the Leading Scientific Schools (grant NSH-4681.2006.1), and Scuola Normale Superiore.

Banach Lie-Poisson spaces and integrable systems

Odzijewicz A.

We introduce a category of Banach Lie-Poisson spaces and show that the category of W^*-algebras can be considered as one of its subcategories [1]. Examples and applications of Banach Lie-Poisson spaces to infinite integrable systems will be presented. In particular we apply the notion of Banach Lie-Poisson space to the case of semi-infinite Toda lattice [2].

References

[1] A. Odzijewicz, T. Ratiu: Banach Lie-Poisson Spaces and Reduction, Comm. Math. Phys. 243(1) 1-54 2003

[2] A. Odzijewicz, T. Ratiu: The Banach Poisson geometry of the infinite Toda lattice, http://arxiv.org/abs/math.SG/0310318

К-субдифференциалы и К-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства.

Орлов И. В. , Стонякин Ф. С. (г. Симферополь)

Цель работы – обобщение понятия субдифференциала на невыпуклые и векторнозначные отображения.

Для отображения отрезка в вещественное ЛВП К-субдифференциал есть предел

$$\partial_K F(x) = K - \lim_{\delta\to+0}\left(\overline{conv}\left\{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\middle|0<|h|<\delta\right\}\right),$$

где $K - \lim$ означает топологическое стягивание множеств под знаком предела к их компактному пересечению. В случае выпуклого вещественного F определение дает обычный субдифференциал.

Рассмотрен ряд свойств К-субдифференциалов, включая субаддитивность, аналоги леммы Сакса, леммы Сарда и N-свойства Лузина. Это позволило получить аналог обобщенной формулы конечных приращений, доказанной ранее в [1].

Теорема 1. Пусть F непрерывно на $[a;b]$ и К-субдифференцируемо на $[a;b]\setminus e$, где $F(e)$ имеет нулевую скалярную меру. Если $\partial_K F(x) \in \varphi(x)\cdot B$, где B замкнуто и выпукло, $\varphi \geq 0$ и суммируема на $[a;b]\setminus e$, то

$$F(b) - F(a) \in \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(x)dx \cdot B$$

Вытекающую отсюда теорему о среднем приведем в простейшей форме.

Теорема 2. Если F непрерывно на $[a;b]$ и К-субдифференцируемо на $(a;b)$, то

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \in \overline{conv}\left(\bigcup_{a<x<b} \partial_K F(x)\right)$$

Обсуждаются дальнейшие перспективы теории К-субдифференциалов.

Литература

[1] Орлов И. В. *Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств* // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – Т.8. – №4. – С.419-439.

Обратная задача для абстрактного эллиптического уравнения.

Орловский. Д. Г. (г. Москва)

Рассматривается задача определения функции $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве X и элемента $p \in X$ из системы равенств

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + B(t)p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = 0,\ u(T) = 0, \\ u(\tau) = u_0, \end{cases}$$

где фиксированное число $\tau \in (0,T)$, A – линейный самосопряженный оператор в пространстве X с плотной областью определения $D(A)$, $B(t)$ – непрерывная скалярная функция, элемент $u_0 \in X$.

Теорема. *Пусть X – гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен, функция $B(t)$ гельдерова на отрезке $[0;T]$, причем $B(t) \not\equiv 0$. Тогда*

1. *Решение задачи единственно тогда и только тогда, когда точечный спектр оператора A не содержит нулей функции*

$$b(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda} sh(\sqrt{\lambda}T)}\left(sh\sqrt{\lambda}(T-\tau)\int_0^\tau sh(\sqrt{\lambda}\, s)\, B(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + sh(\sqrt{\lambda}\,\tau)\int_\tau^T sh\sqrt{\lambda}(T-s)\, B(s)\, ds \right),$$

2. *Обратная задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{+\infty} |b(\lambda)|^{-2} d(E_\lambda u_0, u_0) < +\infty,$$

где E_λ – разложение единицы оператора A.

О потенциалах для вырождающегося параболического уравнения и их применение к краевым задачам.

Орынбасаров М. О. (г. Алматы)

Рассматривается параболическое уравнение вида

$$\rho_0(t)u_t = L(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u + F(x,t), \tag{1}$$

где $L(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ — линейный эллиптический оператор 2-го порядка, коэффициент $\rho_0(t) \geqslant 0$ при $0 < t < T$ и $\rho(0) = 0$ или ∞ с порядком вырождения $p < 1$.

Построено фундаментальное решение (Ф.р.) $G(x,t;\xi,\tau)$ уравнения (1), взяв за параметрикс ф.р. уравнения

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)u_{x_i x_j} - \rho_0(t)u_t = 0$$

и исследованы дифференциальные свойства ф.р. $G(x,t;\xi,\tau)$. При помощи $G(x,t;\xi,\tau)$ построены объемные потенциалы

$$V_0(x,t,\tau) = \int_{\Omega} f(\xi)G(x,t;\xi,\tau)\,d\xi,$$

$$V(x,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\rho_0(\tau)} \int_{\Omega} F(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\,d\xi$$

и поверхностные потенциалы

$$\omega(x,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\rho_0(\tau)} \int_S \sigma(\xi,\rho(\tau))G(x,t;\xi,\tau)\,dS_\xi,$$

$$W(x,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\rho_0(\tau)} \int_S \mu(\xi,\rho(\tau))\frac{\partial G}{\partial\nu(\xi,\tau)}\,dS_\xi,$$

где $\nu(\xi,\tau)$ — нормаль в точке $(\xi,\tau) \in S_T$,

$$\rho(t) = \int_0^t \rho_0^{-1}(z)\,dz.$$

Доказаны основные свойства этих потенциалов и даны применения их к решению различных локальных и нелокальных краевых задач для уравнения (1) в цилиндрических и нецилиндрических областях.

Sofic measures and Erdös measures.

Oseledets V. I. (MSU)

A sofic measure is a measure which is the image of a Markov measure under a one-block map or clumping of a finite alhabet. Sofic measures are also called hidden Markov measures and functions of finite Markov chains. Let $\beta > 1$. A $\beta-$ shift is a symbolic dynamical system that codes the map $Tx = \beta x (mod\ 1)$ on the unit interval. We define a $\beta-$ shift invariant Erdös measure for hidden Markov measure. If β is a Pisot number, then we prove that $\beta-$ shift invariant Erdös measure is a sofic measure. We study ergodic properties of $\beta-$ shift invariant Erdös measures. We consider the special case $\beta = 2$.

Сильный принцип максимума для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве.

Ощепкова С. Н. (г. Белгород)

Рассмотрим связное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа относительно открытых выпуклых многогранников (стратов), примыкающих друг к другу по типу симплициального комплекса.

Выделим в Ω открытое связное (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$) подмножество Ω_0, составленное из стратов множества Ω и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$.

На Ω_0 определяется аналог оператора Лапласа. Для этого сначала вводится дивергенция $\nabla\vec{F}$ на достаточно гладком векторном поле как плотность его потока по специальной (стратифицированной) мере. Затем полагается $\Delta u = \nabla(\nabla u)$, где внутренний оператор ∇ интерпретируется как взятие градиента функции u.

Имеет место следующий аналог сильного принципа максимума.

Теорема. Достаточно гладкие функции, являющиеся решением неравенства $\Delta u \geq 0$ на Ω_0, не могут иметь в Ω_0 точек нетривиального локального максимума.

Доказательство этого факта основывается на следующей лемме.

Лемма. Пусть $X \in \Omega_0$ – точка нетривиального максимума функции $u \in C^1(\Omega_0)$. Тогда найдутся сколь угодно малые допустимые $r > 0$ такие, что

$$\int\limits_{S_r(X)} \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0,$$

где ν – внешняя нормаль.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00299

Бесконечномерные эллиптические координаты и некоторые спектральные вопросы

Осипов А.С. (Москва, НИИ Системных Исследований РАН)

Рассматривается два подхода к определению эллиптических координат Якоби в бесконечномерной ситуации (см. [1]-[2]). В первом случае эллиптические координаты вектора x из сепарабельного Гильбертова пространства H определяются как корни уравнения

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = C,$$

где A - самосопряженный полуограниченный снизу оператор с простым дискретным спектром, C - фиксированное положительное число. Второй подход не использует терминологии Гильбертовых пространств.

Установлено, что оба подхода допускают единую интерпретацию в терминах теории одномерных возмущений самосопряженных операторов. При этом первый подход соответствует регулярным возмущениям, а второй - сингулярным. В обоих случаях обнаружена связь бесконечномерных эллиптических координат и некоторых обратных спектральных задач для разностных и дифференциальных операторов (сводящихся к восстановлению оператора по двум спектрам). Также установлены тождества, связывающие спектр рассматриваемого оператора и соответствующие эллиптические координаты.

Работа поддержана РФФИ (грант No 05-01-00989) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-5247.2006.1.

Литература

[1] Костюченко А. Г. Степанов А. А. *Бесконечномерные эллиптические координаты.* Функц. Анализ и его Приложения, 33, No 4, 1999, стр. 73-78.

[2] K. L. Vaninsky, *Equations of Camassa-Holm type and Jacobi ellipsoidal coordinates.* Commun. Pure Appl. Math., 58, No 9, 2005, pp. 1149-1187.

On the interplay between analytic number theory and Schrödinger type equations

Oskolkov K.I. (Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia; Steklov Mathematical Institute, Russia)

The talk will be dedicated to recent developments in the study of the interplay between methods of analytic number theory (the circle method of Hardy – Littlewood – Vinogradov), and partial differential equations of Schrödinger type. If for such equations the Cauchy initial data problem is posed, with the periodic initial data functions, then the solutions exhibit deep self-similarity properties. The scaling factors are rational exponential sums (Gauss' sums), and the "patterns"are represented by oscillatory integrals with the polynomial phase.

References

[1] K.I. Oskolkov. The Schrödinger's density, and the Talbot's effect. Approximation and Probability. Banach Center Publications, volume 72. Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences. Warszawa, 2006. pp. 189 - 219.

[2] K.I. Oskolkov. *The series* $\sum\sum\frac{e^{2\pi imnx}}{mn}$, *and a problem of Chowla.* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, **248**(2005), pp. 204 – 222 (in Russian); English translation in: Proc. Steklov Inst. Math., **248**(2005), pp. 197 – 215.

[3] K.I. Oskolkov. *A class of I.M. Vinogradov's series and its applications in Harmonic Analysis,* – in the book *Progress in Approximation Theory,* An International Prospective, Springer Verlag 1992, pp. 353–402.

Эллиптические уравнения с комплекснозначными коэффициентами в R^n

Оспанов К.Н. (Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан, г.Астана)

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + q(x)u + r(x)\bar{u} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $i^2 = -1$, $\rho_k, q, r-$ непрерывные комплекснозначные функции, $f \in L_p \equiv L_p(R^n)$. Решением системы (1) назовем функцию $u \in L_p$, если найдется последовательность $\{u_s\}_{s=1}^{\infty}$ сколь угодно дифференцируемых и финитных функций, такая, что $\|u_s - u\|_p \to 0$, $\|Lu_s - f\|_p \to 0$ при $s \to \infty$ ($\|\cdot\|_p-$ норма в L_p).

Когда $\rho_k \equiv 1$, $r = 0$, $q(x) = \overline{q(x)}$ и $p = 2$ в работе [1] получены т.н. оценки разделимости для решения уравнения (1) (а также для уравнения высокого порядка) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| \rho_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_2 + \|qu\|_2 \leq C\|f\|_2. \tag{2}$$

Оценка (2) играет важную роль в изучении гладкостных и аппроксимативных свойств решения уравнения (1), при исследовании структуры спектра соответствующего дифференциального оператора. Результаты [1] были распространены в работе [2] на случай $p \in [1, \infty)$. Вопрос о суммируемости с весом решения уравнения (1) при $n = 1$, $\rho_k = \rho = 1$ и $p = 2$ изучался в [3].

В настоящем докладе обсуждается задача распространения результатов работ [1], [2] на случай комплексных коэффициентов в уравнении (1). В частности, получены оценки разделимости для решения уравнения (1) в случае $p = 2$, а когда $\rho_k = \overline{\rho_k}$ ($k = 1, 2, ..., n$)$-$ при всех $p \in [1, \infty)$. Найдены достаточные условия компактности резольвенты, а также разрешимости одного нелинейного обобщения уравнения (1).

Литература

[1] Отелбаев М.// Труды МИ АН СССР. 1983, т.161. С.195-217.

[2] Муратбеков М.Б., Отелбаев М.// Изв. вузов. Математика. 1989, №3. С. 44-47.

[3] Измайлов А.Л., Отелбаев М.// Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1977, №1. С. 36-40.

О несуществовании сильного решения в целом одного класса абстрактных параболических уравнений типа Навье - Стокса

Отелбаев М. (Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан)

Пусть $H-$ сеперабельное гильбертово пространство и $A = A^* \geq E$ - линейный оператор в H ($E-$ единичный оператор). Пусть еще $B(\cdot, \cdot)-$ билинейный оператор такой, что для всех пар (w, u), (w, v) из ее области определения

$$= -, \tag{1}$$

где $-$ скалярное произведение в H. В пространстве $L_2(H, T)$ суммируемых на отрезке $[0, T]$ вектор - функций со значениями в H рассмотрим задачу Коши

$$u_t + Au + B(u, u) = f(t) \; (0 < t < T), \quad u|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Будем говорить, что задача (2) сильно разрешима в целом, если при любом $f \in L_2(H, T)$ для решения $u(t)$ этой задачи выполнено $u_t + Au \in L_2(H, T)$.

Хорошо известно, что из условия (1) и из $f \in L_2(H, T)$ вытекает справедливость энергетической оценки, и поэтому $\sqrt{A}u(\cdot) \in L_2(H, T)$.

В докладе доказывается, что существуют $A = A^*$, $A \geq E$ и $B(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющий (1), такие, что задача (2) является не сильно разрешимым.

Это утверждение, которое доказывается построением примера, важно, так как в виде абстрактного уравнения (2) может быть записана система уравнений Навье - Стокса. Построенный пример не совпадает с абстрактным уравнением, к которому сводится трехмерное уравнение Навье - Стокса (хотя по ряду свойств близок к нему), поэтому не решает известную проблему о сильной разрешимости последнего в целом. Но, тем не менее, вместе с результатами работ [1] и [2] позволяет автору думать, что проблема о сильной разрешимости уравнений Навье - Стокса в целом скорее всего имеет отрицательное решение.

Аналогичные контрпримеры построены и для стационарного уравнения, соответствующего задаче (2).

Литература

[1] Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н.// ДАН РФ. 2006, т.408, №4.

[2] Отелбаев М. О свойствах одного класса уравнений типа Навье - Стокса// Матер. межд. Росс. - Каз. симп. "Урав. смеш. типа и родств. пробл. анал. и инф.". Нальчик - Эльбрус, 2004. С.140-145.

Описание интерполяционных орбит и оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева

Овчинников В. И. (г. Воронеж)

Мы рассматриваем задачу об оптимальных вложениях пространств Соболева $W_E^m(\Omega)$, где Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей, $m \in \mathbb{N}$ и $m < n$, а E – перестановочно инвариантное пространство измеримых функций, в перестановочно инвариантное пространство G. Мы считаем, что пространство Соболева состоит из обобщенных функций, все частные производные которых до порядка m принадлежат пространству E. В работах [1], [2] была замечена и исследована связь задачи об описании теорем вложения с интерполяцией линейных операторов, действующих в парах $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ и $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$, где через Λ_α обозначено пространство Лоренца.

В данной работе показано, что описание оптимальных перестановочно инвариантных пространств, в которые вкладываются пространства Соболева, связано с описанием интерполяционных орбит при действии линейных операторов из пары $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только перестановочно инвариантные пространства, являющихся интерполяционными между пространствами L_1 и L_∞. Эти пространства мы будем называть интерполяционными п.и. пространствами.

Теорема 1. Пусть E произвольное интерполяционное п.и. пространство, тогда наименьшее интерполяционное п.и. пространство G, куда вложено $W_E^m(\Omega)$, совпадает с $\mathrm{Orb}\,(E, \{L_1, \Lambda_{\frac{m}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{m}{n}}, L_\infty\})$.

Напомним, что $\mathrm{Orb}\,(E, \{L_1, \Lambda_{\frac{m}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{m}{n}}, L_\infty\})$ – это $\bigcup_T T(E)$, где пробегает множество всех линейных операторов $T : \{L_1, \Lambda_{\frac{m}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{m}{n}}, L_\infty\}$.

В частности, мы получаем описание оптимальных вложений для всех пространств Лоренца $L_{\rho,p}$ с функциональными параметрами.

Теорема 2. Если пространство $E = L_{\rho,p} = (L_1, L_\infty)_{\rho,p}$, где ρ – произвольная квазивогнутая функция на отрезке $[0,1]$, такая, что $C\rho(t) \leq t^{\frac{m}{n}}$, а $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\mathrm{Orb}(L_{\rho,p}, \{L_1, \Lambda_{\frac{m}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{m}{n}}, L_\infty\}) = (\Lambda_{1-\frac{n}{m}}, L_\infty)_{\sigma,p},$$

где $(X_0, X_1)_{\sigma,p}$ – конструкция Янсона, σ – квазивогнутая функция

$$\sigma(t) = \| \min(1, t/s^{1-\frac{m}{n}}) \|_{L_{\tilde{\rho},p'}},$$

а $\tilde{\rho}(t) = t/\rho(t)$, и $p' = p/(p-1)$.

Поскольку пространства Янсона явно описываются, то мы приходим к явному описанию орбиты и соответственно описанию наименьшего интерполяционного п.и. пространства, содержащего $W_E^m(\Omega)$.

Литература

[1] Cwikel M. and Pustylnik E. *Sobolev type embeddings in the limiting case.* J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4. 433–446.

[2] Kerman R., Pick L. *Optimal Sobolev imbeddings.* Forum Math. 2006. V.18, N.4. 535–570.

Проблемы Навье-Стокс приближения и матричные уравнения

Палин В. В., Радкевич Е. В. (Москва)

Целью доклада является исследование проблемы Навье-Стокс приближения кинетических уравнений [1] в терминах так называемой проекции Чепмена-Энскога [2]. Нас будут интересовать свойств проекции Чепмена-Энскога задачи Коши для моментных аппроксимаций кинетических уравнений и прежде всего исследование проекции Чепмена-Энскога для кинетических уравнений Больцмана и Больцмана-Пайерлса [3,5]. Условия существования проекции Чепмена-Энскога формулируются в терминах разрешимости матричных уравнений Риккати, для которых получены необходимые и достаточные условия существования решения[4,5].

Литература

1. *Chen Gui-Qiang, Levermore C. D. and Tai-Ping Luui,* Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy// Comm. on Pure and Appl. Math., v. XLVII (1994), pp. 787-830

2. *Chapman S. C., Cowling T. C.* The mathematical theory of non-uniform gases.//Cambridge: Cambridge University Press, 1970

3. *В. А. Палин, Е. В. Радкевич,* Приближение Навье-Стокса и проблемы проекции Чепмена-Энскога для кинетических уравнений// Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. С. 184-225

4. *Е. В. Радкевич* Проекции Чепмена-Энскога и проблемы Навье-Стокс приближения.// Труды Мат. Инст. им. Стеклова, т. 250(2005), стр. 219-225 Перевод: Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics, Vol. 250(2005), pp. 1-7

5. *В. В. Палин* О разрешимости матричных уравнений Риккати//Труды семинара И.Г.Петровского, т. 28(в печати), 21 стр

Новый аналитико-численный метод конформного отображения сложных областей

Пальцев А. Б. (г. Москва)

Пусть односвязная область g на комплексной плоскости z такова, что при помощи дробно–линейного отображения ее можно преобразовать в конечную область со спрямляемой границей. Предположим также, что граница ∂g состоит из двух звеньев γ и Γ таких, что γ в окрестностях точек соединения является дугой Ляпунова, а Γ — жорданова кусочно–гладкая кривая. Будем говорить, что g удовлетворяет условию (γ, Γ) и писать $g \in (\gamma, \Gamma)$. Расширением области $g \in (\gamma, \Gamma)$ через дугу Γ назовем область G, для которой выполняются следующие включения: $g \subset G$, $\gamma \subset \partial G$, $\mathrm{int}\,\Gamma \subset G$, а контур ∂G в некоторых окрестностях точек соединения дуг γ и $\partial G \setminus \mathrm{int}\gamma$ представляет собой дугу Ляпунова.

Построим конформное отображение $\varphi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ области $g \in (\gamma, \Gamma)$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ в предположении, что отображение $\Phi \ : \ G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ некоторого расширения области g через дугу Γ может быть построено эффективно. Подчиним функцию $\Phi(w)$ следующим условиям нормировки: $\Phi(M) = \infty$, $\Phi(N) = 0$, где $M \in \mathrm{int}\gamma$, $N \in (\partial G \setminus \gamma)$ — некоторые точки границы области G, а искомую функцию φ подчиним условиям $\varphi(M) = \infty$, $\varphi(z) \sim \Phi(z)$, $z \to M$. Отображение $\varphi(z)$ будем искать в виде предела последовательности $\{\varphi_N(z)\}$ функций, определяемых по формуле $\varphi_N(z) := \Phi(z) + \sum_{k=0}^{N} a_k^N [\Phi(z)]^{-k}$; здесь (вещественные) коэффициенты a_k^N, $k = \overline{1,N}$ находятся из системы линейных уравнений $\sum_{l=1}^{N} (\Omega_k, \Omega_l) a_l^N = (\Omega_k, h)$, $k = \overline{1,N}$, где $\Omega_k(z) := \mathrm{Im}\,[\Phi(z)]^{-k}$, $h(z) := -\mathrm{Im}\Phi(z)$, а через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$. Коэффициент a_0^N в формуле для $\varphi_N(z)$ определяется из дополнительного условия нормировки отображения $\varphi(z)$, необходимого для его однозначного определения. Доказана сходимость последовательности $\varphi_N(z)$ к функции $\varphi(z)$ на множестве $g \cup (\mathrm{int}\gamma \setminus \{M\})$.

Заметим, что предложенный аналитико–численный метод основан на сведении задачи о нахождении отображающей функции к задаче Дирихле. В отличие от известных методов [1], данный метод использует для такого сведения теорию конформного отображения сингулярно деформируемых областей [2], а для решения задачи Дирихле используется метод граничных мультиполей [2]. Разработанный метод был применен к решению задачи Дирихле в областях с узкими щелями. Численные результаты продемонстрировали высокую эффективность метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503).

Литература

[1] Henrici P. *Applied and Computational Complex Analysis.* Vol. 3. New York: John Wiley and Sons, 1991.

[2] Власов В.И. *Краевые задачи в областях с криволинейной границей.* М.: ВЦ АН СССР, 1987.

Invariant sets for differential inclusions.

Panasenko E. A. (Tambov), Tonkov E. L. (Izhevsk)

For a fixed topological dynamical system (Σ, f^t) and some function $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ we consider (for each $\sigma \in \Sigma$) a differential inclusion

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

and a "convexified" differential inclusion

$$\dot{x} \in \mathrm{co}F(f^t\sigma, x). \tag{2}$$

Let the function $F(f^t\sigma, x)$ for every $\sigma \in \Sigma$ be *upper semicontinuous* on x, *bounded and uniformly continuous on* $t \in \mathbb{R}$, and such that every solution of inclusion (1) is defined for all $t \geqslant 0$.

To each point $\omega = (\sigma, X) \in \Omega = \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ we assign a section $S(t, \omega)$ of the integral funnel of inclusion (2) and a dynamical system (Ω, g^t), where $g^t\omega = (f^t\sigma, S(t, \omega))$. Next, for a given continuous function $\sigma \to M(\sigma) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ we construct a set

$$\mathfrak{M} \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subset M(\sigma)\}$$

and its r-neighborhood $\mathfrak{M}^r \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subset M^r(\sigma)\}$, where $M^r(\sigma)$ is an r-neighborhood of the set $M(\sigma)$.

Definition. The set $\mathfrak{M}$ is said to be *positively invariant* if $g^t\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ for all $t \geqslant 0$, *invariant* if $g^t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$, and *minimal* if $\mathfrak{M}$ is invariant and does not contain a true invariant subset.

Denote $\mathfrak{N}^r = \{\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^r : \omega \notin \mathfrak{M}\}$. A continuous function $V : \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ is called *Lyapunov function*, if $V(\omega) = 0$ when $\omega \in \partial\mathfrak{M}$ and $V(\omega) > 0$ when $\omega \in \mathfrak{N}^r$.

For $r > 0$ and a locally Lipschitz function $V : \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ the limit

$$V^o(\omega; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \delta) \to (0, x, +0)} \frac{V(f^{\delta\tau}(f^\vartheta\sigma), y + \delta h) - V(f^\vartheta\sigma, y)}{\delta}$$

is called the *generalized derivative* of the function V at the point $\omega = (\sigma, x)$ in the direction $q = (\tau, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (or Clarke derivative). If $q = (1, h)$, then $V_F^o(\omega) \doteq \max\limits_{h \in F(\omega)} V^o(\omega; q)$ is called the *derivative of* V *with respect to inclusion* (1).

Theorem 1. If there exists a Lyapunov function $V : \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ which is locally Lipschitz and such that $V_F^o(\omega) \leqslant 0$ for all $\omega \in \mathfrak{N}^r$, then the set $\mathfrak{M}$ is positively invariant.

Theorem 2. Let $\widehat{\Sigma}$ be a union of all omega-limit sets when σ changes in Σ, and let the set $\mathfrak{M}$ be positively invariant. Then:

1. For every point $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ the integral funnel $S(t, \omega)$ of inclusion (2), where $\omega = (\sigma, M(\sigma))$, is defined for all $t \in \mathbb{R}$, hence the sets $\mathrm{orb}(\omega) \doteq \{g^t\omega : t \in \mathbb{R}\}$ and $\bigcup\limits_{\sigma \in \widehat{\Sigma}} \mathrm{orb}(\omega)$ are invariant, and $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$.

2. If, in addition, for every $\sigma \in \Sigma$ the function $x \to F(\sigma, x)$ is locally Lipschitz and the set Σ is minimal, then for each point $\sigma \in \Sigma$ there exists a compact minimal subset in $\mathfrak{M}$, therefore for every $\sigma \in \Sigma$ there exists $X(\sigma) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ such that for any $\varepsilon > 0$ and $\vartheta > 0$ the set

$$L(\varepsilon, \vartheta) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} \mathrm{dist}(S(t + \tau, \omega), S(t, \omega)) \leqslant \varepsilon\Big\},$$

where $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, is relatively dense on $\mathbb{R}$, i.e. the motion $t \to S(t, \omega)$ is recurrent.

The work is partially supported by RFBR (grants 04-01-00324, 07-01-00305 and 06-01-00258).

Multi-scale modelling of blood circulation

Panasenko G.P.

The method of asymptotic partial domain decomposition (MAPDD) [1,2] reduces the dimension of the problem (or simplifies the problem in some other way) in the main part of the domain keeping the initial formulation in the remaining part and prescribing the asymptotically precise conditions on the interface of subdomains of different dimensions.

This idea leads to the hybrid 1D-2D or 1D-3D models, where the high dimension is kept only in the parts of small measure with respect to the initial domain. The method is applied to the problems set in thin tubular (pipe-wise) domains simulating the blood flows in the blood circulation system. We consider the diffusion, the Stokes and Navier-Stokes equations in some unions of thin channels with a rigid or elastic wall, with some zones of a clot formation. We apply a 1D reduction for the smooth parts of the channels and keep the initial dimension in the subdomains of the singular asymptotic behaviour of the solution. The appropriate junction conditions between the 1D and 2D (or 3D) parts will be discussed.

References

[1]. G.Panasenko, "Method of asymptotic partial decomposition of domain", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences , v. 8, No 1,1998, 139-156.

[2]. G.Panasenko, "Multi-scale Modelling for Structures and Composites", Springer, 2005, 398 pp.

Nonlocal problems in the theory of hyperbolic differential equations

Boris Paneah (Technion, Israel)

The local boundary problems for the general linear second order hyperbolic differential operators P in bounded domains in the plane are studied well. As to the nonlocal problems (even more general than boundary problems), they remain practically unstudied, although many diverse problems of this kind were considered successfully in connection with elliptic and parabolic operators. In this talk we discuss two nonlocal quasiboundary problems of the sufficiently general form for the operator P in the characteristic rectangle in the plane. In both cases we formulate the conditions of the unique solvability of the problems, and also (for the first time in the theory of hyperbolic differential operators - to the best of my knowledge) the conditions of the fredholmness of the problems in question. As the examples show, the conditions formulated are sharp: a violation of any above condition leads sometimes to the violation of the corresponding solvability properties of the problems.

(This is join work with Peter Paneah, Technion)

Asymptotic behaviour of solutions to second order elliptic equation in a semi-infinite cylinder

Pankratova I. L. (Narvik, Norway)

Saint-Venant and Phragmén–Lindelöf principles have been widely studied in mechanical and mathematical literature. For rigorous mathematical results we refer to [1], [2], [3] and [4]. The goal of the present work is to study the behaviour at infinity of solutions to the problem

$$\begin{cases} -\text{div}\ (a(x)\,\nabla\, u(x)) - b(x)\nabla\, u(x) = 0, & x \in G, \\ \dfrac{\partial\, u}{\partial\, n_a} = 0, & x \in [0,\infty) \times \partial Q, \\ u(x)_{|x_1=0} = \varphi(x), & x \in Q. \end{cases} \tag{1}$$

Here $G = [0,\infty) \times Q$ is a semi-infinite cylinder in $\mathbb{R}^d$ with the axis directed along x_1 and Q is a sufficiently regular bounded domain in $\mathbb{R}^{d-1}$; $\varphi(x) \in H^{1/2}(Q)$; $a(x)$ is a $d \times d$ matrix and $b(x)$ is a vector in $\mathbb{R}^d$, periodic on x_1. We suppose that the matrix $a(x)$ satisfies the uniform ellipticity condition and all the coefficients of equation (1) are L^∞ functions.

It turns out that the uniqueness of solution to problem (1) depends on the sign of auxiliary constant $\bar{b}_1$ which is defined in terms of the operator coefficients and the kernel of the adjoint periodic operator. The following result holds:

Theorem 1.

1. Every bounded solution of problem (1) stabilizes to a constant at the exponential rate, as $x_1 \to \infty$.
2. For any $\varphi(x) \in H^{1/2}(Q)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, there exists a bounded solution $u(x)$ of (1) that converges to the constant k, as $x_1 \to \infty$, iff $\bar{b}_1 > 0$;
3. For any $\varphi(x)$ there exists unique constant $l(\varphi)$ such that every bounded solution of (1) converges to this constant, as $x_1 \to \infty$, iff $\bar{b}_1 \leq 0$;

This is a joint work with A. Piatnitski.

References

[1] Landis E.M., Panasenko G.P. "On a variant of a theorem of the Phragmen-Lindeloff type for elliptic equations with coefficients that are periodic in all variables except one" *Trudy seminara I.G.Petrovskogo*, Moscow, Moscow University Publ.,1979,105-136 (Russian).

[2] Oleinik O. A., Yosifian G. A. "On the asymptotic behaviour at infinity of solutions in linear elasticity" *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 78, Issue 1, p.29-53, 03/1982.

[3] Nazarov S. A. "Elliptic boundary value problems with periodic coefficients in a cylinder" *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 45(1):101-112, 1981. (English transl.: *Math. USSR. Izvestija*, 18, 1 (1982), 89-98).

[4] Piatnitski A.L. "On the behaviour at infinity of the solution of a second-order elliptic equation given on a cylinder" *Russ. Math. Surv.* 37, No.2, 249-250 (1982).

Homogenization of a single phase flow through a porous medium in a thin layer

Pankratov L. (Kharkov)

Modeling of flow in fractured media is a subject of intensive research in many engineering disciplines. A fissured medium is a structure consisting of a porous and permeable matrix which is interlaced on a fine scale by a system of highly permeable fissures. The majority of fluid transport will occur along flow paths through the fissure system, and the relative volume and storage capacity of the porous matrix is much larger than that of the fissure system. When the system of fissures is so well developed that the matrix is broken into individual blocks or cells that are isolated from each other, there is consequently no flow directly from cell to cell, but only an exchange of fluid between each cell and the surrounding fissure system. The large–scale description will have to incorporate the two different flow mechanisms. For some permeability ratios and some fissures width, the large-scale description is achieved by introducing the so-called double porosity model.

More recently, fractured rock domains corresponding to the so-called Excavation Damaged Zone (EDZ) received an increasing attention in connection with the behaviour of geological isolation of radioactive waste after the drilling of the wells or shafts. The geometry of the nuclear waste depository leads to models stated in a porous domain having a singular geometry. Mathematically this results in a double–porosity type problem defined in a thin layer or plate.

We consider a single phase flow of a slightly compressible fluid in thin periodic fractured–porous media made of a set of porous blocks with permeability of order $(\varepsilon\delta)^2$, where

$0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$; these porous blocks are surrounded by a system of connected fissures. The model is described by a linear parabolic equation stated in a thin domain depending on the parameter ε such that the measure of the domain vanishes as $\varepsilon \to 0$. The resulting homogenized problem is a dual-porosity type model that contains terms representing memory effects.

The work is done in collaboration with Amaziane B. and Piatnitski A.

On strong pre-compactness property for sequences of entropy solutions to first-order quasilinear equations.

Panov E. Yu. (Novgorod State University)

In a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we consider a first-order quasilinear equation

$$div_x \varphi(x,u) + \psi(x,u) = 0, \tag{1}$$

where $u = u(x)$, $x \in \Omega$; $\varphi(x,u) = (\varphi_1(x,u), \dots, \varphi_n(x,u))$. The functions $\varphi_i(x,u)$, $\psi(x,u)$ are assumed to be Caratheodory functions, such that for each $M > 0$ $\max\limits_{|u|\le M} |\varphi(x,u)| \in L^p_{loc}(\Omega)$ ($|\cdot|$ is the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$), $p > 2$, $\max\limits_{|u|\le M} |\psi(x,u)| \in L^1_{loc}(\Omega)$. We also suppose that for each $k \in \mathbb{R}$ the distribution $div_x \varphi(x,k) = \mu_k$, where $\mu_k = \mu_k^r + \mu_k^s$ is a locally finite Borel measure on Ω, and $\mu_k^r = \alpha_k(x)dx$, μ_k^s are respectively the regular and the singular parts of this measure, $\alpha_k(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Recall that a function $u = u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ is a Kruzhkov entropy solution of (1) if $\varphi(x,u) \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\psi(x,u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ and for each $k \in \mathbb{R}$

$$div_x[sign(u-k)(\varphi(x,u) - \varphi(x,k))] + sign(u-k)(\alpha_k(x) + \psi(x,u)) - |\mu_k^s| \le 0$$

in the sense of distributions on Ω, here $|\mu_k^s|$ is a variation of the measure μ_k^s. Our main result is the following

Theorem. Suppose that for a.e. $x \in \Omega$ and all $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ the functions $u \to \xi \cdot \varphi(x,u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(x,u)$ are not constant on non-degenerate intervals, and $u_m(x)$ be a sequence of entropy solution of (1), such that for some nonnegative super-linear function $\Phi(u)$ the sequence $|\varphi(x,u_m)| + |\psi(x,u_m)| + \Phi(u_m)$ is bounded in $L^1_{loc}(\Omega)$. Then the sequence u_m is pre-compact in $L^1_{loc}(\Omega)$.

For the prove we utilize the techniques of H-measures developed in [1].

The research was carried out under partial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 06-01-00289) and DFG project 436 RUS 113/895/0-1.

References

[1] Panov E.Yu. *Matematicheskii Sbornik.* V. 190, N 3 (1999), P. 100-128.

О счетной аддитивности цилиндрических супермер

Панюнин Н. М. (г. Москва)

Рассматриваются цилиндрические супермеры в суперпространстве над гильбертовой супералгеброй Λ с конечной (над Λ) размерностью нечетного подпространства(см. [1]). Получены достаточные условия счетной аддитивности рассматриваемых мер в терминах непрерывности их суперпреобразования Фурье.

Литература

[1] Смолянов О. Г. и др. *ДАН СССР, 1988 т.299 №4.*

Численное решение проблемы вариационного усвоения данных наблюдений для трехмерной задачи термогидродинамики океана с включением нелинейной модели вертикального теплообмена

Пармузин Е. И., Шутяев В. П. (г. Москва)

Настоящая работа связана с разработкой методов решения задач вариационного усвоения данных наблюдений в моделях динамики океана. Мы покажем, что для этой цели можно воспользоваться разработанной в ИВМ РАН глобальной трехмерной моделью гидротермодинамики океана, включающей уравнения для скорости течения, давления, температуры и солености (см. [2]). Предполагается, что процесс переноса тепла можно описать на некоторых временных интервалах с помощью квазилокальной модели, базирующейся на нестационарном уравнении теплопроводности с нелинейным коэффициентом турбулентного теплообмена (см. [3],[4]). Именно для этой модели сформулирована и поставлена задача вариационного усвоения данных наблюдений [1],[5] с целью восстановления начального условия, разработаны алгоритмы ее численного решения. Разработанные алгоритмы и программы были затем включены в глобальную трехмерную модель, с которой проводились численные эксперименты на примере акватории Индийского океана. Численные эксперименты, представленные здесь, подтверждают возможность решения полной задачи гидротермодинамики океана с включением одномерного блока усвоения по вертикали.

В докладе рассматривается математическая постановка для квазилинейной модели вертикального теплообмена в океане, дана операторная формулировка задачи, приведены свойства операторов задачи и доказана ее разрешимость, сформулирована и исследована задача об усвоении данных для квазилокальной модели, приведен метод последовательных приближений для решения задачи. Предложены итерационные алгоритмы для решения линейных подзадач, сформулированы разностные аппроксимации задачи вариационного усвоения. Представлена методика решения полной задачи гидротермодинамики океана с включением одномерного блока усвоения по вертикали, приведены результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00344, 06-01-08055), Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН, Фонда содействия отечественной науке, ИНТАС (проект YS-04-83-2818).

Литература

[1] Agoshkov V. I., Marchuk G. I. *On solvability and numerical solution of data assimilation problems.* Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1993, vol. 8, No. 1, pp. 1-16.

[2] Саркисян А. С., Залесный В. Б., Дианский Н. А., Ибраев Р. А., Кузин В. И., Мошонкин С. Н., Семенов Е. В., Тамсалу Р., Яковлев Н. Г. *Математические модели циркуляции океанов и морей. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования:* в 2 т. - М.: Наука, 2005. Т.2: Математическое моделирование, с. 174-276.

[3] Schmidt G. A., Mysak L. A. *The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model.* Tellus, 1996, v.48 A, pp.158–178.

[4] Венцель М., Залесный В. Б. *Усвоение данных в одномерной модели конвекции-диффузии тепла в океане* // Изв.АН. Физика атмосферы и океана.1996.Т.32, N5. С.613-629.

[5] Шутяев В. П. *Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных.* - М.: Наука, 2001.

Неравенство Орнстейна в пространствах Орлича

Пашкова Ю. С. (Таврический Национальный Университет, Симферополь)

Пусть μ - мера Лебега на $(0,+\infty)$, $S(0,+\infty)$ - пространство измеримых на полуоси $(0,+\infty)$ функций, для которых их функция распределения $n_f(\tau)=\mu\{t\in(0,\infty): |f(t)|>\tau\}$ не равна тождественно бесконечности. Обозначим через f^* - убывающую перестановку функции, а через f^{**} - максимальная функция Харди-Литтлвуда функции f.

Для положительного сжатия $T: L_1+L_\infty \to L_1+L_\infty$ $(T\in PC)$, определим оператор

$$B_T(f)=\sup_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k|f|.$$

Пусть Φ - функция Орлича и L_Φ - соответствующее пространство Орлича. Функция $\Phi_1(x)=x\cdot\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du$, построенная по функции Орлича $\Phi(u)$, также является функцией Орлича.

Теорема 1. Если $f\in L_{\Phi_1}$, тогда $B_T f\in L_\Phi$ и

$$\|B_T f\|_{L_\Phi}\le \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

Говорят, что оператор $T\in PC$ удовлетворяет условию Орнстейна *(OI)*, если для любой $f\in L_1+L_\infty$ и для всех $t>0$

$$\text{(OI)}\qquad \frac{1}{2t}\int\limits_{\{|f|>t\}} |f|\,d\mu \le \mu\{B_T f>t\}$$

Теорема 2. Пусть L_Φ - пространство Орлича, оператор $T\in PC$ удовлетворяет условию *(OI)* и $f\in L_1+L_\infty$ такая, что $f^*(\infty)=0$. Тогда из того, что $B_T f\in L_\Phi$ следует, что $f\in L_{\Phi_1}$.

On Operator Estimates in Homogenization

Pastukhova S.

Recently, in the theory of homogenization, one can observe an increased interest to operator estimates for the difference between the resolvents of the original and the homogenized operators, which are referred to as L^2-estimates. Diverse problems are treated, and diverse approaches are used. Note that main books in homogenization contain nothing about uniform resolvent convergence not mention about operator estimates.

Consider the homogenization problem in the entire space $\mathbf{R^d}$,

$$u^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R^d}), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon \equiv -div a^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon + u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbf{R^d}), \tag{1}$$

where $a^\varepsilon(x)=a(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$ is a small parameter, $a(y)$ is a measurable symmetric periodic matrix with a periodicity cell $Y=[0,1)^d$, $\langle\cdot\rangle = \int_Y \cdot dy$ denotes a mean value over Y. Usual condition of ellipticity and boundedness is fulfilled: $\lambda\xi^2 \le a(y)\xi\cdot\xi \le \lambda^{-1}\xi^2 \quad \forall\xi \in \mathbf{R^d}, \lambda>0$. We have the homogenized equation

$$u \in H^1(\mathbf{R^d}), \quad A_0 u + u \equiv -div a^0 \nabla u + u = f,$$

in which a^0 is a constant elliptic matrix, such that $a^0 e_j = \langle a(y)(e_j + \nabla_y N^j(y))\rangle, j=1,\dots,d$, $e_1,\dots,e_d$ is a canonical basis in $\mathbf{R^d}$,

$$N^j \in H^1_{per}(Y), \quad div a(y)(e_j + \nabla N^j)=0, \quad \langle N_j\rangle=0, \quad j=1,\dots,d.$$

The solution u plays the role of zero approximation. The simplest result of homogenization consists in convergence $u^\varepsilon \to u$ in $L^2(\mathbf{R^d}) \quad \forall f \in L^2(\mathbf{R^d})$, which means the strong resolvent convergence $(A_\varepsilon+1)^{-1} \to (A_0+1)^{-1}$. We aim at uniform resolvent convergence with the folowing estimate

$$\|(A_\varepsilon+1)^{-1} - (A_0+1)^{-1}\|_{L^2\to L^2} \le C\varepsilon,$$

where the constant C depends only on the dimension d and the ellipticity constant λ. This result can be proved by "method of first approximation"[4-9].

It is customary to regard the function $v^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla u(x)$, $N=(N^1,\dots,N^d)$, as the first approximation to the solution u^ε and the summand $\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla u(x)$ as the corrector. Introduce also shifted approximation $v^\varepsilon(\omega,x)=u(x)+\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\cdot\nabla u(x)$, $\omega\in Y$, and approximation with smoothed corrector $\hat v^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla(u)^\varepsilon(x)$, where $(u)^\varepsilon(x)=\int_Y u(x+\varepsilon\omega)d\omega$ is the Steklov smoothing of the solution $u(x)$. We are going to discuss the estimates

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbf{R^d})} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbf{R^d})}, \quad \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbf{R^d})} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbf{R^d})}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\int_Y \|u^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\omega) - v^\varepsilon(\omega,x)\|^2_{H^1(\mathbf{R^d})} d\omega \le C\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\mathbf{R^d})}, \\ \|u^\varepsilon - \hat v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbf{R^d})} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbf{R^d})}, \quad C=const(d,\lambda).\end{gathered} \tag{3}$$

At first glance it is quite unevident that $v^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R^d})$ under given suppositions. On contrary we can readiely show that $v^\varepsilon(\omega,x)\in L^2(Y,H^1(\mathbf{R^d}))$, $\quad \hat v^\varepsilon(x)\in H^1(\mathbf{R^d})$. Take note of additional parameter of integration in the last relations. It presents obviously in the first one and implicitly in the second one. This shiftig parameter enables us to prove firstly inequality $(3)_1$ and then derive as conseqences L^2- and H^1-estimates (2), by properties of the Steklov smoothing. Thus we obtain

Theorem. *For the solution of scalar equation (1) estimates (2) are valid.*

The same or similar result is true for different homogenization problems: elasticity system, equations in perforated domain or non-uniformly elliptic with degenerate weight, locally periodic and reiterated homogenization, non-linear and parabolic equations. Often we lack the property $v^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R^d})$ and can prove only L^2-estimate $(2)_1$ and H^1-estimate $(3)_2$. Operator estimates are not obtained for equations with almost periodic coefficients. In this case even uniform convergence of resolvents is open problem.

References

[1] М.С. Бирман, Т.А. Суслина//Алгебра и анализ, т.15(2003), N5, с.1-108.
[2] Т.А. Суслина// Алгебра и анализ, 16 (2004), вып. 5, с.162-241.
[3] G.Griso//Asymptot. Anal.,40(2004), n.3-4, p.269-286.
[4] В.В. Жиков//Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 2005, т.250, с.95-104.
[5] В.В. Жиков//Докл.РАН, 2005,т.403,N3,с.305-309.
[6] В.В. Жиков//Докл.РАН, 2006,т.406,N5,с. 597-601.
[7] С.Е. Пастухова//Докл.РАН,2006,т.406,N5,с.604-608.
[8] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova// Russian Journal of Math. Physics, v.12, N 4, 2005, pp 501-510.
[9] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova// Russian Journal of Math. Physics, v.13, N 2, 2006, pp 251-265.

Принцип Сен-Венана и явно решаемая модель тонкой плиты при точечном напряжении на границе

Павлов Б.С.

Асимптотика плотности спектральной меры сингулярного оператора Штурма–Лиувилля

Печенцов А.С. , Попов А.Ю. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

В пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор $\mathbb{L}_{q,\alpha}$, задаваемый дифференциальным выражением $\ell y(x) \equiv -y''(x) + q(x)y(x)$, $q \in (C[0,+\infty) \to \mathbb{R})$ и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Предполагается, что потенциал q удовлетворяет следующим условиям:

$$q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty), \quad \lim_{x\to+\infty} q(x) = -\infty \text{ и при некотором } x_0 > 0$$

$$\int_{x_0}^{+\infty} [(q'(x))^2|q(x)|^{-5/2} + |q''(x)||q(x)|^{-3/2}]\,dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{+\infty} |q(x)|^{-1/2}dx = \infty. \quad (1)$$

Условия (1) гарантируют непрерывность спектра оператора $\mathbb{L}_{q,\alpha}$ (при любом α) и непрерывность на $\mathbb{R}$ плотности его спектральной меры.

В предположении определенной регулярности стремления $q(x)$ к $-\infty$ при $x \to +\infty$ найдена асимптотика $\rho'_{q,\alpha}(\lambda)$ при $\lambda \to -\infty$:

$$\rho'_{q,\alpha}(\lambda) = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\pi(\sqrt{|\lambda|}\sin\alpha + \cos\alpha + o(1))^2}\exp\Big(-2\int_0^{x(q,\lambda)} \sqrt{q(t)-\lambda}\,dt\Big).$$

Следствие. Если $q(x) = -bx^p$, $0 < p \le 2$, $b > 0$, то

$$\begin{aligned}
\rho'_{q,\alpha}(\lambda) &\sim \frac{1}{\pi\sqrt{|\lambda|}\sin^2\alpha}\exp\Big(-\frac{2}{p}\,\mathrm{B}\Big(\frac{3}{2},\frac{1}{p}\Big)\frac{|\lambda|^{0.5+1/p}}{b^{1/p}}\Big), \quad \lambda\to-\infty, \quad \sin\alpha\neq 0,\\
\rho'_{q,0}(\lambda) &\sim \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\pi}\exp\Big(-\frac{2}{p}\,\mathrm{B}\Big(\frac{3}{2},\frac{1}{p}\Big)\frac{|\lambda|^{0.5+1/p}}{b^{1/p}}\Big), \quad \lambda\to-\infty,
\end{aligned} \quad (2)$$

где B — бета-функция Эйлера.

О разрешимости задачи Дирихле на стратифицированном множестве

Пенкин О. М. (г. Белгород)

Для аналога оператора Лапласа на стратифицированном множестве $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ ставится задача Дирихле и обсуждается ее разрешимость. Для слабой ее разрешимости требуется, чтобы стратифицированное множество обладало следующим свойством W-связности. Нужно, чтобы для каждого страта $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ нашлась такая связная цепочка стратов, соединяющая σ_{kj} с некоторым граничным стратом $\sigma_{mi} \subset \partial\Omega_0$, что размерности любой пары соседних стратов этой цепочки отличались на единицу. При этих условиях имеет место

Теорема Если пара $(\Omega_0\, \partial\Omega_0)$ W-связна, то для функций из $C_0^1(\Omega)$ при некоторой константе C выполняется неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} u^2\, d\mu \leq C \int\limits_{\Omega_0} (\nabla u)^2\, d\mu,$$

где μ специальная "стратифицированная"мера на Ω.

Из этого утверждения получается аналог неравенства Пуанкаре для слабо дифференцируемых функций и далее получается упомянутая выше слабая разрешимость задачи Дирихле.

Вторая часть доклада посвящена классической разрешимости задачи Дирихле. При специальном геометрическом предположении (S-связность) оказывается возможным перенести на случай стратифицированного множества известный метод субгармонических функций Пуанкаре–Перрона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00299.

Интегрируемые системы и топология изоспектральных многообразий.

Пенской А. В. (г. Москва)

Рассмотрим симплектическое многообразие (X^{2n}, ω) и интегрируемую систему с гамильтонианом H и инволютивными интегралами $F_1 = H$, F_2, $\ldots$, F_n. Пусть $X_F = \{p \in X | F_1(p) = c_1, \ldots, F_n(p) = c_n\} \subset X$ подмногообразие уровня интегралов. Хорошо известная теорема Лиувилля-Арнольда утверждает, что если X_F компактно и связно, то это тор. Тем не менее, оказывается, что в некоторых важных примерах интегрируемых систем X_F компактно, но его топология весьма сложна. Это происходит по причине того, что в этих примерах X содержит точки, в которых или гамильтониан H сингулярен, или симплектическая форма ω сингулярная или вырождена, поэтому теорема Лиувилля-Арнольда не применима. Если уравнение может быть записано в лаксовой форме $\dot{L} = [L, A]$, то соответствующий поток определен на всем подмногообразии X_F, которое является изоспектральным многообразием операторов L, и может быть успешно использован для изучения топологии X_F. Примером может служить изучение Томеи и Фридом топологии изоспектрального многообразия якобиевых матриц с помощью цепочки Тоды. Новые результаты касаются изучения топологии изоспектрального многообразия M_k якобиевых $k \times k$-матриц с нулевой диагональю с помощью системы Вольтерра $\dot{c}_i = \frac{1}{2}c_i(c_{i+1}^2 - c_{i-1}^2)$. В частности, верна следующая теорема [1]:

Теорема 1. a) Эйлерова характеристика M_{2l+1} равна

$$\chi(M_{2l+1}) = 2^{2l+2}(2^{l+2} - 1)\frac{B_{l+2}}{l+2},$$

где B_{l+2} число Бернулли. b) Экспоненциальная производящая функция равна $-\operatorname{th}^2(2z)$, то есть $-\operatorname{th}^2(2z) = \sum_{l\geq 0}\chi(M_{2l+1})\frac{z^l}{l!}$.

Литература

[1] Penskoi A. V. *The Volterra system and topology of the isospectral variety of zero-diagonal Jacobi matrices.* Preprint math-ph/0701061.

The model of numerical hydrodynamic-statistical forecast of summer storm wind and heavy rainfalls over the territory of European part of Russia and Siberia

Perekhodtseva E. V. (Hydrometeorological Center of Russia)

Development of successful methods of forecast of storm summer winds, including squalls and tornadoes, and heavy rainfalls that often result in human and material losses, could allow one to take proper measures against destruction of buildings and to protect people. Well-in-advance successful forecast (from 12h to 36h) makes possible to reduce the losses. Prediction of these phenomena involved is a very difficult problem for synoptic till now day. The existing graphic and calculation methods still depend on subjective decision of an operator. At the present time in Russia there is not successful numerical forecast of the maximal speed of wind and squalls and heavy rainfalls with quantity Q more then 15mm/12h, hence the main tools of objective forecast are statistical methods using the dependence of the phenomena involved on a number of atmospheric parameters (predictors). So ten years ago for the European part of Russia was developed our numerical hydrodynamic-statistical operative methods of forecast of these phenomena. Three yeas ago this methods were adapted for the territory of Siberia. Statistical decisive rule of the alternative and probability forecast of these events was obtained using the data of objective analysis. For this purpose the teaching samples of present and absent of storm wind and heavy rainfalls were automatically arranged that include the values of forty physically substantiated potential predictors - vector X. Then the empirical statistical method for every phenomenon was used the diagonalization of the mean correlation matrix R of the predictors and extraction of diagonal blocks of strongly correlated predictors . Thus for every phenomenon the most informative predictors were selected without loosing information, those predictors being either a representative of each block or an independent informative predictors. The statistical decisive rules F(X) for diagnosis and prognosis of the phenomena involved were calculated for the most informative vector-predictor that includes the most informative and slightly dependent predictors (we used the criterion of distance of Mahalanobis and criterion of minimum of entropy by Vapnik-Chervonenkis). Successful development of hydrodynamic models for short-term forecast and improvement of 36h forecasts of pressure, temperature and others parameters allowed us to use the prognostic fields of those models for calculation of the prognostic discriminant functions and the values of probabilities of forecast of dangerous wind and heavy rainfalls. The first operative baroclinic hydrodynamic model at Hydrometcenter of Russia was the hemispherical model in difference equations by Dr. Bercovich L.V. For the forecast of the phenomenon of the storm wind of two classes and the rainfalls of two classes involved with the given advance period 12, 24, 36 hours the values of the discriminant functions and the probabilities of these phenomena were calculated using the prognostic values of this model in the nodes of the rectangular mesh 150x150 km over the territory of European part of Russia during ten years and over the territory of Siberia - during lasts three years. Every summer the Communication Center of Hydrometcenter have sent the forecasts to 12, 24, 36 h ahead of the storm wind and of the heavy and catastrophic rainfalls to the regional departments of European part of Russia. These forecasts was recommended as successful automated forecasts (Pirsy - Obukhov criterion T=0,47-0,75) We carried out the verification of these numerical hydrodynamic-statistical methods for the territory of Siberia. These methods turned out successful enough too. The prediction even in advance 36h of the summer storm wind (with velocity more than 24m/s) was sufficiently exact over the south of the Krasnoyarskiy areal on 18.06.05, over Novosibirsk on 24.06.05, (V=37m/s) over Altay on 24.06.05 too, in Turukhansk on 4.07.05, over the South of Teimyr peninsula on 20.07.05. The value of estimate of the warning is 86%. The error of "false alarm" is not very high, and so the value of Pirsy-Obukhov criterion was T=0,78. Unfortunately there were not very many stations at the territory of Siberia and numerical hydrodynamic forecast of storm wind and heavy rainfalls was not successful, but this new numerical hydrodynamic-statistical method was successfully, objective and automated. The forecast of summer storm wind of two classes and heavy precipitation of two classes calculated every day two times per day for day and for night to 12, 24, 36h advance. These methods were included into operative system ASSOI of Hydrometeorological Center of Russia. The values of estimate of forecast of rainfalls with quantity of precipitation Q more than 49mm/12h are successful enough too (Pirsy-Obukhov criterion T=0,69). We submitted some examples at our report. The numerical middle-term statistical forecast of these dangerous phenomena are we going on the production of the hemilagrangian hydrodynamic model (Dr. Tolstykh M.A.).

Обобщенный принцип сжимающих отображений в теории нелинейных колебаний

Перов А. И. (г. Воронеж)

Обобщенное метрическое пространство – это пространство, в котором расстояния между точками измеряются не с помощью неотрицательных чисел, а с помощью векторов (конечной размерности) с неотрицательными компонентами, а в качестве констант сжатия выступают не неотрицательные числа, меньшие или равные единицы, а квадратные матрицы с неотрицательными элементами, спектральный радиус которых меньше или равен единицы (a-матрицы и b-матрицы). Известен критерий Мецлера-Котелянского, согласно которому спектральный радиус неотрицательной матрицы Q меньше единицы тогда и только тогда, когда положительны последовательные главные миноры матрицы $I - Q$, где I – есть единичная матрица.

С помощью обобщенного принципа сжимающих отображений, а также с помощью принципов Шаудера и Тихонова получены различные признаки существования (и единственности) периодических и ограниченных решений как для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для нелинейных дифференциально-разностных уравнений и уравнений теории автоматического регулирования. При получении частотных принципов существования ограниченных решений важную роль играют недавние результаты А.Г. Баскакова.

В некоторых случаях указанные выше признаки таковы, что если матрица линейной части системы гурвицева, то получающееся ограниченное решение абсолютно устойчиво – в силу принципа отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости М.А. Красносельского и А.В. Покровского.

On the first boundary value problem for parabolic systems in nonsmooth cylindrical domains

Pham Trieu Duong (Faculty of Mathematics, Hanoi National University of Education)

This talk is devoted to the study of a class of evolutional systems in nonsmooth domain. More concretely, we deal with the next problem

$$(-1)^{m-1}\sum_{|p|,|q|=0}^{m} D^q a_{pq}(x,t)D^p u - u_t = f(x,t) \text{ in } \Omega_\infty \tag{1}$$

with the Dirichlet boundary condition

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0,\ j = 0,...,m-1 \text{ on } \Gamma_\infty, \tag{2}$$

and the initial condition

$$u(x,0) = 0, x \in \Omega \tag{3}$$

where Ω is a domain of conical type, $\Omega_\infty = \Omega \times (0,\infty)$ and $\Gamma = \partial\Omega$. We will obtain the asymptotic expansion of generalized solution for (1)–(3) from weighted sobolev spaces $H^{m,0}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ near conical points. Here $H^{m,0}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty) = \{u(x,t) : e^{-\gamma t}u \in H^{m,0}(\Omega_\infty)\}$. We use the ellipticized method to bring our problem to well-known results of Kondratiev, Mazya, Plamenievsky, Kozlov in stationary case. Some applications for simplest equations in mathematical phisics are considered also to compare with elliptic results.

References

[1] Nguyen Manh Hung, Pham Trieu Duong, *On the smoothness with respect to time variable of generalized solution of the first initial boundary-value problem for strongly parabolic systems in the cylinder with non-smooth base.* UMJ , V.56 (2004), N.1, pp. 78-87.

[2] Nguyen Manh Hung, Pham Trieu Duong,*On the smoothness of generalized solution for parabolic system in domains with conical point on boundary.* UMJ, V.56 (2004), N.6, pp. 857-864.

[3] Nguyen Manh Hung, Pham Trieu Duong, *On the asymptotic behavior of generalized solution of parabolic systems in neighborhood of conical point.* Acta Mathematica Vietnamica, V.30, N. 2, 2005, pp. 123 - 136.

Homogenization of random operators with lower order terms

Piatnitski A. L. (Moscow, Russia and Narvik, Norway)

Our goal is to study the limit, as $\varepsilon \to 0$, of a solution to linear parabolic PDE of the form

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbf{R};\\ &u^\varepsilon(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbf{R},\end{aligned} \tag{1}$$

where $a(\cdot)$ and $c(\cdot)$ are stationary random fields.

In contrast with symmetric divergence form parabolic problems, in the presence of the lower order terms the asymptotic behaviour of operators with random coefficients might differ a lot from that of periodic operators. In the case of a random oscillating potential, the range of the oscillations (the power of ε^{-1} in front of the potential c) should depend on the spatial dimension. In particular, for operator with one-dimensional spatial variable we show that the range of oscillation should be of order $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. This means that for larger powers of $\frac{1}{\varepsilon}$ the family of solutions is not tight as $\varepsilon \to 0$, while for smaller powers of $\frac{1}{\varepsilon}$ the contribution of the potential is asymptotically negligible.

We show that under proper mixing conditions the solution u^ε of the equation (1) converges in law to a random field

$$u(x,t) = \mathbf{E}\Big(g(x+\sqrt{\tilde{a}}B_t)\exp\Big(\bar{c}\int_{\mathbf{R}} L_t^{y-x}W(dy)\Big)\Big),$$

where $B.$ and $W.$ are independent Brownian motions, $\mathbf{E}$ and L_t^y are respectively the expectation and the local time related to $B.$, and $\tilde{a}$, $\bar{c}$ are constants.

Density and genericity of various shadowing properties

Pilyugin S. Yu. (St. Petersburg State University, Russia)

Let f be a homeomorphism (or a diffeomorphism) of a metric space (smooth closed manifold) (M, dist). Denote by $O(p,f)$ the trajectory of a point p in the dynamical system generated by f.

A sequence $\xi = \{x_k : k \in \mathbf{Z}\}$ is called a d-pseudotrajectory if

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

We say that f has the shadowing property (orbital shadowing property or weak shadowing property) if, for any $\epsilon > 0$, there exists a $d > 0$ such that, for any $\epsilon > d$-pseudotrajectory ξ, we can find a point p such that

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(p)) < \epsilon, \quad k \in \mathbf{Z}$$

(respectively,

$$\mathrm{dist}_H\left(\overline{\xi}, \overline{O(p,f)}\right) < \epsilon,$$

where dist_H is the Hausdorff distance, and

$$\xi \subset N(\epsilon, O(p,f)),$$

where $N(a, A)$ is the a-neighborhood of a set A).

One can treat these properties as weak variants of stability of the structure of trajectories of a dynamical system under small discontinuous perturbations. In this talk, we discuss some known results and open problems concerning density and genericity of these properties with respect to C^0 and C^1 topologies.

О биллиардном рассеянии в двумерных областях

Плахов А. Ю. (University of Aveiro, Portugal)

Рассматривается биллиард в $\mathbb{R}^2 \setminus B$, где $B \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченное связное множество с кусочно-гладкой границей. Рассматриваются биллиардные частицы, которые движутся свободно, затем совершают одно или несколько отражений от ∂B, и наконец снова движутся свободно. Фиксируются v и v^+ — начальная и конечная скорости частицы, а также n — внешняя нормаль к $\partial(\mathrm{conv}B)$ в точке первого пересечения траектории частицы с $\partial(\mathrm{conv}B)$. Все три вектора — v, v^+ и n — единичные. Определяется мера ν_B на $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$; для любого $A \in \mathbb{T}^3$, $\nu_B(A)$ характеризует число частиц, для которых $(v, v^+, n) \in A$.

Дадим точное определение меры ν_B. Обозначим ξ, v точку, в которой частица впервые пересекает $\partial(\mathrm{conv}B)$, и ее скорость в этой точке, а также обозначим $\xi^+ = \xi_B^+(v,\xi)$, $v^+ = v_B^+(v,\xi)$ точку, в которой она второй (и последний) раз пересекает $\partial(\mathrm{conv}B)$, и ее скорость в этой точке. (Точки ξ и ξ^+ могут совпадать.) Отображение $(v,\xi) \mapsto (v^+,\xi^+)$ отображает некоторое подмножество множества $S^1 \times \partial(\mathrm{conv}B)$ на другое его подмножество и сохраняет меру $d\mu(v,\xi) = |\langle v, n_\xi\rangle|\, dv\, d\xi$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, n_ξ — внешняя нормаль к $\partial(\mathrm{conv}B)$ в точке ξ, а dv и $d\xi$ — лебеговы линейные меры на S^1 и $\partial(\mathrm{conv}B)$, соответственно. Кроме того, это отображение естественным образом индуцирует меру ν_B на $\mathbb{T}^3$: по определению, для любого борелевского множества $A \in \mathbb{T}^3$, $\nu_B(A) := \mu\left(\{(v,\xi) : (v,\, v_B^+(v,\xi),\, n_\xi) \in A\}\right)$.

Обозначим $\pi_{v,n}$, $\pi_{v_+,n}$ проекции $(v,v^+,n) \mapsto (v,n)$, $(v,v^+,n) \mapsto (v^+,n)$ и обозначим π_d отображение $(v,v^+,n) \mapsto (-v_+,-v,n)$. Для любого выпуклого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью обозначим σ_K поверхностную меру K и обозначим $\mathcal{M}_K$ множество мер ν на $\mathbb{T}^3$ таких, что

(i) маргинальные меры $\pi_{v,n}^{\#}\nu$, $\pi_{v^+,n}^{\#}\nu$ имеют следующий вид:

$$d\pi_{v,n}^{\#}\nu(v,n) = \langle v,n\rangle_-\, dv\, d\sigma_K(n), \qquad d\pi_{v^+,n}^{\#}\nu(v^+,n) = \langle v^+,n\rangle_+\, dv^+ d\sigma_K(n),$$

где z_+ и z_- обозначают положительную и отрицательную части числа z, соответственно;

(ii) $\pi_d^{\#}\nu = \nu$, то есть мера ν инвариантна относительно преобразования $(v,v^+,n) \mapsto (-v_+,-v,n)$.

Теорема. (a) $\nu_B \in \mathcal{M}_{\mathrm{conv}B}$.

(b) *Множество мер $\{\nu_B : \mathrm{conv}B = K\}$ всюду плотно в $\mathcal{M}_K$.*

В докладе разъясняется идея доказательства теоремы и приводятся примеры ее применения в задачах оптимального аэродинамического сопротивления.

О спектральных свойствах эллиптических задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность

Пламеневский Б. А. (г. Санкт-Петербург)

Пусть G – область евклидова пространства, совпадающая вне большого шара с объединением конечного числа непересекающихся полуцилиндров. Граница области предполагается гладкой. Рассматривается общая эллиптическая краевая задача, самосопряженная относительно формулы Грина. Коэффициенты (медленно) стабилизируются на бесконечности в том смысле, что на функциях с носителями в окрестности бесконечности в каком-нибудь из упомянутых полуцилиндров оператор исходной краевой задачи близок к оператору некоторой "предельной" задачи в соответствующем цилиндре. Коэффициенты предельной задачи не зависят от осевой переменной.

Задача в области G содержит спектральный параметр. Мы рассматриваем собственные значения, каждому из которых отвечает хотя бы одна собственная функция, экспоненциально затухающая на бесконечности; такому собственному значению может соответствовать еще и другая собственная функция, не обладающая указанным свойством. Доказывается, что эти собственные значения сгущаются разве лишь у "пороговых" значений спектрального параметра и на бесконечности. Точечный спектр вблизи сгущений описывается в терминах собственных функций непрерывного спектра и (расширенных) матриц рассеяния.

Квазиэнергетическая функция для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях

Починка О. В. (г. Нижний Новгород)

В работе вводится понятие квазиэнергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла, то есть функции Ляпунова, имеющей минимальное число критических точек. Строится квазиэнергетическая функция для диффеоморфизма сферы S^3, неблуждающее множество которых состоит из четырех неподвижных гиперболических точек: одного источника, одного седла и двух стоков. Устанавливается взаимосвязь между числом критических точек квазиэнергетической функции и топологией вложения сепаратрис седовой точки в S^3. В частности, устанавливается, что диффеоморфизм из рассматриваемого класса имеет энергетическую функцию тогда и только тогда, когда сепаратрисы вложены тривиально.

Литература

[1] Bonatti Ch., Grines V. *Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London). 2000. V. 6, No 4, 579-602.*

[2] Meyer K. R. *Energy functions for Morse-Smale systems. Amer. J. Math. 1968. V. 90, 1031 - 1040.*

[3] Pixton D. *Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, No 2, 167-172.*

О сглаживающем дифференцировании в некоторых упругих задачах

Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И. (г. Воронеж)

Задача о собственных частотах колебаний двухзвенной шарнирно-сочлененной цепочки стержней определяется уравнением:

$$(pu'')'' = \lambda M'u(0 < x < \ell, x \neq \xi), \tag{1}$$

где $M(x)$-монотонная функция, определяющая распределения масс. Предположим, что в точке ξ смыкания стержней нет сосредоточенных масс, т.е. $M(x)$ непрерывна. Предполагается, что концы цепочки как либо закреплены. Предположение о непрерывном сочленении, т.е. о непрерывности решений $u(x)$ уравнения (1), означает условие

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0).$$

Физическими соображениями обычно объясняются условия шарнира в точке ξ

$$u''(\xi - 0) = u''(\xi + 0) = 0.$$

Оказывается, и третья производная функции $u(x)$, обозначающей деформацию на $[0, \ell]$ цепочки, т.е. решение уравнения (1), должна быть непрерывна в точке $x = \xi$. Эта странная гладкость второй и третьей производных $u(x)$, несмотря на заведомый разрыв $u'(x)$ в этой точке, ставит вопрос о природе такого странного "заглаживания" особенности решения в точке $x = \xi$.

Ответ следующий. Уравнение (1) можно считать условием минимума потенциальной энергии исходной цепочки. И тогда оно оказывается следствием аналога интегро-дифференциального уравнения Эйлера

$$(pu'')(x) = \lambda \int_{\xi}^{x} \Big(\int_{0}^{\tau} u dM \Big) d\tau.$$

Для уравнений последнего типа развита качественная теория, вполне аналогичная качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, объясняющая осцилляционные спектральные свойства.

Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$

Покотило В. И. (МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет)[4]

Изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + \left(x^4 - a^2x^2\right) y, \;\; \varepsilon > 0,$$

действующее в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, где ε малый параметр. Так как $q(x) \to \infty$ при $x \to \pm\infty$, то спектр этого оператора дискретен при любом $\varepsilon > 0$. Наша задача - описать характер поведения спектра при $\varepsilon \to 0$. Можно показать, что при $q(x) = x^4$, то есть при $a = 0$, предельным множеством является луч $e^{-\frac{i\pi}{3}}t,\ t \in \mathbb{R}_+$. Доказано, что предельный спектр рассматриваемой задачи получается масштабированием с коэффициентом a из предельного множества, соответствующего $a = 1$, поэтому все результаты получены для этого случая. Пусть (см. [4]) ${}_2F_1(p, q; r; z)$ - гипергеометрическая функция, определяемая рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p)_k (q)_k z^k}{k!(r)_k} = 1 + \frac{pqz}{r} + \frac{p(p+1)q(q+1)z^2}{2r(r+1)} + \ldots$$

В нашем случае p, q, r - вещественные константы, а z - аналитическая функция, зависящая от спектрального параметра λ. Критические кривые, вдоль которых концентрируется спектр рассматриваемой задачи, найдены в виде уравнений на гипергеометрическую функцию. Пусть $z_1(\lambda) = -\frac{\lambda + 2\sqrt{\lambda+1}+2}{\lambda}$ и $z_2(\lambda) = -\frac{\lambda - 2\sqrt{\lambda+1}+2}{\lambda}$, рассмотрим кривые

$$\gamma_1 = \{\lambda |\ Re(e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\lambda\, {}_2F_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_1(\lambda))}{\sqrt{1 - \sqrt{\lambda + 1}}}) = 0\}$$

[4]Работа поддержана РФФИ, грант №07-01-00283, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1.

$$\gamma_2 = \{\lambda|\ Re(e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{\lambda\,{}_2F_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;z_2(\lambda))}{\sqrt{1+\sqrt{\lambda+1}}}) = 0\}$$

$$\gamma_3 = \{\lambda|\ Re(e^{\frac{i\pi}{4}}\lambda(\frac{{}_2F_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;z_1(\lambda))}{\sqrt{1-\sqrt{\lambda+1}}} - \frac{{}_2F_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;z_2(\lambda))}{\sqrt{1+\sqrt{\lambda+1}}})) = 0\}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. Предельный спектральный граф рассматриваемого семейства операторов является объединением части кривой γ_2, соединяющей 0 с точкой $\lambda_0 = -0.5 - i\,0.44503...$, части кривой γ_3, соединяющей -1 с λ_0, и кривой γ_1, выходящей из λ_0 и стремящейся к асимптоте параллельной лучу $e^{-\frac{i\pi}{3}}t,\ t \in \mathbb{R}_+$.

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова.

Литература

[1] Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: Наука, 1983.

[2] Шкаликов А. А. *О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи* // Мат. заметки. - 1997 - Т.62, №6 - С. 950-953

[3] Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля* // Изв. РАН. - 2002. - 66, №4. - С.177-204

[4] Weisstein, Eric W. *Hypergeometric Function.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html

Local approximations by solutions of second order elliptic equations and removable singularities

Pokrovskii A.V. (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine)

Let

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j f) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i(b_i(x)f) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\partial_i f + d(x)f$$

be a uniformly elliptic operator in divergent form with bounded and measurable real coefficients $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $d(x)$ in a bounded domain $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$, $\partial_i := \partial/\partial x_i$, $i,j = \overline{1,n}$). Assume that the inequality $\int_G (d\phi - \sum_{i=1}^n b_i \partial_i \phi)dx \leq 0$ holds for any non-negative function $\phi \in C_0^\infty(G)$. For a ball $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\} \Subset G$ and $u \in W^{1,2}(B(x,r))$ denote by $u_{L,x,r}$ the solution to the Dirichlet problem $Lf = 0$ in $B(x,r)$, $u - f \in W_0^{1,2}(B(x,r))$.

Let $h(t)$ be a continious positive nondecreasing function such that for some $\varepsilon > 0$ the function $t^{-(n/2-1+\varepsilon)}h(t)$ is nondecreasing ($t > 0$). We say that a function $u \in W^{1,2}(G)_{\rm loc}$ belongs to the class $W(L,G,h)$, if $\|\nabla(u - u_{L,x,r})\|_{L_2(B(x,r))} \leq C(u)h(r)\ \forall\, B(x,r) \Subset G$. For $h(t) = t^{n/2+\alpha}$, $\alpha > -1$, we write $W(L,G,h) =: W^\alpha(L,G)$.

Theorem 1. *A relatively closed set $E \subset G$, $E \neq \emptyset, G$, is removable for (generalized) solutions of the equation $Lf = 0$ in the class $W(L,G,h)$ if and only if the Hausdorff measure of E corresponding to the calibrating function $g(t) := t^{n/2-1}h(t)$ is zero.*

In what follows we assume that $b_i(x) \equiv c_i(x) \equiv d(x) \equiv 0$ in G, $i = \overline{1,n}$.

Theorem 2. *Let $0 < \gamma \leq 1$, $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n \subset C^{0,\gamma}(G)_{\rm loc}$. Then $W^\alpha(L,G)_{\rm loc} = C^{1,\alpha}(G)_{\rm loc}$ for $0 < \alpha < \gamma$.*

Theorem 3. *Let $0 < \alpha < \gamma \leq 1$, $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n} \subset C^{0,\gamma}(G)_{\mathrm{loc}}$. Then a relatively closed set $E \subset G$, $E \neq \emptyset, G$, is removable for solutions of the equation $Lf = 0$ in the class $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ if and only if E has zero Hausdorff measure of order $n-1+\alpha$, i.e.* $\mathrm{mes}^{n-1+\alpha}E = 0$.

Theorem 4. *Let $0 < \alpha < 1$, $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n} \subset C(G)$. Then a relatively closed set $E \subset G$, $E \neq \emptyset, G$, is removable for solutions of the equation $Lf = 0$ in the class $C^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ if and only if* $\mathrm{mes}^{n-2+\alpha}E = 0$.

Polyadic analysis as a part of the harmonic one.

Polischook V.(St. Petersburg)

The polyadic analysis is a branch of mathematics allied with the p–adic theory. E. Novoselov [1] made an essential contribution into this area. His theory includes topology, arithmetic, calculus, measure theory and integration in the polyadic domain. Novoselov's approach for the investigation of arithmetic functions has been studied by several papers and books.

Briefly, the notion of polyadic number can be defined by the following way.

Let C be the ring of all integer sequences with pointwise operations. A sequence is said to be a *0–sequence* if for each positive integer n almost all its elements are divisible by n. Such sequences form an ideal C_0 of the ring C stable under the shift which makes possible to apply the shift operation to elements of the quotient–ring C/C_0. Any constant of the ring C/C_0, i. e. any coset α stable under the shift is called a *polyadic number.* These numbers form a ring denoted by P. The principal ideals $G^{(n)} = \{n\alpha : \alpha \in P\}$ $(n \in \mathbb{N})$ form a base of zero vicinities, defining in the ring P a Hausdorff topology σ compatible with its algebraic structure. Thus, by a polyadic number one means a *finite integral adele.* It can be viewed as a limit of an integer sequence which converges p–adically for every prime p.

The most important property of the polyadic ring (P, σ) is to be a *compact Hausdorff space.* This makes possible to introduce a translation–invariant integration for arithmetic functions. So, the compactification of the ring $\mathbb{Z}$ by means of *divisibility topology* σ is the key idea of Novoselov's theory.

Our goal is to show that there are very close relations between the polyadic analysis and the classic theory of commutative Banach algebras (cf. [2]). Namely, let A be the algebra consisting of all complex periodic functions on $\mathbb{Z}$ with the uniform norm and G be the compact space of all characters $A \to \mathbb{C}$ with $*$–weak topology γ induced from the dual of A. The following proposition is proved.

Theorem. *The convolution ring operations in G are compatible with γ. The ring (G, γ) is algebraically and topologically isomorphic to the ring (P, σ).*

This means that we can identify the polyadic ring P with *divisibility* topology σ and the ring of characters G with *periodicity* topology γ.

Acknowledgement. The author would like to thank the DFG (Project 436 RUS 113/809/0–1) and RFBR (Grant 05–01–04002–NNIOa) for the financial support.

References

[1] Novoselov E. V. *A new method in probabilistic number theory.* Transl. Amer. Math. Soc., 52, 217–275, 1966.

[2] Krizhyus Z. *Limit–periodic arithmetical functions.* Lith. Math. J. 25, 243–250, 1985.

Инвариантные $GL(n,\mathbb{R})$-интегралы для дифференциальных систем типа Дарбу

Попа М. Н., Дяконеску О. В. (г. Кишинев)

Рассматривается полиномиальная дифференциальная система

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} ... x^{\alpha_m} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m = 1, n;\ n \geq 2), \tag{1}$$

где коэффициентный тензор $a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}$ симметричен по нижним индексам, по которым здесь производится полное свертывание и группу центроаффинных преобразований $GL(n,\mathbb{R})$ [1].

С помощью алгебр Ли операторов [2] изучаются алгебраические интегралы системы (1), когда она принимает вид типа Дарбу [3]

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + m x^j R(x^1, x^2, ..., x^n) \quad (j, \alpha = 1, n), \tag{2}$$

где $R(x^1, x^2, ..., x^n)$ - однородный многочлен $(m-1)$-й степени.

При $n = 2$ и $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ с помощью теоремы Ли об интегрирующем множителе [2,4] построены инвариантные $GL(2,\mathbb{R})$- интегрирующие множители и $GL(2,\mathbb{R})$ интегралы системы (2), где с помощью последних интегралов исследованы вопросы предельных циклов для этих систем.

При $m = 2$ и $n = 3, 4, 5, ...$ по аналогии со случаем $n = 2$ получены инвариантные $GL(n,\mathbb{R})$- интегрирующие множители и $GL(n,\mathbb{R})$-интегралы для систем вида (2).

Литература

[1] Сибирский К.С, *Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений*, Кишинев , Штиинца , 1982, 168 с.

[2] Попа М.Н, *Приложения алгебр к дифференциальным системам*, Кишинев , Академия Наук Молдовы , 2001, 224 с.

[3] Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка*, Изд. БГУ, Минск, 1982, 208 с.

[4] Diaconescu O.V., Popa M.N. *Lie algebras of operators and invariant GL(2,R)-integrals for Darboux type differentoal systems.*, Buletinul AŞM, Matematica, 2006, Nr. 3(52), p. 3-16.

Nonexistence of nontrivial solutions for supercritical equations of mixed elliptic-hyperbolic type

Popivanov N. (Department of Mathematics and Informatics, University of Sofia, Bulgaria)

For semi-linear partial differential equations of mixed elliptic-hyperbolic type with various boundary conditions, the nonexistence of nontrivial solutions is shown for domains which are suitably star-shaped and for nonlinearities with supercritical growth in a suitable sense. The results follow from integral identities of Pohozaev type which are suitably calibrated to an invariance with respect to anisotropic dilations in the linear part of the equation. For the Dirichlet problem, in which the boundary condition is placed on the entire boundary, the technique is completely analogous to the classical elliptic case as first developed by Pohozaev in the supercritical case. At critical growth, the nonexistence principle is established by combining the dilation identity with another energy identity. For "open" boundary value problems in which the boundary condition is placed on a proper subset of the boundary, sharp Hardy-Sobolev inequalities are used to control terms in the integral identity corresponding to the lack of a boundary condition.

Управление инвариантами преобразований Ляпунова

Попова С. Н. (г. Ижевск)

Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ y = C(t)x, \quad (t, x, y, u) \in \mathbb{R}^{1+n+r+m}, \tag{1}$$

с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами. Систему (1) отождествляем с тройкой (A, B, C). Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выберем линейным по наблюдателю $u = U(t)y$ с кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ $m \times r$-матрицей $U(\cdot)$. Полученная замкнутая система

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)C(t)\big)x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{2}$$

принадлежит множеству $\mathcal{M}_n$ всех линейных однородных систем n-го порядка с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами, следовательно, для нее определены всевозможные инварианты преобразований Ляпунова. Пусть ι — некоторый ляпуновский инвариант, $\iota(\mathcal{M}_n)$ — множество значений инварианта ι. Определим отображение $\varphi_\iota : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$, которое ставит в соответствие произвольной кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матричной $m \times r$-функции $U(\cdot)$ значение $\iota(A + BUC)$ инварианта ι системы (2).

Определение. Ляпуновский инвариант ι называется *глобально управляемым относительно тройки* (A, B, C), если отображение $\varphi_\iota : KC_{mr}(\mathbb{R}) \to \iota(\mathcal{M}_n)$ сюръективно. Если множество значений ляпуновского инварианта ι содержится в некотором метрическом пространстве (X, ρ), то ι называется *локально управляемым относительно тройки* (A, B, C) в случае открытости при $U(t) \equiv 0$ отображения φ_ι.

Получены достаточные условия локальной и глобальной управляемости различных инвариантов преобразований Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №06–01–00258.

Задача рассеяния для квантовых волноводов и графов и операции в квантовом компьютере

Попов И. Ю. (г. Санкт-Петербург)

Рассмотрены задачи о двумерных квантовых волноводах (и трехмерных квантовых слоях), связанных через малые отверстия. Рассматриваются операторы Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана в соответствующих областях. С использованием нестационарных методов доказана теорема существования резонансов (см. [1])

Теорема 1. При достаточно малом диаметре отверстия в окрестности нижней границы ветви непрерывного спектра лапласиана существует резонанс.

Найдены первые члены асимптотического разложения резонанса по диаметру отверстия методом согласования асимптотических разложений решений краевых задач. Проведено обоснование асимптотики. Найдена асимптотика в случае наличия внешнего электрического поля. Рассмотрен случай периодического набора отверстий связи. Показано наличие зоны, близкой к границе непрерывного спектра и найдена асимптотика краев зоны.

Описан резонансный эффект при электронном транспорте в слабо связанных квантовых волноводах. Показана возможность на основе данных эффектов получения спин-поляризованного электронного пучка (см. [2]) и реализации однокубитовых и двухкубитовых операций (оператор Адамара, CNOT, SWAP). Предложены два способа трактовки кубита и описаны соответствующие системы. Также проанализирована операция приготовления начального состояния с использованием набора квантовых точек.

Рассмотрена задача рассеяния для двух нерелятивистских частиц на квантовом графе с $2n$ свободными концами, соединенными в вершине. Проанализировано влияние потенциала взаимодействия и геометрических характеристик. Построена функция Грина соотвтетствующего гамильтониана. В рамках стационарной теории рассеяния построены волновые операторы и матрица рассеяния. Детальный анализ проведен для потенциала взаимодействия в виде $1/r^2$. Обсуждаются приложения к квантовым вычислениям.

Литература

[1] Попов И. Ю., Тесовская Е. С. *ТМФ. 2006. Т. 146. № 3, С. 429-442.*

[2] Gortinskaya L. V., Popov I. Yu., Tesovskaya E. S., Uzdin V. M. *Physica E. 2007. V. 36, N 1. P. 12-16.*

Структура аттрактора системы итерированных функций

Портнов М. М. (г. Воронеж)

Рассмотрим семейство отображений

$$F_i : M \to M, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

некоторого непустого множества M в себя и соответствующее этой системе *отображение Хатчинсона*:

$$\mathcal{F}X = \bigcup_{i=1}^{p} F_i X. \tag{2}$$

Если M есть метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)$, то в пространстве $\mathcal{M}$ всех непустых ограниченных замкнутых множеств из M вводится хаусдорфова метрика

$$h(X,Y) = \sup\{\rho(x,Y), \rho(y,X) : x \in X, y \in Y\}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что если каждое из отображений F_i семейства (1) является сжимающим с константой сжатия q_i, то отображение Хатчинсона (2) является сжимающим в хаусдорфовой метрике с константой сжатия $q = \max\{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$. Следовательно существует единственная неподвижная точка X отображения (2) (аттрактор системы итерированных функций (1)).

Отображение $F_{i_1 \ldots i_n} \equiv F_{i_n} \ldots F_{i_1}$, где каждый из индексов i_k может принимать значения от 1 до p, также является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку, которую мы обозначим через $x_{i_1 \ldots i_n}$.

Теорема. Пусть M полное метрическое пространство и каждое из отображений семейства (1) является сжимающим. Тогда аттрактор X системы итерированных функций (1) всегда является компактным множеством. Он состоит из всевозможных точек $x_{i_1 \ldots i_n}$ и их пределов; иными словами: каждая неподвижная точка $x_{i_1 \ldots i_n}$ отображения $F_{i_1 \ldots i_n}$ входит в аттрактор X и множество таких точек плотно в X.

Литература

[1] Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.* / Р.М. Кроновер – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

[2] Люстерник Л.А. *Краткий курс функционального анализа.* / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

[3] Борисович Ю.Г. *Введение в топологию.* / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич,Т.Н. Фоменко – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.

Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения для волнового уравнения

Потапов М. М. (г. Москва)

В [1] был предложен устойчивый вариационный метод приближенного решения уравнений $Au = f$ с линейным ограниченным оператором $A : H \to F$ в гильбертовых пространствах. Этот метод можно применять в случае, когда вместо точных данных A и f известны некоторые их приближения $\widetilde{A}$ и $\widetilde{f}$, обладающие сходимостью

$$\|\widetilde{A}u - Au\| \to 0 \quad \forall u \in H, \qquad \|\widetilde{f} - f\| \to 0. \tag{1}$$

Аналогичное условие $\|\widetilde{A}^*v - A^*v\| \to 0$ $\forall v \in F$ должно выполняться и для сопряженного оператора A^*. Кроме того, предполагается, что искомое нормальное решение u_* истокопредставимо и известен радиус r шара, содержащего элемент-источник v_* :

$$u_* = A^*v_*, \qquad \|v_*\| \le r. \tag{2}$$

Априорная информация вида (2) доступна в случае, когда сопряженный оператор A^* корректно разрешим:

$$\|A^*v\|^2 \ge \mu \|v\|^2, \tag{3}$$

а значение постоянной $\mu > 0$ в (3) известно. Тогда в (2) можно взять $r \ge \|f\|/\mu$ и использовать это значение r при реализации алгоритма из [1]. В рамках тех же требований строятся устойчивые приближенные решения и сопряженного уравнения $A^*v = g$.

Достаточно жесткие условия (1)–(3) выполняются в задачах граничного и зонного управления процессами, описываемыми волновым уравнением

$$\rho(x)\, y_{tt} = (k(x) y_x)_x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l.$$

Сопряженный оператор в таких задачах связан с двойственными задачами наблюдения, а конструктивные оценки корректной разрешимости вида (2) обычно удается получить на временных промежутках, протяженность которых превышает некий пороговый уровень T_*. Типичной структурой постоянной μ при $T > T_*$ является $\mu = \mu_0 (T - T_*)$ со значением $\mu_0 > 0$. При выборе естественных аппроксимаций разностного или проекционно-разностного типа проверка условий (1) и аналогичных условий для сопряженного оператора обычно не вызывает принципиальных затруднений. Более детально некоторые из приложений к задачам граничного управления и наблюдения для волнового уравнения рассмотрены в [2],[3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00416) и программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект РНП 2.1.1.1714).

Литература

[1] Потапов М. М. *Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором* // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596–598.

[2] Потапов М. М. *Приближенное решение задач Дирихле-управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения* // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46. № 12. С. 2191–2208.

[3] Потапов М. М. *Наблюдаемость нерегулярных решений задачи Неймана для волнового уравнения с переменными коэффициентами* // Доклады РАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 747–752.

Spectral properties of the linear steady-state equations for viscous compressible fluid: the three-dimensional case

Pribyl M. (Moscow, Russia)

Let $(\overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x), \overline{u}_3(x), \overline{v}(x))$ be the steady-state solution of the system for the viscous compressible fluid, where $\overline{u}(x) = (\overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x), \overline{u}_3(x))$ – is velocity vector field written in Lagrange coordinates and $\overline{v}(x)$ – is the specific volume. We make the linearization of this system on the mentioned solution and consider the following spectral problem

$$\frac{1}{\overline{v}(x)}\Delta u_i(x) + \sum_{j=1}^{3} b_{ij}(x)\partial_{x_j} v(x) - \lambda u_i = 0,\ i = 1,2,3, \operatorname{div} u(x) - \lambda v(x) = 0, \tag{1}$$

$$b_{ii}(x) = -\frac{1}{\overline{v}(x)}\frac{\partial \overline{u}_i(x)}{\partial x_i} - p'(\overline{v}), \text{if } i = j,\ b_{ij}(x) = -\frac{1}{\overline{v}(x)}\frac{\partial \overline{u}_i(x)}{\partial x_j}, \text{if } i \neq j,$$

where $p \in C^1(0,\infty)$ is the pressure, $x \in T \equiv \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$. We define the spaces $H = L_2(T) \times L_2(T) \times L_2(T) \times H^1(T)$ and $J = H^2(T) \times H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T)$. Let us rewrite the system (1) in abstract form $(A(x,D) - \lambda E)U(x) = 0$, where $A : H \to H$ and $D(A(x,D)) = J$.

Definition. A closed operator $A(x,D) : H \to H$ is called sectorial, if there exists $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ and $M \geq 0$ thats for some $a \in \mathbb{R}$ sector $S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \varphi,\ \lambda \neq a\}$ lies in resolvent set of operator $A(x,D)$ and $\|(A(x,D) - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$ for $\lambda \in S_{a,\varphi}$.

Theorem. The operator $A(x,D)$ is sectorial and it spectrum is discret.

Принцип двойственности в обратных и нелокальных задачах для эволюционных уравнений в банаховых пространствах

Прилепко А. И. (г. Москва)

Даны две точки $T, T_0 \in \mathbb{R}$, $0 < T \leq T_0 < +\infty$, банаховы пространства E и E^*, операторы A, $\Phi(t)$, A^*, $\Phi^*(t)$.

1^0 Обратная задача. Найти пару $u(t)$ и параметр $p \in E$ из условий (1)-(2)

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + \Phi(t)p, \qquad 0 < t \leq T_0, \qquad u(0) = u_0 \tag{1}$$

$$u(T) = u_1 \tag{2}$$

В (1)-(2) заданы u_0, u_1 из соответствующих пространств.

2^0 Нелокальная задача. Найти $z(t)$ и параметр $p_* \in E_*$ из условий (3)-(4)

$$\frac{dz}{dt} = A^* z(t), \qquad 0 < t \leq T_0, \qquad z(0) = p_* \tag{3}$$

$$\int_0^T \Phi^*(T-t)z(t)dt = g^*, \qquad q^* \in E^*, \tag{4}$$

g^* – дан.

Прямой нелокальной (по времени) задачей называем задчу нахождения $z(t)$ из условий (4)-(5)

$$\frac{dz}{dt} = A^* z(t) + f_*(t), \qquad 0 < t \leq T_0, \tag{5}$$

$f_*(t)$ – дана.

Найдены достаточные условия разрешимости указанных задач.

Теорема 1. (Принцип двойственности)

Пусть выполнены соответствующие условия на входные данные задачи (1)-(2) и задачи (3)-(4). A – ограниченный оператор.

Тогда классическая корректная разрешимость обратной задачи (1)-(2) эквивалентна к классической корректной разрешимости сопряженной к ней нелокальной по времени задачи (3)-(4).

Подобные результаты получены для неограниченного оператора A при некоторых условиях на входные данные указанных задач.

Работа поддержана РФФИ, код проекта 06-01-00401.

Литература

[1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics// Marcel Dekker inc. New York – Basel, 2000, 709 p.*

[2] Прилепко А. И. *Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений I// Дифференциальные уравнения, 2005. Т. 41, № 11, с. 1560 – 1571.*

Проблема устойчивости равновесных решений в ограниченных задачах многих тел.

Прокопеня А. Н. [5] *(Брестский государственный технический университет, Беларусь)*

[5]Работа написана в соавторстве с Гребениковым Е. А.

Возмущенное движение в окрестности произвольного равновесного решения ограниченной задачи многих тел определяется гамильтоновой системой шести обыкновенных дифференциальных уравнений, причем функция Гамильтона H является аналитической функцией относительно канонически сопряженных переменных q_i, p_i $(i = 1, 2, 3)$ и может быть представлена в виде разложения

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \,, \tag{1}$$

где H_k – однородный многочлен степени k относительно q_i, p_i. Такие системы возникают при исследовании многих проблем классической и небесной механики и достаточно хорошо изучены (см. [1]). Тем не менее, при исследовании каждой конкретной системы возникает необходимость выполнения достаточно громоздких аналитических вычислений, требующих использования компьютера и современных программных средств.

В настоящей работе обсуждается алгоритм построения канонического преобразования Биркгофа, приводящего гамильтониан (1) к нормальной форме, а также его практическая реализация на основе системы компьютерной алгебры *Mathematica* [2]. В качестве примера рассматривается круговая ограниченная задача четырех тел [3] и для биссекториальных решений этой задачи доказываются теоремы об устойчивости по Ляпунову и об устойчивости для большинства начальных условий в плоском и пространственном случаях соответственно.

Литература

[1] Маркеев А. П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика: Сб. ст. под ред. В.М.Матросова, В.В.Румянцева, А.В.Карапетяна. – М.: Физматлит, 2001. – С. 114-130.

[2] Wolfram S. The Mathematica book. – Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.

[3] Grebenikov E. A., Gadomski L., Prokopenya A. N. Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem // Nonlinear oscillations. – 2007. – **10**(1). – P. 66-82.

Аппроксимация диадическими вейвлетами.

Протасов В.Ю. (Москва)

Аппроксимационные свойства классических систем вейвлетов широко изучались в литературе. Они отвечают за способность вейвлетов приближать функции в различных функциональных пространствах. Мы исследуем диадические вейвлеты на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ с операцией двоичного сложения.

Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого натурального j числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1\}$ определяются как $x_j = [2^j x](\mathrm{mod}\, 2)$, $x_{-j} = [2^{1-j} x](\mathrm{mod}\, 2)$. Это – цифры двоичного разложения x. Для произвольных $x, y \in \mathbb{R}_+$ полагаем $x \oplus y = \sum_{j0} |x_j - y_j| 2^{-j}$. В частности, $x \oplus x = 0$. Обычная мера Лебега на $\mathbb{R}_+$ инвариантна относительно сдвигов $x \mapsto x \oplus a$. Все пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \in [1, +\infty]$ совпадают с классическими пространствами L^p на полупрямой.

Системой диадических вейвлетов на $\mathbb{R}_+$ называется система функций $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}_+}$, являющаяся ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x \ominus k)$ для всех j, k. Диадические вейвлеты являются аналогами классических вейвлетов Добеши. Первые примеры были построены в [1], полная классификация диадических вейвлетов была получена в работе [2]. Аппроксимационные свойства характеризуются величиной $\nu(\psi)$ (порядок приближения), равной супремуму таких γ, что расстояние от любой достаточно гладкой финитной функции до пространства $V_j = \operatorname{span}\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ равно $O(2^{-j\gamma})$. Для классических вейвлетов, как известно, порядок приближения равен числу нулевых моментов функции ψ и может быть различным. Мы показываем, что в диадическим случае он равен 1 для всех систем вейвлетов. Для приближений функций, гладких в двоичной метрике на $\mathbb{R}_+$, напротив, все системы имеют порядок приближения $+\infty$. Поэтому для сравнения аппроксимационных свойств мы вводим более тонкий измеритель, так называемый дефект приближения. Получены явные формулы для вычисления дефекта приближения и таким образом охарактеризованы диадические вейвлеты с наилучшими аппроксимационными свойствами.

Литература

[1] W.C. Lang, *Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group*, Intern. J. Math. and Math. Sci., 21 (1998), 307–317.

[2] В.Ю. Протасов, Ю.А. Фарков, *Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой*, Мат. Сборник, 197 (2006), No 10, 129-160.

[3] Ю.А. Фарков, *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах*, Изв. РАН. Сер. матем. 69 (2005), No 3, 193-220.

[4] В.Ю. Протасов, *Аппроксимация диадическими вейвлетами*, подано в Мат. Сборник.

Некоторые представления решений волнового уравнения на геометрическом графе

Прядиев В. Л., Глотов Н. В. (Воронежский государственный университет)

Рассматриваются различные представления для классического решения гиперболического (прежде всего, волнового) уравнения на $\Gamma \times I$ (Γ – геометрический граф, I – промежуток из $\mathbb{R}$), для различных классов краевых условий и условий трансмиссии во внутренних вершинах Γ. Основное внимание уделяется представлениям, которые возникают после применения:

1) метода Фурье,

2) аналога формулы Даламбера (в смысле работы: Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Докл. РАН, 2003, Т. 388, N 1),

3) аналога формулы Римана (получен в работе: Гаршин С. В., Тр. мол. уч. Воронеж. гос. ун-та, 2004, N 2),

а также после применения оригинальных подходов, основанных

4) на методе функции Грина (см. Прядиев В. Л., Соврем. математика и её прилож., 2006, Т. 38),

5) на сведении к набору задач о распространении граничных режимов на рёбрах Γ (см. Глотов Н. В., Прядиев В. Л., Вестн. Воронеж. гос. ун-та, 2006, N 2).

Рассматриваемые представления обсуждаются, с одной стороны, как источник получения качественной информации (периодичность, квазипериодичность решений, стабилизация), а с другой – как источник получения количественной информации (выделение периодических составляющих квазипериодического решения) и основа для построения новых численных способов решения (новых даже для случая, когда Γ – отрезок).

Осреднение интегро-дифференциального уравнения Бюргерса

Пшеницына Н. А. (г. Москва)

Процессы распространения волн в нелинейной среде с релаксацией описываются следующим интегро-дифференциальным уравнением (см. [1]) в области $Q_X = \{(x,y) : 0 \le x \le X, -\infty < y < \infty\}$:

$$\rho(\frac{x}{\delta})u_x + \alpha(\frac{x}{\delta})f_y(u) - \beta(\frac{x}{\delta})u_{yy}\nu(\frac{x}{\delta})\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y} u_y(x,y')e^{\frac{y'-y}{\tau}}dy' \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x=0,y) = \varphi(y) \tag{2}$$

и условием периодичности

$$u(x,y+1) = u(x,y). \tag{3}$$

Параметр δ полагается малым, уравнение (1) имеет в качестве коэффициентов быстро осциллирующие функции ρ, β, α и ν. Это усложняет численное решение задачи, так как размер ячейки сетки дискретных схем должен обеспечивать точный подсчет значений быстро изменяющихся коэффициентов. При уменьшении параметра δ растет количество точек сетки, участвующих в алгоритме, а следовательно, численный анализ задачи замедляется и выполняется с бóльшими погрешностями. Поэтому используется один из подходов к решению задач с быстро осциллирующими коэффициентами - осреднение.

Доказано существование обобщенного решения задачи (1), (2), (3). Получена априорная оценка разности двух решений с разными начальными функциями. Доказана единственность решения задачи. Найдено осредненное по δ уравнение с постоянными коэффициентами, соответствующее (1). Доказаны существование и единственность решения осредненного уравнения. Доказана близость решений: разность решений задачи (1), (2), (3) и осредненной задачи является малой величиной порядка δ^{1-d} с $d < 1$.

Литература

[1] Руденко О. В., Солуян А. А. *Теоретические основы нелинейной акустики.* // М.: Наука, 1975.

Об условиях существования решения краевых задач линейной дифференциальной системы при ее возмущении.

Рахимбердиев М. И. (Институт математики МОН РК, г.Алматы, Казахстан)

Рассматривается линейная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ - кусочно непрерывная и ограниченная на полуоси матричная функция. Исследуется разрешимость краевой задачи $x(0) = a$, $x(T) = b$ при произвольных a и b для систем, которые являются возмущенными к данной. Пусть Ω, ω - центральные показатели системы (1)(см.[1]). Используем такую характеристику системы как экспоненциальная разделенность индекса k (см.[2]).

Полагаем, что система (1) обладает свойством аппроксимационной разрешимости для двухточечных краевых задач с произвольными ненулевыми краевыми условиями, если при любых ненулевых $a, b \in R^n$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся матричная функция $B_\varepsilon(t)$, $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$, и число $T > 0$ такие, что существует решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + B_\varepsilon(t)x,$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = a$, $x(T) = b$.

Теорема. Система (1) обладает свойством аппроксимационной разрешимости краевой задачи с произвольными ненулевыми краевыми условиями тогда и только тогда, если центральные показатели системы (1) удовлетворяют условию $\Omega \geq 0, \omega \leq 0$ и экспоненциальная разделенность не выполняется для всех k.

Литература

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к теории устойчивости.* М., 1966.

[2] Миллионщиков В. М. *//Дифференциальные уравнения.* Т 18 (1982), N 12, с. 2132-2148.

Application of weighted potential theory for large deviation results for random matrices

Réffy J.

Empirical eigenvalue distribution of random matrices plays important role in physics and statistics. We know the limit distribution as the matrix size goes to infinity in several cases, for example for self-adjoint, positive semidefinite or unitary random matrices. Since the 90's large deviation theorems were also proven for this classes of random matrices. The rate function for this large deviations is a weighted logarithmic energy, where the weight functon depends on the distribution of the entries, and the limit distribution is the corresponding equlibrium measure, so weigthted potential theory gave the possibily to find the limit distribution for other classes of random matrices, for example for some sequences of random contractions.

Singularities in slow-fast systems and geometric control theory from a common viewpoint.

Remizov. A. (Porto)

The slow motion of the slow-fast system

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) + \varepsilon f(x,y,\varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon G(x,y) + o(\varepsilon), \quad x \in R^m, \; y \in R^n, \tag{1}$$

with $m \geq 1$, and $n \geq 3$, is given by the vector field

$$\frac{dx_i}{dt} = -\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^{-1} \left\langle G, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\rangle, \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

defined on the set $S \setminus K$, where $S : F(x,y) = 0$ is the slow surface of (1), $K : \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = 0$ is the locus of the projection $\pi : S \to Y$ along X. Here X and Y are the spaces with variables x and y, respectively, and triangle brackets mean the standard scalar product.

Totally singular extremals of the affine-control system

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x), \quad x \in R^n, \; u \in R^1, \tag{3}$$

with $n \geq 3$, are the trajectories by the vector field

$$\frac{dx}{dt} = f_0 + \frac{h_{001}}{h_{110}} f_1, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{h_{001}}{h_{110}} \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad x \in R^n, \; p \in (R^n)^*, \tag{4}$$

where $h_{i_1,\dots,i_k} = \langle p, f_{i_1,\dots,i_k} \rangle$, and $f_{i_1,\dots,i_k} = [f_{i_1}, f_{i_2,\dots,i_k}]$, square brackets mean the Lie brackets. This field is defined on the set $S \setminus K$, where $S : h_1 = h_{01} = 0$, and $K : h_{110} = 0$.

It is readily seen that the vector fields (2) and (4) have the common nature, and hence they can be considered from a common viewpoint. The construction is based on the multiplication the fields (2) and (4) by the denominator $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$ and h_{110}, respectively. After that we obtain the vector fields with special property: among the germs of their components there exist $m+1$ germs ($m = 1$ for (4)), which generate the ideal (in the ring of smooth germs) containing all others components. Such vector fields can be written in general form:

$$\dot{\xi}_i = v_i, \quad i = 1, \dots, m+1, \qquad \dot{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, l, \tag{5}$$

where the local ideal $I = (v_1, \dots, v_{m+1})$. The set of the singular points of (5) is given by equations $v_1 = 0, \dots, v_{m+1} = 0$, in general case it is a smooth submanifold of codimension $m+1$ in the phase space. The aim of the talk is to study the vector field (5) in the neighborhood of the singular point.

Пограничный слой гофрированной пластины

Романов М. С. (г. Москва)

Рассматривается задача о движении электропроводной жидкости в пограничном слое гофрированной пластины в присутствии магнитного поля. Пусть поверхность пластины задается уравнением $y = F_\varepsilon(x)$, где ε - малый параметр, семейство F_ε равномерно сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $F_\varepsilon(0) = 0$

Предполагается, что движение жидкости происходит в области $D_\varepsilon := \{0 < x < X; \; y > F_\varepsilon(x)\}$ и описывается системой

$$\begin{cases} \frac{\nu}{\rho} u^\varepsilon_{yy} - u^\varepsilon u^\varepsilon_x - v^\varepsilon u_{\varepsilon y} = -s(x)(U(x) - u^\varepsilon) - UU' \\ u^\varepsilon_x + v^\varepsilon_y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u^\varepsilon(0,y) = u_0(y), \; u^\varepsilon(x, F_\varepsilon(x)) = 0, \; v^\varepsilon(x, F_\varepsilon(x)) = v_0(x), \; u^\varepsilon(x,y) \underset{y\to\infty}{\rightarrow} U(x). \tag{2}$$

Здесь $U(x)$ - скорость внешнего потока, $s(x)$ - произведение квадрата напряженности магнитного поля на коэффициент проводимости жидкости.

Рассматривается также предельная задача

$$\begin{cases} \frac{\nu}{\rho} u_{yy} - uu_x - vu_y = -s(x)(U(x) - u) - UU' \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

в области $D_0 = \{0 < x < X,\ y > 0\}$ с граничными условиями

$$u(x,0) = 0,\ u(0,y) = u_0(y),\ v(x,0) = v_0(x),\ u(x,y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} U(x). \tag{4}$$

Доказана следующая теорема о сходимости решений.

Теорема 1. Если задача (3), (4) имеет решение u, v, тогда при всяком ε задача (1), (2) также имеет решение

$$u^\varepsilon(x,y) = u(x, y - F_\varepsilon(x)),\ v^\varepsilon(x,y) = v(x, y - F_\varepsilon(x)) + F'_\varepsilon(x)u(x, y - F_\varepsilon(x))$$

причем для любого компакта $K \subset D_0 \cap D_\varepsilon$ и для любой функции $\phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ верно:

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{K}{\rightrightarrows}} \tilde{u}, \qquad u_y^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{K}{\rightrightarrows}} \tilde{u}_y,$$

$$\int\limits_{D_0\cap D_\varepsilon} (u_x^\varepsilon - \tilde{u}_x)\phi\, dxdy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \int\limits_{D_0\cap D_\varepsilon} (v^\varepsilon - \tilde{v})\phi\, dxdy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

О полунепрерывности сверху показателей Ляпунова неоднородной системы.

Рожин А. Ф. (Московский государственный университет)

Множество $\mathcal{M}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) всех линейных неоднородных систем

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно непрерывными оператор-функциями A, ограниченными на $\mathbb{R}^+$, и неоднородностями f, имеющими неположительный показатель Ляпунова

$$\lambda[f] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |f(t)| \le 0,$$

наделим топологией, задаваемой семейством норм (ниже систему (1) обозначаем через (A, f))

$$\|(A,f)\|_\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} (\|A(t)\| + e^{-\alpha t}|f(t)|), \quad \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \equiv (0, +\infty).$$

Определение 1. [1] Для всякого $i = 0, \ldots, n$ назовем *i-м показателем Ляпунова* неоднородной системы (1) величину

$$\lambda_i(A,f) = \inf_{L\in\mathcal{A}_i^n} \sup_{x\in L} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_{A,f}(t,0)x\|,$$

где $\mathcal{A}_i^n$ — множество всех i-мерных аффинных подпространств $L \subset \mathbb{R}^n$, а $X_{A,f}$ — оператор Коши системы (1).

Теорема 1. Старший показатель λ_n полунепрерывен сверху в точке $(A, f) \in \mathcal{M}^n$ тогда и только тогда, когда $\lambda_n(A, f) = \varkappa(A)$, где $\varkappa(A)$ — верхний центральный неоднородный показатель [1] однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2}$$

Теорема 2. Если $\Omega(A) < \varkappa(A)$, где $\Omega(A)$ — верхний центральный показатель [2] системы (2), то для любого $i = 0, \ldots, n-1$ показатель λ_i полунепрерывен сверху в точке $(A, f) \in \mathcal{M}^n$ тогда и только тогда, когда $\lambda_i(A, f) = \varkappa(A)$.

Литература

[1] Морозов О. И. *Показатели Ляпунова неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.* Дисс. М., МГУ, 1991. [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

О гладкости периодических решений квазилинейного волнового уравнения с однородным граничным условием 3-го рода

Рудаков И.А. (Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского)

Рассматривается неоднородная линейная задача

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) + hu'_x(\pi,t) = 0, \quad u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times [0,2\pi]$, $H_k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$– пространства Соболева.

Теорема 1. *При $h > 0$ и $k \in \{0,1\}$ для любой 2π–периодической по t функции $f \in H_k(\Omega)$ $(H_0(\Omega) = L_2(\Omega))$ существует единственная 2π–периодическая по t функция $u \in H_{k+1}(\Omega)$, являющаяся обобщенным решением задачи (1) – (2). Если $f \in H_1(\Omega)$, то $u \in H_2(\Omega) \cap C_1(\Omega)$.*

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Опираясь на теорему 1 выводятся утверждения о гладкости обобщенных решений задачи (3),(2), полученных в работах [1],[2]. Рассмотрим уравнение sin –Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Следствием теоремы 1 и работы [2] является следующая теорема.

Теорема 2. *Существует $h_0 \in (0,\infty)$ такое, что при любом $h \geq h_0$ задача (4),(2) имеет нетривиальное ($u \not\equiv 0$) решение $u \in H_2(\Omega) \cap C_1(\Omega)$, которое зависит от t.*

Отметим, что существование нетривиального, зависящего от t, бесконечно гладкого, 6π– периодического по t решения уравнения sin –Гордон (4) с граничными условиями Дирихле $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ следует из работы [3]. Заметим еще, что теоремы 1,2 справедливы для граничных условий $u(0,t) - hu'_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}$.

Литература

[1] Рудаков И.А.//Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. N 11.
[2] Рудаков И.А.//Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. N 10.
[3] Рудаков И.А.//УМН. 1985. Т. 40. Вып. 1(241).

Confluence of the nonlinear waves in the Stefan problem with undercooling.

Rudnev V. Yu. (Moscow)

We shall construct a smooth approximation of solutions of the Stefan problem with undercooling

$$\overline{\sigma}_t = \overline{\sigma}_{rr}, \quad \overline{\sigma}_r\big|_{r=\hat{r}_i(t)} = (-1)^{i+1}\left(\varkappa_1 \hat{r}_i'(t) + \varkappa_2/\hat{r}_i(t)\right) \tag{1}$$
$$[\overline{\sigma}_r]\big|_{r=\hat{r}_i(t)} = (-1)^{i+1}\hat{r}_i^3(t)\hat{r}_i'(t) \quad i = 1, 2$$

under the assumption that the motion of the free boundary is the motion of the front of a nonlinear wave and the confluence of free boundaries is interaction of solitary nonlinear waves.

The smooth approximations of solutions of the Stefan problem with kinetic undercooling constructed in this paper are approximate solutions of the phase field system

$$\sigma_t - \sigma_{rr} = -ru_t, \quad \varepsilon(u_t - u_{rr}) = (u - u^3)/\varepsilon + \sigma/r. \tag{2}$$

and they admit a weak passage to the limit as $\varepsilon \to 0$. In this case, we obtain the limit problems (and their solutions) describing the process of confluence of free boundaries. Such approach is called the weak asymtotics method, see [1].

We construct the desired formulas and derive the following effects:

(a) the weak asymptotic solution is smooth for $t > t^*$, the absolute values of the free boundaries velocities are equal to each other at the contact moment;

(b) the temperature has a negative jump at the instant and at the point of confluence of the free boundaries, and this jump is equal to

$$[\bar{\theta}]\big|_{\substack{r=r^*,\\ t=t^*}} = -(r_{10}(t^*)/4)\lim_{t\to t^*-0}(r_{10t}^2 + r_{20t}^2). \tag{3}$$

where $r = r_{i0}(t)$ other positions of the free boundaries till the interaction.

In particular, it follows from (a) and (b) that the velocities of the free boundaries have jumps at the point of contact.

We note that the only example known to the authors, where the confluence of the free boundaries is studied, is given in [2].

This paper shows that the following classification can be introduced:

(1) problems in which the confluence of free boundaries leads to disappearance of one of the phases;

(2) problems in which the domain occupied by one of the phases changes its connectivity, but the number of phases remains the same.

In this paper, we consider an example precisely from the first class of problems. We do not justify the asymptotics of the constructed solution. But this can be done based on our constructions. It is easy to see that the main role here is played by the (not proved) existence of the classical solution up to the moment of confluence of the free boundaries. Our construction of the existnece under this assumption reduced the justification to estimating the soluton of the heat equation with the right-hand side f_ε admitting the estimate

$$f_\varepsilon = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\mu), \qquad \mu \in (0, 1/2)$$

and with zero initial and boundary conditions. An analysis of the structure of this right-hand side shows that $f_\varepsilon \cdot \varepsilon^{-\mu}$ as $\varepsilon \to 0$ is a linear combination of functions $\delta'(r - r_i)$ and $\delta(r - r_i)$, $i = 1, 2$ with coefficients depending on t, τ, and these coefficients converge fast to zero as $\tau \to \pm\infty$.

Hence we can conclude that for $r \neq r_i$ the solution of this heat equation belongs to C^∞ for $\varepsilon \geq 0$ and admits the estimate $\mathcal{O}(\varepsilon^\mu)$. In the whole domain $\Omega \times [0, T]$, a rough analysis based on general theorems [3] shows that the solution belongs to $W_2^{-\delta}$, $\delta > 0$, and has the estimate $\mathcal{O}(\varepsilon^\mu)$ in the norm of this space. In particular, the weak limit of the constructed weak asymptotic solution is equal to the exact global solution of the heat equation in the phase field system.

References

[1] Danilov V. G., Omel'yanov G. A. and Shelkovich V. M. *Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 208, 2003.

[2] Meirmanov A., Zaltzman B. *Global in time solution to the Hele-Shaw problem with a change of topology.* EJAM, Vol. 13, pp. 431-447, 2002.

[3] Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall, N.J., 1964.

The method of difference potentials

Ryaben'kii V. S. (Keldysh Institute of Applied Mathematics)

The difference potentials method (DPM) proposed by V.S.Ryaben'kii is intended for modeling and numerical solution of the problems which are settled by means of partial differential equations. For linear equations DPM combines an universality of difference schemes and convenient boundary integral equations method of analytic function theory. The main construction of DPM - difference potential with boundary projectors - is constructed for arbitrary linear difference equations on arbitrary multidimensional grids and plays for solutions of these equations the same role as classical Cauchy-type integral for solutions of Cauchy-Riemann system. This report contains the construction of difference potentials and the list of problems from gas-dynamics, electric magnetism, mathematical modeling of active shielding problem of acoustics solved by means of DPM. The state-of-the-art in the development of the method as of the year 2001 can be found in monograph: "V.S. Ryaben'kii. Method of difference potentials and its applications. Volume 30 of Springer Series in computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002."

Формулы интегрирования функций Бесселя $J_{2k+1}(z), Y_{2k+1}(z)$, полученные с помощью системы компьютерной алгебры.

Рябенко А. А., Абрамов С. А. (г. Москва)

Использование современной системы компьютерной алгебры при решении математических задач часто открывает возможность эксперимента — построения точных решений задачи для небольших значений параметров. Может повезти, и изучение этих решений приведет к догадке (гипотезе) о том, как выглядит решение в случае произвольных параметров. После этого система компьютерной алгебры может помочь проверить появившуюся гипотезу. Такова одна из компьютерных технологий, полезных для математических исследований.

Следуя этой схеме (технологии), с помощью системы Maple авторами была найдена и доказана еще одна формула для интеграла функции Бесселя $J_n(z)$ для нечетных натуральных n:

$$\int J_n(z)dx = -\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\prod_{j=1}^{k}(n^2-(2j-1)^2)}{z^{2k}} J_n'(z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(1-2k)\prod_{j=1}^{k-1}(n^2-(2j-1)^2)}{z^{2k-1}} J_n(z) + C.$$

Эта формула отсутствует в известных авторам справочниках по специальным функциям.

Теми же компьютерно-алгебраическими средствами показано, что для четных натуральных n не существует представления какой-либо первообразной для $J_n(z)$ в виде линейной комбинации над $\mathbf{C}(z)$ функции $J_n(z)$ и ее производных.

Из всех сведений о функциях $J_n(z)$ при обосновании сделанных выше утверждений использовалось только то, что $z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(z^2-n^2)$ является для $J_n(z)$ минимальным аннулирующим линейным дифференциальным оператором над $\mathbf{C}(z)$. Отсюда следует, что аналогичные утверждения, включая формулу интегрирования, сохраняют силу и для $Y_n(z)$.

Критерий однократной полноты собственных функций вырожденного квадратичного пучка второго порядка[6]

Рыхлов В.С. (Саратовский государственный университет)

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda x) :=$$
$$\left(\alpha_{\nu 1}y^{(1)}(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\right) + \left(\beta_{\nu 1}y^{(1)}(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\right) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$. Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристичского уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$. Предположим, что эти корни лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $\omega_2 < 0 < \omega_1$. Фундаментальная система решений уравнения $l(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ есть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Обозначим $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} := \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$, $\nu, j = 1,2$, и $V_j := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j := [w_{1j}, w_{2j}]^T$, $j = 1,2$. Пусть $\tau := |\omega_2|/\omega_1$, $a_{sk} := \det[W_s, W_k]$, $a_{\overline{s}k} := \det[V_s, W_k]$, $a_{s\overline{k}} := \det[W_s, V_k]$, $a_{\overline{s}\overline{k}} := \det[V_s, V_k]$, $b_0 := -a_{\overline{1}1}/a_{\overline{1}\overline{2}}$, $c_0 := -a_{\overline{1}2}/a_{1\overline{2}}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ (здесь $\ln_0$ есть ветвь логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : \lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1, \ k \in \mathbb{Z}\}$, $Y := \{y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0\exp(\lambda(\omega_1+\omega_2 x)), \ \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda\backslash\{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$, а множество $Y\backslash\{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций (с.ф.) пучка, соответствующих ненулевым с.з.

Основные предположения: $a_{\overline{1}\overline{2}} \neq 0$, $a_{1\overline{2}} \neq 0$, $a_{\overline{1}2} = a_{12} = 0$. Если $W_2 \neq 0$ или $W_2 = 0$ и $a_{1\overline{1}} = 0$, то функция $\exp(\lambda\omega_1 x)$ является порождающей для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$ и, таким образом, вопрос об однократной полноте системы с.ф. является тривиальным. Предположим далее, что $W_2 = 0$ и $a_{1\overline{1}} \neq 0$.

Теорема. *Система Y однократно полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ ($\sigma > 0$) тогда и только тогда, когда уравнение $A_\sigma f + \frac{b_0}{\tau}C_{\sigma\tau}Bf = 0$ имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0,\sigma]$, где операторы A_σ, B и $C_{\sigma\tau}$ определяются формулами (функция $f(x)$ считается продолженной нулем за отрезок $[0,\sigma]$):*

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

$(A_\sigma f)(x) = \sum_{s=0}^{l} \overline{c}_0^s f(x+s)$, $(Bf)(x) = f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)$, $(C_{\sigma\tau} f) = \sum_{s=0}^{m} \overline{c}_0^{-s} f(x-s)$, *где* $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $l < \sigma \le l+1$, $m < \sigma\tau \le m+1$.

О ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ, ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОСТИ ОБЕИХ ФАЗ

Рыков Ю.Г. (Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша)

Рассмотрим следующую систему уравнений, описывающую процесс фильтрации двухкомпонентной смеси в пористой среде

$$\frac{\partial}{\partial t} cb(c,P) + \frac{\partial}{\partial x}\left[F(c,P)Q\right] = 0 \; ; \; \frac{\partial}{\partial t} b(c,P) + \frac{\partial}{\partial x}\left[G(c,P)Q\right] = 0 \; ; \; -\frac{K}{\Phi}\frac{\partial P}{\partial x} = Q \; .$$

Здесь c — концентрация одного из компонент; P — давление; функция $b(c,P)$ — общая плотность смеси; функции $F(c,P)$ и $G(c,P)$ — соответствующие потоки; K — проницаемость среды, Φ — ее пористость.

Выписанная система является вырожденной параболической системой по отношению к неизвестным c, P (отсутствуют вторые производные от c). Вследствие вырожденности такая система допускает разрывы у функции c и обладает некоторыми свойствами квазилинейных гиперболических систем. Поэтому имеет смысл изучать задачу Римана в классической постановке для функций c, P.

Оказывается, что при некоторых, физически мотивированных, предположениях обобщенное решение задачи Римана в двухфазной области для изучаемой системы существует. При этом концентрации с допускают разрывы, которые распространяются подобно тому, как это происходит в случае гиперболических уравнений. Давление P непрерывно, но его производные по пространству терпят разрыв на разрывах концентраций c. Кроме того, в отличие от подобных задач для гиперболических систем, имеет место бесконечная скорость распространения возмущений, и решение задачи Римана всегда содержит разрывы концентрации.

Бесконечное множество полиномиальных законов сохранения в газовой динамике

Рылов. А. И. (г. Новосибирск)

Роль законов сохранения в механике и физике общеизвестна [1,2 и др.]. В настоящей работе для стационарных течений газа построены однородно-дивергентная система уравнений на плоскости потенциала (φ, ψ) и, как следствие, законы сохранения на плоскостях (φ, ψ) и (x, y)

$$kV_\varphi + U_\psi = 0, \quad U_\varphi - V_\psi = 0, \quad k = \frac{1-M^2}{\rho^2};$$

$$(U\rho u + Vv)_x + (U\rho v - Vu)_y = 0$$

Новизна состоит в том, что функции U и V является полиномоми либо по четным, либо по нечетным степеням угла наклона вектора скорости θ, степени полиномов U и

V произвольны, но отличаются друг от друга на ± 1. Коэффициентами при степенях θ являются функции модуля скорости q, вычисляемые через конечное число квадратур и включающие ряд констант.

В основе результата лежат два факта. Первый гласит, что каждому точному решению уравнений Чаплыгина на плоскости годографа (z, θ)

$$\varphi_z + k\psi_\theta = 0,\ \varphi_\theta - \psi_z = 0; \qquad k\psi_{\theta\theta} + \psi_{zz} = 0; \quad z(q) = \int \frac{\rho}{q} dq$$

отвечает своя однородно-дивергентная система на плоскости потенциала [3]. Второй – это наличие у приведенного выше уравнения Чаплыгина второго порядка, не совсем правильно именуемого иногда обобщенным уравнением Трикоми, бесконечного числа решений в виде полиномов по четным или нечетным степеням θ с коэффициентами, выражаемыми через z [4].

Отметим также, что линейные комбинации полиномов U (полиномов V) и выбор констант позволяют построить полиномиальный закон сохранения $R_\psi - Q_\varphi = 0$ с функциями R и Q, в той или иной степени удовлетворяющими заданным требованиям. И, наконец, следуя [5] все сказанное выше переносится на случай одномерных нестационарных течений. В этом случае речь идет о полиномах по четным или нечетным степеням скорости u с коэффициентами, зависящими от давления p.

Работа выполнена в рамках междисциплинарного проекта СО РАН "Актуальные проблемы теории функций и гидродинамики"(проект №117).

Литература

[1] Козлов В. В. *Полиномиальные законы сохранения в классической и квантовой механике.* Тезисы конференции, посвященной И.Г.Петровскому. МГУ. 2004.

[2] Шмыглевский Ю. Д. *Аналитические исследования динамики газа и жидкости.* М.: Эдиториал УРСС, 1999. -232с.

[3] Рылов А. И. ДАН. 2002. Т.383. N 1. С.34-36.

[4] Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики.* М.: Физматлит, 2001. -576 с.

[5] Рылов А. И. ПММ. 2005. Т.69. Вып. 2. С.245-257.

Перемешивающие конструкции ранга 1

Рыжиков В. В. (г. Москва)

Перемешивающие преобразования ранга 1 играют заметную роль в эргодической теории, являясь источником интересных примеров для спектральной теории динамических систем и теории самоприсоединений. Т. Адамс установил свойство перемешивания для класса лестничных конструкций (см.[1]). Автором предлагается новый класс так называемых монотонных конструкций ранга 1, для которых свойство перемешивания устанавливается путем итерации модифицированного метода Адамса.

Литература

[1] Adams T. *Smorodinsky's conjecture on rank one systems.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 739-744.

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Сабитов К. Б. Сулейманова А. Х. (г. Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y - b^2u = 0\ , \tag{1}$$

где $a, b = const, b \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа.

Как известно (см. [1]), что постановка краевых задач для уравнения (1) в области эллиптичности существенным образом зависит от коэффициента a. В связи с этим возникают случаи, когда $a > 1$, $a < 0$, $a = 0$, $a = 1$ и $0 < a < 1$. В данной работе рассмотрен случай, когда $a < 0$ и решена следующая

Задача. *Пусть $a < 0$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq 1; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq 1; \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a(u_y(x,y) - du(x,y)) \lim_{y\to 0-0} (-y)^a(u_y(x,y) + du(x,y)),\ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{7}$$

где $d = const$, f и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$.

При $a < 0$ установлены критерий единственности и существование решения задачи (2) – (7) на основе спектрального метода решения краевых задач (см. [2]).

Литература

[1] Кельдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. – 1951. – Т. 77, № 2. С. 181 – 184.*

[2] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – Т. 413, № 1.*

Устойчивость эйлеровых эластик

Сачков Ю. Л. (Институт Программных Систем РАН, Россия)

В 1744 г. Леонард Эйлер рассмотрел следующую задачу о стационарных конфигурациях упругого стержня [1]. Дан упругий стержень на плоскости, у которого закреплены положения концов, а также углы наклона стержня на концах. Требуется определить возможные профили стержня при заданных граничных условиях. Эйлер получил дифференциальные уравнения для стационарных конфигураций стержня и описал их возможные качественные типы. Эти конфигурации называются эйлеровыми эластиками.

Вопрос об устойчивости эйлеровых эластик рассматривался в литературе по вариационному исчислению и теории упругости, однако до сих пор был решен лишь в некоторых частных случаях.

В докладе будет описано полное решение задачи об устойчивости эйлеровых эластик с помощью методов геометрической теории управления [2]. Помимо этой локальной задачи, будет также исследована соответствующая глобальная задача оптимального управления [3].

Литература

[1] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии Наук, Приложение I, "Об упругих кривых"*, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934, 447–572.

[2] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.

[3] Sachkov Yu. L. *Maxwell strata in Euler's elastic problem*, Preprint SISSA 04/2007/M, Trieste, Italy.

Presentation of subharmonic functions in semiplanes

Nazim Sadik

A theory of subharmonic functions of finite order, in considerable to the measure, leans against integral formulas. In this article we obtain presentations for subharmonic functions in the upper half-plane more general growth $\gamma(r)$, what finite order. Basic a job performance can be formulated as follows. Let function of growth $\gamma(r)$ such, that or function $\ln \gamma(r)$ is protuberant relatively $\ln r$, or lower order of function $\gamma(r)$ equal to endlessness. Then for any just subharmonic function v of growth $\gamma(r)$ exists unlimited great number $\mathbf{R}$ of positive numbers and family $u_R : R \in \mathbf{R}$ of just subharmonic functions in upper half-plane $\mathbb{C}_+$ such, that 1) complete measures of functions u_R in a circle $|z| \leq R$ coincide with the complete measure of function v; 2) $v - u_R \rightrightarrows 0$ evenly on compact disks in $\mathbb{C}_+$ when $R \to \infty$, $R \in \mathbf{R}$; 3) family of functions $u_R : R \in bfR$ evenly to on R satisfies limitations on growth, i.e. $T(r, u_R) \leq A\gamma(Br)/r$, where A and B are constants, and $T(r, \cdot)$ is description of growth.

Асимптотика спектральной функции оператора Штурма–Лиувилля с локально суммируемым на $\mathbb{R}$ потенциалом

Садовничая И. В.

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженное расширение $\mathcal{L}$ оператора Штурма–Лиувилля $ly = -y'' + q(x)y$, потенциал q которого является локально суммируемым на $\mathbb{R}$. Исследуется асимптотическое поведение спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ оператора $\mathcal{L}$. Получена оценка разности $|\theta(x, y, \lambda) - \theta_0(x, y, \lambda)|$ при больших значениях спектрального параметра λ. Здесь $\theta_0(x, y, \lambda) = \dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{\pi(x-y)}$ – спектральная функция оператора $\mathcal{L}_0$ с потенциалом $q(x) \equiv 0$. Пусть сначала потенциал q является равномерно локально суммируемым, т. е. удовлетворяет условию $\omega(h) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_x^{x+h} |q(t)|dt < +\infty$, $h > 0$. Обозначим $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_x^{x+1} |q(t)|dt$.

Теорема 1. Для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ самосопряженного расширения оператора Штурма–Лиувилля с равномерно на $\mathbb{R}$ локально суммируемым потенциалом q при $\lambda \geq e^{8M}$справедливо неравенство

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| \leq 3Me^{M/2} + \frac{95\sqrt{2M}}{\sqrt{\ln\lambda}}.$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 верна оценка

$$\sup_{|x-y|>\sqrt{\frac{\ln\lambda}{\lambda}}} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| = O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\Big), \quad \lambda \to +\infty,$$

в которой постоянная в символе O зависит только от M.

Теорема 3. Если функция $\omega(h)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$, то

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| \to 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Пусть теперь q удовлетворяет условию $\Omega_p(R,h) = \sup\limits_{I\in[-R,R],\,|I|\leqslant h} \left(\int\limits_I |q(t)|^p dt\right)^{1/p} < +\infty$, $p \geqslant 1$, $0 < h \leqslant 2R$. Обозначим $M_p(R) = \Omega_p(R,1)$.

Теорема 4. Пусть $M_p(R) < +\infty$. Тогда для спектральной функции самосопряженного расширения оператора Штурма–Лиувилля при $e^{16M_p(R)} \leqslant \lambda \leqslant e^{0.5R^{3-1/p}M_p(R)}$, где $R \geqslant 6$ справедливо неравенство

$$\sup_{|x|\leqslant R/2,\,|y|\leqslant R/2} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| \leqslant C_1 \frac{M_p(R)e^{M_p(R)/2}}{\lambda^{\frac{p-1}{4p-2}}} + C_2\left(\frac{M_p(R)}{\ln\lambda}\right)^{\frac{p}{3p-1}}.$$

Здесь C_1 и C_2 – абсолютные постоянные.

Подробные доказательства теорем 1-3 приведены в работе [1].

Литература

[1] Садовничая И. В. *Новая оцена спектральной функции самосопряженного расширения в $L_2(\mathbb{R})$ оператора Штурма–Лиувилля с равномерно локально суммируемым потенциалом* // Дифф. уравнения, Т. 42. №2. С. 188–201. 2006.

О связи формул следа Крейна и Гельфанда-Левитана

Садовничий В. А., , Подольский В. Е. (г. Москва)

В 1953 году И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан (см. [1]) для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x)$ с нулевым средним получили формулу регуляризованного следа

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)),$$

здесь μ_n – собственные числа возмущенного оператора, а $\lambda_n = n^2$ – собственные числа невозмущенного.

В том же 1953 году вышла работа М. Г. Крейна (см. [2]), в которой доказана формула следа для самосопряжённого оператора H и самосопряжённого ядерного возмущения T:

$$\operatorname{tr}(\Phi(H+T) - \Phi(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda)\,d\lambda,$$

где функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ зависит только от пары операторов H и T, функция $\Phi(\lambda)$ принадлежит достаточно широкому классу, содержащему $\Phi(\lambda) = \lambda$.

Мы остановимся на вопросе, поставленном И. М. Гельфандом в 1956 году (см. [3]): установить прямую связь формул следа типа Крейна и типа Гельфанда-Левитана. Дело в том, что в формуле Крейна из двух операторов H и $H + T$ конструируется **один ядерный** оператор $\Phi(H+T) - \Phi(H)$ и далее находится выражение для его следа, а в формуле типа Гельфанда-Левитана речь всегда идет о двух операторах, никакой ядерности разности операторов не предполагается, а находится явное выражение для некоторой числовой характеристики – суммы разностей собственных чисел.

Мы (см. [4]) для дискретных операторов предлагаем обобщение понятия функции спектрального сдвига и соответствующее обобщение формулы Крейна, которое естественно включит в себя формулу Гельфанда-Левитана. Мы увидим, что обсуждаемая связь формул с одной стороны, обладает определенным единством для операторов с произвольной природой спектра, но с другой стороны, есть существенные различия в зависимости от того, являются рассматриваемые операторы дискретными или нет.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР, т. 88, 1953, с. 593 - 596.*

2. Крейн М. Г. *О формуле следов в теории возмущений. Мат. сб., 1953, т. 33, вып. 3, с. 597 - 626.*

3. Гельфанд И. М. *О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. УМН, 1956, т. 11, №1, с. 191 - 198.*

4. Садовничий В. А., Подольский В. Е. *Об обобщенной функции спектрального сдвига и связи формул следа Крейна и Гельфанда - Левитана. Докл. РАН, 2005, т. 402, №3, с. 311 - 312.*

High frequency asymptotics of the symbol of the Dirichlet-to-Neumann operator in 2D diffraction problems

Sadov S. (Memorial University of Newfoundland)

Consider the Dirichlet problem for the Helmholtz equation outside a bounded convex domain $\Omega \subset R^2$ with smooth boundary Γ:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad u|_\Gamma = f(s), \qquad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(r^{-1/2}) \text{ as } r \to \infty. \tag{1}$$

We parametrize Γ by arclength s; let L be the length of Γ.

Definition. *Let $g = \partial_n u$ be the normal derivative of the solution. The Dirichlet-to-Neumann operator N is the map $f(s) \to g(s)$.*

Let $\hat{f}_n$ be the Fourier coefficients of the function f (considered as a 2π-periodic function of the normalized arclength $2\pi s/L$). The operator N as a pseudodifferential operator can be described by the formula

$$g(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_\Gamma(s,n;k)\, \hat{f}_n \exp(\tfrac{2\pi}{L} ins), \tag{2}$$

where $\sigma_\Gamma(s,n;k)$ is the symbol of N. As is well known, the order of N is 1, which means that for fixed Γ, k, and s there exist $\lim n^{-1}\sigma_\Gamma(s,n;k)$ as $n \to +\infty$ and $n \to -\infty$.

We study the uniform high-frequency ($k \to \infty$) of the symbol.

Theorem. *Let $\kappa(s)$ be the curvature of Γ. Denote $w(k,s) = k/\kappa(s)$. Suppose that $n, k \to \infty$ in such a way that $n/k \to \mathrm{const} = (L/2\pi)t$ (this defines t). Then*

$$\sigma_\Gamma(s,n;k) \sim k\{w^{-1}F_1(wt) + w^{-3}F_2(wt) + O(w^{-5}r_2(wt))\} \tag{3}$$

Here F_1, F_2, r_2 are universal functions of a single variable (known explicitly in terms of Airy functions).

Formula (3) reaches far beyond the well known Kirchhoff approximation; it enhances a number of "non-reflecting boundary conditions" whose role has been increasingly appreciated over the last 20 years.

An approach to the D-to-N operator via its symbol leads to a new fast algorithm for numerical solution of two-dimensional high-frequency diffraction problems even if Ω may not be convex. A desirable higher-dimensional generalization is not readily available due to symbol not being well defined *globally*, unlike in (2); this fact prevents statements uniform in k. An exception is periodic (grating) problems with an appropriate radiation condition.

Об аппроксимационных и вариационных методах регуляризации одной некорректной задачи Коши.

Сакбаев В. Ж. (МФТИ, Московская обл., г. Долгопрудный)

Цель проводимого исследования – сравнить результаты применения методов эллиптической регуляризации и методов минимизации функционалов невязки задачи Коши для уравнения Шредингера, производящий оператор которого есть линейный симметричный оператор в пространстве $H = L_2(R)$, заданный дифференциальным выражением второго порядка с вырожденной характеристической формой. Вырождение оператора приводит к нарушению корректности задачи (см. [1]).

Как для изучения устойчивости решения задачи Коши, так и с целью определить обобщенное аппроксимативное ее решение в случае нарушения условий корректности, исследуется эллиптическая регуляризация указанной задачи – последовательность корректных задач Коши, аппроксимирующая исходную. Исследована сходимость последовательности решений регуляризованных задач. Установлено, что последовательность решений регуляризованных задач сходится по норме тогда и только тогда, когда рассматриваемая задача имеет единственное решение. В противном случае указанная последовательность сходится слабо.

Определена предельная задача Коши, решением которой является слабый предел последовательности регуляризованных решений, который мы назовем слабым аппроксимаивным решением исходной некорректной задачи.

Для применения к некорректной задаче метода квазирешений (см. [2]) представим задачу Коши в дифференциальной или в интегральной форме как уравнение $\mathbf{A}u = f$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2((0,T),H)$. Определим функционал невязки задачи Коши как норму отклонения $J(u) = \|\mathbf{A}u - f\|_{\mathcal{H}}$.

Определены значения точных нижних граней функционала невязки задачи Коши в интегральной и в дифференциальной формах, установлена единственность минимизирующего элемента. Для функционала задачи в дифференциальной форме определен минимизирующий элемент, а для минимизирующего элемента функционала невязки задачи в интегральной форме получено интегральное уравнение.

Итак, задача Коши имеет единственное слабое аппроксимативное решение, не зависященн от выбора регуляризации задачи. Точки минимума функционалов невязки по норме задачи Коши в интегральной и в дифференциальной формах различны, причем значение экстремали функционала в каждой точке промежутка $(0,T)$ зависит от величины T. Аппроксимативное решение $u^*(t)$ доставляет минимум не функционалу невязки нормы, но семейству функционалов невязки полунорм топологии слабой сходимости в пространстве H.

Литература

[1] Сакбаев В. Ж. *О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шредингера с вырождением на полупрямой.* // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44, N 9. С. 1654–1673.

[2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* // М.: Наука. 1986.

Классификация линейных расширений иррационального поворота окружности.

Сахаров А. Н. (г. Нижний Новгород)

В докладе изучается динамика двумерных линейных расширений иррационального поворота окружности

$$(\varphi, x) \mapsto (\varphi + \alpha(\mathrm{mod} 2\pi), A(\varphi)x), \quad \varphi \in S^1, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где $A : S^1 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ – непрерывное отображение, $\alpha/2\pi$ – иррациональное число. Изучение динамики такого отображения сводится к изучению когомологий коцикла $A(m,\varphi) = A(\varphi_{m-1}) \dots A(\varphi)$, порождаемого (1). Два коцикла $A(m,\varphi)$ и $B(m,\varphi)$ называются *когомологичными*, если существует непрерывное отображение $U : S^1 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ такое, что $U^{-1}(\varphi + \alpha)A(\varphi)U(\varphi) = B(\varphi)$, поэтому $U^{-1}(\varphi_m)A(m,\varphi)U(\varphi) = B(m,\varphi)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$. Задача классификации линейных расширений в терминах коциклов формулируется так: описать все различные классы когомологий коциклов при заданном α.

Эта задача является частным случаем классификации гомеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$

$$f : (\varphi, \theta) \mapsto (\varphi + \alpha, f_\varphi(\theta))(\mathrm{mod} 2\pi), \tag{2}$$

где отображение слоя f_φ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом окружности. Пусть F – некоторое поднятие гомеоморфизма f на накрытие $S^1 \times \mathbb{R}$. Гомеоморфизм f называется *регулярным*, если существует $c > 0$ такое, что

$$|F^n_\varphi(\theta) - \theta - n\rho| \le c$$

для любых φ и θ. В противном случае гомеоморфизм называется *иррегулярным.*

Используя эту классификацию, а также оценку числа минимальных множеств для проективных расширений отображения (1) (см. [4]), получаем следующие утверждения

Теорема 1. Гомеоморфизм (2), порождаемый линейным расширением (1) не имеет минимальных множеств со слоем, гомеоморфным канторову множеству.

Теорема 2. Для линейных расширений вида (1) существует, по крайней мере, двенадцать неэквивалентных классов сопряженности коциклов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 05-01-00501.

Литература

[1] Herman M. *Comm. Math. Helvetica.* 1983. 58. 453–502.

[2] Jäger T., Stark J. *J. London Math. Soc.* 2005. 73. 3. 727-244.

[3] Лерман Л. М. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.* Горький. 1980. 166–185.

[4] Sacker R. J., Sell G. R. *J. Diff. Equat.* 1978. 27. 320–358.

Спектральное разложение на всей прямой функции Грина для трехслойной среды по фундаментальным функциям несамосопряжённого оператора Штурма-Лиувилля.

Салтыков Е. Г. (г. Москва)

Теорема 1. Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2(z)u = -2\delta(z-z')\delta(x-x'), (x,z) \in R^2,$$

где $k(z) = k_0$ при $z < 0$, $k(z) = k_1$ при $0 < z < H$, $k(z) = k_2$ при $z > H$, k_l - комплексные постоянные, $Re k_l \geq 0$, $k_l^2 = \varepsilon_l + j\sigma_l$, $\varepsilon_l \in R^1$, $l = 0,1,2$, j - мнимая единица, при $Im\, k^2(z) \gtrless 0$ функция $u(z,x)$, абсолютно интегрируемая на всей оси x, удовлетворяющая в точках разрыва 1-го рода функции $k^2(z)$ условиям сопряжения - непрерывности функции u и её нормальной к границе разрыва 1-го рода коэффициента производной, представимо в виде

$$u(z,x) = \sum_{i=0,2} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\mu^2-k_i^2}|x-x'|}}{\sqrt{\mu^2-k_i^2}} u_i(z,\mu)u_i(z',\mu)dp_i(\mu). \tag{1}$$

Функции $u_0 = \psi_0$ и $u_2 = \varphi_2$ являются ограниченными функциями на всей оси z и удовлетворяют уравнениям

$$-d^2u_i/dz^2 - k^2(z)u_i = (\mu^2 - k_i^2)u_i,\ \mu \in R^1,\ i = 0,2. \tag{2}$$

$p_i(\mu)$ - отличные от нуля элементы спектральной меры, представляющей диагональную матрицу-функцию.

$$dp_i(\mu) = d\mu/a_i^i(\mu)b_i^i(\mu)2\pi, i = 0,2.$$

Коэффициенты a_i^i и b_i^i определяются из равенств

$$b_0^0(\mu)\varphi_0(z,\mu) + a_0^0(\mu)\varphi_0(z,-\mu)\psi_0(z,\mu),$$

$$b_2^2(\mu)\psi_2(z,\mu) + a_2^2(\mu)\psi_2(z,-\mu)\varphi_2(z,\mu).$$

Функции ψ_2 и φ_0 являются неограниченными на всей прямой z решениями уравнений (2).

Представление (1), понимаемое в смысле предельного перехода при $\sigma_l \in 0(l = 0, 1, 2)$, имеет место при $k^2(z) \to R^1, \varepsilon_l \leq 0$.

Представлеение (1), понимаемое в смысле принципа предельного поглощения, имеет место также при $k^2(z) \in R^1, \varepsilon_l > 0$.

Представление (1) справедливо при $x, x', z, z' \in R^1$.

В работах (см. [1]) и (см. [2]) получено аналогичное представление для решения задачи для двухслойной среды. Таким образом, обобщены результаты работ (см. [1]) и (см. [2]).

Литература

[1] Дмитриев В. И., Салтыков Е. Г. *Успехи мат. наук.* 1994. Т. 49, No. 4 (298). С. 79-80.

[2] Салтыков Е. Г. *Дифференц. уравнения.* 2002. Т. 38. No. 5. С. 687-691.

Нормальная форма автономной системы в окрестности фокуса

Самовол В. С.

Рассматривается задача локальной конечно-гладкой приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особой точки. Достаточно хорошо изучены системы, спектр линейной части которых не пересекается с мнимой осью. Здесь речь пойдет о слабо вырожденных системах, матрица линейной части которых имеет два чисто мнимых (сопряженных) собственных числа, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \tag{1}$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbf{R}^{n+2}, n > 0$; $Q(\xi)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\widetilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси и пару чисто мнимых собственных чисел. Наша цель состоит в определении вида нормальной формы такой системы уравнений и выяснении условий существования конечно-гладкого невырожденного преобразования, приводящего систему (1) к нормальной форме в некоторой окрестности начала координат.

В системе (1) имеется двумерное инвариантное центральное многообразие, на котором в окрестности особой точки интегральные кривые либо замкнуты (случай центра), либо являются спиралями (случай фокуса). Нас интересуют системы, имеющие фокус на центральном многообразии.

Теорема. Для любого целого числа $k \geq 1$ существует невырожденное преобразование класса C^k, приводящее систему (1), имеющую фокус на центральном многообразии, к нормальной форме, имеющей вид полинома по невырожденным координатам, коэффициентами которого являются функции класса C^∞, зависящие от вырожденных координат.

Литература

[1] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262.

[2] Белицкий Г. Р. Гладкая эквивалентность ростков векторных полей. // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20, вып. 4. С. 1—8.

[3] Самовол В. С. Нормальная форма автономной системы с одним нулевым корнем. // Математические заметки. 2004. Т. 75, вып. 5. С. 711—720.

Асимптотические солитонообразные решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза.

Самойленко Ю. И. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)

Одним из фундаментальных уравнений современной физики является уравнение Кортевега-де Фриза, предложенное в 1895 году Д.Кортевегом и Дж. де Фризом для описания явления "уединенной волны", открытого Дж.Ск.Расселом. Как оказалось позже, уравнение Кортевега-де Фриза описывает не только длинные волны поверхности жидкости, но и моделирует ряд других физических явлений и процессов. В частности, это уравнение стало математической основой для развития нового направления в математике – математической теории солитонов, различные аспекты которой изучались в работах таких известных математиков, как М.Крускал, П.Лакс, В.Е.Захаров, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев, В.О. Марченко.

Но, не смотря на то, что уравнение Кортевега-де Фриза инициировало развитие теории обратной задачи рассеивания, которая позволяет получить точные решения для многих дифференциальных уравнений с частными производными, этот подход не позволяет записать в явном виде решения при наличии у таких уравнений изменяющихся коэффициентов. В связи с этим для таких уравнений используются асимптотические методы [1].

В данном докладе рассматриваются вопросы о построении асимптотических решений задачи Коши вида:

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x,$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функции $a_k(x), b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $k = 0,1,\ldots$; функция $f(\eta), \eta \in \mathbf{R}$, принадлежит пространству Шварца; $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Литература

[1] Maslov V. P., Omel'yanov G. A. *Geometric Asymptotics for PDE.* I. AMS, Providence (2001).

Асимптотическое интегрирование систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с вырождением

Самусенко П. Ф. (г. Киев)

В работе разработан алгоритм решения задачи Коши

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon),\ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

где $B(t)$ – квадратная матрица n-го порядка, x, $f(t,x,\varepsilon)$ – n-мерные вектор-функции, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малый параметр.

При этом рассмотрен случай простых элементарных делителей регулярного пучка матриц $||f_x(x,t,0)|| - \lambda B(t)$ ($||f_x(x,t,0)||$ – квадратная матрица n-го порядка, столбцами которой являются $\dfrac{\partial f_i(x,t,0)}{\partial x_j}$, $i,j = \overline{1,n}$), случай одного "конечного" элементарного делителя кратности p и одного "бесконечного" – кратности $n-p$.

Асимптотическое решение задачи (1), (2) построено при условии, что ранг матрицы $B(t)$ на отрезке $[0;T]$ не постоянен.

Литература

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* – Москва: Наука, 1973. - 272 с.

[2] Самойленко А. М., Шкиль Н. И., Яковец В. П. *Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождениями.* – К.: Выща шк., 2000. - 294 с.

Об одном операторе обобщенного сдвига, порожденным общим преобразованием Фурье-Бесселя.

Санина Е. Л. (Воронежский гос. технический университет)

В работе [1] введены прямое и обратное общее преобразование Фурье-Бесселя, ядром которого являются функции, соответственно

$$\Lambda_p(t) = j_p(t) + i\frac{t}{2(p+1)}\ j_{p+1}(t), \quad \Lambda_p(-t) = j_p(t) - i\frac{t}{2(p+1)}\ j_{p+1}(t).$$

Функцию Λ_p условимся называть Λ-функцией Бесселя. Традиционно преобразование Фурье-Бесселя основано на функциях j_p, $p > -1/2$. При этом теорема сложения для этих функций приводит к обобщенному сдвигу

$$j_p(x)\ j_p(y) = T^y j_p(x), \quad T_x^y f(t,x) =$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(p+1/2)} \int_0^\pi f(t, \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha})\ \sin^{2p}\alpha\ d\alpha\,.$$

Теорема сложения для Λ-функций Бесселя имеет вид

$$\Lambda_p(\lambda x)\,\Lambda_p(\lambda y) = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}D_{xy}^2 - \frac{i}{\lambda}\ (D_x + D_y)\right)\ T_x^y j_p(\lambda x).$$

Как оказалось, оператор

$$\tilde{T}_x^y = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}D_{xy}^2 - \frac{i}{\lambda}(D_x + D_y)\right)\ T_x^y$$

удовлетворяет всем пяти аксиомам оператора обобщенного сдвига ([2], стр.17-18). Его будем называть Λ-обобщенным сдвигом. Интересно отметить, что его составляющие $D_{xy}^2 T_x^y$, $D_y T_x^y$ не удовлетворяют этим условиям.

Литература

[1] Киприянов И. А., Катрахов В. В. *Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов.* Мат. сборник, 1977, Т.104, N 1, С.49-68.

[2] Левитан Б. М. *Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения.*/ Б. М. Левитан // Науч. изд-е, - М.: Гос. изд-во физ-мат лит-ры, - 1962. - 325 с.

Двухмодовые бифуркации периодических волновых решений соболевского уравнения 2-го порядка.

Сапронов Ю. И. (г. Воронеж)

Теория уравнений типа С.Л. Соболева (или, более кратко, соболевских уравнений), начало которой заложено в [1], развивалась в трудах многочисленной группы российских и зарубежных математиков [2],[3]. Доклад посвящен задаче о периодических волновых решениях нелинейного соболевского уравнения 2-го порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u + u^3 = 0,$$

для которого найдены условия зарождение "малых" волновых решений в ситуации резонансного взаимодействия двух волновых мод.

Представленные результаты получены на основе функционально – аналитической конструкции [4], центральным звеном которой является переход к абстрактной задаче о бифуркации критических орбит фредгольмова функционала, обладающего слабой круговой симметрией, с последующей редукцией (по модифицированной схеме Ляпунова – Шмидта) к задаче о бифуркации критических точек функции четырех переменных.

Литература

[1] Соболев С. Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 3–50.

[2] Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. *Неклассические дифференциально – операторные уравнения* // Новосибирск: Наука. 2000.

[3] Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. *Линейные уравнения соболевского типа* // ЧелГУ. 2003. 179 с.

[4] Даринский Б.М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. *Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов* // Фундаментальная математика. Современные направления. М.: МАИ. Т.12 (2004). С. 3–140.

Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов.

Сатаев Е. А. (Обнинский Гос. Техн. университет атомной энергетики)

Определение сингулярно гиперболического потока (или сингулярно гиперболического множества) было приведено в [1] как обобщение гиперболического потока на случай, когда в множестве неблуждающих точек содержится неподвижная точка. Похожее определение приведено в [2], где соответствующий поток назван псевдогиперболическим.

Приведем определение сингулярно гиперболического потока согласно работе [1].

Определение. Поток Φ_t на трехмерном римановом многообразии M называется сингулярно гиперболичным на инвариантном множестве Λ, если касательное пространство T_xM в каждой точке $x \in \Lambda$ раскладывается в прямую сумму двух инвариантных пространств $T_xM = E_x^{ss} \oplus E_x^c$, непрерывно зависящих от x на Λ, причем выполняются свойства.

1. E_x^{ss} одномерно, E_x^c двумерно.
2. Существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что
   (a) Если $u \in E_x^{ss}$, $t > 0$, то $|d\Phi_t(u)| < c_1 e^{-\gamma_1 t}|u|$;
   (b) Если $u \in E_x^{ss}$, $v \in E_x^c$, $t > 0$, то
$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} < c_2 e^{-\gamma_2 t} \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|}.$$
3. Существуют константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$ такие, что если $u, v \in E_x^c$, $t > 0$, а $S(u, v)$ обозначает площадь параллелограмма, порожденного векторами u, v, то при всех $t > 0$ верно неравенство
$$S(d\Phi_t(u), d\Phi_t(v)) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(u, v).$$
4. Все неподвижные точки, лежащие в множестве Λ, гиперболичны.

Мы рассматриваем потоки на n-мерном римановом многообразии. В рассматриваемых потоках пространство E_x^{ss} имеет размерность $n-2$, а пространство E_x^c, как и в [1], двумерно. Предполагается, что Λ — аттрактор, т.е. существует такое открытое множество $U \supset \Lambda$, что $\Lambda = \cap_{t>0}\Phi_t(U)$.

Доказывается, что существуют конечное число замкнутых подмножеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k \subset \Lambda$ (эти множества называются компонентами) и инвариантные меры $\mu_1, \ldots, \mu_k$, сосредоточенные на множествах Λ_j , такие, что

1. Поток Φ_t на каждом множестве Λ_j с мерой μ_j эргодичен.
2. Периодические траектории плотны в множествах Λ_j.
3. Если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j — гиперболический аттрактор.
4. На множествах Λ_j существует инвариантное семейство строго неустойчивых многообразий, определеннх на множестве полной меры (строго неустойчивое многообразие точки x состоит из таких точек $y \in \Lambda$, что расстояние между точками $\Phi_t(x)$, $\Phi_t(y)$ экспоненциально убывает при $t \to -\infty$).
5. Если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега нп U, то семейство мер
$$\nu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t(\nu)\, dt$$
при $T \to \infty$ сходится к мере $\sum p_j \mu_j$ с некоторыми коэфициентами $p_j \geq 0$, $\sum p_j = 1$.
6. Если множество Λ_j содержит неподвижную точку, то поток на Λ_j с мерой μ_j является перемешивающим.

Литература

[1] Morales C., Pacifico M. J., Pujals E. *On C^1 robust singular transitive sets for three dimensional flows.* C. R. Acad. Sci. Paris, 326, Serie I: 81–86 (1998).

[2] Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Пример дикого странного аттрактора.* Матем. сб., **189**, No 2(1998), с. 137–160.

Direct and inverse Sturm-Liouville problem in the scale of Sobolev spaces. Global stability

Savchuk A. M., Shkalikov A. A. (Москва)

It was Borg who showed in 1946 that a potential $q(x) \in L_2(0,\pi)$ is uniquely determined by two spectra $\{\lambda_k\}_1^\infty$ and $\{\mu_k\}_1^\infty$ of the operators L_D and L_{DN} generated by the Sturm-Liouville operator $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ with Dirichlet and Dirichlet-Neumann boundary conditions, respectively. In 1999 the authors suggested various methods to define these operators with distributional potentials $q(x) \in W_2^{-1}(0,\pi)$.

Define

$$\rho_{2k-1} = \sqrt{\mu_k} = k - 1/2 + \alpha_{2k-1} \qquad \rho_{2k} = \sqrt{\lambda_k} = k + \alpha_{2k}.$$

We can define the spaces $\hat{l}_2^\theta$ (finite dimensional dilations of usual weighted l_2^θ spaces) such that the operator $T: W_2^\theta \to \hat{l}_2^\theta$,

$$T\sigma = \{b_k\}_1^\infty, \qquad b_k = (2/\pi)\int_0^\pi \sigma(x)\sin kx\,dx, \quad \sigma(x) = \int q(x)\,dx$$

is an isomorphism for all $\theta \geqslant 0$. The classical case $q(x) \in L_2(0,\pi)$ corresponds to $\theta = 1$. In the case $\theta \in [0,1)$ the potential $q(x)$ is a distribution.

Theorem 1. Define the map $F(\sigma) = \{\alpha_k\}_1^\infty$. Then F maps Sobolev spaces W_2^θ into $\hat{l}_2^\theta$, moreover, $F\colon W_2^\theta \to \Sigma^\theta$ is a bijection, where Σ^θ is a subset of $\{\alpha_k\}_1^\infty$ in $\hat{l}_2^\theta$, such that the interlacing condition $\rho_{k+1} > \rho_k$ holds for all $k \geqslant 1$. In addition, F is analytic weakly nonlinear map, i.e $F(\sigma) = (1/2)T\sigma + \Phi(\sigma)$, where $\Phi(\sigma)\colon W_2^\theta \to \hat{l}_2^\theta$ is a compact and analytic map for all $\theta > 0$.

Theorem 2. (on global stability). For all $\theta > 0$ the estimate

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{W^\theta}^2 \leqslant C\|\{\rho_k\} - \{\tilde{\rho}_k\}\|_{\hat{l}^\theta} = C\|\{\alpha_k\} - \{\tilde{\alpha}_k\}\|_{\hat{l}^\theta}$$

holds provided that

$$\{\alpha_k\},\ \{\tilde{\alpha}_k\} \in \Sigma_{r,h}^\theta = \left\{\{s_k\} \in \Sigma^\theta \mid \quad \|\{s_k\}\|_{\hat{l}^\theta} \leqslant r, \quad \rho_{k+1} - \rho_k \geqslant h\right\},$$

and $C = C(\theta, r, h)$. The inverse estimate also holds.

Coupling of a convection-diffusion-reaction-system and Ginzburg-Landau equation for the Chemical Vapour Infiltration of Silicon Carbide.

Schnack E. (Karlsruhe University, Germany), Langhoff T.-A., Deltchev D.

Materials of ceramic-matrix composites are part of modern technology, e.g. in aerospace industry. By chemical vapour infiltration, the SiC matrix is deposited around the carbon fibres due to complex interaction of gas-phase and transport processes. In order to optimize the material properties it is very important to control the gas flow through the fibre bundles to avoid pore blocking. Therefore we need a detailed mathematical model of the occurring processes with computer simulation to get the best properties. From geometrical point of view we have a solid domain, a gas domain and an intermediate domain as a diffuse interphase with a mixture of gas and solid particles. Starting with the free energy $\mathcal{F}$ on the whole domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ as functional of the phase field $\phi(t, \boldsymbol{x})$ and defining the mechanism of the mass transport by considering the chemical reactions we obtain a PDE-system for the deposition process. This system consists of one equation of Ginzburg-Landau-type [1] for the phase field to describe the evolution of the diffuse interphase,

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \boldsymbol{x}) = \xi^2 \Delta \phi(t, \boldsymbol{x}) - 4A\phi\left(\phi^2 - 1\right), \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0; t_{\max}) \times \Omega$$

with the scalar coefficient A and of a convection-diffusion-reaction-system (CDR-system) for the vector of concentrations, $\boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{x})$ by using mass conservation of the different chemical species:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{x}) = \alpha_{\text{gas}}(\phi)\left(\mathcal{D} + \mathcal{C} + \mathcal{R}_{\text{gas}}\right) \boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{x}) + \alpha_{\text{solid}}(\phi)\, \mathcal{R}_{\text{solid}} \boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{x}),$$

$$(t, \boldsymbol{x}) \in (0; t_{\max}) \times \Omega,$$

where $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}_{\text{gas}}$ and $\mathcal{R}_{\text{solid}}$ denote the appropriate operators for diffusion, convection, gas phase reactions and surface reactions, resp. The coupling of the CDR-system and the Ginzburg-Landau-equation is realized by the process intensities $\alpha_{\text{gas}}(\phi)$ and $\alpha_{\text{solid}}(\phi)$ occurring as weighting factors in the CDR-system. By this coupling, the influence of the diffuse interphase on the transport mechanisms are taken into account. For the simulations, we consider a 2D-model and track the evolving surface. The numerical algorithm implemented uses in a first stage the finite element method and besides the finite difference method. The numerical tests have proven stability only up to $t_{\max} = 4$ h in physical time for the whole process [2]. To stabilize the process therefore we are going nowadays to a mixed discontinuous Galerkin method as used for Darcy flow problems [3].

References

[1] Lin J. T. *The numerical analysis of a phase field model in moving boundary problems.* SIAM Journal of Numerical Analysis, **25**(5) (1988), 1015–1031.

[2] Deltchev D., Langhoff T.-A., Schnack E. *Phase-field model for chemical vapour infiltration of silicon carbide.* Journal of the Electrochemical Society, submitted.

[3] Brezzi F., Hughes T. J. R., Marini L. D., Masud A. *Mixed Discontinuous Galerkin methods for Darcy flow.* Journal of Scientific Computing, **22** (2005), 119–145.

Local stability and existence of 2D compressible vortex sheets

Secchi P. (Brescia)

This talk regards the existence theory for the Cauchy problem for the compressible Euler equations in two or three space dimensions. We breafly recall some previous results on local and global smooth solutions, and then focus on the existence of piecewise smooth solutions (that can be either shock waves, rarefaction waves, contact discontinuities or sonic waves).

The second part of the talk is devoted to recent results, obtained in a joint work with J.F. Coulombel (Univ. Lille 1, France), on the existence of supersonic compressible vortex sheets. The problem is a free boundary nonlinear hyperbolic problem with two main difficulties: the free boundary is characteristic, and the so-called Lopatinskii condition holds only in a weak sense. Due to the failure of the uniform Lopatinskii condition, the energy estimates exhibit losses of derivatives and we solve the nonlinear equations by a suitable Nash-Moser iteration.

Глобальная теория особенностей коранга 1 и ее приложения в контактной геометрии пространственных кривых

Седых В. Д. (г. Москва)

Вычислены универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей в образе устойчивого гладкого отображения гладкого замкнутого многообразия в пространство нестрого бóльшей размерности при условии, что это отображение имеет только особенности коранга 1. Для каждой из четырех комбинаций четностей размерностей пространств образа и прообраза найдена полная система таких соотношений. Аналогичные результаты получены для устойчивых лежандровых отображений коранга ≤ 1. В качестве приложений получены многомерные обобщения классической формулы Бозе о числе опорных окружностей кривизны выпуклой кривой на плоскости и теоремы Фридмана о числе тройных касательных плоскостей неуплощающейся кривой в пространстве.

Асимптотика поверхностных волн над проницаемым барьером

Семенов А.С. (Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова)

В рамках линейной теории волн на воде строится асимптотика решения задачи о прохождении волн над проницаемым наклонным барьером. В линейной постановке не существует решения в виде прогрессивной волны без отражения от линии берега, если не предполагать наличия особенностей по меньшей мере логарифмического характера. Если предполагать, что отражение отсутствует, должен существовать механизм поглощения поступающей энергии, например, обратного глубинного течения. Наличие проницаемого дна в некотором смысле организует такие течения. С использованием метода ВКБ, построено асимптотическое приближение решения до линейных членов разложения. Уклон дна-барьера считается малым, так, что длина набегающей гармонической волны намного меньше длины уклона. В соответствии с этим предположением выбирается малый параметр и задача обезразмеривается. Течение через барьер подчиняется закону Тейлора, скорость протекания через барьер выбирается исходя из соображений асимптотической совместимости разложений. Получены формулы для амплитуд проходящих над барьером волн. Выяснено, в частности, что амплитуда этих волн уменьшается с увеличением проницаемости. Рассмотрена также аналогичная двумерная задача в нелинейной постановке и определен критерий разрушения, или не разрушения, набегающих на барьер волн.

Basic properties of the Haar system.

Semenov E. M. (Voronezh University)

A basis $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ of a Banach space is called bounded complete if, for every sequence of scalars $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ s. t. $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$, the series $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converges. A Banach functional space E on $[0,1]$ is called rearrangement invariant (r. i.) or symmetric if it is a Banach lattice and all equimeasurable functions have equal norms.

Theorem 1. Let E be a separable r. i. space. The following conditions are equivalent:

1. There exists a boundedly complete basis in E.
2. The Haar system forms a boundedly complete basis in E.
3. E is maximal (this means that $E = E''$) and $E \neq L_1$.

A basis $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ of a Banach space E is called strongly conditional if, for every sequence of signs $\theta_i = \pm 1$, there exists $x \in E$ s. t. $\theta_i e_i^*(x) \geqslant 0$ for each $i = 1, 2, \dots$ and the series $\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x) e_i$ is not unconditional in E where $\{e_i^*\}$ are coordinate functionals. V. M. Kadets and M. M. Popov introduced this consept (Sib. Math. J., 1987) and they proved that the Haar system is a strongly conditional basis in L_1.

Theorem 2. The Haar system forms a strongly conditional basis in a separable r. i. space E iff $\alpha_E = 0$ or $\beta_E = 1$ where α_E and β_E are the Boyd indeces of E.

Joint work with K. S. Kazarian and S. N. Uksusov. Research supported in part by RFBR, grant 05–01–00629.

О некоторых свойствах гладких решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса

Семенов В. И. semvi@kuzstu.ac.ru (г. Кемерово)

Изучаются свойства гладких решений задачи Коши для уравнений Эйлера и Навье-Стокса в пространствах различной размерности при условиях финитности и достаточной гладкости начального условия. В частности, имеют место следующие результаты.

Теорема 1. Пусть в размерности $n = 2$ отображения $u : [0,T) \times R^2 \to R^2$, $P : [0,T) \times R^2 \to R$ являются гладкими решениями классов C^3 и C^2 соответственно задачи Коши для уравнений Эйлера с начальным условием $u(0,x) = \phi(x)$, где $\phi \in C_0^3$. Предположим, что при каждом фиксированном $t \in [0,T)$ выполняются условия: 1)производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}$, $i = 1,2$, принадлежат пространству $L_2(R^2)$ и вместе с частными производными $u_{,i}, u_{,ij}, u_{,ijk}$, удовлетворяют условию роста $|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} v(x)| \geq C(\alpha)(1 + |x|)^{-|\alpha|}$ с постоянной, зависящей от α; 2)нормы градиентов $\nabla u_i, \nabla \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $i = 1,2$, в пространстве $L_2(R^2)$ равномерно ограничены относительно t на каждом отрезке $[0,T_1) \subset [0,T)$; 3)функция $P(t,x) = o(|x|^2)$ при $x \to \infty$. Тогда имеет место равенство: $\|\nabla u_1\|^2_{L_2(R^2)} + \|\nabla u_2\|^2_{L_2(R^2)} = \|\nabla \phi_1\|^2_{L_2(R^2)} + \|\nabla \phi_2\|^2_{L_2(R^2)}$. Данная теорема обобщается с естественными видоизменениями на уравнения Навье-Стокса. Для произвольной размерности аналогичные утверждения имеют место для производных $\nabla \frac{\partial^m u}{\partial t^m}$.

Численное исследование нестандартных линейных дифференциальных уравнений с разрывными начальными данными

Сердюкова С.И. (Объединённый институт ядерных исследований, Дубна)

Получены асимптотики при больших t для нестандартных линейных дифференциальных уравнений. Решается задача Коши с разрывными начальными данными: $u(x,0) = 0$ при $x < 0$, $u(x,0) = 1$, при $x \geq 0$. Для уравнения

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{ttxx}$$

доказано существование решения типа "бризер":

$$U(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sgn}(x)}{2}\cos(t) + \mathrm{O}(\sqrt{x^2 t}), \qquad t \to \infty,\ |x| < ct^{-1/2}.$$

Для уравнения

$$U_{tt} = U_{xx} - U_{xxxx}$$

доказано существование обширной зоны медленно затухающих осцилляций:

$$U(x,t) = \frac{1+\mathrm{sgn}(x)}{2} + \frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{\pi x^2/t}}\sin\{\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\}(1 + \mathrm{O}(t^{-1}) + \mathrm{O}((x/t)^{-4}))),$$

при $t \to \infty$, $|x| > t^{1+\delta}$. Обсуждаются результаты численных экспериментов, подтверждающих существование экзотических асимптотик, предсказанных теоретически. Результаты численных экспериментов указывают также на существование решения типа бризер для уравнения

$$U_{tt} = U_{xx} + ibU_{ttx} + U_{ttxx}, \quad |b| < 2.$$

Рассматриваемые уравнения возникают при осреднении уравнений, описывающих волновые процессы в периодических слоистых средах.

L^p-Properties of Solutions of Differential-Equation Systems

Serebryakov V.P. (Moscow)

Consider a system of differential equations

$$y'' = Q(x) \cdot y \tag{1}$$

on the half-axis $I = [0, \infty)$ and the adjoint system

$$y'' = Q^*(x) \cdot y \tag{2}$$

where $y = (y_1(x), ..., y_n(x))^T$ are desired solutions, $Q(x)$ is a quadratic matrix of order n with elements which are real valued and Lebesgue-integrable on each segment $[0, b]$ $(0 < b < \infty)$ functions. Denote by $q_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ functions posed on the superdiagonal of the matrix $Q(x)$, and let $q_i^-(x) = -\min\{q_i(x), 0\}$.

Theorem. Suppose that $1 \leqslant p < \infty$ and that there exists a consequence of pairwise disjoint open intervals $I_k = (a_k, b_k) \subset I$ $(k = 1, 2, ...)$ such that

1. all non-diagonal elements of a matrix $JQ(x)J$ are non-negative a.e. on $\cup_{k=1}^{\infty} I_k$, where J is a diagonal matrix of order n having only 1s and (-1)s on its superdiagonal;

2. there exists $i \in \{1, ..., n\}$ such that at least one of series

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)^{\frac{p}{2}+1}\{[(b_k - a_k)\int_{I_k} q_i^-(x)\,dx]^{\frac{1}{2}} + 1\}^{-\frac{p}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)^{\frac{p}{2}+1}\{\int_{I_k}(x - a_k)q_i^-(x)\,dx + 1\}^{-\frac{p}{2}}$$

is divergent.

Then at least one of the systems (1) or (2) has a solution not belonging to the space $L^p(I)$ of n-component vector-functions.

Гармонические отображения и поля Янга-Миллса

Сергеев А. Г. (г. Москва)

Изучаются гармонические отображения из компактных римановых поверхностей в пространства петель ΩG компактных групп Ли G. Интерес к таким отображениям мотивируется известным результатом Атьи, устанавливающим взаимнооднозначное соответствие между голоморфными сферами в пространствах ΩG и G-инстантонами на пространстве $\mathbb{R}^4$. Основываясь на этом соответствии, естественно выдвинуть гипотезу, что гармонические сферы в ΩG должны отвечать G-полям Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Для изучения гармонических сфер в пространствах петель ΩG и, более общим образом, гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в ΩG, мы пользуемся твисторным подходом, который позволяет свести эту задачу к описанию почти голоморфных отображений из компактных римановых поверхностей в некоторые флаговые расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта.

Общие свойства главных частот линейного уравнения.

Сергеев И. Н. (Московский государственный университет)

Для данного $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{E}^n$ всех уравнений

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty),$$

задаваемых каждое своим набором $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ ограниченных непрерывных коэффициентов, наделим *равномерной* на $\mathbb{R}^+$ топологией. Определим [1] *главные частоты уравнения* $a \in \mathcal{E}^n$ с помощью формул

$$\omega_{\bar{i}}(a) \equiv \inf_{L \in G_*^i(a)} \sup_{y \in L} \nu(y), \quad \omega_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L} \nu(y), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $G_*^i(a)$ — множество i-мерных подпространств пространства решений (нулевое решение всюду исключаем) уравнения a, а $\nu(y)$ — *частота* решения y, определяемая как любая (по умолчанию одна и та же) из следующих величин: *верхнее* или *нижнее среднее*

$$\bar{\nu}(y) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t) \quad \text{или} \quad \underline{\nu}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t)$$

от числа $\nu(y,t)$ *нулей* или смен *знака* или *корней* (т.е. нулей с учетом их кратности) решения y на интервале $(0;t)$.

Теорема 1. Главные частоты любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ с постоянными коэффициентами удовлетворяют равенствам

$$\omega_{\bar{i}}(a) = \omega_{\underline{i}}(a) = |\mathrm{Im}\lambda_i(a)|, \quad i = 1,\ldots,n,$$

где $\lambda_i(a)$ — корни соответствующего характеристического многочлена, упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей мнимых частей.

Теорема 2. Главные частоты любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ конечны и удовлетворяют соотношениям

$$\omega_{\bar{i}}(a) = \omega_{\underline{i}}(a), \quad i = 1, n, \quad \text{и} \quad \omega_{\bar{i}}(a) \geqslant \omega_{\underline{i}}(a), \quad i = 2,\ldots,n-1$$

(где ни одно из неравенств нельзя, вообще говоря, заменить равенством), а при $n \leqslant 2$ все разновидности частот сразу всех его решений одинаковы.

Теорема 3. Все главные частоты, рассматриваемые как функции на пространстве $\mathcal{E}^n$, при $n \leqslant 2$ — непрерывны, а при $n > 2$ — разрывны и даже не принадлежат первому классу Бэра.

Литература

[1] Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения.* Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 2006, вып. 25. С. 249—294.

Разрывные решения функционально-дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части

Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. (Институт математики и механики УрО РАН)

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \tag{1}$$

где $x_t = x(s), t - \tau \le s \le t, \tau > 0, x \in R^n, v(t) \in R^m, x(t) \in R^n, v(t)$ — вектор-функция, имеющая на промежутке $[t_0, \vartheta]$ ограниченную вариацию, производные в (1) понимаются в обобщенном смысле, $f(t, x, x_t)$ — непрерывный функционал, заданный на $[t_0, \vartheta] \times R^n \times BV[t-\tau, t]$, со значениями в R^n ($BV[t-\tau,t]$ – банахово пространство n – мерных вектор-функций ограниченной вариации), $B(t,x)$ – непрерывная $n \times m$ -матрица-функция.

Особенностью уравнения (1) является то, что в правой части его содержится некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную.

Под решением уравнения (1) будем понимать вектор-функцию ограниченной вариации, являющуюся поточечным пределом последовательности гладких решений уравнения (1), порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций, аппроксимирующих функцию ограниченной вариации $v(t)$, если предел последовательности не зависит от способа аппроксимации функции $v(t)$. Получено интегральное уравнение, описывающее так формализованное решение.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проект №06–01–00445.

Литература

[1] Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 1997. 268 p.*

[2] Fetisova Yu.V., Sesekin A.N. *Discontinuous solutions of differential equations with time delay. Wseas transactions on systems. Issue 5, Volume 4, 2005. P.487-492.*

Partial preservation of frequencies and Floquet exponents in KAM theory

Sevryuk M.B. (Institute of Energy Problems of Chemical Physics, Moscow)

The phase space of a completely integrable Hamiltonian system with n degrees of freedom is foliated into invariant n-tori carrying conditionally periodic motions. If the Hessian (with respect to the action variables) of the Hamilton function of this system nowhere vanishes (Kolmogorov nondegeneracy), then the tori with strongly incommensurable frequencies $\omega_1, \dots, \omega_n$ do not disappear under sufficiently small Hamiltonian perturbations but are only slightly deformed, the motion on each perturbed torus being quasi-periodic with the same frequencies $\omega_1, \dots, \omega_n$. In this sense, one speaks of *preservation of frequencies* for the unperturbed system. It has been observed by a number of authors (S.-N. Chow, Y. Li, Y. Yi, 2002; M. B. Sevryuk, 2006) that Kolmogorov's nondegeneracy condition can be relaxed in such a way that the unperturbed system will exhibit the preservation of just some subcollection of the frequencies $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}$, $k < n$ (*partial* preservation of frequencies). The corresponding nondegeneracy condition is intermediate between Kolmogorov's and Rüssmann's conditions. One can also examine partial preservation of frequencies for *lower dimensional* invariant tori whose dimension n is less than the number N of degrees of freedom (Y. Li, Y. Yi, 2005; Zh. Liu, 2005; M. B. Sevryuk, 2006). In the talk, for lower dimensional tori, we will consider the more general problem of partial preservation of not only the frequencies $\omega_1, \dots, \omega_n$ but also the *Floquet exponents* $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-n}$ (the eigenvalues of the coefficient matrix for the variational equation along the torus). All the results can be carried over to various classes of non-Hamiltonian dynamical systems (reversible, volume preserving, or dissipative systems).

О разрешимости однородного уравнения Винера-Хопфа

Сгибнев М.С. (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск)

Рассматривается однородное обобщённое уравнение Винера-Хопфа

$$S(x) = \int_{-\infty}^{x} S(x-y)\,F(dy), \qquad x \geq 0,$$

где F — распределение вероятностей в $\mathbf{R}$. Функция $S(x)$ удовлетворяющая этому уравнению, называется *P^*-решением* уравнения, если она не убывает, непрерывна справа, не обращается всюду в нуль и $S(x) = 0$ при $x < 0$. Пусть X_k, $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F, не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Например, распределение F порождает случайное блуждание осциллирующего типа, если оно симметрично или если существует среднее значение $\mu := \int_{\mathbf{R}} x\,F(dx)$ и $\mu = 0$. Доказано существование P^*-решения рассматриваемого уравнения, где F — распределение вероятностей осциллирующего типа. Установлены асимптотические свойства этого решения. Известный результат Ф. Спицера о разрешимости классического однородного уравнения Винера-Хопфа относится к частному случаю, когда распределение F имеет симметричную плотность.

Пограничный слой на игле

Шадрина Т.В. (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва)

Методами степенной геометрии изучается пограничный слой на полубесконечной игле в стационарном потоке вязкой жидкости или газа, направленном параллельно игле. Ищутся асимптотики течения в пограничном слое при стремлении к бесконечности вдоль иглы. Рассматриваются два варианта течения: (а) несжимаемой нетеплопроводной жидкости и (б) сжимаемого теплопроводного газа. Показывается, что вариант (а) не имеет асимптотик решений, удовлетворяющих всем граничным условиям, а вариант (б) имеет несколько семейств асимптотик решений, удовлетворяющих всем граничным условиям. Эти асимптотики вблизи иглы имеют степенные или логарифмические особенности.

Литература

[1] А.Д. Брюно, Т.В. Шадрина, Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // ДАН, 2002, т. 387, N 5, с. 589–595.

[2] А.Д. Брюно, Т.В. Шадрина, Осесимметричный пограничный слой на игле // ДАН, 2004, т. 394, N 3, с. 298–304.

[3] А.Д. Брюно, Т.В. Шадрина, Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды Моск. мат. об-ва, 2007, т. 68, с. 226–290.

Momentum Type Quantum-Mechanical Equations over p-adic Fields and Solving Feynman Formula.

Shamarov N. (Moscow)

Schroedinger and Dirac quantum-mechanical evolutional equations in momentum representation are (inverse-) Fourier-transformed (w.r.t. space variables) corresponding classical (i.e. expressed in coordinate representation) equations. In model cases when "exterior (electric or electromagnetic, correspondingly) potential" is "good enough" namely being Fourier transformed Borel countably additive measure on the momentum space P,

$$f'(t) = ip \cdot f(t) + \mu * (f(t)) \tag{1}$$

is a form of the momentum quantum-mechanical equations where used are the following

Notations. μ is a given countably additive measure defined on the Borel σ-algebra of a finite dimensional Euclidean real vector space P (interpreted as momentum space) and taking values in an algebra M_s of complex square matrices of dimensions $s \times s$ ($s \in \mathbb{N}$; $s = 1$ for the classical Schroedinger equation and $s = 4$ for the classical Dirac equation); p is a given continuous function (2nd order polynomial in case of classical Schroedinger equation and linear in case of Dirac one) defined on P and taking values in a subspace of M_s consisting of Hermitean self-adjoint matrices; desired function f maps a segment of real axis (interpreted as a time interval) into the Hilbert space $L_2(P; \mathbb{C}^s)$ of (classes of componentwise) square Lebesgue-integrable s-component complex vector functions on P; the convolution $*$ of a measure and a L_2-function on P means the distributional one.

Theorem 1. [1][2] There is a M_s-valued countably additive measure $M_{\mu,t}$ of Poisson–Maslov [3] type on $P^{[0,t]}$ such that for a Cauchy problem (C.p.) ((2), $f(0) = f_0$) takes place a Feynman formula [4] with a chronological integral:

$$f(t)(y) = \text{T-}\int M_{\mu,t}(dz)\, e^{i\int_0^t p(z(\tau)-y)d\tau}\, f_0(z(t)-y)\ . \tag{2}$$

The following theorem demonstrates independence of the solving formula (2) on the ground field of the momentum space:

Theorem 2. If in the Notations above one uses a finite-dimensional vector space over the field of p-adic [5] "numbers" instead of the (momentum) Euclidean real space than the Theorem 1 is also true.

Note. In the proof, the measure $M_{\mu,t}$ for the p-adic P can be constructed just in the parallel way to as it was made in [1],[2] for the real momentum space P.

References

[1] Shamarov N. N. *The Maslov–Poisson Measure and Feynman Formulas for the Solution of the Dirac Equation.*// Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, Vol. 12 (2006), No. 6, 193–211.

[2] Shamarov N. N. *Functional integral with countably additive measure representing solutions of the Dirac equation.*// Trudy Mosk. Matem. Ob., 2005, Vol.66., 263–276.

[3] Maslov V. P. *Complex Markov Chains and Feynman Path Integral for Non-linear Equations.*// Moscow: Nauka, 1976.

[4] Smolyanov O. G., Weizsaecker H. v., Wittich O. *Surface Integrals in Riemannian Spaces and Feynman Formulas.*// Dokl. Math., Vol. 73, No. 3, 2006, 432–436.

[5] Vladimirov V. S., Volovich I. V., and Zelenov E. I. *p-adic Analysis and Mathematical Physics.*// World Scientific, Singapore 1994.

Конструктивная оценка времени существования решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости

Шамин Р. В. (г. Москва)

В работе рассматриваются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Задачи, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривались многими авторами. В частности, в этих работах разрешимость уравнений была установлена лишь на достаточно малом временном интервал.

В настоящей работе исследуется вопрос об конструктивной оценке времени существования решений уравнений, описывающих динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью. Предложен конструктивный метод, позволяющий получать доказательную оценку времени существования решений этих уравнений.

Автор выражает благодарность академику РАН В.Е. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ-7550.2006.2. и INTAS Ref. Nr 05-1000008-8014.

Литература

[1] Шамин Р. В. *О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью.* // Доклады Российской академии наук, 2006, т. 406, N 5, с. 112–113.

[2] Шамин Р. В. *К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью.* // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 21 (2007), с. 133–148.

[3] Шамин Р. В. *Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью.* // Сибирский журнал вычислительной математики, 2006, т. 9, N 4, с. 325–340.

К полуглобальной разрешимости дифференциальных уравнений со взвешенными производными

Шананин Н. (Москва)

В открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами

$$(P(x,D)\,u =)\sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle\le m} a_\alpha(x)\,D^\alpha u = f,\quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - неотрицательный целочисленный мультииндекс, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$,- взвешенный порядок дифференцирования D^α, веса $\varrho_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mu = \min_j \varrho_j$. Предположим, что ξ-квазиоднородные порядков $l = m, \ldots, m-\mu+1$ составляющие $p_l(x,\xi) = \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=l} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$ полного символа оператора P вещественнозначны. Положим $\Lambda(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{1/\varrho_j}$. Пусть $H^s_{\rm loc}(\Omega)$ - локальное пространство обобщённых функций, соответствующее весовой функции $\Lambda^s(\xi)$, $s \in \mathbb{R}$. Множество $p_m^{-1}(0) = \{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$ инвариантно относительно сдвигов вдоль векторного поля $H_{p_m} = \sum_{j|\varrho_j=\mu}\left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\partial_{\xi_j} - \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\partial_{x_j}\right)$.

Теорема 1. *Если компакт $K \subset \Omega$ не содержит проекции ни одной полной интегральной кривой векторного поля H_{p_m}, принадлежащей множеству $p_m^{-1}(0)$, тогда 1) множество $N(K) = \{v \in \mathcal{E}'(K) \mid P^*v = 0\} \subset C_0^\infty(K)$ и является конечномерным пространством, ортогональным образу $P\mathcal{D}'(\Omega)$; 2) для любой $f \in H^s_{\rm loc}(\Omega)$, ортогональной к $N(K)$, существует $u \in H^{s+m-\mu}_{\rm loc}(\Omega)$, являющееся решением уравнения* (1) *в некоторой окрестности K.*

В доказательстве используется

Теорема 2. *Пусть γ - открытый интервал интегральной кривой векторного поля H_{p_m}, содержащийся в $p_m^{-1}(0)$ и $(x,\xi) \in \gamma$. Тогда из включений $u \in H^s_{\rm loc}(x,\xi)$ и $P(x,D)u \in H^{s-m+\mu}_{\rm loc}(\gamma)$ следует $u \in H^s_{\rm loc}(\gamma)$.*

Литература.

[1] Н. А. Шананин, О разрешимости на компактных подмножествах дифференциальных уравнений с вещественнозначным главным пучком символов. Матем. сб., т. 197, вып. 2, 2006, 137-160.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00253.

Оценки плотностей решений параболических уравнений для борелевских мер

Шапошников С. В. (г. Москва)

Исследуются параболические уравнения вида

$$\mathcal{L}^*\mu = 0$$

для борелевских мер μ на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$. Здесь $\mathcal{L}$ – параболический оператор второго порядка

$$\mathcal{L}\varphi(x,t) := \partial_t\varphi(x,t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x,t)\partial_{x_j}\varphi(x,t)) + b^i(x,t)\partial_{x_i}\varphi(x,t),$$

где ведется суммирование по повторяющимся индексам, а интерпретация нашего уравнения состоит в следующем. Положим $A = (a^{ij})_{i,j\le d}$, $b = (b^i)_{i\le d}$. Мы предпологаем, что матрица A симметрична, строго положительна и отображения $x \mapsto A(x,t)$ равномерно липшицевы с некоторой общей постоянной.

Борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^*\mu = 0$, если функции a^{ij} и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве в $\mathbb{R}^d \times (0,1)$ относительно μ, причем для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,1))$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d\times(0,1)} \mathcal{L}\varphi\, d\mu = 0.$$

Пусть V – непрерывная возрастающая функция на $[0,\infty)$ и $V(0) > 0$.

Доказательство следующей теоремы см. [1].

Теорема 1. Пусть $\sup\limits_{t\in(0,1)} |b(x,t)| \le V(|x|/\theta)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$, где $\theta > 1$, $\|A(x,t)\| \le \gamma$ и $\|A(x,t)^{-1}\| \le \alpha$. Предположим, что μ – неотрицательная мера с плотностью ϱ на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^*\mu = 0$. Тогда существует такое положительное число $K = K(d,\alpha,\gamma,\theta)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x,t) \ge \varrho(0,s)\exp\Big\{-K\Big(1 + \frac{t-s}{s}V(|x|)^2 + \frac{1}{t-s}|x|^2\Big)\Big\}, \quad 0 < s < t < 1,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Литература

[1] Богачев В.И., Рекнер М., Шапошников С.В. *Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов.— Теория вероятн. и ее примен. 2007, т. 52.*

Асимптотическая устойчивость решений в иерархической модели кластеризации.

Шаповал. А. Б. (г. Москва)

Для моделирования кластеризации статья [1] определяет некоторое фазовое пространство состоящее из элементов (физический смысл которых зависит от приложений). Связное множество элементов называется кластером. Предполагается, что каждый кластер определяется его рангом и массой. Эволюция происходит за счет добавления новых элементов (в каждый момент времени) и удаления достаточно больших кластеров (когда они возникают). Отдельный элемент фазового пространства полагают кластером ранга 1 и массы 1. Если добавление нового элемента привело к слиянию двух кластеров ранга 1 и массы 1, то получившийся кластер имеет ранг 2 и массу 2. В общем случае при слиянии двух кластеров одинакового ранга r и масс m_1

и m_2 получается кластер ранга $r+1$ и массы m_1+m_2. Однако при слиянии кластеров разных рангов r и R, $r < R$, образовавшийся кластер наследует больший ранг R, а массы по-прежнему складываются. Приведенное определение кластеров соответствует классификации рек.

Согласно [1], некоторая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений дает приближенное описание эволюции кластеров. Особый интерес представляет положение равновесия этой системы.

Теорема 1. Положение равновесия асимптотически устойчиво.

Рассматриваемая модель представляет интерес, поскольку в положении равновесия количество кластеров как функция от ранга убывает степенным образом с показателем степени близким к единице. Похожие распределения возникают при изучении группируемости различных видов животных, повторяемости землетрясений и при исследовании других сложных систем. Среди родственных моделей – модели горящего леса (англ. forest-fire) и "куча песка"(англ. sand-pile).

Литература

[1] Gabrielov A., Newman W. I. and Turcotte D. L. *Phys. Rev. E, V. 60, 5293–5300.*

Аппроксимация классов кусочно гладких функций полиномиальными сплайнами, построенными на основе смешанных рядов по полиномам Лежандра и Якоби

Шарапудинов И.И. (Дагестанский научный центр РАН)

Пусть $W^r_{L_p(c,d)}$ – обычное пространство Соболева, состоящее из функций $f=f(x)$, заданных на $[c,d]$, причем при $p=\infty$ мы считаем, что $f^{(r)}(x)$ непрерывна на $[c,d]$. Далее, пусть $a=a_0<a_1<\dots<a_l=b$, $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\dots,a_l)$, $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\dots,r_l)$, $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\dots,p_l)$, где $1\le r_k$ – целые, $p_k\ge 1$ $(k=1,\dots,l)$. Через $W^{\mathbf{r}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$ мы обозначим класс функций $f=f(x)$, определенных на $[a,b]$ и таких, что для каждого $k\in\{1,2,\dots,l\}$ $f\in W^{r_k}_{L_{p_k}(a_{k-1},a_k)}$. В классах $W^{\mathbf{r}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$ мы выделим подклассы следующим образом. Пусть $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_{l-1})$, где $0\le s_k\le \min\{r_k,r_{k+1}\}$. Через $W^{\mathbf{r},\mathbf{s}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$ мы обозначим подкласс, состоящий из функций $f\in W^{\mathbf{r}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$, для которых существуют производные $f^{(0)}(a_k),f^{(1)}(a_k),\dots,f^{(s_k)}(a_k)$ при всех $k=1,\dots,l-1$. В частности, если $s_k=0$ $(k=1,\dots,l-1)$, то $W^{\mathbf{r},\mathbf{s}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}=W^{\mathbf{r}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$. Пусть C_q – эллипс с фокусами в точках a и b и суммой полуосей, равной q. Через $A_q(c,d)$ обозначим класс функций, аналитических в эллипсе C_q, принимающих действительные значения на $[c,d]$ и пусть $A_qB(c,d)$ – подкласс, состоящий из функций $f\in A_q(c,d)$, для которых $|f(z)|\le M$ при $z\in C_q$. Далее, пусть $a=a_0<a_1<\dots<a_l=b$, $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\dots,a_l)$, $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\dots,q_l)$, $q_k>0$ $(k=1,\dots,l)$. Через $A_{\mathbf{q}}(\mathbf{a})$ мы обозначим класс функций $f=f(x)$, заданных на $[a,b]$ и таких что $f\in A_{q_k}(a_{k-1},a_k)$ при каждом $k=1,\dots,l$. Мы выделим в классах $A_{\mathbf{q}}(\mathbf{a})$ подклассы следующим образом. Пусть $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_{l-1})$, где $0\le s_k$ – целые. Через $A^{\mathbf{s}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{a})$ мы обозначим подкласс, состоящий из функций $f\in A_{\mathbf{q}}(\mathbf{a})$, для которых существуют производные $f^{(0)}(a_k),f^{(1)}(a_k),\dots,f^{(s_k)}(a_k)$ при всех $k=1,\dots,l-1$.

Разработан алгоритм приближения(в том числе и численного) функций из классов $W^{\mathbf{r},\mathbf{s}}_{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})}$ и $A^{\mathbf{s}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{a})$ полиномаальными сплайнами, построенными на основе смешанных рядов по полиномам Лежандра и Якоби.

О гладкости решений краевых задач для уравнения теплопроводности с негладкими начальными функциями

Шарин Е. Ф. (г. Якутск)

Работа посвящена исследованию гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с негладкими коэффициентами в классах Гельдера. Такие краевые задачи стали предметом изучения с начала XX века. Одним из первых работ в этом направлении были работы М. Жевре, позже были опубликованы труды М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, С.А. Терсенова, И.М. Петрушко, В.Н. Монахова, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова и многих других авторов.

Актуальность изучения таких задач обоснована их физическим применением в моделировании таких процессов как распространение тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков и другие.

Настоящая работа состоит из двух частей, в которых рассматриваются следующие задачи.

Первая часть работы содержит доказательство теоремы существования и единственности решения. На полосе $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) будем искать на полуполосах $\Pi^+ = \{\Pi : x > 0\}, \Pi^- = \{\Pi : x < 0\}$ как решение двух начально-краевых задач при выполнении условий склеивания

$$\begin{cases} u(-0,t) = u(+0,t), \\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \end{cases} \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x > 0, \\ \varphi_2(x), & x < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_1 \in H^{2+\gamma_1}(R^+)$, $\varphi_2 \in H^{2+\gamma_2}(R^-)$ $(\gamma_1 \le \gamma_2)$ - заданные функции.

Методом потенциалов простого слоя доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи из пространства Гельдера $H_{x\ \ t}^{2+\gamma_1,\ 1+\frac{\gamma_1}{2}}(\Pi^\pm)$.

Также рассмотрены вопросы, связанные с дифференциальными свойствами решений $u(x,t)$ задачи (1) - (3), в которых установлена принадлежность определенным классам самих решений и его производных в зависимости от начальных функций.

О существовании и единственности решения задачи Коши для нелинейной алгебро-дифференциальной системы

Щеглова А.А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН)

Рассматривается задача Коши

$$x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T = (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma), \tag{2}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t, x, y)$ определена в открытом шаре $\mathcal{D} \in \mathbf{R}^{2n+1}$, $x : T \to \mathbf{R}^n$, x_0 — заданный вектор из $\mathbf{R}^n$, $\det \partial F/\partial x' = 0 \; \forall (t, x, x') \in \mathcal{D}$.

Получены необходимые и достаточные условия существования оператора, преобразующего систему (2) произвольно высокого индекса неразрешенности r $(0 \le r \le n)$ к нормальному виду. Доказана локальная теорема о разрешимости задачи (1), (2). Для анализа привлекается r-продолженная система $\mathcal{F}_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = 0$, под которой можно понимать совокупность системы (2) и r ее полных производных по t. Предположения, в которых обосновываются утверждения, кроме условий на гладкость функции $F(t, x, x')$, представляют собой ограничения на ранги матриц Якоби по переменным $x, x', \dots, x^{(r+1)}$ для функции $\mathcal{F}_r$.

Обоснован критерий совпадения двух решений задачи (1), (2) класса $\mathbf{C}^{r+1}(T)$. Показано, что в условиях теоремы существования рассматриваемая задача в окрестности начальной точки не может иметь класических решений, обладающих меньшей гладкостью. Получены условия, при которых задача имеет фиксированное конечное число классических решений. В конечном итоге этот подход позволил доказать теорему о существовании и единственности решения задачи (1), (2).

Литература

[1] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро–дифференциальных систем. — Новосибирск: Сибирская издательская фирма РАН "Наука", 2003.

δ- and δ'-shock wave type solutions of systems of conservation laws and the transportation and concentration processes

Shelkovich V.M. (St.-Petersburg State Architecture and Civil Engineering University, Russia)

There are "nonclassical" situations when systems of conservation laws admit δ- and $\delta^{(n)}$-shock type solutions. They are singular solutions such that their components may contain the Dirac delta functions and the Dirac delta functions and their derivatives up to the order n, $n = 1, 2, \dots$, respectively.

The points to be considered are, first, the definitions of δ- and δ'-shock type solutions; second, the Rankine–Hugoniot conditions for them; third, their geometrical and algebraical aspects; and fourth, solving the Cauchy problems admitting such type solutions. These types of solutions are related with *transportation and concentration processes*. The results are based on our papers [1]–[4] and show that systems of conservation laws can develop not only Dirac measures (as in the case of δ-shocks) but their derivatives as well and give a new perspective in the theory of singular solutions to systems of conservation laws.

References

[1] S. Albeverio, V.M. Shelkovich, On the delta-shock front problem, in: "Analytical Approaches to Multidimensional Balance Laws", Ch. 2, (Ed. O. S. Rozanova), Nova Science Publishers, Inc., 2005, 45-88.

[2] V.G. Danilov, V.M. Shelkovich, Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws, Quart. Appl. Math. **63**(3) (2005), 401-427.

[3] E.Yu. Panov, V.M. Shelkovich, δ'-Shock waves as a new type of solutions to systems of conservation laws, J. Differential Equations **228** (2006), 49-86.

[4] V.M. Shelkovich, The Riemann problem admitting δ-, δ'-shocks, and vacuum states (the vanishing viscosity approach), J. Differential Equations **231** (2006), 459-500.

On the classical solvability of the 2D- system describing the motion of the heat convergent generalized Newtonian fluid

Shilkin T. N.

We consider the system describing two-dimensional flow of the viscous heat-convergent generalized Newtonian fluid whose viscosity depends on the strain velocity tensor as well as on the temperature of the fluid. The heat equation in the system under consideration includes the term which takes into account the phenomena of viscous energy dissipation. Under certain growth (or decay) condition on the viscosity we prove existence of classical solution for this system.

Рассматривается система, описывающая двумерный поток вязкой теплопроводящей обобщенной ньютоновской жидкости, вязкость которой зависит как от тензора скоростей деформаций, так и от температуры жидкости. Уравнение теплового баланса в рассматриваемой системе включает слагаемое, учитывающее эффект вязкой диссипации кинетической энергии. При некоторых ограничениях на рост (или убывание) вязкости доказана существование гладкого решения.

Критерии регулярности обыкноыенных дифференциальных операторов

Е. А. Ширяев (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Пусть L — оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y, \tag{1}$$

и n линейно независимыми краевыми условиями вида

$$U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} \left(a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Коэффициенты $p_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, предполагаются суммируемыми функциями на отрезке $[0,1]$. Считаем, что L действует в пространстве $L_2(0, 1)$.

В 1908 году Дж.Биркгоф ввел понятие регулярного дифференциального оператора (см. [1]) и доказал теорему о полноте собственных функций регулярного оператора.

Пусть λ_j — собственные значения оператора L. Обозначим через $\rho_{k,j}$, $k = 1, \dots, n$, корни уравнения $\lambda_j = \rho^n$, через $B_{k,j}(\delta)$ — круги радиуса δ в ρ-плоскости с центрами в точках $\rho_{k,j}$, и через $B(\delta)$ — объединение всех таких кругов по обоим индексам k и j. Известно, что резольвента L есть интегральный оператор

$$(L - \rho^n)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi,$$

где $G(x,\xi,\rho)$ — ядро Грина.

Теорема

Следующие утверждения эквивалентны.

- Оператор L регулярен по Биркгофу;
- при любом $\delta > 0$ всякий некритический луч, выходящий из нуля, асимптотически не пересекает множество $\mathbb{C}\backslash B(\delta)$, и для всех x, $\xi \in [0,1]$ и $\rho \in \mathbb{C}\backslash B(\delta)$ для функции Грина справедлива оценка
$$|G(x,\,\xi,\,\rho)| \leqslant M|\rho|^{-n+1}, \tag{3}$$
где постоянная $M = M(\delta)$ не зависит от x, ξ, ρ;
- найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что $\rho_k \to \infty$ и оценка (3) выполнена при $\rho = \rho_k$;
- при любом $\varepsilon > 0$ в области $\Omega(\varepsilon)$ выполняется оценка
$$\|(L-\rho^n)^{-1}\| \leqslant M|\rho|^{-n}, \quad |\rho| \geqslant |\rho_0|, \tag{4}$$
где постоянная $M = M(\varepsilon, \rho_0)$ не зависит от ρ, а $\|\cdot\|$ означает норму в L_2;
- найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что $\rho_k \to \infty$ и оценка (4) выполнена при $\rho = \rho_k$;
- система собственных и присоединенных функций оператора L образует безусловный базис со скобками в пространстве L_2, причем в скобки объединяются не более двух собственных функций.

Работа выполнена под руководством профессора А. А. Шкаликова при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00283 и программы "Ведущие научные школы", грант № НШ-5247.2006.1.

Литература

[1] М. А. Наймарк. *Линейные дифференцальные операторы*// Москва, "Наука", 1969.

О полунепрерывности центрального показателя неограниченных линейных систем

Ширяев К.Е. (Костромской Государственный Университет)

Для линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений определяется центральный показатель [1] [гл.3, §4, стр. 116]. Известно, что для ограниченных линейных систем произвольной размерности центральный показатель полунепрерывен в топологии равномерной сходимости [1] [гл.5, §13, стр. 176] и, следовательно, является функцией первого класса Бэра.

Утверждение. Для множества неограниченных систем, наделенного топологией равномерной сходимости, центральный показатель не является функцией первого класса Бэра и, следовательно, не полунепрерывен.

Литература

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.,1966.

Теорема об ограниченности смешанных потенциалов Рисса-Киприянова в допредельной области.

Шишкина Э. Л. (Воронежская государственная технологическая академия)

Пусть $R_N^+=\{x=(x',x''),\ x'=(x_1,...,x_n),\ x''=(x_{n+1},...,x_N),\ x_1>0,...,x_n>0\}$ и $\Omega^+\subset R_N^+$. Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$, $1\leq p<\infty$, обозначим пространство функций f таких, что $f(x)\,(x')^{\gamma/p}\ \in\ L_p(\Omega^+)$, где $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ - мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $(x')^\gamma\ =\ \prod\limits_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Введем пространство (см. [1]) $L_p^{\gamma,\nu}(\Omega^+)$, состоящее из функций $f\ \in\ L_p^\gamma(\Omega^+)$, для которых $\|f\|_{L_p^{\gamma,\nu}(\Omega^+)} = \left[\int\limits_{\Omega^+}|f(x)|^p(1+|x|)^{p\nu}(x')^\gamma\,dx\right]^{1/p} < \infty$, где ν — вещественное число.

Смешанный обобщенный сдвиг имеет вид (см. [2]):

$$T^yf(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi...\int\limits_0^\pi f\left([x_1\to y_1]_{\beta_1},...,[x_n\to y_m]_{\beta_n},x''-y''\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\beta_id\beta_1...d\beta_n, \tag{1}$$

где для $i{=}1,2,\ \dots\ ,n$ используется обозначение $[x_i\to y_i]_{\beta_i}=\sqrt{x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_1^2}$.

Смешанным потенциалом Рисса-Киприянова (RK-потенциалом), порожденным сдвигом (1), будем называть выражение

$$\mathbf{K}_\lambda^\gamma f(x)=\int\limits_{R_N^+}f(y)(T^y|x|^{-\lambda})(y')^\gamma\,dy,$$

$$-\infty<\lambda<N+|\gamma|,\qquad |\gamma|=\gamma_1+...+\gamma_n.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью* смешанного RK-потенциала.

Теорема 1. Пусть $f\in L_p^{\gamma,\nu}(\Omega^+)$, $1<p<\infty$. В допредельной области $\lambda<\frac{N+|\gamma|}{p'}$ для смешанных RK-потенциалов $\mathbf{U}_{\lambda,0}^\gamma(x)$, $\mathbf{U}_{\lambda,\infty}^\gamma(x)$ и $\mathbf{U}_{\lambda,A}^\gamma(x)$ при любых $x\in\overline{R_N^+}$ справедлива оценка

$$|\mathbf{K}_\lambda^\gamma f(x)|\leq C\|f\|_{L_p^{\gamma,\nu}}\begin{cases}(1+|x|)^{-\lambda}, & \nu p'>N+|\gamma|;\\ (1+|x|)^{-\lambda}(\ln(1+|x|))^{\frac{1}{p'}}, & \nu p'=N+|\gamma|;\\ (1+|x|)^{-\lambda-\nu+\frac{N+|\gamma|}{p'}}, & \nu p'<N+|\gamma|\end{cases}$$

и эти интегралы являются непрерывными функциями от $x\in\overline{R_N^+}$.

Литература

[1] Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* // М.: Наука, 1974. 808 с.

[2] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические задачи.* // М.: Наука, 1997. 199 с.

Long-time extinction of solutions of quasilinear parabolic equations.

Shishkov Andrey E. (Institute of Appl. Math. and Mech., Donetsk, Ukraine)

We study the time vanishing properties of generalized (energy) solutions of initial-boundary and Cauchy problem to a wide class of arbitrary order quasilinear parabolic equations of diffusion-absorption type with the model representative

$$(|u|^{q-1}u)_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha(|\nabla_x^m u|^{p-1} D_x^\alpha u) +$$

$$+b(x)|u|^{\lambda-1}u = 0, \quad m \geqslant 1, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^N), \quad N \geqslant 1, \quad 0 < \lambda < \min(p,q), \tag{2}$$

where potential $b(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. It is easy to check that if $b(x) \geqslant b_0 > 0$ then arbitrary solution u of (1), (2) enjoys the following time compact support (TCS)-property: $\exists T = T(u_0) < \infty$ such that $u(x,t) \equiv 0$ $\forall t \geqslant T$. In [1] there was initiated the study of TCS-property in dependence of the range of degeneration of potential $b(x)$. Particularly, in [2] there was proved TCS-property in the case

$$q = p = m = 1, \quad b(x) = b_0(x) := \exp\Big(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^2}\Big) \tag{3}$$

with arbitrary function $\omega(s) \to \infty$ as $s \to$ o. Moreover, for $\omega(s) = s^\alpha$ with arbitrary $\alpha > 0$ there was proved absence of TCS-property. From our general results for equation (1) follows, particularly (in the case (3)), the following sufficient condition of appearence of TCS-property:

$$\int\limits_0^C \frac{\omega(s)}{s}\,ds < \infty \quad \text{(Dini – like condition)}, \quad \forall C > 0.$$

Joint work with Y. Belaud.

References

[1] Kondratiev V. A., Veron L. *Asymptotic Analysis* **14** (1997), 117–156.

[2] Belaud Y., Helffner B, Veron L. Ann. Inst. Henri Poincarre Anal. nonlinear 18, **1** (2001), 46–68.

Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с вырождением в точке и дробным рангом

Шкиль Н. И. (г. Киев)

В работе обобщены результаты автора для систем дифференциальных уравнений

$$\varepsilon t^{\frac{p}{q}} \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x = x(t)$, x_0 – n-мерные векторы, $A(t)$ – $(n \times n)$-матрица, ε $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ – малый параметр, $t \in [0; L]$, p, $q \in N$, $q \geq 2$.

С помощью подстановки $t = \tau^q$, систему (1) можно записать следующим образом:

$$\varepsilon \tau^{p+1} \frac{dx}{d\tau} = L(\tau)x, \quad x(0) = x_0,$$

где

$$L(\tau) = q\tau^q A(\tau^q).$$

Потребуем, чтобы

$$L(0) = \ldots = L^{(p)}(0) = 0, \; L^{(p+1)}(0) \neq 0.$$

Тогда существует

$$\lim_{\tau \to 0}(\tau^{-(p+1)} L(\tau)) = \frac{1}{(p+1)!} L^{(p+1)}(0) = K.$$

В работе показано, что на отрезке $[0; \sqrt[q]{\delta(\varepsilon)}]$ для решения задачи (1) имеет место асимптотическая формула:

$$x(t,\varepsilon) = \left(\exp\left(K\frac{\sqrt[q]{t}}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{\alpha-1})\right) x_0, \; \alpha > 1.$$

Литература

[1] Самойленко А. М., Шкиль Н. И., Яковец В. П. *Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождениями.* – К.: Выща шк., 2000. – 294 с.

Регуляризация граничных условий в особой точке и операторные модели

Шондин Ю. Г. (Нижегородский государственный педагогический университет)

Рассматриваются сингулярные дифференциальные выражения Штурма-Лиувилля на интервале, имеющие "регулярную особую точку" в одном из концов, и предполагается, что для соответствующих граничных задач в L^2-постановке реализуется случай "предельной точки". В этой ситуации, оказывается, существует реализация минимального оператора эрмитовым оператором S в некотором пространстве Понтрягина $\mathcal{P}$, который имеет индексы дефекта $(1,1)$, и L^2-случай "предельной точки" трансформируется в $\mathcal{P}$-случай "предельной окружности". В докладе решается задача о представлении каждого из самосопряженных расширений оператора S в $\mathcal{P}$ в терминах регуляризованных граничных условий. Обсуждается также вопрос об аппроксимации таких расширений с помощью специального семейства регулярных граничных задач.

О периодических и квазипериодических решениях сложного типа для квазилинейных волновых уравнений.

Сидоров Е. А. (г. Нижний-Новгород)

В задаче о периодических решениях уравнений с частными производными обычно рассматриваются решения с фиксированным спектром частот (зависящим от краевых условий) по каждой переменной (см. [1], [2]). В настоящей работе исследуются некоторые случаи существования классических периодических и квазипериодических решений по нескольким переменным со спектром, зависящим от других переменных:

$$1.\, u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{imx\cos y}, \quad 2.\, u = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} e^{i(mx\cos y + ny\cos x)},$$

$$3.\ u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{imxy}.$$

Построение уравнений с указанными типами решений делается по следующей схеме. Пусть $f(u,x,y) = F(u,z(x,y))$, где $F(u,z)$ – аналитическая функция (u,z), $A(x,y) = (a_1(x,y), a_2(x,y)$ – векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда уравнение $F(u,z) = 0$ определяет решение уравнения 1-го порядка

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y = f(u,x,y),$$

если векторное поле $A(x,y)$ ортогонально полю $Z(x,y) = (z_x, z_y)$.
Пример: $F(u,z) = u(u-z)(u-z^2)$, $z = e^{ix\cos y}$. Функции $u_k(x,y) = e^{ikx\cos y}$, $k = 1,2$, являются решениями 1-го типа для уравнения

$$u_x x\sin y + u_y \cos y = u(u - e^{ix\cos y})(u - 2e^{ix\cos y}).$$

Указанная схема применима к нелинейным волновым уравнениям: уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + u[(\cos y - y\cos x)^2 + iy\cos x - (\sin x - x\sin y)^2 -$$
$$- ix\cos y] = u(u - e^{i(x\cos y + y\sin x)})(u - 2e^{i(x\cos y + y\sin x)})$$

имеет точно два решения типа 2.

Литература

[1] Забрейко П. П., Третьякова Л. Г. *Дифференциальные уравнения.* 1991. Т. 24. № 5. С. 815–826.

[2] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. *УМН.* 2000. Т. 55. № 2. С. 95–120.

Обобщения неравенства Коши — Буняковского с использованием средних.

Ситник С. М. (г. Воронеж)

Рассматриваются обобщения интегрального неравенства Коши – Буняковского (см. [1-4]) следующего вида:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b \Phi_1(f,g)\,dx \cdot \int_a^b \Phi_2(f,g)\,dx \le$$
$$\le \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx, \qquad (1)$$

которые должны выполняться для подходящих произвольных функций $f(x)$, $g(x)$ при выборе некоторых неотрицательных функций Φ_1, Φ_2.

Теорема 1. Пусть M - произвольное несмещённое, однородное, монотонное (необязательно симметричное!) абстрактное среднее, $M^* = xy/M(x,y)$ (см. [3,5-7]). Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши - Буняковского вида (1) при выборе

$$\Phi_1(f,g) = (M(f,g))^2, \Phi_2(f,g) = (M^*(f,g))^2. \qquad (2)$$

Приведённый результат является интегральным обобщением достаточной части известной для дискретного случая теоремы CDE (Карлица – Элиезера – Дэйкина, см. [2-4,10]). Также доказано, что ожидаемый аналог необходимой части теоремы

CDE в интегральном случае неверен, так как автором построены другие обобщения неравенства Коши — Буняковского вида (1), но не сводящиеся к виду (2) (см. [5-9]).

Рассматриваются приложения полученных результатов к оценкам специальных функций и решений дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.*Неравенства.* — М.: ИЛ, 1948.

[2] Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.*Classical and new inequalities in analysis.*— Kluwer, 1993.

[3] Mitrinović D.S., Bullen P.S., Vasić P.M. *Means and their inequalities.*—D.Reidel, 1988.

[4] Dragomir S.S. *A Survey on Cauchy - Buniakowsky - Schwartz Type Discrete Inequalities.*— http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2003.

[5] Ситник С.М. *Обобщения неравенств Коши - Буняковского методом средних значений и их приложения.* — Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика", 2005, № 1(1), С. 3–42.

[6] Ситник С.М. *Уточнение интегрального неравенства Коши - Буняковского.* — Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки", 2000, № 9, С. 37–45.

[7] Ситник С.М. *Некоторые приложения уточнений неравенства Коши - Буняковского.* — Вестник Самарской государственной экономической академии, 2002, № 1(8), С. 302–313.

[8] Sitnik S.M. *Refinements of the Bunyakovskii—Schwartz inequalities with applications to special functions estimates.*—Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60-th Birthday. Linköping University, Sweden. June 10–15, 1996, P. 97.

[9] Ситник С.М. *Обобщения неравенства Коши - Буняковского в пространствах с индефинитной метрикой.* — Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, Казань, 2003, Т. 19, С. 202-203.

[10] Daykin D.E., Eliezer C.J., Carlitz C. *Problem 5563*—Amer. Math. Monthly, 1968, No. 75, P. 198; — Amer. Math. Monthly, 1969, No. 76, P. 98–100.

p-Adic Haar Multiresolution Analysis (p=2) and Pseudo-Differential Operators.

Skopina M.(St. Petersburg)

A p-adic multiresolution analysis (MRA in the sequel) in $L_2(\mathbf{Q}_p)$ with $p = 2$ has been constructed. It was observed that the characteristic function ϕ of the unit disc $B_0 = \{x : |x|_2 \le 1\} \subset \mathbf{Q}_2$ satisfies the following *refinable equation*

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{1} \phi\left(\frac{1}{2}x - \frac{r}{2}\right), \quad x \in \mathbf{Q}_2.$$

We proved that such a refinable function generates a MRA consisting of the spaces $V_j = \mathrm{span}\Big\{\phi\Big(2^{-j}x + a\Big) : a \in I_2\Big\}$, where $I_2 = \{a = 2^{-s}\big(a_0 + a_1 2 + \cdots + a_{s-1}2^{s-1}\big) : s \in \mathbf{N};$ $a_j = 0, 1;\ j = 0, 1, \ldots, s-1\}$, with including property $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbf{Z}$. In contrast to Haar MRA in $L_2(\mathbf{R})$, it turned out that there exist *infinity many different Haar orthonormal bases* in $L_2(\mathbf{Q}_2)$. The conjecture of possibility to develop multiresolution approach for the p-adic setting was raised in [2].

The pseudo-differential operators are closely related to p-adic wavelet bases. It is typical that p-adic compactly supported wavelets are eigenfunctions of p-adic pseudo-differential operators (see [1], [3]). Thus the development of wavelet theory is useful for some p-adic problems. For a wide class of pseudo-differential operators, a necessary and sufficient condition under which a 2-adic Haar wavelet function is an eigenfunction of the operator is found.

The results are obtained jointly with V.M. Shelkovich.

References

[1] Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., *Harmonic analysis in the p-adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p-adic wavelets, Tauberian theorems*, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 12, Issue 4, (2006), 393–425.

[2] Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., *p-Adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators*, (2006), Preprint at the url: http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049

[3] Kozyrev S.V., *Wavelet analysis as a p-adic spectral analysis*, Izvestia Akademii Nauk, Seria Math. Vol. 66, no. 2 (2002), 149–158.

Кратные собственные значения оператора Орра – Зоммерфельда

Скороходов С. Л. (г. Москва)

Рассматривается на отрезке $y \in [-1,\, 1]$ уравнение Орра – Зоммерфельда

$$\frac{1}{i\alpha R}\Big(\varphi^{(IV)}(y) - 2\alpha^2\,\varphi''(y) + \alpha^4\,\varphi(y)\Big) -$$

$$-\Big(U(y) - \lambda\Big)\Big(\varphi''(y) - \alpha^2\,\varphi(y)\Big) + U''(y)\,\varphi(y) = 0\,,$$

с однородными краевыми условиями $\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0$. Здесь $\alpha > 0$ – заданное волновое число, $R > 0$ – число Рейнольдса, $U(y)$ – функция скорости основного потока жидкости, λ и $\varphi(y)$ – искомые собственные значения (СЗ) и собственные функции.

Для высокоточного решения задачи используются представления $\varphi(y)$ в виде степенных разложений в окрестности граничных точек $y = -1$ и $y = 1$:

$$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (y+1)^{k+2}\,, \qquad \varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k (1-y)^{k+2}\,, \tag{1}$$

где для коэффицентов $d_k = d_k(R, \alpha, \lambda)$ и $e_k = e_k(R, \alpha, \lambda)$ получены рекуррентные уравнения и исследована асимптотика их решений при $k \to \infty$.

Осуществляя сшивку четырех линейно-независимых разложений вида (1) в некоторой фиксированной точке $y_* \in (-1, 1)$, получаем основное уравнение для вычисления спектра λ:

$$\mathrm{Wr}(\lambda) \;=\; \mathrm{Wr}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4;\ \lambda;\ y_*) \;=\; 0\,,$$

где Wr – вронскиан решений.

Для случая течения Куэтта $U(y) = y$ детально исследованы траектории СЗ $\lambda_n(R)$ при изменении числа $R \in (0, 10^6)$. Численно показано, что функции $\lambda_n(R)$ имеют в окрестности узловой точки $\lambda_* = -i/\sqrt{3}$ счетное множество точек ветвления R_k второго порядка, в окрестности которых пара СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ имеет поведение

$$\lambda_{n,m}(R) \;=\; \pm\sqrt{R - R_k}\;\Psi(R) \;+\; \Phi(R)\,,$$

где $\Psi(R)$ и $\Phi(R)$ – регулярные функции в окрестности точки $R = R_k$. При непрерывном увеличении числа $R > 0$ пары СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ сначала образуют при $R = R_k$ двойные СЗ на мнимой оси, которые затем распадаются на пары простых СЗ, симметричных относительно мнимой оси.

Этот процесс соответствует переходу СЗ с нижней ветви спектра, расположенной на мнимой отрицательной оси, на четыре других ветви, в совокупности составляющих портрет "спектрального галстука".

Приведем значения первых четырех точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$.

$$R_1 = 61.9177587, \ \lambda_{3,4} = -0.799834981i;$$

$$R_2 = 65.5202291, \ \lambda_{1,2} = -0.388160962i;$$

$$R_3 = 205.7777806, \ \lambda_{6,7} = -0.665270089i;$$

$$R_4 = 214.4033834, \ \lambda_{6,7} = -0.647397672i.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07–01–00295, 07–01–00503) и Программы N^o 3 ОМН РАН.

Обобщения оценки Цвикеля для интегральных операторов

Слоущ В. А. (г. Санкт-Петербург)

Пусть $(X, d\rho)$, $(Y, d\tau)$ — измеримые пространства с σ-конечными мерами. Мы изучаем линейные интегральные операторы $T_{fg} : L_2(Y, d\tau) \to L_2(X, d\rho)$, с ядром $f(x)t(x,y)g(y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Здесь $t(x,y)$ — ядро линейного ограниченного интегрального оператора T из $L_2(Y, d\tau)$ в $L_2(X, d\rho)$, $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ — измеримые функции. Обсуждаются условия ограниченности, компактности и оценки сингулярных чисел операторов T_{fg}. Такие вопросы часто возникают в теории операторов и достаточно подробно изучены в работах М.Ш.Бирмана, М.З.Соломяка, Г.Е.Караджова, Т. Вайдля и др. В настоящем сообщении приводятся дальнейшие продвижения в этом направлении.

В работах всех вышеперечисленных авторов предполагалась ограниченость ядра $t(x,y)$. При этом сингулярные числа и норма оператора T_{fg} оценивались через нормы функций f и g в подходящих пространствах Лоренца, включая слабые L_p-классы или через норму функции $(fg)(x,y) := f(x)g(y)$ в удобном классе измеримых функций на пространстве $X \times Y$ с мерой $d\rho d\tau$. Основная идея состоит в том, чтобы при формулировке условий на функцию $(fg)(x,y)$ использовать пространство $X \times Y$ с мерой $d\nu(x,y) := |t(x,y)|^2 d\rho(x) d\tau(y)$. Это позволяет отказаться от требования ограниченности ядра $t(x,y)$ и расширить запас рассматриваемых функций f и g.

В настоящей работе сингулярные числа оператора T_{fg} оцениваются через норму функции $(fg)(x,y)$ в подходящем классе Лоренца на пространстве $x \times Y$ с мерой $d\nu(x,y)$. Норма оператора T_{fg} также оценивается в терминах функций f, g и меры $d\nu$. Доказательства результатов основаны на идеях теории интерполяции линейных операторов. Результаты имеют приложения к дифференциальным операторам квантовой механики.

Осреднение эллиптического уравнения в перфорированной области при утончении отверстий в одном направлении.

Слуцкий А. С. (г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики)

Производится осреднение эллиптического дифференциального уравнения второго порядка в прямоугольнике, содержащем неравномерную перфорацию. Ячейки периодичности сужаются при удалении от одного из оснований прямоугольника и образуют фрактальную структуру в одном направлении. Каждая ячейка периодичности имеет отверстие, причем форма отверстий неизменна для ячеек одного ряда, однако с ростом номера ряда форма отверстий изменяется. На границах отверстий назначены краевые условия Неймана.

Построена формальная асимптотика решения, в которую входит как обычный анзац теории осреднения, так и анзацы, характерные для решений краевых задач в тонких областях, а также экспоненциальные пограничные слои описывающие поведение решения в окрестности краев отверстий. Найдена явная формула для осредненного дифференциального оператора и получена оценка разности истинного и асимптотического решений по норме пространства H^1.

Path integrals for solutions of partial differential equations via Feynman formulas.

Smolyanov O. G. (Moscow)

Representations of solutions of initial value problems for some evolutionary partial differential equations by integrals over trajectories in some space are called Feynman–Kac formulas. The Feynman formulas are representations of the solutions by limits of some integrals over Cartesian products of copies of the same space when the multiplicity of integrals tends to infinity. In the case of the heat equation the limits of integrals coincide with integrals over some Gaussian type measures on a set of trajectories. In the case of Schroedinger equation the limits can be interpreted as Feynman path integrals. In the case of equations, describing quantum analogues of Hamilton–Dirac systems (corresponding to Yang–Mills gauge fields) the limits can be interpreted as integrals over trajectories either in a submanifold of the phase space or in a superspace. Therefore, Feynman–Kac formulas follow from Feynman formulas.

Feynman formulas for solutions of some Schroedinger type equations are obtained and corresponding Feynman–Kac formulas are discussed. In particular, one considers some equations with respect to functions on domains of Riemannian manifolds, with respect to functions defined on infinite dimensional manifolds, constituted by surfaces in Riemannian manifolds (corresponding equations are related to M-theory) and with respect to functions defined on a submanifold of phase space (corresponding equations are related to Hamilton–Dirac systems). Also some randomized Feynman and Feynma–Kac formulas generated by stochastic Schroedinger equations (describing continuous measurements; such equations are called also Belavkin equations) are considered.

References

[1] Smolyanov O. G. *Smooth measures on loop groups.* Doklady Acad. Nauk, **345** N 4 (1995), 455-458.

[2] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. *Hamiltonian Feynman Path Integrals via the Chernoff Formula.* J. Math. Phys., **43** (2002), no. 10, 5161-5171.

[3] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. von, Wittich O. *Surface measures and boundary-initial problems generated by diffusions with drift.* Doklady Mathematics, 2007.

[4] Gough J., Obrezkov O., Smolyanov O. G. *Randomized Hamiltonian Feynman integrals and stochastic Schroedinger–Ito equations.* Izvestia Math., (2005), **69** N 6.

Canards in the modified Lotka-Volterra model

Sobolev V. (Samara State University), Konkina A. (Samara Municipal Nayanova University), Pokrovskii A. (University College Cork)

The famous Lotka-Volterra equations play a fundamental role in the mathematical modeling of various ecological and chemical systems. A new modification of these equations has been recently suggested to model the structure of marine phage populations, who are the most abundant biological entities in the biosphere.

The purpose of the paper is:

(i) to make some methodical remarks concerning this modification;

(ii) to discuss new types of canards which arise naturally in this context;

(iii) to present results of some numerical experiments.

We give a vivid examples of apparent disappearance phenomena which are typical for laser and biological systems. It is well known that canards play an important role in the theory of mixed-mode oscillations consisting of large amplitude oscillations followed by small amplitude oscillations. In a sense we consider a limiting cases of mixed-mode oscillations, when large amplitude oscillations followed by vanishingly small amplitude oscillations.

Numerical methods for shape and topology optimization

Sokolowski J. (Nancy-Warsaw)

We present a framework [1] for shape and topology optimization of systems described by partial differential equations of elliptic type. The evolution of geometrical domain is described by level set function given by solutions to the Hamilton-Jacobi equation. The coefficients of the H-J equations are defined by shape gradients [2] of the shape functional to be minimized. Since by its nature the level set function in the process of optimization decreases the number of connected components of the geometrical domain, the asymptotic analysis and the so-called topological derivatives [3], [4], [5] of the shape functional are employed in order to detect the topology modifications which improve the value of the shape functional to be minimized. Therefore, at the first stage of analysis, the existence of an optimal shape is proved for the shape optimization problem under considerations, at the second stage of the analysis the shape gradients and topological derivatives of the shape functional are determined, and at the third stage of the numerical method the level set function is found by solving the Hamilton-Jacobi equations. The numerical results for elliptic equations and variational inequalities show that the proposed method is very efficient and allows to find better results compared to classical boundary variations technique, or by an application of the homogeneisation method.

References

[1] Fulmanski P., Laurain A., Scheid F., Sokolowski J. *A level set method in shape and topology optimization for variational inequalities*, Les prepublications de l'Institut Elie Cartan No. 32/2006.

[2] Sokolowski J, Zolesio JP. *Introduction to shape optimization*, Springer Verlag, 1992.

[3] Nazarov SA., Sokolowski J. *Asymptotic analysis of shape functionals*, JMPA, 2003.
[4] Sokolowski J., Zochowski A. *On topological derivative in shape optimization*, SICON, 1999.
[5] Sokolowski J., Zochowski A. *Topological derivatives for contact problems*, Num. Math., 2005.

Dirichlet problem for elliptic weakly connected systems in Hardy class $H^p(D)$

Soldatov A. P. (Belgorod State University)

It is well known that the Dirichlet problem for linear elliptic equations (under natural assumptions with respect to dates) is Fredholm solvable in the class $C(\overline{D})$ of functions continuous in a closed domain. The analogous result for elliptic weakly connected systems on the plane is based on the theory of one- dimensional singular integral equations and so the Fredholm solvability of this problem is proved [1] in the Holder space $C^\mu(\overline{D})$. In the report this fact is established in $C(\overline{D})$ and the Hardy class $H^p(D)$. Under additional supposition that the characteristic equation of elliptic system has no multiple roots this effect was firstly discovered by N.Tovmasyan [2].

1. Bitsadze A.V., Boundary value problems for second order elliptic equations, "Nauka", Moskow, 1966.
2. Tovmasyan N.E. The Diriclet problem for principal elliptic equations in the class of continuous functions, Spectral and evolution problems (Kromsh-2004) vol. 15, Simferopol 2005, Crimea

On the stability of rotating self-gravitating liquid.

Solonnikov V. (S.Peterburg)

We justify the principle of minimum of potential energy in the problem of stability of uniformly rotating viscous incompressible self- gravitating liquid not subjected to capillary forces. The proof is based on analysis of the evolution free boundary problem for perturbations of velocity and pressure of rotating liquid.

Обратная задача определения коэффициента для эллиптического уравнения в прямоугольнике.

Соловьев В. В. (г. Москва)

Пусть $0 < \alpha < 1, l > 0, q_1 < 0 < q_2$ - фиксированные числа, $\Pi = \{(x,y) : 0 < x < l, q_1 < y < q_2\}$. В прямоугольнике Π рассмотрим обратную задачу определения пары функций $u(x,y), c(x) \leq 0$ из условий:

$$-\Delta u(x,y) = c(x)u(x,y) + g(x,y), (x,y) \in \Pi,$$

$$u(0,y) = \nu_1(y), u(l,y) = \nu_2(y), y \in [q_1, q_2],$$

$$u(x,q_1) = u(x,q_2) = 0, 0 \leq x \leq l,$$

$$u(x,0) = \chi(x), x \in [0,l].$$

Теорема 1. (единственности). Пусть $g, g_{yy} \in C^{\alpha}(\overline{\Pi})$, $\nu_1, \nu_2'' \in C[q_1, q_2]$, $\nu_i(y) \geq 0$, $\nu_i''(y) \leq 0$, $y \in (q_1, q_2), i = 1, 2$, $g(x, y) \geq 0$, $g_{yy}(x, y) \leq 0$, $(x, y) \in \Pi$, хотя бы одна из функций g, ν_i не является тождественным нулем. Тогда обратная задача не может иметь двух различных решений.

Пусть w - решения краевой задачи:

$$-\Delta w = g_{yy}(x, y), (x, y) \in \Pi,$$

$$w(0, y) = \nu_1''(y), w(l, y) = \nu_2''(y), q_1 < y < q_2,$$

$$w(x, q_1) = w(x, q_2) = 0, 0 < x < l.$$

Теорема 2. (существования и единственности). Пусть выполнены условия теоремы 1, и, дополнительно, $\chi(x) \geq \chi_0 > 0, x \in [0, l]$, выполнены условия согласования $\chi(0) = \nu_1(0), \chi(l) = \nu_2(0)$. Тогда, если выполнено неравенство:

$$-\chi''(x) - g(x, 0) \leq w(x, 0), x \in [0, l]$$

то обратная задача имеет единственное решение.

Групповая классификация квазилинейных уравнений эллиптического типа.

Спичак С. В. (г. Киев)

Квази-линейные двумерные уравнения эллиптического типа

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

(Δ – двухмерный оператор Лапласа, $u = u(x, y)$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, F – произвольная гладкая функция, которая является нелинейной хотя бы по одной из переменных u, u_x, u_y), относятся к фундаментальным уравнениям математической физики, которые широко применяются в разнообразных областях современного естествознания (см., напр. [1]).

В работе проведена групповая классификация этого класса уравнений, т. е. получены все подклассы таких уравнений, которые инвариантны относительно операторов симметрии, образующих различные конечномерные алгебры Ли. В процессе классификации отдельно рассматриваются полупростые, разрешимые алгебры Ли, а также те, которые являются полупрямой суммой этих двух типов алгебр. При этом, мы использовали метод, предложенный в [2], который является синтезом метода Ли–Овсянникова ([3]) и алгебраического подхода.

Литература

[1] Маслов В. П. и др. *Математическое моделирование процессов тепломассопереноса.*–М.: Наука, 1987.– 352 с.

[2] Zhdanov R. Z. and others. *Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source.* // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32.– P. 7405–7418.

[3] Овсянников Л. В. и др. *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности.* // Докл. АН СССР. — 1959.– Т. 125, № 3. – С.492–495.

Усреднение решений стационарной системы уравнений пограничного слоя для магнитной жидкости.

Спиридонов С. В. (г. Москва)

Пограничный слой - тонкий слой жидкости около границы соприкосновения потока с обтекаемым телом. Л. Прандтлем было установлено, что вне данного слоя жидкость можно считать невязкой, а внутри оказалось возможным существенно упростить уравнения Навье-Стокса, в силу ряда свойств физического характера.

Рассматривается плоскопараллельное стационарное движение магнитной жидкости:

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = -d(x,y)(U(x)-u) - U\frac{dU}{dx},\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}u(0,y) = u_1(y), u(x,0) = 0, v(x,0) = v_0(x)\\ u(x,y) \to U(x) \text{ при } y \to \infty,\end{gathered} \tag{2}$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ — продольная и поперечная компоненты скорости потока, $d(x,y) = \frac{1}{\rho}\delta(x,y)B^2(x)$, δ — проводимость жидкости, B — ортогональная к обтекаемой поверхности компонента магнитной индукции, ρ — плотность среды, а ν — вязкость. Функция $d(x,y)$ считается известной.

В настоящей работе установлены необходимые условия существования асимптотического решения системы при внесении малого параметра в функции $v_0(x)$ и $d(x,y)$.

Рассмотрим семейство уравнений:

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y^2} - u^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - v^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y} - d^\varepsilon(x,y)(U(x)-u^\varepsilon) - U\frac{dU}{dx},\\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}u^\varepsilon(0,y) = u_1(y), u^\varepsilon(x,0) = 0, v^\varepsilon(x,0) = v_0^\varepsilon(x)\\ u^\varepsilon(x,y) \to U(x) \text{ при } y \to \infty,\end{gathered} \tag{4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть функции v_0^ε и d^ε сходятся слабо при $\varepsilon \to 0$ к v_0 и d соответственно, тогда решения u^ε и v^ε задачи (3) – (4) сходятся соответственно к решениям u и v исходной задачи (1) – (2) равномерно на любом ограниченном подмножестве D.

Наилучшие m-членные приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ полиномами Хаара.

Стасюк С. А. (г. Киев)

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, а $L_p([0,1]^d)$, — пространство всех функций f, с нормой

$$||f||_p = \left(\int_{[0,1]^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и с естественной модификацией при $p = \infty$.

Для заданного множества $\mathcal{D}$ элементов некоторого банахова пространства B наилучшее m-членное приближение элемента $f \in B$ по отношению к системе $\mathcal{D}$ есть

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_B = \inf \left\| f - \sum_{j=1}^{m} c_j g_j \right\|_B,$$

где inf взят по всем элементам $g_j \in \mathcal{D}$ и коэффициентам c_j, $j = \overline{1, m}$. Рассматривая в качестве $\mathcal{D}$ систему Хаара $\mathcal{H} := \{H_I\}_I$ получаем для классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ (определение см., например, в [1]) следующее утверждение о порядковых оценках величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q = \sup\limits_{f \in B^r_{p,\theta}} \sigma_m(f, \mathcal{H})_q$.

Теорема. Пусть $1 < p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, тогда для $\frac{1}{p} < r < 1$ имеет место порядковое равенство

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} (\log m)^{(d-1)(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Утверждение теоремы для $\theta = \infty$, то есть для классов Никольского H^r_p, получено в [2]. Отметим также, что величины $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{T})_q$ для тригонометрической системы $\mathcal{T} = \{e^{i(k,x)}\}_k$ изучались в [3]. Сопоставив результат теоремы с соответствующими оценками величин $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{T})_q$ [3], отмечаем, что при некоторых соотношениях между параметрами p, q и θ приближения по системе Хаара имеют преимущество по сравнении с приближениями по тригонометрической системе.

Литература

[1] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, – 1969. – 480 с.

[2] Андрианов А. В. *Приближение функций из классов MH^r_q полиномами Хаара.* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, N 3. – С. 323–335.

[3] Романюк А. С. *Наилучшие M-членные приближения классов Бесова периодических функций многих переменных.* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. – Т. 67, N 2. – С. 61–100.

Оценки аппроксимативных и энтропийных чисел интегральных операторов

Степанов В. Д. (г. Москва)

Важной характеристикой компактности (либо меры некомпактности) линейного оператора $T : E \to F$, действующего из банахового пространства E в банахово пространство F, являются его аппроксимативные и энтропийные числа, $a_n(T)$ и $e_n(T)$, определяемые следующим образом:

$$a_n(T) := \inf\{\|T - S\|_{E \to F} : \ S : E \to F, \ \operatorname{rank}(S) \leq n - 1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$e_n(T) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \ : \ T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} B_F(Tx_j; \varepsilon), x_1, \ldots x_{2^{n-1}} \in B_E\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, $B_F(y,\varepsilon) := \{x \in F : \|x-y\|_F < \varepsilon\}$, $\mathbb{N}$ обозначает множество всех целых положительных чисел. Изучению свойств характеристических чисел линейных преобразований, включая вышеназванные, посвящена обширная библиография. Особый интерес представляют случаи операторов, для которых удается получить двусторонние неулучшаемые оценки секвенциальных (квази) норм последовательностей $\{a_n(T)\}$ и $\{e_n(T)\}$. В этом отношении значительное внимание в последние годы было уделено изучению характеристических чисел интегральных операторов типа Харди и Римана-Лиувилля.

В докладе дается обзор некоторых основных результатов по данной проблематике.

Симметрия и точные решения двухмерного уравнения Фоккера-Планка с переменной матрицей диффузии.

Стогний В. И. , Маркитанов Ю. Н. (НТУУ "КПИ", г. Киев, Украина), Лагно. В. И. (ПГПУ, г. Полтава, Украина)

Уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(B_{ij} u), \tag{1}$$

где $u = u(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\mathbf{A} = (A_1(t,\mathbf{x}), A_2(t,\mathbf{x}), \ldots, A_n(t,\mathbf{x})) -$$

вектор сносов, $\mathbf{B} = \|B_{ij}(t,\mathbf{x})\|$ – матрица диффузии, является одним из центральных уравнений теории стохастических методов (см., напр., [1]).

Здесь исследуется уравнение (1), где $\mathbf{x} = (x, y)$,

$$\mathbf{A} = (\varepsilon - x^2 y, \varepsilon - xy^2), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Доказано утверждение.

Теорема. *Максимальной конечномерной алгеброй инвариантности уравнения (1), (2), в котором $\varepsilon \neq 0$, является двухмерная абелева алгебра Ли операторов симметрии ∂_t и $u\partial_u$. Если в (1) $\varepsilon = 0$, то максимальной конечномерной алгеброй инвариантности этого уравнения является четырехмерная алгебра Ли L_4 с такими базисными операторами:*

$$P_0 = \partial_t, \quad I = u\partial_u, \quad D_1 = -x\partial_x + y\partial_y,$$

$$D_2 = -xt\partial_x + yt\partial_y - \ln\left|\frac{x}{y}\right| u\partial_u.$$

В дальнейшем, с использованием симметрийных свойств уравнения (1), (2), получены его точные решения методом симметрийной редукции, а также с использованием процедуры разделения переменных.

В частности, для уравнения (1), (2), где $\varepsilon = 0$, получены такие нестационарные решения:

$$u = y^{-4}e^{-6t}\left[C_1\left(1+\frac{1}{xy}\right) + C_2\left(1-\frac{1}{xy}\right)e^{2xy}\right], \quad C_1, C_2 \in R;$$

$$u = e^{\alpha t + xy}(xy)^{-2}\psi(0, k+1, 2\omega),$$

где $k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{1-4\alpha}$ $\left(\alpha \le \frac{1}{4}\right)$, $\psi(0, k+1, 2\omega)$ – решение уравнения Уиттекера

$$4\omega^2\psi'' = (\omega^2 + 4(k+1)^2 - 1)\psi, \quad \omega = xy.$$

Литература

[1] Гардинер К.В. *Стохастические методы в естественных науках.* — М.: Мир, 1986. — 528 с.

On construction of optimal synthesis in control problems of prescribed duration

Subbotina N.N., Tokmantsev T.B. (Ekaterinburg)

Optimal control problems of prescribed duration are under consideration [1]. Dynamics of controlled system is assumed to be nonlinear. Values of controls are restricted by geometric constrains. The cost functional of Bolza type is considered. The goal of the problem is to minimize the functional along trajectories of the system on the time interval of prescribed duration. It is assumed that data of problems are Lipscitz continuous. The set of arguments of minimization in the Hamiltonian representation is assumed to be a singleton.

The researches of the problem are focused on construction of the value function which brings the correspondence between any initial phase state of the system and the optimal result at this state. The function takes a key part in constriction of optimal synthesis. It is proven [2] that the nonsmooth value function is the unique minimax solution of the Cauchy problem with additional restrictions. The assumptions provide that the function is Lipscitz continuous. Using nonsmooth optimization [3,4] it is obtained [5] that the value function has a representation based on generalized characteristics of the Bellman equation.

An algorithm for numerical calculation of the value function on the base of a backward procedure is suggested [6]. It consists of integrating a generalized characteristic system and working the representation of the value function mentioned above. Additional advantage of the procedure is constructing of optimal controls at any current state during the work of the procedure. Estimates of difference between the optimal result and the result of application of the suggested optimal synthesis are obtained. The algorithm realized the procedure is created for optimal control problems on the plane. Results of simulations are exposed.

Recerches were supported by grant RFBR ь 05-01-00609 and by grant of President RF for scientific school ь NSh–8512.2006.1.

References

[1] N. N. Krasovskii, The Theory of Control of Motions, Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

[2] A. I. Subbotin, Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspectives, Birkhauser, Boston, 1995.

[3] F. H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, New York, 1983.

[4] Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. *Differential inclusions and optimal control* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1985. V.169.

[5] N. N. Subbotina, The Method of Characteristics for Hamilton-Jacobi Equations and Applicati ons to Dynamical Optimization, Journal of Mathematical Sciences, 2006, Vol. 135 (3).

[6] N. N. Subbotina, T. B. Tokmantsev, A Numerical Method for the Minimax Solution of the Bellman Equation in the Cauchy Problem with Additional Restrictions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2006, Supp l, P. S222-S229.

Разрешимость обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями

Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. (г. Уфа)

Обозначим через L следующую спектральную задачу Штурма-Лиувилля:

$$ly = -y'' + q(x)\,y = \lambda\, y,$$

$$U_1(y) = y'(0) + a_{11}\,y(0) + a_{12}\,y(\pi) = 0,$$

$$U_2(y) = y'(\pi) + a_{21}\,y(0) + a_{22}\,y(\pi) = 0$$

($q(x)$ — суммируемая функция, a_{ij}, i, $j = 1, 2$ — комплексные постоянные).

В настоящей работе авторами получена теорема восстановления задачи L по двум спектрам и одному собственному значению.

Рассмотрим наряду с задачей L две задачи с распадающимися граничными условиями.

З а д а ч а B_1:

$$ly = -y'' + q(x)\,y = \mu\, y,$$

$$U_{1,1}(y) = y'(0) + a_{11}\,y(0) = 0,$$

$$U_{2,1}(y) = y'(\pi) + a_{21}\,y(\pi) = 0.$$

З а д а ч а B_2:

$$ly = -y'' + q(x)\,y = \mu\, y,$$

$$U_{1,2}(y) = y'(0) + a_{12}\,y(0) = 0,$$

$$U_{2,2}(y) = y'(\pi) + a_{22}\,y(\pi) = 0.$$

Пусть $\mu_{k,1}$, $\mu_{k,2}$ — собственные значения этих задач.

Т е о р е м а. *Пусть даны достаточно большое действительное число $\lambda_N \sim N^2$ и две последовательности действительных чисел $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$, удовлетворяющих условиям:*

1) числа $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$ перемежаются;

2) $\sqrt{\mu_{k,1}} = k + \frac{b_0}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$ и $\sqrt{\mu_{k,2}} = k + \frac{b_0'}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$, *где* $b_0 = \frac{1}{\pi}\left(a_{11} + a_{21} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right)$, $\quad b_0' = \frac{1}{\pi}\left(a_{12} + a_{22} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right)$, $b_0 \neq b_0'$.

При выполнении этих условий существует абсолютно непрерывная функция $q(x)$ и числа a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} такие, что $\mu_{k,1}$ — спектр задачи B_1; $\mu_{k,2}$ — спектр задачи B_2, а λ_N — собственное значение задачи L.

Показатели Ляпунова дифференциальных уравнений второго порядка как функции скалярного параметра.

Султанбекова А. О. (г. Алматы)

Исследуется вопрос классификации по Бэру [1] показателей Ляпунова дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{y} = \omega\, b(t)\dot{y} + a(t)y, \quad t \in R^+, \quad a(t), b(t) \in C^+, \quad \omega \in [0,1], \tag{1}$$

где C^+ - пространство непрерывных и ограниченных на $R^+ = [0, +\infty)$ функций.

Показатели Ляпунова уравнения (1) $\lambda_1(\omega) \geq \lambda_2(\omega)$ совпадают с показателями Ляпунова эквивалентной системы

$$\dot{x} = A(t,\omega)x, \quad x = \mathrm{col}(x_1, x_2), \quad x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y},$$

$$A(t,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & \omega\, b(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Используемые здесь необходимые сведения из теории показателей содержатся в [2]. Для линейных систем произвольного вида (размерности не меньше двух) строгая принадлежность показателей Ляпунова второму классу Бэра следует из [3,4]. Однако для систем вида (2) этот результат неприменим, так как в данном случае рассматриваются системы специального вида. Для приведенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с линейной зависимостью коэффициента от параметра аналогичный результат установлен в [5]. Здесь изучается этот же вопрос при линейной зависимости от параметра коэффициента при первой производной искомой функции для уравнения общего вида.

Теорема 1. Существуют такие функции $a(t), b(t) \in C^+$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.

Литература

[1] Бэр Р. *Теория разрывных функций.* М., 1932.

[2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М., 1966.

[3] Миллионщиков В. М. // *Дифференциальные уравнения.* 1980. Т. 16, N 8. С. 1408 - 1416.

[4] Рахимбердиев М. И. // *Математические заметки.* 1982. Т. 31, N 6. С. 925 – 931.

[5] Султанбекова А. О. // *Математический журнал.* 2006. Т. 6, N 1(19). С. 91 – 95.

[6] Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М., 1937.

[7] Рахимбердиев М. И. // *Дифференциальные уравнения.* 1994. Т. 30, N 7. С. 1279 – 1281.

Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнений типа Эмдена-Фаулера.

Сурначёв М. Д. (г. Москва)

Рассматривается асимптотическое поведение при $|x| \to \infty$ решений $u(x) \in W^{2,n}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)$ полулинейного равномерно-эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = |x|^p |u|^{\sigma-1} u \tag{1}$$

$$n \geq 3, \ \sigma > 1, \ p \geq -2$$

определённых во внешности шара $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ в $\mathbb{R}^n$. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ полагаются ограниченными, измеримыми и удовлетворяющими условию стабилизации

$$\phi(r) := \sup_{|x|=r} \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij}(x) - \delta_{ij} - \kappa \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right| = O(|x|^{-\alpha})$$

где $\alpha > 0$ и $\kappa \in (-1, n-2)$ - постоянные.

Известно, что для уравнений такого типа существует критическое значение σ_*, в нашем случае равное $\frac{n+\kappa+p(1+\kappa)}{n-2-\kappa}$ при переходе которого свойства решений меняются качественным образом. Для случая $\sigma > \sigma_*$ доказано две теоремы, дающие описание асимптотического поведения решений уравнения (1)

Пусть $\beta_m = -m(n-2+m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ - собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Обозначим как λ_m^- удовлетворяющее условию $i\lambda < 0$ решение уравнения

$$-(1+\kappa)\lambda^2 + i\lambda(n-2-\kappa) + \beta_m = 0$$

Первая теорема утверждает, что для любого решения уравнения (1) $u(x)$ найдутся такое целое число $m \geq 0$ и гармонический многочлен $P_m(x)$ порядка m, что

$$u(x) = |x|^{i\lambda_m^- - m} P_m(x) + O(|x|^{i\lambda_m^- - \gamma}),\ \gamma = const > 0 \tag{2}$$

При этом коэффициенты $P_m(x)$ зависят от рассматриваемого решения $u(x)$, но ограничены по абсолютной величине сверху постоянной, от $u(x)$ не зависящей.

Вторая теорема утверждает, что для произвольных целого числа $m \geq 0$ и гармонического многочлена $P_m(x)$ порядка m существует решение уравнения (1), определённое при $|x| > R$ (где величина R зависит от $P_m(x)$) и имеющее асимптотику (2) при $|x| \to \infty$.

Основу доказательства составляют получение априорных оценок путём построения суперрешений и применение техники весовых пространств Кондратьева. На этом пути можно получить и следующие члены асимптотического представления решения. Рассматриваемое уравнение может служить модельным при рассмотрении более общих задач.

Homogenization of periodic differential operators as a spectral threshold effect

Birman M. Sh., Suslina T. A. (St. Petersburg)

We consider a wide class of matrix periodic elliptic second order differential operators $A = A(\mathbf{x}, \mathbf{D})$, acting in the space $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ and admitting a factorization of the form $A = X^*X$. Here X is a first order homogeneous differential operator. Many operators of mathematical physics admit such a factorization. For the operator $A_\varepsilon = A(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{D})$ with rapidly oscillating coefficients, we study the homogenization problem in the small period limit. Namely, we study the behavior of the resolvent $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ as $\varepsilon \to 0$. We find approximation for this resolvent in the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ in terms of the resolvent of the effective operator. For the error term, we obtain the sharp-order estimate (by $C\varepsilon$). Next, taking the corrector into account, we find more accurate approximation for the resolvent $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ in the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ with the error estimate of order ε^2. Besides, we find approximation with corrector for the resolvent in the operator norm from $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ to $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ with the error term of order ε. Herewith, the form of the corrector depends on the type of the operator norm. In the $(L_2 \to H^1)$-approximation, it suffices to take the traditional corrector used in the homogenization theory, while in the $(L_2 \to L_2)$-approximation two new terms should be included in the corrector.

By the scale transformation, we reduce the problem to the study of the resolvent $(A + \varepsilon^2 I)^{-1}$, i. e., the resolvent of the operator A near the bottom of the spectrum. It turns out that the behavior of this resolvent can be described in terms of the threshold characteristics of the operator A near the bottom of the spectrum. That is why the homogenization procedure is a threshold spectral effect. The operator A is decomposed in the direct integral of operators $A(\mathbf{k})$ acting in $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, where Ω is the cell of the lattice. The operator family $A(\mathbf{k})$ is studied by methods of the analytic perturbation theory. General results are applied to particular operators of mathematical physics. The results were obtained in a series of papers by M. Sh. Birman and T. A. Suslina in 2001–2006.

Existence and backward motion of slow interface for the thin film equation with nonlinear absorption and fast convection

Taranets R.M. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine)

The fourth order nonlinear degenerate parabolic equation is considered in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \leqslant 3)$ is bounded:

$$u_t + \operatorname{div}\left(|u|^n \nabla\Delta u - |u|^m \nabla u\right) = \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u),\ u = u(t,x),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \qquad (1)$$

where $0 < T < \infty$, $n > 0$, $m \in \mathbb{R}^1, \overrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^N$, $b(u) \in W^1_{1,loc}([0,\infty))$ with $b(0) = 0$ and $|b'(s)| \leqslant c\,|s|^{\lambda-1}$, $\lambda > 0$, $c > 0$. Many authors studied the equations like (1) without the convection term. The equations describe the evolution of height of a thin liquid film spreading on a solid surface as well as they appear in the Cahn-Hilliard model of phase separation for binary mixtures and the theory of plasticity deformation. Also, the equations describe the thin liquid films driven by the competing effects of a thermally induced surface tension gradient and gravity. Our main goal is a solvability and a behaviour of the support of strong solutions to the Neumann problem for (1) with fast convection, i. e. $\lambda < 1$. The existence strong solutions in a neighborhood of the slow interface for (1) with $1/8 < n < 2$, $m > 0$, $\max\left\{\frac{1}{8}, \frac{3n-1}{7}\right\} < \lambda < 1$, $b(u) \geqslant c\,u^\lambda$ is proved. Also we obtained a condition on the local behavior of initial data to ensure appearance of the waiting time phenomenon and backward motion of support propagations of the solution.

Joint talk with A.E.Shishkov.

Начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями

Тарасенко П. Ю. (г. Москва)

Как известно, решение уравнения теплопроводности в области $D \subset \mathbb{R}^n$ представляется как интеграл по пространству $C([0,T],D)$ непрерывных функций со значениями в D. В докладе приведено два подхода, позволяющих заменить этот интеграл на предел интегралов по пространству $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, решение задачи в области представляется пределом решений соответствующих задач, заданных на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, D_δ – δ окрестность этой области. Пусть $c_D(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкое векторное поле такое, что при $x \in D$ оно равно 0, а при $x \in D_\delta \setminus D$ оно направленно в сторону области и его длина равна квадрату расстояния от x до D.

В первом подходе показывается, что решение задачи Коши-Неймана для уравнения теплопроводности $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta F$ в $[0,t] \times \overline{D}$ с начальным условием $f_0|\overline{D}$ является пределом (в пространстве распределений на D) задач Коши $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta F - \beta(\nabla F, c_D)$ в $[0,t] \times \mathbb{R}^n$ с начальным условием f_0. Эта теорема является следствием того факта, что предел мер, порождаемых диффузионными процессами $dX(t) = dB(t) - \beta c_D(X_t(t))dt$ при $\beta \to \infty$, является мерой, порождаемой броуновским движением с отражением на границе области ∂D.

Во втором подходе показывается, что решение задачи Коши-Дирихле для уравнения теплопроводности с начальным условием $f_0|\overline{D}$ является пределом задач Коши для семейства уравнений теплопроводности с магнитным полем $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{2}(i\nabla + \beta c_D)^2 F$ в $[0,t] \times \mathbb{R}^n$ с начальным условием f_0. Этот результат основан на анализе меры, построенной по фундаментальному решению уравнения теплопроводности с магнитным полем.

Содержание доклада развивает результаты, излагаемые в [1].

Литература

[1] Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х. фон, Виттих О. *Поверхностные меры и начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями со сносом. ДАН. – 2007, принято к печати.*

Нормальные и нормально-регулярные решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Тасмамбетов Ж. Н. (г. Актобе, Республика Казахстан)

Для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} P_0 \cdot Z_{xx} + P_1 \cdot Z_x + P_2 \cdot Z_y + P_3 \cdot Z = 0, \\ Q_0 \cdot Z_{yy} + Q_1 \cdot Z_x + Q_2 \cdot Z_y + Q_3 \cdot Z = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $P_i = P_i(x,y)$ и $Q_i = Q_i(x,y)$ $(i = 0,1,2,3)$– аналитические функции или многочлены двух переменных, исследуются особенности построения нормальных

$$Z = exp(G(x,y)) \cdot x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (A_{0,0} \neq 0) \qquad (2)$$

и нормально-регулярных решений

$$Z = exp(G(x,y)) \cdot x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu}, \quad (B_{0,0} \neq 0) \qquad (3)$$

$$G(x,y) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^{k+1} + \ldots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y, \qquad (4)$$

$(\rho, \sigma, A_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$, $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}$– некоторые постоянные, которые следует определить.)

Если ряд в правой части сходится для $|x| \geq a > 0, |y| \geq b > 0$, a и b – некоторые положительные постоянные, то (2) называется нормальным решением.

В том случае, когда ряд выражения расходится и (2) лишь формально удовлетворяет системе (1), то (2) называется нормальным рядом Томе от двух переменных.

Особыми линиями системы (1) являются те значения независимых переменных, где коэффициенты при вторых частных производных обращаются в нуль. Обычно, нормальные решения (2) связывают с особенностью (∞, ∞), а нормально-регулярные решения (3) с особенностью в начале координат $(x = 0, y = 0)$.

Для посторения этих решений применяем метод Фробениуса-Латышевой. Определяющий множитель появляется только тогда, когда ранг $p = 1 + k$ ($k-$ подранг) больше нуля, т.е. $p > 0$. Для этого случая получено асимптотическое представление нормального ряда.

Доказана теорема.

Теорема 1. Преобразование

$$Z(x, y) = exp(G(x, y)) \cdot U(x, y) \qquad (5)$$

при неопределенных коэффициентах многочлена от двух переменных $G(x, y)$, примененное к системе (1), не изменяет его ранга.

Если коэффициенты системы (1) – многочлены двух переменных, то для такой системы, наряду с понятием ранга p, можно ввести и понятие антиранга $m = -1 - \chi$ ($\chi-$ антиподранг), а решение ищется в виде ряда (3).

Исследован ряд частных случаев системы (1), решениями которой являются функции Уиттекера двух переменных, ортогональные многочлены Лагерра и Эрмита двух переменных. Для одного частного случая коэффициентов получено утверждение.

Теорема 2. Если коэффициенты системы (1) обладают свойством

$$p_j(x) = f_j(x^r), q_j(y) = g_j(y^r) \quad (j = \overline{0, 3}),$$

где $r-$ некоторое целое число, то преобразованием $x^r = u, y^r = v$ подранг системы (1) понижается на $\nu = (k + 1) \cdot (r - 1)/r$ единиц, где $k + 1-$ ранг системы (1).

Поверхностные меры Смолянова-Вайцзеккера на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузионными процессами

Телятников И. В. (г. Москва)

Понятие поверхностной меры на бесконечномерном пространстве является естественным обобщением меры Лебега на поверхности в $\mathbb{R}^n$: по мере μ на бесконечномерном пространстве X строится мера μ^S, сосредоточенная на достаточно гладкой поверхности S в X.

Способ построения поверхностных мер на бесконечномерном многобразии в случае, когда многообразие обладает бесконечными размерностью и коразмерностью, был предложен в работе О.Г. Смолянова (см. [1]): в этой работе в качестве бесконечномерного многобразия рассматривалось пространство отображений отрезка или окружности в компактную группу Ли, а в качестве меры в объемлющем пространстве - мера Винера на пространстве функций со значениями в пространстве матриц. В дальнейшем, результат этой работы был распространен в работах [2, 3, 4, 5] на случай произвольного гладкого компактного риманового подмногобразия евклидового пространства.

Результат, полученный в настоящей работе, распространяет результат, изложенный в работах [2, 3, 4, 5], на случай, когда вместо меры Винера на $C([0, t], \mathbb{R}^n)$ (она описывает стандартное броуновское движение в $\mathbb{R}^n$) берутся меры диффузионных процессов в объемлющем пространстве с нееднничными корреляционными операторами.

В работе рассматриваются различные способы построения поверхностных мер, доказывается эквивалентность полученных мер мерам некоторых диффузионных процессов на M, причем найдены соответствующие плотности Радона-Никодима.

Литература

[1] Смолянов О.Г. *Гладкие меры на группах петель. ДАН. — 1995 — 345, 4 —455-458*

[2] Смолянов О. Г., Вайцзеккер Х. фон, Виттих О. *Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры. ДАН. — 2000 —371, 4 —442-447*

[3] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. *Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions. Can. Math. Soc. Conference Proceedings. — 2000 — 29. — 589-602*

[4] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. *Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds. — 2005 — http : //arxiv/org/PS_cache/math/pdf/*0409/0409155*.pdf*

[5] Sidorova N.A. *The Smolyanov surface measure on trajectories in a Riemannian manifold. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. —2004 — 7, 3 — 461-471.*

О предельных циклах системы дифференциальных уравнений второго порядка с параметром

Терехин М.Т. (Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина)

Рассматривается система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sum_{\nu=m}^{n} \sum_{i+j=\nu} (a_{ij} + \mu_{ij})\, x^i y^j, \\ \dot{y} &= x + \sum_{\nu=m}^{n} \sum_{i+j=\nu} (b_{ij} + \lambda_{ij})\, x^i y^j, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_{ij}, b_{ij} - действительные числа, μ_{ij}, λ_{ij} - параметры, $m \geq 2$.

Положим $\mu_\nu = (\mu_{\nu 0}, \mu_{\nu-1\,1}, ..., \mu_{0\nu})$, $\lambda_\nu = (\lambda_{\nu 0}, \lambda_{\nu-1\,1}, ..., \lambda_{0\nu})$, $\gamma_\nu = (\mu_\nu, \lambda_\nu)$, $\gamma = (\gamma_m, \gamma_m + 1, ..., \gamma_n)$, $\gamma = re$, $r > 0$, $|e| = 1$, $S = \{e : \ |e| = 1\}$.

В полярной системе координат, в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$ систему (1) можно заменить уравнением

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = Q(\varphi, \rho, r, e). \tag{2}$$

Пусть $\rho(\varphi, \rho, r, e)$ - решение уравнения (2), определенное на сегменте $[0, 2\pi]$, $\rho(\varphi, \rho, r, e) = \alpha$. Установлено, что $\rho(\varphi, \rho, r, e)$ тогда и только тогда является $2\pi-$ периодическим решением уравнения (2), когда числа $\alpha > 0$, $r \geq 0$ и вектор $e \in S$ удовлетворяют равенству $L_p(\alpha, r, e) + o(|v|^p) = 0$, $v = (\alpha, r)$, $L_p(\alpha, r, e)$ - известная форма порядка p относительно α, r.

Пусть $\alpha = kr$, $F(k, e) = L_p(k, 1, e)$, $O(k, r, e) = o(|kr, r|^p)/r^p$.

Теорема. Пусть $k_1, k_2, ..., k_d$ - простые положительные корни многочлена $F(k, e_0)$, $e_o \in S$, при любом $k > 0$, $k \notin \{k_1, k_2, ..., k_d\}$ $F(k, e_o) \neq 0$. Тогда система (1) имеет ровно d предельных циклов вида $\rho(\varphi, \alpha, r, e_0)$, обладающих свойством $\alpha \longrightarrow 0$ при $r \longrightarrow 0$.

Фреймы в банаховом пространстве

Терехин П.А. (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского)

Предполагается обсудить различные подходы к определению понятия фрейма в банаховом пространстве, установить некоторые общие свойства фреймов, а также указать на приложения теории фреймов к получению теорем представления функций рядами по всплескоподобным системам функций в различных функциональных пространствах.

К построению множества стохастических дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию

Тлеубергенов М.И. (Институт математики МОН РКазахстан)

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ (см.[2] и др.). Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), & x \in R^n, \\ \dot{y} = R(x,y,t) + D(x,y,t)U + \sigma(x,y,t)\dot{\xi}, & y \in R^p, U \in R^r, \xi \in R^k. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить управление U и матрицу диффузий σ так, чтобы множество

$$\Lambda(t): \begin{cases} \lambda_1(x,t) = 0, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$
$$\text{где} \quad \lambda_1 \in C^{22}_{xt},\ \lambda_2 \in C^{121}_{xyt}, \lambda_1 \in R^{m_1}, \lambda_2 \in R^{m_2}, m_1 + m_2 = m$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Указанная задача при $\sigma \equiv 0$ достаточно полно исследована в [2], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},t) = 0,\ \lambda \in R^m$ - в [3].

Доказывается

Теорема 1. Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2) необходимо и достаточно, чтобы множество управлений $\{U\}$ и множество коэффициентов диффузии $\{\sigma\}$ имели вид $\{U\} = \{U_1\}\bigcap\{U_2\}, \{\sigma\} = \{\sigma_1\}\bigcap\{\sigma_2\}$, где U_1, U_2, σ_1, σ_2 определяются в виде

$$\begin{cases} U_1 = s_1[H_1C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1), \\ U_2 = s_2[H_2C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{1i} = s_3[H_3C_1] + (H_3)^+B_{1i}, \\ \sigma_{2i} = s_4[H_4C_4] + (H_4)^+B_{2i}, \end{cases}$$

где $G_1 = \dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} + \dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}f + f^T\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}f + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}R + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}S_1$, $S_1 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$, $G_2 = \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x}f + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}R + S_2$, $S_2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2\lambda_2}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$, $H_1 = \lambda_{1x}f_yD$, $H_2 = \lambda_{2y}D$, $H_3 = \lambda_{1x}f_y$, $H_4 = \lambda_{2y}$, а σ_{1i}, σ_{2i}, B_{1i}, B_{1i} - i-ые столбцы соответственно матриц σ_1, σ_2, B_1, B_2.

Литература

[1] Еругин Н.П. //ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659-670.

[2] Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. *Уравнения программных движений.* М.,1986. 88с.

[3] Тлеубергенов М.И. //Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т.37. № 5. С.714–716.

Существование и свойства экстремальных непрерывных селекторов многозначных отображений с разложимыми значениями

Толстоногов А.А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН)

Рассматривается непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение, определенное на локально компактном, сепарабельном метрическом пространстве. Значениями многозначного отображения являются замкнутые, выпуклые, ограниченные, разложимые множества со свойством $R - N$ из пространства интегрируемых по Бохнеру функций. Эти функции определены на локально компактном, сепарабельном метрическом пространстве с конечной, неотрицательной, неатомической мерой Радона со значениями в сепарабельном банаховом пространстве. Доказано существование непрерывного селектора, проходящего по экстремальным точкам значений многозначного отображения. Такие селекторы называются экстремальными. Установлено, что в соответствующих топологиях множество непрерывных экстремальных селекторов плотно в множестве всех непрерывных селекторов многозначного отображения. Приведены примеры таких топологий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант N 06-01-00247а.

Об асимптотическом интегрировании одной задачи космологии

Топоренский А. В., Букжалёв Е. Е. (г. Москва)

Исследование квантовых эффектов в расширяющейся Вселенной часто приводит к динамическим уравнениям более высокого порядка чем в классической динамике. Такая ситуация свидетельствует о том, что несмотря на чрезвычайную малость поправочных членов в современной Вселенной, их влияние на динамику может в некоторых случаях оказаться существенным.

Классическое динамическое уравнение для однородной и изотропной Вселенной (уравнение Фридмана) является алгебраическим и в подходящей системе единиц записывается в виде

$$H^2 = \rho, \tag{1}$$

где H - параметр Хаббла, ρ - средняя плотность вещества во Вселенной, которая меняется согласно дифференциальному уравнению $\dot{\rho} = -3\gamma H\rho$. Постоянная $\gamma \in (0,2)$ характеризует термодинамические свойства вещества.

Квантовый эффект поляризации вакуума в гравитационном поле приводит к появлению в правой части уравнения (1) дополнительного слагаемого. Для нас существенна та часть поправки, которая зависит от производных параметра Хаббла и делает нашу задачу сингулярно возмущенной. Она равна $\rho_1 = \mu(2\ddot{H}H + 6\dot{H}H^2 - \dot{H}^2)$. Полную форму ρ_1 можно найти в [1].

В итоге, полагая $\mu = -\varepsilon^2$ (здесь μ считается < 0), приходим к задаче

$$2\varepsilon^2 H\ddot{H} + 6\varepsilon^2 H^2\dot{H} - \varepsilon^2\dot{H}^2 = \rho - H^2, \quad \dot{\rho} + 3\gamma H\rho = 0,$$
$$\rho(0,\varepsilon) = \rho^0, \quad H(0,\varepsilon) = H^0, \quad \dot{H}(0,\varepsilon) = H^1.$$

Для нахождения главного члена асимптотики ρ положим в первом уравнении $\varepsilon = 0$, найдем $\rho = \sqrt{H}$, и подставим его во второе уравнение. Тогда $\rho_0 = 4\,\rho^0/(3\,\sqrt{\rho^0}\,\gamma\,t+2)^2$.

Главный член асимптотики H определяется методом усреднения после перехода в первом уравнении к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и замены ρ на ρ_0

$$H_0 = \sqrt{\rho_0}\,\frac{1 + C_1\exp(-3\,t\sqrt{\rho_0})}{1 - C_1\exp(-3\,t\sqrt{\rho_0})} + \sqrt{\rho_0}\,\frac{2\sqrt{C_1}\exp(-(3/2)\,t\sqrt{\rho_0})}{1 - C_1\exp(-3\,t\sqrt{\rho_0})}\cos(t/\varepsilon + C_2).$$

Выполнено при поддержке РФФИ, гранты 04-01-00710 и 05-02-17450.

Литература

[1] Н. Биррел, П. Девис. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984, 356 С.*

Stability of contact discontinuities for the nonisentropic Euler equations in two space dimensions

Trebeschi P. (Brescia, Italy)

Motivated by a recent result obtained by Coulombel and Secchi [1], we study the linear stability of contact discontinuities for the nonisentropic Euler equations. We consider supersonic discontinuities which are weakly stable and we prove an energy estimate for the Euler system linearized around a given constant discontinuity. Since the problem is characteristic, we obtain a loss of control in the trace of the solution; more precisely, the loss of control is only on the tangential velocity, which corresponds to the characteristic part of the solution. Furthermore, the loss of derivatives is even related to the failure of the uniform Kreiss-Lopatinskii condition, as well as to the multiplicity of the zeros of the Lopatinskii determinant. Differently from the isentropic case treated in [1], in which the zeros of Lopatinskii determinant are always simple, we find a critical value for the tangential velocity of the constant equilibrium state, which produces a double zero. Hence, in this critical case, we get a further loss of derivatives.

The result obtained in the constant case is the crucial step towards proving the similar result for the variable coefficients case, which is still in progress.

References

[1] Coulombel J. F, Secchi P. *The stability of compressible vortex sheets in two space dimensions*, Indiana Univ. Math. J., 53(4):941-1012, 2004.

Математическое моделирование в задачах механики многослойных конструкций

Трубачев С. И. (г. Киев)

Многие задачи, связанные с математическим моделированием процессов механики, сводятся к решению уравнений или систем уравнений эллиптического типа. Построение в замкнутом виде аналитических решений краевых задач механики возможно лишь для систем простой геометрической формы. Поэтому на практике часто приходится использовать численные методы расчета. Среди численных методов последнее время особенно интенсивно развивается вариационно-сеточный метод, который позволяет осуществлять непосредственный переход к дискретной модели задачи. В настоящей работе для построения дискретной модели задач механики многослойных конструкций используется новый треугольный слоистый конечный элемент, в котором, в отличие от других моделей используется различная, в пределах каждого слоя аппроксимация перемещений. Это позволяет с высокой точностью описать, как общее деформированное состояние, так и деформированное состояние каждого слоя в отдельности и дает возможность реализовать различные виды граничных условий на краях каждого из слоев. Для аппроксимации нормальных перемещений в несущих слоях в пределах каждого треугольного элемента использовался неполный кубический полином, а касательные перемещения задавались в виде линейных полиномов. В заполнителе касательные перемещения выражаются через функции перемещений несущих слоев по кубическому закону, а нормальные - по линейному. Была исследована сходимость предложенного конечного элемента, которая имеет порядок $O(h)$. Рассмотрены решения задач теории упругости в постановке минимизации дискретного функционала потенциальной энергии и функционала типа Релея-Ритца, методами нелинейного программирования, в частности, координатной релаксации.

О новом подходе к построению численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Трубников С.В. (БГУ им. И.Г. Петровского)

Предлагаемый подход, применительно к решению задач Коши, основан на представлении приближенного решения в виде гладкой функции, которая получается при кусочно-полиномиальной интерполяции многочленами Эрмита пятого порядка. График приближенного решения представляет собой кинематическую кривую. Для вычисления коэффициентов, определяющих приближенное решение, формулируются требования, которые сводятся к приближенной минимизации невязки. Представляемый подход позволяет строить новые численные методы решения задач Коши и производить итерационное уточнение приближенных сеточных решений, полученных другими известными численными методами. В качестве примера описан один из таких методов, названный исправленнным методом Эйлера с итерационным уточнением [1]. Предлагается новый подход к оцениванию погрешности гладких (не сеточных) приближенных решений задачи Коши.

Аналогичный подход был использован при реализации общей схемы метода пристрелки для решения граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Получена алгоритмическая схема для вычисления оценки погрешности приближенного решения граничной задачи не как сеточной, а как гладкой функции.

Литература

[1] Трубников С.В. *О новом подходе к построению численных методов решения одномерных задач Коши на основе эрмитовой кусочно-многочленной интерполяции.* - Вестник Брянского государственного университета. N4 (2006): Естественные и точные науки. - Брянск: РИО БГУ, 2006.

Общая формула следов для возмущений Гильберта-Шмидта

Цопанов И.Д. (Северо-Осетинский гос.Университет)

Получена общая формула следов для возмущения самосопряженного оператора T с функцией распределения спектра $N(r)$: $\varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} < \infty$; $0 < \alpha \leq 1$, операторами Гильберта-Шмидта:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Big\{ \sum_{m=1}^{M_\nu} \Big[\mu_m^s - \lambda_m^s - s\lambda_m^{s-1}(Be_m, e_m)\Big] +$$
$$+ \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu} \sum_{k=2}^{s-1} c_{s-k}\, (Be_{m_1}, e_{m_k}) \prod_{j=2}^{k}(Be_{m_j}, e_{m_{j-1}})\Big\} = -\kappa_s Tr(B^s)\ ,$$
$$\kappa_s = \begin{cases} 1,\ if\ s\geq 2 \\ 0,\ if\ s=1 \end{cases}\ ,\quad c_{s-k} = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_{s-k}\leq k+1 \\ m_k=m_{k+1}}} \lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_{s-k}}}.$$

где $s\in\mathbb{N}$ и $\{M_\nu\}$ подпоследовательность натуральных чисел, определяемая спектром оператора T.

Асимптотика собственных значений и формула следа для оператора Штурма-Лиувилля

Тулькубаев Р. З.[7] *(г. Уфа)*

В $L^2[0,\pi]$ рассматривается спектральная задача Дирихле

$$-y'' + V(r)y = \lambda y,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

где $V(r)$ измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_0^\pi r^\epsilon(\pi - r)^\epsilon\,|V(r)|\,dr < \infty$, $\epsilon\in[0,1]$. Отметим, что в классе суммируемых потенциалов $V(r)$ (то есть $\epsilon = 0$) аналогичная задача изучалась (см. [1],[2]). Мы используем метод, предложенный Х.Х.Муртазиным (см. [3]). Спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ оператора $H_0 = -d^2/dr^2$ состоит из чисел $\lambda_n = n^2$, а соответствующие ортонормированные собственные функции суть $f_n(r) = \sqrt{2/\pi}\sin nr$. Возьмем $R_{0n}(r,t,\lambda) = R_0(r,t,\lambda)-(\lambda_n-\lambda)^{-1}f_n(r)f_n(t)$, где $R_0(r,t,\lambda)$ есть ядро интегрального оператора $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$.

Теорема 1. При $\epsilon = 1$ и $n >> 1$ в окрестности λ_n спектр оператора $H = H_0 + V$ определяется из уравнения $\lambda = \Phi_n(\lambda)$, где сжимающая функция $\Phi_n(\lambda) = \lambda_n+(Vf_n, f_n)-(VR_n(\lambda)Vf_n, f_n)$, а интегральный оператор $R_n(\lambda)$ определяется из уравнения
$$R_n(\lambda) + R_{0n}(\lambda)VR_n(\lambda) = R_{0n}(\lambda).$$

Спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ оператора H при $n >> 1$ имеет следующую асимптотику

$$\mu_n = \lambda_n + (Vf_n, f_n) - (VR_{0n}(\lambda_n)Vf_n, f_n) + O(n^{-2}).$$

Теорема 2. Пусть $r^\epsilon(\pi - r)^\epsilon V(r)\in L[0,\pi]$, $N\in\mathbb{N}$, $N > \frac{2}{1-\epsilon} - 1$. Тогда существует фиксированное число $\delta > 0$, такое, что

$$\mu_n - \lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)} + \beta_n,$$

[7]Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Муртазину Х.Х. за помощь в подготовке тезисов.

где $\alpha_k^{(n)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \oint_{|z-\lambda_n|=\delta n}(z-\lambda_n) sp[R_0(z)V]^k R_0(z)dz$ и $|\beta_n| \leq \frac{const}{n^{(N+1)(1-\epsilon)-1}}$.

Теорема 3. При $N > \frac{2}{1-\epsilon} - 1$ имеет место формула следа

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\mu_n - \lambda_n - \alpha_n] = 0,$$

где ряд сходится абсолютно, а числа $\alpha_n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{(n)}$.

Литература

[1] Винокуров В.А., Садовничий В.А.*Об асимптотике решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка в нормальной форме Лиувилля* // Дифференциальные уравнения. 1998.Т.34.№ 8.С.1137-1139.

[2] Винокуров В.А., Садовничий В.А.*Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Дифференциальныу уравнения. 1998. Т.34. № 10.С.1423-1426.

[3] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов* // Доклады АН. 2003. Т.388. № 6. С.731-733.

Дифференциалы операторных функций

Тверитинов И. Д.

Рассматривается некоторый класс функций от неограниченных самосопряженных операторов, возникающих в различных разделах математической физики. Этот класс может быть описан так:

$$\{f | f(x) = \int_0^1 x^\alpha d\nu(\alpha), supp(\nu) \subseteq (0,1)\},$$

здесь ν — σ-аддитивная мера с носителем, лежащем в интервале $(0,1)$. Для функций этого класса приводятся достаточные условия того, что оператор $f(A+\epsilon) - f(A)$ (здесь A, ϵ операторы) принадлежит к специальным классам, например — ядерных операторов, или операторов Гильберта–Шмидта. Для таких функций из общего приращения $(f(A+\epsilon) - f(A))$ выделяются линейные, квадратичные, а также части более высоких порядков малости по ϵ (т.е. строятся аналоги производных отображений) и приводится аналог формулы Тейлора.

В качестве следствий, получен ряд полезных неравенств.

Импульсное управление линейной системой в условиях воздействия помех

Ухоботов В.И. (Челябинский государственный университет)

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$dz = C(t)zdt + A(t)du + B(t)vdt, \qquad z \in R^n, u \in R^k, v \in R^l, t \leq p. \tag{1}$$

Здесь $C(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ являются непрерывными матрицами соответствующих размерностей; p - момент окончания процесса управления. Задан начальный момент времени $t_0 1$. Нормы в соответствующих пространствах задают количество ресурсов, потраченные на формирования управления и помехи [1]. Решение системы (1) записывается с помощью обобщенной формулы Коши [1]. Заданы линейное отображение $\pi : R^n \to R^m$ и выпуклый компакт $S \subset R^m$. Цель выбора управления заключается в том, чтобы при любой реализации помехи было выполнено включение

$$\pi\, z(p) \in S. \tag{2}$$

С помощью метода одномерного проектирования [2] получено условие, при выполнении которого возможно построить требуемое управление. Приведен алгоритм построения такого импульсного управления, который не использует информацию об оставшемся запасе ресурсов у помехи. Приведены классы задач, в которых невыполнение приведенных условий позволяют построить допустимую помеху, обеспечивающую невыполнение включения (2). Разобран конкретные примеры.

Литература

[1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1970. 420 с.

[2] Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейной игре с интегральным ограничением и однотипные игры.// Изв. АН. Тех.кибернетика. 1994. N 3. С.192-199.

Two-phase parabolic obstacle problem

Uraltseva N.N. (St.-Petersburg State University)

We consider the regularity of the free boundary for the following parabolic two-phase obstacle problem

$$\Delta u - \partial_t u = sign(u).$$

We prove that both of the free boundaries, $\partial\{u > 0\}$ and $\partial\{u < 0\}$, are C^1-surfaces near the points of their contact.

Corresponding results in elliptic case were obtained in a joint paper of H.Shahgholian, G.Weiss and the author.

This work was supported by grant NSh 8336.2006.1 and by RFFR grant 05-01-01063.

Об условиях теоремы Чернова об однопараметрических полугруппах

Уриновский А. Н.

Представлены результаты о замыкаемости и достаточных условиях для замкнутости некоторых операторов, возникающих в условиях, близких к условиям известной теоремы Чернова, сформулированной ниже. Важным классом таких семейств $\{F(t)\}$ являются операторные семейства, возникающие при построении как поверхностных мер Смолянова, так и решений эволюционных уравнений в частных производных.

Теорема 1 (Теорема Чернова). Пусть $f : [0, \infty) \to L(B)$ — сильно непрерывное отображение, $f(0)$ – единичный оператор, $\|f(t)\| \leq e^{at}$ для некоторого вещественного a и пусть D – векторное подпространство в $Dom(f'(0))$, сужение на которое оператора $f'(0)$ обладает замыканием C. Если C является генератором сильно непрерывной полугруппы e^{tC}, то для каждого $T > 0$ последовательность $f^n(t/n)$ $(n \in \mathbf{N})$ сходится к e^{tC} в сильной операторной топологии равномерно относительно $t \in [0,T]$.

Здесь $\boldsymbol{B}$ — банахово пространство над полем $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R},\mathbf{C}\}$ и $L(\boldsymbol{B})$ — пространство ограниченных линейных операторов в $\boldsymbol{B}$. В условиях этой теоремы предполагается существование аппроксимируемой полугруппы, поэтому для применений аналогичных теорем в указанных выше работах существование полугруппы e^{tC} доказывается отдельно.

Пусть задана функция $f : [0,t_b] \to L(\boldsymbol{B})$, где $f(0)$ — единичный оператор.

Теорема 2. Пусть существует $a > 0$, такое что $\|f(t)\| \le e^{at}$ для всех $t < t_b$ и оператор $f'(0)$ определен на всюду плотном в $\boldsymbol{B}$ линейном многообразии $\vec{M}$. Тогда оператор $f'(0)$ замыкаем.

Заметим, что ослабление одного из условий до $\|f(t)\| \le K$ $(K > 1)$ делает утверждение теоремы неверным.

Лемма 1. Условий, указанных в Теореме 2, недостаточно, чтобы оператор $f'(0)$ был замкнут.

Отметим, что $\lim g^n\left(\frac{t}{n}\right)\vec{x} = \vec{x}$.

Укажем одно из достаточных условий замкнутости.
Будем считать, что $t \in [0,t_b)$. Пусть на всюду плотном в $\boldsymbol{B}$ линейном многообразии $\vec{M}_2$ для всех t определена производная $f''(t)$.

Предложение 1. Если существует такая непрерывная функция $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что для любого единичного $\vec{x} \in \vec{M}_2$ справедливо неравенство

$$\|f''(t)\vec{x}\| \le F(\|f'(0)\vec{x}\|),$$

то оператор $f'(0)$ замкнут в $\boldsymbol{B}$.

Автор выражает благодарность Н.Н. Шамарову за постановку задачи, полезные советы и постоянное внимание к работе.

Операторы в пространстве почти сходящихся последовательностей

Усачев А. С. (г. Воронеж)

Линейный непрерывный функционал B на l_∞ называется банаховым пределом, если $B \ge 0$, $B(1,1,\dots) = 1$ и B инвариантен относительно оператора сдвига. Последовательности, для которых значение $B(x)$ не зависит от B назваются почти сходящимися. Множество почти сходящихся последовательностей обозначается ac.

Пусть задана последовательность номеров $m_k, n_k \in \mathbb{N}$. По элементу $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \in l_\infty$ построим элемент
$\overline{x} = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_{m_1+n_1}; x_{m_2}, x_{m_2+1}, \dots, x_{m_2+n_2}; \dots)$.

Теорема 1. Если $x \xrightarrow{ac} a$ и $n_k \to \infty$, то $\overline{x} \xrightarrow{ac} a$.

Определим оператор $P\colon l_\infty \to l_\infty$ следующим образом:

$$(Px)_m = \frac{1}{n_{k+1} - n_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i, \quad n_k \le m < n_{k+1},$$

где $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ возрастающая последовательность такая, что $n_1 = 1$.
Пусть $\rho(x, ac)$ расстояние от x до ac в l_∞, т.е. $\rho(x, ac) = \inf\limits_{y \in ac} \| x - y \|_{l_\infty}$.

Теорема 2. 1. Если $x \in l_\infty$, то $\rho(Px, ac) \le \rho(x, ac)$;

2. $\rho(Px, ac) = \rho(x, ac)$ для любого $x \in l_\infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_k(n_{k+1} - n_k) < \infty$. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00629).

Критерий совпадения стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении

Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. (г. Екатеринбург)

Рассматривается конечномерная конфликтно-управляемая система, поведение которой на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается векторным дифференциальным уравнением.

Изучаются и сравниваются две игровые задачи о сближении системы с терминальным множеством M в фазовом пространстве. В первой из них первому игроку требуется обеспечить попадание фазового вектора системы на M в конечный момент времени ϑ. Во второй задаче требуется с помощью позиционного управления обеспечить попадание фазового вектора системы на M не позже момента ϑ.

Эти задачи являются одними из наиболее важных в теории дифференциальных игр. Они связаны с многими крупными задачами оптимального гарантированного управления динамическими системами, в частности, — с задачей об оптимальном быстродействии для динамических систем, подверженных влиянию помех [1]. Кроме того, в рамки общей постановки таких задач укладываются многие конкретные дифференциальные игры [1].

Постановка первой задачи выглядит проще, чем постановка второй задачи, и поэтому естественно ожидать, что алгоритмы построения ее решения проще, чем алгоритмы построения решения второй задачи. Имеющийся опыт разработки алгоритмов подтверждает это. Естественно, возникает вопрос о выделении тех условий на конфликтно-управляемую систему и терминальное множество M, при которых решения обеих задач совпадают. При выполнении этих условий можно использовать для решения второй задачи алгоритмы построения решения более простой первой задачи.

В докладе приводятся такие условия.

Литература

[1] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: *Наука*, 1974. 456 с.

Построение волновых фронтов в динамических задачах управления с невыпуклым терминальным множеством

Успенский А. А., Лебедев П. Д. (г. Екатеринбург)

В качестве инструментов исследования задач теории управления и теории дифференциальных игр [1-2] применяются конструкции теории α-множеств [3]. Изучение свойств α-множеств осуществляется методами выпуклого и негладкого анализа, а также дифференциальной геометрии. Введенные в работе понятия биссектрисы множества и псевдовершины кривой представляют самостоятельный интерес, позволяя исследовать геометрию множеств, вычислять их меру невыпуклости. Эти понятия также оказываются полезными при изучении эволюции множеств достижимости управляемых систем, построении волновых фронтов [4], вычислении эйконала в геометрической оптике. В работе развивается численно-аналитический подход к отысканию псевдовершин кривой, вычислению меры невыпуклости плоского множества и построению на их основе фронтов. Приводится точное решение одной задачи быстродействия.

Разработаны численные алгоритмы построения волновых фронтов и линий их негладкости для множеств с кусочно-гладкой границей. Реализованы вычислительные программы, позволяющие конструировать аппроксимации функций оптимального результата для одного класса дифференциальных игр быстродействия. Приводятся результаты численного моделирования управляемых динамических систем с невыпуклым терминальным множеством.

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука 1974. 456 с.*

[2] Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003, 336 с.*

[3] *α-множества и их свойства / Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.; Ин-т математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург, 2004. - 62 с.: 38 ил. - Библиогр.: 7 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004*

[4] Лебедев П.Д., Успенский А.А. *К вопросу о геометрии волновых фронтов // Известия Института математики и информатики. Ижевск, УдГУ. 2006. Вып.3 (37). С.79-80*

Об одном классе обратных спектральных задач

Валеев Н. Ф. (г. Уфа, Башкирский государственный университет)

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, $A(\vec{p},\lambda) : H \mapsto H$ семейство замкнутых самосопряженных операторов вида:

$$A(\vec{p},\lambda) = A_0 + p_1A_1 + p_2A_2 + ... + p_nA_n - \lambda I,$$

где λ -спектральный параметр, $\vec{p} \in R^n$ – вектор параметров.

В работе исследуется обратная спектральная задача в следующей постановке.

Обратная спектральная задача. Требуется найти такие значения вектора параметров $\vec{p} \in R^n$, при которых спектр оператора $A(\vec{p},0)$ содержит заданные числа $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$.

К указанной формулировке приводит ряд технических задач конструирования различных динамических систем с заданными резонансными характеристиками, а также так называемые задачи диагностирования повреждений технических систем по известным частотам собственных колебаний.

Определение. Будем говорить, что для упорядоченного набора вещественных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ вектор $\vec{p} \in R^n$ называется ε-решением, если у оператора $A(\vec{p},\lambda)$ найдутся собственные значения $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_n^*$ такие, что $\|\lambda_k^* - \lambda_k\| < \varepsilon$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) оператор A_0 – самосопряженный;

2) $0 \notin \sigma(A_0)$;

3) $A_0^{-1}A_k$ – компактные операторы.

Тогда для любого упорядоченного набора n чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ и любого $0 < \varepsilon$ существует ε-решение.

Также нами приведены конструктивные методы построения ε-решений, оценки количества решений.

При достаточно широких условиях на операторы $A(\vec{p}, \lambda)$ сформулированы условия сходимости ε-решений к решениям исходной обратной спектральной задачи.

Вырожденные предельные циклы в полиномиальных системах

Varin V. P. (ИПМ им. М.В. Келдыша)

Для полиномиальных систем на плоскости с одним ребром многоугольника Ньютона предложен метод вычисления асимптотики отображения Пуанкаре для монодромной особой точки. Фокусные величины вычисляются с помощью уравнений в вариациях высокого порядка. Уравнения в вариациях образуют треугольную систему, которая всегда разрешима. Это позволяет исследовать бифуркации рождения сколь угодно вырожденных циклов в системах с вырожденной (или отсутствующей) линейной частью, а также решает проблему центра-фокуса для этих систем.

Если исходная система гамильтонова или однородна, т.е. особая точка типа центр, при изменении параметров системы может образоваться предельный цикл конечного радиуса, оценки для которого можно выразить через фокусные величины.

Для систем с одним внешним ребром многоугольника Ньютона метод позволяет изучать предельные циклы бесконечно большого радиуса.

О сингулярно возмущённых задачах с неэкспоненциальным пограничным слоем

Васильева А. Б. (г. Москва)

1. **Экспоненциальный пограничный слой**. Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon^2 y'' = F(y, x), \ 0 < x < 1, \qquad y(0, \varepsilon) = y^0, \ y(1, \varepsilon) = y^1. \tag{1}$$

У вырожденного уравнения $F(y, x) = 0$ есть корень $\varphi(x)$ и $F_y(\varphi(x), x) > 0$. Тогда решение задачи (1) существует и:

$$y(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \Pi + R + r(x, \varepsilon), \tag{2}$$

Левый Π и правый R погранслои убывают как экспоненты и остаточный член r имеет оценку $r = O(\varepsilon)$.

2. **Обращение $F_y(\varphi(x), x)$ в нуль первого порядка**. Пусть у задачи (1) рассматривается случай, когда $F = (y - \varphi(x))^2$. Тогда имеет место асимптотическое представление типа (2), но погранслои имеют степенной вид.

3. **Обращение $F_y(\varphi(x), x)$ в нуль более высокого порядка**. Пусть F имеет вид $\pm(y - \varphi(x))^n$. Тогда при чётном n решение существует в обоих случаях $\pm$, а при нечётном n только при знаке $+$. Асимптотика имеет тот же тип (2), но порядок остаточного члена равен $O(\frac{\varepsilon}{n})$.

4. **Случаи произвольного вида** $F(y,x)$. Для решения $y(x,\varepsilon)$ удаётся доказать оценку сверху:

$$y(x,\varepsilon) < \varphi(x) + \Pi + R + \delta,$$

где δ -- сколь угодно малая, но фиксированная при $\varepsilon \to 0$ постоянная.

5. **Пример краевой задачи с вырождением на один порядок**. Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon y'' = \pm(y')^{\frac{3}{2}},\ 0 < x < 1, \qquad y(0,\varepsilon) = y^0,\ y(1,\varepsilon) = y^1, \quad (y^0 < y^1).$$

В обоих случаях погранслои имеют степенной характер.

6. **Интегральное уравнение**:

$$\varepsilon y_x(x,t,\varepsilon) = -\int\limits_0^t y(x,t,\varepsilon)\,dt, \qquad y(0,t,\varepsilon) = y^0(t).$$

Последовательными приближениями решение строится в виде ряда.

Результаты пунктов 2.—4. получены в соавторстве с В.С. Пилюгиным.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №04-01-00710 и проект №05-01-00465).

Calculation of the best embedding constants for the multidimensional Sobolev spaces

Vaskevich V. L. (Sobolev Institute of Mathematics, SD RAS)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with sufficiently smooth boundary. As is known [1], for a given positive integer $m > n/2$ the Sobolev space $W_2^{(m)}(\Omega)$ is embedded in the space $C(\Omega)$ of continuous functions with the domain Ω. The embedding operator is linear and bounded and the norm $A_n^m(\Omega)$ of this operator is often refereed as the best embedding constant [2]. By the definition, the following estimate holds

$$\|u \mid C(\Omega)\| \equiv \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \le A_n^m(\Omega)\|u \mid W_2^{(m)}(\Omega)\|,$$

$$\forall\, u \in W_2^{(m)}(\Omega).$$

The embedding constants like $A_n^m(\Omega)$ are of great importance in estimations of condition numbers for certain computational algorithms [3],[4]. By this reason, it is very useful to know the numerical values of $A_n^m(\Omega)$ for a given smoothness m, dimension n, and domain Ω. The asymptotic formulas for $A_n^m(\Omega)$ are also useful when $m \to \infty$ or $n \to \infty$. In our talk we study the problem of calculation of the embedding constant $A_n^m(\Omega)$ in the case when Ω is the unit cube in $\mathbb{R}^n$. The embedding constants for periodic Sobolev spaces are evaluated separately. This work was supported by RFBR project No. 05-01-00250.

References

[1] Sobolev S. L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics.* Translations of Mathematical Monographs, V. 90. AMS, Providence, RI. 1991.

[2] Triebel H. *Sampling numbers and embedding constants.* Tr. Mat. Inst. Steklova 248 (2005), Issled. po Teor. Funkts. i Differ. Uravn., 275–284.

[3] Sobolev S. L. and Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] Vaskevich V. L. *Perturbations of the error of a cubature formula under small perturbations of its weights*. Vychisl. Technol. 11, Special Issue. (2006), 19–26.

On the Constructively Determination the Spectral Invariants of the Periodic Multidimensional Schrödinger Operator

Veliev O. A. (Depart. of Math., Faculty of Arts and Sci., Dogus University,Acibadem, Kadikoy, Istanbul, Turkey)

In this paper we constructively determine a family of the spectral invariants of the multidimensional Schrödinger operator with a periodic potential by the given band functions.

C-integrable systems of discrete lattices

Vereschagin V.L. (Institute for mathematics, Russian Academy of Science, Ufa)

We examine system of fully discrete "hyperbolic"equations

$$u_{i+1,j+1} = f(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j}),$$

where i, j are integer indices, u_{ij} is a vector of n unknown sequences, f is a vector of n known functions. The problem is to find conditions for so-called C-integrability, or Darboux integrability which means existance of sufficient number of i- and j-integrals for initial system. The integrals are $I(u)$ such that $(T_i - 1)I(u) = 0$, (T_i is shift in i) and the same for J: $(T_j - 1)J(u) = 0$. Conditions of C-integrability for linear systems were written out explicitly in the form of proven statements and were illustrated by appropriate examples. For the systems equality of generalized Laplace invariant to zero is the condition of integrability. System is called "C-integrable"if its lattice of generalized Laplace invariants breaks at both directions. Further, for integrable systems the Laplace procedure was applied for obtaining generic solutions. For nonlinear systems the concept of C-integrability should be understood as C-integrability for appropriate "linearized"equation. There is a procedure for constructing complete set of integrals for those systems.

Построение частных эллиптических решений неинтегрируемых систем

Vernov S. Yu. (НИИЯФ МГУ, г. Москва)

Предлагается метод построения эллиптических решений неинтегрируемых систем. Данный метод основан на использовании решений в виде формальных рядов Лорана и является модификацией метода Конта–Мюзетты [1]. Метод Конта–Мюзетты предназначен для нахождения как эллиптических решений, так и решений в виде элементарных функций (вырожденных эллиптических решений), поэтому не использует особенные свойства эллиптических функций, такие как равенство нулю суммы вычетов в параллелограмме периодов. Предлагаемый метод предназначен для поиска только эллиптических решений и максимально использует их свойства, в частности теорему вычетов. Отметим, что теорема вычетов эффективно используется для получения условий на коэффициенты системы, необходимых для существования эллиптических решений (см. [2] и [3]).

Предлагаемый метод позволил найти эллиптические решения в виде бегущих и стоячих волн для комплексного уравнения Гильберта–Ландау пятой степени

$$\mathrm{i}\mathcal{A}_t + p\mathcal{A}_{xx} + q|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} + r|\mathcal{A}|^4\mathcal{A} - \mathrm{i}\gamma\mathcal{A} = 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{A}_t \equiv \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, $\mathcal{A}_{xx} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}$, константы $p, q, r \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Отметим, что все известные ранее точные решения данного уравнения выражаются в элементарных функциях. Доклад основан на статье [4].

Литература

[1] Musette M., Conte R. *Physica* D **181** (2003) 70–79 (*Preprint* nlin.PS/0302051).

[2] Hone A.N.W. *Physica* D **205** (2005) 292–306.

[3] Vernov S.Yu., *Theor. Math. Phys.* **146** (2006) 131–139 [*Теор. Мат. Физ.* **146** (2006) 161–171] (*Preprint* nlin.PS/0503009).

[4] Vernov S.Yu., nlin.PS/0602060.

Markov dynamics and quasisimilarity.

Vershik M.A.

We consider the dynamics of polymorphisms e.g. markov transformations with invariant measure. The main example is a random perturbation of the deterministic dynamical system. There exist such systems and its random perturbation of the special type which are quasisimilar to unperturbed system. Up to now this effect is known only for K (kolmogorov)systems and the conjecture that only for those.

О классе Бэра топологической энтропии

Vetokhin A. N. (ИТиГ)

Одной из характеристик, связанных с ростом орбит, является топологическая энтропия [1]. В данной заметке мы будем рассматривать свойства топологической энтропии в зависимости от изменения динамической системы. Топологическая энтропия не является непрерывной функцией на множестве динамических систем, наделенном различными топологиями [1]. В. М. Миллионщиков предложил использовать классификацию Бэра разрывных функций [2] для описания свойств различных характеристик динамических систем. В частности, он установил, что показатели Ляпунова принадлежат второму классу Бэра [3], а М.И.Рахимбердиевым в работе [4] было установлено, что показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра.

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. Обозначим $Lip(X)$ — множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица и наделенное топологией равномерной сходимости на X. Для заданного натурального числа n рассмотрим метрику

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \le i \le n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Пусть $N_d(f,\varepsilon,n)$ — максимальное количество точек в X попарные $d_n^f(x,y)$-расстояния между которыми больше чем ε. Топологическая энтропия отображения f определяется формулой

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(N_d(f,\varepsilon,n))$$

В работе будем изучать поведение функции $h_{top}(\cdot) : Lip(X) \to R$ в зависимости от динамической системы.

Теорема 1. *Функция $h_{top}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $Lip(X)$.*

Возникает вопрос об улучшении теоремы 1. В общем случае, как показывает следующий пример, теорему 1 улучшить нельзя. Пусть X_0 — пространство последовательностей, состоящих из нулей и единиц, наделенное метрикой $d(x,y) = \frac{1}{k}$ — где k номер первой различной компаненты.

Теорема 2. *Функция $h_{top}(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $Lip(X_0)$.*

Литература

[1] Агафонов В.Г. *К бэровской классификации показателей Ляпунова.//* Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, N 8. С. 1466.

[2] Бэр Р. *Теория разрывных функций.//* М.-Л., ГТТИ, 1932.

[3] Миллионщиков В.М. *Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.//* Матем. заметки. 1986. Т. 39, N 1. С. 29–51.

[4] Рахимбердиев М.И. *О бэровском классе показателей Ляпунова.//* Мат. заметки. 1986. Т. 31, N 6. С. 925-931.

Minimal limits of trajectory attractors of the 3D Navier–Stokes alpha-models

Vishik M. I. (IITP RAS and MSU)

1. The trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system.
2. α-models for the 3D Navier–Stokes system (the Leray-α model, Camassa–Hold equations, Clark-α models, and other models).
3. The limit of the trajectory attractors of some α-models of the 3D Navier–Stokes system as $\alpha \to 0+$.
4. The minimal limit $\mathfrak{A}_{\min}$ of the trajectory attractors $\mathfrak{A}_\alpha$ of a 3D Navier–Stokes α-model as $\alpha \to 0+$. The formula determining the set $\mathfrak{A}_{\min}$.
5. The theorem on the connectedness of the minimal limit $\mathfrak{A}_{\min}$. The theorem on the invariance of the set $\mathfrak{A}_{\min}$ with respect to the translation semigroup $\{T(h), h \geq 0\}$.
6. Some open problems:
   - **i)** Is the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ of the 3D Navier–Stokes system itself a connected set in the corresponding trajectory space?
   - **ii)** Do the minimal limits $\mathfrak{A}_{\min}$ of the trajectory attractors corresponding to different α-models of the 3D Navier–Stokes system coincide? (Conjecture: different α-models can have different minimal limits $\mathfrak{A}_{\min}$).

The report is based on the joint paper [1] by V.V.Chepyzhov, E.S.Titi, and M.I.Vishik.

[1] V.V.Chepyzhov, E.S.Titi, and M.I.Vishik. *On convergence of trajectory attractors of 3D Navier–Stokes-α model as α approaches* 0. Sbornik: Mathematics, 2007 (to appear).

О собственных частотах колебания струны с точечным распределением масс

Владимиров А. А. (МФТИ (ГУ)),
Шейпак И. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

На отрезке $[0,1]$ рассматривается следующая спектральная задача с сингулярным весом

$$-y'' = \lambda\rho y, \qquad y(0) = y(1) = 0. \tag{1}$$

При этом предполагается, что $\rho = P'$ для некоторой неубывающей функции P, причём производная понимается в обобщённом смысле.

Если у P нет абсолютно непрерывной части, то (см. [1]) для собственных значений рассматриваемой задачи справедлива асимптотическая формула $n = o(\sqrt{\lambda_n})$.

В работе [2], в предположении, что ρ — самоподобная сингулярная мера ($P_{ac} \equiv 0$, $P_{sing} \not\equiv 0$), получена асимптотическая формула $n \sim \lambda_n^D \cdot s(\ln(\lambda_n))$, где $0 < D < 1/2$, а s — периодическая функция, которая может вырождаться в константу.

Основной целью настоящего доклада является изучение поведения собственных значений задачи (1) в предположении, что ρ является обобщённой производной неубывающей самоподобной функции P, имеющей счётное число скачков, которые накапливаются к правому концу отрезка $[0,1]$. Для краткости сформулируем основной результат для случая, когда P порождается двумя операторами подобия (см. [3]).

Теорема 1. *Если P — неубывающая кусочно-постоянная самоподобная функция, то*

$$n \sim C \ln \lambda_n$$

где число $C > 0$ определяется параметрами самоподобия функции P.

Литература

[1] Крейн М. Г. *Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру её частот*// ДАН СССР, Т. 76, №3, 1951, С. 345–348.

[2] M, Solomyak M., E. Verbitsky *On a spectral problem related to self- similar measures*//Bull. London Math. Soc.,**27** (1995), P. 242–248.

[3] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*// Матем. сборник, Т. 197, №11, 2006, С. 13–30.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00283 и грантом «Поддержки ведущих научных школ», грант № НШ-5247.2006.1, и грантом INTAS 05-1000008-7883.

Об уравнениях с запаздываниями и импульсными возмущениями, возникающих в радиотехнике

Власенко Л. А., Руткас А. Г. (Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина)

В n-мерном пространстве изучается полулинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}[A_0 u(t)] + \sum_{j=0}^{m} B_j u(t-\omega_j) = f(t, u(t)), \text{ п.в. } t > t_0, \tag{1}$$

$$\omega_0 = 0 < \omega_1 < \ldots < \omega_m = \omega, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(t) = g(t), \quad t_0 - \omega \le t < t_0, \quad u(t_0 + 0) = u_0,$$

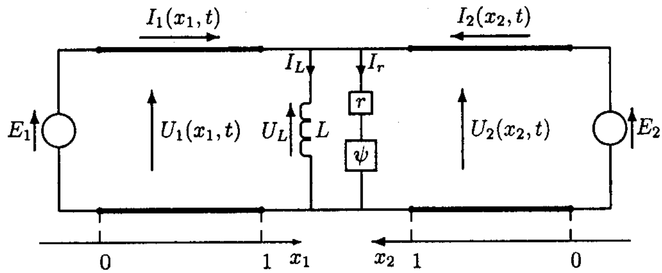
и импульсными возмущениями

$$\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k + 0) - u(t_k - 0)) = \Im_k(u(t_k - 0)),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \; t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \to \infty.$$

Для вырожденного уравнения ($\det A_0 = 0$) устанавливаются условия согласования на правую часть, начальные данные и импульсные воздействия, необходимые для существования и единственности решения. Для однозначной разрешимости невырожденного уравнения этих условий не требуется [1].

Интерес к уравнению (1) вызван исследованием нелинейных электрических цепей с отрезками длинных линий. В [2] линия передачи без потерь описывается явным уравнением с запаздыванием. Уравнения цепей в [3] содержат дифференциальные уравнениями без запаздывания, не разрешенные относительно старшей производной. Вырожденные линейные уравнения (1), описывающие электрические цепи с длинными линиями, исследовались в [4]. Рассмотрим следующую электрическую цепь.



На входах двух длинных линий с индуктивностями L_1, L_2 и емкостями C_1, C_2 включены источники напряжений $E_1(t), E_2(t)$, на выходах – индуктивность L, сопротивление r и нелинейные потери $\psi(I_r)$. Эта цепь описывается уравнением (1), где $u(t) = (U_1(1,t), I_1(t), I_2(t), I_r)^{tr}$, $\omega_j = 2\sqrt{L_j C_j}$, $j = 1, 2$, $f(t,u) = (2E_1(t-\omega_1/2), 2E_2(t-\omega_2/2), 0, \psi(I_r))^{tr}$, $A_0 = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^4$, $B_j = \{b_{ik}^{(j)}\}_{i,k=1}^4$, $j = 0, 1, 2$, $a_{32} = a_{33} = -a_{34} = L$, $b_{11}^{(0)} = b_{21}^{(0)} = -b_{31}^{(0)} = b_{41}^{(0)} = b_{11}^{(1)} = b_{21}^{(2)} = 1$, $b_{44}^{(0)} = -r$, $b_{12}^{(0)} = -b_{12}^{(1)} = \sqrt{L_1/C_1}$, $b_{23}^{(0)} = -b_{23}^{(2)} = \sqrt{L_2/C_2}$, остальные элементы матриц равны нулю. Предполагается, что в дискретные моменты времени токи и напряжения могут подвергаться кратковременным импульсным возмущениям.

Литература

[1] Мышкис А. Д. *Системы с последействием и релаксацией.* ПММ, 1994, **58**, вып. 6, с. 141-144.

[2] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1984.

[3] Митропольский Ю. А., Молчанов А. А. *Машинный анализ нелинейных резонансных цепей.* Киев: Наукова думка, 1981.

[4] Власенко Л. А. *Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями.* Днепропетровск: Системные технологии, 2006.

Solvability and Properties of Solutions of Abstract Functional Differential Equations

Vlasov V. V., Medvedev D. A. (Moscow)

We consider a class of abstract linear non-homogeneous functional differential equations in Hilbert spaces, that include some partial functional differential equations as special cases. We describe the spectral properties of the homogeneous problem, and obtain sharp estimates of the growth bound of the solution to the non-homogeneous problem.

We consider the following initial value problem

$$u'(t) + Au(t) + \sum_{k=1}^{n} B_k Au(t-h_k) + \int_0^h B(s)Au(t-s)ds = f(t), \ t > 0, \tag{1}$$

$$u(s) = g(s), \ s \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Here A is a normal operator with compact inverse A^{-1}, spectrum of operator A is lying in the open angle $S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \theta\}$, $0 < \theta < \pi/2$. Operators B_k and $B(s)$ have the from: $B_k = T_k A^{-\theta_k}$, $B(s) = T(s)A^{-\theta_0}$, here T_k are bounded operators in the space H, the operator-valued function $T(s)$ is a bounded operator for $s \in [-h, 0]$ and is strongly continuous with respect to s. Constants θ_k and h_k satisfy $0 < \theta_k \leq 1$ for $k = 0, 1, ..., n$ and $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$.

Theorem 1. Let $g \in W_2^1((-h,0),A)$, $f \equiv 0$ and choose a constant β such that $\beta < \varkappa_+$ and that there is no eigenvalue λ_q of $L(\lambda)$ on the line $\Re\lambda = \beta$. Then the strong solution u of the problem (1), (2) has the following representation

$$u(t) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda, \Re\lambda_q > \beta} c_{q,j,s} y_{q,j,s}(t) + u_\beta(t), \ t > 0. \tag{3}$$

Here $u_\beta \in W_{2,\beta}^1((0,+\infty),A)$; $y_{q,j,s}(t)$ are exponential solutions for homogeneous equation (1) corresponding to eigenvalues λ_q of operator-valued function $L(\lambda)$ which is the symbol of the equation (1) (see [1] for more details).

We should remark that the localisation of the spectra of $L(\lambda)$ implies that the sum on right-hand part of (3) contains only a finite number of terms (see [1],[3] for more details).

Theorem 2. Let $g \in W_2^1((-h,0),A)$, $f \in L_2((0,T),H)$ for arbitrary $T > 0$. Then the strong solution u of the problem (1), (2) satisfies the following estimate

$$\begin{aligned} &\|u\|_{W_2^1((t-h,t),A)} \leq d_1(t+1)^{\nu_+-1}e^{\varkappa_+ t}\|g\|_{W_2^1((-h,0),A)} \\ &+d_2\sqrt{t}\Big(\int_0^t (t-s+1)^{2(\nu_+-1)}e^{2\varkappa_+(t-s)}\|f(s)\|_H^2 ds\Big)^{1/2}, \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

where the constants d_1 and d_2 are independent of the functions g and f, $\varkappa_+ = \sup\Re\lambda_q$ and ν_+ is maximum of the multiplicities of such λ_q that $\Re\lambda_q = \varkappa_+$.

We note that the estimate (4) is sharp in the sense that it is impossible to substitute the constant $\varkappa_+$ by $\varkappa_+ - \varepsilon$ for an arbitrary positive $\varepsilon > 0$. The result on solubility for more general functional differential equations were obtained in [2], [3]. The localization of spectra of the symbol $L(\lambda)$ was researched in [1], [3].

References

[1] D. A. Medvedev, Russian Math. Serveys, 2007, V. 62, No. 1, P. 201–202.

[2] V. V. Vlasov, Proc. Steclov Inst. Math., 1999, V. 227, P. 104–115

[3] V. V. Vlasov, Matem. Sbornik, 1995, V. 186, No. 8, P. 67–92.

Research supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 05-01-00989) and by Leading Scientific Schools 5247.2006.1.

Критические показатели некоторых эволюционных полулинейных дифференциальных неравенств высокого порядка.

Володин. Ю. В. (г. Москва)

Пусть k, m и N — произвольные натуральные числа, $q > 1$, $\alpha > 0$, $R > 0$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$ — открытый шар с границей $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = R\}$, B'_R — дополнение шара B_R до $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим задачу об отсутствии нетривиальных решений дифференциального неравенства

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + (-1)^m \Delta^m u \geqslant \alpha |u|^q \tag{1}$$

с условиями на границе ∂B_R вида

$$\int_{\partial B_R} (-1)^i \Delta^i u \, ds = a_i(t), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

а также с начальными условиями

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = u_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \; u_{k-1}(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Решением начально-краевой задачи (1)–(3) называется функция $u(x,t)$ класса $C^{2m,k}(B'_R \times \mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая заданным условиям (2), (3) и неравенству (1) при всех $x \in B'_R$, $t > 0$.

Будем предполагать функции $a_i(t)$, $i = 0, \ldots, m-1$, знакопостоянными. Выделим граничные условия (2), которым соответствуют разные критические показатели. Пусть $m \geqslant 2$ и фиксировано натуральное число $1 \leqslant n \leqslant m+1$. И пусть выполнены следующие условия:

$$1) \; (-1)^n a_{m-n}(t) \leqslant 0 \text{ и}$$
$$2) \; (-1)^{m-i} a_i(t) > 0 \text{ при } i = m-n+1, \ldots, m-1$$

(условие не накладывается, если соответствующий диапазон или индекс i противоречив).

Теорема. Пусть $N \geq 3$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Краевая задача (1)–(3) при $N > 2(m - n - m/n + 1)$ не имеет нетривиальных решений при $1 < q \leq q_n^*$, где

$$q_n^* = \frac{N + 2(m/k + n - 1)}{N + 2(m/k + n - m - 1)}.$$

Если же выполнено условие $3 \le N \le 2(m - n - m/k + 1)$, то задача не имеет нетривиальных решений при всех $q > 1$.

Отметим, что если $n = m + 1$, то тогда для любого $q > 1$ можно привести примеры задач, которые имеют решения, отличные от тождественного нуля.

Доказательства базируются на методе пробных функций, разработанном Э. Митидиери и С.И. Похожаевым (см. [1]).

Литература

[1] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. М.: Наука, 2001. — (Труды МИАН, Т. 234).

Условия центра для одного класса полиномиальных систем

Volokitin E. P. (г. Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН)

Рассматривается полиномиальная совершенно изохронная система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xQ(x,y)\textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i(x^2+y^2)^i, \\ \dot{y} &= x + yQ(x,y)\textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i(x^2+y^2)^i, \end{aligned}$$

где $Q(x,y)$ — однородный многочлен степени k от переменных x, y.

Система имеет единственную точку покоя (0, 0), которая является центром по линейному приближению.

Теорема. Если

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos\vartheta, \sin\vartheta)d\vartheta = 0,$$

то начало координат есть центр рассматриваемой системы. Граница области центра в случае общего положения состоит из одной или двух неограниченных траекторий.

Теорема обобщает полученные ранее условия центра для квазиоднородных полиномиальных совершенно изохронных систем (см. [1]).

С использованием доказанной теоремы построен пример полиномиальной совершенно изохронной системы с центром, не являющейся реверсивной и не коммутирующей ни с какой полиномиальной системой. Вопрос о существовании такой системы был поставлен в [2, 3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00302).

Литература

[1] Conti, R. *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in R^2// Differential Equations, Dynamical Systems and Control Science (K. D. Elworthy et al., eds). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Vol. 152. Marcel Dekker, New York. 1994. P. 21–31.*

[2] Algaba, A., Reyes, M. *Centers with degenerate infinity and their commutators// J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 78. No. 1. P. 109–124.*

[3] Algaba, A., Reyes, M., Bravo, A. *Geometry of the uniformly isochronous centers with polynomial commutators// Differential Equations Dynam. Systems. 2002. V. 10. No. 3-4. P. 257–275.*

О преобразованиях Харди и Беллмана рядов по мультпликативным системам

Волосивец С.С. (Саратовский государственный университет)

Пусть $2 \leq p_n \leq N$ для $n \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/m_k$, $x_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_k < p_k$, а каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ представимо в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k_j < p_j$. Тогда по определению $\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j)$. Система $\{\chi_k\}_0^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$ (см [1,§ 1.5]). Если $\hat{f}(n)$ - коэффициенты Фурье функции $f \in L[0,1)$ по системе $\{\chi_k\}_0^{\infty}$, то $\mathfrak{C}'f = g$, где $\hat{g}(n) = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\hat{g}(0) = 0$; $\mathfrak{B}f = h$, где $\hat{h}(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \hat{f}(k)/k$, $n \in \mathbb{N}$, $\hat{h}(0) = 0$. Известно (см. [2] в случае $p_n \equiv 2$), что $\mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{B}$ ограничены в $L_p[0,1)$ при $1 \leq p < \infty$ и $1 < p \leq \infty$ соответственно.

Пусть E – симметричное пространство функций на $[0,1)$ [3, гл.2, § 4], $\sigma_\tau f(t) = f(t/\tau)X_{[0,1)}(t/\tau)$, где X_A – индикатор множества A, $\varphi_E(t) = \|X_{[0,t)}\|_E$. Далее требуем выполнения двух условий для E:

1) $\|\sigma_\tau\|_{E \to E} \leq C(E) \sup\{\varphi_E(\tau t)/\varphi_E(t) : 0 < t < \min(1, 1/\tau)\}$;

2) $1 < \underline{\lim}_{t \to 0} \varphi_E(2t)/\varphi_E(t) \leq \overline{\lim}_{t \to 0} \varphi_E(2t)/\varphi_E(t) < 2$.

Теорема 1. Пусть $f \in L[0,1)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n}^{\infty} |\hat{f}(k) - \hat{f}(k+1)| \leq C\hat{f}(n)$. Тогда условия $f \in E$ и $\mathfrak{B}f \in E$ равносильны.

Теорема 2. Пусть $f \in L[0,1)$ и $\hat{f}(k) \downarrow$. Тогда условия $f \in E$ и $\mathfrak{C}'f \in E$ равносильны.

Литература

[1] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша*, Наука, Москва, 1987.

[2] Eisner T. "The dyadic Cesaro operators". *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **64**:1-2 (1998), 99-111.

[3] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*, Наука, Москва, 1978.

Второй член асимптотики преобразования монодромии

Воронин А. С., Медведева Н. Б. (г. Челябинск)

Исследован второй член асимптотики преобразования монодромии монодромной особой точки векторного поля на плоскости, принадлежащего классу векторных полей, имеющих диаграмму Ньютона, состоящую из двух четных ребер. В рассматриваемом классе главный член преобразования монодромии тождественен и поэтому невозможно сформулировать достаточное условие фокуса и построить границу устойчивости в этом классе с помощью главного члена. Полученная формула позволяет построить границу устойчивости и сформулировать достаточное условие фокуса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант НЦНИЛ_а 05-01-02801.

Супер линейная алгебра и обобщение теории Гельфанда–Колмогорова–Бухштабера–Риса

Воронов Ф. Ф. (г. Манчестер)

Гельфанд и Колмогоров [1] в 1939 г. показали, что любое компактное хаусдорфово пространство X канонически вкладывается в бесконечномерное векторное пространство $C(X)^*$, двойственное к алгебре непрерывных функций $C(X)$, в качестве "алгебраического многообразия", задаваемого бесконечным набором квадратичных уравнений вида $\mathbf{f}(a^2) = \mathbf{f}(a)^2$. (Здесь $\mathbf{f} \in C(X)^*$ и $a \in C(X)$.)

Недавно Бухштабер и Рис распространили этот результат на все симметрические степени $\mathrm{Sym}^n(X)$, на основе своего понятия "фробениусовских n-гомоморфизмов". См. работу [2] и ссылки в ней.

Мы даем упрощение и дальнейшее обобщение этой теории, используя идеи супер линейной алгебры. Доклад основан на совместной работе с О. М. Худавердяном [4].

Пространству X сопоставляется функториальный объект $\mathrm{Sym}^{p|q} X$, где $p, q \geq 0$, а коммутативной алгебры с единицей A — соответствующая алгебра $S^{p|q} A$. Мы называем их "обобщенными симметрическими степенями". Имеется каноническое отображение из $\mathrm{Sym}^{p|q} X$ в $C(X)^*$. Для описания его образа мы вводим определенные алгебраические уравнения, обобщая тем самым утверждения Гельфанда- -Колмогорова и Бухштабера–Риса.

Результаты о линейных операторах на суперпространствах [3] мотивируют определение "характеристической функции" $R(\mathbf{f}, a, z) = e^{\mathbf{f}\ln(1+az)}$, где $\mathbf{f}\colon A \to B$ — линейное отображение коммутативных алгебр с единицей, $a \in A$ и z — формальный параметр. Алгебраические свойства отображения $\mathbf{f}$ проявляются в свойствах $R(\mathbf{f}, a, z)$ как функции z. Если $\mathbf{f}$ гомоморфизм алгебр, то $R(\mathbf{f}, a, z) = 1 + \mathbf{f}(a)z$ есть линейный двучлен. Теория Бухштабера–Риса отвечает полиномиальной характеристической функции, а наше обобщение — произвольной рациональной. Предложенные методы дают, в частности, простое прямое доказательство основной теоремы Бухштабера–Риса.

Литература

[1] И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах. *Докл. Акад. Наук СССР*, 22: 11–15, 1939.

[2] В. М. Бухштабер и Э. Г. Рис. Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и фробениусовы алгебры. *Успехи Матем. Наук*, 59 (1(355)):125–144, 2004.

[3] H. M. Khudaverdian and Th. Th. Voronov. Berezinians, exterior powers and recurrent sequences. *Lett. Math. Phys.*, 74(2):201–228, 2005.

[4] H. M. Khudaverdian and Th. Th. Voronov. On generalized symmetric powers and a generalization of Kolmogorov-Gelfand-Buchstaber-Rees theory. `arXiv:math.RA/0612072`.

Условия существования классического решения задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка

Voroshilov A. A. (Белорусский государственный университет, Минск)

Исследуется решение $u(x,t)$ задачи Коши

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \lambda^2 \Delta_x u(x,t) \quad (x \in \mathbf{R}^m,\ t > 0;\ n-1 \leq \alpha 0), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0+) = f_k(x) \quad (k = 0, \ldots, n-1;\ x \in \mathbf{R}^m) \tag{2}$$

для дифференциального уравнения с частной дробной производной Капуто $\left({}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)$ (см. [1, §2.4.1]). Решение задачи получено в [2] в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} {}^{c}G^{\alpha}_{1}(x-\tau,t) f_0(\tau) d\tau \quad (0 < \alpha \leq 1), \tag{3}$$

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left[{}^{c}G^{\alpha}_{1}(x-\tau,t) f_0(\tau) + {}^{c}G^{\alpha}_{2}(x-\tau,t) f_1(\tau)\right] d\tau \quad (1 < \alpha < 2), \tag{4}$$

${}^cG_1^\alpha$, ${}^cG_2^\alpha$ выражаются в терминах H-функции по формулам [2, (38),(41)].

Функцию $u(x,t)$, в соответствии с [3], будем называть классическим решением задачи Коши (1)-(2), если она дважды непрерывно дифференцируема по x при каждом $t > 0$; при каждом $x \in \mathbf{R}^m$ $u(x,t)$ непрерывна по t и имеет непрерывную частную производную порядка α по t.

Теорема (a) Пусть функция $f_0(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}^m$,

$$|f_0(x)| \le C\exp(h|x|^\mu) \quad \left(C, h > 0,\ \mu < \frac{2}{2-\alpha}\right), \tag{5}$$

и, если $m > 1$, локально гельдерова. Тогда функция (3) является классическим решением задачи (1)-(2) с $0 < \alpha \le 1$. (b) Пусть функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ непрерывны на $\mathbf{R}^m$, удовлетворяют оценке (5) и локально гельдеровы, если $m > 1$. Тогда функция (4) является классическим решением задачи (1)-(2) с $1 < \alpha < 2$.

Литература

[1] Podlulny I. *Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering. — San Diego, 1999. — 198 p.*

[2] Ворошилов А.А., Килбас А.А. *Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т.42, No.5. — С. 599-609.*

[3] Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26. No. 4. — С. 660-670.*

Осциляционные свойства собственных функций оператора Штурма-Лиувилля

Вячеславов А. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, мехмат)

Рассматривается задача на собственные значения оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + iq(x)y = \lambda y, \qquad y(-\pi/2) = y(\pi/2) = 0,$$

где $q(x) \in C[-\pi/2, \pi/2]$ - нечетная вещественная монотонная функция. Собственные значения данной задачи имеют асимптотику

$$\lambda_k = k^2(1 + O(1/k^2)), \qquad k \in N,$$

причем все достаточно большие по модулю собственные значения вещественны. Занумеруем числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ в порядке возрастания модулей.

Каждую собственую функцию y_k данной задачи, соответвующую вещественному собственному значению, можно представить в виде $y_k = \varphi_k + i\psi_k$, где функции ψ_k и φ_k вещественные и одна из них четная, а другая нечетная.

Доказана справедливость следующей теоремы, устанавливающей осциляционные свойства вещественных и мнимых частей собственных функций данной задачи, аналогичные известным осциляционным свойствам собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с вещественным потенциалом (см. [2], [3]).

Обозначим:

$$\Delta^1_{k,n}(\varepsilon) = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2k} - \frac{\varepsilon}{k}, \frac{\pi + 2\pi n}{2k} + \frac{\varepsilon}{k}\right), \quad \Delta^2_{k,n}(\varepsilon) = \left(\frac{\pi n}{k} - \frac{\varepsilon}{k}, \frac{\pi n}{k} + \frac{\varepsilon}{k}\right),$$

$$\Delta_k(\varepsilon,\sigma) = \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{k^{1-\sigma}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{k^{1-\sigma}}\right).$$

Теорема. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\sigma \in (0,1)$ существует k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$ k-я собственная функция задачи y_k имеет представление $y_k = \varphi_k + i\psi_k$, где функции ψ_{2k} и φ_{2k+1} четные, а функции ψ_{2k+1} и φ_{2k} нечетные, обладающие следующими свойствами:

1) φ_k имеет ровно $(k-1)$ нулей на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, причем для нечетных k нули расположены в интервалах $\Delta^1_{k,n}(\varepsilon/k)$, а для четных k в интервалах $\Delta^2_{k,n}(\varepsilon/k)$.

2) на интервале $\Delta_k(\varepsilon,\sigma)$ нули функции ψ_k находятся в интервалах $\Delta^2_{k,n}(\varepsilon)$ для нечетных значений k, и в интервалах $\Delta^1_{k,n}(\varepsilon)$ для четных значений k, причем внутри каждого интервала находится ровно один нуль функции ψ_k.

Работа выполнена под руководством проф. А.А.Шкаликова, поддержана грантом РФФИ №07-01-00283, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1.

Литература

[1] Наймарк М. А. *Линейный дифференциальные операторы.* - М.: Наука, 1969.

[2] Гантмахер Ф. Р. Крейн М. Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* - М.-Л.: ГТТИ, 1950.

[3] Коддингтон Э. А. Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: ИИЛ, 1958.

Формулы для вычисления матриц Стокса линейной системы в виде ряда от ее коэффициентов

Vyugin I. V. (Москва)

Мы строим формулы для матриц Стокса $C_1, \ldots, C_l$ системы линейных дифференциальных уравнений,

$$z\frac{dy}{dz} = (B_0 + B_1 z + \ldots + B_q z^q)\, y, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}$$

в особой точке $z = \infty$. При $q = 1$ и матрице B_q, имеющей различные собственные значения, даны формулы в виде сходящихся степенных рядов от элементов матриц коэффициентов системы. Эти ряды можно рассматривать как некоторое обобщение рядов И.А. Лаппо-Данилевского (выражающих матрицы мондромии) для матриц Стокса. При более высоких рангах Пуанкаре $q > 1$ строится индуктивная процедура, позволяющая перейти к аналогичной задаче, но с меньшим q. С помощью этого метода можно получить и некоторые свойства отображения Стокса

$$(B_0, \ldots, B_q) \to (C_1, \ldots, C_l),$$

отображающего коэффициенты системы в ее матрицы Стокса.

Адиабатические пределы для некоторых многообразий со слоением.

Яковлев А. А. (г. Уфа)

Пусть (M, F) — компактное многообразие со слоением, g — риманова метрика на M. Касательное расслоение TM к многообразию M представимо в виде прямой суммы $TM = TF \bigoplus H$, где TF— касательное расслоение к слоению F и $H = TF^{\perp}$ — ортогональное дополнение к TF. Таким образом, метрику g можно записать в виде $g = g_{TF} + g_H$, где g_{TF} — ограничение метрики g на TF и g_H — ограничение метрики g на H.

Определим однопараметрическое семейство $\{g_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ римановых метрик на M по формуле

$$g_\varepsilon = g_{TF} + \varepsilon^{-2} g_H.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами Δ_ε, ассоциированный с метрикой g_ε. Оператор Δ_ε является самосопряженным, эллиптическим дифференциальным оператором с положительно определенным, скалярным главным символом в гильбертовом пространстве $L^2(M, g_\varepsilon)$ квадратично интегрируемых функций на M, наделенном скалярным произведением, индуцированным метрикой g_ε. Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора Δ_ε состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \ldots, \lambda_j(\varepsilon) \to +\infty \text{ при } j \to \infty.$$

Функция распределения спектра $N_\varepsilon(\lambda)$ оператора Δ_ε задается формулой:

$$N_\varepsilon(\lambda) = \#\{j : \lambda_j(\varepsilon) < \lambda\}.$$

В данной работе рассматривается два примера многообразий со слоением:

1. M — риманово многообразие Гейзенберга, слоение F задается орбитами левоинвариантного векторного поля на M.
2. M — риманово Sol-многообразие, слоение F задается орбитами левоинвариантного векторного поля на M.

В обоих случаях получены асимптотические формулы для функции $N_\varepsilon(\lambda)$ в адиабатическом пределе, то есть, при фиксированном λ и при $\varepsilon \to 0$.

Система уравнений движения горного ледника

H. Fuzhita Yashima (Univ. Turina, Italiya)

Считаем, что альпийский ледник в своём медленном движении поступает, как неньютоновская жидкость, которая движется. Если движение стационарное, оно удовлетворяет системе уравнений

$$(1) \qquad \varrho \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(|E(v)|^{p-2} e_{ij}(v) \big) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = -\varrho g \delta_{i3}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$(2) \qquad \nabla \cdot v = 0,$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость, ϱ — плотность, P — давление, g — ускорение по тяжести, ν — коэффициент вязкости, а

$$e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Big), \qquad |E(v)| = \Big(\sum_{i,j=1}^{3} |e_{ij}(v)|^2 \Big)^{1/2}.$$

Что касается числа p, экспериментальные результаты показывают, что $p \approx 1 + \frac{1}{3}$.

Будем рассматривать уравнения (2.1)–(2.2) в области Ω, которая является открытым ограниченным регулярным подмножеством $\mathbf{R}^3$. На границе рассмотрим условие

$$v = \alpha \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{3}$$

где α — заданная на $\partial\Omega$ векторная функция, такая что

$$\int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n dS = 0, \tag{4}$$

где n обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к $\partial\Omega$.

Для этой проблемы получим следующий результат. Пусть выполнены (4) и условие $\frac{6}{5} < p < \infty$. Если существует векторное поле a такое, что $\nabla \cdot a = 0$ в Ω, $a = \alpha$ на $\partial\Omega$, а $\|a\|_{W^1_\infty(\Omega)}$ достаточно мала, то существует слабое решение $v \in W^1_p(\Omega)$ задачи (1), (2), (3).

On sensitive sets in topological dynamics

Ye Xiangdong

In this talk notions of sensitive sets (S-sets) and regionally proximal sets (Q-sets) are introduced. It is shown that a transitive system is sensitive if and only if there is an S-set with $Card(S) \geq 2$, and for a transitive system each S-set is a Q-set. Moreover, the converse holds when (X, T) is minimal. It turns out that each transitive (X, T) has a maximal almost equicontinuous factor.

According to the cardinalities of the S-sets, transitive systems are divided into several classes. Characterizations and examples are given for this classification both in minimal and transitive non-minimal settings. It is proved that for a transitive system any entropy set is an S-set, and consequently, a transitive system which has no uncountable S-sets has zero topological entropy. Moreover, it is shown that a transitive, non-minimal system with dense set of minimal points has an infinite S-set, and there exists a Devaney chaotic system which has no uncountable S-set. Finally, a non-minimal sensitive E-system is constructed such that each its S-set has cardinality at most 4.

Биффуркации особых точек параметрических векторных полей

Yumagulov M. G. (Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета)

Рассматривается уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \tag{1}$$

где $B(\mu)$ – линейный вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и непрерывно зависящий от векторного параметра $\mu \in R^k$, а нелинейный оператор $b(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению $\|b(x, \mu)\| = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$.

Изучается вопрос о локальных бифуркациях в окрестности решения $x = 0$ уравнения (1) при значениях параметра μ, близких к некоторому критическому значению μ_0. Предполагается, что число 1 является полупростым собственным значением оператора $B(\mu_0)$ кратности k.

Получен новый достаточный признак бифуркации по направлению собственных векторов линеазированного поля, а также разработана итерационная схема приближенного исследования бифуркации. Рассмотрены приложения в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа, в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел, в динамических системах с медленно меняющимися параметрами.

Near Extinction of Solution under Strong Absorption on a Fine-Grained Set

Yurinsky V. V. (Covilhã, Portugal)

Consider a boundary problem describing diffusion or heat transfer in an absorbing medium with fine-grained microstructure characterized by a small spatial scale $\varepsilon > 0$: for $x \in G$ and $t > 0$

$$\partial_t \left(|u_\varepsilon|^{\gamma-2} u_\varepsilon\right) = \operatorname{div}\left(A|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\right) - S_\varepsilon^\sigma |u_\varepsilon|^{\sigma-2} u_\varepsilon, \tag{1}$$

where the initial and boundary conditions are $u_\varepsilon|_{t=0} = u_0 \in L^{\gamma+k}(G)$ with constant $k \geq 0$, and $u_\varepsilon|_{\partial G} = 0$. The bounded domain $G \Subset \mathbb{R}^d$ is limited by a regular boundary, and the diffusion matrix A is positive definite. The nonlinearities in (1) have variable exponents [1,2]; these are Hölder continuous and separated by positive gaps:

$$1 \leq \sigma(x) + 3\delta_0 \leq \gamma(x),\ \gamma(x) + 3\delta_0 \leq p(x) \leq p_+ < d,\ \delta_0 > 0. \tag{2}$$

Both the variable exponents and the coefficient $S_\varepsilon = S_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}x\right) \geq 0$ do not depend on time. The existence of u_ε is assumed as a prerequisite.

The parameter ε characterizes dispersiveness of the sets $B_{\varepsilon,\beta} = \{S_\varepsilon \geq \beta\}$, $\beta > 0$, where absorption is strong, and $F_\varepsilon = \{S_\varepsilon = 0\}$, where there is no absorption.

If the set F_ε is massive, there is no *bona fide* finite-time extinction of the solution (see [1,3]). Yet, the behavior of the solution may imitate extinction in finite time if the set B_ε is also massive and fine-grained (e.g., ε-periodic) and k in the initial condition large enough.

Condition (2) can be used to construct for the $L^{\gamma+k}$-norm of the solution a majorant that decays at a rate characteristic of finite time of extinction after the norm passes below a threshold value. This majorant becomes inapplicable when it sinks below another threshold value. Later, it can be substituted by another majorant that decays, typically, as a negative power of time. The characteristic time-scale at this last stage is small, but the rate of decay no longer implies extinction of the solution in finite time. The method used to construct majorants is an adaptation of the energy method [3] to variable exponents of nonlinearity.

Acknowledgement. This work was supported by FCT (Portugal) through Centro de Matemática UBI in the framework of Program POCI 2010 co-financed by Portuguese Government and EU (FEDER).

References

[1] Antontsev S., Shmarev S. Parabolic equations with anisotropic nonstandard growth conditions. In: *International Series of Numerical Mathematics*, vol.154. Birkhäuser, Basel, 2006. 33-44.

[2] Kováčik O., Rákosnik Ž., Rákosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 41 (116), 592-618.

[3] Antontsev S. N., Diaz J.I., Shmarev S. *Energy Methods for Free Boundary Problems (Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics).* Birkhäuser, Boston, 2002.

Обратная задача для дифференциальных пучков на дереве

Yurko V. A. (Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского)

Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R}^m$ с корнем v_0, множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Пусть $\Gamma := \{v_0, \dots, v_p\}$ – множество граничных вершин. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1,r}}$, $x \in [0,1]$, где функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j. Пусть $q(x) = [q_j(x)]_{j=\overline{1,r}}$ и $p(x) = [p_j(x)]_{j=\overline{1,r}}$ – комплекснозначные функции на T такие, что $q_j(x) \in L[0,1], p_j(x) \in AC[0,1]$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$y_j''(x) + (\rho^2 + i\rho p_j(x) + q_j(x))y_j(x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где ρ – спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют так называемым стандартным условиям склейки в каждой внутренней вершине (непрерывность и условие Кирхгофа). Пусть $\Psi_k(x,\rho) = [\psi_{kj}(x,\rho)]_{j=\overline{1,r}}$, $k = \overline{1,p}$ – решения уравнения (1) при граничных условиях $\Psi_{k\,|v_j} = \delta_{kj}$, $j = \overline{0,p}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Обозначим $M_k(\rho) := \Psi'_{k\,|v_j}$, $k = \overline{1,p}$. Вектор $M(\rho) = [M_k(\rho)]_{k=\overline{1,p}}$ называется вектором Вейля для (1). Исследуется обратная задача восстановления $q(x)$ и $p(x)$ на T по вектору Вейля M.

Теорема. *Задание вектора Вейля M однозначно определяет коэффициенты $q(x)$ и $p(x)$ на T.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений, изложенного в [1]-[2], и дает также конструктивную процедуру решения обратной задачи. Получено также решение обратной задачи восстановления $q(x)$ и $p(x)$ по системе $p+1$ спектров и по дискретным спектральным данным.

Литература

1. Yurko V.A., Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. - М.: Физматлит, 2007.

Математическое ожидание решения двумерного уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами

Задорожний В.Г., Боровикова М.М. (Воронежский госуниверситет)

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \varepsilon_1(t)u_{xx} + \varepsilon_2(t)u_{yy} + \varepsilon_3(t)u + f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u(t_0) = g(x,y), \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, u- искомая функция,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f, g$ - случайные функции, заданные характеристическим функционалом [1]

$$\psi(v_1, v_2, v_3, w) =$$

$$M(\exp(i \int_T [\varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s) + \varepsilon_3(s)v_3(s)]ds +$$

$$i \int_T \int_{R^2} f(s, \tau_1, \tau_2) w(s, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ds)).$$

Пусть $F[f(x,y)](\xi, \eta)$ - преобразование Фурье функции f по переменнvм x, y, $F^{-1}[\varphi(\xi, \eta)](x, y)$ - обратное преобразование Фурье, $*$ - знак свертки по переменным $x, y, \chi(t_0, t, s) = 1$при $s \in [t_0, t]$ и $\chi(t_0, t, s) = 0$ при $s \notin [t_0, t]$, $\frac{\delta f(x)}{\delta x(t)}$ - вариационная производная [1].

Теорема 1. Обобщенное математическое ожидание $M(u(t, x, y))$ решения задачи (1),(2) выражается формулой

$$M(u(t,x,y)) = M(g(x,y)) * F^{-1}[\psi(i\xi^2\chi(t_0,t,\cdot), i\eta^2\chi(t_0,t,\cdot), -i\chi(t_0,t,\cdot), 0)](x,y) -$$

$$-i \int_{t_0}^{t} F^{-1}[F[\frac{\delta\psi(i\xi^2\chi(\tau,t,\cdot), i\eta^2\chi(\tau,t,\cdot), -i\chi(\tau,t,\cdot), 0)}{\delta w(\tau,x,y)}](\xi,\eta)](x,y)d\tau.$$

Пусть $\varphi(v_1, v_2, v_3)$ - характеристический функционал процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Теорема 2. Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g$, то

$$M(u(t,x,y)) = M(g(x,y)) * F^{-1}[\varphi(i\xi^2\chi(t_0,t,\cdot), i\eta^2\chi(t_0,t,\cdot), -i\chi(t_0,t,\cdot))](x,y) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F^{-1}[\varphi(i\xi^2\chi(\tau,t,\cdot), i\eta^2\chi(\tau,t,\cdot), -i\chi(\tau,t,\cdot))](x,y) * M(f(\tau,x,y))d\tau$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Литература

[1] Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа // В.Г.Задорожний, М.- Ижевск: НИЦ РХД, 2006.- 316 с.

Спектральная краевая задача для ОДУ, возникающего в теории гравитационных МГД-волн

Задорожный А.И. (Южный федеральный университет)

Изучение в линейной постановке свободных колебаний слоя тяжелой однородной несжимаемой идеальной жидкости бесконечной электрической проводимости при наложении стационарного вертикального магнитного поля сводится в безразмерных переменных с учетом представления $v_z(t, x, z) = exp[i(\omega t + x)]$ к следующей неклассической краевой задаче с собственным числом в граничном условии

$$A\left[W^{IV}(z) - W''(z)\right] + \lambda\left[W''(z) - W(z)\right] = 0, z \in]-d, 0[;$$

$$W(-d) = 0, W''(-d) - W'(-d) = 0,$$

$$W''(0) + W'(0) = 0, A\,[W'''(0) - W'(0)] + \lambda W'(0) - W(0) = 0.$$

Здесь $A > 0$ - число Альфвена, d- глубина жидкости, ограниченной снизу твердым дном, а сверху свободной поверхностью, $\lambda = \omega^2$- искомый спектральный параметр, ω - частота колебаний. Приведенному выше линейному операторному пучку сопоставляется функционал Рэлея

$$\lambda = \frac{|W(0)|^2 + A\{|W'(-d)|^2 + |W'(0)|^2 + \int_{-d}^{0}\left[|W''(z)|^2 + |W'(z)|^2\right]dz\}}{\int_{-d}^{0}\left[|W'(z)|^2 + |W(z)|^2\right]dz}.$$

Доказано, что соответствующий случаю $A = 0$ одноточечный спектр $\omega^2 = \operatorname{th} d$, отвечающий монотонно возрастающей по переменной z поверхностной моде, переходит в дискретный счетный спектр $0 < 2A/(2+d^2) < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n < \ldots$ с единственной бесконечной предельной точкой. При каждом фиксированном A существует такое d_A, что при $d < d_A$ наименьшее СЧ λ_1 определяет поверхностную моду. В случае $d > d_A$ все моды теряют монотонный характер, форма колебаний с наибольшей амплитудой на свободной поверхности принимает вид так называемой нехарактерной внутренней волны. В предельном переходе к задаче Ламба ($d \to +\infty$) спектр становится сплошным.

Modal control for linear systems with incomplete feedback

Zaitsev V.A. (Izhevsk)

Consider a linear stationary control system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x, u, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k. \tag{1}$$

Let the control in the system (1) be constructed as linear incomplete feedback $u = Uy$. Corresponding closed-loop system is

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

System (2) has *modal control* if for any given polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbf{R}$ there exists a constant $m \times k$-matrix control U such that the characteristic polynomial $\chi(A + BUC^*; \lambda)$ of the matrix $A + BUC^*$ coincides with $p(\lambda)$.

Suppose that the coefficients of the system satisfy the following conditions: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $a_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$; $a_{ij} = 0$, $j > i+1$, $i = \overline{1, n-2}$; the first $(p-1)$ rows of the matrix B and the last $(n-p)$ rows of the matrix C are equal to zero for some $p \in \{\overline{1, n}\}$. Suppose $\chi(A; \lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Let us construct the matrix $S_1 = \{s_{ij}^1\}_{i,j=1}^n$ from the matrix A : $s_{11}^1 := 1$; $s_{1j}^1 := 0$, $j = \overline{2, n}$; $s_{ij}^1 := a_{i-1,j}$, $i = \overline{2, n}$, $j = \overline{1, n}$. Then we construct the matrix $S_l = \{s_{ij}^l\}_{i,j=1}^n$ from the matrix $S_{l-1} = \{s_{ij}^{l-1}\}_{i,j=1}^n$ for every $l = \overline{2, n}$ in the following way: $s_{11}^l := 1$, $s_{1j}^l := 0$, $s_{j1} := 0$, $j = \overline{2, n}$; $s_{ij}^l := s_{i-1,j-1}^{l-1}$, $i, j = \overline{2, n}$. Let $S = S_n \cdot S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1$. All the matrices S_l and S are nonsingular lower triangular. Suppose $J_1 = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $g_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$; $g_{ij} = 0$, $j \neq i+1$; $J_k := J_1^k$; $J_0 := I$. Let us construct $G := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} J_{i-1}^*$; $\alpha_0 := 1$.

Theorem 1. Suppose $\chi(A + BUC^*; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$; then $\gamma_i = \alpha_i - \operatorname{Tr} SBUC^*S^{-1}J_{i-1}G$.

Theorem 2. System (2) has modal control if and only if the matrices

$$C^*S^{-1}J_0GSB,\ C^*S^{-1}J_1GSB,\ \ldots,\ C^*S^{-1}J_{n-1}GSB \qquad (3)$$

are linearly independent. In that case the feedback matrix U which reduces $\chi(A+BUC^*;\lambda)$ to the given polynomial $p(\lambda)$ with the coefficients γ_i is found from the system of linear equations: $\operatorname{Tr} C^*S^{-1}J_{i-1}GSBU = \alpha_i - \gamma_i$, $i=\overline{1,n}$.

Corollary 1. If the matrices (3) are linearly independent, then the system (2) is stabilizable by the constant matrix control U.

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant №06-01-00258).

Нестационарные аналоги формул Грина и Гаусса для решений гиперболических систем

Закирьянова Г. К., Алексеева Л. А. (Институт математики Министерства образования и науки Республики Казахстан)

Изучение динамических процессов в сплошных средах, связанных с распространением и дифракцией волн, приводит к краевым задачам для систем уравнений гиперболического типа в областях со сложной геометрией границы. Конструктивным методом решения таких задач является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ), который позволяет исходную дифференциальную краевую задачу в области свести к решению систем интегральных уравнений на ее границе, что понижает размерность решаемой задачи и повышает устойчивость расчетных схем при построении решений. В настоящее время этот метод широко используется для решения стационарных задач математической физики. Решение нестационарных динамических задач на основе метода ГИУ требует введения понятия обобщенного решения, что связано с особенностью фундаментальных решений гиперболических уравнений, которые принадлежат классу обобщенных функций.

В работе излагается метод ГИУ для построения решений начально-краевых задач для систем гиперболических уравнений в пространствах размерности N, характерных для задач математической физики. Метод базируется на построении в пространстве обобщенных функций нестационарных аналогов формул Грина и Гаусса для решений систем гиперболических уравнений. Для построения этих формул используется матрица Грина системы и ее первообразная по времени. На их основе получены регулярные интегральные представления решений и разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения. Рассматриваются вопросы построения условий на волновых фронтах.Доказаны теоремы единственности решений поставленных начально-краевых задач, в том числе в случае наличия ударных волн.

В качестве примера рассмотрены нестационарные краевые задачи теории упругости.

Краевая задача для дифференциально-разностного эллиптико-параболического уравнения

Зарубин А.Н. (Орловский государственный университет)

Уравнение

$$H(y)U_y(x,y) + H(-y)U_{yy}(x,y) - \text{sgn}yU_{xx}(x,y) + U(x-\tau, y - H(y)h) = 0, \qquad (1)$$

где $0 < \tau, h \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; рассматривается в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, $D^+ = \{(x,y) : |x|0\}$,$D^- = \{(x,y) : |x| < +\infty, -h < y < 0\}$, $J = \{(x,y) : |x| < +\infty, y = 0\}$.

Задача Q. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (1) в области D из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D \setminus J)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$U(x,-h) = f(x), \ |x| < +\infty; \ \lim_{x\to\pm\infty} U(x,y) = 0, \ -h \le y \le 0,$$

условиям сопряжения

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to 0+} U(x,y) = \lim\limits_{y\to 0-} U(x,y) = \omega(x), & |x| < +\infty, \\ \lim\limits_{y\to 0+} U_y(x,y) = \lim\limits_{y\to 0-} U_y(x,y) = \nu(x), & |x| < +\infty, \end{cases}$$

где заданная функция $f(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ и $f(\pm\infty) = 0$.

Единственность решения задачи Q следует из того, что однородная задача Q при $\tau \le \sqrt{2}$ имеет в области $\overline{D}$ тривиальное решение.

Вопрос существования решения задачи Q сводится к разрешимости сингулярного интегрального уравнения первого рода.

Оценки скорости сходимости к предельному режиму для некоторых нестационарных линейных систем

Зейфман А.И. (Вологодский государственный педагогический университет и ВНКЦ ЦЭМИ РАН), Чегодаев А.В., Шилова Г.Н. (Вологодский государственный педагогический университет)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, описывающая неоднородную марковскую цепь с поглощением в нуле и пространством состояний $S_N = \{0, \dots, N\}$. Матрица $A(t)$ такой системы имеет нулевой первый столбец, ее внедиагональные элементы $a_{ij}(t)$ неотрицательны при всех $t \ge 0$ и локально интегрируемы на $[0; \infty)$, а сумма элементов каждого столбца при всех t равна нулю. Рассматриваются три подхода к получению оценок скорости сходимости решений системы к вырожденному предельному режиму.

Первый подход описан в работе [1]. Пусть матрица $B(t)$ получается из $A(t)$ выбрасыванием первой строки и первого столбца. Результаты [1] гарантируют существование преобразования системы к специальному виду, допускающему точную оценку скорости сходимости в случае непрерывности и неразложимости при всех t матрицы $B(t)$. К сожалению, этот подход не дает возможности построения преобразования и реальной оценки скорости сходимости.

Второй подход основан на понятии достижимости нулевого состояния соответствующей поглощающей марковской цепи и использовании дифференциальных неравенств, см. [2]. Этот метод дает явно получаемые, но очень грубые оценки.

Наиболее эффективным представляется третий подход, описанный в других ситуациях в работе [3]. Он основан на понятии логарифмической нормы и специальных преобразованиях матрицы системы, и возможность его применения впервые упомянута в заметке [4]. Именно, рассматривая систему $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}$, удается получить двустороннюю оценку вида $C_1 e^{-\int_0^t \xi(\tau)\,d\tau} \le \mathbf{z}(t) \le C_2 e^{-\int_0^t \beta(\tau)\,d\tau}$, причем в случае постоянной невырожденной матрицы B существуют преобразования, дающие, соответственно, точные по порядку верхнюю и нижнюю оценки.

В качестве примера рассматривается система, в стационарном случае описывающая простую стохастическую модель эпидемии, см. [5,6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-01-00111.

Литература

[1] Зейфман А. И. *Математические заметки, 2004, т.75 , №2, 303-306.*

[2] Zeifman A. I. *Journal of Applied Probability 1989, v. 26, 643 - 648.*

[3] Zeifman A. I. *Stoch. Proc. Appl. 1995. V. 59. P. 157-173.*

[4] Гнеденко Б. В., Макаров И. П.*Дифференциальные уравнения, 1971, 7, 1696–1698.*

[5] Nesell I. *Math. Biosci., 156, 21–40, 1999.*

[6] Sirl D., Zhangy H., Pollett P. Computable Bounds for the Decay Parameter of a Birth-Death Process. 2006. Preprint

Интегрируемые гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли

Жибер А. В., Муртазина Р. Д. (г. Уфа)

Известно, что симметрийный подход (см. [1]) для решения проблемы классификации интегрируемых нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y) \tag{1}$$

наталкивается на серьезные трудности.

В предлагаемой работе для решения классификационной задачи используется метод, связанный с характеристической алгеброй Ли (см. [2],[3]).

$X(Y)$ – характеристическая алгебра Ли уравнения (1) есть алгебра $A(\overline{A})$, порожденная векторными полями

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_k} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}$$

$$(Y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{D}^{k-1}(f)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_k} + u_1\frac{\partial}{\partial u},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1}),$$

где $u_1 = u_x, \overline{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \overline{u}_2 = u_{yy}, \dots$ и $D(\overline{D})$ – оператор полного дифференцирования по $x(y)$.

Уравнение (1) является уравнением лиувиллевского типа тогда и только тогда, когда x и y – характеристические алгебры конечномерны. А именно, если уравнение (1) имеет нетривиальный x-интеграл порядка n

$$\omega = \omega(u, u_1, \dots, u_n)(\overline{D}\omega = 0),$$

то размерность алгебры A равна $n+1$.

Пусть L_2 – линейная оболочка векторных полей X_1 и X_2, L_3 порождается элементом $[X_1, X_2]$, L_4 – линейная оболочка векторных полей $[X_1,[X_1,X_2]], [X_2,[X_1,X_2]]$ и т.д.

Тогда характеристическая алгебра Ли A представима в виде $A = \bigcup_{i=2}^{\infty} L_i$. Аналогично $\overline{A} = \bigcup_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i$.

Показано, что ограничение на порядок роста размерности пространств L_n и $\overline{L}_m$, а именно не более чем на единицу, по крайней мере на первых шагах, полностью определяет правую часть уравнения (1). При этом полученный список уравнений совпадает с известным списком уравнений, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния.

Определены характеристические алгебры A и $\overline{A}$ размерностью не более трех.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 05-01-00775-а, № 06-01- 92051-КЭ-а.

Литература

[1] Жибер А. В., Шабат А. Б. Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$ обладающие симметриями. *Доклады АН СССР, 1984, Т. 277, N 1, С. 29–33.*

[2] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. *Теоретическая и математическая физика. 1982, Т. 51, № 1, С. 10–21.*

[3] Жибер А. В., Муртазина Р. Д. О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$. *Фундаментальная и прикладная математика. 2006, Т. 12, № 7, С. 65–78.*

О существовании и единственности слабого решения для системы Власова-Пуассона

Жидков П. Е. (г. Дубна)

Рассматривается система Власова-Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v f \cdot E(x,t) = 0,\ f = f(t,x,v),\ (t,x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

$$E(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \nabla U(x-y) f(t,y,v) dy\, dv,\ U(x) = \kappa |x|^{-1},$$

$$f(0,x,v) = f_0(x,v),$$

где $\kappa = \pm 1$-постоянная. Из физических соображений потребуем еще:

$$f \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t,x,v) dx\, dv \equiv 1.$$

Пусть I-интервал, содержащий 0, и $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L_\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условию из предыдущей строки. Назовем функцию $f(t,x,v)$, принадлежащую $C(I; L_p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ при каждом $1 \leq p < \infty$, ограниченную в $L_\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ равномерно по t из любого ограниченного интервала, удовлетворяющую предыдущему условию и равную f_0 при $t = 0$ п. в., слабым решением задачи, если для любой $\eta = \eta(t,x,v)$, непрерывно дифференцируемой и имеющей компактный носитель в $I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx\, dv [\eta(t,x,v) f(t,x,v) - \eta(0,x,v) f_0(x,v)] -$$

$$- \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx\, dv f(s,x,v) \times$$

$$\times\{\eta_s(s,x,v) + v\cdot\nabla_x\eta(s,x,v) + \nabla_v\eta(s,x,v)\cdot E(x,s)\} = 0.$$

Будет представлен следующий результат (доказательство см. в [1]).

Теорема Для любой f_0, удовлетворяющей предыдущим условиям, указанная задача имеет единственное слабое решение, определенное для всех (t,x,v), такое, что его (x,v)-носитель ограничен равномерно по t из любого ограниченного интервала. Энергия системы не зависит от времени.

Литература

[1] P. Zhidkov. *On global solutions for the Vlasov-Poisson system*, Electron. J. Diff. Eqns. 2004, Vol. **2004**, No 58, 1-11; http://ejde.math.swt.edu

About elliptic equations with non-standard growth condition. On stationary thermo-rheological viscous flows

Жиков В. В.

1. Задача Дирихле, связанная с $p(x)$-Лапласианом. Пространства Соболева-Орлича, эффект Лаврентьева и проблема предельного перехода в последовательности уравнений.

2. О разрешимости стационарной задачи о термисторе и парной системы Буссинеск из гидромеханики неньютоновой жидкости (quasi-Newtonian flow with viscous heating).

Алгоритмическая проверка топологической сопряженности псевдоаносовских гомеоморфизмов

Жиров А. Ю. (Монино)

В докладе будет рассказано о том, как с помощью конечного алгоритма можно проверить являются ли два псевдоаносовских гомеоморфизма топологически сопряженными. Гомеоморфизм поверхности может быть задан автоморфизмом фундаментальной группы поверхности, удовлетворяющим условиям теоремы Дена–Нильсена. Задает ли такой автоморфизм гомеоморфизм поверхности, изотопный псевдоаносовскому, можно проверить с помощью известного алгоритм Бествины–Хендэла. Этот же алгоритм позволяет построить так называемое железнодорожное представление псевдоаносовского гомеоморфизма. Отправляясь от него мы строим марковское разбиение, обладающее некоторыми специальными свойствами, которые дают возможность удобного комбинаторного описания самого разбиения и действия гомеоморфизма на его элементы. Это описание сводится к конечному набору данных, называемому кодом псевдоаносовского гомеоморфизма. Зная два кода, с помощью техники, ранее развитой автором для решения задачи о топологической сопряженности гиперболических аттракторов диффеоморфизмов поверхностей, можно за конечное число шагов выяснить сопряжены ли соответствующие псевдоаносовские гомеоморфизмы или нет. Таким образом, задача, сформулированная в названии доклада, сводится к тому, чтобы по железнодорожному представлению вычислить код псевдоаносовского гомеоморфизма. Ответ на вопрос о том как это можно сделать и составляет основное содержание доклада.

Рекуррентные свойства и их функции

Жукова А. А. (Воронежский государственный университет)

Теорема 1. *Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to M$ есть компактная равномерно непрерывна функция. Тогда из любой последовательности сдвигов $f(t+h'_i)$ можно выбрать такую подпоследовательность $f(t+h_i)$, что*

$$f(t+h_i) \Rightarrow g(t) \text{ локально.} \tag{1}$$

Функция $g(t)$ называется присоединенной к функции $f(t)$ и обозначается $g(t) = \hat{f}(t)$. Ясно, что она также является равномерно непрерывной и ограниченной.

Теорема 2. *Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to M$- рекуррентная функция. Пусть $\varphi(x) : K \to N$-непрерывное отображение. Тогда суперпозиция $g(t) : \mathbb{R} \to N$, где $g(t) = \varphi[f(t)]$, есть также рекуррентная функция.*

Рекуррентные функции $f(t) : R \to M$ и $g(t) : R \to N$ называются совместно рекуррентными, если рекуррентной является составная функция $h(t) : R \to M \times N$, где $h(t) = f(t), g(t) \in M \times N$.

Теорема 3. *Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to M$ и $g(t) : \mathbb{R} \to N$ совместно рекуррентные. Пусть $\hat{f}(t) : \mathbb{R} \to M$ произвольная присоединенная к $f(t)$, а $\hat{g}(t) : \mathbb{R} \to N$ произвольная присоединенная к $g(t)$. Тогда рекуррентные функции $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$ также совместно рекуррентны.*

Теорема 4. *Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$- некоторая рекуррентная функция и $\hat{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-произвольная присоединенная к ней функция. Тогда либо*

$$f(t) \equiv \hat{f}(t), -\infty < t < +\infty, \tag{2}$$

либо

$$\text{разность } f(t) - \hat{f}(t) \tag{3}$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 5. *Преобразование Фурье-Стильтьеса функции ограниченной вариации является рекуррентной функцией в том и только том случае, если эта функция ограниченной вариации совпадает со своей функцией скачков. При выполнении этого условия преобразование Фурье-Стильтьеса является почти периодической функцией с абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Литература

[1] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.*/ Б.П. Демидович.- Москва, Наука, 1967. - 472 с.

[2] Математическая энциклопедия, т.4.-Москва, изд-во "Советская энциклопедия", 1984. - 1216 с.

Диссипативность программного многообразия управляемых систем

Жуматов С. С. (Институт математики Министерства образования и науки РК)

Задача построения устойчивых систем автоматического управления $\dot{x} = f(t,x) - B\xi$, $\xi = \varphi(\sigma)$, $\sigma = P^T\omega$ по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$ сводится к исследованию устойчивости, оптимальности, диссипативности и др. свойств системы [1]:

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \ \xi = \varphi(\sigma), \ \sigma = P^T\omega, \tag{1}$$

где $x \in R^n$-вектор состояния объекта, $\omega \in R^s$ $s \leq n$-вектор, $\xi \in R^r$-вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям локальной квадратичной связи.

Определение 1. Множество G, содержащее $\omega = 0$, для которого программное многообразие $\Omega(t)$ сохраняет свое свойство асимптотической устойчивости относительно вектор-функции ω, называется областью притяжения данного многообразия.

Определение 2. Система (1) называется диссипативной, если в R_ω существует ограниченная замкнутая область притяжения G.

Справедлива оценка

$$\nu_s^{-1} V_0 exp\{-\alpha_1(t-t_0)\} \leq r^2 \leq \nu_1^{-1} V_0 exp\{-\alpha_s(t-t_0)\} \;\forall\, t > t_0. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Пусть система (1) асимптотически устойчива, относительно вектор-функции ω, а нелинейная функция удовлетворяет локальным условиям квадратичной связи. Тогда областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ при выполнении условия $\alpha_1 > 0$, $\alpha_s > 0$ будет все фазовое пространство R_ω.*

Литература

[1] Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. *Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением.* Алматы, 1999. 228 с.

Асимптотическая симметризация гамильтоновых систем

Журавлёв В.Ф. , Петров А.Г. (Москва ИПМех РАН)

Нормальная форма гамильтоновой системы в окрестности положения равновесия обладает, как известно, двумя основными свойствами: а) тейлоровское разложение нормальной формы имеет наипростейший вид, состоящий только из так называемых резонансных членов; б) нелинейная часть системы в целом и каждый её член в отдельности коммутирует с линейной частью.

Первое свойство служит определением нормальной формы и используется в процедуре приведения к ней. Второе свойство облегчает построение асимптотических решений, анализ устойчивости и т.п., тем самым, представляя собой основную цель приведения.

Между тем, достижение этой цели возможно и непосредственно, без привлечения тейлоровских разложений. Форма гамильтониана, удовлетворяющая только свойству б) инвариантна по отношению к виду линейной, или, более общо, невозмущенной части. Коммутирующие в этой форме части гамильтониана индуцируют фазовые потоки, являющиеся взаимными симметриями.

Гамильтониан можно асимптотически симметризовать при весьма общих условиях на невозмущенную часть. Алгоритм симметризации (или инвариантной нормализации) сводится к последовательному вычислению однотипных квадратур и существенно проще всех существующих процедур нормализации. Предложены две разновидности алгоритма симметризации. В первой искомые канонические замены формируются производящим гамильтонианом, во второй они представляются в параметрическом виде.

Приводится ряд примеров, в которых находится симметризованная форма гамильтониана: плоская ограниченная задача трех тел при резонансе; задача о качающейся пружине; сферический маятник с вибрирующей по трем координатам точкой подвеса, волчок Лагранжа и другие примеры.

Литература

1. Журавлёв В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем//ПММ. Т.66. Вып.3. 2002.С.356-365.

2. Петров А.Г. Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем//ПММ. Т.68. Вып.6. 2004. С.402-413.

3. Брюно А.Д. О вычислении гамильтоновой нормальной формы//ДАН. 2006. Т. 410, N4. С. 474-478.

О динамике диффеоморфизмов Морса-Смейла

Жужома Е. В. (г. Нижний Новгород)

Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла замкнутого n-мерного многообразия M^n ($n \geq 3$). Обозначим через $A_0(f)$ объединение стоковых периодических точек и одномерных неустойчивых многообразий седловых периодических точек (если такие седловые точки имеются). Следующие теоремы получены совместно с В.З. Гринесом и В.С. Медведевым.

Теорема 1. $A_0(f)$ является притягивающим множеством диффеоморфизма f.

Обозначим через $B_0(A)$ область притяжения множества $A_0(f)$. Тогда $R_0(f) = M^n - B_0(A)$ является отталкивающим множеством диффеоморфизма f. Пусть $B_0^0(f) = M^n \setminus (A_0(f) \cup R_0(f))$. Отождествляя каждую орбиту из $B_0^0(f)$ с точкой, получим пространство орбит $B_0^0(f)/_\sim$. Обозначим через p_f естественную проекцию $B_0^0(f) \to B_0^0(f)/_\sim$.

Теорема 2. $B_0^0(f)/_\sim$ является (хаусдорфовым) гладким замкнутым n-многообразием. Проекция p_f есть накрытие с группой накрывающих отображений, изоморфной $\mathbf{Z}$. Если M^n ориентируемое и f сохраняет ориентацию, то $B_0^0(f)/_\sim$ является ориентируемым многообразием, которое либо неприводимо, либо гомеоморфно $S^1 \times S^{n-1}$.

Автор благодарит РФФИ (грант 05-01-00501) за финансовую поддержку.

Об одной задаче усреднения параболического неравенства

Зубова М. Н., Шапошникова Т. А. (г. Москва)

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из двух гладких поверхностей Γ_1 и Γ_2, причем $\Omega \subset \{x_1 > 0\} \cap \mathbb{R}^3$, $\Gamma_1 \subset \{x_1 = 0\}$. Обозначим $G_\varepsilon^0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 < a_\varepsilon^2\}$, $\hat{G}_\varepsilon = \cup_{z \in \mathbb{Z}'}(G_\varepsilon^0 + 2\varepsilon z) = \cup_{j=1}^{\infty} G_\varepsilon^j$, где $\mathbb{Z}'$ – множество векторов вида $z = (0, z_2, z_3)$ с целочисленными координатами z_2 и z_3. Положим $G_\varepsilon = \cup_{j=1}^{N(\varepsilon)} G_\varepsilon^j$, $N(\varepsilon) = d\varepsilon^{-2}$, $d > 0$ и $G_\varepsilon^j \subset \Gamma_1^\varepsilon = \{x \in \Gamma_1 : \varrho(x, \partial\Gamma_1) \geq 2\varepsilon\}$. Пусть

$$K_\varepsilon = \{v \in H_1(\Omega, \Gamma_2) : v \geq 0 \text{ п. в. на } G_\varepsilon\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{g \in L_2(0, T; H_1(\Omega, \Gamma_2)) : g(t) \in K_\varepsilon \text{ для п. в. } t \in [0, T]\}.$$

Пусть $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$, $\partial_t u_\varepsilon \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega, \Gamma_2))$, причем $u_\varepsilon(x, 0) = 0$ п. в. в Ω и имеет место неравенство

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle \, dt + \int_{Q_T} (\nabla u_\varepsilon, \nabla(v - u_\varepsilon)) \, dx \, dt \geq \int_{Q_T} f(v - u_\varepsilon) \, dx \, dt$$

для произвольного элемента $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$, $f \in L_2(Q_T)$ и $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Через $< u, v >$ обозначаем действие элемента $u \in H^{-1}(\Omega, \Gamma_2)$ на элементе $v \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$.

Пусть $u \in L_2(0,T; H_1(\Omega, \Gamma_2))$, $\partial_t u \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega, \Gamma_2))$ – является обобщенным решением нелинейной краевой задачи $\partial_t u = \Delta u + f$ в Q_T, $u(x,0) = 0$, $u = 0$ на $\Gamma_2 \times (0,T)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu^- = 0$ на $\Gamma_1 \times (0,T)$, $c = const$. Здесь $u^- = \inf\{0, u\}$.

Теорема. Предположим, что li

Неклассическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Якубов В.Я. (МГИЭМ)

Известно, что если коэффициент $g(x)$ в уравнении

$$y'' + (1 - g(x))y = 0 \tag{1}$$

удовлетворяет условиям:

а) $g(x) \in C([a, +\infty))$ $(a > 0)$ и б) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(t)|dt$ сходится, то у уравнения (1) существует фундаментальная система решений, допускающая при $x \to +\infty$ представление

$$y_1(x) = \sin x + O\Big(\int\limits_x^{+\infty} |g(t)|dt\Big),\ y_2(x) = \cos x + O\Big(\int\limits_x^{+\infty} |g(t)|dt\Big) \tag{2}$$

Из (2) следует, что условия а) и б) обеспечивают ограниченность всех решений уравнения (1) и, следовательно, его устойчивость.

В 1929 году П.Фату опубликовал доказательство устойчивости уравнения (1) при выполнении условия в) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ вместо б). Однако в 1930 году О.Перрон показал, что при выполнении только условия в) у уравнения (1) существует неограниченное решение, чем опроверг утверждение П.Фату.

Нами рассмотрено уравнение

$$\begin{aligned} y'' + \Bigg[1 &+ m\frac{\cos^\alpha x \sin^\beta x\Big((\alpha+3)\sin^2 x - (\beta+1)\cos^2 x\Big)}{x^\gamma} \\ &+ m\frac{\gamma\cos^{\alpha+1} x \sin^{\beta+1} x}{x^{\gamma+1}} - \left(m\frac{\cos^{\alpha+1} x\sin^{\beta+1} x}{x^\gamma}\right)^2\Bigg] y = 0, \qquad x > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

и доказаны следующие теоремы

Теорема 1. Пусть числа α, β, γ таковы, что 1) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta+1} t dt = 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq \gamma > 0$ или 2) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta+1} t dt = c \neq 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq \gamma > 1$. Тогда все решения уравнения (3) ограничены.

Теорема 2. Пусть числа α, β, γ и m таковы, что $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta+1} t dt = c \neq 0$, $mc > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq \gamma = 1$. Тогда при $x_n = n\pi$, $n \to +\infty$ у уравнения (3) есть решение $y(x)$ такое, что $y(x_n) \sim (-1)^n x_n^{\frac{cm}{2\pi}}$.

Теорема 3. Пусть числа α, β, γ и m таковы, что $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta+1} t dt = c \neq 0$, $mc > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq \gamma$, $0 < \gamma < 1$. Тогда при $x_n = n\pi$, $n \to +\infty$ у уравнения (3) есть решение $y(x)$ такое, что

$$y(x_n) \sim (-1)^n e^{\frac{cm}{2\pi(1-\gamma)} x_n^{1-\gamma}}$$

Таким образом, доказано, что у уравнения

$$y'' + (1 + \frac{\varphi(x)}{x^{\gamma}})y = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(x) \in C([a, +\infty])$ и ограничена, а $\gamma > 0$ есть решения, которые в зависимости от свойств функции $\varphi(x)$ могут быть ограниченными или иметь степенной и даже экспоненциальный рост.

Асимптотические оценки типа Лиувилля-Грина для решений скалярных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Конечная Н. Н. (г. Архангельск)

В работе [1] М.В. Федорюк исследовал асимптотику решений системы дифференциальных уравнений $Y' = F(x)Y$, где $F(x) = q(x)Q(x)B(x)Q^{-1}(x)$, при $x \to +\infty$. В работах [2,3] представлен класс матриц, позволяющий получить более точные асимптотические формулы для решений данной системы. Как следствие, получены асимптотические оценки типа Лиувилля-Грина для решений скалярных дифференциальных уравнений высокого порядка и рассмотрены некоторые примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00192-а).

Литература

1. Федорюк М.В. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов. // ДАН СССР. 1966. Т. 169. Вып. 2. С. 288-291.

2. Mirzoev K.A., Eastham M.S.P. A Liouville-Green estimate for a class of differential systems. // Russian Journal of mathematical physics, Vol. 12, N 4, 2005, p. 439.

3. Konechnaya N. N., Mirzoev K. A. On a class of operators related to second-order differential equations // Russian Journal of Mathematical Physics.— 2006.— V. 13, №1.— P. 55–63.

Поведение вблизи оси слабых осесимметричных решений системы Навье-Стокса.

Михайлов А.С. (г. Санкт-Петербург)

Рассматривается уравнение для угловой компоненты вектора скорости осесимметричного решения трехмерной системы Навье-Стокса. Из-за условия осевой симметрии, уравнение для этой компоненты не будет содержать давления. Поэтому оно может быть классифицировано как параболическое уравнение с нерегулярными младшими коэффициентами, которые имеют особенность на оси симметрии. Изучается поведение решения линейного параболического уравнения такого типа вблизи оси, после чего полученный результат применяется к осесимметричным решениям системы Навье-Стокса.

Flat Submanifolds without Torsion in Pseudo-Euclidean Spaces, Associativity Equations in 2D Topological Quantum Field Theories, and Frobenius Manifolds.

Mokhov O. I. (Moscow)

We prove that the associativity equations of two-dimensional topological quantum field theories are very natural reductions of the fundamental nonlinear equations of the theory of submanifolds in pseudo-Euclidean spaces (namely, the Gauss equations, the Peterson–Codazzi–Mainardi equations and the Ricci equations) and determine a natural class of *potential* flat submanifolds without torsion. We show that all potential flat torsionless submanifolds in pseudo-Euclidean spaces possess natural structures of Frobenius algebras on their tangent spaces. These Frobenius structures are generated by the corresponding flat first fundamental form and the set of the second fundamental forms of the submanifolds (in fact, the structural constants are given by the set of the Weingarten operators of the submanifolds). We prove that each N-dimensional Frobenius manifold can locally be represented as a potential flat torsionless submanifold in a $2N$-dimensional pseudo-Euclidean space. By our construction this submanifold is uniquely determined up to motions. Moreover, we consider a nonlinear system, which is a natural generalization of the associativity equations, namely, the system describing the class of all flat torsionless submanifolds in pseudo-Euclidean spaces, and prove that this system is integrable by the inverse scattering method.

References

[1] Mokhov O. I. *"Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type with flat metrics, integrable hierarchies, and the associativity equations". Funkts. Analiz i Ego Prilozh., Vol. 40, No. 1, pp. 14–29, 2006; English translation in Functional Analysis and its Applications, Vol. 40, No. 1, pp. 11–23, 2006; http://arXiv.org/math.DG/0406292 (2004).*

[2] Mokhov O. I. *"Theory of Submanifolds, Associativity Equations in 2D Topological Quantum Field Theories, and Frobenius Manifolds". Proceedings of the Workshop "Nonlinear Physics. Theory and Experiment. IV", Gallipoli (Lecce), Italy, 22 June – 1 July, 2006; Preprint MPIM2006-152. Max-Planck-Institut für Mathematik. Bonn, Germany. 2006; http://arXiv.org/math.DG/0610933 (2006) (will be published in "Theoretical and Mathematical Physics", 2007).*

Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes equations: well-posedness and sensitivity analysis

Plotnikov P. I. (Lavryentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Division of Russian Academy of Sciences)

Inhomogeneous boundary value problems for compressible, stationary Navier-Stokes equations are considered. In particular, the well-posedness for inhomogeneous boundary value problems of elliptic-hyperbolic type is shown. Analysis is performed for small perturbations of the approximate solutions, which are determined from Stokes problem. The existence and uniqueness of solutions close to approximate solution are proved, and in addition, the differentiability of solutions with respect to the coefficients of differential operators is shown. The results on the well-posedness of nonlinear problem are interesting on its own, and are used to obtain the shape differentiability of the drag functional for incompressible Navier-Stokes equations. The shape gradient of the drag functional is derived in the classical and useful for computations form, an appropriate adjoint state is introduced to this end. The shape derivatives of solutions to the Navier-Stokes equations are given by smooth functions, however the shape differentiability is shown in a weak norm. The method of analysis proposed in the paper is general, and can be used to establish the well-posedness for distributed and boundary control problems as well as for inverse problems in the case of the state equations in the form of compressible Navier-Stokes equations. The differentiability of solutions to the Navier-Stokes equations with respect to the data leads to the first order necessary conditions for a broad class of optimization problems.

The talk is based on the joint work with J. Sokolowski.

Canards on the torus existence and uniqueness

Schurov I.V.(Moscow State University)

Let us consider slow-fast system on the two-torus:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0). \tag{1}$$

The solution of this system is called a "duck" (or a "canard") if it spends finite (bounded away from 0) time near unstable part of the slow curve $M = \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$. We will study attracting canard cycles, which are not observed in generic slow-fast systems in the plane.

Ilyashenko and Guckenheimer in the work [1] constructed an example of a slow-fast system on the two-torus which have a unique attracting canard cycle for arbitrary small values of parameter ε. More precisely, there exists a sequence of intervals accumulating to 0, such that for any ε belonging to these intervals the system has exactly two limit cycles, both being canards, one stable and the other unstable. They proposed a conjecture that unlike planar systems, there exists an open set in the space of slow-fast systems on the two-torus which satisfies this property. In our work we prove this conjecture. Actually, we will show that every generic slow-fast system on the two-torus with convex slow curve satisfies this property.

This work was partially supported by RFBR Grant №7-01-00017p and joint RFBR/CNRS Grant № 05-01-02801-НЦНИЛ_a.

Bibliography

[1] J. Guckenheimer, Yu. S. Ilyashenko, *The Duck and the Devil: Canards on the Staircase*, Moscow Math. J., Volume 1, Number 1, 2001, pp. 27–47.

W-метод для решения вариационных задач: устойчивость стойки под нагрузкой

Цалюк В. З. (Кубанский гос. университет)

В докладе кратко описывается примене W-метода к вариационным задачам с квадратичным функционалом, в которых искомой является функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Суть метода: с помощью оператора Грина подходящим образом выбранной краевой задачи для уравнения в обыкновенных производных вариационная задача переводится в экстремальную задачу в пространстве $\mathbf{L}_2(a, b)$ или в некотором его подпространстве.

Это позволяет получить необходимые и достаточные условия существования единственной точки минимума в терминах спектра линейного интегрального оператора в $\mathbf{L}_2$ с симметричным ядром.

К таким задачам о существовании единственного минимума в вариационной задаче приводит применение вариационного принципа Лагранжа к задаче об устойчивости вертикальной стойки под продольной нагрузкой.

Использование символьных компьютерных вычислений над (кусочно-) многочленными функциями с рациональными коэффициентами позволяет вычислить критическую силу нагрузки, гарантируя, в принципе, любую наперед заданную точность результата.

При этом стержень может иметь переменные (возможно, разрывные) характеристики поперечного сечения, в том числе приводящие к трехмерной деформации стержня. Возможно произвольное количество дополнительных опор.

В докладе приводятся примеры расчетов критической силы.

Работа была поддержана РФФИ, гранты №04-01-96016, №06-01-00744 и №07-01-96060.

Симметричные течения Навье-Стокса-Пуассона баротропной сжимаемой жидкости в вакууме

Злотник А. А. (г. Москва)

Рассматриваются симметричные самогравитирующие течения вязкой сжимаемой баротропной жидкости/газа вокруг жесткого ядра со свободной внешней границей в вакууме. Плотность вырождается на свободной границе. Такие течения (в случае сферической симметрии) представляют особый интерес в астрофизике. Берутся большие и, вообще говоря, разрывные (лебеговы) начальные данные и общая функции состояния (строго или нестрого возрастающая). Выводится достаточно богатый набор глобальных по времени оценок решений и изучается поведение решений (скорости, плотности, свободной границы) при неограниченном возрастании времени в лагранжевых массовых, а также в эйлеровых координатах. Устанавливаются и результаты о существовании/ несуществовании и о единственности соответствующих статических решений.

Случай, когда на свободной границе плотность положительна и присутствует внешнее давление, был недавно изучен в [1], [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 06-01-00187 и 07-01-00416.

Литература

[1] Ducomet B., Zlotnik A. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2005. V. 28. N 7. P. 827–863.
[2] Злотник А.А., Дюкомс Б. *Матем. сборник.* 2005. Т. 196. N 12. С. 33–84.

Author Index

Научное издание

Международная конференция, посвящённая памяти И. Г. Петровского

XXII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 21–26 мая 2007 г.

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета: Ширяев Е.А., Карулина Е.
Дизайн обложки: Плешанов Е.В.

Типография ордена «Знак Почета» издательства МГУ
119992, Москва, Ленинские горы
Заказ № 219 Тираж 600 экз.