MOSCOW
M.V. Lomonosov
STATE UNIVERSITY

RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES
V.A.Steklov
MATHEMATICAL INSTITUTE

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»,

dedicated to

IVAN G. PETROVSKII

(1901-1973)

XXI Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society

BOOK of ABSTRACTS

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Moscow, May 16 - 22

2004

http://www.math.msu.su/conference/petr2004

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвящённая 103–летию со дня рождения

И. Г. ПЕТРОВСКОГО

(1901 — 1973)

XXI совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 16–22 мая 2004

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва 2004

Международная конференция, посвящённая 103–летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 275 с.

Программный комитет

Арнольд В. И., Ильин А. М., Маслов В. П., Моисеев Е. И., Новиков С. П., Синай Я. Г., Трещев Д. В., Фаддеев Л. Д.
и руководители секций:
Миллионщиков В. М., Розов Н. Х. (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)
Кондратьев В. А., Похожаев С. И., Радкевич Е. В. (*Дифференциальные уравнения с частными производными*)
Аносов Д. В., Закалюкин В. М., Ильяшенко Ю. С. (*Динамические системы*)
Вишик М. И., Волович И. В., Куксин С. Б., Уральцева Н. Н., Фурсиков А. В. (*Математическая физика и механика*)
Бухштабер В. М., Васильев В. А., Козлов В. В. (*Геометрия, интегрируемые системы и солитоны*)
Сорокин В. Н., Шкаликов А. А. (*Теория операторов*)
Жиков В. В., Пятницкий А. Л., Шамаев А. С. (*Асимптотические методы и усреднение*)
Бахвалов Н. С., Кобельков Г. М. (*Численные методы*)

Организационный комитет

Садовничий В. А. (*председатель*), Чубариков В. Н. (*зам. председателя*), Шамаев А. С. (*зам. председателя*), Шкаликов А.А. (*зам. председателя*).

Секретариат конференции:

Чечкин Г. А. — ответственный секретарь, Боровских А. В., Быков В. В., Владимиров А. А., Дынников И. А., Капустина Т. О., Розанова О. С., Савчук А. М., Шейпак И. А.

ISBN

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»

dedicated to the 103–rd anniversary of

I. G. PETROVSKII

(1901 — 1973)

XXI joint session of Moscow Mathematical Society
and I. G. Petrovskii Seminar

Moscow, May 16–22, 2004

BOOK of ABSTRACTS

Moscow 2004

International Conference, dedicated to the 103–rd anniversary of I. G. Petrovskii (XXI joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar): Book of Abstracts. — Moscow: Moscow University Press, 2004. — 275 P.

Program Committee

Arnold V. I., Faddeev L. D., Il'in A. M., Maslov V. P., Moiseev E. I., Novikov S. P., Sinai Ya. G., Treshchev D. V.
and the organizers of the sections:
Millionshchikov V. M., Rozov N. Kh. (*Ordinary Differential Equations*)
Kondratiev V. A., Pokhozhaev S. I., Radkevich E. V. (*Partial Differential Equations*)
Anosov D. V., Ilyashenko Yu. S., Zakalyukin V. M. (*Dynamical Systems*)
Fursikov A. V., Kuksin S. B., Ural'tseva N. N., Vishik M. I., Volovich I. V. (*Mathematical Physics and Mechanics*)
Buhstaber V. M., Kozlov V. V., Vasiliev V. A. (*Geometry, Integrable Systems and Solitons*)
Shkalikov A. A., Sorokin V. N. (*Operator Theory*)
Pyatnitski A. L., Shamaev A. S., Zhikov V. V. (*Asymptotic Methods and Homogenization*)
Bakhvalov N. S., Kobel'kov G. M. (*Numerical Methods*)

Organizing Committee

Sadovnichii V. A. (*Chairman*), Chubarikov V. N. (*Vice–Chairman*), Shamaev A. S. (*Vice–Chairman*), Shkalikov A. A. (*Vice–Chairman*).

Secretariat:

Chechkin G. A. — Executive Secretary, Borovskikh A. V., Bykov V. V., Dynnikov I. A., Kapustina T. O., Rozanova O. S., Savchuk A. M., Sheipak I. A., Vladimirov A. A.

ISBN

PLENARY LECTURES

Free boundary problems with surface tension conditions

Avner Friedman (Ohio State University, Department of Mathematics, Columbus)

In this talk I shall consider free boundary problems with a surface tension condition at the free boundary. The simplest of these problems is the classical Hele-Shaw problem which describes viscous flow between two parallel plates with small spacing. I shall consider models which describe tumor growth and which are expressed by systems of PDEs. I shall also consider the Hele-Shaw problem constrained in a half-space.

Полиномиальные законы сохранения в классической и квантовой механике

В. В. Козлов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

В докладе обсуждается круг вопросов, связанных с условиями существования дополнительных законов сохранения, независимых от интеграла энергии. В классической механике первые интегралы уравнений Гамильтона предполагаются полиномиальными относительно импульсов, а в квантовой — полиномиальными относительно дифференцирований по координатам. Оказывается, степень таких неприводимых интегралов существенно зависит от топологии конфигурационного многообразия. Особое внимание уделено случаю, когда конфигурационное многообразие — многомерный тор. Основной результат состоит в следующем: если потенциал является тригонометрическим многочленом, то степень неприводимого интеграла не превосходит двух. Этот вывод справедлив и для квантовых систем (в данном случае интеграл — это полиномиальный оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона). В частности, если имеется нетривиальный полиномиальный интеграл, то можно ввести разделяющиеся переменные, и после этого система распадается в прямую сумму несвязанных подсистем. В докладе будут также сформулированы некоторые нерешённые задачи.

SECTIONAL TALKS

Нелокальные краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками

Абдрахманов А. М. (Уфимский Государственный авиационный технический университет, Уфа)

Работа выполнена совместно с А.И.Кожановым. Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости краевых задач с нелокальными условиями для уравнения

$$u_t + u_{xxx} = f(x,t)$$

и некоторых его обобщений. В частности, рассматриваются задачи с заданием нелокального по времени условия

$$u(x,0) = Bu + u_0(x)$$

с линейным оператором B, с заданием распределенного по времени значения решения

$$\int_0^T b(x,t)u(x,t)dt = u_0(x),$$

с заданием интегральных или иных нелокальных граничных условий.

Для всех указанных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Partial closed-form solutions of linear functional systems

Sergei A. Abramov (Computing Center of the RAS, Moscow, Russia), Manuel Bronstein (INRIA, Sophia Antipolis, France)

Consider linear functional systems of the form $\theta Y = BY$ where B is a known matrix of coefficients, Y an unknown vector of functions and θ an operator such as differentiation or (q-)difference. Depending on the operator and the coefficient domain, there are several known algorithms for constructing the solutions of such systems in various classes of functions, such as polynomial, rational, hyperexponential or Liouvillian functions.

But those algorithms only find solutions Y whose components are *all* in the specified class.

We address the following related problem: given a subset $\{Y_{e_1}, \dots, Y_{e_m}\}$ of the entries of Y and an appropriate (i.e., closed under the action of skew-polynomials in θ) class of functions, find all solutions Y whose speficied entries are in the given class (more precisely we are interested in computing those entries only). For example, given a differential system $Y' = BY$, find all the rational functions that are Y_1 and Y_2-coordinates of some solution Y.

We present an algorithm that produces either one of two possible results:

- a proof that if the specified entries are in the given class, then all the other entries must be in that class too. Or,
- a new system involving the specified entries only (and some of their "derivatives"), and whose solution space is exactly the projection on those entries of the solutions of the initial system.

Acknowledgements. This work was supported in part by the French-Russian Lyapunov Institute under grant 98-03.

Solution of Laplace's equation on subdomains of branching coverings and its application in the theory of conformal mappings

Abuzyarova N. F. (Royal Institue of Technology, Stockholm)

Let $\mathbf{S}$ be a compact Riemann surface. We start with obtaining of the following corollary of Stokes' theorem: *for any* exact *first order differential* $\omega = udz + vd\bar{z} \in L^2(\mathbf{S})$ *we have*

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \omega \wedge \overline{\omega} = 0. \tag{1}$$

Further, we consider a meromorphic function R on $\mathbf{S}$ with poles $p_1, \dots, p_k$, and a finitely connected subdomain $\Omega \subset \mathbf{S}$, which contains the set of poles $\{p_1, \dots, p_k\}$. By using the existence theorems for harmonic functions with prescribed singularities, we prove the following

Proposition. *There exists a function Q on $\mathbf{S}$ with the following properties: (Q1) Q equals zero on $\mathbf{S} \setminus \Omega$; (Q2) Q is harmonic on $\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$; (Q3) the function $P = R - Q$ belongs to the Sobolev space $W^{1,2}(\mathbf{S})$.*

Let $P = R - Q$. By applying the relation (1) to the differential $\omega = dP$, we get the following inequality:

$$\int_\Omega \frac{i}{2} \left|\partial_z P\right|^2 dz \wedge d\bar{z} \leq \int_\Omega \frac{i}{2} \left|\partial_{\bar{z}} P\right|^2 dz \wedge d\bar{z},$$

with the equality precisely when the complement $\mathbf{S} \setminus \Omega$ has zero area.

This inequality is a development of the classical area theorem for conformal mappings. In particular, we derive some exact integral estimates for the classes of conformal mappings S and Σ, which, in particular, imply well-known Goluzin's pointwise estimates for these classes.

This is the joint work with Prof. H. Hedenmalm.

Properties of 2D Navier-Stokes flow in infinite strip for spatially non-decaying initial data

Afendikov A., (MSU, Leninskie Gory, Moscow, Russia),
Alexander Mielke (Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart)

The aim of this work is to study dynamical properties of the 2D viscous fluid flow on infinite strip $O = S^1 \times R^1$, i.e. when the periodicity condition in one of the spatial directions is supposed. The fluid motion is generated by the action of a body force $F(t, x)$. The apriori estimate of the non stationary solutions is given in the $L^\infty(O)$ norm. For the time independent force $F(x)$ this estimate is polynomial in time. From the estimate follows the global in time existence of solutions of the Cauchy problem in the space of not decaying in infinity functions. This statement enables to investigate the stability of the recently found kink and front solutions of the Navier-Stokes system.

Спектральные задачи для некоторых уравнений математической физики

Агранович М. С. (Москва, МИЭМ)

В докладе будут затронуты следующие задачи. 1. Задачи в трехмерной ограниченной области для системы Дирака с кулоновским потенциалом. Спектральный параметр содержится в системе или в граничном условии. Это работа, совместная с Г.В. Розенблюмом, она вышла в выпуске 1 журнала «Алгебра и анализ», 2004. 2. Задачи для системы Максвелла со спектральным параметром в граничных условиях или условиях сопряжения. Для двух из этих задач оставалось не доказанным наличие двух точек накопления собственных значений; теперь это сделано. 3. Смешанные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром на части границы, а также задачи со спектральным параметром на незамкнутой поверхности.

Коэффициенты разложений в ряд по производным цепочкам для одного класса эллиптических задач

Ахтямов А. М. (Башкирский государственный университет, Уфа)

Рассматриваются эллиптические краевые задачи со спектральным параметром в краевых условиях. Ранее в работах А. А. Шкаликова и А. В. Шкреда для этого класса задач было доказано, что при определенных условиях производные цепочки собственных и присоединенных элементов полны и минимальны в специальном гильбертовом пространстве. Однако коэффициенты разложения элемента из этого гильбертова пространства в ряд по производным цепочкам Келдыша не были найдены. Изложение способа отыскания этих коэффициентов составляет основную цель выступления. Найденная формула вычисления коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша выписана в терминах коэффициентов дифференциального уравнения и краевых условий для широкого класса эллиптических задач. Автор приносит свою искреннюю благодарность профессору А. А. Шкаликову за постановку задачи, ценные идеи и полезные дискуссии по работе.

Соотношения между решениями уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и решениями системы уравнений одномерной газовой динамики

Аксенов А. В. (Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва)

Как известно еще со времен Б. Римана, система уравнений, описывающая одномерное неустановившееся движение идеального политропного газа, сводится в плоскости спидографа (за независимые переменные принимаются локальные скорость течения и скорость звука) к линейной системе уравнений. Условием совместности этой линейной системы уравнений является разрешимость уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \alpha \in R\,. \tag{1}$$

Уравнение (1) задает также класс уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу, определяемый параметром α.

Ранее автором [1] были получены линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (1). Используя эти соотношения, получено общее решение уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в специальных случаях и представлены различные формы выражения общего решения системы уравнений одномерной газовой динамики политропного газа через общее решение уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Получены также новые точные решения системы уравнений одномерной газовой динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00613 и 03-01-00446) и гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1481.2003.1).

Литература

[1] Аксенов А. В. *Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу* // Доклады АН. 2001. Т. 381. № 2. С. 176–179.

On the splitting formulas for high and low energy levels of the quantum double well and periodic problems

Albeverio S. and Semenov E. S. (Institute for Problems in Mechanics)

We compare the splitting formulas for high and the lowest energy levels for the one-dimension Schrödinger equation with the double well potential. We established that the splitting value for the lowest energy is proportional to the expression of the splitting of the high levels with the factor $\sqrt{e/\pi}$. Similar fact is established for the bands of the spectrum in the periodic case. We also discuss the splitting formulas for the lowest energy levels in Multidimensional case. This work was down together with Dobrokhotov S.Yu.

References

[1] S. Albeverio, S. Yu. Dobrokhotov, E. S. Semenov, *Splitting formulas for the higher and lower energy levels of the one-dimensional Schrödinger operator*, Theor. Math. Phys (2004) vol. 138, no. 1, pp. 98–106.

The work is supported by INTAS, Grant 00-257.

Уравнения взаимодействия электро-гравимагнитных полей и законы сохранения

Алексеева Л.А. (Институт математики МОН РК, Алма-Ата, Казахстан)

Как известно, система уравнений Максвелла для электромагнитного поля незамкнута. Она позволяет по известным электрической и магнитной напряженностям определять порождающие его электрические заряды и токи и обратно. Для ее замыкания в [1] , на основе гипотезы о магнитном заряде и токе, предложены уравнения ньютоновского типа для описания движения зарядов и токов с учетом их массы. Для построения этих уравнений использовалась гамильтонова форма уравнений Максвелла [2]. Комплексификация электромагнитного поля с введением в уравнения плотности массы названа там *A-полем*. Действительная составляющая комплексного вектора напряженности A соответствует напряженности электрического поля, а мнимая - гравимагнитного. Т.е A-поле является математической моделью электро-гравимагнитного поля. Его дивергенция в действительной части дает плотность электрических зарядов, в мнимой - плотность массы. В [3], с введением комплексных градиентов поля, построены уравнения A-поля в комплексных кватернионах, и показано, что последовательное взятие взаимных комплексных градиентов от кватерниона потенциала A-поля с лоренцевой калибровкой, определяет кватернионы, соответствующие его напряженности, зарядам и токам, а также дает законы сохранения заряда и волновое уравнение для A.

Здесь этот подход развит для построения уравнений взаимодействия электро-гравимагнитных полей, и на его основе построены аналоги всех трех известных в механике законов Ньютона для свободных, взаимодействующих полей и суммарного поля в кватернионах. Рассмотрены законы сохранения энергии и заряда при взаимодействии полей.

Литература

[1] Алексеева Л.А. *О замыкании уравнений Максвелла* // Журнал вычислительной математики и математической физики. -Т.43.- №5.- 2003.- С.759-766.

[2] Алексеева Л.А. *Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения*// Дифференциальные уравнения. -Т.39, - №6, -2003. С.769-776.

[3] Алексеева Л.А. *Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла*// Математический журнал.-Алма-Ата.-2003.-№4.- С.20-24.

Непрерывность по Гельдеру и поведение вблизи границы решений p(x)-гармонического уравнения

Алхутов Ю. А. (Владимирский государственный педагогический университет)

Изучаются свойства решений уравнения вида

$$div(|\nabla u|^{p(x)-2}\ \nabla u) = 0,$$

заданного в ограниченной области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, при различных предположениях относительно измеримого показателя суммируемости $p(x)$, отделенного от единицы и бесконечности. Внутренняя гельдеровость решений установлена в предположении, что область D разделена гиперплоскостью на две части, в каждой из которых $p(x)$ обладает логарифмическим модулем непрерывности. В этой части работы обсуждается и вопрос о плотности гладких функций в пространстве решений.

Для уравнений с показателем $p(x)$, обладающим логарифмическим модулем непрерывности во всей области D, получен критерий Винера регулярности граничной точки.

Краевые задачи для возмущенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

Андреев А. А. (Самарский государственный университет)

Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие инволютивный сдвиг, изучены недостаточно, хотя впервые обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением встречаются еще в работе Ч. Баббеджа, опубликованной в 1816 г., в которой получены явные формулы решений уравнений со сдвигом Карлемана.

В предлагаемой работе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \varepsilon\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\bigg|_{(\alpha(x,y),\beta(x,y))}, \qquad (1)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha(x,y) = -x$, $\beta(x,y) = y$.

При $\varepsilon \neq 0$ уравнение (1) не поддается известной классификации дифференциальных уравнений второго порядка, а при $\varepsilon = 0$ является уравнением Лаврентьева–Бицадзе.

Для уравнения (1) были найдены решения и доказана корректность аналога задачи Трикоми и некоторых нелокальных краевых задач как в бесконечной области, так и в конечных областях с заданием условий на прямых $y = 0$, $y \pm \sqrt{1+\varepsilon}x = c$, $y \pm \sqrt{1-\varepsilon}x = c$ и на кривых $(1 \pm \varepsilon)x^2 + y^2 = 1$.

On finite volume methods for the p-laplacian : a "continuous" approach

Boris Andreianov (Université de Franche-Comté, Besançon, France)

In this talk, we discuss the possibility of reduction of finite volume numerical schemes (which are naturally written as a "discrete" system of difference equations) to an appropriate continuous formulation which can be directly compared to the underlying differential equation. This reduction being performed, one can prove the convergence of finite volume schemes by simply reproducing the existence proof for the differential problem (whereas the usual approach consists in "discretizing" the arguments of this proof).

In [1], we propose such a technique in order to deal with the model parabolic-elliptic problem $b(v)_t = \mathrm{div}(|Dv|^{p-2}Dv) + f$ on $(0,T) \times \Omega$ with an initial condition and the homogeneous Dirichlet boundary condition. Here b is a non-decreasing function. We prove the convergence of discrete solutions to a solution of the original problem as the discretisation step tends to 0, under the main hypotheses that the approximation of the p-laplacian operator $\mathrm{div}(|Dv|^{p-2}Dv)$ provided by the finite volume scheme is still monotone and coercive, and that the gradient approximation is exact on the affine functions of $x \in \Omega$.

References

[1] B. Andreianov, M. Gutnic, P. Wittbold *Convergence of Finite Volume Approximations for a Nonlinear Elliptic-Parabolic Problem: a "Continuous" Approach*, http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2003/03036.shtml, to appear in SIAM J.Num.Anal

A generalized porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions

Antontsev S. N. (Universidade da Beira Interior, Portugal)
Shmarev S. I. (Universidad de Oviedo, Spain)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain with Lipschitz-continuous boundary and $Q_T = \Omega \times (0, T]$. We consider the problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}\left(a(x,t,u)|u|^{\gamma(x,t)}\nabla u\right) + F(x,t,u,\nabla u) \quad \text{in } Q_T, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T], \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

with the function F of the form

$$F = \mathbf{b}(x,t,u)|u|^{\gamma(x,t)/2}\nabla u - c(x,t,u)|u|^{\sigma(x,t)-2}u + d(x,t,u).$$

Here $a(x,t,r)$, $\mathbf{b}(x,t,r)$, $c(x,t,r)$, $d(x,t,r)$ are Caratheodory functions (measurable in (x,t) for all $r \in \mathbb{R}$ and continuous in r for a.a. $(x,t) \in Q$), σ, $\gamma \in C^{\alpha}(\overline{Q}_T)$ with some $\alpha \in (0,1)$. It is assumed that $\forall\,(x,t,r) \in \overline{\Omega} \times (0,T] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 0 < a_0 \le a(x,t,r) \le a_1 < \infty, \ |\mathbf{b}(x,t,r)| \le b_1 = const, \\ 0 \le c_0 \le c(x,t,u)| \le c_1 < \infty, \\ |d(x,t,u)| \le d_1|u| + f(x,t), \ f(x,t) \ge 0, \ d_1 = const \ge 0, \\ 1 < \sigma_* \le \sigma(t,x) < \sigma^* < \infty, \ -1 < \gamma_* \le \gamma(t,x) \le \gamma^* < \infty, \end{cases}$$

We prove existence and, under some additional assumptions, uniqueness of a weak solution to problem (1), and study the localization properties of solutions such as finite speed of propagation of disturbances from the data, the waiting time effect, extinction of solutions in finite time.

The study of the localization properties is based on the application of the method of local energy estimates [1]. For the special case $a \equiv 1$, $F \equiv 0$ the detailed proofs are given in [2].

References

[1] S. N. Antontsev, J. I. Díaz and S. I. Shmarev. *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to non-linear PDEs and fluid mechanics.* Birkhäuser, 2002.

[2] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev. *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions*, Pré-publicação N. 2, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2003.

A priori estimates for solutions of strongly nonlinear elliptic systems

Arkhipova A.A. (С-Петербургский государственный университет)

We consider nondiagonal quasilinear elliptic systems with quadratic nonlinearities in the gradient. It is known that a smallness of the oscillation of a weak solution in a neighborhood of a fixed point supplies further regularity of the solution in the vicinity of this point. We relax the assumption and derive an a priori estimate of the Holder norm of a solution provided that the BMO-seminorm (but not the oscillation) is small enough. For solutions of the Dirichlet problem, the same type boundary estimate is obtained.

The derivation of the estimates is based on the theorem about quasireverse Holder inequalities proved by the author.

Об однозначной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Асанова А.Т. (Институт математики МОН РК)

В сообщении рассматривается семейство двухточечных краевых задач для системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + f\left(t, x, \int\limits_0^x v(t,\xi)d\xi, \int\limits_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi\right), \quad t \in [0,T], \quad v \in R^n, \tag{1}$$

$$P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \varphi(x) - P_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(0,\xi)}{\partial t}d\xi -$$

$$-P_0(x)\int\limits_0^x v(0,\xi)d\xi - S_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(T,\xi)}{\partial t}d\xi - S_0(x)\int\limits_0^x v(T,\xi)d\xi, \tag{2}$$

где $x \in [0,\omega]$, $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$ непрерывны соответственно на $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$, $[0,\omega]$, n - вектор - функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$.

Семейство двухточечных краевых задач с параметром x для системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2) возникает при исследовании нелокальной краевых задач для систем гиперболических уравнений. При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (1), (2) является двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида. Исследованы вопросы существования единственного решения семейства двухточечных краевых задач (1), (2) и установлены коэффициентные достаточные условия ее однозначной разрешимости.

Two new approdachs for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic diferential equations

Allaberen Ashiralyev (Departament of Mathemtics, Fatih University, Istanbul, Turkey and International Turkmen-Turkish University, Ashgabot, Turkmenistan)

This is a joint work with Pavel E. Sobolevskii (Institute of mathematics, Hebrew University of Jerusalem).

We consider the abstrct Cauchy problem for differential equation of the hyperbolie type

$$V"(t) + AV(t) = f(t)(t \in [0,T]), \quad V(0) = V_0, \quad V'(0) = V_0'$$

in an arbitrary Hilbert space H with the self-adjont positively defined operator A. The high order of accuracy two-step difference schemes, generated by an exact diference scheme or by the Taylor's decomposition on the three points for the numerical solutions of this problem, are presented The stability estimates for the solutions of these difference schemes are established. In applications the stability estimates for solutions of the high order of accuracy difference schemes of the mixed type boundary value problems for hyperbolic equations are obtained.

Uniform Estimates for Solutions to Quasilinear Differential Equations

Astashova I. V. (Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics)

Consider the differential equation

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} + p(x)\, y|y|^{k-1} = 0 \qquad (1)$$

with $k > 1$ and continuous functions $p(x) > 0$ and $a_i(x)$. Uniform estimates are given for solutions to (1) having the same domain. In particular the following theorem is proved.

Theorem. If n is even, then for any $\epsilon > 0$ there exists a constant $A > 0$ such that all positive solutions to (1) defined on the interval $(-1, 1)$ satisfy on $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ the inequality

$$\left|y^{(i)}(x)\right| < A, \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Note that the estimates for equation (1) with all $a_i(x) = 0$ are given in [1].

Acknowledgement. This work was supported by RFBR, Grant No. 04-01-00344.

References

[1] Astashova I.V. *On the qualitative properties of solutions to Emden-Fowler type equations,* Usp. math. nauk. **51** (1996), no. 5, p. 185.

О локально дефинизируемых матриц-функциях

Азизов Т. Я. (Воронежский государственный университет)

Доклад основан на совместной работе с P. Jonas'om (TU Berlin). Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное пространство Крейна, Ω — область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ симметричная относительно вещественной оси, $\Omega \cap \overline{\mathbf{R}} \neq \emptyset$ и $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbf{C}^+$, $\Omega^- = \Omega \cap \mathbf{C}^-$ — линейно связные множества. Через $M(\Omega, \overline{\mathbf{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ обозначим множество всех $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значных кусочно мероморфных функций G на $\Omega \setminus \overline{\mathbf{R}}$ симметричных относительно $\mathbf{R}$.

Функция $G \in M(\Omega, \overline{\mathbf{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется *локально дефинизируемой в* Ω, если для каждой области Ω' с $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, функция G может быть представлена как сумма двух оператор-функций: $G = G_0 + G_{(0)}$, где G_0 — дефинизируемая, а $G_{(0)}$ — голоморфная в Ω'.
Если выше "G_0 дефинизируема" заменить на требование принадлежности G_0 классу Неванлинна $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ при некотором $\kappa \geq 0$ (возможно зависящем от Ω'), то мы говорим, что G — локально обобщенная функция Неванлинны.
Показано, что если $\mathcal{H}$ конечномерно, то функция $-G^{-1}$ дефинизируема, локально дефинизируема или является локально обобщенной функцией Неванлинны, если соответствующим свойством обладает и функция G.
Исследование поддержано грантом РФФИ №02-01-00353.

To the correspondence between ODE's and Hamiltonian systems

Babich M. V. (PDMI, St.Petersburg)

By an ODE of the 2-nd order we mean such a system of lines $\mathcal{F}$ on a domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, that there is a unique line in $\mathcal{F}$ passing any point of $\mathcal{D}$ in any direction.

By a Hamiltonian system we mean a triple $(M \to T, \omega, \nabla_H)$, where M is an extended phase space, a fibre over $t \in T \subset \mathbb{R}$ is a two-dimansional symplectic manyfold equipped with a symplectic form ω; ∇_H is a Hamiltonian field (consistent with ω) on M.

Consider the ODE's $\mathcal{F}$, that in coordinates (x, y) on $\mathcal{D}$ have the form $y'' = a_3(y')^3 + a_2(y')^2 + a_1 y' + a_0, \quad a_j = a_j(x, y)$, but do not have the form $y'' = 0$ in any x, y (it is the nondegeneracy condition).

In my talk the Hamiltonian system uniquely corresponding to such $\mathcal{F}$ is constructed. The space $M = \mathcal{D} \times \mathbf{P}^1$; the fibres $t = const$ are the integral lines of the field of directions assigned by the normal projective connection corresponding to $\mathcal{F}$; the symplectic form ω is induced by the Wronskian of the solutions of the linearized equation.

Метод пограничного слоя в теории поверхностных волн и волн соскальзывания

Бабич В. М. (ПОМИ РАН, Санкт–Петербург)

Указанные в заголовке вопросы предполагается рассмотреть на примере электромагнитных волн соскальзывания, а также некоторых типов поверхностных волн.

Если высокочастотная волна падает на проводящее гладкое тело D, то за ним образуется область тени, освещённая только волной соскальзывания, лучи которой по касательной уходят — «соскальзывают» — с поверхности тела, причём вблизи его поверхности S поведение волнового поля довольно сложное: здесь возникает пограничный слой. Аналитическому описанию волнового поля в тени посвящено много работ. Электромагнитному случаю, когда D идеальный проводник, посвящена работа Д. Буша [1]. Он рассматривал также и случай краевых условий Леонтовича, но это рассмотрение нуждается в уточнениях и поправках, к тому же в его работе не рассмотрен случай конечного импеданса, приводящий к типу волн соскальзывания не рассматривавшихся ранее в литературе.

Этим вопросам, а также энергетическому аспекту распространения поверхностных волн разного типа предполагается посвятить доклад.

Литература

[1] Bouche D.//Etude des ondes rampantes sur un corps convexe vérifiant une condition d'impédance par une méthode de développement asymptotique, Ann. Télécommun. 1993. n° 9-10, pp. 400-412.

Нерегулярность вторых производных гармонических функций на границе

Бадерко Е. А. (МГУ)

Рассматриваются гармонические функции, принимающие на границе области дважды непрерывно дифференцируемые значения. Исследуется поведение их вторых производных вблизи плоского куска границы. Показывается, что «прямые» производные второго порядка (по касательным направлениям и по нормали) непрерывны вплоть до границы, а смешанные производные могут «взрываться».

Аналогичный результат устанавливается для решений уравнения теплопроводности.

Методы осреднения и модели колебания тонких пластин

Бахвалов Н.С., Эглит М. Э. (МГУ)

Методы, развитые в математической теории осреднения процессов в периодических средах, применяются для вывода двумерных уравнений, описывающих распространение волн в неоднородных анизотропных пластинах периодической структуры. На математическом уровне строгости выводятся уравнения высокого порядка точности по малому параметру ϵ, представляющему собой отношение типичной толщины пластины к типичной длине волны. При этом не делается никаких априорных предположений о процессе деформирования пластины. Проведены конкретные вычисления коэффициентов этих уравнений для случая однородной изотропной тонкой пластины.

Проводится анализ и сравнение уравнений различного порядка точности, полученных в работе, с уравнениями, предложенными другими авторами. В частности, предлагаются поправки коэффициентов в уравнениях Тимошенко, увеличивающие точность этих уравнений с $O(\epsilon^4)$ до $O(\epsilon^8)$. Аналогичные уточнения произведены в моделе Кирхгофа. Предложена модель промежуточного порядка точности $O(\epsilon^6)$, весьма удобная для применения численных методов.

Изоспектральные возмущения оператора задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате

Баранецкий Я. Е. (Национальный университет «Львивська политехника», Украина)

Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 < x, y < 1\}$, $L-$ оператор задачи Дирихле:

$$-\Delta u = f, \qquad f \in L_2(K), \qquad lu = u|_{\partial K} = 0,$$

$L(M, S)$ – оператор задачи:

$$-\Delta v + Mv = f, \qquad f \in L_2(K) \qquad l_s v = (v + Sv)|_{\partial K} = 0.$$

Исследуется проблема описания операторов M, S $(L_2(K) \to L_2(K))$ таких, что

1) операторы $L(M,S)$ и L — изоспектральные, то есть, $L(M,S) = RLR^{-1} \quad (R : L_2(K) \to L_2(K))$;

2) операторы $L(M,S)$ и L — подобные (R-автоморфизм в $L_2(K)$).

Доказаны теоремы о существовании и единственности решения уравнения

$$L(M,S)v = f, \qquad f \in L_2(K).$$

Инвариантные множества смешанной системы с последействием

Баранов В. Н., Тонков Е. Л. (Удмуртский государственный универарситет, Ижевск)

Обозначим $\mathfrak{S} = C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$. Смешанной системой с последействием называется система

$$\dot{x}(t) = v(x_t, y(t)), \quad \dot{y}(t) = w(x_t, y(t)), \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $t \to (x_t, y(t)) \in \mathfrak{S}$, где $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r,0]$. Заданное множество M в $\mathfrak{S}$ называется *положительно инвариантным*, если для любого начального условия $z_0 = (x_0, y(0)) \in M$ движение $t \to z_t(z_0) = (x_t, y(t))$ в $\mathfrak{S}$, отвечающее решению системы (1), не покидает M для всех $t \in [0, \vartheta_{z_0})$, где $[0, \vartheta_{z_0})$ — максимальный интервал существования движения $t \to z_t(z_0)$.

Введено понятие вариации $\delta x_t(z_0)$ движения $t \to z_t(z_0)$, играющей смысл вектора скорости и показано, что если вариация $\delta x_t(z_0)$ в граничных точках z_0 множества M содержится в так называемом конусе Булигана, то M положительно инвариантно. В частности, получены условия положительной инвариантности множества

$$M \doteq \{\sigma \in \mathfrak{S} : a_1(\sigma) \leqslant 0, \ldots, a_p(\sigma) \leqslant 0\},$$

где $\sigma = (u, y)$, а функции $a_i : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^1$ определены равенствами

$$a_i(\sigma) \doteq \beta_i(u(0), y) + \int_{-r}^{0} \alpha_i(s, u(s))ds.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03–01–00014) и конкурсного центра фундаментального естествознания (грант Е02–1.0–100).

Validity of the Hartree and Hartree Fock approximation for N quantum particles

Claude Bardos (University of Paris 7)

This talk cover joint works over the recent years with several people including L. Erdos, F. Golse, D. Gottlieb, N. Mauser and H. T. Yau. It is devoted to the limit for $N \to \infty$ of a system of N quantum particles

$$i\hbar\partial_t \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$\frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{N}\sum_{1\le j<k\le N} V(|x_j - x_k|)\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

The following facts have been observed.

1) The limit depends on the structure of the initial data. According to these data one can obtain complete proof of the validity of the Hartree limit or of the Hartree Fock limit.

2) The proofs underline the importance of the notion of hierarchy equations and of their stability. Singular potential (including the Coulomb potential) can be handled with the use of a Leray Hardy inequality.

3) In the limit, the order of magnitude of the direct and exchange term have to be compared, and these observation are in full agreement with similar derivations, made not for the time dependent problem but for the energy of the ground state by Lieb and Simon.

Обратная задача для квадратичных матричных пучков

Барсуков А. И. (Воронежский военный институт радиоэлектроники)

Пусть P_{2n} и P_{2n-2} полиномы степени $2n$ и $2n-2$ соответственно, не имеющие общих корней. Рассматривается обратная задача: построить пучок $\lambda^2+B\lambda+C$, коэффициенты которого являются исмметрическими матрицами Якоби, такой, что

$$\begin{aligned} P_{2n}(\lambda) &= \det(\lambda^2 + B\lambda + C), \\ P_{2n-2}(\lambda) &= \det(\lambda^2 + B_1\lambda + C_1), \end{aligned}$$

где матрицы B_1 и C_1 получены из матриц B и C вычеркиванием последнего столбца и последней строки.

Теорема. Обратная задача для пары полиномов $\{P_{2n}, P_{2n-2}\}$ не имеет решения тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$
\begin{array}{rcl}
P_{n-2}(\lambda) & = & (\lambda-\lambda_0)^{n-2}+a_0, \quad \lambda_0, a_0 \in \mathbb{C}, \\
P_n(\lambda) & = & (\lambda^2+a\lambda+b)[(\lambda-\lambda_0)^{n-2}+a_0]+c_0, \quad c_0 \neq 0, \\
n>4 & \text{и} & a_0=0 \text{ при } n=5,6.
\end{array}
$$

Исследование поддержано грантом РФФИ 02-01-00353

Invariant Surfaces of Two-Dimensional Periodic Systems with a Bifurcating Point of Equilibrium by the First Approximation

Basov V. V. (Saint-Petersburg State University)

We consider system

$$
\dot{x}_1 = x_2 + X_1(t,x_1,x_2,\varepsilon), \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 + 2x_1^2\varepsilon - \gamma x_1\varepsilon^2 + X_2(t,x_1,x_2,\varepsilon), \quad (1)
$$

where γ is a constant, ε is a small positive parameter. Assume that $X_1 = X_1^{[3]} + X_1^{>[3]}$, $X_2 = X_2^{[4]} + X_2^{>[4]}$, where $X_i^{[k]}$ is a form of the order k in x_1, x_2, ε with 2π-periodic coefficients (we assume that x_1, ε are of the order 1, while x_2 is of order 2); $X_i^{>[k]}$ is a 2π-periodic in t, sufficiently smooth in a neighbourhood of the point $(x_1, x_2, \varepsilon) = 0$ function of order greater then k.

Let $f(v) = v^4 - 8v^3/3 + 2\gamma v^2$, $d_j = \int_0^{2\pi} \left((3-j)a_1^{(3-j,0,j)}(\tau) + a_2^{(2-j,1,j)}(\tau)\right) d\tau$, where a_i are coefficients of the forms $X_1^{[3]}$, $X_2^{[4]}$ $(j=0,1,2)$. Also, we say that the parameter c is admissible, if $\exists\, b:\ f(b) = f(c),\ f(v) < f(c)$ for $v \in (b,c)$.

Theorem. *For any admissible parameter c satisfying the condition $\int_b^c (d_0v^2 + d_1v + d_2)(f(c) - f(v))^{1/2} dv = 0$ and for any sufficiently small $\varepsilon > 0$, the system (1) possesses a continuous two-dimensional invariant surface given by $x_1 = C(\varphi)\varepsilon + F_1(t,\varphi,\varepsilon)$, $x_2 = -S(\varphi)\varepsilon^2 + F_2(t,\varphi,\varepsilon)$, where $F_1 = O(\varepsilon^2)$ and $F_2 = O(\varepsilon^3)$ are 2π-periodic in t, smooth and ω-periodic in φ functions; $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ being a real-analitic ω-periodic solution of the system $dC/d\varphi = -S$, $dS/d\varphi = C^3 - 2C^2 + \gamma C$, $C(0) = c$, $S(0) = 0$; $\omega = 2^{3/2} \int_b^c (f(c) - f(v))^{-1/2}\, dv$.*

Example. Suppose in the system (1) $\gamma = -4.0$, $d_0 = -6.474$, $d_1 = -3.284$, $d_2 = 1.922$. Then the condition of the THEOREM is satisfied for $c_1 = -0.547$, $c_2 = 4.498$, $c_3 = 4.597$, with $b_1 = -1.687$, $b_2 = -1.983$, $b_3 = -2.307$. Therefore, the system (1) possesses for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ three invariant surfaces. The corresponding periods in φ are $\omega_1 = 3.106$, $\omega_2 = 5.068$, $\omega_3 = 3.800$.

Explicit solution of Parabolic Equation with nonlocal boundary conditions

Bastys A. (Vilnius University), Ivanauskas F. (Vilnius University), Sapagovas M. (Vilnius Institute of Mathematics and Informatics)

A parabolic differential equation with nonlocal boundary conditions is considered. An explicit solution of the problem is found and uniqueness of the solution is proved. Analysis of the explicit solution reveals that it has three physically different linear components. The first component is of a standing wave type and the other two are of right and left-going wave types, respectively. Value of the speed of propagation of the heat waves depends on constants present in nonlocal boundary conditions. We give the examples of the right-going heat waves that have constant in time energy.

Topological characteristics of 3-d manifold through boundary measurements

Belishev M. I. (Saint-Petersburg Dept. of the Steklov Math. Institute (POMI, St. Petersburg 191011, Russia)[1]

In 2001 Lassas and Uhlmann showed that a compact orientable 2-dim Riemannian manifold is determined by its Dirichlet-to-Neumann (DN) map up to conformal equivalence. Later in [1] this result was obtained by means of another technique (Banach algebras) and an explicit formula linking the Euler characteristic of the manifold with its DN-map has been derived. Here we present the 3-dim analogues of this formula; namely, we express the dimensions of the Dirichlet and Neumann subspaces $\mathcal{D}$ and $\mathcal{N}$ of the harmonic vector fields on the manifold in terms of its scalar and vector DN maps.

The scalar DN-map Λ is an operator mapping the (boundary) trace of a harmonic function into the trace of its normal derivative. The vector DN-map $\vec{\Lambda}$ maps the tangent component of the trace of a field satisfying $\operatorname{curl}\operatorname{curl} h = 0$ and $\operatorname{div} h = 0$ in the manifold into the tangent component of the trace of $\operatorname{curl} h$. The formulas express $\dim \mathcal{D}$ and $\dim \mathcal{N}$ (the Betti numbers of the manifold) through the dimensions of the ranges of combinations of Λ, $\vec{\Lambda}$, and some standard operators acting at the boundary.

Refernces

[1] M. I. Belishev. The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method. *SIAM J.Math.Anal.*, 35 (1): 172–182, 2003.

---

[1] supported by the grant RFBR N 02-01-00260

Asymptotic Solutions to Nonrelativistic Quantum Equations in Nanotubes

Belov V.V. (Moscow Institute of Electronic and Mathematics),
Dobrokhotov S.Yu. (Institute for Problems in Mechanics),
Tudorovskiy T. Ya. (Institute for Problems in Mechanics)

We construct asymptotic solutions of quantum nonrelativistic equations in nanotubes ("quantum waveguides") which can be viewed as the equations with operator-valued symbol. The original problem is reduced to the set of one-dimensional equations describing the effective dynamics of a quasiparticle along the nanotube axis corresponding to "subbands of transverse quantization". The reduction is done by means of so called "operator separation of variables" working for the wide class of equations with operator-valued symbol and constituting the generalization of the "adiabatic" (Born-Oppenheimer) approximation. It formalizes an idea of the Peierls substitution and is based on the Maslov operator methods. We produce the general scheme, which can be applied to great amount of different problems with different characteristic scales corresponding to so called Maslov nonstandard characteristics. Using this procedure we study an effective one-dimensional dynamics of quasiparticle and electronic structure of nonotube taking into account spin effects. We discuss traps, reflections, "instabilities" of fast longitudinal modes and other effects in the examined model of the nanotube.

References

[1] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, *Quantum and classical dynamics of an electron in thin curved tubes//* Russ.Journ.Math.Phys., (2004) v.11, N 1, pp. 109-118

The work is supported by INTAS, Grant 00-257.

Homogenization of a parabolic operator with hysteresis

Beliaev A. Yu. (Water Problem Institute, Moscow)

The subject of the study is the equation $\dot{\theta} = \Delta h$ where the sought variables, θ and h, are linked by a hysteretic relation. The physical interpretation of the problem under consideration relates to hydrodynamics in porous media. We present some recent results on uniqueness and existence of solutions and develop an approach to homogenization in the case of inhomogeneous porous media, when coefficients of the system are periodic or random functions of spatial variable. We consider the homogenized model of hysteresis and prove convergence of solutions to the solution of the homogenized problem.

Представление нелинейных эволюционных уравнений через факторизацию дифференциальных операторов

Беркович Л. М. (Самарский государственный университет, Самара, Россия)

В известных работах П. Лакса, С. П. Новикова, И. М. Гельфанда, Л. А. Дикого, И. Я. Дорфман и др. было построено немало высших аналогов уравнения Кортевега–де Фриза и других нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ). При их построении в той или иной мере использовались операторные уравнения и, в частности, коммутаторы. В докладе предложен метод построения НЭУ произвольного порядка, использующий метод факторизации нелинейных дифференциальных операторов [1,2].

Пример 1. Уравнение Кортевега–де Фриза $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$ допускает представление

$$u_t + \frac{2}{3}\partial_x(\partial_x - r_2\sqrt{u})(\partial_x + \frac{1}{2}\frac{u_x}{u} - r_1\sqrt{u})u = 0,\ r_{1,2} = \mp\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Пример 2. Уравнение Гарри Дима $u_t = \frac{1}{2}(u^{-1/2})_{xxx}$ допускает представление

$$u_t = -u^{-3/2}(\partial_x - \frac{3}{2}\frac{u_x}{u})^3 u.$$

Пример 3. Уравнение Гарри Дима 5-го порядка (ср. с [3]) допускает представление

$$u_t = \frac{1}{4}\partial_x^3[u^{-5/2}(\partial_x - \frac{5}{4}\frac{u_x}{u})^2 u]$$

и заменой переменной $u = v^{-4}$ приводится к виду $v_t = -\frac{1}{16}v^5\partial_x^3(v^5 v_{xx})$.

Литература

[1] Л.М. Беркович. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002, 463 с.

[2] Л.М. Беркович. // Докл. РАН, 2003, Т. 390, N 5, с. 583-587.

[3] И.М. Гельфанд, И.Я. Дорфман. // Сб. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», М.: Наука, 1982, с. 102-112.

Об одной нелокальной краевой задаче.

Беседина С. В. , Пенкин О. М., Самойлова Л. А. (ВГУ, Воронеж)

Работа посвящена доказательству разрешимости нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения, в которой нелокальные условия задаются на нескольких совокупностях вертикальных отрезков, разделяющих прямоугольник двумерной плоскости. Доказательство основано на модификации метода Пуанкаре-Перрона.

Критерий глобальной разрешимости для одной системы полулинейных параболических неравенств

Бесов К. О.

(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия)

Рассматривается система

$$u_t - \Delta u = u^P v^Q, \qquad v_t - \Delta v = u^R v^S, \tag{1}$$

$u = u(t,x) \geq 0$, $v = v(t,x) \geq 0$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1} := \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$, $P,Q,R,S \geq 0$, с неотрицательными начальными данными $u(0,x) = u_0(x) \geq 0$, $v(0,x) = v_0(x) \geq 0$. Для ситемы (1) Эскобедо и Левин [1, 2] получили необходимые и достаточные условия существования глобальных неотрицательных невырожденных (т.е. $uv \not\equiv 0$) решений класса $C^{1,2}$ в терминах соотношений между параметрами P,Q,R,S и n. Однако эти соотношения оказались неточными в случае, когда $P = 1$ или $S = 1$. Мы уточняем соотношения в указанном случае и с помощью метода пробных функций [3] доказываем, что результат Эскобедо и Левина остается в силе и для слабых решений системы (1). Кроме того, найдены условия разрушения решений в зависимости от скорости убывания начальных данных u_0, v_0 на бесконечности.

Полученные результаты обобщаются [4] на случай систем

$$u_t - L_1 u = b_1(t,x) u^P v^Q, \qquad v_t - L_2 v = b_2(t,x) u^R v^S$$

с положительными измеримыми коэффициентами $b_i(t,x)$ и операторами L_i вида $L_i u = \operatorname{div}(A_i(t,x)\nabla u)$, где A_i – измеримые матрицы такие, что квадратичные формы $(A_i\cdot,\cdot)$ неотрицательно определены при всех t и x $(i = 1,2)$.

Литература

[1] *Escobedo M., Levine H. A.* Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1995. V. 129. P. 47–100.

[2] *Deng K., Levine H. A.* The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85–126.

[3] *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. М.: Наука, 2001. (Тр. МИАН; Т. 234).

[4] *Бесов К. О.* О глобальной разрешимости полулинейных параболических систем со смешанной правой частью // Тр. МИАН. 2003. Т. 243. С. 66–86.

A Method for Solution of the BVP for Singular Perturbed System of Nonlinear Differential Equations

Bezrodnykh S. I. (Computing Center of RAS)

A boundary value problem (BVP) for the singular perturbed system of three nonlinear ordinary differential equations with Dirichlet boundary conditions is considered on the interval $[-1, 1]$. This system is related to modeling a semiconductor device. The unknown functions represent electrical potential Ψ and densities of electrons and holes, N and P, respectively.

A new effective method for solving this BVP has been developed. The method is based on a specific combination of the functional Newton's method and the parameter prolongation method. The overexponential rate of convergence of the method has been proved. The initial approximation to the solution has been found in pure analytic form. Further approximations are constructed by analytic–numerical technique, which avoids any numerical differentiation. The inverse operator to the Freshet's derivative has been obtained also in explicit analytical form in terms of the Green's function for the appropriate differential equation. The Green's funcion has been constructed by the use of WKB–method. The presence of small parameter ε^2 at the higher derivative (responsible for the singular perturbation of the BVP) is a favourable factor for our method.

The performed numerical realization of the developed method has confirmed its high effectiveness and overexponential rate of convergence.

This work was financially supported by Russian Foundation for Basic Research (project 04–01–00723) and the Program N^o 3 of Department of Mathematical Sciences of RAS.

Непрерывная процедура стохастической аппроксимации без диффузионного возмущения

Билущак Г. И., Гошко Л. В., Чабанюк Я. М.
(Национальный университет "Львівська політехника", Украина)

Для непрерывной процедуры стохастической аппроксимации (ПСА) в эргодической марковской среде в схеме серий, которая задается эволюционным уравнением

$$du^{\varepsilon}(t)/dt = a(t)\mathrm{C}(u^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon)) \qquad (1)$$

рассмотрим случай, когда $x(t)$, $t{\geq}0$, равномерно эргодический марковский процесс со стационарным распределением $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, в измеримом фазавом пространстве $(\mathrm{X},\boldsymbol{X})$, который задается генератором $Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x,dy)\ [\varphi(y)\text{-}\ \varphi(x)]$. Для $x(t)$, $t{\geq}0$, определен потенциал R_0 марковской полугруппы равенством $R_0{=}\ [Q{+}\Pi]^{-1}$-П. Эргодичность марковского процесса позволяет построить усредненную систему

$$du_0(t)/dt = C(u_0(t)),\ u_0(0) = u_0,\ C(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x). \qquad (2)$$

Теорема. *Пусть существует функция Ляпунова* $V(u)$, $u \in R^d$, *которая обеспечивает экспоненциальную устойчивость усредненной системы (2):* $C(u)V'(u) \leq -c_0V(u),\ c_0 > 0$.

А также, пусть, при $\tilde{C}(u,x){:=}\ C(u)\text{-}\ \mathrm{C}(u,x)$, *выполняются условия:* $|\tilde{C}(u,x)\ V'(u)|{\leq}\ c_1V(u)$, $|C(u,x)\ R_0[\tilde{C}(u,x)V'\ (u)]'| \leq c_2\ V(u)$, *а нормирующая функция* $a(t)$, $t \geq 0$, *удовлетворяет обыкновенным условиям сходимости ПСА.*

Тогда при каждом $u^{\varepsilon}(0){=}\ u_0 \in R^d$ *ПСА (1), при* $0{<}\varepsilon \leq\varepsilon_0$, ε_0 *- достаточно мало, сходится с вероятностью 1 к точке равновесия системы (2):*$P\{\lim\limits_{t\to\infty} u^{\varepsilon}(t){=}\ 0\}{=}1$.

Markov p-homogeneous functionals and nonlinear Dirichlet forms

Marco Biroli (Polythechnic institute of Milan)

Our goal in this paper is an extension of notion and fundamental properties of strongly local (regular) Dirichlet form to the nonlinear case. For the notion of Dirichlet form we refer to the book of Fukushima-Oshima-Takeda(*Dirichlet forms and Markov processes*, W. de Gruyter & Co., Berlin-Heidelberg-New York.) . We give our assumptions (in particular the Markov property) directly on the energy measure of the form, whose existence is assumed. We are able to prove in this framework (by purely analytical methods in the line of U. Mosco; 1994, *J. Funct. Anal.*, **123**, 368-421. suitable Leibnitz and chain rule, which are the starting point for an investigation of local regularity of the harmonics relative to the form and in particular for a proof (under suitable assumptions) of an Harnack type inequality for positive harmonics (we observe that the chaine rule proved here is the same assumed in J. Malŷ, U. Mosco; 1999, *Ricerche di Mat.* **48**, pp. 217–231 and that an Harnack nequality for positive harmonics in the linear case has been proved in M. Biroli, U. Mosco; 1995, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **169 (IV)**, pp.125–181.). The notion of nonlinear strongly local Dirichlet forms seems also the natural framework for many nonlinear homogenization or Γ-convergence problems.

On the free boundary problems with unknown phase transition temperature

Bizhanova G. I.
(Institute of Mathematics of Ministry of Education and Sciences of KR)

Under the extraction of paraffin (solid) oil in the stratum there is pumped under the great pressure heat water melting oil and pushing it in the chink on the ground surface. Mathematical modelling of this process leads to the multidimensional free boundary problems. In the first three–phase model the pressure $p_1(x,t)$ and $p_2(x,t)$ in the domains occupied by water and liquid oil respectively and the temperature $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ of liquid and solid oil separated by free boundary $\gamma_2(t)$ are unknown. On this boundary there are fulfilled Stefan and the following $u_1 = u_2 = g(p_2)$ conditions (here g–given function), that is the melting temperature of oil

$g(p_2)$ is unknown and depends on the pressure p_2 in the liquid oil phase. On the free boundary $\gamma_1(t)$ between water and liquid oil there are given the condition $p_1 = p_2 = p^*$ and Florin one $\partial_\nu p_1 = \partial_\nu p_2$, where p^* is given value, ν–normal to $\gamma_1(t)$. The temperature $u_1, \ u_2$ and pressure p_1 and p_2 of liquids being in porous medium satisfy parabolic equations. The problem is closed by the initial and boundary conditions on fixed surfaces and also the conditions on $\gamma_1(t)$ for the temperature u_1 and on $\gamma_2(t)$ for pressure p_2. In the second model there are considered two phases occupied by liquid and solid oil, the unknown functions are free boundary $\gamma_2(t)$, temperature $u_1, \ u_2$ and pressure in liquid phase p.

The existence and uniqueness of the solutions to these problems in the Hölder spaces for small time are proved.

Траектории-утки в многомерных сингулярно возмущенных системах обыкновенных дифференциальных уравнений

Бобкова А. С. (МГУ им. Ломоносова)

Исследуется сингулярно возмущенная система с одной быстрой и произвольным числом медленных переменных:

$$\dot{x} = f(x, y), \ x \in \Omega_x \subset R^n, \ \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \ y \in \Omega_y \subset R, \ 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (*)$$

Предполагается, что уравнение $g(x, y) = 0$ определяет ровно две поверхности

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x \in \Omega_x, y = \varphi(x)\}, \ \Gamma_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_x, y = \psi(x)\},$$

пересекающиеся по гладкой $(n-1)-$мерной поверхности l. Пусть

$$\Gamma_1^- = \{(x, y) \in \Gamma_1 : g'_y(x, y) < 0\}, \Gamma_1^+ = \{(x, y) \in \Gamma_1 : g'_y(x, y) > 0\};$$

$$\Gamma_2^- = \{(x, y) \in \Gamma_2 : g'_y(x, y) < 0\}, \Gamma_2^+ = \{(x, y) \in \Gamma_2 : g'_y(x, y) > 0\}.$$

Будем называть Γ_1 и Γ_2 поверхностями медленных движений системы (*), а Γ_1^- и Γ_1^+ (Γ_2^- и Γ_2^+) – соответственно устойчивой и неустойчивой частями поверхности медленных движений Γ_1 (Γ_2).

Определение. Траекторией-уткой системы (*) называется такая траектория системы (*), которая, попав в малую окрестность устойчивой части поверхности медленных движений, с ростом времени переходит в малую окрестность неустойчивой части поверхности медленных движений и в обоих случаях проходит расстояние порядка 1.

Найдены необходимые условия появления траекторий-уток системы (*) и описано поведение вблизи поверхности l траекторий, не являющихся утками.

Литература

[1] Бобкова А. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. *Проблема «выживания уток» в трехмерных сингулярно возмущенных системах с двумя медленными переменными* // Мат. заметки. 2002. Т.71. Вып.6. С.818-831.

Аппроксимация граничных вариационных неравенств контактных задач теории упругости с использованием пространств интегрированных фундаментальных решений

Бобылёв А. А. (Днепропетровский национальный университет)

Одним из перспективных подходов к решению нелинейных контактных задач теории упругости с односторонними связями для тел конечных размеров является использование метода граничных вариационных неравенств. Отличительная особенность граничных вариационных формулировок состоит в том , что при отсутствии массовых сил все функционалы от искомых функций вычисляются по границе области, занятой телом, а множество допустимых функций удовлетворяет внутри этой области дифференциальным уравнениям задачи.

Для дискретизации граничных вариационных неравенств в настоящей работе используются пространства интегрированных фундаментальных решений (ИФР), элементы которых точно удовлетворяют дифференциальным уравнениям задачи. Конечномерные пространства ИФР могут быть построены на основе интегральных представлений решения и метода граничных элементов.

Рассмотрены схемы построения пространств ИФР для граничных вариационных формулировок задач теории упругости как в перемещениях, так и напряжениях. Определены требования к интегральному представлению решения и получены оценки погрешности аппроксимации.

Разработанные вычислительные алгоритмы реализованы в виде пакета прикладных программ. Получены решения ряда конкретных задач.

Численное решение уравнений «мелкой воды» для задачи моделирования динамики океана в акватории Охотского моря

Богачев К. Ю., Кобельков Г. М. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Рассматривается задача численного решения уравнений «мелкой воды», возникающая при моделировании динамики океана в акватории Охотского моря. Аппроксимация задачи строится методом конечных элементов на неструктурированной сетке, сгущающейся к береговой линии и в областях с сильным изменением рельефа дна. Сетка строится на основании данных измерений с разрешающей способностью 1800 промеров на 1 градус. На сетке вводятся иерархические структуры, позволяющие применять многоуровневые методы и балансировать загруженность многопроцессорной вычислительной установки. Полученная в результате конечноэлементной аппроксимации алгебраическая система решалась методом бисопряженных градиентов с предобуславливателями — многоуровневым методом BPX либо неполным блочным LU разложением на параллельных ЭВМ с распределенной памятью в среде MPI.

On the geometry of integral equation PS-3

Bogatyrev A. B. (Институт Вычислительной математики РАН, Москва)

We consider a family of singular integral (Poincare-Steklov) equations:

$$\lambda \int\limits_I \frac{u(x)}{x-y}\,dx - \int\limits_I \frac{u(x)\mathcal{R}'(x)}{\mathcal{R}(x)-\mathcal{R}(y)}\,dx = const, \quad y \in I = (-1,\ 1), \qquad (1)$$

where λ – spectral parameter; $\mathcal{R}(x): \quad I \to I$ is a given degree 3 rational change of variables on I; $u(x)$ – unknown function on I; $const$ – unknown constant. This equation naturally arises in investigation of a problem for Laplace operator in two adjacent domains with spectral parameter in the boundary condition on the common part of the boundary.

To every functional parameter $\mathcal{R}(x)$ of Poincare-Steklov-3 equation a Riemann surface of genus $g = 2$ is assigned. We show that the eigen pairs of this equation are in 1-1 correspondence with the projective structures of total branching number 2 on this surface whose monodromies are trivial along two cycles of the surface. This geometric characterization gives us localization of the spectrum (originating from the restrictions on monodromy) and to known extent visible representation of the eigenpairs.

References

[1] Bogatyrev A. *Poincare-Steklov integral equations and Riemann monodromy problem* //Functional Analysis and Applications, 34:2 (2000), pp. 9-22.

[2] Bogatyrev A. *PS-3 integral equations and projective structures on Riemann Surfaces* //Math. Sbornik, 192:4 (2001) pp. 3–36.

Нелокальные (первые) интегралы полиномиальных векторных полей на плоскости. [2]

Богданов Р.И. (Научно-исследовательский институт ядерной физики, Московский государственнvй университет им. М.В. Ломоносова)

Понятие нелокального (первого) интеграла возникает при попытке взять несколько различных точек на фазовой плоскости и, вычисляя в каждой точке значение подходящей функции, так согласовать скорости движения точек по своим фазовым кривым векторного поля, чтобы сумма (или произведение) вышеуказанных значений функций не зависела от времени движения (т.е. являлась бы первым интегралом движения ансамбля точек).

Естественно, в случае одной точки мы имеем дело с классическим первым интегралом движения. Классические первые интегралы с "хорошими"функциональными свойствами не существуют в случае общего положения для неконсервативных векторных полей.

Оказывается, нелокальные (первые) интегралы существуют для полиномиальных векторных полей на плоскости в случае общего положения. Для консервативных полиномиальных векторных полей они также существуют и дают новые аналитические интегралы движения. В результате по-новому рассматриваются классические проблемы, например: теории относительности; кластерной динамики; разностных уравнений; II-я половина 16-й проблемы Гильберта.

Наряду с классическими возникают и новые проблемы: исследование алгебры нелокальных интегралов, изучение носителя нелокального

[2]Исследования выполнены при частичной поддержке фонда РФФИ грант №98-01-00053.

интеграла и т.д., разработка связей нового понятия с традиционными подходами смежных дисциплин.

Periodic Navie-Stokes solutions with crystallographic symmetries

Bogoyavlenskij O. I. (Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia)

We study periodic solutions to the Navier-Stokes equations (NSE) with arbitrary vector periods $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$. Let Λ be the lattice of periods $\mathbf{p} = n_1\mathbf{p}_1 + n_2\mathbf{p}_2 + n_3\mathbf{p}_3$, $n_i \in \mathbb{Z}$, and Λ^* be the reciprocal lattice of vectors $\mathbf{k} = n_1\mathbf{k}_1 + n_2\mathbf{k}_2 + n_3\mathbf{k}_3$ where $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{p}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Functions $\mathbf{V}(t,\mathbf{x}) = \sum \mathbf{V_k}(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$, $\nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{p}_0(t) + \sum p_{\mathbf{k}}(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ are periodic with periods $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$. Here $\mathbf{k}\in\Lambda^*$, $\mathbf{V}_{-\mathbf{k}} = \overline{\mathbf{V}_{\mathbf{k}}}$, $p_{-\mathbf{k}} = \overline{p_{\mathbf{k}}}$, and $\mathbf{V_k}\cdot\mathbf{k} = 0$. For periodic solutions, the NSE reduce to the dynamical system

$$\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}^2\nu\mathbf{V}_{\mathbf{n}} + \frac{i}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda^*}(\mathbf{V_k}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{V}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\right), \quad \dot{\mathbf{V}}_0 = -\frac{1}{\rho}\mathbf{p}_0, \quad (1)$$

where vectors $\mathbf{k},\mathbf{n}\in\Lambda^*$. We show that dynamical systems (1) for different triples of periods $\mathbf{p}_j$ generically are not equivalent to each other: the moduli space of non-equivalent systems (1) has dimension 6.

We construct exact NSE solutions with crystallographic symmetry groups G that have pure rotational point groups $\Gamma\subset SO(3)$. There are 52 such groups G among 219 nonisomorphic crystallographic groups in three dimensions. The point group Γ can be either cyclic C_n, or dihedral D_n, $n = 2,3,4,6$, or tetrahedral T or octahedral group O. The constructed exact solutions depend upon all four variables t, x_1, x_2, x_3.

We obtain complete classification of periodic solutions with pairwise non-interacting Fourier modes. For such solutions, the non-zero Fourier components $\mathbf{V_k}(t)\in\mathbb{C}^3$ correspond to vectors $\mathbf{k}$ of the reciprocal lattice Λ^* that necessarily belong either to the spheres $\mathbf{k}^2 = \alpha^2$, or to the circumferences $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{k}^2 = \alpha^2$, or to the straight lines $\mathbf{k} = \lambda\mathbf{n}$ or to the planes $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = 0$, where $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}\in\Lambda^*$ and $\mathbf{e}\in\Lambda$.

The system (1) has an infinite-dimensional Lie group of symmetries $G = H(\Lambda)\dot{\times}\mathbf{A}$ where $H(\Lambda)$ is the holohedry group of the lattice Λ (or Λ^*) and $\mathbf{A}$ is the abelian Lie group of vector-valued functions $\mathbf{S}(t)$. Applying the symmetry transforms $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}(t))Q\mathbf{V}_{Q^{-1}(\mathbf{k})}(t)$, $\tilde{\mathbf{V}}_0 = Q\mathbf{V}_0(t) - \dot{\mathbf{S}}(t)$, $\tilde{p}_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}(t))p_{Q^{-1}(\mathbf{k})}(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}_0 = Q\mathbf{p}_0(t) + \rho\ddot{\mathbf{S}}(t)$, where $Q\in H(\Lambda)$, we demonstrate the non-uniqueness of solutions to the Cauchy problem for the periodic NSE with $\mathbf{V}_0(t) \neq 0$.

References

[1] Bogoyavlenskij, O. I.: *Infinite families of exact periodic solutions to the Navier-Stokes equations.* Moscow Mathematical Journal. **3**, N2, 1-10 (2003).

[2] Bogoyavlenskij, O. I.: *Exact unsteady solutions to the Navier-Stokes and viscous MHD equations.* Physics Letters A **307**, 281-286 (2003).

Geometrically induced bound states in two nonsymmetric waveguides coupled by a window

Borisov D. I. (Bashkir State Pedagogical University)

The work is devoted to the study of bound states in a pair of two-dimensional waveguides having common boundary where a window is cut out. These wavegudies are modelled by two parallel straight strips. The discrete spectrum of the Laplacian subject to Dirichlet boundary condition in L_2 is studied. It is known that making the length of the window larger produces new eigenvalues emerging from continuous spectrum. These eigenvalues emerge when the length of the window goes through some critical sizes. We study how they emerge from continuum and give the asymptotic expansions for these eigenvalues in terms of a small parameter which is a difference between window's length and the nearest critical size.

The work is partially supported by DAAD (A/03/01031), RFBR (03-01-06407) and the program "Leading scientific schools" (НШ-1446.2003.1)

Уравнение эйконала в неоднородной среде

Боровских А. В. (МГУ, механико-математический факультет)

Для уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y,z)}, \tag{1}$$

позволяющего описать фронт возмущения, распространяющегося в среде, с помощью групповой классификации выявлены интегрируемые в конечном виде случаи, получены явные формулы для фронта волны точечного источника и для лучей. Оказалось, что уравнения, имеющие максимальную группу симметрий, имеют семейства лучей, реализующих в точности три канонических геометрии (Евклида, Лобачевского и Римана). Описана зависимость центра кривизны фронта от радиуса, порождающая иллюзию движущегося источника. В ряде случаев решения имеют довольно экзотический характер, самопроизвольно локализуясь, например, в цилиндре или в конусе.

Работа поддержана грантами Госкомвуза РФ (проект N E02-1.0-46), РФФИ (проект N 02-01-00307) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1643.2003.1

Sharp estimates of solutions to the Robin boundary value problem for elliptic non divergence second order equations in a neighborhood of the conical point

Mikhail Borsuk , Agnieszka Zawadzka

(University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland)

Let $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ be a bounded domain with boundary ∂G that is a smooth surface everywhere except at the origin $\mathcal{O} \in \partial G$ and near the point $\mathcal{O}$ it is a convex conical surface with vertex at $\mathcal{O}$. We consider the Robin problem for linear and quasilinear non divergence second order elliptic equations in G. We obtain best possible estimates of strong solutions of this problem near a conical point. Analogous results were established in [1, 2] for the Dirichlet problem.

The oblique derivative problem for the Poisson equation on the infinite angle considered M.Garroni, V.A.Solonikov and M.Vivaldi [3]. A principal new feature of this talk is the consideration of elliptic equations with variable coefficients that the smoothness are the minimal possible. Our examples demonstrate this fact.

The proof of main results is based on the deduction a new inequality of the Hardy - Friedrichs - Wirtinger type with the exact constant, adapted to the Robin problem. The precise exponent of the solution decreasing rate depends on this exact constant. In addition, for quasilinear equations we use the barrier techniques and the comparison principle.

References

[1] *M.V. Borsuk,* Best-possible estimates of solutions of the Dirichlet problem for linear elliptic non divergence equations of second order in a neighborhood of a conical point on the boundary,// Math. USSR Sbornik, **74** (1993), 185-201.

[2] *M.V. Borsuk,* On the solvability of the first boundary value problem for second-order elliptic equations in a domain with a conical point on the

boundary.// Mat. Fiz. Anal. Geom., Kharkov, **4**, no 4 (1997), p. 428-452.

[3] *M.G. Garroni, V.A. Solonikov and Vivaldi M.A.,* On the oblique derivative problem in an infinite angle. // Topological methods in nonlinear analysis, 1996, **7**, 299-325.

Integrable Solution for some class of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation and its Application.

Bratus A. S. (МГУ)

This is a joint work with Volosov K. A.

The problem for motion of mathematical pendulum under Gaussian white noice and the control forces subjected to the constraint

$||u||_{Lm} \leq {Q_0}^2, \quad Q_0 - const.$

leads to the following Hamilton-Jacobi-Bellman equation

$$S_\tau = (m-1)g_m(\tau)(\frac{|S_y|}{-mS_q})^{m/(m-1)}S_q + \frac{1}{2}\sigma_1^2(\tau)S_{yy}, \qquad (1)$$

Here $S(y,q,\tau)$ is Bellman function of the variables y, q, τ, $y \geq 0$, $q \geq 0$, $\tau \geq 0$, $m = 2k/(2s-1)$, $k \geq s$, $k, s = 1, 2, \ldots$, $g_m(\tau) = |f(\tau)|^{(2-m)/(m-1)}$, $f(\tau) \in C^2$. The function S satisfies to the Cauchy data $S(y,q,\tau) = \varphi(y)$ $\varphi(y) \in C^2$, $\varphi(-y) = \varphi(y)$, $\varphi(0) = 0$, and boundary value condition $S_y|_{y=0}$. The following reult is valid.

Theorem. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation (1) can be reduced to the linear parabolic equation of two variables τ and w

$$\Phi_\tau = \frac{1}{2}{\sigma_1}^2(\tau)\Phi_{ww},$$

for function Φ. Here $w = y - R_m(q,\tau)$, $R_m(q,\tau) = q^{1/m}(\psi_m(\tau))^{(m-1)/m}$, $\psi_m(\tau) = \int_0^\tau g_m(s)ds$.

In the limit case when $m = 1$ the variable w has the form $w = y - qF(\tau)$, where $F(\tau) = max|f(\tau)|$,for $0 \leq s \leq \tau$. The solution of equation (1) give possibility to find out the solution for correspondent optimal control problem with the restriction on total Resource of Control.

Области управляемости и зоны иммунитета управляемой динамической системы на плоскости

Бутенина Н. Н. (Нижегородский государственный университет)

Исследуется управляемая динамическая система (УДС) с аффинным управлением, определенная в некоторой ограниченной области плоскости. Каждая из управляющих функций кусочно непрерывна на любом конечном отрезке времени и принимает значения, принадлежащие некоторому отрезку. Ограничения на управление рассматриваются как параметры УДС. Цель управления - устойчивое решение Ω какой - либо из конкретных динамических систем, входящих в УДС.

Вводится понятие особой траектории УДС и зоны иммунитета состояния Ω (максимальной безопасной зоны области управляемости в состояние Ω). Доказано, что 1) в границы областей управляемости и зон иммунитета могут входить лишь особые полутраектории и траектории УДС; 2) зона иммунитета при расширении области значений управляющих функций может только сжиматься и, как правило, исчезает скачком. Проводится сравнение фазовых и параметрических портретов УДС и автономных динамических систем, входящих в УДС.

Восстановление оператора свертки по спектру его одномерного возмущения

Бутерин С. А. (Саратовский госуниверситет)

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x)\int_0^\pi f(t)v(t)\,dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Исследуется обратная задача восстановления оператора M по характеристическим числам оператора A в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны априори. Пусть $M(x) \in W_2^3[0,T]$ для любого $T \in (0,\pi)$, $(\pi - x)M'''(x) \in L_2(0,\pi)$, $M(0) = M''(0) = 0$, $M'(0) = -1$; $g(x)$, $v(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$. Тогда характеристичекие числа $\{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, оператора A имеют вид

$$\sqrt{\lambda_k} = k + æ_k, \quad \{æ_k\} \in l_2, \quad \lambda_k \neq 0. \tag{1}$$

Пусть $\{\tilde{\lambda}_k\}$ – характеристические числа оператора $\tilde{A} = A(\tilde{M}, g, v)$ из того же класса. Справедлива теорема единственности решения обратной задачи.

Теорема 1. *Если* $\{\lambda_k\} = \{\tilde{\lambda}_k\}$, *то* $M = \tilde{M}$.

Теорема 2. *Пусть заданы функции* $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$, *и последовательность комплексных чисел* $\{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, 2, ...$, *вида (1). Тогда для того, чтобы существовал оператор* $A(M, g, v)$ *из рассматриваемого класса с характеристическими числами* $\{\lambda_k\}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^\pi g(x)v(x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda_k}, \quad g(0)v(\pi) = \frac{1}{\pi\lambda_0}\prod_{k=1}^\infty \frac{k^2}{\lambda_k}.$$

Доказательство теоремы 2 конструктивно и дает алгоритм построения $M(x)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования Е02-1.0-186, гранта Университеты России УР.04.01.042 и гранта "Ведущие научные школы" НШ-1295.2003.1

Представления функциональными интегралами решения задачи Коши-Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия.

Бутко Я.А. (Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова)

Получены представления решения задачи Коши-Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия в виде пределов конечнократных интегралов. Эти пределы совпадают с интегралами по мерам гауссовского типа на пространствах непрерывных функций, принимающих значения в области многообразия. Одна из этих мер порождается броуновским движением в области с поглощением на границе. Другая мера определяется аналогично мере Фейнмана, соответствующей задаче Коши-Дирихле для уравнения Шрёдингера в области многообразия (см. [1]).

В доказательстве существенную роль играют теорема Чернова [2] и асимптотические оценки, найденные в работе [3].

Литература

[1] Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях. ДАН, 2003, том 392, №2, с. 174-179

[2] Chernoff R. P.//J.Func.Anal. 1968. V.2. P.238-242.

[3] Smolyanov O. G., Weizsäcker H .v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions. Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, Vol 29, 2000.

Об устойчивости решений сингудярно возмущенных задач в случае пересечения корней вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф. (МГУ)

Рассматривается вопрос об устойчивости и области влияния стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае, когда пределом этого решения при стремлении малого параметра к нулю является негладкое составное решение вырожденного уравнения, т.е. решение, составленное из двух пересекающихся корней вырожденного уравнения. Установлены условия, при которых стационар ное решение является асимптотически устойчивым, и найдено множество начальных функций, принадлежащих области влияния (притяжения) этого стационарного решения.

О классе Бэра показателей Ляпунова в точке

Быков В. В. (МГУ)

Пусть M_n — множество всех уравнений вида $\dot{x} = A(t)x$, где отображение $A\colon \mathbf{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbf{R}^n$ ограничено и кусочно непрерывно, наделенное топологией равномерной сходимости отображений A.

Будем говорить [1], что функционал $\varphi\colon M_n \to \mathbf{R}$ *принадлежит k-му ($k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) классу Бэра в точке* $A \in M_n$, если для любой открытой окрестности $G \subset \mathbf{R}$ точки $\varphi(A)$ существует такая открытая окрестность $U \subset M_n$ точки A, что $\varphi^{-1}(G) \cap U$ есть множество аддитивного класса k [2].

В частности, при $k = 0$ получаем определение непрерывности в точке. Далее, функционал φ принадлежит k-му классу Бэра в каждой точке пространства M_n тогда и только тогда [1], когда φ — функционал k-го класса Бэра на пространстве M_n.

Теорема. Если показатель Ляпунова $\lambda_i, \imath = 1, \ldots, n$, рассматриваемый как функционал на пространстве M_n, принадлежит первому классу Бэра в точке $A \in M_n$, то он полунепрерывен сверху в этой точке, а при $i = 1, 2$ — также и снизу.

Литература

[1] Сергеев И. Н. *Определение класса Бэра показателя в точке* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №11. С. 1570.

[2] Куратовский К. *Топология.* Т. 1 // М.: "Мир". 1966.

A study on the zariski topology on the prime spectrum of a module

Fethi Çallialp, Ünsal Tekir (Dogus University, Marmara University, Turkey)

Throughout this note, all rings are commutative with identity and all modules are unital. Let R be a ring and let M be an R-module. For any submodule N of M let $(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$ .Then a proper submodule N of M is prime if, for any $r \in R$ and $m \in M$ such that $rm \in N$, either $m \in N$ or $r \in (N : M)$. The set of all prime submodules of M is called the spectrum of M and denoted by $Spec\,(M)$. For any submodule N of M, we have a set $V(N) = \{P : (N : M) \subset (P : M)\}$. Then the sets $V\,(N)$, where N is a submodule of M, satisfy the axioms for the closed sets of a topology on $Spec\,(M)$, called the zariski topology. For any open set U of X, we obtain an R-module $O_X\,(U)$. In this note we showthat O_X is a sheaf of R-modules over X.

References

[1] C.P.Lu, The Zariski Topology on the prime spectrum of a module, Houston Journal Of Mathematics, 25 (3) , (1999) , 417 – 432.

Homogenization of scalar problems for a combined structure with singular or thin reinforcement

G.Cardone (Seconda Università di Napoli, Italy), A.Corbo Esposito (Università di Cassino, Italy)

This is a joint work with S.E.Pastukhova (Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation (Technical University)).

The homogenization of quadratic integral functionals for combined structures with singular or asymptotically singular reinforcement is studied in a model case in dimension $N = 2$. Generalizations to more general cases in dimension $N = 2$ or to some model cases in dimension $N > 2$ are discussed.

Such results are obtained in the frame of homogenization of problems depending on two parameters developed by V.V. Zhikov. In particular an essential tool is the notion of two-scale convergence of sequences of functions belonging to Sobolev spaces with respect to variable measures.

AMS 2000 classification: 35B27, 35B40, 28A33.

Keywords: combined structures, singular and thin reinforcement, two-scale convergence, Sobolev spaces with respect to variable measures.

On the behaviour of solutions of degenerate nonlinear elliptic equations

V. Cataldo (Catania University, Italy),
Skrypnik T. M. (Donetsk University, Ukraine)

The behaviour of singular solution $u(x)$ of quasilinear elliptic equation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) - |u|^{q-2} u = 0, \quad x \in B_1(0) \setminus \{0\} \tag{1}$$

is studied. We assume Caratheodory's conditions for coefficients $a_i(x, \xi)$ and inequalities

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geq C_1 |x|^{\sigma} |\xi|^p, \quad |a_i(x,\xi)| \leq C_2 |x|^{\sigma} |\xi|^{p-1}$$

with positive constants C_1, C_2, $\sigma \in (1-n, n(p-1))$, $1 < p < n$.

Following results are established:

1) the boundedness of the solution $u(x)$ of the equation (1) under conditions $q > 1$,

$$|u(x)| \leq C_3 |x|^{-\mathcal{P}+\delta} \quad for \quad 0 < |x| < 1, \quad \mathcal{P} = \frac{n-p+\sigma}{p-1}, \; \delta > 0;$$

2) the estimate

$$|u(x)| \leq C_4 |x|^{-Q} \quad for \quad 0 < |x| < 1, \quad Q = \frac{p-\sigma}{q-p}, \; q > p;$$

3) the removability of each isolated singularity of the solution of the equation (1) if $q\mathcal{P} > n$.

These assertions are generalized well-known results of V.A.Kondratiev and E.M.Landis established for $\sigma = 0$ for the equation (1) with $p = 2$ and linear principal part.

Compact Global Chaotic Attractors of Discrete Control Systems

Cheban D. (State University of Moldova), Mammana C. (University of Macerata, Italy)

In this talk we present some results on the problem of existence of compact global attractors of discrete control systems (discrete inclusions) and description its structure. Sufficient conditions of existence of chaotic compact global attractors of control systems are given. The problem of existence of compact global attractors for a discrete inclusion arise in a number of different areas of mathematics: control theory (Bobylev, Emel'yanov, Korovin, Molchanov, Zalozhnev and others); linear algebra (Artzrouni, Barabanov, Beyn and Elsner, Bru, Cheban and Mammana, Daubechies and Lagarias, Elsner and Friedland, Gurvits, Kozyakin, Wirth and many others); Markov chains (Gurvits, Gurvits and Zaharin); iteration processes (Bru, Elsner and Neumann, Opoitsev); Bransley-Sloan's method of fractal image compression (Barnsley and Sloan, Bondarenko and Dolnikov and others).

Усреднённый спектр краевой задачи для оператора Лапласа в области с большим количеством концентрированных масс критической плотности, близко расположенных на границе[3]

Чечкин Г. А. (МГУ им.М.В.Ломоносова)

Рассматривается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций граничных задач для оператора Лапласа с быстро меняющимся типом граничных условий в области $\Omega \subset I\!\!R^n$, $n \geq 3$. Вводится специальная весовая функция, которая зависит от малого параметра ε, равная 1 вне мелких включений, где она равна ε^{-2}. Эти области, концентрированные массы диаметра ε, расположены на границе на расстоянии друг от друга тоже порядка $O(\varepsilon)$ (т.е. “очень часто”), где ε — малый положительный параметр. Мы ставим условие Дирихле (соответственно, Неймана) на участках границы $\partial\Omega$, касающихся (соответственно, вне) концентрированных масс. Весовая функция присутствует в правой части уравнения.

Построен предельный (усреднённый) оператор при стремлении малого параметра ε к нулю и доказана сходимость собственных элементов

[3]Работа была частично поддержана РФФИ, грант №02-01-00868, грантом ведущих научных школ НШ–1464.2003.1.

исходной задачи к собственным элементам предельной (усреднённой) задачи. Оказывается, что предельный оператор определен на прямом произведении пространств функций, заданных в области и на ячейке периодичности, т.е., по сути, является двухмасштабным пределом исходного оператора, также оценена разность между собственными элементами исходной и усреднённой задач в Соболевской норме.

Аналогично можно рассмотреть случаи "лёгких" и "тяжёлых" масс, распределённых очень часто на границе. Некоторые другие случаи разобраны в [1] и [2].

Литература.

[1] Г.А.Чечкин. О колебаниях тел с концентрированными массами, расположенными на границе // УМН. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 105–106.

[2] Г.А.Чечкин. Граничное усреднение в областях с сингулярной плотностью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, No 6. С. 855.

Kolmogorov ε-entropy of global attractors of non-autonomous infinite dimensional dynamical systems

Chepyzhov V. V. (Institute for Information Transmission Problems, RAS)

We study the global attractors of non-autonomous dynamical systems corresponding to dissipative evolution equations of mathematical physics with time dependent terms and coefficients. All the terms of the non-autonomous equation that depend explicitly on time are called the time symbol of this equation. The time symbol, as a function of time with values in a Banach or Hilbert space, can be quasiperiodic, almost periodic or translation compact.

It is known that a general dissipative non-autonomous equation has a global attractor and this global attractor is a compact set in the phase space of the equation under consideration. At the same time, the global attractor of a general non-autonomous equation has infinite dimension (Hausdorff or fractal). So, to investigate the complexity of the global attractors of non-autonomous dissipative equations we have to study Kolmogorov ε-entropy of the global attractors.

We have proved some new upper estimates for Kolmogorov ε-entropy of the global attractors of non-autonomous evolution partial differential equations with translation compact time symbols. We have apply these results to various basic dissipative equations of mathematical physics.

The results are obtained in collaboration with professor M.I.Vishik.

Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с растущими коэффициентами

Черепова М.Ф. (Московский Энергетический институт (технический университет)).

Устанавливается однозначная разрешимость краевых задач (первой краевой задачи, задачи с косой производной и др.) в гельдеровском классе функций для линейного параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрических областях, возможно неограниченных (как по x, так и по t), с негладкой (по t) боковой границей, допуская, что правая часть и младшие коэффициенты уравнения могут расти определенным образом при приближении к параболической границе области, а старшие коэффициенты могут не удовлетворять условию Дини вблизи этой границы.

Об операторах проектирования для численной стабилизации

Чижонков Е. В. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

При численной стабилизации с помощью граничных условий решений квазилинейных параболических уравнений и близких к ним уравнений Стокса и Навье – Стокса важную роль играют операторы проектирования на подходящие линейные многообразия [1],[2]. В докладе рассмотрены два способа проектирования, отличающиеся гладкостью образов исходной гладкой функции: в одном случае в качестве результата получается разрывная, а в другом — непрерывная функция. Анализируются и сравниваются спектральные характеристики обусловленности дискретных операторов проектирования, обсуждаются вопросы их оптимизации. Приводятся численные эксперименты по стабилизации решений уравнений Чафе – Инфанта с начальными функциями, полученными с помощью обоих операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00490).

Литература

[1] Chizhonkov E.V. *Numerical aspects of one stabilization method. //* Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2003, v.18, No.5, pp.363-376.

[2] Fursikov A.V. *Real Process Corresponding to the 3D Navier-Stokes system and its Feedback Stabilization from Boundary.* – The M.I.Vishik Seminar, AMS Translations Serie 2, 2002, v.206, pp.95-123.

Приложения симметрийного анализа в газовой динамике

Чупахин А. П. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН)

Групповой анализ дифференциальных уравнений является наиболее мощным и универсальным методом построения широких классов точных решений уравнений произвольного вида. Особенно эффективно его применение к уравнениям механики и математической физики, обладающих, в силу своего построения, содержательной группой симметрии.

В работе приводятся результаты по интегрированию уравнений газовой динамики (УГД) для частично инвариантных регулярных решений и исследованию качественных свойств таких решений.

1) В классе регулярных частично инвариантных небарохронных решений строятся разрывные решения, отвечающие сопряжению неоднородных потоков газа через ударную волну. Аналитическая конструкция ударного перехода основана на существовании пучка интегральных кривых ключевого уравнения — обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

2) Исследован класс решений УГД, частично инвариантных относительно группы вращений. Аналитически исследован газовый вихреисточник, дано качественное описание новых режимов истечения газа с закруткой. Доказано существование разрывного решения, соответствующего течению из источника с ударной волной.

3) Для барохронных решений УГД, в которых давление зависит только от времени, доказан эффект коллапса плотности на многообразии коллапса, определяемом начальными данными задачи. Обнаружен и исследован звуковой коллапс — сингулярность характеристического коноида, вид которого зависит от величины показателя адиабаты. При малых его значениях коноид схлопывается по многообразию коллапса, образуя ребро, лезвие, а при больших — уплощается, распластываясь по гиперплоскости. Вычислены соответствующие асимптотики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02–01–00550) и Совета поддержки ведущих научных школ (грант НШ–440.2003.1).

Периодические решения некоторых нелинейных эволюционных систем естественных дифференциальных уравнений

Данг Хань Хой (Новгородский государственный университет)

На одномерном торе $\Pi = R/(2Z)$ (окружности) рассмотрим граничную задачу

$$(L-\lambda)u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - aA - \lambda\right)u(x,t) = \varepsilon G \circ H(u), \quad u|_{t=0} = u|_{t=b}, \qquad (1)$$

где $A = i(d+\delta)$- так называемый естественный дифференциальный оператор, $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)dx \in \wedge^0\Pi \oplus \wedge^1\Pi$ - комплексная дифференциальная форма на торе с коэффициентами зависящими от $t \in [0,b]$, $a \neq 0, \lambda$ - заданные комплексные числа,

$$Gu(x,t) = \int_\Pi g(x,y)u(y,t)dy$$

- интегральный оператор с матричным ядром $g(x,y)$, заданным на Π^2 и имеющим непрерывные производные по x до второго порядка; H - непрерывный по Липшицу оператор на гильбертовом пространстве X квадратично интегрируемых форм $u(t,x)$. Пусть $a \in R$, $\lambda \in iR$. При сделанных предположениях справедлива следуюшая

Теорема. *1)Для почти всех $b > 0$ существует число $\varepsilon_0(b)$, такое что при $\varepsilon < \varepsilon_0(b)$ задача (1) имеет единственное решение; 2)Если $b_0 > 0$ фиксировано, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$, множество периодов b, $0 < b < b_0$ для которых существует решение имеет положительную меру, которая сходится к b_0 при $\varepsilon \to 0$.*

Asimptotic behaviour of Hamilton-Jacobi equation's solution with singular dependence of small parameter

Danilin A. R. (IMM UrD RAS, Ekaterinburg)

Problems of construction of asymptotic expansion (up to an arbitrary power of small parameter $\varepsilon > 0$) of minimax solution of Cauacy problem:

$\varepsilon w_t - \varepsilon < Ax + By, w_x > + < y, w_y > + ||w_y|| = 0,$

$w(0,x,y) = \sigma(x),\ x \in \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{R}^m,\ t \in (0;T].$

Here A, B are constant matrixes, $||\cdot||$ is Euclidean norm in $\mathbf{R}^m$, $< \cdot, \cdot >$ is skalar product in $\mathbf{R}^n$ and $\mathbf{R}^m$ respectively.

Определения слабых решений нелинейных регуляризованных задач, допускающих предельный переход

Данилов В. Г. (Московский Технический Университет Связи и Информатики, Москва, Россия)

Обозначим через $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ семейство функций $f(x, \varepsilon)$, таких что для любой функции $\psi \in C_0^\infty$ справедлива оценка $\langle f(x, \varepsilon), \psi \rangle = O(\varepsilon)$, где $\langle , \rangle$ означает действие обобщенной функции $f(x, \varepsilon)$ на пробную функцию $\psi(x)$. Слабым асимптотическим решением называется семейство распределений $u_\varepsilon(x, t)$, удовлетворяющее соотношению $Lu_\varepsilon = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$. Но здесь возникает вопрос, что такое L? Ответ: «L – это начальный нелинейный оператор из постановки задачи», не всегда верен. Впервые это было замечено в работе Данилова, Омельянова, Радкевича про слабые решения системы фазового поля и предельный переход к задачам типа Стефана. Другим примером является определение в слабом смысле солитонных решений уравнений типа КдВ с малой дисперсией. В докладе предполагается обсудить конструкции слабых решений и новые результаты о распространении и взаимодействии солитоноподобных структур.

Литература

[1] V. G. Danilov, G. A. Omel′yanov, and E. V. Radkevich, *Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system*, European J. Appl. Math., 10 (1999), 55–77.

[2] V. G. Danilov and V. M. Shelkovich, *Propagation of infinitely narrow δ-solitons*, http://arXiv.org/abs/math-ph/0012002.

Generic singularities of time averaged optimization in Arnold's model

Davydov A. (Department of Mathematics, Vladimir State University, Russia)

We study the time averaged profit for one parametric families of control systems and profit densities on the circle. The complete list of generic singularties of the optimal time averaged profit is found. It includes the singularities provided by optimal cyclic strategies, the ones defined by the best stationary strategies and the singularities of the transition from the optimal stationary strategy to the cyclic one or vice versa. The stability of these singularities under small perturbations of a generic problem is shown.

References

[1] V.I. Arnol'd - *Averaged optimization and phase transition in control dynamical systems*// Funct. Anal. and its Appl. **36** (2002), 1-11.

[2] V.I. Arnol'd - *On a Variational Problem Connected with Phase Transitions of Means in Controllable Dynamical Systems*//in M.Birman (ed) et al., Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics I, Kluwer/Plenum Publishers, ISBN 0-306-47333-X, July 2002.

[3] L.N. Bryzgalova -*Maximum functions of a family of functions depending on parameters*// Funct. Anal. Appl. 12, 50-51 (1978).

[4] L.N. Bryzgalova -*Singularities of the maximum of a parametrically dependent function* // Funct. Anal. Appl. 11, 49-51 (1977).

[5] A.M. Zirlin, -*Averaged optimization methods and applications*// (Russian) M.: Nauka. Fizmatlit, 1997.-304 pp., ISBN 5-02-0150991-6

Обобщенные решения дифференциального уравнения Ляпунова

Демиденко Г. В., Матвеева И. И. (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН)

Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 < t < T, \quad H(0) = H(T),$$

где $A(t)$ — T-периодическая матрица с кусочно-непрерывными элементами. В терминах интегрального среднего нормы обобщенного решения $\frac{1}{T}\int\limits_0^T \|H(t)\| dt$ мы указываем условия асимптотической устойчивости стационарных решений квазилинейной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0,$$

находим области притяжения этих решений, устанавливаем оценки решений системы при $t \to \infty$. Полученные результаты продолжают исследования авторов [1–3]. Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00095.

Литература

[1] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. *Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами*// Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

[2] Demidenko G.V., Matveeva I.I. *On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients*// Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, № 2. P. 37–48.

[3] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. *Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений*// Сиб. мат. журн. (в печати)

Метод Гельмгольца-Кирхгофа и плоское цикло-периодическое течение с вихревыми особенностями за препятствием

Демидов А. С. (МГУ)

Как описать вихревые особенности за обтекаемым телом, их влияние на течение, их зависимость от управляющих параметров?

Предлагаемый новый подход в изучении этих вопросов для случая плоского течения базируется на идеях метода Гельмгольца–Кирхгофа и уравнении Эйлера $d\vec{V}/dt = -\nabla p$, в предположении, что течение несжимаемой жидкости потенциально, а его скорость $\vec{V} : z = x + iy \mapsto \overline{dw}/dz = (u_x, -v_y)$ терпит разрыв вдоль линий, разделяющих соседние вихревые зоны (в которых потенциал $u(x, y)$ имеет логарифмическую особенность).

Для k-звенного полигонального препятствия и априори заданном числе l вихревых особенностей (чередующихся в "шахматном"или ином порядке) течение полностью определяется функцией

$$t \to (U_1(t), \dots, U_m(t)), \qquad \text{где} \quad m = m(k, l)),$$

подчиненной условию *цикло-периодичности* и удовлетворяющей системе уравнений

$$\sum_{1 \le i \le m} c_{ij}(U_1, \dots, U_m) \frac{dU_i}{dt} + d_j(U_1, \dots, U_m) = 0,$$

коэффициенты которой c_{ij} и d_j вычисляются по решению краевой задачи для функции Гельмгольца–Кирхгофа, определяемой как $\ln(dz/dw)$.

New results of mathematical hydrodynamics

Dinaburg E. I. and Sinai Ya. G. (Princeton University and Landau Institute)

In this talk we consider some new theorems of existance solution for 3-dimensional Navier-Stokes system.

Асимптотика контрастных структур типа ступеньки для простейшей вариационной задачи

Дмитриев М.Г. (МГСУ), Ни Минь Кань (Восточно-Китайский педагогический ун-т, г. Шанхай, КНР)

Работа выполнена совместно с А.Б.Васильевой. Для простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами рассматриваются вопросы, связанные с построением асимптотики экстремалей с внутренним переходным слоем. Сначала для задачи, в которой производная входит в интегрант с малым параметром, в общем случае, т.е. задачи на минимум

$$J[y] = \int_a^b f(y, \epsilon \frac{dy}{dt}, t)\, dt \longrightarrow \min_y,$$

определенной на множестве функций $y(t) \in C^{(1)}[a,b]$ и удовлетворяющих условиям

$$y(a,\epsilon) = y^0, \quad y(b,\epsilon) = y^1,$$

где $\epsilon > 0$ - малый параметр, устанавливаются условия существования решения с внутренним переходным слоем типа ступеньки.

Затем для такой же задачи, где производная в квадрате входит в интегрант линейно и с малым параметром(регуляризованная задача или задача с дешевым управлением), показывается тождественность главного члена асимптотики контрастных структур типа ступеньки в решении вариационной задачи, где асимптотика строится на основе прямого "разложения"условий задачи в постулированный асимптотический ряд, нулевому асимптотическому приближению к экстремали Эйлера, т.е. к решению краевой задачи для уравнения Эйлера. В последней задаче при построении асимптотики соответствующей контрастной структуры имеет место, так называемый, критический случай.

Существуют ли нетривиальные аттракторы Эно?

Добрынский В.А. (Институт металлофизики НАН Украины)

Доказано предложение, смысл которого прямо противоположен тому, что составляет содержание "основной теоремы" М.Бенедикса и Л.Карлесона. Точнее: пусть $T : \binom{x}{y} \mapsto \binom{1-ax^2+by}{x}$ — отображение Эно, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — единичные координатные вектора, а $\wp>0$, $c>0$ —константы.

Теорема ℵ. Для любого $a \in (2-\wp, 2)$ найдётся $b_a > 0$ такое, что следующие утверждения:

ı) Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор); *ıı*) на Λ_+ есть точка z_1 такая, что

1) её орбита $\mathcal{O}rb(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb(z_1))=\Lambda_+$ и

2) существуют постоянные $c > 0$, $K_{z_1} > 0$ и единичный вектор $\vec{i}$ такие, что неравенство

$\|DT^m(z_1)\vec{i}\| \geq K_{z_1} e^{cm}$ справедливо для всех натуральных m;

для любых $b \in (0, b_a)$ не могут быть выполнены одновременно сразу все.

Полагая $K_{z_1} = 1$ и $\vec{i} = \vec{e}_j$, получаем утверждение, которое хотя и не является буквально противоположным "основной теореме", но по своему смыслу в точности таково.

Теорема $\boldsymbol{\Omega}$. Для любого $a \in (2-\wp, 2)$ найдётся $b_a > 0$ такое, что следующие утверждения: *ı*) Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор); *ıı*) на Λ_+ есть точка z_1 такая, что

1) её орбита $\mathcal{O}rb(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb(z_1))=\Lambda_+$ и

2) существует постоянная $c \in (0, \log 2)$ такая, что неравенство $\|DT^m(z_1)\vec{e}_\jmath\| \geq e^{cm}$ (здесь

$\vec{e}_\jmath$ либо $\vec{e}_1$, либо $\vec{e}_2$) справедливо для всех натуральных m;

для любых $b \in (0, b_a)$ не могут быть выполнены одновременно сразу все.

Теорема $\boldsymbol{\Omega}$ доказана полностью. Что касается теоремы ℵ, её справедливость установлена в рамках определённых ограничений на значения, которые может принимать постоянная $\boldsymbol{K_{z_1}}$.

Спектральный анализ одного класса операторов, связанных с дифференциальными уравнениями произвольного порядка

Долгих И.Н. (Поморский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, г.Архангельск)

Мирзоев К.А. (Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова)

В работе исследуются вопросы об асимптотическом разложении фундаментальной системы решений одного класса дифференциальных уравнений вида $[l_n f](x) = \lambda f(x)$ при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$, где l_n — формально самосопряжённое квазидифференциальное выражение n-го порядка с комплекснозначными коэффициентами. При этом условия, налагаемые на коэффициенты выражения l_n, того же характера, что и в работах [1],[2]. Полученные результаты позволяют найти дефектные числа симметрического оператора L_0, порождённого выражением l_n, и определить природу спектра самосопряжённых расширений этого оператора.

Часть полученных результатов опубликованы в [3].

Второй автор поддержан грантом РФФИ №02-01-00790 и грантом поддержки ведущих научных школ НШ — 1927.2003.1.

Литература

[1] Орлов С.А. // ДАН 1953 т.92 №3 с.483-486

[2] Неймарк Ф.А. // УМН 1962 т.17 вып. 4 с.157-163

[3] Мирзоев К.А. // ДАН 2001 т.380 №5 с.591-595

A random version of Filippov and Bogolyubov theorems for functional differential inclusions

V. Dragan (Technical University of Moldova)

Denote by (Ω, A, P) a complete probability space, $AC([a,b], R^n)$ the space of all absolutely continuous maps from $T = [a,b]$ into $R^n, L(T, R^n, \mu)$ the space of (classes) of measurable maps $f : T \to R^n$ such that $||f||_1 = \int\limits_T ||f(t)||dt < \infty$, $ACC(\Omega \times T, R^n)$ the space of maps absolutely continuous in t and measurable in ω. Let $\Psi : \Omega \times AC(T, R^n) \to cdL(T, R^n, \mu)$ be a set-valued map with nonempty closed and decomposable values in $L(T, R^n, \mu)$.

Theorem. Assume that

1) the multifunction $\omega \to \Psi(\omega, x)$ is $(A, B(L))-$measurable;

2) there exists a measurable map $k : \Omega \times T \to R^+$ such that for every ω, $k(\omega, \cdot) \in L(T)$ and for every $x, z \in AC(T, R^n)$ and every $t \in T$

$$h_{L([a,t],R^n,\mu)}(\Psi(\omega, x), \Psi(\omega, z)) \le \int_a^t k(\omega, s)||x(s) - z(s)||ds, \omega \in \Omega;$$

3) for any $y \in ACC(\Omega \times T, R^n)$ there exists a measurable map ρ such that $\rho(\omega, \cdot) \in L(T)$ and for every $t \in [a, b]$

$$d_{L([a,t],R^n,\mu)}(\dot{y}(\omega), \Psi(\omega, y(\omega))) \le \int_a^t \rho(\omega, s)ds, \quad y(\omega, a) = x_0(\omega),$$

then for every $\beta > 0$, there exists a random solution $x \in ACC(\Omega \times T, R^n)$ of the problem

$$\dot{x} \in \Psi(\omega, x), \quad x(\omega, a) = x_0(\omega)$$

such that for every $(\omega, t) \in \Omega \times T$

$$||x(\omega, t) - y(\omega, t)|| \le \int_a^t \rho(\omega, s) \exp\Big(\int_s^t k(\omega, u)du\Big)ds + \beta \exp\Big(\int_a^t k(\omega, u)du\Big).$$

It in addition there exist $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{M} \int_0^M \Big\{ \int_\Omega \Psi(\omega, x)dP(\omega)\Big\}dt = \Psi_0(x)$ then we can prove a basic theorem of the method of averaging for inclusions

$$\dot{x} \in \varepsilon\Psi(\omega, x), t \in [0, l\varepsilon^{-1}], l > 0, x(\omega, 0) = x_0 \in R^n.$$

Neumann-Neumann method for mortar finite element discretization of elliptic problems

Maksymilian Dryja (Warsaw University)

A discretization of PDEs on nonmatching triangulation is a modern approach for solving difficult differential problems, for example, with singular solutions. In the first part of talk a finite element discretization of elliptic problems with discontinuous coefficients will be discussed. For that the so-called mortar technique will be used (different triangulation in different subregions of original region where the differential problem is imposed). In the second part of talk a parallel algorithm for solving the resulting discrete problem will be designed and analyzed. It is based on a domain decomposition method and is called the Neumann-Neumann algorithm. It is proved that the method is almost optimal and very well suited for parallel computations

Stable and Unstable Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations

Jinqiao Duan (Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago, USA)

Stable and unstable manifolds provide geometric structures for describing and understanding dynamics of nonlinear systems. The theory of invariant manifolds for both finite and infinite dimensional deterministic systems, and for stochastic ordinary differential equations is relatively mature. In this presentation, we present recent results on invariant manifolds for infinite dimensional *random* dynamical systems generated by *stochastic* partial differential equations. We first introduce a random graph transform and a fixed point theorem for non-autonomous systems. Then we show the existence of generalized fixed points which give the desired invariant manifolds.

Complex Neumann type boundary problem and decomposition of the Lebesque space in the sum of analytic and divergence subspaces.

Dubinskii Julii A. (Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia)

We consider the boundary value problem

$$\begin{aligned} \Delta u(z) = h(z), \quad z \in G \subset \mathbb{C}^n_z, \\ (\nabla_z u, \vec{n}_z)\big|_{\partial G} = 0. \end{aligned}$$

This problem is normal solvable in the sense of Hausdorf if and only if inequality

$$\|u\|_{L_2/\mathcal{O}_2} \leq M \|\nabla_{\bar z} u\|_{L_2}, \quad M > 0,$$

holds. (Here $\nabla_{\bar z} = \{\partial_{\bar z_1}, \ldots, \partial_{\bar z_n}\}$ is the complex Cauchy-Riemann gradient, $\mathcal{O}_2 \subset L_2$ is a subspace of analytic functions.).

These facts give the decomposition

$$L_2 = \mathcal{O}_2 \oplus \mathrm{div}_z \overset{\circ}{D}{}_2^1,$$

where

$$\overset{\circ}{D}{}_2^1 = \{\vec{w} \in L_2 : \ \mathrm{div}_z \vec{w} \in L_2 \ \& \ (\vec{w}, \vec{n}_z)\big|_{\Gamma} = 0\}$$

($\vec{n}_z$ — complex normal on ∂G).

Ограниченные решения семейств систем дифференциальных уравнений и их аппроксимация

Джумабаев Д.С. (Институт математики МОН РК)

На $R = (-\infty, \infty)$ рассматривается однопараметрическое семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \qquad v \in R^n, \quad x \in [0,\omega]. \tag{1}$$

Через $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$, $\overline{\Omega} = [0,\omega] \times R$, обозначим пространство ограниченных функций $v : \overline{\Omega} \to R^n$, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0,\omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0,\omega]$ с нормой $||v||_* = \max\limits_{x \in [0,\omega]} \sup\limits_{t \in R} \max\limits_{i=\overline{1,n}} |v_i(x,t)|$.
Предполагается, что столбцы матрицы $A(x,t)$ и вектор - функция $F(x,t)$ принадлежат $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$.

Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения $v^*(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$ уравнения (1). Построено семейство регулярных двухточечных краевых задач, позволяющее с заданной точностью определить $v^*(x,t)$. Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями исходной и аппроксимирующей задач. Результаты применяются к системы линейных гиперболических уравнений второго порядка. заданных на полосе.

Nilpotency of cronological algebras

Dzhumadil'daev A. S. , Tulenbaev K. M. (S. Demirel University, Almaty)

Cronological algebras appear in control theory (see, for example [1]). It is an algebra with the identity $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b)$.

Example: Polynomials $\mathbf{C}[x]$ under multiplication $a(x) \circ b(x) = a(x) \int_0^x b(x)\, dx$ is cronological. Let $a^{\cdot n}$ be a right-bracket

n-power $a \circ (\cdots (a \circ a) \cdots)$, where $a \in A$. An algebra A is called nil, if for any $a \in A$ there exists $n = n(a)$ such that $a^{\cdot n} = 0$. Say that A is nil with nil-index n if $a^{\cdot n} = 0$ for any $a \in A$. A is called nilpotent if there exists some N such that $a_1 \circ (\cdots (a_{N-1} \circ a_N) \cdots) = 0$ for any $a_1, \ldots, a_N \in A$.

Theorem 1. *Let A be a nil cronological algebra. Then A is nilpotent. If A is nil with nil-index n, then nilpotency index of A is no more than $2^n - 1$.*

Theorem 2.*Any finite-dimensional cronological algebra over complex numbers is nil.*

References

[1] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, *Cronological algebras and nonstationary vector fields,* Journal Soviet Math., **17**(1079), No.1, 1650-1675.

О неблуждающем множестве косого произведения отображений интервала

Ефремова Л. С. (Нижегородский государственный университет)

Изучена структура неблуждающего множества косого произведения отображений интервала

$$F(x, y) = (f(x),\ g_x(y)) \text{ для всех } (x, y) \in I, \tag{1}$$

удовлетворяющего гипотезе $(H.1^*)$ (где $I = I_1 \times I_2$ – замкнутый прямоугольник, а I_1, I_2 – отрезки). Пусть $T^1_*(I)$ – всюду плотное подпространство пространства C^1-гладких отображений вида (1), состоящее из отображений с Ω-устойчивым (в C^1-норме) факторотображением.

Скажем, что $F \in T^1_*(I)$ удовлетворяет гипотезе $(H.1^*)$, если существует натуральное число n_0 такое, что отображения $\varsigma_n : \{g_{x,n}\}_{x \in \Omega(f)} \to 2^{I_2}$, $\varsigma_n(g_{x,n}) = \Omega(g_{x,n})$, непрерывны для всех $n = n_0 j$, $j \geq 1$, (здесь $g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x$, $\Omega(\cdot)$ – неблуждающее множество, 2^{I_2} – пространство замкнутых подмножеств отрезка I_2).

Последовательность отображений $\eta_n = \varsigma_n \circ \rho_n : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ (здесь ρ_n – C^1-представление такое, что $\rho_n(x) = g_{x,n}$ для всех $x \in \Omega(f)$) может демонстрировать различные типы функционального поведения от отсутствия поточечной сходимости до равномерной сходимости. Установлены теоретико-множественные соотношения между графиками отображений η_n ($n = n_0 j$, $j \geq 1$) и графиком Ω-функции $\zeta : \Omega(f) \to 2^{I_2}$, где $\zeta(x) = \Omega(F)(x)$ для всех $x \in \Omega(f)$, $\Omega(F)(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in \Omega(F)\}$

– срез F-неблуждающего множества $\Omega(F)$ по $x \in \Omega(f)$. С использованием этих соотношений дано качественное описание структуры неблуждающего множества отображения (1), удовлетворяющего гипотезе $(H.1^*)$. Приведены примеры.

Discrete spectrum of complex Jacobi matrices and Pavlov's theorems

Egorova I., Golinskii L. (Institute for Low Temperature Physics, Kharkov, Ukraine)

Let

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & b_1 & c_1 & \dots & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

be a complex Jacobi matrix with

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

the operator J is a compact perturbation of the discrete Laplacian J_0. We say that J belongs to the class $\mathcal{P}(\beta)$ if

$$|a_n - 1| + |c_n - 1| + |b_n| \le C_1(\exp(-C_2 n^\beta)), \quad n \to \infty, \quad 0 < \beta < 1.$$

Theorem 1. *Let $J \in \mathcal{P}(\beta)$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ and let E be a limit set of the discrete spectrum $\sigma_d(J)$. Then E is the closed set of the Lebesque measure zero and its Hausdorff dimension obeys* $\dim E \le (1-2\beta)(1-\beta)^{-1}$. *Moreover, if $J \in \mathcal{P}(\frac{1}{2})$, then $E = \varnothing$ ($\sigma_d(J)$ is a finite set).*

Theorem 2. *For arbitrary $\varepsilon > 0$ and $-1 < \lambda < 1$ there exists an operator $J \in \mathcal{P}(\frac{1}{2} - \varepsilon)$, such that $E = \{\lambda\}$.*

Cauchy problem for fractional diffusion equations

Eidelman S. D. , Kochubei A.N.

(Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

We consider an evolution equation with the regularized fractional derivative of an order $\alpha \in (0,1)$ with respect to the time variable, and a uniformly elliptic operator B with variable coefficients acting in the spatial variables. Such equations describe the anomalous diffusion on fractals, for which the average square displacement of a diffusive particle behaves, for a large t, as const $\cdot t^{\alpha}$.

The case of a homogeneous equation with $B = \Delta$ was studied in [1,2] where the fundamental solution of the Cauchy problem was constructed and investigated. For equations with variable coefficients, a uniqueness theorem for the class of bounded functions (in the case $n = 1$, also an exact uniqueness theorem for the class of functions of exponential growth) was proved in [2].

In this work we construct, under certain conditions upon the coefficients of the operator B, the Green matrix of the Cauchy problem for the general case. Its properties are, in many respects, different from the properties of similar objects of the classical theory of second order parabolic differential equations. For example, already in the case $B = \Delta$ the fundamental solution $Z(t-\tau, x-\xi)$ has a polar singularity at the "diagonal" $x = \xi$. At the same time, the tools developed in the general theory of parabolic systems [3] are useful for the construction of the Green matrix in the present situation.

References

[1] W. R. Schneider and W. Wyss, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 134–144.

[2] A. N. Kochubei, *Differential Equations* **26** (1990), 485–492.

[3] S. D. Eidelman, *Parabolic Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

Некоторые аспекты аналогии между дифференциальными уравнениями неголономных систем оптики и механики

Емельянова И. С. (Нижегородский государственный университет),
Малыкин Г. Б. (Институт прикладной физики РАН)

В статье [1] Г. Б. Малыкина и Ю. И. Неймарка доказано, что связь между состоянием электромагнитного поля в скрученном одномодовом волоконном световоде (ОВС) с линейным двулучепреломлением и углом его кручения носит неголономный характер. Пять переменных (отношение амплитуд и фазы электрического поля, угол кручения световода и длина, отсчитываемая от начала отрезка ОВС) подчиняются трем неголономным связям. Оптическая система ОВС сравнивается с механической системой, представляющей собой модифицированную модель саней Чаплыгина, имеющей пять обобщенных координат, стесненных тремя неголономными связями. Обе модели объектов имеют две степени свободы и описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными неголономными связями. Рассматривается несколько аспектов аналогии между свойствами приведенных оптической и механической систем.

Литература

[1] Малыкин Г.Б., Неймарк Ю.И. *Неголономность связи состояния электромагнитного поля в одномодовом световоде с линейным двулучепреломлением и угла его кручения* // Изв. ВУЗов. Радиофизика. Т. XLI, № 9. 1998. С. 1125–1136.

Колебания вязкой жидкости в прямоугольном сосуде с упругой вставкой на стенке

Ершов Б. А., Кутеева Г. А. (Санкт-Петербургский государственный университет)

Рассматривается прямоугольный сосуд, внутри которого находится вязкая тяжелая несжимаемая жидкость при больших числах Рейнольдса. Задача плоская. Дно и одна из стенок сосуда — жесткие, другая стенка содержит упругую вставку. Высота невозмущенной поверхности жидкости совпадает с высотой упругой вставки (балки). Сосуд покоится. Движение жидкости происходит из-за ненулевых начальных условий. Амплитуду волн и прогиб балки считаем малыми. Задачу линеаризуем.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности. Граничные условия — это условия «прилипания» на жестких поверхностях (жесткой стенке и дне). На свободной поверхности жидкости ставятся три условия: одно кинематическое и два динамических условия — условие равенства нулю касательных и нормальных напряжений. Упругая поверхность вставки также является свободной поверхностью, на которой ставятся кинематическое и два динамических условия — условие равенства нулю касательных напряжений и уравнение колебаний балки.

Неизвестными в задаче являются вектор скорости точек жидкости, свободная поверхность жидкости и прогиб упругой вставки. Вектор скорости представим в виде суммы двух операторов, зависящих от новых неизвестных функций φ и ψ. При этом функция φ будет гармонической функцией, а функция ψ будет удовлетворять уравнению теплопроводности. Граничные условия представимы как зависимость функций φ и ψ и их производных. Если число Рейнольдса велико, то функция ψ, характеризующая вихревую составляющую поля скоростей, есть функция типа пограничного слоя (с точностью до множителя, зависящего от времени).

On an initial boundary value problem in a bounded rectangle for the KdV equation in fractional order Sobolev spaces

Faminskii A. V. (Peoples' Friendship University of Russia)

We consider an initial boundary value problem for the Korteweg – de Vries equation in a rectangle $Q_T = (0,T) \times (0,1)$

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(t,0) = u_1(t), \quad u(t,1) = u_2(t), \quad u_x(t,1) = u_3(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Let $\Phi_0(x) \equiv u_0(x)$ and for natural m

$$\Phi_m(x) \equiv -\Phi'''_m(x) - \sum_{l=0}^{m-1} C^l_{m-1}\Phi_l(x)\Phi'_{m-l-1}(x).$$

Theorem. *Let $u_0 \in H^s(0,1)$, $u_1 \in H^{(s+1)/3}(0,T)$, $u_2 \in H^{(s+1)/3}(0,T)$, $u_3 \in H^s(0,T)$ for some $T > 0$ and $s \geq 0$ such, that $(s/3 - 1/6)$ and $(s/3 - 1/2)$ are noninteger numbers. Assume also, that $u_1^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$, $u_2^{(m)}(0) = \Phi_m(1)$ for any integer $m \in [0, s/3 - 1/6)$, $u_3^{(m)}(0) = \Phi'_m(1)$ for any integer $m \in [0, s/3 - 1/2)$. Then there exists a unique solution $u(t,x)$ of the problem (1)–(3) such, that $D^l_t u \in C([0,T]; H^{s-3l}(0,1))$ for any integer $l \in [0, s/3]$, $u \in H^{(s+1)/3,s+1}_{t,x}(Q_T)$.*

The work was supported by RFBR grant 02–01–00648.

On the null-controllability problem for the wave equation on a half-plane

Larissa Fardigola (Kharkov National University)

We consider controllability problems for the control system

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \Delta w(x,t),\ w(0,t) = u_0(t)u_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0,\ t \in (0,T), \tag{1}$$

where $T > 0$, $w(\cdot,t) \in H_0^s$ $(t \in [0,T])$ is an unknown function, $u_0 \in B_1(0,T)$, $u_1 \in B_a(-\alpha,\alpha)$ are controls, $B_a(\gamma,\delta) = \{v \in L^\infty(\gamma,\delta) \mid |v(\xi)| \le a \text{ a.e. on } (\gamma,\delta)\}$, H_0^s is the Sobolev space, $s \le 0$.

We obtain conditions for solvability of null-controllability problem and approximate null-controllability problem for system (1). To get these results we use the transforms of Fourier and Hankel. We also reduce solving of approximate null-controllability problem to the the Markov power moment problem.

Формула следов для компактных возмущений дискретных операторов

Фазуллин З. Ю. (Башкирский Государственный университет)

Пусть $T = T^*$ полуограниченный снизу дискретный оператор в гильбертовом пространстве H, V — самосопряженный оператор в H из класса S^p, $2 < p \in N$. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ соответственно собственные числа операторов T и $L = T + V$, пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей. Базис в H из ортонормированных собственных векторов оператора T обозначим через $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, а функцию распределения собственных чисел оператора T — через $N(t) = \sum_{\lambda_k < t} 1$.

Справедлива

Теорема. *Если $N(t) = o(t^{p/(p-2)})$, $2 < p \in N$ при $t \to \infty$, то существует последовательность $\{n_m\}_{m=1}^\infty \subset N$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} [\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k] = 0.$$

Начально-краевая задача для алгебраическо-дифференциальной системы уравнений с частными производными

Федоров В. Е. (Челябинский государственный университет)

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ w(x,0) = w_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t) = v(x,t) = w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

для системы уравнений

$$m(x)u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$n(x)w_t(x,t) = \Delta v(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

$$0 = \Delta w(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, функция $m(x) \in L_\infty(\Omega)$ неотрицательна, а функция $n(x) \in L_\infty(\Omega)$ строго положительна почти всюду в области Ω.

Редуцируем задачу (1) – (5) к задаче Коши $u(0) = u_0$ для уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$. Для этого возьмем $\mathcal{U} = (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^3$, $\mathcal{F} = (H^{-1}(\Omega))^3$,

$$L = \begin{pmatrix} m(x) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & n(x) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F}), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F}).$$

Показано, что оператор M сильно $(L,1)$-радиален [1], поэтому существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа системы, вырождающаяся на ядре и M-присоединенных векторах высоты 1 оператора L.

[1] Федоров В.Е. *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов*// Алгебра и анализ. 2000. Т.12. Вып.3. С.173-200.

Асимптотическое поведение решений полулинейного параболического уравнения в цилиндре

Филимонова И. В. (МАТИ-РГТУ им. Циолковского)

Рассматриваются решения полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u - a(x)f(u), \qquad a(x) \geq 0$$

удовлетворяющие условию Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на границе цилиндра $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Предполагается, что $f(u)$ – непрерывная возрастающая функция, $f(0) = 0$, $f'(u) \to 0$ при $u \to 0$, $\frac{f(u)}{|u|}$ возрастает.

При этих предположениях доказывается, что все решения стремятся к 0 при $t \to \infty$. Изучается асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решений, которые сохраняют знак при $t > 0$, и решений, которые обращаются в 0 при каждом t.

Наряду с оператором Лапласа в старшей части уравнения может быть рассмотрен равномерно эллиптический оператор в дивергентной форме с переменными коэффициентами.

Integral estimates to the rate of decay for solutions of the wave equation in unbounded domains

Filinovskii A. V. (Moscow State University)

Let $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, be an unbounded domain whose closure does not contain the origin, with smooth boundary Γ. Let us consider the first mixed problem for the wave equation

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in Q = (t > 0) \times \Omega,$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x),$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t > 0.$$

Assume that the initial functions are real-valued, smooth on $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, compatible with the boundary condition and boundedly supported.

We study the behavior to the local energy $E_R(t) = \int_{\Omega \cap \{|x|<R\}} \left(u_t^2(t, x) + |\nabla_x u(t, x)|^2\right) dx$, $R > 0$, for the solution of problem as $t \to \infty$. The surface Γ is called star-shaped with respect to the origin, if

$$(\nu, x) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

(ν is the unit vector of the outward pointing normal to Γ). Let $S_\rho = \Omega \cap \{|x| = \rho\}$, $\rho > 0$, and let Σ_ρ be the set of points x belonging to the unit sphere and satisfying $\rho x \in S_\rho$. Denote by λ_ρ the eigenvalue with the least possible modulus of the Laplace–Beltrami operator in Σ_ρ with zero Dirichlet data on $\partial \Sigma_\rho$. Let $\Lambda_\Omega = \underline{\lim}_{\rho \to \infty} |\lambda_\rho|$.

Theorem 1. *Let $n \geq 2$. There is a positive constant Λ^* depending on n and such that, for any domain $\Omega \subset R^n$ satisfying condition* (1) *and such that $\Lambda_\Omega > \Lambda^*$, the relation $\int_0^\infty t^2 E_R(t)\, dt < \infty$, $R > 0$ holds.*

Theorem 2. *There is a positive constant n^* such that, for $n > n^*$, for any domain $\Omega \subset R^n$ satisfying condition* (1)*, the relation $\int_0^\infty t^2 E_R(t)\, dt < \infty$, $R > 0$ holds.*

Acknowledgments. This work was supported by the RFBR Grant N 04-01-00618.

Об одном неравенстве на собственные числа задач Дирихле и Неймана

Филонов Н. (С.-Петербургский государственный университет)

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через λ_k (соотв. μ_k) собственные числа задачи Дирихле (соотв. Неймана) для оператора Лапласа в этой области, пронумерованные в порядке возрастания с учетом кратности. Предполагаем, что спектры обеих задач дискретны. При $d = 2$ для области, ограниченной аналитической кривой, Полиа и Сеге ([P], [S]), доказали (используя конформные отображения), что $\mu_2 \le \gamma\lambda_1$, где γ – абсолютная константа, $\gamma < 1$. Левин и Вайнбергер ([LW]) в произвольной размерности установили неравенство $\mu_{k+1} < \lambda_k$ при условии, что средняя кривизна $C^{2+\alpha}$-гладкой границы $\partial\Omega$ неотрицательна. Фридлендер ([F]) показал (используя псевдодифференциальный оператор "от Дирихле к Нейману"), что $\mu_{k+1} \le \lambda_k$ для ограниченных областей с $\partial\Omega \in C^1$. Мы предъявим простое доказательство неравенства $\mu_{k+1} < \lambda_k$ в общей ситуации.

Теорема. *Пусть $d \ge 2$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ такова, что вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно и мера области конечна, $|\Omega| < \infty$. Тогда $\mu_{k+1} < \lambda_k$ при всех k.*

Литература

[1] G. Polya, *Remarks on the foregoing paper,* J. Math. and Phys. (1952), vol. 31, p. 55–57.

[2] G. Szegö, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area,* J. Rat. Mech. Anal. (1954), vol. 3, p. 343–356.

[3] H. Levine, H. Weinberger, *Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues,* Arch. Rat. Mech. Anal. (1986), vol. 94, p. 193–208.

[4] L. Friedlander, *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues,* Arch. Rat. Mech. Anal. (1991), vol. 116, p. 153–160.

Topology of solutions of analytic differential equations in $\mathbb{C}^2$. Kupka-Smale property.

Firsova T. (MSU)

It is well known that a solution of a real differential equation is topologically trivial. It is either a point, or a line, or a circle. For complex time the situation is more difficult: the solution is a Riemann surface and it may have fundamental group with any number of generatives. Hence the natural question is: what is the topological type of a generic differential equation? In this work we consider equations:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

where $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ are analytic in $\mathbb{C}^2$. We consider equations in the topology of uniform convergence on compact sets. We call the equation generic if it belongs to a residual set.

Main results:

Theorem 1. Generic vector field of type (*) determines a foliation whose leaves are topological disks, all but a countable number of topological cylinders.

Theorem 2. Generic vector field of type (*) is Kupka-Smale.

To preturb the equation we use approximation theory technics, namely, Vermer and Stolzenberg theorems about polynomial approximation of continuous functions on curves imbedded in $\mathbb{C}^n$.

On the clamped buckling eigenvalues

Friedlander L. (University of Arizona, Tucson, USA)

Let ν_j be the eigenvalues of the problem $\Delta^2 u + \nu \Delta u = 0$ in a Eucledean domain, with the condition $u(x) = \nabla u(x) = 0$ on the boundary, and let λ_j be the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in the same domain. Payne conjectured that, for planar domains, $\nu_1 \geq \lambda_3$. I will show that this is not the case. Moreover, if a domain is close to a disk then most likely $\nu_1 < \lambda_3$. On the other hand, for domains that are invariant under rotation by the angle $\pi/2$, the Payne conjecture holds. I will also review the status of another conjecture of Payne: $\nu_k \geq \lambda_{k+1}$. This conjecture remains open.

About the quasistationary approximation for Stefan problem

Frolova E. (С.-Петербургский электротехнический университет)

We consider free boundary problems for elliptic equations such that Hele-Show and Mullion-Sekerka problems. These problems appear, when one studies the process of solidification and liquidation of materials with zero specific heat and they can be considered as the quasistationary approximation for one and two phase Stefan problems. We prove local solvability of these problems in anisotropic Sobolev spaces. The proof is based on the careful analysis and coercive estimates of solutions to linearized problems in given domains.

On regular and singular perturbations of waveguides

Gadyl'shin R.R. (Bashkir State Pedagogical University)

We consider regular and singular perturbations of the Neumann and Dirichlet boundary value problems for $\mathcal{H}_0^{(m)} := -(\Delta+\mu_m)$ in n-dimensional cylinder $\Pi = (-\infty, \infty)\times\Omega$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is a simply connected bounded domain with C^∞-boundary for $n \geq 3$ and is an interval (a, b) for $n = 2$. We indicate by μ_m the eigenvalues of $-\Delta' := -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ in Ω, $\mu_j < \mu_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$ subject to the same boundary condition as in the original non-perturbed problem. The Neumann problem is a mathematical model describing acoustic waveguide while the Dirichlet one corresponds to a quantum waveguide. It is known that unperturbed boundary value problems have no eigenvalues. At the same time eigenvalues can emerge under perturbations. We study the questions on existence and absence of such emerging eigenvalues and constructing their asymptotic expansions. The regular perturbation is performed by a small localized linear operator of second order. The example of such operator is a small complex potential. Other examples are small deformations of strips and cylinders which can be reduced to the case we consider by a change of variables. As a singular perturbation we consider the switching of type of boundary condition at a small segment of the boundary.

The work is supported by grants of RFBR (02-01-00693, 02-01-00768) and by the program "Scientific Schools" (1446.2003.1).

Сходимость разностных схем и метода непосредственного моделирования к решениям уравнения Смолуховского[4]

Галкин В. А. (Обнинский государственный университет атомной энергетики)

Пусть в объеме $V(N)$ рассматривается система из N частиц, имеющих значения массы во множестве неотрицательных чисел. Предположим, что частицы хаотически движутся в $V(N)$, испытывая парные столкновения, во время которых частицы могут сливаться, образуя частицы суммарной массы (акт коагуляции). Принятой математической

[4] Выполнено при поддержке РФФИ, грант 02-01-01014а

моделью процесса коагуляции при $N \to \infty$, $V(N) \to \infty$ является кинетическое уравнение Смолуховского.

Настоящая работа посвящена вопросу о связи сходимости разностных схем к решениям задачи Коши и предельного поведения при $N \to \infty$, $V(N) \to \infty$ результатов прямого статистического моделирования коагуляции, основанного на случайном розыгрыше актов коагуляции на уровне отдельных частиц. На этом пути получен математически строгий вывод уравнения Смолуховского для широкого класса интенсивностей коагуляции и начальных данных.

При выполнении условий теорем корректности устанавливается, что решение задачи Коши для уравнения Смолуховского является пределом последовательности средних концентраций, полученных методом непосредственного моделирования (Монте–Карло) при последовательных предельных переходах: сначала $N \to \infty$, а затем устремляем параметр срезки интенсивности взаимодействия к бесконечности.

Тестирование метода Монте–Карло проведено в для различных видов интенсивности коагуляции и начальных данных посредством сравнения с точными решениями задачи Коши. Данные вычислительных экспериментов указывают на достаточно быструю сходимость приближений к точным решениям при $N \sim 200$.

Построение асимптотических решений задачи об авторезонансе

Гарифуллин Р.Н. (Институт математики, Уфа)

Исследуется нелинейное уравнение второго порядка, возмущенное быстро осциллирующей функцией с малой амплитудой:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F(u) = \varepsilon f \cos\left(\frac{\Phi(\tau)}{\varepsilon}\right), \quad t > 0,\ 0 < \varepsilon \ll 1,\ \tau = \varepsilon t.$$

В качестве фазы возмущения берется функция $\Phi(\tau) = \tau + \tau^3\phi(\tau)$; нелинейная функция $F(u)$ имеет вид: $F(u) = u + au^2 + bu^3 + u^4 g(u)$; здесь $\phi(\tau), g(u)$ – гладкие функции, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Рассматриваются решения, которые в начальный момент находятся вблизи устойчивого положения равновесия невозмущенного уравнения. Для таких решений ставится задача о построении асимптотики при $\varepsilon \to 0$, пригодной на большом временнóм интервале $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Особый интерес представляют решения, амплитуда которых нарастает со временем до величин порядка $\mathcal{O}(1)$.

Явление существенного роста амплитуды колебаний решения нелинейной задачи принято называть авторезонансом. Искомые решения описывают это явление. Подобные эффекты возникают в ряде физических систем, например, в ускорителях релятивистких частиц.

В работе методом согласования построено двухпараметрическое семейство асимптотических решений уравнения (1). Построенная асимптотика может быть обоснована.

Nonlinear Instantaneous Processes with Ordinary Differential Equations

Gichev T., Angelova R. (Sofia, Bulgaria)

Let $t \in (t_0, T)$ and $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. For $T \to t_0$ and $\varepsilon \to \varepsilon_0$ in $[t_0, T]$ we consider the system

$$\frac{dx}{dt} = -A(x,t)x\alpha_{T\varepsilon}(t) + B(x,t)\alpha_{T\varepsilon}(t) + g(x,t) \ ,$$

where x is an m-dimensional variable, $A(x,t)$ is a diagonal matrix of order m with positive diagonal elements; the function $\alpha_{T\varepsilon}(t)$ is a scalar function and $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha_{T\varepsilon}(t) = \infty$. Let $x_{T\varepsilon}(t),\ t \in [t_0, T]$ be a solution of the system with initial conditions $x(t_0) = x^0$. We give sufficient conditions, for which the following relationship is valid about the values of the variable at the end of the instantaneous process:

$$x^+ = \lim_{T\to t_0} \lim_{\varepsilon\to 0} x_{T\varepsilon}(T) = A^{-1}(x^+, t_0)B(x^+, t_0) \ .$$

The obtained results are applied toward the analysis of the instantaneous switching in nonlinear electrical circuits.

Uniqueness and nonuniqueness for semilinear parabolic equations with nonlinear integral boundary condition

Gladkov A.L. (Vitebsk State University)

We consider the following nonlocal initial boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t)u^p & \text{for } x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{for } x \in \partial\Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $p > 0$ and $l > 0$. Here, $c(x,t)$ is a nonnegative locally Hölder continuous function defined for $x \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$ and $k(x,y,t)$ is a nonnegative continuous function defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$. The initial data $u_0(x)$ is a nonnegative continuous function satisfying the boundary condition at $t = 0$.

We prove uniqueness with any initial data for $\min(p,l) \geq 1$ and with nontrivial initial data otherwise, nonuniqueness of solution with trivial initial data for $p < 1$ or $l < 1$. The criteria for nonexistence of global solutions for sufficiently large initial data, global nonexistence of all nontrivial solutions as well as global existence for small initial data are also given. Analogously results have been obtained for heat equation with absorption term.

Сингулярные возмущения самосопряженных операторов

Глазкова М. Ю. (Воронежский архитектурно-строительный университет)

Теорема. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, A — неограниченный ограничено обратимый оператор в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство $\mathcal{H}$, $B : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — ограниченный симметрический оператор, такой что область значений оператора $(I - PA^{-1}B)$ $\operatorname{ran}(I - PA^{-1}B)$ замкнута. Оператор P — ортопроектор на $\mathcal{L}$.*

Тогда следующие предположения эквивалентны:
(i) существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, такой что $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} \widetilde{A}$, $\widetilde{A}|_{\mathcal{L}} = B$ и область определения оператора $A' := A \cap \widetilde{A}$ плотна в $\mathcal{H}$;
(ii) множество $\mathcal{D} := \{f \in \operatorname{dom} A : (Bx, f) = (x, Af),\ x \in \mathcal{L}\}$ плотно в $\mathcal{H}$;
(iii) $\overline{\operatorname{ran}(I - A^{-1}B)} \cap \operatorname{dom} A \subset \operatorname{ran}(I - A^{-1}B)$, и $Bx = Ax$ для $x \in \mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A$.

Если выполнено (ii)–(iii), то для оператора $\widetilde{A}_1 : \operatorname{dom} \widetilde{A}_1 = \mathcal{L} \dotplus \mathcal{D}$ и $\widetilde{A}_1(x + f) = Bx + Af$, где $x \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{D}$ выполнено (i).

Следствие. *Предположим, что оператор A — положительный, а B — неположительный. Тогда $\widetilde{A}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$ и $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1^*$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — подпространство $\mathcal{H}$. Если $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — неограниченный самосопряженный оператор, $B : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — самосопряженный оператор и*

$\sigma(B_1) \cap \sigma(A) = \emptyset$, то существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$ такой, что $A \cap \widetilde{A}$ плотно определен и $\widetilde{A}|_{\widetilde{E}(\sigma B_1)\mathcal{H}}$ изометрически подобен оператору B_1; где $\widetilde{E}$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$.

Smooth dynamical system without convergence of the Krylov-Bogolyubov procedure

Golenishcheva-Kutuzova T. (МГУ)

Bowen's example or, so called, heteroclinic attractor is an example of a dynamical system with nonconvergence of time averages. This is the following two-dimensional dynamical system: two saddles such that the outgoing separatrix of each saddle coincides with the incomming separatrix of another one. Eigenvalues of these saddles are chosen in such a way that trajectories from interior approach the "separatrix eye".

The Krylov-Bogolyubov procedure is a time averaging of the initial measure (with choosing a converging subsequence in order to construct an invariant measure). The following problem is investigated: *to investigate convergence of the sequence of time averages in Bowen's example (i.e. whether it is really necessary to extract a converging subsequence).*

Main Theorem. (joint with V. Kleptsyn) In a Bowen's example for almost every initial measure (except for a subspace of infinite co-dimension) the sequence of time averages is not converging.

An explicit criteria of convergence in the Krylov-Bogolyubov procedure in a Bowen's example is found. In the case of nonconvergence the set of limit points is described (in terms of eigenvalues and initial measure).

Определяющие граничные условия эллиптических краевых задач с малым параметром

Голопуз С. А.[5] *(Владимирский государственный университет)*

Рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения порядка $2m_1$ малым параметром $\varepsilon > 0$, вырождающегося при $\varepsilon = 0$ в эллиптическое уравнение порядка $2m_0$ $(m_1 > m_0)$. Решение задачи ищется в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (w_k + \varepsilon^{k_0} v_k^{(\varepsilon)}),$$

[5]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 03-01-00138

где w_k не зависит от ε, а $v_k^{(\varepsilon)}$ – функция типа пограничного слоя. Изучен случай, когда система граничных соотношений, получающихся на начальном шаге итерационного процесса построения асимптотики, неполна (т.е. не позволяет найти коэффициент $v_0^{(\varepsilon)}$), но, будучи дополненной соотношениями второго шага итерационного процесса, становится полной. Для этого случая получены граничные условия, которым должна удовлетворять предельная функция w_0, и доказаны теоремы об асимптотическом разложении решения исследуемой краевой задачи.

On vibration of membrane with soft thin inclusions

Golovaty Yu. (Franko Lviv National University)

We study a singular perturbed boundary value problem for an elliptic operator of the second order associated with vibrating processes for a clamp membrane with non-homogeneous stiffness. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $\gamma \subset \Omega$ be a smooth closed curve without self-intersections. We consider an ε-neighborhood ω_ε of γ for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, so that $\omega_\varepsilon \subset \Omega$ and $\partial\omega_\varepsilon \in C^\infty$. We introduce the local coordinates (n, τ) on ω_ε where n is an oriented distance to γ along the normal and τ is the natural parameter of γ. Suppose a_0 and a are smooth positive functions and $m \in \mathbb{R}$. Let $a_\varepsilon(x) = a_0(x)$ for $x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon$ and $a_\varepsilon(x) = \varepsilon^m a(\varepsilon^{-1}n, \tau)$ for $x \in \omega_\varepsilon$. Farther $\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(x)$ for $x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon$ and $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon^{-1}n, \tau)$ for $x \in \omega_\varepsilon$ where ρ_0 and ρ are smooth positive functions. Let us consider the spectral problem

$$-\mathrm{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + p(x)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon \quad \text{in } \Omega,$$
$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \qquad [u_\varepsilon] = [a_\varepsilon \tfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}] = 0 \quad \text{on } \partial\omega_\varepsilon,$$

where the brackets denote the jump on the enclosed quantities on $\partial\omega_\varepsilon$. Functions p is smooth in Ω.

The asymptotic behavior of eigenvalues λ^ε and eigenfunctions u_ε as $\varepsilon \to 0$ for five different cases $m < 1$, $m = 1$, $1 < m < 2$, $m = 2$ and $m > 2$ is described. In the last case the spectrum of the limit spectral problem is essential, namely one consists of eigenvalues with infinite multiplicity.

References

[1] G. P. Panasenko *Asymptotic behavior of the eigenvalues of elliptic equations with strongly varying coefficients* Trudy Sem. Petrovsk. (1987), No. 12, pp.201–217.

[2] Yu. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez *Asymptotics for the eigenelements for vibrating membrane with very heavy thin inclusions* C. R. Mecanique 330 (2002) 777-782.

Обратная задача монодромии и фуксовы уравнения в математической физике

Голубева В. А. (ВИНИТИ РАН)

Будут рассмотрены модельные задачи математической физики, приводящие к обыкновенным уравнениям типа Фукса, а также к уравнениям Пфаффа типа Фукса, более точно, к уравнениям, являющимся обобщением уравнений Книжника-Замолодчикова. Это и рациональные уравнения типа КЗ, ассоциированные с различными системами корней, связанные с физическими процессами рассеяния (возможно, с отражением), и эллиптические системы Бернара-Книжника-Замолодчикова, и q-разностные уравнения типа КЗ, а также суперуравнение типа КЗ. Для некоторых из этих уравнений будет охарактеризовано состояние исследований о связи представления монодромии системы с представлением фундаментальной группы дополнения к сингулярному дивизору уравнения в основном пространстве. Будут представлены следующие вопросы: обыкновенные дифференциальные уравнения фуксова типа для корреляционных функций моделей типа Весса-Зумино-Новикова, отвечающих векторному и спинорному представлениям, и краткий вывод классического уравнения КЗ, после чего будет представлено суперуравнение типа КЗ; дан обзор исследований, посвященных обобщению теоремы Дринфельда-Коно на случай различных систем корней (работы Голубевой и Лексина, а также работы В.Толедано Ларедо). Будут сформулированы задачи.

On boundary values of polyharmonic functions

Gorbachuk M. L. and Torba S. M.
(Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

In terms of trigonometric series the description of all solutions of the equation $\Delta^m u(z) = 0$ in the domain $K_0 = \{z = re^{it},\ 0 < r < 1,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ is given. It is established that every solution has a radial boundary value on the unit circle in the space of hyperfunctions. The necessary and sufficient conditions for the boundary value to belong to a certain space of functions on the unit circle, embedded continuously into the space of hyperfunctions, are presented. It is also discussed the behavior of such polyharmonic functions near the singular point $z = 0$.

On the Cauchy problem for differential equations in a Banach space

Gorbachuk V. I.
(Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

We consider the Cauchy problem

$$y^{(m)}(z) = Ay(z) \tag{1}$$

$$y^{(k)}(0) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

where $y(z)$ and $f(z)$ are vector-valued functions with values in a Banach space $\mathfrak{B}$ over a field of characteristic zero, A is a closed linear operator on $\mathfrak{B}$, $y_k \in \mathfrak{B}$. In the case where the operator A is bounded in $\mathfrak{B}$ and the $\mathfrak{B}$-valued function $f(z)$ is analytic in a neighbourhood of zero this problem is uniquely solvable in the class of locally analytic at zero $\mathfrak{B}$-valued functions for any $y_k \in \mathfrak{B}$. If A is not bounded, then equation (1) may not have a nontrivial solution in the mentioned class even if $f(z) \equiv 0$. We give the conditions on $f(z)$ and y_k under which problem (1)-(2) is solvable in certain classes of analytic vector-valued functions in both archimedean and nonarchimedean cases.

Integrals that depend on the Cantor stairs

Gorin E. A. , Kukushkin B. N. (Moscow St.Pedagogical Un.)

The classical Cantor function is included in a continuous one–parameter family. Each function in this family takes the Lebesgue measure to a measure supported on the set of dyadic rational numbers on $(0, 1)$. Analytic properties of the Fourier and Mellin transforms of these measures in dependence on the parameter value are studied. For details see St. Petersburg Math. J., Vol. 15 (2004), No. 3 (Russian original: Алгебра и Анализ, Том 15 (2003), вып. 3).

Attractors and Integral Manifolds for Damped Nonautonomous Sine–Gordon Equation

Goritsky A. Yu. (Moscow State University)

The following problem in a bounded domain Ω is considered:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \sin u + g(t,x), \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H^1(\Omega), \tag{2}$$

$$u_t\big|_{t=\tau} = p\big|_{t=\tau} = p_\tau(x) \in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Here $\gamma > 0$ is a dissipation coefficient, $d > 0$ is a diffusion coefficient, $g(t,x) \in C_{\mathrm{B}}(\mathbb{R}, L_2(\Omega))$ is an external force. The problem (1)–(3) generates a process $U(t,\tau)(u_\tau, p_\tau) = (u(t,\cdot), \partial_t u(t,\cdot))$. Together with any solution $u(t,x)$, the problem has also the solutions $u(t,x) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Thus, the process $\{U(t,\tau)\}$ can be considered in the phase space $E = \big(H^1(\Omega)/2\pi\mathbb{Z}\big) \times L_2(\Omega)$.

Denote by λ_1 the first positive eigenvalue of the operator $-\Delta$ in the domain Ω under the Newmann boundary conditions.

Theorem 1. *Let $d\lambda_1 > 4$ and $\gamma^2 > (d\lambda_1 - 2)^2/(d\lambda_1 - 4)$. Then, in the extended phase space $E \times \mathbb{R}_t$, there exists a two-dimensional integral manifold M that exponentially attracts as $t \to +\infty$ all the solutions of problem* (1)–(3).

Theorem 2. *The closure of the projection of M onto the phase space E coincides with a global attractor A of the process $\{U(t,\tau)\}$. Thus, the global attractor A is exponential.*

Theorem 3. *If $g(t,\cdot)$ is a quasiperiodic function with k frequencies then the global attractor A is a Lipschitz continuous image of a $(k+1)$-dimensional torus $\mathbb{T}^{k+1}$.*

The results are obtained together with V. V. Chepyzhov.

Слабая устойчивость лагранжевых проекций

Горюнов В. В., Закалюкин В. М. [6] *(МГУ)*

Более двух десятилетий назад В.И.Арнольд начал изучать лагранжевы и лежандровы многообразия с особенностями, исследуя особенности семейств геодезических в вариационых задачах с односторонними ограничениями [1]. Среди первые примеров таких многообразий оказались особенности, связанными с некристаллографическими группами отражений [2,3]. Обобщая эти конструкции А.Гивенталь [2] ввел понятие устойчивости проекции лагранжева и лежандрова многообразия с особенностями по отношению к возмущениям проекции и симплектической (или контактной структуры).

Мы рассматриваем естественную модификацию этого понятия и показываем, что важный класс особенностей, связанных с версальными семействами матриц и сложных отображений [4,5,6], оказывается устойчивым в этом смысле.

Росток лагранжева подмногообразия (с особенностями) кокасательного расслоения называется 0-устойчивым если всякая его лагранжева проекция близкая к стандарной переводится в стандартную симплектоморфизмом, сохраняющим подмногообразие и нулевое сечение. Такая устойчивость эквивалентна версальности ростка, задающей 3-тензор умножения векторных полей на базе расслоения.

Представляют интерес следующие теоремы.

1. Пусть $L \subset T^*\mathbf{C}^n$ - миниверсальный росток аналитического лагранжева многообразия с особенностями, и пусть $g : \mathbf{C}^k, 0 \to \mathbf{C}^n, 0$ такой росток гладкого отображения, что индуцированное лагранжево многообразие $g^*(L)$ является 0-устойчивым. Тогда множество критических значений g содержится в объединении $D(L)$ каустики, множества Максвелла и нулевого фронта ростка L.

2. Если $n = k$ и g - собственное, то g является накрытием, разветвленным над $D(L)$.

3. Если росток сложной функции $h = f \circ \varphi, 0$ где $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ и $\varphi : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ гладкие отображения, имеет конечную кратность, то отображение g, индуцирующее K_f-версальную деформацию h (см. [5]) из R-версальной деформации h задает 0-устойчивое лагранжево подмногообразие с особенностями.

[6]Поддержано грантами РФФИ 020100099 и УР0401021.

Литература

[1] Arnold V.I., *Critical points on the manifold with a boundary, simple Lie groups B,C,F and singularities of evolutes*, Russain Math.Survey, 33 (1978). n.5, 81-105.

[2] Givental A.B.*Singular lagrangian vareties and their lagrangian projections*, Encyclop. Math. (Dyn.syst 33, 1988, 55-112)

[3] Scherback O.P.,*Wave fronts and reflection groups,* Russian Math. Survey, 43 (1988), n.3, 149-194.

[4] Bruce J.W., *Simple symmetric matrix singularities*, Moscow Math. Journal, 3(2003), n.2, 1-21.

[5] Goryunov V.V., Zakalyukin, *Simple matrix singularities and the subgroups of Weyl groups A,D,E,* Moscow Math.Journal 3(2003), n.2, 507-530.

[6] Goryunov V.V., Mond D.,*Tjurina and Milnor numbers of matrix singularities*, preprint, Liverpool Univ. 2003, 23pp.

Качественные исследования дифференциальных уравнений ограниченных задач многих тел методами компьютерной алгебры

Гребеников Е. А. , (ВЦ РАН),

Гадомский Л. Я. (Академия Подлясска,Польша)

Дано обобщение понятия «ограниченная задача $n > 3$ тел» и выведены ее дифференциальные уравнения для любого целого числа $n > 3$.

Сформулирована первая проблема Пуанкаре, выведены функциональные уравнения, определяющие все стационарные решения таких задач и исследуется проблема их разрешимости методами компьютерной алгебры.

Анализируется проблема устойчивости стационарных решений по Ляпунову на основе КАМ-теории.

Литература

[1] Gadomsky L., Grebenikov E. A., Jakubiak M., Kozak-Skoworodkin D. *The Lyapunov stability in restricted problem of cosmic Dynamics*, - Кишинев, Известия АН Республики Молдова, 1(41), 2003, с.7-17.

[2] Гребеников Е. А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел.* М.: Изд. РУДН, 2002.

[3] Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука, 1978.

[4] Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике*, - М.: Наука, УМН, т.18, вып.6(114), 1963, с.91-192

Однопараметрические полугруппы классов

Гриднева И. В. (Воронежский государственный аграрный университет)

Аналогично определению для одного оператора скажем, что J-бинесжимающая полугруппа $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ класса C_0 удовлетворяет условию **H**, если у элементов этой полугруппы есть общая пара максимальных семидефинитных инвариантных подпространств $\mathcal{L}_{\pm}$, и каждые такие подпространства допускают разложения $\mathcal{L}_{\pm} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^{\pm}$ в прямую J-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства $\mathcal{L}_0$ и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространства $\mathcal{L}^{\pm}$. Полугруппа $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию **K(H)**, если все элементы полугруппы коммутируют с одним и тем же J-бинесжимающим оператором класса **H**.

Основным результатом доклада является

Теорема. *Пусть $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ — однопараметрическая J-бинесжимающая полугруппа класса C_0, а $-iA$ — производящий оператор этой полугруппы. Тогда справедливы следующие импликации:*
a) $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty} \in \mathbf{H} \Leftrightarrow A \in \mathbf{H}$;
b) $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty} \in \mathbf{K(H)} \Leftrightarrow A \in \mathbf{K(H)}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00353.

Реализация каскадов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях

Гринес В. З. , Починка О. В. [7] (Нижегородская государственная архитектурная академия)

Пусть M — трехмерное гладкое замкнутое ориентируемое многообразие и G — класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла $f : M \to M$ с конечным множеством гетероклинических орбит и без гетероклинических кривых. Каждому диффеоморфизму $f \in G$ поставлен в соответствие топологический инвариант — схема

[7] Авторы благодарят РФФИ (грант 02-01-00098) за финансовую поддержку.

диффеоморфизма. Введено понятие эквивалентности схем и установлено, что необходимым и достаточным условием топологической сопряженности двух диффеоморфизмов из класса G является эквивалентность их схем. Структура схемы диффеоморфизма $f \in G$ может быть описана с помощью абстрактного объекта, названного совершенной схемой. Авторами решена проблема реализации, то есть по каждой совершенной схеме построен диффеоморфизм $f \in G$, схема которого эквивалентна данной.

Краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке – алгебро-геометрический подход.

П.Г.Гриневич, P.M.Santini (Институт Теоретической Физики им. Л.Д.Ландау РАН)

Мы исследуем краевую задачу для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке, сводя ее к периодической задаче на прямой с разрывным потенциалом и δ-образной внешней силой. Для нее строится преобразование рассеяния, выводятся уравнения Дубровина, описывающие временную эволюцию спектральной кривой и дивизора. Показано, что за счет δ-образного характера внешней силы уравнения Дубровина остаются локальными, и доказана сходимость задающих их рядов.

О классах уравнений высших порядков со свойством Пенлеве

Громак В. И. (Белорусский государственный университет)

В работе выводятся новые классы обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, имеющие свойство Пенлеве отсутствия подвижных критических точек у решений и обобщающие высшие аналоги первого и второго уравнения Пенлеве, полученные симметрийными редукциями из иерархии уравнений Кортевега-де Фриза. Для построенных уравнений исследуются аналитические свойства решений. Построены преобразования Беклунда и на их основе получены условия существования классов решений, выражающихся через классические трансцендентные функции и решения уравнений Пенлеве. Дано представление мероморфных решений во всей области существования. Приведены полиномиальные гамильтонианы, определяющие эквивалентные системы. В явной форме построены рациональные решения и получены условия их существования, выраженные через исходные параметры уравнений.

Functional and Asymptotic Properties of Integral Transforms with Bessel- and Watson-Type Kernels

Gromak E. V., Schetnikovich E. K. (BSU)

This is a joint work with A. A. Kilbas (Belarusian State University, Minsk, Belarus).

The report is devoted to the one-dimensional integral transforms involving the Bessel functions of the first and second kind, the Struve and the generalized Watson functions in the kernels. It is proved that these transforms are special cases of a more general integral transform with the H-function kernel. Using the theory of such a H-transform, the mapping properties of the considered transforms on weighted spaces of r-summable functions are established together with their ranges, representations and inversion formulas. Explicit form of asymptotic expansions of the above transfoms at infinity and zero are proved provided that the known density has the power asymptotic behavior at zero and infinity, respectively. It should be noted that the obtained formulas contain the power or power-logarithmic asymptotic expansions.

On Fredholm Solvability of Nonlocal Elliptic Problems in Sobolev Spaces

Gurevich P. L. (Moscow Aviation Institute)

Let $Q \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with infinitely smooth boundary ∂Q. Fix two points $g_1,\ g_2 \in \partial Q$ $(g_1 \neq g_2)$. These points divide the boundary into two (open in the topology of ∂Q) curves Γ_1 and Γ_2: $\partial Q = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$.

We consider the following model nonlocal problem

$$\Delta u(x) = f_0(x), \qquad x \in Q, \tag{1}$$

$$B_j u \equiv u(x)|_{\Gamma_j} + b_j u(\omega_j(x))|_{\Gamma_j} = f_j(x), \qquad x \in \Gamma_j;\ j = 1, 2. \tag{2}$$

Here $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; $\omega_j(x)$ is a smooth C^∞-diffeomorphism taking some neighborhood $\mathcal{O}_j$ of Γ_j onto $\omega_j(\mathcal{O}_j)$. We assume that $\omega_j(\Gamma_j) \subset Q$, $\omega_j(g_1) = g_1,\ \omega_j(g_2) = g_2$, i.e. $\overline{\omega_j(\Gamma_j)} \cap \partial Q \neq \emptyset$. The main difficulty in this case is connected with the fact that solutions of problem (1), (2) can have power-law singularities even for smooth ∂Q and f_0, f_j (see [1]).

For this reason, solutions can be outside the corresponding Sobolev spaces $W_2^{l+2}(Q)$.

The following three operators acting on Sobolev spaces can be assigned to problem (1), (2): $\mathcal{P} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $\mathbf{P} : W_2^{l+2}(Q) \to W_2^l(Q)$, and $\mathbf{L} : W_2^{l+2}(Q) \to W_2^l(Q) \times W_2^{l+3/2}(\Gamma_1) \times W_2^{l+3/2}(\Gamma_2)$ given by $\mathcal{P}u = \Delta u$ for $u \in D(\mathcal{P}) = \{u \in W_2^1(Q) : B_j u = 0,\ \Delta u \in L_2(Q)\}$, $\mathbf{P}u = \Delta u$ for $u \in D(\mathbf{P}) = \{u \in W_2^{l+2}(Q) : B_j u = 0\}$, and $\mathbf{L} = (\Delta,\ B_1,\ B_2)$.

We prove that the unbounded operator $\mathcal{P}$ has the Fredholm property for any $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. The Fredholm property of the bounded operator $\mathbf{L}$ is affected by spectral properties of some auxiliary one-dimensional nonlocal problem with a parameter, while the Fredholm property of $\mathbf{P}$ additionally depends on certain algebraic relations between Eq. (1) and nonlocal conditions (2) at the points g_1 and g_2. These results are true for elliptic equations of order $2m$ with general nonlocal conditions in plane bounded domains with piecewise-smooth boundary [2, 3].

This research was supported by Russian Foundation for Basic Research (grant 02-01-00312) and by INTAS (grant YSF 2002-008).

Reference

[1] A. L. Skubachevskii, *Mat. Sb.*, **129(171)**, 279–302 (1986); English transl. in *Math. USSR-Sb.* **57** (1987).

[2] P. L. Gurevich, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**, No. 4, 436–466 (2003).

[3] P. L. Gurevich, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**, No. 1, 1–44 (2004).

On the problem whithout original conditions for one class of parabolic type equations in the unbounded domains

Guseinov R. V. (Institute of Mathematatik and Mechanik of National Academy of Azerbayjan)

We are considered external problem whithout original conditions for one class of parabolic type equations. It is proved the theorem about existence and uniqueness solution of this problem. In our proof, we have used Hardy type inequality for functional spaces with non-entire order derivatives to prove the theorem about existance and uniqueness solution of this problem.

Carleson's type estimate of solutions of the Dirichlet problem for an elliptic equation

Gushchin A. K. (Steklov Mathematical Institute)

The work of Carleson [1,2] on interpolation by bounded analytic functions u was based on estimates of the form

$$\int\!\!\int_Q |u|^p d\mu \leq \text{const}\, \|u\|^2_{L_p(\partial Q)}. \tag{1}$$

Here μ denotes a measure on unit disk Q, $p \geq 1$. Carleson found that (1) is valid for all $u \in H^p$ if and only if for all $x^0 \in \partial Q$ and $r > 0$ $\mu(B_{x^0}(r)) \leq Cr$; here $B_{x^0}(r)$ is a circle in $\mathbf{R}_2$ with center in x^0 and radius r. Hormander proved (1) with $p > 1$ for a harmonic function of n variables in domain with twice smooth boundary if $\mu(B_{x^0}(r) \leq Cr^{n-1}$, $B_{x^0}(r)$ is a ball in $\mathbf{R}_n$ with center in x^0 and radius r; see [3]. For solution of homogeneous elliptic equation this estimates with $p = 2$ was proved in [4, 5].

This research is a natural extension of works [1 – 6]. Let u be a solution of Dirichlet problem $(a^{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} = 0$, $u = u_0$ on ∂Q, for elliptic equation in bounded domain $Q \subset \mathbf{R}_n$ with a smooth boundary ∂Q. We suppose, that the normal to ∂Q is Dini-continuous, the coefficients a^{ij} are measurable and bounded in Q and they are Dini-continuous on the boundary (see [4]). For simplicity we consider the case, when index number (exponent of smoothness) $\alpha > 0$ is sufficiently small.

Theorem. *Let measure ϕ on $\mathbf{R}_{2n}$, $\text{supp}\phi \subset \bar{Q} \times \bar{Q}$, have the property: there exists positive constant C such that for all $x_0 \in \partial Q$ and $\rho > r > 0$*

$$\phi\left(B_{x^0}(r) \times B_{x^0}(\rho) \cup B_{x^0}(\rho) \times B_{x^0}(r)\right) \leq Cr^{n-1+\epsilon}\rho^{2\alpha-\epsilon}$$

with some $\epsilon \in (0, 2\alpha]$. Then there is an constant $A = A(Q, a^{i,j}, \alpha, \epsilon)$ such that

$$\int\!\!\int_{\bar{Q}\times\bar{Q}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\phi(x, y) \leq AC\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} \tag{2}$$

for all $u_0 \in L_2(\partial Q)$.

The estimate (2) is valid for all $\alpha \in (0, 1)$ without additional requirements on smoothness of the coefficients $a^{i,j}$ if restriction of measure

ϕ on set $\{(x,y)\in Q\times Q : |x-y| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x,\partial Q), |x-y| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(y,\partial Q)\}$ satisfies some special condition.

Reference

[1] Carleson L. *An interpolation problem for bounded analytic functions*// Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.

[2] Carleson L. *Interpolation by bounded analitic functions and the corona problem*, Ann. of Math.**76** (1962), 547–559.

[3] Hormander L. *L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions*// Math. scand. **20** (1967), 65–78.

[4] А.К.Гущин,*О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка*, Матем. сб. **137**, 1 (1988), 19-64.

[5] Гущин А.К., Михайлов В.П. *О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка*, Матем. сб. 1994. **185**, 1 (1994), 121–160.

[6] А.К.Гущин, *Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка*, Матем. сб. **189**, 7 (1998), 53-90.

On a Nonlinear Analogue of the Goursat Problem with Data on an Unknown Characteristic

J. Gvazava (A.Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi)

The problem is considered for one class of quasilinear nonstrictly hyperbolic second order equations on the plane. One family of characteristics of these equations is completely defined, while the other is not defined because of their dependence on unknown values of solutions. The problem is posed to define a solution by its values given on the arc of a characteristic of the first family and by values of some combination of a solution with its first order derivatives given on an unknown characteristic of the second family. Questions on the solvability of this problem with a free boundary are discussed.

On the Leznov problem

Habibullin I. T. (Ufa, Institute of mathematics of RAS, Russia)

It is well known that each Lie algebra of finite growth generates a finite field Toda chain: an integrable system of hyperbolic differential equations of the exponential type

$$u_{xt}(n) = e^{-\sum A_{nj}u(j)}, \quad 0\le n,j\le N, \tag{1}$$

where $A = (A_{ij})$ is the Cartan matrix of the Lie algebra. The Lie algebra coincides with characteristic algebra of the system (1).

The problem posed by A.N.Leznov was whether the system (1) corresponding to the algebra D_n was a reduction of that corresponding to A_m for some m.

Recently positive solution of the problem has been obtained.

An extension of the Ergodic Closing Lemma

Shuhei Hayashi (University of Tokyo)

An extended version of the Ergodic Closing Lemma and its applications in the direction of the C^1 Palis Conjecture is considered. One of the main applications is to create a closed orbit preserving the Lyapunov splitting. By using this and an extended version of the Connecting Lemma, we get the following: in the space of C^1 diffeomorphisms, ones having an ergodic measure supported on infinitely many points whose support admits a weak hyperbolicity associated to the Lyapunov splitting, dominated splittings with average hyperbolicity on hyperbolic parts and one-dimensional center direction (if zero Lyapunov exponent is involved), form a dense subset in the complement of the closure of Morse-Smale diffeomorphisms.

Исследование функционально-дифференциальных уравнений возбудимых сред

Хидирова М. Б. (Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан)

Рассматриваются результаты исследований нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений саморегуляции в элементарном объеме биологических возбудимых сред, построенные на основе общих уравнений регуляторики живых систем. Качественные исследования рассматриваемой системы уравнений показывают существование следующих режимов поведения решений: покой, стационарное состояние, предельные циклы типа Пуанкаре, динамический хаос и эффект «черная дыра» — срыв колебательных решений к бассейну тривиального аттрактора. Анализ области динамического хаоса в параметрическом пространстве показывает наличие малых регионов автоколебаний («r-windows»). Исследованы закономерности развития динамического хаоса, расположения, размеров и количества «r-windows» путем вычисления энтропии Колмогорова, Хаусдорфовой, информационной и более высших размерностей.

Результаты исследований применены для выявления закономерностей развития аритмии и внезапной остановки сердца (грант ГКНТ АНРУз 41/2000).

On Travelling Wave Solutions to a Nonlinear Parabolic-Hyperbolic System Arising in a Size Dependent Population Model

Akif Ibragimov (Department of Mathematics, Texas A&M University)
Jay R. Walton[8]

Population dynamics is a subject with a rich history and vast literature. A wide array of mathematical techniques have been applied to modeling populations depending upon the population features to be emphasized and the nature of the data that can be obtained. For example, in studying the time evolution of the spatial distribution of a population one might model the spatial and time structures as being discrete or continuous, stochastic or deterministic. In this paper, the focus is upon size structured populations that are continuous is both space and time. The standard approach to modeling size in population dynamics is to introduce it as a structure parameter subject to its own evolutionary law. The size parameter can be modeled as being discrete, leading to a compartmental type model or continuous leading to a differential growth law for size coupled to balance law for number density of each size class. Initially,both a material and spatial frame are considered which provides a capability to track the evolution of individual organisms. The primitive attributes of the population that are modeled are age, biomass, number, motion and their evolution. The specific modeled studied results from ignoring age and adopting a simple diffusion model for motion. There results a coupled pair of nonlinear partial differential equations for number and size density, the former being of parabolic type and the latter being of hyperbolic type. Motivated by the classical work of Kolmogorov, Petrovski and Piskunov the question of travelling wave solutions to the parabolic-hyperbolic system is investigated.

[8]Supported by Department of Mathematics Texas A&M University)

Формирование контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки

Ильин А.М., Сулейманов Б.И. (Челябинский государственный университет, Институт математики УНЦ РАН)

Исследована равномерная и полная асимптотика при $x^2 + t^2 \to \infty$ специальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_x + u^3 - tu - x = 0, \tag{1}$$

$$u_{xx} = u^3 - tu - x, \tag{2}$$

связанных с решениями широкого класса уравнений математической физики с малым параметром (Ильин А.М., Сулейманов Б.И. ДАН. 2002. Т. 387, № 2. С. 156–158.).

Всюду вне малой окрестности кривой $x = 2/\sqrt{27}t^{3/2}$ (в случае уравнения (1) и луча $(x = 0, t > 0)$ (в случае уравнения (2) главным членом асимптотики $u(x,t)$ является гладкий корень $H(x,t)$ уравнения сборки $H^3 - tH - x = 0$. В окрестностях этих критических кривых $u(x,t)$ меняется очень быстро, образуя тем самым при $t \to \infty$ контрастную структуру типа ступеньки. Асимптотические разложения $u(x,t)$ в окрестностях критических линий согласованы с их асимптотиками вне этих линий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00716) и фонда Научных Школ (грант НШ–1446.2003.1).

Nonlocal Multipoint Problem for Systems of PDE with Variable Coefficients

Ilkiv V. (Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine)

In the Cartesian product of the segment $(0,T)$ and p-dimensional torus Ω_p, we consider the following problem with nonlocal multipoint conditions:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}} + f, \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \qquad 0 \le t_1 < \cdots < t_M \le T, \tag{2}$$

where the matrix differential operators $A_j(t,D)$ continuously depend on t, matrices $B_{j\alpha}(D)$ are differential operators with constant coefficients $B_{j\alpha}(D) = \sum_s B_{j\alpha s}D^s$. By the given vector-functions $f = f(t,x)$ and $\varphi = \varphi(t,x)$, one needs to determine the vector-function $u = u(t,x)$.

The problem (1), (2) is not well-posed in the Hadamard sense, the existence of a solution (specifying the corresponding spaces) is connected with the problem of small denominators whose lower bounds are to be established.

For constant coefficients, applying the metric approach makes possible to establish a solvability of the problem (1), (2) in a scale of Sobolev spaces of periodic in variable $x = (x_1, \ldots, x_p)$ functions. In the case of variable coefficients, for almost all elements of matrices $B_{j\alpha s}$, we prove the theorem of existence and uniqueness of solution of the problem (1), (2) in the spaces of periodic in x functions whose Fourier coefficients grow exponentially.

Sharp two-sided estimates for the dimension of the attractor for the Navier–Stokes perturbation of the damped Euler equations

Ilyin A.A. (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences)

We consider on the torus $[0, 2\pi L]^2$ the Navier–Stokes perturbation (with viscosity coefficient $\nu \to 0$) of the two-dimensional damped Euler equations

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i u = -\mu u + \nu \Delta\, u - \nabla\, p + f, \qquad \mathrm{div} u = 0$$

and obtain sharp two-sided estimates of order ν^{-1} for the fractal dimension of the global attractor:

$$c_1\, \frac{\|\mathrm{rot} f\| L}{\nu\mu} \le \dim_F \mathcal{A} \le c_2\, \frac{\|\mathrm{rot} f\| L}{\nu\mu}.$$

This a joint work with A. Miranville and E.S. Titi.

Об одном семействе операторов в пространстве Крейна

Иохвидов Е. И.
(Воронежский государственный технический университет)

Введено семейство операторов $\widetilde{M}_\beta$, зависящее от вещественного параметра β. Эти операторы действуют в пространстве Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot\,,\,\cdot]$, при $\beta \leq 0$ совпадают с $\mathcal{J}$-нерастягивающими операторами, а при $\beta < 0$ — с равномерно $\mathcal{J}$-нерастягивающими операторами.

Для линейного оператора T установлен критерий, состоящий в конечности числа $\omega_+ = \sup\{[Tx, Tx]/\|x\|^2 \mid 0 \neq x \in \operatorname{dom} T\}$, принадлежности классу $\widetilde{M}_\beta$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$. Далее доказано, что всякий оператор T класса $\widetilde{M}_\beta$ (при любом $\beta \in \mathbb{R}$) является ограниченным лишь одновременно с оператором P_-T, где P_- — канонический проектор на отрицательное подпространство. Таким же свойством обладает и преобразование Потапова-Гинзбурга $\delta(T)$ оператора $T \in \widetilde{M}_\beta$, если это преобразование имеет смысл. Доказано также, что при $0 \leq \beta < 1$ преобразование $\delta(T)$ всегда существует и является ограниченным оператором. Найдена оценка на норму, из которой, в частном случае $\beta = 0$, вытекает хорошо известный результат: Преобразование Потапова-Гинзбурга $\mathcal{J}$-нерастягивающего оператора является сжатием.

Исследование поддержано грантом РФФИ 02-01-00353

О локализации спектра задачи с комплексным весом

Ишкин Х. К. (Башкирский Государственный университет)

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ спектральную задачу

$$-y'' = \mu^2 q(x) y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где q — некоторая ограниченная измеримая комплекснозначная функция с непостоянным аргументом. При сформулированных условиях спектр дискретен, и асимптотика μ_n известна лишь в случае, когда потенциал q аналитичен и отличен от 0 в некоторой окрестности отрезка $[0;1]$ [1]. В этом случае имеет место классическая формула: $\mu_k \sim \pi k / \int_0^1 \sqrt{q(x)}dx$.

Для неаналитических потенциалов асимптотика собственных значений неизвестна. Как отмечается в монографии [1,с.127], неизвестно даже, группируются ли они вокруг конечного числа лучей в комплексной плоскости μ при $|\mu_n| \gg 1$.

В предлагаемой работе рассмотрен класс функций q, для которых спектр соответствующей задачи асимптотически локализуется около конечного или счетного числа лучей. При этом показано, что даже для бесконечно дифференцируемых q классическая формула может не иметь места.

Литература

[1] М. В. Федорюк. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* ,М. – Наука, 1983.352 с.

Нелинейная эллиптическая краевая задача в резонансном случае

Иванов А. Б. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Рассматривается вопрос существования решений краевой задачи для нелинейного уравнения

$$Lu - \lambda u = f\left(x, u\right), u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^N$ — непустое открытое множество,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

— оператор, удовлетворяющий условиям эллиптичности, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$.

Для λ, принадлежащего спектру краевой задачи

$$Lu - \lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

доказывается существование решения в случае

$$f(x, \xi) \to \pm\infty, \quad \xi \to \pm\infty$$

и при условии, ограничивающем рост $f(x, \xi)$

$$|f(x, \xi)| \le c_1 + c_2 \left|\xi\right|^{\sigma}, \quad 0 \le \sigma < 1, \quad c_1 \ge 0, \quad c_2 \ge 0.$$

О некоторых законах эволюции замкнутых гиперповерхностей

Ивочкина Н. М. (С.-Петербург)

В докладе речь пойдет о бесконечном расширении и сжатии в точку поверхностей под действием нелинейных эволюционных законов. Эти геометрические задачи будут рассмотрены как приложения современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Symbolic calculus and curvatures of manifolds

Iwasaki Chisato (Japan)

I will talk about an application of construction of the fundamental solution for a heat equation to obtain information of curvatures.

Признаки асимптотической устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы с линейным приближением Коппеля–Конти

Изобов Н. А. , Прохорова Р. А.
(Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет)

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами и матрицами Коши $X_A(t,\tau)$. Множество систем (1_A), для которых выполнено условие

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \|X_A(t,\tau)\|^p d\tau \leq C_p(A) = \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0,$$

$p = \text{const} > 0$, будем обозначать [1, 2] через: L^pS при $\alpha(t) = 0$ и $\beta(t) = t$; L^pN при $\alpha(t) = t$ и $\beta(t) = +\infty$.

Наряду с линейной системой (1_A) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с любым m-возмущением f, удовлетворяющим условию

$$\|f(t,y)\| \le C\|y\|^m, \quad m>1, \quad y\in U_\rho, \quad t\ge 0,$$

в окрестности U_ρ начала координат радиуса $\rho>0$.

Теорема. *Если $A\in L^pS$ ($A\in L^pN$) при $p\ge 1$, то нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво (неустойчиво) при любом m-возмущении f порядка $m>1$.*

Литература

[1] Conti R. On the boundedness of solutions of ordinary differential equations. // Funkcialay Exacioj. – 1966. – V. 9, N 1., P. 23–26.

[2] Izobov N.A.,Prokhorova R.A. Coppel–Conti sets of linear differential systems. // J. of Dynamics and Different. Equat. 2003. – V. 15, N 2/3., P. 281–303.

The Differential-Symbol Method of Solving a Cauchy Problem for PDE

Kalenyuk P. , Nytrebych Z.

(Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine)

We propose the differential-symbol method [1] of solving the following Cauchy problem in the domain $t>0$, $x\in\mathbb{R}^s$:

$$\begin{aligned} &L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\equiv\frac{\partial^n U}{\partial t^n}+\sum_{k=1}^{n}A_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-k}U}{\partial t^{n-k}}=F(t,x),\\ &\frac{\partial^j U}{\partial t^j}(0,x)=\Phi_j(x),\ \ j=\overline{0,n-1},\end{aligned} \tag{1}$$

where $A_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, for $k=\overline{1,n}$, are operator-matrices of order n, whose elements are infinite order differential operators with entire analytical symbols, $F(t,x)$, $\Phi_j(x)$, for $j=\overline{0,n-1}$, are given vector-columns of dimension n, $U(t,x)$ is a searched vector-function.

The solution of the problem (1) is represented in the form

$$\begin{aligned} U(t,x)=\Bigg[&F^T\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{P(t,x,\lambda,\nu)\Big\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=0}+\\ &+\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_j^T\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{V_j(t,x,\nu)\Big\}\Bigg|_{\nu=0}\Bigg]^T,\end{aligned} \tag{2}$$

where $P(t,x,\lambda,\nu)$, $V_j(t,x,\nu), j=\overline{0,n-1}$, are entire analytical functions of parameters $\lambda,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ and $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ respectively, constructed explicitly by the differential expression $L\big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\big)$.

The solution of the problem (1) in the form (2) exists and is unique in a certain class of analytical vector-functions.

References

[1] Kalenyuk P., Nytrebych Z. *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method.* – Lviv: Publishing house of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian)

Subweak solutions for nonlinear elliptic systems

Kalita E. A. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk)

For the nonlinear elliptic equations and systems of type $div^m A(x,D^m u) = f(x)$ the results mostly are true in pairs, which are dual (in heuristic sense) relatively the natural energy space, e.g. regularity in $W^m_{p+\varepsilon}$ (Gehring-type estimates) – solvabiliy in $W^m_{p-\varepsilon}$ (T. Iwaniec, 1992); regularity in Morrey spaces (Ch. B. Morrey; H. O. Cordes) – solvability in dual Morrey spaces (E. Kalita, 1995). But no yet results dual to well-known estimate of solution in W_2^{m+1}. Here we try to cover this gap.

We introduce a notion of *subweak solution* for equations with monotone operators, which allows to consider the solutions with arbitrary weak regularity under correspondent dual regularity of operator. New uniqueness results for the 'standard' nonlinear elliptic systems are obtained. In particular, for the system $div^m A(x,D^m u) = f(x)$ under the standard structure conditions provide solvability in W_2^{m+1}, the solutions with $m-1$ derivatives at most can be considered, and the subweak solution is proved to be unique in W_2^{m-1}.

Applications to the solvability of degenerate nonlinear elliptic systems will be presented. The introduced notion of solution allows to establish solvability for equations with *subcoercive* operators (coercive with respect to some lower norm). As for the 'concret' equations, the degenerate elliptic systems of nonstrictly divergent form $div^t A(D^s u) = f(x),\ s\neq t$, under structure conditions provide monotonicity but not coercivity in pair with $\Delta^{(s-t)/2}$ in W_2^s, are proved to be subcoercive (in contrast with strictly divergent case $s=t$, where only-monotonicity admits arbitrary strong degeneration and no subcoercivity). For such a systems, existence and uniqueness of solution in W_2^{s-1} with a certain power weigh is establised.

Асимптотика решений для уравнений главного резонанса

Kalyakin L. A. (Институт Математики с ВЦ РАН, Уфа)

Рассматривается система из шести нелинейных неавтономных уравнений, известных как уравнения квадратичного главного резонанса

$$r_j \frac{d\psi_j}{dt} + \gamma_j r_k r_l \cos\psi = f_j \cos(\psi_j + \omega_j t^2),$$

$$\frac{dr_j}{dt} + \gamma_j r_k r_l \sin\psi = f_j \sin(\psi_j + \omega_j t^2), \quad (j = 1, 2, 3;\ j + k + l = 6)$$

при $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3;\ f_j, \gamma_j, \omega_j = \text{const}$.

Основными объектами исследования являются шести параметрические семейства решений двух типов: с ограниченными и с растущими на бесконечности амплитудами $r_j(t)$. Для них строятся асимптотики при $t \to \infty$, структура которых не зависит от констант интегрирования. Получаемые асимптотики типа ВКБ приближений оказываются неравномерными по этим параметрам. В пространстве параметров имеются исключительные (резонансные) множества, для которых полученные асимптотики в виде бесконечных рядов не годятся. Обрыв бесконечного ряда приводит к сужению множества исключительных параметров и к расширению области пригодности асимптотики. Для асимптотик с конечным порядком точности множество подходящих параметров оказывается открытым.

On the biharmonic operator in a sphere

Kametaka Yoshinori (Osaka University, Japan)

Boggio obtained an integral representation of Green function. I obtained a new integral representation and showed necessary boundary behavior of Green function.

On 2D Rayleigh-Taylor instabilities

Kamotskii V. V. (С-Пб. отделение МИРАН им. В.А.Стеклова)

Consider the flow of two ideal incompressible fluids of densities ρ^+ and ρ^- in the gravity field. Velocity field u is supposed to satisfy the Euler equations, the initial data u_0 at $t = 0$ satisfies the continuity equation, and the assumption that vorticity $\omega_0(x) = \mathrm{rot} u_0$ is concentrated on some curve Σ_0 separating the two fluids.

The work is a development of the approach by G. Lebeau to the Kelvin-Helmholtz instabilities ($\rho_+ = \rho_-$). We address two problems, concerning the evolution of the interface. First we show that in case of a periodic interface the problem is locally in time solvable for analytical data. Next we address the question of regularity of a weak solution in case of periodic interface as well as in the case when one of the fluids occupies a bounded domain: we show that if the interface possesses a $C^{1+\alpha}$ regularity then it is necessarily analytical. We deduce the latter result from a stronger local one, which states, that if 1) the interface is in vicinity of some point (x_0, t_0) $C^{1+\alpha}$ regular, 2) the jump of tangential component of the velocity is non-zero in (x_0, t_0) and 3) the velocity field u is locally $C^{\alpha+\sigma}$ regular in time variable, i.e $u \in C^{\alpha+\sigma}((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon); \mathcal{D}'(V(x_0)))$ where $V(x_0)$ is a vicinity of x_0, then Σ is locally $C^{\alpha+\sigma}$ regular in time and C^∞ in spacial variables.

О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с интегральным переопределением по времени

Камынин В. Л. (Москва, МИФИ)

Изучается однозначная разрешимость обратной задачи определения пары функций $\{u(t,x), f(x)\}$, удовлетворяющих в $Q_T \equiv (0,T] \times \Omega$ уравнению

$$\rho(t,x)u_t - \Delta u = f(x)g(t,x), \tag{1}$$

начальному и граничным условиям

$$u(0,x) = 0,\ x \in \Omega, u(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

а также дополнительному условию

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \psi(x). \tag{3}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbf{R^n}$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Получены два типа достаточных условий, при которых задача (1)–(3) однозначно разрешима. Одним из таких наборов условий являются следующие условия.

$$0 < \Lambda_1 \le \rho(t,x) \le \Lambda_2, |\rho_t(t,x)| \le K_\rho, \psi(x) \in W^2_{2,0}(\Omega),$$

$$|g(t,x)| \le K_g,\ |\int_0^T g(t,x)\chi(t)dt| \ge g_0(T) > 0,$$

$$\chi(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1([0,T]),\ \|\chi_t\| \le K_\chi(T).$$

Тогда при достаточно малой области Ω (условие малости выписывается явно) решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Отметим, что обратные задачи для параболических уравнений с условием интегрального переопределения вида (3) ранее были рассмотрены только для уравнений с не зависящими от t коэффициентами.

Работа поддержана РФФИ (грант № 03-01-00774)

Метод Дарбу интегрирования гиперболических систем

Капцов О. В. (ИВМ СО РАН)

В работе вводятся инварианты векторных полей, ассоциированных с системами уравнений в частных производных. Доказано, что если функция постоянна вдоль интегральных кривых некоторого векторного поля на решениях системы уравнений первого порядка, то эта функция является инвариантом характеристик системы. Приводится схема применения инвариантов для построения редукций и интегрирования гиперболических систем уравнений с частными производными. В качестве приложений рассматриваются уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики.

On asymptotic solution of one mixed type equation

Kapustina T. O. (Moscow State University)

This research is devoted to the singularly perturbed boundary–value problem for the mixed type equation, studied in a rectangle in $\mathbb{R}^2$. The equation under consideration is parabolic in one part of the domain and elliptic in the other; it contains the small parameters by the second order derivatives. The solution of this problem is supposed to be a function of C^1 class in the entire domain.

Our aim is to obtain the asymptotic representation for the required solution. The problem is studied under various presumptions concerning the coefficients of the equation. The main result consists in constructing the asymptotic solution without any requirements of concordance between the coefficients of the equation and boundary value.

This work continues the research of professor V.G.Sushko and professor N.Kh.Rozov. The author is sincerely grateful to them for their help and attention.

This research is supported by the grants of Russian President for young scientists and leading scientific schools, МК–2345.2003.01 and НШ–1464.2003.1.

Оптимальное управление порядком асимптотик эллиптических краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами

Капустян В. Е. (Национальный технический университет Украины «КПИ»)

В докладе построены формальные алгоритмы полных асимптотических разложений решений задач оптимального глобально ограниченного управления эллиптическими уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами. При условии, что размерность ядра дифференциального оператора, определенного на торе периодичности и порожденного исходной задачей, отлична от нуля, оказалось, что для управляемой системы могут существовать асимптотики различных порядков. Поэтому в постановке задачи учтен этот факт. Обоснование построенных асимптотик опирается на существование точных по порядку малого параметра априорных оценок для решений исходной краевой задачи. В связи с этим обоснование приведено для примеров, где такая оценка не вызывает затруднений. При обосновании существенное значение имеет предельная задача. Последняя получена при помощи двухмасштабной сходимости.

В качестве приложения получены асимптотики параметрических минимаксных оценок для решений одного класса эллиптических краевых задач.

Литература

[1] Kapustyan V.E. *Optimal control of elliptic singular perturbed variational inequalities* // Нелинейные граничные задачи, 2001, 11.

Глобальный аттрактор уравнения реакции-диффузии с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

Капустян А. В., Перестюк Н. А.
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)

В работе рассмотрено уравнение реакции-диффузии

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\triangle u - f(u) + h \\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u|_{t=\tau} = u_\tau \in H, \end{cases} \tag{1}$$

решения которого в фазовом пространстве $H = L_2(\Omega)$ в фиксированные моменты времени $\{t_i\},\ t_{i+1} - t_i \geq \gamma > 0$ испытывают импульсное воздействие

$$u(t_i + 0) - u(t_i) \in \psi_i(u(t_i)) \tag{2}$$

При этом константы задачи (1),(2) таковы, что для всех $\tau \geq 0,\ u_\tau \in H$ задача (1),(2) глобально разрешима (возможно — неоднозначно) в некотором классе. Методами теории глобальных аттракторов неавтономных динамических систем доказано, что для затухающих и периодических возмущений (2) решения задачи (1),(2) при $t \to \infty$ притягиваются в фазовом пространстве H к минимальному компактному множеству — глобальному аттрактору.

Литература

[1] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. // J. Math. Pures Appl. 1994 v.73. №3. P.279–333

[2] Капустян А. В. // *Дифференциальные уравнения.* 2002. т.38. №10. С.1378-1382

[3] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations*, World Scientific, 1995

On global behaviour near degenerate resonance

Karabanov A. A. (Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Division RAS),
Morozov A. D. (Nizhny Novgorod State University)

In the standard nonlinear four-dimensional double-frequency problem, we assume that the frequencies ratio has a critical point, where a resonance condition is satisfied. For the first order nonconservative approximation, behaviour near the corresponding resonance torus is described by three-dimensional averaged system on solid torus with the resonance phase velocity being a polynomial form of local coordinates. In general, nonlinear averaged system has neither integrals of motion, nor equilibria, and its global dynamics does not allow complete qualitative analytical investigation.

The results to be presented are connected with both analytical and numerical analysis of the averaged system in the case when the resonance phase velocity is quadratic form. In particular, conditions when the system is integrable in the conservative approximation are found, and some typical phenomena (homoclinic structures, period duplication, birth and breakdown of two-tori, etc), leading to irregular attractors, are revealed and described.

The work is supported by RFBR, grant N 03-01-00478, and CRDF, grant RU-M1-2583-MO-04.

Резонансы и квантовый метод характеристик

Карасев М.В. (МИЭМ)

Рассматривается известная проблема о динамике и спектре квантовых систем вблизи положения равновесия при резонансе частот. Окрестность точки равновесия наделяется алгеброй функций, коммутационные соотношения в которой зависят от типа резонанса и, как правило, нелинейны (выходят за рамки теории алгебр Ли). Как следствие, здесь возникает нетривиальная нано-геометрия. Квантовая форма на симплектических листах резонансной алгебры отличается от классической кэлеровой формы, а воспроизводящая мера отличается от меры Лиувилля, но неприводимые представления подобных алгебр удается построить геометрически.

Процедура усреднения переводит гамильтониан в резонансную алгебру, где затем применяется квантовый метод характеристик (квантовое вложение подмногообразий, квантовые связности и кривизна, квантовые пути и голономия, квантовые транслокации). В результате, вычисляются спектр и собственные функции, а также эволюция на больших временах для волновых пакетов, локализованных вблизи резонансной точки равновесия.

Эта техника применима и в ситуации, когда система имеет в фазовом пространстве инвариантное подмногообразие, над которым уравнение в вариациях приводимо, а частоты Флоке–Ляпунова находятся в резонансе.

Нерезонансный случай был давно и хорошо изучен (лучевой метод, комплексный метод ВКБ). Соответствующие алгебры здесь коммутативны.

Applications of global theory of singularities to intersection theory of Hurwitz spaces and universal polynomials

Kazarian M. E. (Steklov Institute of Mathematics RAS and the Independent University of Moscow, Russia),
Lando S. K. (Institute for System Research RAS and the Independent University of Moscow, Russia)

We suggest a new approach to the intersection theory on Hurwitz spaces, that is spaces of meromorphic functions on algebraic curves. This approach is based on the theory of universal polynomials originating in the work by R. Thom in early 60ies and recently developed by M. Kazaryan. This theory allows one to express the cohomology classes Poincaré dual to loci of singularities of a general holomorphic mapping $f : M \to N$, of given type, in terms of universal polynomials in the relative Chern classes of f. As a result, we shed a fresh light on the structure of cohomology of Hurwitz spaces and obtain new enumeration results in the framework of the Hurwitz problem concerning enumeration of ramified coverings of the 2-sphere, with prescribed ramification type.

We hope that our approach will find a much wider domain of application and consider Hurwitz spaces as an important example where necessary tools useful in general situation can be developed.

О некорректности сингулярно-возмущённых задач для уравнений с частными производными

Хапаев М. М. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Рассмотрим сингулярно возмущённые задачи для эллиптических и параболических неоднородных уравнений с нелинейностью в правой части

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(x, u), \tag{1}$$

$$\varepsilon^2 (u_t - \Delta u) = f(x, u, t) \tag{2}$$

$x \in D, \dim x = 2 \qquad 0 < t < \infty, 0 < \varepsilon \ll 1.$

Для обеих уравнений $u|_{\partial D} = 0$ и для второго $u(x, 0) = 0$. О правых частях будем предполагать непрерывность функций $f(x, u)$ и $f(x, u, t)$, а также наличие у вырожденных уравнений $f(x, u) = 0$ и $f(x, u, t) = 0$ изолированных корней φ_i.

Для каждой их этих задач через функцию источника запишем интегральное уравнение II рода, которое оказывается сингулярно-возмущённным.

$$\varepsilon^2 u(x, t) = -\iint\limits_D G(x, \xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi \tag{3}$$

$$\varepsilon^2 u(x, \xi) = \iint\limits_D \int\limits_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, u(\xi, \tau), \tau)\, d\tau d\xi$$

Если обратить ε в 0, то получатся уравнения I рода, нелинейные, в этом и состоит некорректность таких задач.

Проблема, которая решается применительно к таким уравнениям состоит в нахождении внутренних погранслоёв, образующих контрастные структуры. Используя перемену знака функции f и свойства функции Грина, можно доказать существование таких переходных погранслойных режимов в любой точке многообразия, определяемого корнем. Для конкретной локализации такого решения нужны дополнительные условия.

On Averaging and Homogenization in Non-standard Situation

Khasminskii R. Z. (Wayne State University, Detroit,USA)

An averaging principle is proved for diffusion process $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ with one-dimensional null-recurrent fast component $X_\varepsilon(t)$. In contrast with positive recurrent setting, the slow component $Y_\varepsilon(t)$ alone cannot be approximated by diffusion processes. However one can approximate the pair $(\varepsilon X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ by a Markov diffusion with coefficients averaged in some sense. An application of this result to homogenization for parabolic PDE is given too. The talk is based on the joint papers of the author with N. Krylov and F. Klebaner.

Дифференциальные включения и непрерывные модели конкурентного рынка

Хацкевич В. Л. (Всероссийский Заочный Финансово–экономический институт, Воронежский филиал)

Моделирование динамики цен на реальном рынке товаров П. Самуэльсон предложил описывать системой дифференциальных уравнений. В этой модели считается, что скорости изменения цен на рынке пропорциональны функциям избыточного спроса на соответствующие товары. Целью нашей работы является исследование непрерывной динамической модели рынка в условиях многозначных функций избыточного спроса. Такая модель описывается дифференциальным включением. Рыночное равновесие рассматривается как предельное положение траектории, соответствующей непрерывной динамической модели и является в этом случае решением операторного включения, порождаемого функцией избыточного спроса. В работе для многозначных функций избыточного спроса вводятся и изучаются аналоги условий выявленного предпочтения, валовой заменимости и др., имеющие экономический смысл и рассматриваемые ранее в однозначном случае. При таких ограничениях устанавливается устойчивость рынка, исследуются периодические колебания рыночных цен при периодическом изменении функций избыточного спроса, а также асимптотическое поведение динамики рынка при стремлении параметра, характеризующего скорость реакции спроса по отношению к предложению, к нулю или к бесконечности.

Литература

[1] Хацкевич В.Л. *Математическое моделирование процессов динамики и управления в экономике.* - Воронеж: Центрально-Черноземное книжное издательство, 2003. - 117 с.

Homogenization of Maxwell's Equation in Domains with Thin Nets

Khruslov E. (Институт физики низких температур, Харьков)

We consider initial boundary-value problems for the nonstationary Maxwell equations in domains with connected dense net, formed by thin perfectly conducting wires. We study the assymptotic behaviour of a solution of the problem as the diameters of the wires tend to zero and density of the nets increases. We derive the homogenized equations describing the leading term of the asymptotics and prove the unique solvability of the initial boundary-value problem for the homogenize equations.

On Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Strong Singularities

Kiguradze I. (A. Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia)

We consider the differential equation

$$u^{(2n)} = f(t,u) \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$\lim_{t\to a} u^{(i-1)}(t) = 0, \quad \lim_{t\to b} u^{(i-1)}(t) = 0 \ \ (i = 1,\dots,n), \tag{2}$$

$$\lim_{t\to a} u^{(i-1)}(t) = 0 \ (i = 1,\dots,n), \ \lim_{t\to b} u^{(j-1)}(t) = 0 \ (j = n+1,\dots,2n), \tag{3}$$

where $f :]a,b[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function having singularities at $t = a$ and $t = b$. Solutions of problems (1), (2) and (1), (3) are sought in the space of $2n$-times continuously differentiable functions $u :]a,b[\, \to \mathbb{R}$ satisfying the condition $\int_0^{+\infty} [u^{(n)}(t)]^2\,dt < +\infty$. Optimal in a certain sense conditions are found guaranteeing the unique solvability of the mentioned problems and the stability of their solutions with respect to small perturbations of Eq. (1). In particular, the following theorem is proved.

Theorem. *Let* $\int_a^b (t-a)^{2n}(b-t)^{2n}|f(t,0)|\,dt < +\infty$ *and there exist numbers* $t_0 \in]a,b[$ *and* $\ell > 0$ *such that* $\ell < 4^{-n}\big[(2n-1)!!\big]^2$, *and the conditions* $(-1)^n[f(t,x) - f(t,y)]\,\mathrm{sgn}\,(x-y) \le \frac{\ell}{(t-a)^{2n}}\,|x-y|$ *and* $(-1)^n[f(t,x) - f(t,y)] \times \mathrm{sgn}\,(x-y) \le \frac{\ell}{(b-t)^{2n}}\,|x-y|$ *hold in the domains* $]a,t_0[\,\times\mathbb{R}$ *and* $]t_0,b[\,\times\mathbb{R}$, *respectively. Then problem* (1), (2) *is uniquely* *solvable and its solution is stable with respect to small perturbations of the right-hand side of Eq.* (1)*.*

Supported by GRDF (Grant # 3318).

Fractional Differential Equations. Problems and Trends of Research

Kilbas A. A.
(Belarusian State University, Minsk, Belarus)

The report is devoted to some problems in the theory of the so-called differential equations of fractional order in which an unknown function is contained under the operation of fractional differentiation. Some methods and results in the theory of such differential equations are discussed. The one-dimensional linear and nonlinear fractional differential equations involving the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives are considered. The approach based on the reduction of the Cauchy-type and Cauchy problems for such differential equations of fractional order to Volterra integral equations is presented. The one- and multi-dimensional fractional differential equations with fractional derivatives of Liouville, Hadamard and Riesz are investigated. The method of integral transforms of Laplace, Fourier and Mellin is discussed to deduce the solutions in closed form of the linear differential equations of fractional order with such fractional derivatives and of the initial and boundary value problems for partial differential equations of fractional order. Problems and new trends of research are discussed.

Rayleigh wave with a linear transverse structure

Kiselev A. P. (Steklov Mathematical Institute, St.Petersburg Department)

A new simple closed–form solution for a surface–wave propagation in a homogeneous isotropic elastic traction–free half–space is presented. The solution, in which in–plane and antiplane motions are combined, linearly depends on the transverse variable. The wave speed is the same as that of the classical Rayleigh wave.

Some examples of noncoincidence of attractors

Kleptsyn V. A. (MSU, IUM, ENS Lyon)

There are a lot of definitions of what one should call an attractor for a dynamical system. The talk will be devoted to three of them: Milnor's, minimal and statistical attractors.

Two examples of noncoincidence of the attractors given by these definitions will be presented. For the Cherry flow, it will be proven that the statistical attractor (and thus, the minimal one) is but the saddle. As it's easy to see that the Milnor's attractor in this case is Kantor set, it gives us a "$1 - 0$" codimension example of noncoincidence of Milnor's and minimal attractors — the highest codimension known up to the moment.

The second example is a modification of the Bowen's example, where one of the saddles is replaced by a saddlenode. For such a dynamical system, the minimal attractor is but the saddlenode, and the statistical one consists of both saddle and saddlenode. Thus, minimal and statistical attractors for this system do not coincide. It is the first example of that kind.

On the problem of topological classification of Lorenz type attractors

Klinshpont N. E. (Обнинский Технический Университет Атомной Энергетики)

Afraimovich, Bykov and Shil' nikov are introduced the Lorenz'type attractors of orientable, nonorientable and semiorientable types. In [1] the topological invariant is suggested for the orientable Lorenz'type attractor. Williams introduced an inverse limit of a semiflow on the branched manifold L as a geometric model of Lorenz attractor. Williams suggested kneading sequences which are the conditional topological invariant. In this report are establishing the following results:

1. The analogous topological invariant (like in [1]) is introduced for nonorientable and semiorientable Lorenz's type attractors.

2. There are introduced the branched manifolds and semiflows generated nonorientable and semiorientable geometric Lorenz attractors.

3. There are considered the inverse limits of a semiflow on the branched manifolds.It is introduced the topological invariant which distinguish the uncountable set of nonhomeomorphic attractors.

4. The results (3) are generalazed to branched manifolds and semiflows generated by maps of interval with n points of discontinuity.

References

[1] N. E. Klinshpont. *The topological invariant of the Lorenz attractor//* Russian Math. Surveys 47(2) (1992)195-196

Asymptotic properties of differentialequation

Julka Knezevic-Miljanovic (Faculty of Mathematics, Belgrade)

Asymptotic properties of solutions have been considered for some nonlinear differential equations. The paper deals with investigation of bounded solutions, of prolongation of solutions, oscillatory solutions and another asymptotic properties.The examples have been stated which illustrate the given methods and have got physical interest.

References

[1] J. Knezhevich-Miljanovich. *Ob asimptoticheskih svojstvah reshenij nelinejnogo uravnenija vtorogo porjadka//* Uspehi matematicheskih nauk, V. 47, 1992.

[2] J. Knezhevich-Miljanovich. *O svojstvah reshenij nelinejnyh uravnenij vtorogo porjadka//* Akademija nauk Ukrainy, Nelinejn'e granichnye zadachi, Kiev, 5, 1993.

[3] J. Knezhevich-Miljnovich. *Ocenki sobstvenyh znachenij nesamo-soprazhennyh kraevih zadach//* Differencial'nye uravnenija, 1997, N. 11.

Exterior algebra approach to the numerical treatment of stability and instability of kink and pulse solutions to the Ginsburg-Landau and Cahn-Hillard equations

Kobelevskii I., (Department of Mathematics and Mechanics, MSU, Russia)

Thomas J.Bridges, (Department of Mathematics and Statistics, University of Surrey, Guildford, Surrey, UK)

This is a joint work with A.Afendikov.

Ginzburg-Landau and Cahn-Hillard equations on the real line are model equations to a variety of physical processes and the investigation of the stability of kink and pulse solutions of these equations is an actual problem. Spectral problems associated with the linearization about these solutions possess a continuous spectrum and are stiff. To overcome these difficulties in the numerical framework they are formulated in terms of the Evans function, a complex analytic function whose zeros together with the multiplicities correspond to the points of the discrete spectrum. Several numerically computable forms for the Evans function, including the mixed formulation, are discussed. The algorithm based on a fast robust shooting algorithm on wedge product spaces is introduced. It has several new features, including a numerical algorithm for choosing starting values, a new method for numerical analytic continuation, in choosing the numerical integrator, etc. The algorithm is illustrated by computing the stability and instability of pulse and kink solutions of the generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hillard equations.

Keywords: Linear stability; Numerical exterior algebra; Evans function.

«Дискретные» эффекты в гладких потоках с невырожденными седлами на двумерном торе

Кочергин А. В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Рассматривается специальный поток над поворотом окружности с асимметричной функцией, имеющей логарифмические особенности (пример В.И. Арнольда). Я.Г. Синай и К.М. Ханин доказали свойство перемешивания для некоторого класса диофантовых (достаточно плохо аппроксимируемых) углов поворота.

Обнаружены некоторые «дискретные» эффекты, возникающие за счет регулярного прохождения траекторий вблизи особых точек при хорошей аппроксимируемости числа вращения рациональными числами. В частности, при отсутствии некоторого ограничения на коэффициенты особенностей типа равенства удалось доказать свойство перемешивания для некоторого класса лиувиллевых чисел.

Для *сильно асимметричной* функции доказано перемешивание при любых иррациональных углах поворота.

Homogenization of Dirichlet Optimal Control Problems with State Quality Constraints

Kogut P.

(Dniepropetrovsk National Technical University)

We study the optimal control problems with state equality constraints involving homogenization. More precisely, the main control object is a Dirichlet boundary value problem for the linear laplacian operator with bounded controls in the Radon measure space. We suppose that for every ε, where ε takes its values in a sequence of positive numbers which tends to zero, there are some closed "holes"T_i^ε, $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$, such that on the subdomain $S_\varepsilon = \cup_i T_i^\varepsilon$ are prescribed state constraints in the equality form. We don't make any assumptions on the constraint supports S_ε. The problem is to describe the asymptotic behaviour of the original optimal control problem as ε tends to zero.

We would like to emphasize that in contrast to the approach of Kesavan and Saint Jean Paulin, of Zoubairi, of Conca and Osses we don't look for a limit of optimal control functions and for a limit of minimum values of the cost functionals. We stay with the optimal control problem in the original sense and look for a homogenized problem as some variational limit of the original one (but not as limit of optimal solutions). Our approach is based on the concept of variational convergence of constrained minimization problem.

Феномен буферности в математических моделях естествознания

Колесов А. Ю. Ярославский государственный университет),
Розов Н. Х. (Московский государственный университет)

В системе дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического или параболического типа имеет место феномен буферности, если можно обеспечить существование у нее любого a priori заданного конечного числа устойчивых периодических по времени решений подходящим выбором ее параметров. Исследования показали, что явление буферности характерно для широкого класса математических моделей, адекватно описывающих механические, физические, биологические и др. процессы уравнениями с частными поизводными. Типичный пример: краевая задача, состоящая из линейной системы телеграфных уравнений и нелинейных условий на концах конечного отрезка (модель автогенератора с отрезком длинной линии и нелинейным туннельным диодом).

Литература

[1] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. // Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 1-192.

[2] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. // УМН. 2000. Т. 55. Вып. 2. С. 95-120.

On Reversible Systems With Homoclinic Orbit To a Nonhyperbolic Equilibrium

Koltsova O. Yu. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

We study some elements of the global behaviour of a reversible system

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^4, \quad f \text{ — smooth},$$

having a homoclinic orbit asymptotic to a nonhyperbolic equilibrium $x = 0$. The nonhyperbolicity is due to a pair of purely imaginary eigenvalues. Reversibility means that there is a linear involution R with $Rf(x) = -f(Rx)$. Such equilibrium has a two-dimensional (local) center submanifold filled with symmetric periodic orbits (Lyapunov orbits) surrounding the equilibrium. With the help of the Poincaré map, we study the homoclinic intersections between the stable and unstable manifolds these orbits. We prove that the submanifolds intersect along two transverse homoclinic orbits, i.e. there exist two families of homoclinic orbits to Lyapunov saddle periodic orbits. Moreover, we prove the existence of two countable sets of periodic orbits of different types, accumulating at the homoclinic orbit to equilibrium.

This work has been supported in part by the CRDF grant (project #13314).

Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях

Кондратьев В. А. (Москва, МГУ, Россия)

Рассматривается уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - f(u, x_n) = 0,$$

где $0 < x_n < \infty$, $(x_1 \dots x_{n-1}) \in \Omega$ – ограниченная липшициева область с липшициевой границей, $f(0, x_n) \equiv 0$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0, x_n) \equiv 0$, f – непрерывная монотонная по u функция.

Установлены асимптотические формулы решений при $x_n \to +\infty$, которые удовлетворяют краевым условиям Дирихле или Неймана, а также нелинейным краевым условиям. Ранее такие формулы были известны в случае, когда a_i зависят от $(x_1, \ldots x_{n-1})$ [1]. Получена оценка остаточного члена в асимптотической формуле. Все коэффициенты – ограниченные измеримые функции.

Литература

[1] Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев, О.А. Олейник. *Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях* Мат. Сб. 1998, т. 189, №3, с. 45-68.

On the notion of quantum Lyapunov exponent

Kondratieva M. F. (Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, Canada),
Osborn T. A. (Department of Physics and Astronomy, University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada)

Classical chaos refers to the property of trajectories to diverge exponentially as time $t \to \infty$. It is characterized by a positive Lyapunov exponent.

There are many different definitions of quantum chaos. The one related to the notion of generalized (quantum) Lyapunov exponent is based either on qualitative physical considerations or on a so-called symplectic tomography map [1,2].

The purpose of this note is to show how the definition of quantum Lyapunov exponent naturally arises in the framework of Moyal phase space formulation of quantum mechanics through quantization of symbols, quantum trajectory and family of quantizers [3].

References

[1] R Vilela Mendes, Phys Lett A 171(1992) 253-258;
[2] V I Man'ko, R Vilela Mendes, Physica D 145 (2000) 330-348;
[3] R.L. Sratonovich, Sov Phys JETP 4 (1957) 891-898.

Задача Дирихле для уравнений Лапласа и теплопроводности с ограниченной правой частью в областях с прямыми углами

Конёнков А. Н. (РГПУ)

В n-мерном прямом угле $Q = (0, \infty)^n$, $n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле

$$\Delta u = f \text{ в } Q, \quad u|_{\partial Q} = 0, \qquad (*)$$

где правая часть f принадлежит пространству $L_\infty(Q)$ с нормой $|f|_{0,Q} = \operatorname{vrai}\sup_Q |f|$. Через $H_2(\bar{Q})$ обозначим пространство Зигмунда, несколько более широкое, чем пространство Липшица $C^{1,1}(\bar{Q})$, но более узкое, чем пространства Гельдера $C^{1,\alpha}(\bar{Q})$, $0 < \alpha < 1$. А именно, $H_2(\bar{Q})$ состоит из функций $f : Q \to \mathbb{R}$, непрерывных в Q вместе со своими производными первого порядка, для которых конечна величина $|f|_{2,Q} = |u|_{0,Q} + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|_{0,Q} + \sum_{i=1}^n \sup \frac{|\Delta_x^2 \partial_i f|}{|\Delta x|}$. Устанавливается априорная оценка любого ограниченного обобщенного решения указанной задачи в пространстве $H_2(\bar{Q})$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_\infty(Q)$ и функция $u \in C(\bar{Q})$ является ограниченным решением задачи $(*)$. Тогда $u \in H_2(\bar{Q})$, причем*

$$|u|_{2,Q} \le C(n)(|f|_{0,Q} + |u|_{0,Q}).$$

Для n-мерного куба $K = (0,1)^n$ аналогичное утверждение справедливо без слагаемого $|u|_{0,K}$ в правой части неравенства.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_\infty(K)$. Тогда (единственное) решение u задачи $(*)$ принадлежит $H_2(\bar{K})$, причем*

$$|u|_{2,K} \le C(n)|f|_{0,K}.$$

Подобные результаты получены и для уравнения теплопроводности.

On Abstract Green's formula for a Triple of Hilbert spaces and applications

Kopachevsky N. D.
(Taurida National V.Vernadsky University Black Sea Branch of MSU)

1. Assume that for a triple of Hilbert spaces E, F, G the following conditions are satisfied: the space F is dense embedded in the space E; there exists an operator $\gamma : F \to G_+ \subset G$ (a trace operator) that acts boundary from F on the space G_+ dense embedded in G.

Then there exist a unique operator $L : F \to F^*$ and a unique operator $\partial : F \to (G_+)^*$ such that the following abstract Green's Formula ia valid:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, v \in F. \qquad (1)$$

2. Suppose $E = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega$ is Lipschitzian, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\partial\Omega)$, $G_+ = H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\gamma u := u|_{\partial\Omega}$ $(\forall u \in H^1(\Omega))$, we have, as a special case of (1), the famous Green's Formula for the Laplace operator:

$$\langle \eta, -\Delta u + u \rangle_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \forall \eta, v \in H^1(\Omega). \qquad (2)$$

3. Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma \subset \partial\Omega : x_3 = 0$, $\operatorname{mes}\Gamma > 0$, $S := \partial\Omega \backslash \overline{\Gamma}$, $\operatorname{mes} S > 0$. Let $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (in \ \Omega),\ u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \ (on \ S)\}$, $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (in \ \Omega),\ \vec{u} = \vec{0} \ (on \ S)\}$, $G = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$, $\gamma\vec{\eta} := \vec{\eta}|_\Gamma$, $G_+ = H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_\Gamma$, $H^{1/2}_\Gamma = L_{2,\Gamma} \bigcap H^{1/2}(\Gamma)$, then from (1) we have the Green's Formula for the Stokes operator: $\langle \vec{\eta}, \nabla p + \vec{u} - \Delta\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum\limits_{j,k=1}^{3} \tau_{ik}(\vec{\eta})\tau_{ik}(\vec{u}) + \vec{\eta}\cdot\vec{u} \right) d\Omega - \langle \gamma\eta, \partial\vec{u} \rangle_{L_2(\Gamma)}$,

$$\tau_{ik}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \ \partial\vec{u} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} (\tau_{k3}(\vec{u}) - p\delta_{k3})\vec{e}_k, \ \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \ \forall \nabla p \in (J^1_{0,S}(\Omega))^*.$$

References

[1] Kopachevsky N. D., Krein S. G., Ngo Zuy Kan *Operatornye metody v linejnoj gidrodinamike: Evoljucionnye i spektral'nye zadachi.* – Moskva: Nauka, 1989, – 416 s.

[2] Kopachevsky N. D., $\boxed{\text{Krein S. G.}}$ *Abstraktnaja formula Grina dlja trojki gil'bertovyh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral'nye zadachi.* // Ukrainskij matematicheskij vestnik, V.1, N1(2004), pp.69-97.

О численных алгоритмах стабилизации неустойчивого решения и аппроксимации аттрактора

Корнев А. А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Рассматриваются методы численного построения устойчивого и неустойчивого многообразий в окрестности изолированной неподвижной негиперболической точки заданного отображения. Полученные результаты применяются к задачам стабилизации и управления неустойчивыми решениями, а также аппроксимации с заданной погрешностью нетривиальных траекторий глобального аттрактора. Приводятся примеры расчетов для системы Лоренца и уравнения Чафе-Инфанта.

Смешанные задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка

Корзюк В. И., Чеб Е. С. (ИПНК НАН Беларуси, БГУ)

Относительно искомой функции $u(t,x)$ в цилиндрической области $Q = (0,T) \times \Omega$ переменных $(t,x) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассматривается линейное гиперболическое уравнение с биволновым оператором в главной части

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\triangle\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\triangle\Big)u + A_3 u = f(t,x), \qquad (1)$$

где постоянные $a^2 \neq b^2$, $t \in (0,T)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\triangle$ – оператор Лапласа,

$$A_3 = \sum_{|\alpha| \leq 3} a_\alpha(t,x) D^\alpha,$$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $a_\alpha(t,x), f(t,x)$ – заданные в Q функции.

На нижнем основании цилиндра Q задаются четыре начальные условия

$$l_k u \equiv \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0,1,2,3,$$

на боковой поверхности $\Gamma = (0,T) \times \partial\Omega$ – два граничные условия. Таких граничных условий одиннадцать видов.

Таким образом, с учетом вида граничных условий для уравнения (1) рассматривается одиннадцать различных смешанных задач. Для них методом энергетических неравенств и операторов осреднения переменного шага доказывается существование и единственность сильных решений в подходящих функциональных пространствах.

Регулярные решения некоторых нелинейных упругих задач.

Кошелев А. И. (СПб.Университет)

В конечной области с гладкой границей расссматривается нелинейная задача теории упругости с упрочнением. Проблема сводится к краевой задаче для квазилинейной системы с ограниченными нелинейностями и однородными граничными условиями.С помощью неравенства Корна для весовых пространств доказывается существование гёльдеровых решений. Была использована финансовая поддержка ГРАНТА РФФИ 03-01-00053.

Литература

[1] Кошелев А.И. *Неравенство Корна с весом и некоторые итерационные процессы для квазилинейных эллиптических систем.*- ДАН СССР,1983,271:5,1056-1059.

Entropy solutions of nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity and L^1-data

Kovalevsky A. A. (Inst. Appl. Math. Mech., NAS of Ukraine)

We consider the following Dirichlet problem:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u) = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\,, \tag{2}$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $f \in L^1(\Omega)$ and a_i, $i = 0,1,\dots,n$, are Carathéodory functions defined on $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. It is supposed that the functions a_i, $i = 1,\dots,n$, satisfy some growth and strict monotonicity conditions and the next degenerate coercivity condition: for a.e. $x \in \Omega$ and every $s \in \mathbf{R}$ and $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,s,\xi)\xi_i \geq \frac{c|\xi|^p}{(1+|s|)^{p_1}}\,,$$

where $p \in (1,n)$, $p_1 \in (0,p-1)$ and $c > 0$. We note that the assumed growth of $a_i(x,s,\xi)$, $i = 1,...,n$, is of the rate p with respect to ξ and it admits arbitrary increases with respect to s.

We study summability properties of entropy solutions of problem (1),(2). In particular, we establish that if u is an entropy solution of this problem and if $h \in C(\mathbf{R})$, $h \geq 0$ in $\mathbf{R}$ and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|s|)^{p_1} h(s) ds < +\infty ,$$

then $|\nabla u|^p h(u) \in L^1(\Omega)$.

Existence of entropy solutions of the problem (1),(2) is given under additional assumptions on the lower-order term a_0. With it all any sign conditions for a_0 are not required.

Асимптотическое разложение решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами

Коврижных О. О. (Институт математики и механики УрО РАН)

Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x^0, \quad y|_{t=0} = y^0, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $g(t)$ – достаточно гладкие функции при $0 \leq t \leq T$, $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ – малые параметры.

Исследованию сингулярно возмущенных уравнений с несколькими малыми параметрами посвящен ряд работ (см., например, [1]–[3]). Особенностью настоящей работы является построение асимптотики решения задачи (1), (2) при условии, что ε, μ *независимо* стремятся к нулю. Члены асимптотики получаются путем решения линейных алгебраических уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Доказано, что построенный ряд является равномерным при $\varepsilon \to 0$, $\mu \to 0$ асимптотическим разложением решения, если выполнены условия

$$a(t) < 0, \quad d(t) < 0, \quad b(t)c(t) - a(t)d(t) < 0, \quad b(t)c(t) \geq 0.$$

Краткое изложение результата опубликовано в [4].

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН и Netherlands Research Organisation NWO, grant No. 047.016.008.

Литература

[1] *Васильева А.Б.* Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 6. С. 1110–1113.

[2] *O'Malley R.E, jr.* J. Math. and Mech. 1967. Vol.16, № 10. P. 1143–1164.

[3] *Шишкин Г.И.* Диф. уравн. 1977. XIII, № 2. С. 376–378.

[4] *Ильин А.М., Коврижных О.О.* Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 1. С. 1–2.

Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами

Кожанов А. И. (Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск)

В докладе излагаются некоторые результаты о разрешимости следующей задачи — задачи нахождения вместе с решением параболического уравнения того или иного коэффициента (коэффициентов) самого уравнения или же правой части (внешних воздействий). В подобных задачах предполагается, что неизвестные коэффициенты зависят от независимых переменных специальным образом (в нашем случае — либо только от пространственных переменных, либо только от временной); кроме того, помимо обычной граничной информации, характерной для той или иной краевой задачи, в рассматриваемых задачах задаются дополнительные локальные или нелокальные (интегральные) условия, количество которых зависит от количества неизвестных коэффициентов. Отметим, что рассматриваемые задачи с неизвестными коэффициентами являются сильно нелинейными и немонотонными, что затрудняет их исследование.

Для исследуемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Как побочный результат, получены теоремы о разрешимости задач с неизвестными коэффициентами для уравнений с кратными характеристиками и для псевдопараболических уравнений.

Об убывании решений параболического уравнения с младшими членами

Кожевникова Л. М. , Кульсарина Н. А. (Стерлитамакский государственный педагогический институт), Мукминов Ф. Х. (Башкирский государственный педагогический университет)

В цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset R^{n+1}$ – неограниченная область, рассматривается первая смешанная задача для параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + (-1)^k D_x^{2k} u + \sum_{i=l}^{m} \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} (-1)^i D_y^{\alpha}(a_{i\alpha\beta}(x,y) D_y^{\beta} u) = 0, \;\; x \in R, \, y \in R^n,$$

с однородными краевыми условиями и финитной начальной функцией. Определяется понятие лямбда- последовательности задачи и в ее терминах устанавливается оценка сверху L_2-нормы $\|u(t)\|$ решения задачи. Доказана точность этой оценки в широком классе неограниченных областей при $k = l = m = 1$. При $k = l = m > 1$ имеются косвенные подтверждения точности оценки. В частности, для областей $\{|y| < x^{\alpha}, \; \alpha \in (0, k/l)\} \subset R^2$ эта оценка принимает вид

$$\|u(t)\| < M\|u(0)\| \exp(-\kappa t^{\theta}), \quad \theta = \frac{k - l\alpha}{k - l\alpha + 2kl\alpha}.$$

Несколько неожиданно, что последняя определяется младшими членами уравнения.

Spectral functions and regularized traces of singular differential operators of higher orders

Kozko A. I., Pechentsov A. S. (MSU)

Let us consider the semibounded operator L in the space $L_2[0, \infty)$ generated by the differential expression $\ell(y) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x) + p_{2n-2}(x) y^{(2n-2)}(x) + ... + p_0(x) y(x)$ and the boundary conditions $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$. The real coefficients $p_i(x)$, $i = 0, ..., 2n-2$, are locally integrable and $p_{2n-2}(x)$ is piecewise smooth. Let P be the operator of multiplication in $L_2[0,\infty)$ by a finite function $q(x) \in L[0,+\infty]$ and the function $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x q(t)dt$ has bounded variation at some right neighborhood of zero. Let μ_k, λ_k, $k = 1, 2, 3, ...$, are the eigenvalues of the operators $L+P$ and L respectively arranged in order of magnitude. Moreover $\lambda_k = ck^\alpha + o(k^\beta)$, $k \to \infty$ where $0 < \alpha \le 2n$, $\beta < \alpha\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ and $c > 0$ is a constant.

Theorem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k - \lambda_k - \frac{\alpha c^{\frac{1}{2n}}}{2\pi n}\int_0^{+\infty} q(x)dx k^{\frac{\alpha}{2n}-1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^x q(t)dt}{x} - \frac{\gamma\alpha c^{\frac{1}{2n}}}{2\pi n}\int_0^{+\infty} q(x)dx\,,$$

where the constant γ is defined by the following equality $\sum_{k=1}^{N} k^{\frac{\alpha}{2n}-1} = \frac{2n}{\alpha}N^{\frac{\alpha}{2n}} + \gamma + o(1)$, $N \to \infty$.

Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles

Raphael Krikorian

(Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires Université Pierre et Marie Curie, France)

This is a joint work with Artur Avila.

We present some recent results obtained with Artur Avila on the dynamics of quasi-periodic Schrödinger cocycles, that is, the natural cocycles associated to the discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators

$$(\mathcal{H}_{\alpha,v,x}u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + v(n\alpha + x)u(n), \qquad u \in l^2(\mathbf{Z}),$$

($v : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$). Assuming that the potential v is real analytic (resp. smooth) and that the frequency α satisfies some explicit diophantine condition of full Lebesgue measure (α is recurrent diophantine), we prove that for Lebesgue-almost all energy, such a cocycle is either analytically (resp. smoothly) Floquet-reducible or is non-uniformly hyperbolic (in the fibers). This result gives a very good control on the absolutely continuous part of the spectrum of the corresponding quasiperiodic Schrödinger operator, and allows us to complete the proof of the Aubry-André conjecture on the measure of the spectrum of the Almost Mathieu Operator: when $v = \lambda\cos$ then for every λ and every *irrational* α the

Lebesgue measure of the spectrum of $\mathcal{H}_{\alpha,\lambda\cos}$ is $|4-2|\lambda||$. Also, in the Almost Mathieu case we get that for recurrent diophantine α, any $|\lambda|<2$ and almost every energy, the almost-Mathieu equation is analytically reducible. For general analytic potentials we can prove similar results.

Метод интегральных уравнений в смешанной задаче с косой производной для гармонических функций вне разрезов на плоскости

Крутицкий П. А., Сгибнев А. И. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Рассматривается смешанная задача для уравнения Лапласа на плоскости вне разрезов. В качестве граничных условий задается значение искомой функции на одной стороне каждого разреза и значение ее косой производной на другой стороне. Эта задача обобщает смешанную задачу Дирихле-Неймана. Теорема единственности доказывается методом энергетических тождеств. С помощью метода потенциалов задача сводится к однозначно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма II рода в подходящем банаховом пространстве, которое оказывается однозначно разрешимым. Таким образом доказывается теорема существования для исходной задачи и получается интегральное представление решения.

Chaotic oscillations of a vibroimpact system

Kryzhevich S. G. and Pliss V. A. (Saint-Petersburg State University)

Consider the single degree of freedom dynamics of a point mass on a spring under action of the linear damping and elasticity forces and a periodical external force. Assume that this point mass has an elastic impact every time it reaches the delimiter. These oscillations may be described by the equation

$$\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+x=f(t). \tag{1}$$

Suppose that the perturbation $f(t)$ of the period $T=T_1+T_2$ is defined on a segment $[0,T)$ by formulae: $f(t)=1$ if $t\in[0,T_1)$, $f(t)=-1$ if $t\in[T_1,T)$. The equation (1) is defined for $x\geqslant 0$, and the elastic impact condition is the following: if $x(t_0)=0$, and $\dot{x}(t_0-0)\leqslant 0$, then $\dot{x}(t_0+0)=-\dot{x}(t_0-0)$. Suppose that if $x(t_0)=0$, $\dot{x}(t_0-0)=0$ and $kT+T_1\leqslant t_0<(k+1)T$

then $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ at $t_0 \leqslant t \leqslant (k+1)T$. Let the parameters T_1, T_2 and ε satisfy conditions:

$$\frac{T_2}{T_1} > \mu > 3,$$
$$T_1 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \exp\left(\frac{-2\pi\varepsilon\chi(\mu-3)k}{3\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right), \frac{2\pi k}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \exp\left(\frac{-2\pi\varepsilon\chi(\mu-3)k}{3\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \right]. \quad (2)$$

Let us denote by $(*)$ the vibroimpact system considered and by F the Poincare mapping of this system.

Theorem. *For all $\varepsilon, \chi \in (0,1)$ and $\mu > 3$ there is such number $\bar{T} > 0$, that if $T_1 > \bar{T}$, are fulfilled a condition (5.1) and (5.5), the mapping F has hyperbolic invariant compact K with following properties*

- **I** *mapping $F|K$ has periodic points of an arbitrary minimal period;*
- **II** *periodic points of the mapping F are dense in K;*
- **III** *there is a point $p \in K$, the orbit of which $\{F^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ is dense in K.*

So, the system $(*)$ has chaotical regimes of oscillations.

Supported by the Ministry of Education of Russia and the government of Saint-Petersburg, grant PD03-1.1-142, by RFFI-GFEN, grant No 02–01–39001, MAS, grant No 03-01-06493, by the program "Leading Scientific schools", grant НШ-2271.2003.1 and by the program "Universities of Russia".

Infinitely generated discrete almost minimal group

Kulikov M. S. (Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University)

Let $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ be a discrete subgroup. Consider its natural action on the Euclidean plain. One can study properties of Γ via properties of this action orbits. Thus, it is known that if Γ is a uniform lattice (that is, quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ is compact) then all the orbits (except zero) are dense. Generalizations of this fact are know as Greenberg–Dani results (see [3], [1], [2]). Also, if Γ is a lattice (that is, quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ is of finite volume) then any orbit is either discrete or dense (this property called 'almost minimality'). From this point of view the following question is interesting: is it true that every discrete subgroup in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ with only dense and discrete orbits is a lattice? This question was believed to have positive answer but surprisingly enough, it appears to be negative [4]:

Theorem *There exists an infinitely generated discrete (hence, not a lattice) subgroup in* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *such that its natural action on the plane has only discrete and dense orbits.* This result can be reformulated in terms of horocycle flows: there exists a surface of constant negative curvature with infinitely generated fundamental group such that the horocycle flow on its unit tangent bundle has only dense and closed orbits.

References

[1]Dani, J.S., Dani, S.G. Discrete groups with dense orbits // J. Ind. Math. Soc. 37 (1973), pp. 183–195.

[2]Dani, J.S. Density properties of orbits under discrete groups // J. Ind. Math. Soc. 39 (1975), pp. 189–218.

[3]Greenberg, L., (1963). Discrete groups with dense orbits, In: Flows on Homogeneous Spaces, Annals of Math. Studies 53, Princeton University Press.

[4]Kulikov, M. S., Groups of Schottky type and minimal sets of the geodesic flows, Mat. Sb. 195 (1) (2004), pp. 37–68 (in Russian).

Point interactions with arbitrary orbital moments: Hilbert space approach.

P.Kurasov Dept. of Math., Lund Institute of Technology, Sweden and Dept. of Physics, St.Petersburg Univ., Russia

It is well known that point interaction for the Laplace operator $-\Delta$ in R^3 is described by one real parameter. The corresponding operator differs from $-\Delta$ on spherically symmetric functions only and therefore cannot be used to model objects with eigenfunctions having high orbital moments. Different models involving operators in spaces with indefinite metrics have been suggested so far. It will be shown that point interactions with high orbital moments can be determined using operators in a Hilbert space. The possibility to apply this construction to model complicated molecules will be discussed.

Эффект маятника с вибрирующим подвесом в электронике

Курин А. Ф. (Воронежский государственный университет)

Многие задачи в электронике решены путем усреднения уравнений движения зарядов по быстрым колебаниям электромагнитного поля (рельефы высокочастотного потенциала, сила Гапонова-Миллера). При большой амплитуде поля усреднение становится некорректным, и тогда обнаруживаются параметрические явления, исчезавшие при усреднении. В частности, из уравнений движения заряда в стоячей электромагнитной линейно поляризованной волне получаем уравнение Хилла, описывающее колебания заряда в пучности электрического поля. При усреднении на пучность приходилась вершина потенциального барьера, и движение здесь считалось неустойчивым. Анализ показывает, что существуют широкие области значений параметров, характеризующих поле и заряды, устойчивого движения в пучности электрического поля. Установлен физический механизм этого явления. Совершая указанные ограниченные колебания и эффективно ускоряясь в направлении электрического поля, частица способна достигать ультрарелятивистской скорости. Параметрические явления возникают также при движении зарядов в узле линейно поляризованного электрического поля стоячей волны. Здесь анализ основан на решении уравнения Матье, описывающего колебания частиц.

Асимптотика решения матрично сингулярно возмущенных периодических задач управления

Курина Г. А. (Воронежская государственная лесотехническая академия)

Для нелинейной периодической задачи оптимального управления с матрично сингулярно возмущенным уравнением состояния (в уравнении состояния перед производной стоит оператор вида $A + \varepsilon B$, где A вырожден, а $A + \varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$) построено асимптотическое разложение решения по целым неотрицательным степеням ε при помощи прямой схемы построения асимптотики решения задач оптимального управления, которая заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условия задачи и определении серии задач управления для нахождения членов разложения. Отметим, что впервые прямая схема для сингулярно возмущенных задач прменялась М.Г. Дмитриевым и С.В. Белокопытовым. Установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании новых членов асимптотического разложения оптимального управления. Для решения линейно-квадратичной периодической задачи с матричным сингулярным возмущением в критерии качества также построена асимптотика решения при помощи прямой схемы, причем асимптотическое разложение оптимальной траектории и минимального значения функционала содержит только неотрицательные степени ε, а в разложении оптимального управления могут присутствовать и отрицательные степени.

Для обеих задач доказаны оценки близости построенного приближенного решения к точному по состоянию, управлению и функционалу. При доказательстве существенно используется возможность приведения вещественной неотрицательно гамильтоновой периодической оператор-функции при помощи вещественной оператор-функции того же периода к блочно-диагональной форме, в которой один из операторов на диагонали имеет при всех значениях аргумента спектр в открытой левой полуплоскости, а другой - в правой.

Все результаты получены совместно с Щекунских С. С.

Работа поддержана РФФИ, проект 02-01-00351.

Некоторые особенности задания граничных условий в контактных задачах динамики упругопластической среды

Курохтин В. Т. (Москва)

В настоящее время при постановке краевых задач в механике деформируемого твердого тела принято задавать значения функций или их частных производных на части поверхности, ограничивающей некоторое тело. В то же время, из механики вязкой жидкости известен феномен резкого изменения скорости жидкости в некотором слое конечной толщины, прилегающем к обтекаемой поверхности.Это явление сопровождается значительным выделением энергии в описанном выше пограничном слое. Аналогично, в теории ударных волн известно, что ударная волна это, строго говоря, некоторый слой, в котором претерпевают значительные изменения давление, скорость и другие параметры. (А отнюдь не поверхность разрыва, которой часто заменяют ударную волну в математических моделях. Поэтому кажется целесообразным в контактных задачах динамики упругопластической среды задавать количество энергии, выделяемое в зоне контакта конечной толщины. Следует отметить, что задание энергии как функции времени в качестве граничного условия применялось Л.И.Седовым при решении задачи о сильном взрыве. В настоящей работе предлагается математическая постановка задачи о распространении упругопластических волн сдвига в полубесконечном стержне круглого сечения в том случае, когда на конце стержня задана мощность выделяемой энергии.

Задача определения коэффициента относительной деформации

Кузенков А., Ирхина А. Л. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского)

В докладе к рассмотрению предлагается задача определения коэффициента относительной деформации на поверхности образцов. Считается, что образец подвергается нагружению вдоль одного выбранного направления.

Вводится понятие функции распределения деформации вдоль образца.

В качестве исходного образца рассмртивается циллиндр длины L. На его поверхности рассмотриваются две точки, с координатами соответственно x и $x + \triangle x$. Образец подвергается нагружению. После деформирующего воздействия координата первой точки становится $\tilde{x}(x)$, а координата второй соответственно $\tilde{x}(x + \triangle x)$. Длина участка между точками становиться $\tilde{\triangle} x = \tilde{x}(x + \triangle x) - \tilde{x}(x)$. Тогда коэффициент средней относительной деформации на участке между точками равен $\frac{\tilde{\triangle} x - \triangle x}{\triangle x} = \frac{\tilde{\triangle} x}{\triangle x} - 1$. Если существует предел отношения $\frac{\tilde{\triangle} x - \triangle x}{\triangle x}$ при $\triangle x \to 0$, то предельная функция $\varepsilon(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\tilde{\triangle} x - \triangle x}{\triangle x}$ и есть функция распределения деформации вдоль образца.

Пусть $\rho(x)$ - функция высот рельефа исследуемого образца до деформации. После деформирующего воздействия рельеф поверхности $\rho(x)$ будет преобразован как $\rho(\tilde{x}(x)) = \tilde{\rho}(x)$.

Пусть имеется информация о рельефе поверхности образца до деформации $\rho(x)$ и после деформации $\tilde{\rho}(x)$. Задача состоит в том, что бы по двум известным функциям высот рельефа поверхности наиболее точно восстановить распределение деформации.

Пусть D_ε множество функций, непрерывных и ограниченных на отрезке $0 \leq x \leq L$, т.е. $|\varepsilon(x)| \leq C$, $x \in [0, L]$. Выбирая из D_ε некоторую $\varepsilon(x)$, получаем новое преобразование координат и поверхности исследуемого образца – $\bar{x}(\varepsilon, x)$ и соответственно $\rho(\bar{x}(\varepsilon, x)) = \bar{\rho}(\varepsilon, x)$. Тогда задача состоит в выборе функции $\varepsilon(x)$ так, что бы обеспечить минимум функционала среднеквадратичного отклонения экспериментального рельефа после деформации и расчетного рельефа при деформации $\varepsilon(x)$:

$P(\varepsilon) = \int_0^L (\tilde{\rho}(x) - \rho(\bar{x}(\varepsilon, x)))^2 \, dx.$

Математически эту задачу можно рассматривать, как задачу оптимального управления, для решения которой необходима информация о двух функциях — $\rho(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$. Обычно информацию об этих функциях получают из эксперимента. Функция же $\varepsilon(x)$ в таком случае, рассматривается, как функция управления.

В докладе приводится численное решение поставленной задачи оптимального управления.

Pseudo-Hermiticity and Theory of Singular Perturbations

Kuzhel S. A.

(Institute of Mathematics, Ukraine)

In recent years the problem of development of a consistent physical theory of quantum mechanics on the base of complex Hamiltonians that are not Hermitian in the standard sense but satisfy a certain less restrictive and more physical condition of symmetry (so-called pseudo-Hermitian Hamiltonians) has attracted a steady interest. The report is devoted to the investigations of pseudo-Hermitian Hamiltonians appearing within the theory of singular perturbations [1], [2]. Using the results of indefinite space theory, the necessary and sufficient conditions for the reality of the spectrum of a pseudo-Hermitian Hamiltonian are obtained and the problem of similarity of such Hamiltonian to an Hermitian one is investigated.

References

[1] Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. and Holden, H.: *Solvable Models in Quantum Mechanics,* Springer, New York, 1988.

[2] Albeverio, S., Fei, S.M. and Kurasov, P.: Point interactions: $\mathcal{PT}$-Hermiticity and reality of the spectrum *Lett. Math. Phys.* **59** (2002), 227–242.

Existence of solutions of quasilinear elliptic equations in R^n without conditions at infinity

Laptev G. I. (Moscow State Social University)

Solvability conditions for the equation

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x, u, Du) + A_0(x, u) = f(x), \quad x \in R^n$$

are considered in the whole space R^n, $n \geq 2$. A solution $u(x)$ and the functions $f(x)$ and $A_i(x,u,\xi)$ for $i = 1,\dots,n$ and $A_0(x,u)$ may grow arbitrary as $|x| \to \infty$. These functions satisfy the standard conditions of the theory of monotone operators on the arguments $\xi \in R^n$ and $u \in R^1$. The method of monotone operators is developed and an existence theorem is proved for the solutions $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(R^n) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(R^n)$, where $q > p > 1$.

Special cases of such equations were studied by H. Brezis in 1984, A. L. Gladkov in 1993, O. A. Oleinik in 1996, S. I. Pohozaev in 1997, A. E. Shishkov in 1999 and others. As example we can consider the equations

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i \left(a_i(x)|D_i u|^{p-2}D_i u + a_{n+1}(x)|u|^r u\right) + a_0(x)|u|^{q-2}u = f(x),\ x \in R^n,$$

where the functions $a_i(x)$ are positive and $a_i, a_i^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^n)$ for all $n = 0,1,\dots,n+1$. We suppose that $1 < p < q$ and $r + 1 \leq q/p'$.

Обратимая динамика в окрестности симметричной петли седло-фокуса

Лерман Л. М. (НИИ прикладной математики и кибернетики, Нижегородский госуниверситет им. Н.И.Лобачевского)

В докладе будут представлены результаты о поведении гладкой обратимой четырехмерной системы, имеющей симметричный седло-фокус и симметричную гомоклиническую траекторию к нему. Обсуждаются гиперболическое и эллиптическое поведение траекторий, существование других гомоклинических траекторий, бифуркации в семействах периодических траекторий.

Результаты, представленные в докладе, выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00483).

Самосопряженность сингулярных операторов Штурма-Лиувилля на полупрямой

Лесных А.А. (Московский Государственный Университет)

В работе рассматривается оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$(ly)(x) = -(y^{[1]}(x))' - \sigma(x)y^{[1]}(x) - \sigma^2(x)y(x),$$

где $y^{[1]} = y' - \sigma y$, и $\sigma \in \L_{1,loc}(0,+\infty)$, и граничным условием в нуле, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(0,+\infty)$. Для этого оператора устанавливается достаточный признак самосопряженности, который является обобщением известного признака Бринка на случай сингулярных потенциалов.

Работа поддержана грантами РФФИ 04-01-00712 и ведущих научных школ НШ-1927.2003.1.

Монодромия систем Веселова-Чередника для вещественных и комплексных конфигураций векторов

Лексин В.П. (Коломенский государственный педагогический институт, Россия)

Для конечной конфигурации векторов $R = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \subset \mathbb{C}^n$, порождающей $\mathbb{C}^n$, рассмотрим невырожденную "каноническую" билинейную форму $G_R(x,y) = \sum_{\alpha\in R}(\alpha,x)(\alpha,y)$, $x,y \in \mathbb{C}^n$. Будем рассматривать конфигурации R, для которых $G_R(\alpha,\alpha) \neq 0, \forall\alpha \in R$.

Пусть $\{h_\alpha \in \mathbb{C}, \forall\alpha \in R\}$ — комплексные константы. Определим пфаффову систему типа Фукса на $\mathbb{C}^n$

$$d\Psi_R(z) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha\in R} \frac{h_\alpha(\alpha\otimes\alpha)\,dG_R(\alpha,z)}{G_R(\alpha,z)}\Big)\Psi_R(z), \qquad (*)$$

где функция $\Psi_R(z)$ принимает значения в $\mathbb{C}^n$, а коэффициенты системы рассматриваются как операторы на $\mathbb{C}^n$, действующие по правилу $h_\alpha(\alpha\otimes\alpha)(v) = h_\alpha G_R(\alpha, v)\alpha$. Такие системы мы назоваем системами Веселова-Чередника.

Для системы корней R группы Коксетера W система (*) определяет плоскую связность ∇_R на факторе пространства $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{\alpha\in R}\{z \in \mathbb{C}^n | (\alpha,\, z) = 0\}$ по действию W.

Монодромия связности ∇_R имеет следующее описание.

Теорема. *Для неприводимой приведенной системе корней R группы Коксетера $W(R)$ представление монодромии плоской связности ∇_R эквивалентно некоторому представлению Сквайера группы кос Брискорна $B_n(W)$.*

Для групп порожденных комплексными отражениями определяемых по некоторой системе комплексных корней и обладающих "коксетеровским"заданием образующими и соотношениями имеет место аналог сформулированной теоремы.

Эта работа поддержана грантом Президента поддержки ведущих научных школ НШ-457-2003.1, грантом РФФИ 02-01-00721 и грантом РФФИ 03-01-22000- НЦНИ-а(PICS 2094).

Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся эллиптических операторов

Ломов И. С. (МГУ им.М.В.Ломоносова,фак-т ВМиК)

В прямоугольнике $D = (0 < x < 1) \times (0 < y < b)$ исследуем ограниченное в окрестности линии $y = 0$ классическое решение модельной задачи

$$\begin{cases} y^2 u_{yy} + u_{xx} - a^2(y)u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=b} = 0, & |u(x, 0)| < \infty, \end{cases}$$

$a^2(y) \geq 0$, функции $a^2(y), f(x, y)$ – аналитические в точке $y = 0$, $f \in C(D)$ (задача Е по терминологии М.В.Келдыша). Требуется построить решение в форме, сохраняющей свойство аналитичности данных задачи (аналог теоремы Коши-Ковалевской).

При построении такого решения возникают «ряды Пуассона» $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(y) \sin \pi k x$, где $\eta_k(y)$ – аналитическое в точке $y = 0$ решение обыкновенного дифференциального уравнения с регулярной особой точкой и с аналитическими коэффициентом и правой частью. Исследуются такие ряды, решается возникающая при этом проблема малых знаменателей.

Решение, наследующее свойство аналитичности данных задачи, удается построить за счет точного описания особенностей, для чего привлекается спектр предельного оператора.

О бифуркациях решений уравнения Дюбрей–Жакотэн–Лонга

Макаренко Н. И. (Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск)

Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение Дюбрей–Жакотэн—Лонга, описывающее стационарные течения в слое непрерывно стратифицированной жидкости. Для стратификации, близкой к экспоненциальной, исследуются качественные свойства решений типа уединенных внутренних волн и фронтов. Доказано существование точных решений, дающих уединенные волны типа обычного плато, а также плато с дополнительным возвышением в срединной части. Скачкообразное изменение формы волны происходит вблизи критического значения числа Фруда, при котором симметричная уединенная волна вырождается в несимметричный фронт. Анализ использует модифицированный метод Ньютона, сходящийся в весовом пространстве Соболева в окрестности длинноволнового приближения. Условие разрешимости, связанное с потерей симметрии в предельной волновой конфигурации, оказывается выполненным тождественно по бифуркационному параметру в силу групповой косимметрии оператора Дюбрей–Жакотэн–Лонга.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00829).

Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с суммируемыми на полуоси возмущениями

Макаров Е. К. , Марченко И. В., Семерикова Н. В.
(Институт математики НАН Беларуси)

Рассмотрим возмущенную линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A, кусочно-непрерывной интегрально ограниченной матрицей возмущений Q и старшим показателем $\lambda_n(A+Q)$.

Пусть $Y(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши системы (1), $X(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши соответствующей невозмущенной системы, $V_k = \int\limits_k^{k+1} X(k,\tau)Q(\tau)Y(\tau,k)d\tau$.

Теорема 1. Пусть заданы возмущения Q и положительная функция β, определенная на множестве $\mathbb{N}$, такая, что справедливо равенство $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum\limits_{k=1}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0$. Тогда для старшего показателя системы (1) выполняется оценка $\lambda_n(A+Q) \leq \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max\limits_{k\leq m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$ с произвольным $\eta_1 > 0$, причем величина $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора η_1.

Теорема 2. Для возмущений Q, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|dt < +\infty$, где φ — положительная возрастающая функция, определенная на промежутке $[0,+\infty[$, справедлива формула $\sup\limits_Q \lambda_n(A+Q) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, в которой последовательность η_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1}\varphi^{-1}(k)\eta_k)$ с произвольным $\eta_1 > 0$.

Теорема 3. Для возмущений Q, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty \|Q(t)\|^p dt < +\infty$ при $p > 1$, справедливо равенство $\sup\limits_Q \lambda_n(A+Q) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, где величина η_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1/p}\eta_k)$ с произвольным $\eta_1 > 0$.

Limit cycles of Lienard systems and applications

Makhlouf A., Sellami A. B., (Department of mathematics, Faculty of sciences, University of Annaba)

We review the main results concerning the limit cycles of planar polynomial systems

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

We study both small-amplitude and large-amplitude limit cycles bifurcations of system (1). In particular, we study the Lienard systems

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{2}$$

where $F(x) = \int_0^x f(s)ds$. We present C. S. Christopher and N. G. Lloyd result about a lower bound of the numbers of Hilbert. The existence of limit cycle can be proved by using the Poincare-Bendixon theorem. We give applications to predator-prey models. We give transformation of predator-prey systems into Lienard systems

A generalization of J. von Neumann inequality and its applications

Malamud M. M. (Донецкий национальный университет)

A closed linear operator A with domain $dom(A)$ dense in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ is called a sectorial operator with vertex zero and the half-angle $\phi \in (0;\pi/2]$ if its numerical range is contained in the sector $G_\phi = \{z : \ z \in \mathbb{C}, \ |\arg z| \leq \phi\}$, that is

$$\operatorname{ctg}\phi |Im(Af,f)| \leq Re(Af,f), \qquad f \in dom(A). \tag{1}$$

If in addition A has no sectorial extensions, that is $\rho(A) \neq \emptyset$, it is called m-sectorial and it is put in the class $S_{\mathfrak{H}}(\phi)$.

Theorem 1.([1]) *Suppose that f is a function holomorphic in the sector G_ϕ with $\phi \in (0;\pi/2]$ and maps it into itself, $f \colon G_\phi \to G_\phi$. Then the following implication holds:*

$$A \in S_{\mathfrak{H}}(\phi) \Longrightarrow f(A) \in S_{\mathfrak{H}}(\phi). \tag{2}$$

In the case $\phi = \pi/2$ this result coinsides with J. von Neumann result and it is equaivalent to his famous inequality.

Other generalizations of J. von Neumann inequality and applications of Theorem 1 to the theory of holomorphic semigroups and to the spectral theory of nonselfadjoint operators will be discussed. The spectral sets of an operator $A(\in S_{\mathfrak{H}}(\phi))$ will be discussed too.

References

[1] Malamud M.M., *On some classes of extensions of sectorial operators,* Oper. Theory: Advances and Appl., v.124 (2001), 401-449.

Weakly nonlocal Symplectic and Hamiltonian Structures and the Whitham method

Andrei Maltsev (Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау, Черноголовка)

We consider the special Hamiltonian and Symplectic Structures for local PDE's which are called weakly-nonlocal. The structures of this type appear to be very common for the so-called "integrable"systems. We will consider the Whitham method for the local PDE's which gives the "Whitham system"describing the slow modulated periodic or quasiperiodic solutions of PDE. We show that the special "averaging procedures"permit to construct the weakly-nonlocal Hamiltonian and Symplectic Structures of Hydrodynamic Type for Whitham systems in case when the initial systems have the weakly-nonlocal Hamiltonian and Symplectic Structures of general type.

On existence and regularity of solutions to multidimensional equations of compressible non-newtonian fluid

Mamontov A. E. (Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, Russia)

We consider the equations of compressible viscous fluid

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{f}, \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\mathbb{P} = \rho\mathbf{w}, \qquad (2)$$

with non-newtonian stress-strain relation:

$$\mathbb{P} = -\alpha\rho\,\mathbb{I} + \frac{\partial V(\mathbb{D})}{\partial \mathbb{D}}, \qquad (3)$$

where $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \{(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^*\}/2$ is the strain tensor; ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbb{P}$ and $\mathbf{f}$ are correspondingly the density, velocity, stress tensor and external forces; $\alpha = \text{const} \geqslant 0$. Assuming the potential V increasing non slower than exponent function, we prove global solvability of initial boundary value problem for the system (1)–(3) in a bounded cylinder $\Omega\times[0,T]$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$), including the case $\alpha = 0$ (Burgers' model), in class of weak solutions: ρ and $\mathbb{D}$ belong to some Orlicz classes.

The question of further smoothness is also considered: we prove regularity of such values as $\nabla\rho$ and $\mathbb{D}(\mathbf{w})$ in space-periodic problem for 2- and 3-dimensional Burgers' model. Elliptic system (2) playing key role in lifting of regularity for evolution equations (1)–(2), it is also interesting to discuss some interpolation properties of stationary system (2).

Mathematival modeling of an underground waste disposal site

Eduard Marušić-Paloka (University of Zagreb)

Our goal is to give an accurate model describing the global behavior of an underground waste repository array, made of a high number of containers, once they start to leak. The purpose of such a global model is to be used for the full field three dimensional simulations necessary for safety assessments. There is an underground water flow crossing the repository array which is produced by the hydraulic head, in the region. The pollutant is then transported both by the convection produced by the water flowing slowly (creeping flow) through the rocks and by the diffusion coming from the dilution in the water. The general transport model, we start from, will also include possible chemical effects and radioactive decay. We study the worst possible scenario in which all units start leaking at the same time, either due to some outer factor or due to simple aging of materials used to build the containers. Since there is a large number of units, each of them with a small size compared to the whole facility, a direct numerical simulations of the full field, based on a *microscopic* model taking into account all the details, is unrealistic. The ratio between the width of a single unit l and the site length L, can be considered as a small parameter, ε, in the detailed *microscopic* model. The study of the asymptotic behavior, as ε tends to 0, by means of homogenization method and boundary layers, gives a global model for numerical simulations.

Nonlinear Reynolds Equation for Lubrication of a Rapidly Rotating Shaft

Sanja Marušić (University of Zagreb, CROATIA)

One of the most interesting problems in the theory of lubrication is to find the equations governing the flow of lubricant in a circular slipper bearing. The physical situation can be described as follows: a circular shaft rotates on lubricated support with some given angular velocity ω. Between the shaft and the support, which are in relative motion, there is a thin domain, of thickness $\varepsilon \ll 1$, filled with a viscous incompressible fluid (lubricant). The standard engineering model, the Reynolds law, governing the flow of that thin liquid film gives the linear relation between the velocity and the pressure gradient. It has been heuristically derived by O. Reynolds in 1886. A version of (linear) Reynold's law for periodically distributed roughness, particularly interesting to us, has been found via homogenization by G. Bayada and M. Chambat as well as A. Mikelić. However, for large Reynolds numbers (i.e. for large angular velocity of the shaft) the linear relation is not valid any more and the effects of inertia appear. Those effects were studied theoretically by A. Assemien, G. Bayada and M. Chambat but only in case when inertial effects are small compared to the viscous effects. The subject of our paper is the case when both effects are of the same order. A nonlinear relation between the velocity and the pressure drop was found. A detailed qualitative study of that relation proves that it is given by a monotone, analytic, odd function that can be computed from an auxiliary Navier–Stokes problem.

L^p-Decay for the Wave Equation with Time-Dependent Coefficients

Tokio Matsuyama (Department of Mathematics, Tokai University, Japan)

In this talk we shall inform L^p-estimates and the existence of scattering states for the following initial-boundary value problem in an odd space dimension $n \geq 3$:

$$
\text{(P)} \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ (u, u_t)(x,0) = (u_0, u_1)(x) \quad \text{and} \quad u\big|_{\partial\Omega \times (0,\infty)} = 0, \end{cases}
$$

where $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ is a star-shaped domain with respect to the origin with a smooth boundary $\partial\Omega$.

We make the following assumption on $a(x,t)$:

Assumption A. (i) *$a(x,t)$ is nonnegative on $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$.*
(ii) *$a(x,t)$ belongs to $\mathfrak{B}^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$.*
(iii) *The support of $a(x,t)$ is contained in a time-dependent domain*

$$
\Omega(t) \equiv \left\{ x \in \overline{\Omega}\,;\, |x| < (R+t)^\alpha \right\}
$$

for some α with $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. If $\alpha = 0$, we assume that the support of $a(x,t)$ is contained in a domain $\Omega_R \equiv \Omega \cap B_R$.

The condition $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ means that the support of $a(x,t)$ expands at a speed strictly less than the wave speed. The precise statement of results will be given in my talk.

On the analytic solvability of the center-focus problem

Medvedeva N. B. (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

A problem on germs is called *algebraically solvable* in the sense of Arnold if the answer to this problem may be found after a finite number of algebraic operations on the Taylor coefficients of the germ, provided that the germ avoids an exeptional set of infinite codimension. Analytically solvable problems are defined analogously.

A singular point is called *monodromic* if the orbits wind around the point, and the Poincare map is well defined for this point. The Poincare map is called also the *monodromy transformation.* Finiteness theorem for limit sycles implies that a monodromic singular point of the analytic vector field is either a center or a focus. The germs having zero as a monodromic singular point we shall call *monodromic.*

Yu.S.Il'yashenko proved that the stability problem also called „the center-focus problem“ is not algebraically solvable in the whole set of monodromic germs.

We prove, that the set of all the monodromic germs is a union of semialgebraic sets which are called „ the simplest monodromic classes“.

The main result is the following one

Theorem *The center-focus problem is analytically solvable in each the simplest monodromic class.*

Разрешимость начально-краевой задачи для параболического уравнения с краевым условием гистерезисного типа

Мейрманов А. М. (Югорский Государственный Университет)

Настоящая работа выполнена в Европейском центре современных исследований (г. Бонн, Германия) в соавторстве с К.-Х.

Хоффманном, В. Старовойтовым и Н. Боткиным и посвящена попытке математического моделирования биосенсоров. В своем простейшем варианте биосенсор — это единичный куб, заполненный жидкостью. В жидкости может находится примесь, концентрация которой описывается уравнением диффузии. Одна из стенок куба является биосенсором — она покрыта тонким слоем специальных молекул, которые могут распознавать примесь и связывать ее молекулы. При этом связанная молекула не может покинуть биосенсор, но и на этом месте не может оказаться никакая другая молекула примеси. Для описания данного молекулярного слоя примеси и биосенсора вводится поверхностная концентрация, определяемая объемной концентрацией через оператор гистерезиса. Естественный закон сохранения массы связывает изменение во времени поверхностной концентрации с нормальной производной объемной концентрации на данной границе. Для полученной начально-краевой задачи доказывается существование и единственность решения, непрерывного по Гельдеру.

On a hyperbolic system of two first order PDEs arising in singularity analysis of a single Hamilton–Jacobi equation

Melikyan A. (Institute for Problems in Mechanics,Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

Non-smooth solutions to a nonlinear first-order PDE: $F(x, \partial V/\partial x) = 0, x \in \Omega \subset R^n$ may have several interesting singularities. One of them is the so-called focal singular surface known in differential games. A focal hypersurface Γ is approached by regular characteristics (trajectories) from both sides of the surface either tangentially (in case of smooth Hamiltonian $F(x,p)$) or transversally (non-smooth Hamiltonian). The gradient of the continuous solution is discontinuous on a focal surface. In generic situation one can not write a closed form ODE system of (singular) characteristics forming the surface.

The continuous solution $V(x)$ is understood in viscosity sense. For such solution one has two equality type necessary conditions from each side of the surface. These four relations allow to exclude the last component of x and the solution's gradient to get a system of two first-order PDEs with respect to the functions X (defining the surface Γ) and Y (restriction of V to Γ) of $n-1$ variables.

For $n = 3$ the solution of this system can be, generally, reduced to the solution of one second order PDE in two independent variables. Some particular cases when the system can be reduced to characteristics one can find in: A.Melikyan. Generalized characteristics of first order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. 1998, Birkhauser, Boston.

On singular spectral problems on the circle

Mikhailets V. A. (Kiev,Ukraine)

Let $m \in \mathbb{N}$, V be a (2-periodic) complex-valued distribution in the negative Sobolev space $H^{-m}(\mathbb{T})$. Spectra of the singular Schrödinger-type operators

$$S = (-1)^m d^{2m}/dx^{2m} + V(x)$$

in the Hilbert space $L^2(\mathbb{T})$ are studied. These operators are well defined owing to the KLMN theorem and the convolution lemma. The resolvent of any S is a compact operator. The operator S is self-adjoint iff the distribution V is real-valued (i.e. $\hat{V}(k) = \hat{V}(-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, where $\hat{V}(k)$ denote the Fourier coefficients of V). The following estimates for the eigenvalues $\lambda_j = \lambda_j(m, V)$ which are enumerated with their algebraic multiplicity and ordered so that

$$Re(\lambda_j) < Re(\lambda_{j+1}),\ or\ Re(\lambda_j) = Re(\lambda_{j+1}), Im(\lambda_j) \leq Im(\lambda_{j+1}),$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

are found:

1. *For any* $m \in \mathbb{N}$, $V \in H^{-m}(\mathbb{T})$ the one-term asymptotic formulae

$$\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = n^{2m}\pi^{2m} + o(n^m), n \longrightarrow \infty$$

is valid.

2. *Let* $m \in \mathbb{N}$, $V \in H^{-m\alpha}(\mathbb{T})$, $\alpha \in [1/2, 1)$. *Then for any* $\varepsilon > 0$ *uniformly for bounded sets of distributions* V *in* $H^{-m\alpha}(\mathbb{T})$ *the asymptotic formulae*

$$\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = n^{2m}\pi^{2m} + \hat{V}(0) \pm \sqrt{\hat{V}(-2n)\hat{V}(2n)} + r_n^{\pm}(m, V), \qquad (*)$$
$$r_n^{\pm} \in h^{m(1-2\alpha-\varepsilon)}$$

are hold. Here h^{β}, $\beta \in \mathbb{R}$, denote the weight Hilbert sequence spaces:

$$s_n \in h^{\beta} \Longleftrightarrow \sum |s_n|^2 (1+n)^{2\beta} =: \|s\|_{\beta}^2 \Longrightarrow s_n = o(n^{-\beta}), n \to \infty.$$

3. *Let* $m \in \mathbb{N}$, $V \in H^{-m\alpha}(\mathbb{T})$, $\alpha \in [0, 1/2)$. *Then uniformly for bounded sets of distributions* V *in* $H^{-m\alpha}(\mathbb{T})$ *formulae (*) are hold with the remainder terms in* $h^{m(1/2-\alpha)}$.

The results are obtained joint with V.M. Molyboga.

О существовании предельных значений бигармонической функции на границе области

Михайлов В. П. (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН)

Для двумерной бигармонической функции в ограниченной области с правильной аналитической границей установлены критерий существования сильного предела в L_2 на границе и критерий существования слабого предела в L_2 на границе.

Inverse scattering for a nonselfadjoint small perturbation of the wave equation II

Kiyoshi Mochizuki (Chuo University, Tokio)

We consider the wave equation of the form

$$w_{tt} + b(x)w_t - \Delta w + c(x)w = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R},$$

where $n \geq 3$ and $b(x)$, $c(x)$ are real valued functions decaying sufficiently fast at infinity. In this talk we discuss the following 3 scattering problems for this equation:

1) To show the existence of the scattering operator,

2) To obtain the expression of the scattering amplitude,

3) To develop the reconstruction procedure of $b(x)$ and $c(x)$ from the scattering amplitude.

In the special case $c(x) \equiv 0$, results on these problems have beenreported on the ocasion of Petrovskii Conference 2001 (see [1]). In this talk we extend the results to the above more general equation. As for 3), we see that the scattering amplitude with fixed 2 energies can detrmine both $b(x)$ and $c(x)$. Our approach will be based on the works [2], [3], [4].

References

[1] K. Mochizuki, *Inverse scattering for a smaal nonselfadjoint perturbation of the wave equation,* Analysis and Applications-ISAAC 2001, H.G.W.Begeher, R.P.Gilbert and M.W.Wong (eds), Kluwer Academic Publishers, 2003, 303-316.

[2] L. D. Fadeev, *Inverse problem of quantum scattering theory,* J. Sov.Math. **5** (1976), 334-396.

[3] G. Eskin and J. Ralston, *Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential with a fixed energy,* Comm. Math. Phys. **173** (1995), 199-224.

[4] H. Isozaki, *Inverse scattering theory for Dirac operators,* Ann l'I. H. P. Physique Théorique, **66** (1997), 237-270.

Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками и уравнения ассоциативности

Мохов О.И. (Центр нелинейных исследований)

Мы решаем задачу описания всех нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками. Доказано, что в ряде важных случаев такие гамильтоновы операторы описываются уравнениями ассоциативности двумерной топологической теории поля и тесно связаны с теорией фробениусовых многообразий.

On the KPP equation in the random environment

Stanislav Molchanov (University of North Carolina at Charlotte)

The famous Kolmogorov-Petrovski-Piskunov (KPP) equation describes (among several other phenomena) the evolution of the population of particles (or genes): each particle performs the Brownian motion, it also can split into two identical copies, moving after this independently (reaction-diffusion process). If the rate of duplication is constant, then the population (starting from the single particle) after time t, has an approximately spherical form, with the radius of order O(t). It is possible also to give a formula for the (very regular) local density of the population. If the rate is a random homogeneous function in the phase space, then the situation is opposite: the population has extremely irregular structure (intermittency). There are very high peaks of the density ("towns") containing almost all particles. The statistics of such peaks is related to Anderson localization. Asymptotical analysis of the reaction-diffusion in the random environment can be done in two forms (quenched and annealed ones.) The talk will contain the discussion on the non-trivial relationship between these forms.

Counting solutions of abstract bifurcation equations

C. Mora-Corral (Universidad Complutense de Madrid)

Suppose U is a Banach space and $F : \mathbb{R} \times U \to U$ is a C^1 function satisfying some compactness assumptions and such that $F(\lambda, 0) = 0$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. We look for pairs $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})$ with $F(\lambda, u) = 0$; such a pair is called a non-trivial solution. We use the topological degree to give lower bounds of the number of elements of the slices (obtaining by fixing the value of λ) of the bounded and "semi-bounded" (that is, bounded in one direction of the parameter) connected components of non-trivial solutions. Our results adapt the techniques of (and generalize) the ones by M. A. Krasnosel'skiĭ and by P. H. Rabinowitz.

Проблема контактной эквивалентности для линейных гиперболических уравнений

Морозов О. И. (Снежинская Государственная Физико-Техническая Академия)

Рассматривается проблема локальной эквивалентности для класса линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными относительно действия псевдогруппы контактных преобразований. С помощью метода Э. Картана найдены формы Маурера – Картана для групп симметрий уравнений из этого класса, структурные уравнения и дифференциальные инварианты этих групп. Решение проблемы эквивалентности сформулировано в терминах этих инвариантов.

Perturbation of Spectral Subspaces: Some Sharp Estimates

Motovilov A. K. (Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia)

Let A be a self-adjoint operator on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\mathcal{L}$ a spectral subspace associated with an isolated part of the spectrum of A. We obtain estimates on the rotation angle of the subspace $\mathcal{L}$ under self-adjoint bounded perturbations of A. A particular attention is paid to the case where the perturbations are off-diagonal with respect to the orthogonal decomposition $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}$. Some of our estimates are sharp.

The report is based on the results obtained jointly with V. Kostrykin and K. A. Makarov.

Аналитические и численные аспекты решения задичи об оптимальной форме пластины

Муравей Л.А. (Москва)

Рассматриваются вопросы математического моделирования и построения алгоритмов численного решения ряда задач, возникающих при оптимизации конструкций. Как правило, эти задачи минимизации интегральных функционалов, аргументами которых являются пространственные области и коэффициенты уравнений состояния, причем вычисление функционала связано с решением в этой области эллиптической граничной задачи. Целью работы является установление условий на семейтво уравнений состояния и семейство функционалов, при которых оптимизационная задача имеет решение в заданном классе управляющих параметров; при этом доказательство основных результатов основано на непосредственном построении минимизирующей последовательности, что позволяет одновременно сконструировать эффективный алгоритм численного решения.

Long-time behavior of the Cauchy problem solutions for differential-difference parabolic equations with nonlocal high-order terms

Muravnik A. B. (4th Polyclinic of Voronezh City)

The Cauchy problem with a bounded continuous initial-value function u_0 is considered for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + b_{ij}, x_{i+1}, \dots, x_n, t),$$

where $-L$ is supposed to be *strongly elliptic* in the following sense:

$$|\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \cos b_{ij} \xi_i \geq C|\xi|^2$$

for any $\xi \in \mathbf{R}^n$ (with a positive C); m_i are natural and a_{ij}, b_{ij} are real.

The unique solvability of the above problem *in the sense of distributions* is a well-known fact. We prove that the solution is *classical* outside the initial-value hyperplane and find its integral representation. We also prove that

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t)-v(x,t)]=0$$

for any $x \in \mathbf{R}^n$, where $v(x,t)$ denotes the classical bounded solution of the Cauchy problem with the same initial-value function for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Here p_i denote the constants $1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}$, which are positive due to the assumption of the strong ellipticity.

Описание продолжения начальных данных в представлении решения Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода

Найдюк Ф.О. (Воронежский Государственный Университет)

Для функции f в представлении

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)$$

решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода получена формула, которая содержит конечное число алгебраических операций, элементарных функций, квадратур и сдвигов независимого аргумента начальных данных. Как следствие получена формула суммы тригонометрического ряда специального вида, определенного на всей вещественной оси. Описано решение смешанных задач с краевым условием третьего рода для волнового уравнения на некоторых геометрических графах.

Сходимость собственных значений и собственных функций задач Дирихле для линейного уравнения высокого порядка в перфорированных областях общей структуры

Намлеева Ю.
(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

Изучаются вопросы усреднения семейства задач Дирихле на собственные значения для линейного эллиптического уравнения высокого порядка в последовательности перфорированных областей Ω_s. Исследование проводится вариационными методами, предложенными Е.Я.Хрусловым и при очень слабых условиях на перфорацию, когда не делается никаких геометрических предположений относительно структуры Ω_s. Такие условия были впервые рассмотрены И.В.Скрыпником и Дж.Даль Мазо. Доказывается сходимость последовательности k-х собственных значений исследуемой задачи в областях Ω_s к k-му собственному значению усредненной задачи для уравнения с дополнительным слагаемым, имеющим емкостной характер.

К теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Напалков В. В. (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН)

Доклад посвящен линейным функциональным уравнениям с переменными коэффициентами. Предлагается метод, позволяющий сводить изучение указанных уравнений к решению двух задач — алгебраической задаче исследования некоторых подмодулей в модуле вектор-функций и задаче описания ядра системы уравнений с постоянными коэффициентами.

The Degenerate Venttsel' Problem to Elliptic Equations

Nazarov A. I. (St.-Petersburg State University)

We consider degenerate Venttsel' problem to quasilinear nondivergence elliptic equation:

$$a^{ij}(x,u,Du)D_iD_ju + a(x,u,Du) = 0 \qquad in \qquad \Omega, \tag{1}$$

$$\tau(x)\Big[\alpha^{sm}(x,u,D'u)D'_sD'_m u + \alpha_1(x,u,D'u)\Big] + \alpha_2(x,u,Du) = 0 \quad on \quad \partial\Omega \tag{2}$$

(here Du is the gradient of u while $D'u$ is tangent gradient on $\partial\Omega$).

The principal requirements on the coefficients of (1)-(2) are:

1. Uniform ellipticity of matrices (a^{ij}) and (α^{sm}):

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(\cdot)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2, \quad \nu|\xi'|^2 \leqslant \alpha^{sm}(\cdot)\xi'_s\xi'_m \leqslant \nu^{-1}|\xi'|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

2. Quadratic growth of a and α_1 with respect to the gradient:

$$|a(x,z,p)| \leqslant \mu(1+|p|^2), \qquad |\alpha_1(x,u,p')| \leqslant \mu(1+|p'|^2);$$

3. Uniform degeneracy of the boundary condition with respect to the second order terms:

$$\tau \geqslant 0, \qquad \tau \in W^2_\infty(\partial\Omega);$$

4. Uniform obliqueness of the first-order term in the boundary condition:

$$\frac{\partial\alpha_2(x,u,p)}{\partial p}\cdot\mathbf{n}(x) \leqslant -\chi; \qquad |\alpha_2(x,u,p)| \leqslant \chi^{-1}(1+|p|).$$

Here ν, μ, χ are positive constants; $\mathbf{n}(x)$ is unit outward normal to $\partial\Omega$.

Under some natural structure conditions we establish the a priori estimates of the second derivatives of solutions and prove the existence theorem for the problem (1)-(2).

This work was partially supported by Russian Fund for Fundamental Research, grant no. 02-01-00276.

Elliptic problems in angular domains with periodic boundaries

Nazarov S. A. (Institute of Mechanical Engeneering Problem, Russian Academy of Sciences. St.-Peterburg. RUSSIA)

Homogenization of elliptic boundary value problems in domains with rapidly oscillating boundaries requires to study an additional limit problem in case the reference domain has corners (angular points or edges). This limit problem is posed on a two-dimensional infinite domain Ω which has an outlet to infinity in the shape of an angle with periodically varying boundary. Due to the periodic perturbation of sides of the angular outlet classical results of V.A. Kondratiev and V.G. Maz'ya, B.A. Plamenevskii on behavior of solutions in conical domains cannot be applied directly and eventually need a serious revision for both, basic function spaces with weighted norms and asymptotic structures of solutions. In particular, the weight multipliers in the norms become the products of powers of $1+|x|$ and $\mathrm{dist}\{x, \partial\Omega\} + (1 + |x|)^{-1}$ while the second weight function reflects the boundary layer phenomenon near the curve $\partial\Omega$ at infinity. In the talk the necessary and sufficient conditions for the Fredholm property of the problem operator between the above-mentioned weighted spaces are presented together with asymptotic formulae for solutions at infinity. These results provide the construction of asymptotic expansion of a solution to the boundary value problem in the finite domain with the rapidly oscillating boundary.

Контрастные структуры типа всплеска в системах реакция-диффузия

Нефедов Н. Н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Для пространственно-неоднородного уравнения реакция диффузия

$$\begin{cases} \epsilon^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta u - f(u, x, \epsilon) \qquad \big(x \in \mathcal{D} \subset R^N,\ t > 0\big)\,, \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \qquad (x \in \partial\mathcal{D},\ t > 0)\,. \end{cases}$$

с нелинейностью $f(u,x,\epsilon)$ квадратичного типа изучаются стацинарные решения с внутренними слоями типа всплеска. Поверхность, вблизи которой локализован внутренний слой, релизует минимум некоторого функционала на множестве замкнутых поверхностей. Эту задачу мы называем вариационно-геометрической. Спектральная задача для уравнения, возникающего как как лианеризация соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа для указанного функционала, определяет правило выбора поверхности, а неустойчивость решения с внутренним переходным слоем типа всплеска определяется знаком главного собственного значения.

О некоторых свойствах оператора Лапласа-Леви

Неклюдов М. Ю. (МГУ)

В докладе рассмотрен оператор Лапласа-Леви на некоторых классах функций от бесконечного числа случайных независимых гауссовских величин и показано, что его поведение очень похоже на поведение оператора дифференцирования. А именно, оказалось,что эти классы являются аналогами полиномов для оператора дифференцирования т.е. оператор Лапласа-Леви переводит «полиномы» степени n в «полиномы» степени (n-1). Это свойство оператора независит от выполнения формулы Лейбница. Данный подход позволяет нам явно найти «гармонические» функции для оператора Лапласа-Леви в классах «полиномов» 1-ой и 2-ой степени.

On the sets of boundedness of solutions for a class of degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data

Nicolosi F. (Department of Mathematics University of Catania, Italy)

This is a joint work with Kovalevski A.A. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS, Ukraine).

We consider a class of degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations in divergence form. Coefficients of the equations satisfy a strengthened ellipticity condition involving two weighted functions, and the right hand sides of the equations are in L^1. In regard to the Dirichlet problem for equations of the given class we establish a result on existence of weak solutions bounded on some sets where the behaviour of the data of the problem and the involved weighted functions is regular enough.

Whitham deformations of integrable systems and multi-phase autoresonances

Novokshenov V. Yu. (Institute of Mathematics RAS (Ufa))

A number of dynamical systems of classical mechanics are integrable in theta-functions by means of Lax pair formalism. The method can be generalized providing smooth deformations of the Lioville torus and the phase flow on it by a special small perturbation. Actually this perturbation (external multi-frequency driving force) can be applied for generating an autoresonance effect for the stable equilibrium point of the initial system. Thus a prescribed multi-frequency oscillations can be started from the stable state by a special choice of the small driving force. This can be achieved by the Whitham deformations of both the Jacobian and the Riemann surface of the integrable system. Some examples are given for the Kovalevskaya top and other physically interesting equations.

Представление решения стохастического уравнения Шредингера в виде интеграла Фейнмана

Обрезков О. О. (Московский государственный университет)

Стохастическое уравнение Шредингера описывает предельное поведение открытой квантовой системы, наблюдаемой в дискретные моменты времени, при условии, что точность измерений и интервалы между ними пропорциональны и стремятся к нулю. Стохастическое уравнение Шредингера, соответствующее процессу измерения координаты, было впервые получено Белавкиным. Вывод уравнения, основанный на стандартной аксиоматике квантовой механики, содержится в работе Смолянова и Трумена. Там же было получено представление решения уравнения в виде функционального интеграла Фейнмана. При этом интеграл Фейнмана определялся как аналитическое продолжение интеграла по мере Винера.

В данной работе используются определения интеграла Фейнмана в виде предела конечнократных интегралов и с помощью равенства Парсеваля. В результате получено представление решения задачи Коши для стохастического уравнения Шредингера со стандартным квантовомеханическим гамильтонианом. Использование в доказательстве конструкций, аналогичных формуле Чернова в теории полугрупп операторов, позволяет существенно ослабить аналитические условия основной теоремы.

A Stokes interface problem

Olshanskii M. A. (Moscow M.V.Lomonosov University)

In many numerical simulations of two-phase flows a so-called one-fluid approach is used. In such a method the two phases are modelled by a single set of conservation laws for the entire flow field. The differences in the material properties lead to jumps in the coefficients in these conservation laws. The forces at the interface are part of the model.

In the talk we address the stability, finite element analysis and an iterative solver for the Stokes type problem discontinuous viscosity given below.

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\ (\nu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ -\mathrm{div}\,\mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \nu &= \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega_1 \\ \varepsilon & \text{in } \Omega_2. \end{cases} \end{aligned}$$

We assume $\varepsilon > 0$ to be a constant, Ω is a bounded domain and $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, where $\Omega_{1,2}$ are subdomains such that $\Omega_1 \cap \Omega_2 = 0$.

We show that L_2 as well as finite element pressure spaces admit specific factorization such that uniform conditions of infsup (LBB) type can be specified on a proper subspace. This leads to optimal and uniform finite element error estimate in a specific norms. This theory also provides us with a robust (with respect to ε and h) iterative method of a block type to find a solution of the finite element problem. Numerical results will be provided for 2D and 3D problems.

Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике в индуктивных шкалах пространств

Орлов И. В.

Для операторов, действующих в индуктивных шкалах локально выпуклых пространств (ЛВП), получены аналоги классических теорем Банаха о гомоморфизме, открытом отображении и замкнутом графике. С помощью условий регулярности на этой базе получены аналогичные теоремы для операторов, действующих в индуктивных пределах шкал ЛВП, обобщающие классические теоремы.

Как приложения, рассмотрены теоремы о гомоморфизме, открытом отображении и замкнутом графике для операторов, действующих в сопряженных пространствах с индуктивной топологией.

Некоторые аналоги теоремы Вейля для уравнения Штурма–Лиувилля

Осипов А. С. (НИИ Системных Исследований РАН)

В построении теории Вейля для операторов Штурма-Лиувилля важное место занимает следующая теорема (см. например [1], стр. 225):

Теорема. *Если каждое решение уравнения*

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, \infty)$$

для некоторого комплексного $\lambda = \lambda_0$ принадлежит пространству $L^2[0, \infty)$, то и для произвольного комплексного λ каждое решение данного уравнения принадлежит пространству $L^2[0, \infty)$.

Для разностных уравнений второго порядка подобная теорема носит название теоремы Хеллингера-Уолла (с заменой пространства L^2 на l^2), причём в [2] было получено её обобщение на случай уравнения произвольного порядка и пространств $l^p, 1 \leq p \leq \infty$.

В сообщении рассматриваются аналогичные вопросы для дифференциального уравнения произвольного порядка на полуоси, в частности, достаточные условия выполнения аналога утверждения теоремы Вейля в пространствах $L^p[0, \infty), 1 \leq p \leq 2$.

Литература

[1] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, MC Graw-Hill Book Company,NY,1955.

[2] A.S. Osipov, *On the Hellinger theorem and l^p properties of solutions of difference equations*// Journ. of Difference Equations, 9, No 9, (2003), pp. 841-851.

Дифференциальные игры, подверженные импульсному воздействию в фиксированные моменты времени

Остапенко В. В., Остапенко Е. В., Амиргалиева С. Н.
(Национальный технический университет Украины <Киевский политехнический институт>)

Рассматривается динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением с импульсным воздействием:

$$\dot{z} = f(u, v, z),\ (t, z) \notin \Gamma_\tau,\ \Delta z|_{(t,z) \in \Gamma_\tau = A_\tau z - z}$$

где $z \in E^n, E^n$ - n-мерное евклидовое пространство, $u \in U, v \in V, U, V$ - компакты в евклидовых пространствах, $\Gamma_\tau \subset R \times E^n$ - множество ,расширенного фазового пространства, A_τ - непрерывный оператор пространства E^n в себя.

Параметрами u и v распоряжаются соответственно игроки P и E. Цель игрока P вывести траекторию системы на терминальное множество M, удержав ее во множестве фазовых ограничений N. Цель игрока E противоположна. Рассматривается также игра с терминальной функцией платы, где цель игрока P минимизировать терминальный функционал, а цель игрока E - максимизировать этот функционал.

Фильтр Калмана, теория Галуа и квантование

Овсеевич А. И. (ИПМех РАН, Москва)

Излагается новый подход к классической задаче фильтрации гауссовских диффузионных процессов: нахождении условного распределения ненаблюдаемой компоненты процесса, при условии, что наблюдаемая компонента известна вплоть до данного момента.

Эта задача была решена Калманом и Бьюси, которые нашли обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию условного математического ожидания и дисперсии ненаблюдаемой компоненты.

Задачу можно переформулировать как проблему вычисления функционального интеграла, который связан с квантованием некоторой классической гамильтоновой системы, и решить в терминах этой классической системы.

Успех проведения в жизнь этой программы определяется разрешимостью некоторой алгебры Ли, канонически связанной с частично наблюдаемым процессом. С точностью до замены конечных групп на алгебры Ли имеется близкая аналогия с теорией Галуа.

Конечно-элементные реализации итерационных процессов с расщеплением граничных условий для систем Стокса и типа Стокса в шаровом слое, обеспечивающие второй порядок точности

Пальцев Б.В., Чечель И. И. (Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН)

В статье Меллер Н.А., Пальцева Б.В., Хлюпиной Е.Г., ЖВМ и МФ, 1999, Т.39, №1, были построены в шаровом слое в осесимметричном случае конечно-элементные (КЭ-) реализации предложенных ранее и исследованных на дифференциальном уровне итерационных методов с расщеплением граничных условий (ГУ) решения краевой задачи для системы Стокса и ситемы типа Стокса с параметром. При этом и скорости и давление аппроксимировались в сферической системе координат одинаково — билинейными КЭ. Как показали численные эксперименты, такие методы обеспечивают 2-й порядок точности как для скоростей, так и для давления в L_2-норме, а так же в норме максимума модуля в шаровом слое, лишенном узких конических окрестностей оси симметрии; вблизи же оси симметрии в C-норме для скоростей имеет место порядок точности промежуточный между 1-м и 2-м, а для давления — всего лишь 1-й порядок. В связи с этим разработаны обладающие вторым порядком точности вплоть до полюсов, КЭ-типа билинейных аппроксимации оператора Бельтрами-Лапласа и угловых составляющих операторов градиента и дивергенции на сфере в $\mathbb{R}^3$ в осесимметоичном случае. На основе этих КЭ-аппроксимаций и полученных КЭ-пространств построены новые КЭ-реализации вышеуказанных итерационных методов для систем Стокса и типа Стокса при наличии осевой симметрии, обладающие вторым порядком точности в норме максимума модуля уже по всему шаровому слою.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00582).

Multiscale modeling for flows in tube structures

Panasenko G. P. (University Jean Monnet, France)

Asymptotic and numerical analysis of flows in tube structures is an important tool for modeling of some biological systems, such as for example the blood circulation system, as well as for description of some technological procedures, such as polymer extrusion process. In the main part of applications the local three dimensional modeling in some small parts of the tube structure is very important while for the remaining part the one-dimensional (Poiseuil type) description is good enough. We apply the asymptotic domain decomposition approach in order to construct hybrid multiscale models of Stokes, Navier-Stokes and micropolar flows [?], combining the multi-dimensional description with one dimensional description (some special interface conditions are stated at the interface of these one-dimensional and three-dimensional parts). The estimates for the difference of the exact solution and the asymptotic domain decomposition approximation are proved. Some results of numerical implementation are discussed. These results were partially published in the below references.

References

[1] A.C. Eringen. *Theory of Micropolar Fluids*, J. Math. Mech., Vol. 16 (1966) 1-18.

[2] G.P. Panasenko. *Method of Asymptotic Partial Decomposition of Domain*, Math. Models Meth. Appl. Sci., Vol. 8 (1998) 139-156.

[3] D. Dupuy, G. Panasenko and R. Stavre. *Asymptotic Methods for Micropolar Flows in a Tube Structure*, Math. Models Meth. Appl. Sci. (to appear).

[4] F. Blanc and O. Gipouloux, G.P. Panasenko and A.M. Zine. *Asymptotic Analysis and Partial Asymptotic Decomposition of Domain for Stokes Equation in Tube Structure*, Math. Models. Meth. Appl. Sci., Vol. 9 (9), (1999) 1351-1378.

[5] G.P. Panasenko. *Partial Asymptotic Decomposition of Domain: Navier-Stokes Equation in Tube Structure*, C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb, Vol. 326 (1998) 893-898.

[6] G.P. Panasenko. *Multi-Scale Modelling for Structures and Composites*, KLUWER, 2004.

Dynamical approach in the general theory of linear functional equations

Boris Paneah (Technion, Israel)

My talk is devoted to solvability of functional equations of the form

$$F(t)-\sum_{j=1}^{n} a_j(t)F\big(\delta_j(t)\big)=h(t),\quad t\in I.$$

Here I is a finite interval in $\mathbb{R}$, F is an unknown continuous function, all $\delta_j(t)$ are given continuous maps from I into itself, and all $a_j(t)$ and $h(t)$ are given real-valued continuous functions on I. Such equations being interesting by themselves as an object of analysis are also a necessary link when solving various problems in such diverse fields as Integral geometry, Measure theory, additive and multiplicative Cauchy type functional equations, and boundary problems for hyperbolic differential equations. The major part of the proofs is based on a new theory of dynamical systems generated by a noncommutative semigroup with several generators.

О гипотезе А.Д. Александрова

Гаянэ Панина (СПб Институт Информатики и Автоматизации РАН)

Построена серия C^∞-гладких контрпримеров к старой гипотезе А.Д.Александрова:

Если главные радиусы кривизны гладкого выпуклого тела K всюду разделены некоторой константой C, то K - шар радиуса C.

Обсуждается связь гипотезы с разрешимостью в целом уравнений Монжа-Ампера гиперболического типа.

Эта гипотеза была доказана А.Д.Александровым и Х.Мюнцнером для аналитических выпуклых тел. Недавно И.Мартинес-Мор построил первый C^2-гладкий контрпример к гипотезе.

О классах корректности неограниченных обобщенных энтропийных решений квазилинейных законов сохранения

Панов Е. Ю. (Новгородский университет)

Изучается задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в слое $\Pi_T = [0,T) \times \mathbf{R}^n$, $0 < T \le +\infty$

$$u_t + div_x \varphi(u) = 0,\ u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $u = u(t,x)$. Предполагается, что выполнено условие $\|\varphi'(u)\| \le C(1 + |u|^{p-1})$, $C = const$, $p > 1$. Положим $\alpha = (p-1)^{-1}$ и рассмотрим классы $B^0_\alpha = \{\ u(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n) \mid |u(x)| \le M_u(1 + \|x\|^\alpha)\ \}$, $B_\alpha =$ $= \{\ u(t,x) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T) \mid \exists M_u(t) \in L^\infty_{loc}([0,T))\ |u(t,x)| \le M_u(t)(1+\|x\|^\alpha)\ \}$.

Установлено, что при $u_0 \in B_\alpha^0$ обобщенное энтропийное решение (в смысле С.Н.Кружкова) $u \in B_\alpha$ задачи (1) единственно и существует в некотором слое Π_T, где величина T зависит от u_0 и равна ∞, если $u_0(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\|x\|^\alpha)$. Показано, что при увеличении показателя α корректность задачи (1) теряется: ни один из положительных результатов, таких как существование, единственность, принцип сравнения, более не верен.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ N 02-01-00483 и N 03-01-00444), Министерства Образования Российской Федерации (грант N E02-1.0-216) и Программы "Университеты России" (грант N УР.04.01.022).

Homogenization of Elastisity Problems on thin and combined periodic structures

Pastukhova S. E. (Moscow)

We study elastisity problems in two cases: 1)on thin ε-periodic structures $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$ (networks in the plane, box and rod skeletons in the space) with thickness $\varepsilon h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$; 2)on combined structure that is plane (or space) reinforced with network (or box skeleton) F_ε^h. For thin structures homogenization principle is non-classical and depends on $h(\varepsilon)$ being the most complicated when $h(\varepsilon) \sim \varepsilon$. For combined structure there is no scaling effect and homogenization principle is classical. The difference between two cases is due to structure of the set of periodic rigid displacements and Korn-type inequality which are non-similar in two cases.

We apply to these problems method of 2-scale convergence with variable Borel periodic measure μ^h [1] taking for μ^h "natural"measure on thin or combined structure but before we refine essentially general theory of 2-scale convergence for this type of measure μ^h.

References

[1] V.V. Zhikov. // Izvestiya RAN: ser. Math., 2002, 66:2, 81-148;

[2] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova.// Mat. sbornik,2003, 194:5, 61-95;

[3] S.E. Pastukhova. // Dokl. RAN, 2002, 383:5,596-600;

[4] S.E. Pastukhova. // Dokl. RAN, 2004, 394:1,26-31;
[5] S.E. Pastukhova. // Dokl. RAN, 2004, 395:3.

Nonlinear numerical methods for the solution differential and integral equations

Pelekh Ya. N. (Lviv Politechnic National University, Ukraine)

Continued fractions are widely used in numerical because in many cases they give better functional approximations then series, have low sensibility to round-off errors, give monotonous and bilateral approximations.

The new application of continued fraction to development of numerical methods for Cauchy problem for nonlinear ordinary differential equations and its system.

The important peculiarly of this approach is the possibility to receive as many traditional (both explicit and implicit) Runge-Kutta-like methods as new ones with another properties.

The two-side formulae of the first, second, third order of accuracy are constructed and also their stability function are found.

The applications of continued fractions to the development of numerical methods for the solution of nonlinear second order Volterra-like integral equation are obtain and investigated. Characteristic feature of such algorithms is that under the specific parameter values one can obtain both new and traditional numerical methods Runge-Kutta-like and Runge-Kutta-Fehlberg-like for the solution of integral equations.

Asymptotics of solutions of the nonstationary Navier-Stokes system in domains with outlets to infinity

K. Pileckas (Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius, Lithuania)

Let $\Omega \in \mathbb{R}^3$ be a domain with N outlets to infinity, i.e. outside the sphere $|x| = k_0$ the domain Ω splits into N connected components Ω_i (outlets to infinity) which in some coordinate systems $x^{(i)}$ are given by the relations

$$\Omega_i = \{x^{(i)} \in \mathbb{R}^3,\ x^{(i)\prime} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in \sigma_i, x_3^{(i)} > k_0\},$$

where $\sigma_i \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded domain. Consider in $Q_T = \Omega \times (0,\ T)$ the linear Navier-Stokes problem

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \qquad \text{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}|_{\partial Q_T} = 0, \qquad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}, \tag{1}$$

$$\int_{\sigma_i} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,ds = F_i(t), \qquad i = 1,\dots,N, \quad \sum_{i=1}^{N} F_i(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

where $\text{div}\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a}|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}(x^{(i)'}) + \mathbf{a}^{(1)}(x)$ in Ω_i, $\int_{\sigma_i} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds = F_i(0)$. It is proved that, if $\mathbf{f}$ and $\mathbf{a}^{(1)}$ exponentially vanish as $|x| \to \infty$, $x \in \Omega_i$ ($\mathbf{f}$ and $\mathbf{a}^{(1)}$ belong to certain weighted spaces with an exponential weight function), then the solution $\mathbf{u}$ of problem (1) exponentially tends as $|x| \to \infty$, $x \in \Omega_i$ to a "nonstationary Poiseuille flow"$(0, 0, U_i(x^{(i)'}, t))$ where $U_i(x^{(i)'}, t)$ is the solution of the following inverse problem

$$U_{it} - \nu\Delta U_i = g_i(t), \qquad (x^{(i)'}, t) \in \sigma_i \times (0, T),$$

$$U_i|_{\partial\sigma_i\times(0,T)} = 0, \qquad U_i|_{t=0} = \mathbf{A}, \tag{2}$$

$$\int_{\sigma_i} U_i(x^{(i)'}, t)\,dx^{(i)'} = F_i(t)$$

(in (2) the function $F_i(t)$ is given and U_i, g_i have to be found). The solvability of problem (2) is proved in Hölder spaces.

For the nonlinear Navier-Stokes system analogous results are obtained either for small data or for small time intervals.

Control and optimization with discontinuities

Olivier Pironneau (University of Paris VI)

There are many fluid flow problems with discontinuities in the data or in the flow. Among them two are quite important for applications:

- transonic and supersonic flow with shocks and buffeting
- accoustics with sonic boom.

Optimisation of these systems by standard gradient methods require the application of the techniques of the Calcul of Variations and an implicit asumption that a Taylor expansion exists with respect to the degrees of freedom of the problem. Take for example the flow in a transonic nozzle and the variation of the flow with respect to the inflow conditions; when these vary the shock moves and the derivative of the flow variables with respect to inflow conditions is a Dirac measure and so the Taylor expansion does not exists.

By extending the calculus of variation via the theory of distribution it is possible to show however that the derivatives exists. But the result has serious numerical implications, in particular it favors the mixed finite element methods.

We shall give numerical illustrations using the finite element method for an inverse problem for Burger's equation, for the design of a transonic nozzle and for the design of a business supersonic airplane for sonic boom minimization.

On concentration of the point spectrum of elliptic problems in domains with cylindrical ends

Plamenevskii B.A. (St.Petersburg University)

The general formally self-adjoint elliptic problems are considered in a domain that coincides with the union of finitely many semicylinders outside a large ball. The coefficients are supposed to be slowly stabilizing at infinity so one can describe an "exponential structure"of solutions. We prove that the eigenvalues can concentrate only at thresholds, estimate the multiplicity of eigenvalues concentrating at a thresholds, and obtain the exponential structure of eigenfunctions at infinity.

Асимптотики собственных элементов лапласиана с сингулярными возмущениями граничных условий

Планида М. Ю. (Башкирский государственный педагогический университет)

Рассматриваются возмущения трехмерной задачи Дирихле, осуществляемые, во-первых, сменой типа граничного условия на узкой полоске, стягивающейся к замкнутой кривой на границе, и, во-вторых, вырезанием в области тонкого "тороидального" тела, стягивающегося также к замкнутой кривой (но уже лежащей внутри области), и заданием на границе этого тонкого тела граничного условия Неймана. Для этих задач методом согласования асимптотических разложений построены полные асимптотики по малому параметру собственных значений сходящихся к простым собственным значениям невозмущенной краевой задачи и соответствующих собственных функций. Малым параметром являются ширина полоски и диаметр сечения тора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-00693), программы «Ведущие научные школы» №1446.2003.1 и гранта Минобразования России (A03-2.8-63)

Concentrations of stationary solutions to compressible Navier-Stokes equations

Plotnikov P. I. (M.A.Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk)

This is a joint work with J. Sokolowski.

We prove the existence of stationary solutions to the Navier-Stokes equations of compressible isentropic flows

$$\alpha\varrho\mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\varrho^{\gamma} = \varrho\mathbf{F} + \Delta\mathbf{u} + (1+\nu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1a}$$

$$\alpha\varrho + \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}) = f \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1b}$$

in a bounded domain $\Omega \subset R^3$ on the condition that the adiabatic constant $\gamma \geq 1$. The main result is the following

Theorem. *(i)* If $\gamma > 1$, then for every $\mathbf{F} \in C(\Omega)$ problem (1) has a weak solution $\varrho \in L^{\gamma}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in H_0^{1,2}(\Omega)$. If $\gamma = 1$, then there are $\varrho \in L^1(\Omega)$ and $\mathbf{u} \in H_0^{1,2}(\Omega)$ satisfying (1b) such that

$$\alpha\varrho\mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\varrho + \mathrm{div}\,\mathcal{S} = \varrho\mathbf{F} + \Delta\mathbf{u} + (1+\nu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}.$$

Here the weak star defect measure $\mathcal{S}$ is concentrated on the one-dimensional rectifiable set Ω_{sing} and has the representation

$$\int_\Omega \varphi(x) : d\mathcal{S}(x) = \int_{\Omega_{sing}} \mathbf{s}(x) \otimes \mathbf{s}(x) : \varphi(x) m(x) d\mathcal{H}^1 \quad \text{for all} \quad \varphi \in C_0^1(\Omega)^9,$$

Топологическая классификация гиперболических странных аттракторов коразмерности один и централизаторы унимодулярных матриц

Р. В. Плыкин (Обнинский Гос. Техн. университет атомной энергетики)

Доклад посвящен обсуждению задачи, поставленной автором в [1].

Влечет ли за собой гомологическая эквивалентность гиперболических странных аттракторов коразмерности один их топологическую эквивалентность?

Определение. *Пусть A — унимодулярная матрица. Централизатор $Z(A)$ — это совокупность унимодулярных матриц, перестановочных с A.*

Классификационная теорема [2]. *Пусть $\Lambda(A_1, P_1)$, $\Lambda(A_2, P_2)$ $(\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1), \ \Lambda(A_2, P_2, \Theta_2))$ — ориентируемые (неориентиреумые) растягивающиеся аттракторы коразмерности один, достижимые границы которых состоят из связок степеней не выше 2. Тогда эти пары ориентируемых (неориентируемых) аттракторов топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое линейное отображение n-тора (размерность аттракторов равна $n-1$) $\Psi(x) = Cx + \xi$ (C — унимодулярная матрица), что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$ ($\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$ в неориентируемом случае) и собственные числа совпадающих собственных векторов матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$, A_2 имеют одинаковое расположение по отношению к единичной окружности комплексной плоскости с центром в нуле.*

В докладе также обсуждаются примеры унимодулярных матриц с комплексными элементами и порождаемые ими динамические системы.

Следствие. Пусть ориентируемый (неориентируемый) аттрактор $\Lambda(A_1, P_1$ $(\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1))$ имеет тривиальный централизатор
$Z(A_1) = Z \oplus F$ с образующей A. Тогда он гомеоморфен ориентиреумому (неориентируемому) аттрактору $\Lambda(A_2, P_2)$ $(\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2))$ тогда и только тогда, когда существует линейное отображение $\Psi(x) = Cx + \xi$ n-торов такое, что $\Psi A_2 \Psi^{-1} = A^m$, $A_1 = A^n$, $\Psi P_2 = P_1$ и $mn > 0$.

Литература

[1]. R. V. Plykin, A. Yu. Zhirov, Some problems of attractors of dynamical systems. Topology and its applications, 54(1993), 19–46.

[2]. Р. В. Плыкин, К проблеме топологической классификации странных аттракторов динамических систем, УМН, **57**, вып. 6 (2002), 123–166.

Minimax estimation problems for operator equations with a parameter in Hilbert spaces

Podlipenko Yu. K. (Kiev University)

In the system analysis of complex processes described by PDE's, an important problem is the optimal reconstruction (estimation) of parameters of the equations, like values of some functionals on their solutions or right-hand sides, from observations, which are actually values of some other functionals on the same solutions. Such problems appear in the frequent situation where some of the parameters (for example, the right-hand sides as well as the boundary or initial conditions) are not known exactly but only satisfy certain restrictions. The most interesting is the case of unknown parameters and observations destorted by noises whose statistical characteristics are known incompletely too.

For solving such problems with the lack of reliable information about the distribution of random perturbations, the most efficient is the minimax approach proposed by Krasovski, Kurzhansky and Nakonechny. This approach makes it possible to fined optimal estimations of parameters of BVP, corresponding to the "worst" realizations of perturbations. The above estimations were based essentially on the unique solvability of problems whose parameters are estimated.

Despite a large number of publications on this subject, the problem of estimation of parameters from incomplete data has not been studied for BVP's whose solutions are not unique (moreover, even the very setting of the problem of minimax estimation was not known). A class of such problems includes the Neumann problem for the Laplace equation and more general linear second order elliptic equations with a non-coercive bilinear form, for which there exists an infinite set of solutions differing by additive constants.

My talk will be devoted to the extension of the minimax approach for such problems.

О следе возмущенной операторной полугруппы

Подольский В. Е. (Москва)

Рассматривается полугруппа $\exp(-t(A+B))$, где $A^{-1} \in \mathfrak{S}_2$, собственные вектора оператора A $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства, соответствующие собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ все лежат в открытом секторе $-\pi/2+2\omega < \arg z < \pi/2-2\omega,\ 0<\omega<\pi/4$. Оператор B ограничен. Для функции $f(t) = \|\exp(-t(A+B)) - \exp(-tA)\|_1$ доказано, что $f(t) = o\left(t^{-1}\right)$ при $t \to 0+$ и $f(t) \in L_1[0,+\infty)$. Для самосопряженного оператора A такого, что при некотором $\alpha \in [1,2]$ выполнено

$$\sum_{k:\lambda_k>\lambda_n}^{\infty} \left|(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)\right| (\lambda_k-\lambda_n)^{\alpha} = O\left(\lambda_n^{\alpha-1}\right),$$

при $t \to 0+$ верна асимптотическая оценка

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-t(A+B)} - e^{-tA}\right) = -t\mathrm{Tr}\left(Be^{-tA}\right) + \frac{t^2}{2}\mathrm{Tr}\left(B^2e^{-tA}\right) + o(t).$$

К общей теории разрушения решений нелинейных уравнений в частных производных

Похожаев С. И. (Математический Институт им. В.А.Стеклова, Москва)

В отличие от классической теории разрушения решений нелинейных уравнений в частных производных, основанной на теории сравнения, предлагаемая теория основана на концепции нелинейной емкости. Таким образом эта теория не использует ни теоремы сравнения, включая принцип максимума, ни свойства фундаментальных решений соответствующих линейных операторов(как например в теории Фуджита). Этот общий подход дает возможность рассмотреть широкий класс нелинейных уравнений, включая многомерные нелинейные гиперболлические уравнени, а также системы таких уравнений и неравенств. В результате была составлена «Таблица Менделеева» нелинейных задач, для которых были установлены критерии разрушения решений этих задач.

Литература

[1] Е.Митидиери, С.И. Похожаев, ТРУДЫ МИАН им. В.А. Стеклова, том 234(2001), 1-383.

[2] www.mi.ras.ru/‘pohozaev/cv

Об одном классе обобщенных задач Штурма–Лиувилля с разрывными решениями

Покорный Ю. В. , Зверева М. Б. , Шабров С. А. (Воронежский государственный университет)

Рассматривается псевдодифференциальное уравнение, допускающее на сегменте $[0, l]$ условную запись в виде $-(pu')' + qu = \lambda mu$, где q и m — неканонические для теории Шварца–Соболева обобщенные функции физической природы. Например, для одномерного упругого континуума (струны), разорванного во внутренней точке $x = \xi$, мы предполагаем наличие упругой связи между образованными в результате разрезания концами $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$. Аналогичная δ'-особенность порождается распределением масс $m(x)$, если допустить сосредоточенные массы в $\xi - 0$, $\xi + 0$. Нас интересуют знакорегулярные свойства спектральной задачи, включающие число нулей и их перемежаемость у собственных функций.

Мы трактуем исходную задачу в виде интегро-дифференциального уравнения

$$pu'_\mu(x) - \int_0^x ud(Q - \lambda M) = \mathrm{const},$$

главная особенность в котором — расширенное толкование интеграла, который для описанного примера при $x > \xi$ понимается как сумма двух интегралов по замкнутым промежуткам $[0, \xi]$ и $[\xi, x]$, так что в каждом из этих интегралов точка ξ обретает соответствующую одностороннюю меру, как бы раздваиваясь в исходном промежутке $[0, l]$.

О классификации взаимных расположений M-кубики и M-квартики

Полотовский Г. М. (Нижегородский университет им. Н.И.Лобачевского)

Задача изотопической классификации расположений в вещественной проективной плоскости M-кубики и M-квартики, пересекающихся в 12 попарно различных точках, расположенных на овале квартики и на нечетной ветви кубики, представляет собой наиболее объемную (здесь следствия теоремы Безу и формул комплексных ориентаций допускают более 7000 топологических моделей кривых) часть общей задачи классификации вещественных распадающихся кривых степени 7 при условиях максимальности и общего положения сомножителей. Недавно С.Ю.Оревков (см. Вестник Нижегородского университета "Математическое моделирование и оптимальное управление", **1(25)** (2002), 12-48, или http://picard.ups-tlse.fr/ orevkov/), применяя устранения сложных особенностей, реализовал кривыми 7-ой степени 237 таких моделей (в том числе все модели, реализованные ранее автором). Мы применяем для доказательства нереализуемости моделей метод Оревкова (см. Topology, **38** (1999), 779-810), основанный на теории зацеплений. Полученные результаты (к настоящему времени рассмотрено около половины моделей) позволяют предположить, что справедлива следующая

Гипотеза. *237 кривых списка Оревкова представляют полную классификацию кривых рассматриваемого класса.*

Lyapunov dimension formula for two coupled circle maps

Poltinnikova M. S. (Saint-Petersburg State University)

Consider the map $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x \to b_1 + x + c_1(1-\varepsilon)\sin x + c_2\varepsilon \sin y \\ y \to b_2 + y + c_1\varepsilon \sin x + c_2(1-\varepsilon)\sin y \ , \end{cases}$$

where ε is a small parameter, c_1, $c_2 > 0$.

The exact formula for the Lyapunov dimension of the chaotic attractor of the dynamical system generated by F is derived under some restrictions to the parameters.

The lower estimate for the Lyapunov dimension is obtained under less restrictions to coefficients.

This talk is based on the joint work with J. Kurths (University Potsdam).

50 year nonclassical Protter's problems for the wave equation

Nedyu Popivanov (Department of Mathematics and Informatics, University of Sofia, Bulgaria)

In 1952 M. Protter formulated and studied boundary value problems for the wave equation, which are multidimensional analogues of Darboux-problems on the plane. More precisely, he studied these problems in a $3-D$ domain Ω, bounded by two characteristic cones S_1 and S_2 and a plane region S_0. Many authors studied these problems using different methods, like: Wiener-Hopf method, special Legendre functions, a priori estimates, nonlocal regularization and others. It is shown in 1995 that for n in $\mathbb{N}$ there exists a right hand side function from $C^n(\bar{\Omega})$, for which the corresponding unique generalized solution belongs to $C^n(\bar{\Omega}\backslash O)$ and has a strong power-type singularity at the point O. This singularity is isolated at the vertex O of the characteristic cone S_2 and does not propagate along the cone. We will describe the exact behavior of the singular solutions at the point O and give some necessary and sufficient conditions for existence of solutions with fixed order of singularity. It states some exact a priori estimates for the singular solutions.

Глобальная управляемость показателей Ляпунова

Попова С. Н. (Удмуртский государственный университет)

Доказано, что при условии равномерной полной управляемости (по Калману) системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R},$$

для любых непрерывных и ограниченных функций $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, существует матричное управление $U(\cdot)$ такое, что замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)\, x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе с верхней треугольной кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ матрицей, диагональ которой совпадает с $(p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot))$.

Как следствие установлена глобальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова системы (1), которая заключается в возможности построения для произвольного наперед заданного набора чисел $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ такого матричного управления $U(\cdot)$, что система (1) с этим управлением имеет своим полным спектром показателей Ляпунова этот набор чисел. Доказана также глобальная управляемость центральных, особых и экспоненциальных показателей системы (1).

Факторизация нелинейных параболических уравнений

Прохорова М. Ф. (ИММ УрО РАН)

Пусть E – ДУ или система ДУ в частных производных, то есть подмногообразие расслоения $J^k(N)$ k-струй m-мерных подмногообразий $\Gamma \subset N$, $F : N \to N'$ - гладкое сюрьективное отображение. Назовем прообразы $F^{-1}(\Gamma')$ произвольных подмногообразий $\Gamma' \subset N'$ F-проектируемыми подмногообразиями N. Назовем F-проектируемым расслоением k-струй $J^k_F(N)$ подмногообразие $J^k(N)$, состоящее из k-струй всевозможных m-мерных F-проектируемых подмногообразий N. Отображение F можно поднять на $J^k_F(N)$, определив естественную проекцию $F^k : J^k_F(N) \to J^k(N')$. Будем говорить, что система E **допускает отображение** F, если $E \cap J^k_F(N)$ является F^k-проектируемым подмногообразием $J^k_F(N)$. Определим категорию DE, объектами которой являются системы ДУ, а морфизмами – допускаемые отображения (концом морфизма F с началом в E будет проекция $F^k(E \cap J^k_F(N))$).

Введены понятия замкнутой, плотной и всюду плотной подкатегории (подкатегория K' называется замкнутой в K, если любой морфизм категории K с началом в K' заканчивается тоже в K'; называется плотной в K, если для любого морфизма $F : A \to B$ категории K, $A \in Ob(K')$, существует изоморфизм $G : B \to C$ категории K такой, что $GF \in Mor(K')$). На основе этих понятий определена и исследована алгебраическая структура категории PDE нелинейных параболических уравнений второго порядка. В частности, рассмотрены категории квазилинейных, полуавтономных и автономных параболических уравнений, а также ряд их подкатегорий.

Линейная нормализация гамильтониана в эллиптических ограниченных задачах многих тел

Прокопеня А.Н. (Брестский государственный технический университет, Беларусь)

При исследовании устойчивости равновесных решений в эллиптических ограниченных задачах многих тел квадратичная часть гамильтониана системы представима в виде:

$$H(t) = \frac{1}{2}x^T(H_0 + \varepsilon H_1(t) + \varepsilon^2 H_2(t) + \ldots)x, \qquad (1)$$

где $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ – $2n$-мерный вектор, компоненты которого x_k и x_{n+k} являются канонически сопряженными переменными, $H_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – непревывные, периодические с периодом $T = 2\pi$ квадратные матрицы-функции порядка $2n$, H_0 – постоянная матрица, а ε – малый параметр. В настоящей работе выполняется построение вещественного канонического преобразования, приводящего гамильтониан (1) к нормальной форме. На первом этапе мы вычисляем матрицу-функцию $Z(t,\varepsilon)$, которая реализует каноническое преобразование $x = Z(t,\varepsilon)y$, приводящее гамильтониан (1) к виду $H(t) = \frac{1}{2}\, y^T \tilde{H}_0 y$, где $\tilde{H}_0$ – постоянная матрица. На втором этапе мы преобразуем матрицу $\tilde{H}_0$ к диагональной форме. Матрица-функция $Z(t,\varepsilon)$ является аналитической и в окрестности точки $\varepsilon = 0$ может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$Z(t,\varepsilon) = E_{2n} + \varepsilon Z_1(t) + \varepsilon^2 Z_2(t) + \ldots, \qquad (2)$$

где E_{2n} – единичная матрица, а $Z_k(t+T) = Z_k(t)$ $(k = 1, 2, ...)$. С помощью предложенного алгоритма произведена нормализация гамильтонианов, описывающих возмущенное движение систем с одной и двумя степенями свободы. Все вычисления выполняются с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Метод граничных режимов в смешанной задаче для волнового уравнения на геометрическом графе

Прядиев В. Л. (Воронежский государственный университет)

Изучается начально-краевая задача для волнового уравнения $u_{xx} - q(x)u = u_{tt}$ на геометрическом графе, где $q(x)$ – линейная комбинация δ-функций с носителями в вершинах графа. Решение u предполагается непрерывным всюду и дважды непрерывно дифференцируемым вне вершин графа. Рёбра графа предполагаются равновеликими. Трактовка значений решения в вершинах графа, как граничных режимов по отношению к примыкающим рёбрам, приводит к описанию решения через нейтрального типа систему дифференциально-разностных уравнений с количеством запаздываний, растущим как целая часть аргумента. Матрица системы определяется матрицами смежности вершин и валентностей графа. Получено аналитическое решение этой системы и, соответственно, исходной краевой задачи — в терминах разностных операторов и экспонент от них. Для частных случаев графа и коэффициента $q(x)$ экспоненту разностного оператора удаётся выразить с помощью конечной суммы разностных операторов, умноженных на многочлены Лагерра.

Capillary/gravity film flow on the surface of a rotating cylinder

Pukhnachov V. V. (Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk)

We derive the equations describing the motion of a viscous incompressible capillary film on the surface of a rotating cylinder in the transversal gravity field. As a result, we obtain the equation for the film thickness, which has a fourth order in two space variables and a first order in time. We study both space periodic solutions and localized solutions of this equation in the stationary case. The stability of stationary solutions is discussed also. Analysis of the one-dimensional problem shows that its solution strongly depends on the Galileo number and it does not exists if this parameter is large. Asymptotic solutions of the above mentioned problem for small and large values of the capillary number are constructed. In particular, it is shown as a small surface tension removes the singularity on a free surface appearing in the absence of capillarity when Galileo number tends to a critical value. In the case of plane stationary motion, the closeness of the approximate and exact solutions of free boundary problem for the Navier-Stokes equations has been proved if a relative film thickness tends to zero.

Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения

Пулькина Л. С. (Самарский государственный университет)

Рассмотрим задачу для уравнения

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,t)u = f(x,t)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega-$ ограниченная область в R^n, с начальными данными $u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x)$ и нелокальным условием

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)dx = E(t),$$

где функции $K(x), \;\; E(t)$ заданы. Особенностью рассматриваемой задачи является отсутствие граничных условий. Присутствие же нелокального условия, заданного в виде интеграла Лебега от искомого решения, как известно, затрудняет применение стандартных методов исследования смешанных задач. Однако удалось найти условия на коэффициенты и данные задачи, при выполнении которых существует единственное обобщенное решение.

Solvability of some inverse problems for parabolic equations

Pyatkov S. G.(Ugra state university)

We consider the pseudoparabolic equation

$$L_0(x,t,D_x)u_t + L_1(x,t,D_x)u = f(x,t), \;\; (x,t) \in Q = G \times (0,T), \;\; (1)$$

where $G \subset R^n$ is a bounded domain with boundary $\Gamma \in C^4$ and L_0, L_1 are elliptic operators of the second and forth orders, respectively. We furnish the equation (1) with the following boundary conditions

$$u|_S = \varphi(x,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \;\; S = \Gamma \times (0,T), \;\; (2)$$

where n is the exterior unit normal to Γ. Let the symbol $L_{q,\rho}(G)$ denote the weighted Lebesque space endowed with the norm $\|u\| = \|\rho u\|_{L_q(G)}$, where $\rho(x)$ is the distance from a point $x \in G$ to Γ. Put $H_q^k(G) = \{u \in L_{q,\rho}(G) : \ D_x^\alpha u \in L_{q,\rho}(G), \ |\alpha| \le k\}$. For simplicity, we assume that $\varphi = 0, \psi = 0, u_0 = 0$ in (2). In this case, under natural conditions for the coefficients of the operators L_0, L_1 we prove that, for every $f \in L_{q,\rho}(G)$, the problem (1), (2) has a unique solution $u \in H_q = \{u \in L_q(0,T; H_q^4(G)) : \ u_t \in L_q(0,T; H_q^2(G))\}$. This result is applied to the study of the following inverse problem: to find an unknown coefficient q and a function u satisfying (2) and the equation

$$u_t + L_0(x,t,D_x)u + g(x,t,u,\nabla u) + q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \qquad (3)$$

The function q is sought in the class of functions from the kernel of the Laplace operator Δ_x or from the kernel of a second order elliptic operator in the space variables. Under natural smoothness conditions and the assumption that $|\varphi(x,t)| \ge \delta > 0 \ \forall (x,t) \in S$ we prove that the problem (2), (3) is solvable locally in time or if the norms of the data (2) are sufficiently small.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 03–01–00819).

О сингулярно-предельной задаче расширенной модели Кана-Хилларда.

Радкевич Е. В. (МГУ)

Доклад посвящен нелинейному асимптотическому анализу расширенной модели Кана-Хилларда с неизотропным поверхностным натяжением (описывающей процес затвердевания двухкомпонентного сплава свинец-олово). Основным результатом является вывод сингулярно предельной задачи – модификации задачи типа Стефана, в которой концетрация на фронте зависит от геометрии фронта. На малом временном интервале доказано существование классического решения полученной задачи со свободной границей. На временном интервале существования классического решения сингулярно предельной задачи доказано существование асимптотического решения с любой точностью. Фронт фазового перехода определяется однозначно первыми тремя приближениями. Показано, что условие устойчивости фронта определяется условием диссипации решений уравнения для фронта. Несимметрия тензора поверхностных натяжений приводит к зависимости предельных значений для распределений концетраций от геометрии фронта. Это вызывает дисперсию решений уравнения для фронта на части фронта, которой не касается главная кристаллографическая ось.

Неравенство Бернштейна-Никольского для корневых функций регулярной краевой задачи регулярной краевой задачи и теоремы вложения

Радзиевский Г. В. (Институт математики НАН Украины)

Все используемые далее функциональные пространства состоят из комплекснозначных функций, заданных на $[0;1]$. Пусть W_p^r, $r = 0, 1, \ldots$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространство Соболева, причем $W_p^0 := L_p$, n — целое и $n \geqslant 2$, F — ограниченный оператор, действующий из пространства Гельдера C^γ с $\gamma \in [0; n-1)$ в L_p, σ_j — функции ограниченной вариации, непрерывные в 0 и в 1, а краевые условия $\alpha_j x^{(k_j)}(0) + \beta_j x^{(k_j)}(1) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, — регулярны. Для $\zeta > 0$ обозначим через $\mathfrak{P}_\zeta$ линейную оболочку корневых функций, отвечающих собственным значениям с модулями меньше ζ^n спектральной задачи $x^{(n)} + Fx = \lambda x$, $x \in W_p^n$, при краевых условиях $\alpha_j x^{(k_j)}(0) + \beta_j x^{(k_j)}(1) + \int_0^1 x^{(k_j)}(\tau) d\sigma_j(\tau) + \sum_{l<k_j} c_{j,l} x^{(l)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, причем если в круге $\{\lambda : |\lambda| < \zeta^n\}$ нет собственных значений, то $\mathfrak{P}_\zeta := \{0\}$.

Теорема. *Существует такая постоянная $c > 0$, что*

$$\|g\|_{W_p^r} \leqslant c\, \zeta^{r+1/p-1/q} \|g\|_{L_q} \qquad (1)$$

для всех $g \in \mathfrak{P}_\zeta$ с $\zeta \geqslant 1$ и $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $r = 0, \ldots, n-1$. Если, кроме того, F — ограниченный оператор из W_q^n в L_q, то оценка (1) справедлива и при $r = n$.

Введем $E_\zeta(f)_p := \inf_{g \in \mathfrak{P}_\zeta} \|f - g\|_{L_p}$ — наименьшее уклонение индивидуальной функции f из L_p от подпространства $\mathfrak{P}_\zeta$.

На основании теоремы в терминах $E_\zeta(f)_p$ приводятся достаточные условия принадлежности функции f пространству W_q^r при $r = 0, \dots, n$ и $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

Переопределенная линейная система первого порядка с внутренней сверхсингулярной линией и точкой

Раджабов Н. (Президиум АН РТ, ТГНУ)

Через D_0 обозначим прямоугольник
$D_0 = \{(x,y) : -c < x < c, -d < y < d\}$. Соответственно обозначим
$D_1 = \{(x,y) : -c < x < 0, 0 < y < d\}$,
$D_2 = \{(x,y) : 0 < x < c, 0 < y < d\}$,
$D_3 = \{(x,y) : -c < x < 0, -d < y < 0\}$,
$D_4 = \{(x,y) : 0 < x < c, -d < y < 0\}$, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$,
$L_1^1 = \{-c < x < c, y = 0\}$, $L_1^2 = \{0 < x < c, y = 0\}$,
$L_2^1 = \{x = 0, -d < y < 0\}$, $L_2^2 = \{x = 0, 0 < y < d\}$. В области D рассмотрим переопределенную систему

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a(x,y)}{|x|^\alpha} U = \frac{f_1(x,y)}{|x|^\alpha}, \ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{b(x,y)}{r^\beta} U = \frac{f_2(x,y)}{r^\beta}, \qquad (1)$$

где $r^2 = x^2 + y^2, a(x,y), b(x,y), f_j(x,y)\,(j = 1,2)$ - заданные функции, причем $a(x,y), b(x,y)$ на $\Gamma_j^1, \Gamma_2^j, j = 1,2$ могут иметь разрывы первого рода, $\alpha = constant \geq 1, \beta = constant \geq 1$. Проблеме исследования системы типа (1) с граничными сингулярными и сверхсингулярными линиями и точками в областях D_2 и $D_2^0 = D_1 \cup D_2$ посвящено [1], [2].

Система (1) исследована в следующих случаях:
1) $a(\pm 0, \pm 0) \neq 0$, $b(x,y) = yb_0(x,y)$, $b_0(\pm 0, \pm 0) \neq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$;
2) $a(\pm 0, \pm 0) \neq 0$, $b(\pm 0, \pm 0) \neq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Общее решение во всех случаях содержит четыре произвольные постоянные.

Литература

[1] Rajabov N. *An Introduction to the theory of partial differential equation with super-singular coefficients*, Tehran, 1997, 230 p.

[2] Раджабов Н., Мирзоев Н.//Вестник Национального Университета, серия математика, 2004, N 1, Душанбе, с. 54-101.

О непрерывности центральных и особых показателей на некотором множестве линейных дифференциальных систем

Рахимбердиев М. И. (Институт математики МОН РК, Казахстан)

Пусть M_n — метрическое пространство линейных систем $\dot{x} = A(t)x$, $x \in R^n$, с непрерывными и ограниченными матричными функциями $A(.)$ на R^+; метрика в M_n равномерная. Известно, что показатели Ляпунова $\lambda_1(\cdot) \geqslant ... \geqslant \lambda_n(\cdot)$, центральный $\Omega(\cdot)$ и особый $\Omega^0(\cdot)$ показатели являются разрывными функциями на M_n (см. [1,2]). Пусть K^+- подмножество систем из M_n, матрицы которых имеют неотрицательные внедиагональные коэффициенты, $\bar{\lambda}_i(\cdot)$, $\bar{\Omega}(\cdot)$, $\bar{\Omega}^0(\cdot)$ - ограничения соответственно функций $\lambda_i(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Omega^0(\cdot)$ на множество K^+.

Теорема. *Функции $\bar{\Omega}(\cdot)$, $\bar{\Omega}^0(\cdot)$ непрерывны на множестве K^+.*

Заметим, что функции $\bar{\lambda}_i$, $\Omega(\cdot)$, $\Omega^0(\cdot)$ могут быть разрывными на K^+.

Литература

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости.* -М.: "Наука", 1966.- 576 с.

[2] Миллионщиков В. М. *О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений*// Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 4. С.749-750.

Апостериорные оценки точности приближённых решений краевых задач с условием соленоидальности

Репин С. И. (С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН)

Решения краевых и начально–краевых задач математической физики часто определяются в классах функций удовлетворяющих условию соленоидальности. В частности, такая ситуация характерна для задач математической теории вязких несжимаемых жидкостей. Дополнительные условия накладываемые на решение требованием соленоидальности приводят к существенным дополнительным трудностям как при численном решении задачи так и при анализе погрешности приближённого решения. В докладе показывается как при помощи метода построения апостериорных оценок точности, который был ранее разработан для выпуклых вариационных задач [1] можно получать такие оценки для задач с условием несжимаемости. Соответствующие оценки получены (см. [2,3]) путём анализа краевой задачи методами используемыми в вариационном исчислении и теории дифференциальных уравнений и они пригодны для любых конформных аппроксимаций точного решения. Приводится общая форма апостериорных оценок такого рода для задач, решения которых принадлежат ядру некоторого линейного ограниченного оператора. Практическое применение оценок обсуждается на примере задачи Стокса и некоторых других задач возникающих в теории вязких несжимаемых жидкостей. В этих задачах в апостериорную оценку нормы разности между точным и приближённым решениями задачи входит постоянная в так называемом условии Ладыженской-Бабушки-Брецци. Приводятся результаты численных экспериментов подвеждающие эффективность предлагаемого метода.

Литература

[1] S. Repin. *A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals.* Mathematics of Computations, 69 (2000), 230, 481–500.

[2] S. Repin, *Estimates of deviations for generalized Newtonian fluids.* Zapiski Nauchn. Semin. V.A. Steklov Mathematical Institute in St.-Petersburg (POMI), 288(2002), 178–203.

[3] S. Repin. *A posteriori estimates for the Stokes problem.* J. Math. Sci. (New York), 109 (2002), no. 5, 1950–1964.

Influence of damping to the singularity formation for Euler equations

Rozanova O. S. (MSU, Moscow)

Consider the system of balance laws

$$\rho(\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \nabla)\, \mathbf{V}) = -\nabla P - \mu\rho\mathbf{V},$$

$$\partial_t \rho + div\,(\rho\mathbf{V}) = 0, \qquad \partial_t P + (\mathbf{V}, \nabla P) + \gamma P\, div\, \mathbf{V} = 0,$$

written for unknown functions $\rho, \mathbf{V} = (V_1, ..., V_n)$ and P, the density, velocity vector and pressure, respectively. The functions depend on time t and on the point $x \in \mathbb{R}^n$, the constant friction coefficient μ is nonnegative. As usual, $\gamma > 1$ is the heat ratio.

We analyze tree type of initial data, namely, compactly supported (I), with finite energy and momentum (II) and compactly supported perturbation of nontrivial constant state (III).

It is well known that in the damping free case the solution to this system can develop singularities in finite time from anyhow smooth data. For case (I) it will be for any nontrivial data, for (II) and (III) such data can be determined specifically.

However, it is known that the friction in the case (III) may prevent the singularity formation. We prove that this phenomenon do not take place in cases (I) for anyhow large μ. As about (II) and (III), for sufficiently small μ we can still find the smooth data generating singularities within a finite time.

Корректность в сильном смысле

Розендорн Э. Р. (МГУ им. М.В.Ломоносова),
Переяславская Л. Б. (МГУС)

Напомним: граничная задача корректна, если ее решение (1) существует, (2) единственно, (3) непрерывно зависит от граничных условий (в данном классе). Пусть в n - мерной области G

ставится граничная задача с данными на $S \subset \partial G$. Скажем, что она корректна в сильном смысле, если кроме (1 - 2 - 3) выполнено

(4) В функциональном пространстве граничных данных в области, из которой они назначаются, у каждой «точки» X есть окрестность Ω_X такая, что решение, построенное согласно (1 - 2) для любого $Y \in \Omega_X$, определено в общей для всех $Y \in \Omega_X$ области $U \subset G$ и при этом $S \subset \partial U$.

Содержательность требования (4) подтверждается примерами семейств развертывающихся поверхностей, построенными в [1], когда эти поверхности рассматриваются как графики решений уравнения $z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 = 0$.

Литература

[1] Переяславская Л. Б. *Геометрические методы решения параболических уравнений Монжа-Ампера.* Дисс....канд. физ.-мат. наук.– МТИ Минбыта РСФСР.– 1989.

Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями

Рудаков И. А. (Брянский государственный университет им. акад. И.Г.Петровского)

Рассматривается задача

$$u_{tt} - u_{xx} + g(x,t,u) = 0, \quad u(x,t+T) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Здесь $T = 2\pi\frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{N}$, НОД$(a,b) = 1$. Для $h > 0$ выполнено одно из условий:

$$u(0,t) - hu'_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) + hu'_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Функция $g(x,t,u)$ непрерывна на $[0,\pi] \times \mathbf{R}^2$, T-периодична по t, неубывает по u и существуют положительные константы $A_1, A_2, A_3, A_4, p, \delta$ такие, что $A_3|u|^{p-1} - A_4 \le |g(x,t,u)| \le A_1|u|^{p-1} + A_2 \quad \forall (x,t,u) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}^2$, где $p > 2$ и $\frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{p} + \delta$.

Теорема. *Пусть помимо вышеперечисленных условий для g выполнено одно из свойств: или g не зависит от t или $g(x,t,-u) = -g(x,t,u) \quad \forall (x,t,u) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}^2$. Тогда для любого $d > 0$ существуют обобщенные решения $u \in L_p(\Omega)$ задач $(1),(2)$ и $(1),(3)$ такие, что $\|u\|_{L_p} \geq d$.*

Здесь $\Omega = [0,\pi] \times [0,T]$. Доказаны также теоремы о существовании обобщенного решения $u \in C(\Omega)$ уравнения $u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x,t)$ для любой $T-$периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$, когда g удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности и о существовании нетривиального решения этого же уравнения при $f \equiv 0$, если $g(0) = 0$ и g удовлетворяет дополнительному условию вблизи нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feireisl E.// Nonlinear Anal. 1988. V. 12. P. 279-290.

2. Рудаков И.А.//Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. N 11. С. 1550-1555.

Слияние свободных границ в задаче Стефана–Гиббса-Томсона

В.Ю. Руднев (Московский Государственный Институт Электроники и Математики)

Работа посвящена изучению слияния свободных границ Γ_i, $i = 1,2$ в модели фазового поля. Система фазового поля содержит малый параметр ε. При $\varepsilon \to 0$ система фазового поля переходит в предельную задачу Стефана–Гиббса-Томсона.

Проводится численное моделирование процесса слияния в одномерном и двумерном случаях. При этом особое внимание уделяется исследованию поведения температуры в окрестности точки слияния свободных границ.

Теоретическое исследование системы фазового поля проводится методом слабых асимптотик. Он является продолжением идей В. П. Маслова, получивших свое развитие в работах В. Г. Данилова, Г. А. Омельянова, В. М. Шелковича. Слабое асимптотическое решение $\hat{u}_\varepsilon$, $\hat{\theta}_\varepsilon$ позволяет получить из системы фазового поля уравнения, являющиеся обобщением задачи Стефана–Гиббса-Томсона на времена большие момента слияния свободных границ.

Метод слабых асимптотик позволяет объяснить эффект образования охлажденной зоны в окрестности точки слияния свободных границ.

Проводится численное моделирование и теоретический анализ эффекта сглаживания свободных границ при $t = T^*$ в многомерном случае.

Работа выполнена совместно с В. Г. Даниловым и Г. А. Омельяновым.

Итерационный вариант практического построения условно-периодических решений в ограниченной задаче трех тел

Рябов Ю. А., Борунов В. П. (МАДИ)

Осуществлена (с помощью методов компьютерной алгебры) реализация алгоритма для построения численно-аналитического решения плоской круговой ограниченной задачи трех тел (Солнце-Юпитер-малая планета). Этот алгоритм позволяет получать в автоматическом режиме решения в виде двукратных рядов Фурье с численными коэффициентами (практически, полиномов заданной длины) при произвольных в достаточно широкой области начальных данных. Эти решения (естественно, приближенные,но удовлетворяющие с заданной достаточно малой невязкой точным исходным уравнениям движения) справедливы на любом сколь-угодно большом интервале времени в отличие от известных классических решений такой задачи. Хотя, по существу, этот алгоритм соответствует классическим последовательным приближениям, расходящимся согласно известным результатам Пуанкаре, но практическая сходимость алгоритма сохраняется даже при довольно острой соизмеримости средних движений Юпитера и малой планеты. Конечно, чем меньше заданная невязка и чем больше заданная длина полинома Фурье, тем требуется большее количество итераций, не достижимое без применения современного компьютера и соответствующей программы вычислений в автоматическом режиме. Построены конкретные решения при начальных данных и параметрах, соответствующих некоторым реальным и гипотетическим малым планетам.

Точные решения уравнений С.А.Чаплыгина и их нестационарных аналогов и бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений газовой динамики и отвечающих им законов сохранения

Рылов А. И. (Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН Новосибирск)

На плоскости спидографа построена однородно-дивергентная система уравнений, которая может рассматриваться как нестационарный аналог известных уравнений С.А.Чаплыгина на плоскости годографа. Построенные уравнения, как и уравнения С.А.Чаплыгина, имеют бесконечное множество точных решений. Показано, что каждому точному нестационарному (стационарному) решению на плоскости спидографа (годографа) отвечает своя однородно-дивергентная система уравнений газовой динамики на модифицированной плоскости событий (потенциала) и, как следствие, свой закон сохранения. Демонстрируются примеры и так называемых дополнительных законов сохранения, чьи дивергентные уравнения являются линейными комбинациями некоторых других дивергентных уравнений. Далее, однотипность исследуемых уравнений позволила выписать ряд наглядных соотношений, характеризующих геометрию линий уровня зависимых переменных в стационарных течениях, а для нестационарных течений – скорости фронтов постоянных значений зависимых переменных.

Доклад продолжает и развивает работы автора в ПММ, 1995, Т. 59, вып. 5, в ДАН, 2002, Т. 383, №1 и др.

Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа

Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. (Стерлитамакская государственная педагогическая академия)

Для уравнения типа Чаплыгина

$$Lu \equiv K(t)u_{xx} + u_{tt} + \lambda K(t)u = 0\ , \qquad (*)$$

где $K(t) = sgn\ t|t|^m$, $m = const > 0$, λ – комплексный параметр в области $D = \{(x,t)|0 < x < 1,\ t > -\alpha\},\ \alpha > 0$, ставится следующая существенно нелокальная задача: *найти в области* D *ограниченное решение* $u(x,t)$ *уравнения* $(*)$ *из класса функций* $C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_+\cup D_-)$*, удовлетворяющее граничным условиям:*

$$u(0,t)=u(1,t),\ t\geq -\alpha\ ,\ \ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ t>-\alpha\ ,$$

$$u(x,-\alpha)=\psi(x)\ ,\ 0\leq x\leq 1\ ,$$

где $D_+=D\cap\{t>0\}$, $D_-=D\cap\{t<0\}$, $\psi(x)$ *— заданная достаточно гладкая функция.*

Методом спектрального анализа доказаны теоремы существования и единственности решения поставленной задачи.

О гладкости решения задачи граничного управления на двух концах для уравнения струны

Сабитова Ю. К. (Стерлитамакская государственная педагогическая академия)

Для уравнения $u_{tt}-u_{xx}=0$ в прямоугольной области $Q=\{(x,t)\mid 0<x<l, 0<t<T\}$ рассмотрена задача Ильина В. А. (Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35 №5. С.692—704) об управлении: найти на концах $x=0$ и $x=l$ такие граничные управления $u(0,t)=\mu(t)$, $u(l,t)=\nu(t)$, $0\leq t\leq T$, которые за промежуток времени $t=T$ обеспечивают переход колебательной системы из начального состояния: $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0\leq x\leq l$, в конечное состояние: $u(x,T)=\varphi_1(x)$, $u_t(x,T)=\psi_1(x)$, $0\leq x\leq l$. Решение этой задачи существенным образом зависит от того, в каком соотношении находятся длина струны l и момент времени T. При $0<T<l$ задача однозначно разрешима, но она переопределена, поэтому возникают условия разрешимости. При $T>l$ задача недоопределена, в этом случае для построения однозначного решения задачи данных явно недостаточно. Например, для случая $l<T\leq 2l$ граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяются неоднозначно и их аналитические выражения будут содержать две

произвольные функции, удовлетворяющие определённым условиям разрешимости задачи. В данной работе приводятся в явном виде решение $u(x,t)$ задачи, соответствующие управления при произвольном $T > 0$ и установлены необходимые и достаточные условия принадлежности решения $u(x,t)$ к классам $C^k(\overline{Q})$, $k = 0, 1, 2$; $C^0(\overline{Q}) \equiv C(\overline{Q})$.

Нильпотентная (2,3,5) субриманова задача

Сачков Ю. Л. (Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский)

Пусть M — пятимерная связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли которой порождена левоинвариантными полями $X_1, \ldots, X_5$ с правилами умножения

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad \operatorname{ad} X_4 = \operatorname{ad} X_5 = 0.$$

Рассматривается субриманова структура, для которой поля X_1, X_2 являются ортонормированным базисом. Субримановы геодезические суть решения задачи оптимального управления

$$\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q \in M, \quad (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,\\
&q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,\\
&\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .
\end{aligned}$$

С помощью принципа максимума Понтрягина геодезические параметризуются эллиптическими функциями. Задача имеет двумерную группу непрерывных симметрий и дискретную группу симметрий порядка четыре. Малые дуги геодезических оптимальны, но большие дуги могут терять оптимальность из-за пересечения геодезических равной длины (точки Максвелла) или наличия огибающей семейства геодезических (сопряженные точки). Исследована структура множества Максвелла, а также локальная структура множества сопряженных точек (каустики) вблизи анормальных геодезических.

Bohr radii of elliptic domains

Sadik N. (Istanbul University, Turkey)

This is joint work with H. Turgay Kaptanoglu. We use Faber series to define a Bohr radius for simply connected planar domains bounded by an analytic Jordan curve,and estimate the value of this radius for elliptic domains of small eccentricity.We obtain the classical Bohr radius when the eccentricity is 0.

Diffusion in a formally integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom

Sadov S. Yu. (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia)

We study an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom and the following properties:

1. It is a small perturbation of an integrable system;
2. There exists a formal integral (a formal series in powers of ϵ) [1];
3. Numerical experiments suggest a possibility of diffusion [2].

The system is a symplectic reduction of a Hamiltonian system, which can be viewed as a Hamiltonian union of the 1D unharmonic oscillator and its system in variations [2], in 5-dimensional phase space with a degenerate Poisson bracket. The latter system also appears [3] as a truncation of an infinite-dimensional system, which describes evolution of quantum fluctiations and is formally equivalent to the Schrödinger equation with unharmonic potential.

This is a joint work with M.F.Kondratieva (Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada).

References

[1] Sadov S. Yu.// Math. Notes 56 (1994), 960–970.

[2] Kondratieva M. F., Sadov S. Yu.// Proc. 4th ISAAC Congress (Toronto, 2003), Kluwer Acad. Publ., 2004.

[3] Belov V. V., Kondratieva M. F. // Math. Notes 56 (1994), 1228–1236.

О равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением

Садовничая И. В. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \tag{2}$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с граничными условиями Дирихле. Предполагается, что потенциал $q(x)$ является распределением первого порядка сингулярности, т.е. $q(x) \in W_2^{-1}$ или, что то же самое, $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2[0,\pi]$ (производная здесь понимается в смысле распределений). Изучается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимости разложения в ряд по системе собственных и присоединенных функций опрератора L с разложением в ряд Фурье по системе синусов.

Теорема 1.(см. [1]) *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ — оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in W_2^{\theta}[0,\pi]$, $0 \le \theta < 1/2$.*

Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $W_2^{-\theta}[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} \left| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} c_{n,0} \sin nx \right| = 0. \tag{3}$$

Здесь $c_n = (f(x), \overline{y_n}(x))$, $c_{n,0} = \frac{2}{\pi}(f(x), \sin nx)$, $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированная система собственных и присоединенных функций оператора L.

Теорема 2. *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ — оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, $u(x)$ удовлетворяет условию Колмогорова–Силеверстова и Плесснера и* *условию*

$$\sup_{x\in[0,\pi]} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \frac{\left|\varphi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\varphi_x(t)\right|}{t}dt < C, \qquad (4)$$

где C не зависит от n, а $\varphi_x(t) = \frac{1}{2}(u(x+t)+u(x-t)-2u(x))$. Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $L_1[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость (3).

Условию (4) удовлетворяют, например, следующие классы функций

1) Функции с интегральным модулем непрерывности $\omega_1(1/n;u)$ порядка $O(1/n)$ (в частности, все функции ограниченной вариации)

2) Функции с модулем непрерывности $\omega(1/n,u)$ порядка $O(1/\ln n)$.

Литература

[1] Садовничая И.В. *О равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением* ДАН, 2003, Т. 392, №2, С. 170–173.

О линейных функционалах на алгебре линейных ограниченных операторов, определяемых решениями задачи Коши для вырождающегося уравнения Шредингера

Сакбаев В. Ж. (МФТИ)

Исследуется последовательность задач Коши для уравнения Шредингера с операторами, вырождающимися на полупрямой, которая аппроксимирует задачу Коши для уравнения Шредингера с вырожденным оператором переменного типа.

Установлена слабая сходимость последовательности решений u_n задач Коши и определены необходимые и достаточные условия сильной сходимости $\{u_n\}$. В случае нарушения условий сильной сходимости становится нетривиальным и актуальным вопрос о сходимости последовательности линейных функционалов на некоторой подалгебре $\mathcal{B}_1$ банаховой алгебры $\mathcal{B}$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R)$, задаваемых решениями задач Коши по правилу:

$$\{(u_n, \mathbf{A}u_n)\},\ \mathbf{A} \in \mathcal{B}_1, \qquad \mathbf{A} \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Theorem. *Сходимость всех последовательностей* $\{(u_n, \mathbf{A}u_n)\}$ *при любом* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$ *возможна тогда и только тогда, когда существует такая последовательность чисел* θ_n, $|\theta_n| = 1$, *что последовательность* $\{\theta_n u_n\}$ *сходится по норме.*

2. Для абелевой алгебры операторов $\mathcal{B}_x$*, унитарно эквивалентных операторам умножения на непрерывную на прямой* R *функцию с конечными пределами на бесконечности, установлено существования такой подпоследовательности* $\{u_{n_k}\}$*, что для любого оператора* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_x$ *последовательность* $\{(u_{n_k}, \mathbf{A}u_{n_k})\}$ *сходится.*

3. Для любого оператора $\mathbf{A} \in \mathcal{C}_\infty$ *последовательность (1) сходится, где* $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{B}$ *— кольцо компактных операторов.*

Inverse spectral problems, Baecklund-Darboux transformation and second harmonic generation

Sakhnovich A. (Branch of Hydroacoustics, NASU)

The second harmonic generation is an important nonlinear equation, the integrability of which was proved by D. Kaup in 1978. The difficulty of solving it was connected, in particular, with the asymptotics of the solutions as these solutions don't have to tend to zero at infinity. We shall use the evolution of the Weyl functions to solve this problem.

A solution of the inverse problem (in terms of the Weyl function) for the Dirac type system is given. The Goursat problem on the semistrip for the second harmonic generation is solved. Explicit solutions (and their Weyl functions) are constructed also.

Нормальная форма слабо вырожденных автономных систем

Самовол В. С. (Государственный университет–Высшая школа экономики. Москва)

Рассматривается задача локальной конечно-гладкой приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особой точки. Речь идет о системах, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Исследуется вид нормальной формы таких систем. Устанавливаются условия конечно-гладкой приводимости к нормальной форме. Выявляются препятствия гладкой нормализации указанных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00426).

Complexification phenomena in singular perturbations and application to shells

E. Sanchez-Palencia (Laboratoire de Modélisation en Mécanique. Université Pierre et Marie Curie)

We consider a type of singular perturbation problems depending on a parameter ε which are classical for $\epsilon > 0$ but highly ill-posed for $\varepsilon = 0$. The ill-posedness comes from the fact that the limit problem $\varepsilon = 0$ is elliptic but the boundary conditions do not satisfy the Shapiro - Lopatinskii condition. In addition, the "applied force"f belongs to the dual of the "energy space"only for $\varepsilon > 0$, not for $\varepsilon = 0$. Specifically, the domain is taken to be the strip $\mathbb{R} \times (0, 1)$ and the "singular boundary"is $x_2 = 1$. We take advantage of the geometry for solving the problem via Fourier transform in the longitudinal direction ($x_1 \Rightarrow \xi$) so that the problem becomes a singular perturbation for ordinary differential equations with parameter ξ. It then appears that the limit problem has a solution with Fourier transform that grows exponentially for $|\xi|$ tending to infinity,so that the inverse Fourier transform is not a distribution, but an analytic functional of the Z' space. Specifically, the solution is "very singular"and may be described by the sum of a series of terms containing derivatives of any order of the Dirac's mass, which is not of finite order at the origin. The sequence of solutions as ε tends to zero becomes more and more entangled in the vicinity of the origin. In addition, the corresponding "boundary layer"does not have a specific "profile", as it becomes more and more complicated as ε decreases. Nevertheless, this process takes place very slowly with respect to ε; the genuine parameter is $log\varepsilon$. This kind of phenomena appear in thin shell theory when the middle surface is elliptic (i. e. the principal curvatures have same sign) and the shell is fixed by a part of the boundary and free by the rest.

Осреднение некоторых вариационных неравенств

Сандраков Г. В. (Киевский политехнический институт)

Предпологается рассмотреть вопросы осреднения вариационных неравенств для задач с препятствиями, определяющими одностороннее ограничение на решение. Такие вариационные неравенства определяются нелинейным строго монотонным оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами и последовательностью функций, характеризующими такие препятствия. Будут приведены двухмасштабное и макромасштабное (осредненное) предельные вариационные неравенства и сформулированы утверждения о сходимости решений рассмотренных вариационных неравенств. Предпологается представить методы вывода таких предельных вариационных неравенств, использующие методы монотонности и двухмасштабной сходимости. Для потенциальных операторов будет установлена связь полученных предельных вариационных неравенств с двухмасштабными и макромасштабными задачами минимизации с односторонними ограничениями на решения.

Nonouthonom perturbations of the Lorenz system does not lead to existence of stable trajectories

Sataev E. A. (Obninsk State University of Nuclear Power Engineering)

Theorem. Let $\dot{x} = X(x)$ be the Lorenz like system. Then the system $\dot{x} = X(x) + h(x,t)$ where $h(x,t)$ is sufficiently small (in C^1-topology with bounded second derivatives) has no stable solutions.

The proof is based on the modification of the definition of hyperbolic system for flowes. System satisfying this property is called $(*)$-hyperbolic system. The definition of $(*)$-hyperbolic system is equivalent to the hyperbolicity of the first return mapping for the Lorenz like system, is equivalent to the classical definition of the hyperbolic system for the case of flow with locally-maximal invariant set without fixed point. The property of system to be $(*)$-hyperbolic is stable under above perturbations. Finally we prove that $(*)$-hyperbolic nonautonomic system has no stable solutions.

Обратная задача Штурма–Лиувилля для операторов с потенциалами — распределениями (восстановление по двум спектрам)

Савчук А. М. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

Пусть $q(x)$ — вещественнозначная функция класса $W_2^{-1}[0,\pi]$, а $\sigma(x) \in L_2[0,\pi]$ — любая ее вещественнозначная первообразная, т.е. $\sigma'(x) = q(x)$, где производная понимается в смысле теории распределений. Рассмотрим оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y^{[1]}(\pi) = hy(\pi). \tag{2}$$

Здесь $y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x)$ — первая квазипроизводная функции $y(x)$, а h — фиксированное действительное число или $h = \infty$. В последнем случае краевые условия принимают вид $y(0) = y(\pi) = 0$. Существует несколько различных способов, позволяющих связать с выражением (1) и условиями (2) самосопряженный оператор $L_{\sigma,h}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$,приводящих к одному результату (см. [2]).

Мы предложим метод решения обратной задачи Штурма–Лиувилля восстановления сингулярного потенциала $q(x) \in W_2^{-1}[0,\pi]$ по двум спектрам, отвечающим задачам Дирихле–Неймана (краевые условия $y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$) и задаче Дирихле (краевые условия $y(0) = y(\pi) = 0$). При этом мы укажем алгоритм, позволяющий решать данную обратную задачу численно, а также найдем взаимно однозначное соответствие между классами гладкости потенциала $q(x) \in W_2^{\theta}[0,\pi]$, $\theta \in [-1,1]$ и асимптотикой собственных значений двух данных краевых задач. Отличительной особенностью данного метода является то, что он позволяет решать поставленную задачу напрямую, не сводя ее к задаче восстановления потенциала по спектру и нормировочным числам (данная обратная задача была решена для потенциалов – распределений в работе [3]).

Доклад основан на совместной работе с А.А.Шкаликовым. Работа поддержана грантом РФФИ № 04-01-00712 и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-1927.2003.1.

Литература

[1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*// Матем. заметки, Т. 66. №6. 1999. С. 897–912.

[2] Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями* // Труды Моск. Мат. Общества, Т. 64, 2003.

[3] Hriniv R., Mykytyuk Ya. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials*// submitted to Communications on Pure and Appl. Math.

The genuinely nonlinear non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equation

Sergei Sazhenkov (Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk)

The talk is devoted to the nonlinear degenerate parabolic-hyperbolic equation

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u) - \mathrm{div}_x(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\nabla_x b(u)) = 0,$$

where u: $\mathbf{R}_x^d \times (0,T) \mapsto \mathbf{R}$ is the unknown function; $\mathbf{a}$: $\mathbf{R}_x^d \times [0,T] \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^d$ is the given flux, $\mathbf{a} \in C^1_{loc}(\mathbf{R}^d \times [0,T] \times \mathbf{R})$; b: $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ is the given smooth nondecreasing diffusion function, and $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}_x^d \times [0,T] \mapsto \mathbf{R}^{d\times d}$ is the given smooth symmetric nonnegative diffusion matrix. The rank of matrix $\mathbf{A}$ in general may vary in $\mathbf{x}$ and t. It is supposed that the equation is genuinely nonlinear, i.e. that the Lebesgue measure of the intersection of the sets

$$\{(\mathbf{x}, t, \lambda) \,|\, b'(\lambda)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 0\}$$

and

$$\{(\mathbf{x}, t, \lambda) \,|\, \tau + \big(\mathbf{a}'_\lambda(\mathbf{x}, t, \lambda) - b'(\lambda)\mathrm{div}_x \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\big) \cdot \mathbf{y} = 0\}$$

is equal to zero for any $(\mathbf{y}, \tau) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ such that $|\mathbf{y}|^2 + \tau^2 = 1$. Under this condition, it is proved that any bounded in L^∞ set of entropy solutions of the equation is relatively compact in L^1_{loc}. The proof is based on the Chen–Perthame-type kinetic formulation of the equation and on Panov's theorem on a version of Tartar H-measures.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no 03-01-00829).

A Richardson-type Iterative Approach for Identification of Delamination Boundaries

E. Schnack, T.-A. Langhoff, S. Dimitrov (Department of Solid Mechanics, Karlsruhe University, Kaiserstr, Germany)

In this contribution we report a novel method which avoids the ill-posedness of the inverse problem furnished by a second order elliptical system. It falls in the same conceptual line with the method originated by KOZLOV *et al.* [1] and extended by WEIKL *et al.* [2]. Consider a (layered) solid body Ω in a 3-dimensional Euclidean placement. Let the smooth boundary Γ of Ω be subdivided into two parts: Γ_u with prescribed displacements and Γ_t with prescribed tractions. When new (delamination) surfaces start to develop in the solid body, then the displacement and traction fields on those surfaces are usually unknown and their identification concerns the solution of the respective inverse problem. In order to obtain the solution we observe first, that the unknown displacement field should minimize the virtual work of internal forces and tractions on Γ_t and second, that the unknown tractions should minimize the complementary work done by displacements in the body and on the displacements boundary Γ_u. Hence, prescribing (in alternating fashion) the initial approximation for tractions on Γ_u and performing minimization of the virtual work, we provide an initial approximation for the displacements on Γ_t necessary for minimization of the complementary virtual work. This procedure, when employed iteratively, leads to a RICHARDSON-type approach for the solution of the delamination inverse problem. More detailed analysis of the convergency and regularization properties of this approach is provided in the forthcoming text. At the end of the paper we discuss a representative practical illustration related to identification of delamination surfaces in CFRP-laminate composites.

References

[1] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and A. V. Fomin, *An iterative method for solving the* CAUCHY *problem for elliptic equations*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **31**(1), (1991), 45-52.

[2] W. Weikl, H. Andrä and E. Schnack, *An alternating iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional solid body*, Inverse problems, **17**(6), (2001), 1957-1975.

О топологии множества симметрий гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^k$

В.Д. Седых (Российский ун-т нефти и газа им. Губкина, Москва)

Рассматривается множество симметрий гладкого подмногообразия общего положения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, а также различные его подмножества – конфликтные множества и множества средних точек. Особенности этих множеств подчиняются различным топологическим условиям сосуществования. Например, изолированные особенности и особенности, встречающиеся на кривых, определяют граф. Если этот граф конечен, то имеет место соотношение инцидентности: сумма локальных степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер (при подсчете локальной степени вершины графа, петли, инцидентные этой вершине, считаются дважды). Мы находим многомерные обобщения этого соотношения для указанных выше множеств в случае, когда они имеют лишь устойчивые особенности коранга 1.

Базисность корневых векторов дифференциального пучка операторов $N - \lambda P$ с краевыми условиями, зависящими от λ

Сенцов Ю. Г. (МГУ)

В серии работ А.А. Шкаликова и К. Треттер были получена теорема о базисности Рисса собственных и присоединенных функций пучка операторов $N - \lambda P$, где N, P - дифференциальные операторы порядков n и p ($n > p$) с постоянными старшими коэффициентами, в предположении регулярности соответствующей спектральной задачи. Мы предлагаем другой подход к решению задач о полноте и базисности собственных функций в более общей ситуации, когда краевые условия зависят от λ линейно. Отметим, что зависимость краевых условий от спектрального параметра часто встречается в конкретных задачах. Более того, даже если в прямой задаче зависимости от λ краевых условий нет, то она может появиться при переходе к сопряженной задаче.

L^2 -properties of solutions and ranges of radii of matrix limit-circles of non-self-adjoint systems of differential equations

Serebryakov V. P. (Moscow M. V. Lomonosov State University)

We consider a non-self-adjoint system of differential equations

$$-(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = \lambda y(x) \qquad (0 \le x < \infty) \qquad (1)$$

where $y(x)$ is desired n-component vector-function, $P(x)$ and $Q(x)$ are given matrices of order n , elements of which are complex-valued functions of x , at that elements of $\{P(x)\}^{-1}$ and $Q(x)$ belong to $L^1_{loc}([0,\infty))$, $R_1(x) := -\mathrm{Im}\,\{e^{-i\alpha}P(x)\} \ge 0$, $R_2(x) := -\mathrm{Im}\,\{e^{-i\alpha}Q(x)\} \ge 0$ for some real α, λ is a complex number, $\mathrm{Im}\,(\lambda e^{-i\alpha}) > 0$. Let $\theta(x)$ and $\varphi(x)$ be solutions of corresponding to (1) matrix differential equation, satisfying to initial conditions $\theta(0) = e^{-i\alpha/2}I_n$, $(P\theta')(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $(P\varphi')(0) = e^{i\alpha/2} \cdot I_n$ (I_n is a unit matrix of order n). As it is known, a set of matrices w of order n, at those for a solution $\psi(x) = \theta(x) + \varphi(x)w$ of the matrix equation, the following inequality holds: $\int_0^\infty (\psi^{*\prime} R_1 \psi' + \psi^* R_2 \psi)dx \le \mathrm{Im}\, w$, is a matrix circle $K = \{w : \ w = w^{(0)} + r_1^{1/2} z\, r_2^{1/2} \ , \ z^* z \le I_n\}$, where r_1 and r_2 are non-negative Hermitian matrices of order n called left and right radii of the circle K . Let $\rho_1 = rank\, r_1$, $\rho_2 = rank\, r_2$, m and m^* are numbers of linearly independent solutions y from $L^2_n([0,\infty))$ for the system (1) and for the adjoint to it, respectively. In case of a self-adjoint system analogous to (1) $n+\rho_1$ and $n+\rho_2$ coincide with deficiency indices of minimal closed symmetric operator generated in $L^2_n([0,\infty))$ by l.h.s. of (1), i.e. $m = n+\rho_1$, $m^* = n+\rho_2$. In the initial case, $m \ge n+\rho_1$, $m^* \ge n+\rho_2$. In the report, the conditions at which

$m = m^* = n$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = n$, $m > \max\{n + \rho_1, n + \rho_2\}$ will be presented.

Boundary Partial Regularity for the Navier-Stokes Equations

Seregin G., Shilkin T., Solonnikov V. (V.A.Steklov Mathematical Institute, St.-Petersburg)

We prove a condition of local Hölder continuity for suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations near the curved smooth part of the boundary of a domain. This condition has the form of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg condition for the local boundedness of suitable weak solutions at the interior points of the space-time cylinder. The corresponding result near the plane part of the boundary was established earlier by G. Seregin.

Нетривиальные решения некоммутативных уравнений Зайберга–Виттена на $\boldsymbol{R}^4_\theta$

Сергеев А. Г. (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва)

Рассматривается некоммутативная версия уравнений Зайберга–Виттена на некоммутативной деформации $\mathbf{R}^4_\theta$ 4-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^4$.

Хорошо известно, что обычные уравнения Зайберга–Виттена на $\mathbf{R}^4$ не допускают нетривиальных решений с конечным действием. Однако, это уже неверно для их некоммутативного варианта. Более подробно, мы рассматриваем некоммутативную версию уравнений Зайберга–Виттена на некоммутативной деформации $\mathbf{R}^4_\theta$ пространства $\mathbf{R}^4$, задаваемую некоммутативным функционалом действия Зайберга–Виттена. Эти некоммутативные уравнения обладают гладкими решениями с конечным действием и ненулевым топологическим зарядом. Они строятся явно и интерпретируются как решения типа вихрей.

О нижних характеристических показателях Перрона линейных систем

Сергеев И. Н. (МГУ)

Определим *показатели Перрона* линейной *системы* $\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbf{R}^n$, с ограниченными кусочно непрерывными коэффициентами (множество таких систем с равномерной топологией обозначим через $\mathcal{M}_n$) с помощью формул

$$\pi_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{L\in G_i} \sup_{x(0)\in L\setminus\{0\}} \underline{\chi}(x), \quad \pi_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{L\in G_{n-i+1}} \inf_{x(0)\in L\setminus\{0\}} \underline{\chi}(x),$$

где $i = 1,\ldots,n$, $\underline{\chi}(x) \equiv \varliminf\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|x(t)|$ — нижний показатель решения x системы A, а G_i — множество i-мерных подпространств $L \subset \mathbf{R}^n$. Множество всевозможных нижних (в отличие от верхних) показателей решений диагональной системы $A \in \mathcal{M}_n$ может содержать до $2^n - 1$ чисел [1], а недиагональной — даже иметь мощность континуума [2].

Теорема 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ справедливы соотношения*

$$\pi_{\bar{i}}(A) = \pi_{\underline{i}}(A) \equiv \pi_i(A), \quad i = 1, n, \qquad \pi_{\bar{i}}(A) \geq \pi_{\underline{i}}(A), \quad i = 2,\ldots,n-1,$$

которые для диагональной системы A обращаются в равенства.

Существует ли система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой хотя бы одно из перечисленных в теореме неравенств — строгое?

Теорема 2. [3, 4] *Для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ справедливы равенства*

$$\varlimsup_{B\to A} \pi_n(B) = \lim_{T\to\infty} \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \ln\|X_A(t,0)\| = \sup_{B\in\mathcal{B}(A)} \pi_n(B),$$
$$\varliminf_{B\to A} \pi_1(B) = \lim_{T\to\infty} \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \ln\|X_A(t,0)^{-1}\|^{-1} = \inf_{B\in\mathcal{B}(A)} \pi_1(B),$$

где обозначено $\mathcal{B}(A) \equiv \{B \in \mathcal{M}_n |\ B(t) - A(t) \to 0,\ t \to \infty\}$.

Какими формулами задаются остальные верхние и нижние границы подвижности показателей Перрона?

Литература

[1] Н. А. Изобов, *О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы*, Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 4, С. 469-477.

[2] Е. А. Барабанов, *Строение множества нижних показателей линейных дифференциальных систем*, Дифференц. уравнения, 1989, **25**, № 12, С. 1084-1085.

[3] В. М. Миллионщиков, *Доказательство достижимости центральных показателей*, Сибирский матем. журнал, 1969, **10**, № 1, С. 99-104.

[4] И. Н. Сергеев, *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений*, Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, С. 111-166.

Geometric and spectral properties of Calogero–Strocchi systems

Shafarevich A. I. (MSU)

Let $H(x,p)$ be a polynomial in R^2; the corresponding Hamiltonian system is integrable with trajectories coinciding with the level lines of H. If certain connected component Λ of such a line is compact, one can associate to this line a semiclassical spectral series of the corresponding Weyl operator $H(x,-ih\partial/\partial x)$; the asymptotic as $h \to 0$ eigenvalues can be computed from the Bohr-Sommerfeld equations

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\Lambda} pdx = n + \frac{1}{4}\mu(\Lambda), \quad n \in Z,$$

where μ denotes the Maslov index.

Now consider the complex polynomial H in C^2; the real and imaginary parts of H form a pair of integrable Hamiltonian systems in R^4 (Calogero – Strocchi systems). However the corresponding invariant surfaces are not compact and their topology differ from that prescribed by the Liouville theorem. The corresponding quantum systems also possess curious properties; in particular, Bohr-Sommerfeld conditions form an overdetermined system.

We study behavior of trajectories and construct semi-classical spectral series for such systems. These series are associated with Riemann surfaces and form a point but not a discrete set.

О некоторых свойствах эффективного фронта инвестиционного портфеля и связанные с ними спектральные задачи

Шамаев А. С. (МГУ)

В работе вводиться понятие, аналогичное понятию эффективного фронта инвестиционного портфеля в известной задаче Марковица, в случае, когда цены на активы, входящие в портфель, заданы системой стохастических дифференциальных уравнений. Изучены некоторые свойства такого аналога эффективного фронта и установлена связь с альтернативой Фредгольма для операторов, заданных в неограниченных областях в классах полиномиально растущих функций, а также с существованием решений матричного алгебраического уравнения Риккати. Показано, что в ряде случаев возможно построить фронт только с помощью операций линейной алгебры над матрицами и векторами, входящими в исходную систему стохастических дифференциальных уравнений, задающей цены на активы, входящие в портфель.

Представляемые результаты получены совместно с А.Л. Пятницким.

Мера Пуассона–Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака

Шамаров Н. Н. (Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова)

Метод, использованный В. П. Масловым для представления решения (начальной задачи для) уравнения Шредингера и допускающий применение к уравнению Дирака, включает в качестве основного шага построение такой цилиндрической счётно-аддитивной меры (являющейся аналогом пуассоновского распределения) на некотором пространстве функций (=траекторий в импульсном пространстве), преобразование Фурье которой совпадает с множителем в формуле для представления решения уравнения Шредингера интегралом по цилиндрической (псевдо-) мере Фейнмана (в пространстве траекторий в конфигурационном пространстве классической системы); с другой стороны, в формуле

Маслова для решения уравнения Шредингера экспоненциальный множитель является (с точностью до сдвига) преобразованием Фурье псевдомеры Фейнмана. В случае уравнения Дирака исторически первыми появились формулы для импульсного представления, использующие счётно-аддитивные функциональные распределения типа меры Пуассона–Маслова, но с некоммутирующими (матричными) значениями. В докладе строятся обобщённые меры, преобразование Фурье которых совпадает с аналогом экспоненциального подынтегрального множителя в формуле типа Маслова для уравнения Дирака, и интегралы по которым дают решения (задачи Коши для) этого уравнения в конфигурационном пространстве.

О пространствах начальных данных для абстрактных параболических уравнений

Шамин Р. В. (Московский авиационный институт)

Под пространством начальных данных для параболических уравнений понимается множество начальных функций, при которых задача имеет сильное решение.

Выделен широкий класс коэрцитивных операторов, для которого можно конструктивно указать пространство начальных, и получить необходимые и достаточные условия существования сильных решений.

Этот класс включает в себя многие интересные операторы, которые имеют разнообразные приложения.

Медленные Интегральные Многообразия Со Сменой Устойчивости В Химических Системах

Щепакина Е. А. (Самарский Государственный Университет)

Работа посвящена изучению химических систем, моделируемых сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями. Анализ основан на качественной теории сингулярно возмущенных систем, техники траекторий–уток и интегральных поверхностей со сменой устойчивости.

В большинстве работ, посвященных траекториям–уткам, термин "утка"ассоциируется с периодическими траекториями. В настоящей работе под траекторией–уткой понимается траектория сингулярно возмущенной системы, если она следует сначала вдоль устойчивого медленного интегрального многообразия системы, а затем вдоль неустойчивого. Причем в обоих случаях проходятся расстояния порядка единицы. Следует отметить, что траектория–утка может быть рассмотрена как результат склеивания устойчивого (притягивающего) и неустойчивого (отталкивающего) медленных интегральных многообразий в одной точке поверхности срыва. Такое склеивание возможно благодаря наличию дополнительного скалярного параметра дифференциальной системы. Если брать дополнительную функцию, аргументом которой является векторная переменная, параметризующая поверхность срыва, то можно склеить устойчивое (притягивающее) и неустойчивое (отталкивающее) медленные интегральные многообразия во всех точках поверхности срыва одновременно. В результате этого мы получим непрерывную интегральную поверхность со сменой устойчивости. Такие поверхности рассматриваются как многомерный аналог понятия траектории–утки. Склеивающую функцию можно рассматривать как специальный тип управления с частичной обратной связью. Такой подход гарантирует безопасность химического режима, даже с учетом возмущений, возникающих во время химического процесса.

Задача распространения и взаимодействия фронтов δ-ударных волн

Шелкович В. М. (Санкт-Петербургский Архитектурно-Строительный Университет)

Для нескольких классов гиперболических систем законов сохранения (в одномерном и многомерном случаях) решается задача распространения и взаимодействия фронтов *δ-ударных волн.* Дано аналитическое описание динамики слияния двух δ-ударных волн в одну. Впервые построены решения типа δ-ударной волны для известной системы Хейфитц–Кранцера $u_t + (u^2 - v)_x = 0$,

$v_t + (\frac{1}{3}u^3 - u)_x = 0$, а также для многомерной системы газовой динамики без давления в *неконсервативной* форме $\rho_t + \nabla \cdot (\rho U) = 0$, $U_t + (U \cdot \nabla) U = 0$. Для решения перечисленных задач используется техника *метода слабых асимптотик* [1]–[4]. Дается геометрическая и физическая интерпретация условий Ренкина-Гюгонио для δ-ударных волн.

Литература

[1] V. G. Danilov, G. A. Omel′yanov, V. M. Shelkovich, *Weak Asymptotics Method and Interaction of Nonlinear Waves*, in Mikhail Karasev (ed.), "Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems", Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **208**, 2003, 33-165.

[2] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, *Propagation and interaction of delta-shock waves of a hyperbolic system of conservation laws*, In Hou, Thomas Y.; Tadmor, Eitan (Eds.), Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Springer Verlag, 2003, 483–492.

[3] В. Г. Данилов, В. М. Шелкович, *Распространение и взаимодействие δ-ударных волн гиперболических систем законов сохранения*, ДРАН, **394**, no. 1, (2004), 10–14.

[4] V. M. Shelkovich, *Delta-shock waves of a class of hyperbolic systems of conservation laws*, in A. Abramian, S. Vakulenko, V. Volpert (Eds.), "Patterns and Waves", St. Petersburg, 2003, 155–168.

Randomly forced CGL equation: stationary measures and the inviscid limit

Shirikyan A. (University of Paris-Sud XI)

We study a complex Ginzburg–Landau (CGL) equation perturbed by a random force which is white in time and smooth in the space variable x. Assuming that $\dim x \leq 4$, we prove that this equation has a unique solution and discuss its large-time asymptotics. Next we consider the case when the random force is proportional to the square root of the viscosity and study the behaviour of stationary solutions as the viscosity goes to zero. We show that, under this limit, a subsequence of solutions in question converges to a nontrivial stationary process formed by global strong solutions of the nonlinear

Schrödinger equation. The results of this talked are obtained in collaboration with S. Kuksin.

Регулярность и описание диссипативных дифференциальных операторов

Ширяев Е.А. (Московский Государственный Университет)

Исследуется регулярность дифференциальных операторов, порождённых дифференциальным выражением $l_0(y) = (-i)^n y^{(n)}$ и диссипативными краевыми условиями. Получены описания диссипативных краевых условий для выражения $l_0(y)$ и исследована их связь с самосопряжёнными краевыми условиями.

Работа поддержана грантами РФФИ 04-01-00712 и ведущих научных школ НШ-1927.2003.1.

О центральном показателе неограниченных систем

Ширяев К. Е. (Кострома)

Для линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений определяется старший показатель Ляпунова, как точное верхняя грань множества показателей всех решений ([1] стр. 130), а также центральный показатель ([1] стр. 127).

Для ограниченных систем старший показатель Ляпунова не превосходит центральный ([1] стр. 131).

Утверждение 1. Существуют одномерные неограниченные линейные системы для которых старший показатель Ляпунова строго больше центрального.

Утверждение 2. Центральный показатель одномерной неограниченной системы непрерывен как функция правой части в топологии равномерной сходимости.

Известно, что для ограниченных линейных систем произвольной размерности центральный показатель полунепрерывен в топологии равномерной сходимости ([1] стр. 142).

Утверждение 3. Для множества неограниченных линейных систем, наделенная топологией равномерной сходимости, центральный показатель не является полунепрерывной сверху функцией.

Литература

[1] Былов Б. Ф. и др. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости.*

Propagation of support in multidimensional convected thin-film flow

A.E. Shishkov (Donetsk, Ukraine)

We study the fourth order degenerate quasilinear parabolic equation

$$u_t + \operatorname{div}\left(|u|^n \nabla\Delta u - |u|^m \nabla u + \overrightarrow{\chi} b(u)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{R}^1_+,\ m > -1,\ \overrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^N$$

in the space dimension $N \leq 3$ with $b(s) \leq c|s|^\lambda$, $\forall s \in \mathbb{R}^1$, $c = \text{const} < \infty$, $\lambda > 0$. We prove existence of nonnegative generalized strong (with zero contact-angle) solution of Neumann problem in bounded domain Ω with nonnegative initial function $u_0 \in H^1(\Omega)$. For $n < 2,\ m > 0,\ \lambda > 1$ we prove finite speed propagation of this solution's support property. Using this property, we construct global strong solution of the Cauchy problem for arbitrary $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ with compact support under natural restrictions from above on the λ, and provide in some sense sharp upper estimates of the speed of propagation of solution's support. In the case when additionally the estimate $b(s) \geq c_0 s^\lambda \quad \forall s \in \mathbb{R}^1_+,\ c_0 > 0$, is satisfied, we define "fast" and "slowly" interfaces of solution's support boundary and find upper estimates of both these interfaces for small and large t.

О задаче Коши для нелинейного уравнения типа Соболева

Шишмарёв И. А. (Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова)

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения соболевского типа со степенной нелинейностью. Это уравнение является многомерным обобщением уравнения Буссинеска. Оно встречается, например, в задаче о фильтрации жидкости через пористую среду с трещинами и в теории потенциала в кристаллических полупроводниках (см. [1], [2]). Изучен вопрос о глобальном во времени существовании классического и слабого обобщенного решения задачи Коши. Построена асимптотика решения при больших временах. Найден главный член асимптотики и дана оценка остатка в равномерной метрике. Использован метод, развитый в работах [3], [4].

Литература

[1] Кожанов А.И. Мат. заметки, 1999, т.65,№ 1, с. 70 - 75.

[2] Корпусов М.О, Свешников А.Г. ЖВМ и МФ, 2003, т. 43, № 12 , с. 1835-1869.

[3] Шишмарёв И.А. ДАН., 1999, т. 365, № 4, с. 461-464.

[4] Mochizuki K, Shishmarev I.A. Funkcialaj Ekvacioj , 2001, v. 44, p. 99-117.

Invariant subspace problem for operators in spaces with indefinite metric

Shkalikov A. A. (Moscow State University)

The first fundamental result on the existence of maximal semi-definite invariant subspaces for self-adjoint operators in spaces equipped with indefinite scalar product was obtained by L. S. Pontrjagin in 1944. It turned out that results of this kind have played the key role in the operator theory in spaces with indefinite metric. Tha main developments in this area were carried out by M. G. Krein, H. Langer and T. Ja. Azizov. We present a generalization of Pontrjagin–Krein–Langer–Azizov theorem and explain its connections with other nontrivial problems of operator theory.

Rank one perturbation at infinite coupling in Pontryagin spaces

Shondin Yu. G. (Nizhny Novgorod Pedagogical State University)

It is known that each function $N(z) \in \mathcal{N}_\kappa$ ($\mathcal{N}_\kappa$ denotes the class of generalized Nevanlinna functions with κ negative squares) is a Q-function associated with a symmetric operator S in some Pontryagin space Π_κ and a s.a. (self-adjoint) extension A of S in Π_κ, which are uniquely determined up to unitary equivalence if a minimality condition is assumed. In this situation we write $N(z) \sim S, A$ in Π_κ.

Following [1] we relate the operators in the minimal operator representations of a generalized Nevanlinna function $N(z)$ and of the function $-N(z)^{-1}$ under the assumption that $z = \infty$ is the only (generalized) pole of non-positive type. The results are applied to the Q-function of S and H and the Q-function for S and H^∞, where H is a s.a. operator in a Pontryagin space with a cyclic element w, H^∞ is the s.a. relation obtained from H and w via the rank one perturbation $H + \alpha\langle\,\cdot\,, w\rangle w$, $\alpha \in \mathbb{R}$ at infinite coupling $\alpha \to \infty$, and $S = H \cap H^\infty$. It turns out that the Q-functions $Q(z) \sim S, H$ and $Q^\infty(z) \sim S, H^\infty$ in Π_κ, where S is the symmetric operator $S = H \cap H^\infty$, satisfy the relation $Q^\infty(z) = -Q(z)^{-1}$.

References

[1] A. Dijksma, H. Langer, and Yu. Shondin, *Rank one perturbations at infinite coupling in Pontryagin spaces*, J. Funct. Anal. **209** (2004) 206–246.

New results on spectra of Schrödinger operators

Mikhail Shubin (Northeastern University, USA)

Recent results on spectra of Schrödinger operators will be reviewed and explained.

Consider the Schrödinger operator $H_V = -\Delta + V(x)$ with $V \geq 0$ in an arbitrary open set $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ with the Dirichlet boundary conditions on $\partial\Omega$. New necessary and sufficient conditions of the strict positivity and the discreteness of spectrum for H_V were recently obtained by V. Maz'ya and M. Shubin. Like in the well known result of A. M. Molchanov (1953) about the discreteness of spectrum, the corresponding conditions are formulated in terms of the Wiener capacity. Molchanov's criterion for the disreteness of spectrum in case $\Omega = \mathbf{R}^n$ can be formulated as the condition that average values of V in closed balls B_r of any fixed radius $r > 0$ should go to infinity as the balls B_r go to infinity, if we ignore *negligible* subsets of the balls B_r. Here negligibility of a compact set $F \subset B_r$ means that $\operatorname{cap} F \leq \gamma \operatorname{cap} B_r$, where $\gamma = \gamma_n > 0$ is sufficiently small. In 1953

I.M.Gelfand asked what is the best possible (maximal) γ for this criterion. We answer this question by proving that any $\gamma \in (0,1)$ will do. It follows that the conditions with different $\gamma \in (0,1)$ are equivalent, so that the sets $F \subset B_r$ can be considered negligible if they occupy at most 99% of the capacity of the ball B_r, or, alrernatively, at most 1% of this capacity. This equivalence is a new non-trivial property of capacity.

In case $V \equiv 0$, the strict positivity and discreteness of spectrum criteria for $-\Delta$ in $L^2(\Omega)$ are formulated in terms of the interior capacitary diameter, which is a geometric characteristic of Ω, depending upon the negligibility constant γ above.

Recent results by V. Kondratiev, V. Maz'ya and M. Shubin contain criteria of strict positivity and discreteness of spectrum for magnetic Schrödinger operators.

О собственных значениях дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями

Сильченко Ю. Т. (Воронежский государственный университет)

Рассматривается линейное дифференциальное выражение второго порядка с переменными коэффициентами, для которого задаются нелокальные краевые условия, состоящие в равенстве нулю некоторых интегралов от решения соответствующего дифференциального уравнения. Исследуется задача о собственных значениях возникающего дифференциального оператора. Предполагается, что интегралы, входящие в граничные условия, на фундаментальной системе решений ведут себя определенным образом (интегралы допускают асимптотическое разложение по спектральному параметру). В этих условиях установлены асимптотические формулы собственных значений соответствующего дифференциального оператора. Работа выполнена при содействии РФФИ, проект 04-01-00141.

Уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского и их приложения к дифференциальным уравнениям

Ситник С. М. (Воронежский институт МВД)

Рассматриваются уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского вида

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq A(f,g) \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \qquad (1)$$

Разработан метод, позволяющий каждому абстрактному среднему пары функций $M(f,g)$ сопоставить уточнение неравенства Коши-Буняковского вида (1) с явно выписываемой величиной $A(f,g)$. При этом произвольные абстрактные средние определяются аксиоматически.

Рассматриваются следующие результаты: метод получения явных формул для величины $A(f,g)$, сравнение различных уточнений между собой, построение итерационных последовательностей уточнений, монотонно сходящихся к левой или правой частям в (1). Полученные оценки применяются к неравенствам для полных эллиптических интегралов Лежандра, функций Миттаг-Лефлёра и неполных гамма-функций, q-интегралам Джексона, пространствам со знаконеопределённой нормой Минковского-Лоренца, специальным случаям неравенств Минковского и Харди. Рассматриваются некоторые возможные применения в теории дифференциальных уравнений.

A Method for Solution of Some Elliptic BVPs with Discontinuous Coefficients in Domains with Cones

Skorokhodov S. L., Vlasov V. I. (Computing Center of RAS)

Boundary value problems (BVPs) with Dirichlet — Neumann boundary conditions are considered for elliptic equations of second order with piecewise constant coefficients in domains with cones of arbitrary base. The coefficients have jumps on some conical surfaces (interface surfaces) with common vertex, which coinsides with the vertex of the initial cone.

A new method has been developed for solving these BVPs. The principle underlying our method consists in using a system of basic functions $\{\Psi_k\}$ that conform to the structure of the solution near the conical surfaces of the boundary and interface. Such system possesses good approximating properties. Most important is the fact that these basic functions are expressed in explicit analytic form in terms of special functions. By virtue of these features our method proves most effective for precise computation of the solution and its derivatives up to the conical surfaces of the boundary and interface. An important advantage of the method is that it yealds values of exponents and intensity factors at singularities along with the solution itself. Due to analytic representation of the solution our method has allowed to obtain asymtotics of the solution and its characteristics near the vertex of the cone and near edges of polyhedral angle. The performed numerical experiments confirmed high effectiveness of the developed method.

This work was financially supported by Russian Foundation for Basic Research (project 04–01–00723) and the Program N^o 3 of Department of Mathematical Sciences of RAS.

On Wiener type condition for quasilinear parabolic equations

Skrypnik I. I.
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU, Donetsk, Ukraine)

The talk is devoted to the regularity of boundary point for quasilinear parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (1)$$

$(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ where Ω is bounded open set in R^n. We assume Caratheodory's condition for coefficients

$a_i(x,t,u,\xi)$, $i = 0,1,...,n$, parabolicity condition and growth $|\xi|^{p-1}$ of these coefficients if $|\xi| \to \infty$.

We study the condition for the point $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ that guarantees a continuity of arbitrary solution $u(x,t) \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ of the equation (1) at $(x_0,t_0))$ if $u(x,t)$ is continuous function on $\partial\Omega \times (0,T)$. They are known such type results for $p = 2$ established by W.P.Ziemer (sufficient condition) and I.V.Skrypnik (necessary condition). Our condition on p is $\frac{2n}{n+1} < p < n$, it means that singular equations (for $\frac{2n}{n+1} < p < 2$) and degenerate equation (for $2 < p < n$) are included in considerations.

The main result is following: the point $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ is regular boundary point of the equation (1) for the domain Q_T if and only if

$$\int_0^1 \left\{ \frac{C_p(B(x_0,r) \setminus \Omega)}{r^{n-p}} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = \infty.$$

Here $B(x_0,r)$ is a ball in R^n of radius r with the center $x_0, C_p(E)$ is p-capacity of the set $E \subset R^n$. The proof of this result is contained in papers [1,2] (for $p > 2$) and [3,4] (for $p < 2$).

References

[1] Skrypnik I.I. Ukrainian Math. J., 2000, v.52, No.11, pp.1550-1565.

[2] Skrypnik I.I. Trudy Inst. Appl. Math. Mech., 2003, v.8., pp.147-167.

[3] Skrypnik I.I. Ukrainian Math. J., 2004, in the publication.

[4] Skrypnik I.I. Nonlinear Bound. Val. Probl., 2004, v.14, in the publication.

Removable singularities for solutions of quasilinear parabolic equations

Skrypnik I. V.
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU, Donetsk, Ukraine)

The talk is devoted to recent results obtained together with I.I.Skrypnik and F.Nicolosi. We have established the best possible conditions for removable singularity at the point for solutions of quasilinear parabolic equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \qquad (1)$$

$(x,t) \in Q_T \setminus (x_0, t_0)$ where $Q_T = \Omega \times (0,T)$ and Ω is bounded open set in R^n, $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in [0,T)$. We assume Caratheodory's condition for coefficients $a_i(x,t,u,\xi)$, $i = 0, 1, ..., n$, growth $|\xi|^{p-1}$ these functions as $|\xi| \to \infty$ and the parabolicity condition.

We formulate the condition on $u(x,t)$ in the term of the behaviour of the function

$$M(r) = \sup \left\{ |u(x,t)| : (x,t) \in Q_T, \ \frac{|x - x_0|^p}{r^p} + \frac{|t - t_0|^p}{r^{p+n(p-2)}} > 1 \right\}.$$

We studied the removability of the singularity of the solution $u(x,t)$ at the point (x_0,t_0) in two cases: 1) $t_0 > 0$, $(x_0,t_0) \in Q_T$); 2) $t_0 = 0$, $x_0 \in \Omega$, $u(x,0) = u_0(x)$ for $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$.

The main result is following: the singularity at (x_0,t_0) is removable if $M(r) r^n \to 0$ if $r \to 0$. The exactness of this result follows from Barenblatt formula for singular solution of the equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = 0$, where Δ_p is p-Laplace operator.

Solvability of Elliptic Problems with Distributed Nonlocal Terms

Skubachevskii A. L. (Moscow Aviation Institute)

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with boundary $\partial Q \in C^\infty$, and let $\partial Q = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, where $\overline{\Gamma}_i$ are $(n-1)$-dimensional manifolds, $n \geq 3$.

Consider the nonlocal problem

$$-\Delta u = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{5}$$

$$u|_{\Gamma_i} + B_i u = f_i(x) \qquad (x \in \Gamma_i,\ i = 1, 2). \tag{6}$$

We study the following cases:

1) $\Gamma_2 = \emptyset$, and there is $\sigma > 0$ such that $B_1 u = 0$ if $\operatorname{supp} u \subset \overline{Q} \backslash Q_\sigma$;

2) $\Gamma_2 \neq \emptyset$, and there are $\varkappa, \sigma > 0$ such that $B_i u = 0$ if $\operatorname{supp} u \subset \overline{K^{2\varkappa}}$ and $\operatorname{supp} B_i u \subset \overline{K^{\varkappa}}$ if $\operatorname{supp} u \subset \overline{Q} \setminus Q_\sigma$;

3) $\Gamma_2 \neq \emptyset$, and there are $\varkappa, \sigma > 0$ and an open set $\Omega \subset Q$ such that $B_i u = 0$ if $\operatorname{supp} u \subset \overline{K^{2\varkappa}} \backslash \Omega$ and $\operatorname{supp} B_i u \subset \overline{K^{\varkappa}}$ if $\operatorname{supp} u \subset \overline{Q} \setminus Q_\sigma$;

Here $Q_\sigma = \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \sigma\}$, $K^{\varkappa} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varkappa\}$, and Ω is such that in some neighborhood of each point $g \in K$ the domain Q and the set Ω are diffeomorphic to the half-space $\{x = (y, z) : 0 < \varphi < \pi, 0 < r, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ and the angle $\{x = (y, z) : 0 < \alpha < \varphi < \beta < \pi, 0 < r, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, respectively; φ, r are polar coordinates of y; the operators B_i have the same orders as the trace operators T_i given by $T_i u = u|_{\Gamma_i}$ in corresponding spaces. This classification of nonlocal terms was proposed in [1–3].

In the first case problem (1) and (2) is Fredholm and has trivial index in the Sobolev space $W_2^2(Q)$, see [1]. Problem (1) and (2) can be reduced to an operator equation on a boundary with compact perturbation. However the operator B_1 itself is not a compact perturbation of corresponding local elliptic operator.

In the second case problem (1), (2) is Fredholm if and only if a corresponding local problem is Fredholm in the Kondrat'ev space $H_a^2(Q)$, $a > 1$, see [4]. Furthermore the indices of these problems are equal. The nonlocal problem can be reduced to operator equation on a boundary with perturbation having a compact square.

In the third case it were obtained sufficient conditions for Fredholmian solvability of problem (1), (2). However the Fredholmian property of problem (1), (2) does not depend on corresponding local problem.

The above mentioned results are obtained for a $2m$-order elliptic equation with general nonlocal boundary conditions.

References

[1] A. L. Skubachevskii, *Nonlocal elliptic problems with a parameter*, Mat. Sb. **121 (163)**, No 6 (1983), 201–210.

[2] A. L. Skubachevskii, *Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary*, Mat. Sb. **129 (171)**, No 2 (1986), 279–302.

[3] A. L. Skubachevskii, *On the stability of index of nonlocal elliptic problems*, J. Math. Anal. Appl. **160**, No 2 (1991), 323–341.

[4] V. A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **16** (1967), 209–292.

Устойчивые дробно-рациональные численные методы решения жестких систем неявных дифференциальных уравнений первого порядка

Слоневский Р. В., Столярчук Р. Р., (НУ "Львівська політехніка" Украина, г.Львов, ИПМФН)

В работе рассмотрены основные положения теории одношаговых дробно-рациональных численных методов решения задачи Коши для неявных нелинейныъх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для определения последовательности Тейлеровских приближений решения задачи , используемых при построении дробно-рациональных методов , разработана новая методика последовательного повышения порядка точности приближений. Алгоритм определения этих приближений не требует решения нелинейных систем алгебраических уравнений относительно первой производной решений , описываемых исходными уравнениями задачи.

Исследована устойчивость построенных методов произвольного конечного порядка точности. Приведен анализ результатов экспериментальных исследований методов на различных типах тестовых примеров. |abstrenglishBranching periodicity: homogenization of the dirichlet problem for an elliptic systemAndrey S. Slutskij (Institute of Mechanical Engeneering Problem, Russian Academy of Sciences. St.-Peterburg. RUSSIA)

The system of second order differential equation describes objects with anisotropic fractal structure, i.e. the periodicity cells become thinner in one directions. This structure is peculiar for certain biological, land reclamation and fracture mechanics structures such as crazes. A boundary value problem is considered in a rectangle. A solution of the system satisfies the homogeneous Dirichlet conditions on two sides of the rectangle. The other sides of the rectangle are supplied with the periodicity conditions. An explicit formula is found for the coefficients of the homogenized operator and an estimate of the asymptotic remainder is derived. The approximation accuracy depends on the smoothness exponent $\varkappa \in (0, 1/2]$ for the right-hand side in slow variables (the Sobolev-Slobodetskii space $H^{\varkappa}$) and is estimate by $O(h^{\varkappa})$ as $\varkappa \in (0, 1/2)$ and $O(h^{1/2}(1 + |\log h|))$ for $\varkappa = 1/2$.

Hamiltonian Feynman integrals representations for solutions of Schroedinger equations on Riemannian manifolds

Smolyanov O. G.

(Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia)

Hamiltonian Feynman (path) integrals are generated by some pseudomeasures (=distributions, in the sense of the Sobolev-Schwartz theory) on an infinite-dimensional manifold of trajectories in the phase space which is the cotangent bundle of a Riemannian manifold called then a configuration space. The definition of such pseudomeasures, which are used in the discussed approach, are motivated by the notion of the surface measure, on trajectories in a Riemannian manifold embedded into an Euclidian space, generated by the Wiener measure on trajectories in the latter space [1], [2].

Some representations for solutions of Cauchy problem, Cauchy-Dirichlet problem and Cauchy-Neumann problems for some Schroedinger equations on compact Riemannian manifolds, by Hamiltonian Feynman integrals, are obtained. Those representations contain exponents of integrals of the scalar curvature of the manifold; in the case of a submanifold of a Euclidian space they may also contain integrals of the vector-valued mean curvature. Some relations to the procedure of the BRST quantization of Hamiltonian systems with constraints (they correspond to Lagrangian systems without constraints but with singular Lagrangians) are also considered.

References

[1] Smolyanov O. G. *Smooth measures on loop groups.* Dokl. Math., 1995, v.52, 3, 408 - 411.

[2] Smolyanov O. G., Weizsaecker H. V., Wittich O., Sidorova N. A. *Wiener Surface Measures on Trajectories in Riemannian Manifolds.* Dokl. Math., 65, No.2, 2002, 239–244.

Canards in Parabolic Systems and Critical Conditions of Self-ignition

Sobolev V. A. (Samara State University)
Gorelov G. N. (Samara State Aerospace University)

In the paper nonlinear singularly perturbed parabolic systems which are mathematical models of thermal explosion problems are considered. The heat transfer and the diffusion all over the reaction vessel are taken into account.

The goal of this paper is to find the critical conditions of self–ignition for the autocatalytic reaction in plane–parallel, spherical and cylindrical reactors. These conditions are thought of as such set of initial conditions due to which the exothermic chemical reaction proceeds in the reactor for sufficiently long time to provide the complete combustion of the reactants. In this process the temperature should be as large as possible, so that neither thermal explosion occurred, nor the reaction proceeded slowly at low temperatures and the long-period combustion of the reactant.

The critical regimes modelled by canard solutions are investigated. The existence of canards is proved and the asymptotic expansions with respect to powers of the small parameter are presented.

The Hardy's Inequaluty and Positive Invertability of Ellipic Operators

Pavel E. Sobolevskii (Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem)

The conditions on potential of the Shrodinger operator are discussed. They provide the positive invertability of this operator and the exponential decreasing of correspondent parabolic operator. These conditions are based on the Hardy's inequality and allow maximum principle is not valid.

Topological optimization for contact problems

J. Sokolowski (Universite Nancy 1, France)

We present the topological derivative method for shape optimization of contact problems in solid mechanics. The asymptotic analysis is used in order to derive the expansion of the compliance shape functional. The topological derivative of the functional is determined using the outer approximation of the solutions to the associated variational inequality. Numerical results are provided for the approach proposed.

Задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы второго порядка в полуплоскости

Солдатов А. П. , (НовГУ, Великий Новгород)

Для эллиптической системы второго порядка $a_{11}u_{xx} + (a_{12} + a_{21})u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0$ с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ в верхней полуплоскости $y > 0$ рассматриваются задачи Дирихле

$$u\big|_{y=0} = f$$

и Неймана

$$(a_{21}u_x + a_{22}u_y)\big|_{y=0} = g'.$$

Приводятся явные формулы решения указанных задач и даются их приложения к плоской (вообще анизотропной) теории упругости.

On solvability of one–sided fully nonlinear parabolic problems

Solonukha O. V. (IPSA NTUU "KPI")

One–sided parabolic problems correspond to variational inequalities.

Let $m, n \in \mathbb{N}$, let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, let $Q_T = (0,T)\times\Omega$, and let $p \in [2,\infty)$. Denote by M and M' the numbers of different multi–indices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ such that $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$ and $0 \le |\alpha| \le m-1$, respectively.

Theorem. Let A_α satisfy the Caratheodori conditions, and let

1) $|A_\alpha(t,x,\xi)| \le c_1 \sum\limits_{1\le i\le \mathrm{M}+\mathrm{M}'} |\xi_i|^{p-1} + h(t,x) \quad \forall |\alpha| \le m;$

2) $\sum\limits_{|\alpha|=m} \left(A_\alpha\left(t,x,\omega,\zeta\right) - A_\alpha\left(t,x,\omega,\eta\right)\right)\left(\zeta_\alpha - \eta_\alpha\right) > 0 \quad \text{if} \quad \eta \ne \zeta;$

3) $\sum\limits_{|\alpha|\le m} A_\alpha\left(t,x,\xi\right)\xi_\alpha \ge c_2 \sum\limits_{1\le i\le \mathrm{M}+\mathrm{M}'} |\xi_i|^p - g(t,x),$

where $(t,x) \in Q_T$, $\xi = (\omega,\zeta)$, $\omega \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}'}$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$, $c_1, c_2 > 0$, $h \in L_q(Q_T)$, $g \in L_1(Q_T)$. Then for any $f_\alpha \in L_q\left(Q_T\right)$, $1/q + 1/p = 1$, and $y_0 \in L_2(\Omega)$ the set of solutions of variational inequality

$$\int\limits_{Q_T} \partial_t y\left(z-y\right)dx\,dt + \sum_{|\alpha|\le m}\int\limits_{Q_T}\left(A_\alpha(t,x,y,\cdots,D^m y) - f\right)D^\alpha(z-y)\,dx\,dt \ge 0$$

$$\forall z \in K = \left\{ y \in L_p(0,T;W_p^m(\Omega)) : \frac{\partial^k y}{\partial \nu^k}\Big|_{\Gamma_T} \ge 0\,\forall k \le m-1,\ y|_{t=0} = y_0 \right\}$$

is nonempty, weakly closed in $C(0,T;L_2(\Omega))$, and closed in $L_p(0,T;W_p^m(\Omega))$.

Задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца и их абстрактные аналоги

Старков П. А.
(Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского)

Методом отличным от работы [1], изучены спектральные задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца с комплексными параметрами в уравнении и граничном условии. Основная идея исследования – использование метода билинейных форм и переход к линейному операторному пучку, зависящему от двух параметров [2],[3]. При помощи абстрактной формулы Грина [4] сформулированы и исследованы абстрактные аналоги задач сопряжения обобщающие задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца и имеющие приложения в теории систем эллиптических уравнений, теории упругости (уравнения Ламе) и линейной гидродинамики (уравнения Стокса).

Литература

[1] Агранович М. С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности.* // Математич. сборник. 1999, Т.190, N1, с. 29-68.

[2] Старков П. А. *Операторный подход к задачам сопряжения.* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - 2002. - Т.15(54), N1. – с. 58-62.

[3] Старков П. А. *Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения.* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. - 2002. - Т.15(54), N2. – с.82-88.

[4] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи.* Український математичний вісник, Том 1 (2004), № 1, с.69-97.

Два применения дизъюнктности сверточных степеней спектральных мер

Степин А. М. (МГУ им. М.В.Ломоносова)

Сохраняющие меру μ преобразования T_1 и T_2 пространства X спектрально эквивалентны, если сопряжены унитарные операторы $f(x) \mapsto f(T_i x)$, действующие в $\mathrm{L}^2(X,\mu)$. Преобразование T называется жестким, если для некоторой возрастающей последовательности n_i натуральных чисел $T^{n_i} \to \mathrm{Id}$ относительно слабой топологии. Централизатор преобразования T это снабженная слабой топологией группа сохраняющих меру преобразований, коммутирующих с T.

1. Существует бесконечное семейство спектрально эквивалентных неизоморфных преобразований с нулевой энтропией.

2. Типично свойство сохраняющего меру преобразования принадлежать бесконечному семейству попарно неизоморфных жестких преобразований с изоморфными централизаторами.

On resonances in potential scattering theory

Stepin S. A. (Moscow State University)

Given real-valued $V(x) \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp} V \subset \big\{|x| \leqslant d\big\}$, consider in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2)$ bounded operator A defined for smooth functions by the formula

$$A\,\varphi(s,\omega) \;=\; \partial_s \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\Big(\int_{\mathbb{S}^2} \varphi(x\cdot\omega',\omega')\,d\omega'\Big)\delta(s - x\cdot\omega)\,dx\,.$$

Theorem 1. *Operator* $L_V = -\partial_s + A/8\pi^2$ *with the domain* $D(L_V) = \big\{\varphi, \partial_s\varphi \in \mathrm{L}^2\big((-d,d)\times\mathbb{S}^2\big),\ \varphi(-d,\omega) = 0\big\}$ *is isometrically equivalent to the generator of Lax-Phillips semigroup associated with wave equation*

$$\big(\partial_t^2 - \Delta + V(x)\big)\,u(x,t) \;=\; 0\,. \qquad (*)$$

Operator L_V has discrete spectrum $\sigma(L_V) = i\Lambda$, where Λ is the set of resonances for $(*)$ known to be infinite provided $V(x) \not\equiv 0$;

moreover, the parametrix expansion due to Hadamard and the trace formula for Lax-Phillips semigroup imply the relationship

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} e^{i\lambda_k t} \; = \; \frac{t}{16\pi} \int V^2 \, dx \, + \, O(t^3) \, , \quad t \downarrow 0 \, .$$

This gives an approach for study of location and distribution of resonances specifying infiniteness of Λ.

Theorem 2. *All the resonances but a finite number can not be located in the domains* $\{ \, |\mathrm{Re}\, \lambda| < |\mathrm{Im}\, \lambda|^\gamma \}$, $\gamma < 1/12$. *If* $V(x) \not\equiv 0$ *then*

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\lambda_k|^{-1/4} \; = \; \infty \, .$$

Theorems 1 and 2 are also generalized to the case of wave equation $(*)$ in the space of arbitrary odd dimension.

Полнота и базисность самосопряженных операторов в почти пространстве Крейна

Сухочева Л. И. (Воронежский государственный университет)

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, A и B — компактные самосопряженные операторы, причем A — положительный оператор. Рассматривается линейный операторный пучок: $L(\lambda) = A^{-1} - \lambda(I + B)$. Вопрос о полноте и базисности корневых векторов этого пучка тесно связан с вопросом о полноте и базисности корневых векторов оператора $H = A(I+B)$. Операторы такого вида при специальных условиях, одно из которых непременно: обратимость H, впервые рассматривал М.В. Келдыш . Случай самосопряженных A и B при условии $\ker H = \{0\}$ исследован И.Ц. Гохбергом и М.Г. Крейном. При этом использовалось, что оператор H является самосопряженным относительно индефинитной метрики $[\cdot, \cdot] = ((I + B)\cdot, \cdot)$ и $\{\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]\}$ — пространство Понтрягина. Критерий же полноты и базисности для произвольных самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина получен

Т.Я. Азизовым и И.С. Иохвидовым, а его обобщение на более общий класс операторов $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ — Т.Я. Азизовым.

Цель доклада — изложение свойств полноты и базисности корневых вектров операторов класса $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ в вырожденном пространстве Крейна.

Исследование поддержано грантом РФФИ 02-01-00353

Homogenization of a periodic Maxwell system

Suslina T. A. (St.-Petersburg State University)

We study homogenization problem for the stationary periodic Maxwell system in the small period limit. Let Γ be a lattice in $\mathbb{R}^3$, and let $\varepsilon(\mathbf{x})$ and $\mu(\mathbf{x})$ be Γ-periodic (3×3)-matrix-valued functions with real-valued entries; ε and μ are bounded and uniformly positive. Let $\sigma > 0$ be a parameter. Consider the Maxwell system

$$\left.\begin{array}{ll} i\mathrm{rot}\,\left(\mu(\sigma^{-1}\mathbf{x})\right)^{-1}\mathbf{z}_\sigma - i\mathbf{w}_\sigma = \mathbf{q}, & \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\sigma = 0, \\ -i\mathrm{rot}\,\left(\varepsilon(\sigma^{-1}\mathbf{x})\right)^{-1}\mathbf{w}_\sigma - i\mathbf{z}_\sigma = \mathbf{r}, & \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\sigma = 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

where $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ and $\mathrm{div}\,\mathbf{q} = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = 0$. We study the behaviour of solutions of the system (1) as $\sigma \to 0$. It is known that solutions $\mathbf{w}_\sigma$, $\mathbf{z}_\sigma$ converge to $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{z}_0$ weakly in $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, where $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{z}_0$ is solution of the homogenized Maxwell system with constant effective coefficients ε^0, μ^0. This result is essentially strengthened. We represent solutions as the sums $\mathbf{w}_\sigma = \mathbf{w}_\sigma^{(q)} + \mathbf{w}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{z}_\sigma = \mathbf{z}_\sigma^{(q)} + \mathbf{z}_\sigma^{(r)}$, where $(\mathbf{w}_\sigma^{(q)}, \mathbf{z}_\sigma^{(q)})$ is solution of the system (1) with $\mathbf{r} = 0$, and $(\mathbf{w}_\sigma^{(r)}, \mathbf{z}_\sigma^{(r)})$ is solution of the system (1) with $\mathbf{q} = 0$. For $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ we obtain uniform approximations in $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ with estimates of precise order. For $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ we have

$$\|\mathbf{z}_\sigma^{(r)} - (\mathbf{1} + G^\sigma)(\mathbf{z}_0^{(r)} + \widetilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)})\|_{L_2} \leq C\sigma\|\mathbf{r}\|_{L_2}, \quad 0 < \sigma \leq 1. \tag{2}$$

Here $\mathbf{z}_0^{(r)} = \mathbf{z}_0$ with $\mathbf{q} = 0$; $\widetilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)}$ is solution of the "correction"Maxwell system with coefficients ε^0, μ^0 and rapidly oscillating right-hand side (which is described explicitly); $G^\sigma(\mathbf{x}) = G(\sigma^{-1}\mathbf{x})$ is rapidly oscillating matrix-valued function (also described explicitly). For $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$ we obtain similar approximation.

Noether operators and holonomic D-modules

Tajima S. (Niigata University, Japan)

Noether operators which were introduced by Ehrenpreis and Palamodov play fundamental and important roles in many branches of mathematics. In this talk, we consider Noether operators attached to a zero dimensional primary ideal of polynomial ring of several variables in the context of algebraic analysis. We give an intrinsic definition of Noether operators by making use of the theory of holonomic D-modules and we also present an algorithm for computing them. As applications, we investigate Jacobi's interpolation integral formula and derive an algorithm that compute an explicit form of remainder by division on a zero-dimensional ideal I.

The thin film equation with nonlinear convection

Taranets R. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine)

The fourth order nonlinear degenerate parabolic equation is considered in $\mathbb{R}^N$, $N \in \{1,2,3\}$:

$$u_t + \operatorname{div}\left(|u|^n \nabla \Delta u - |u|^m \nabla u\right) = \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u),\ u = u(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

where $n > 0, m \in \mathbb{R}^1, \overrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^N$, $b(u) \in W^1_{1,loc}([0,\infty))$ with $b(0) = 0$ and $|b'(s)| \leqslant c\,|s|^{\lambda - 1}, \lambda > 0, c > 0$. Many authors studied the equations like (1) without the convection term. The equations describe the evolution of height of a thin liquid film spreading on a solid surface as well as they appear in the Cahn-Hilliard model of phase separation for binary mixtures and the theory of plasticity deformation. Also, the equations describe the thin liquid films driven by the competing effects of a thermally induced surface tension gradient and gravity. Our main goal is a solvability to the Cauchy problem for (1) with nonnegative initial data. The choice of the special regularizations for all nonlinearities of (1) equation and the energy and entropy estimates allow to obtain the nonnegative local solutions to the Neumann problem in the case of $m > -1, n > \frac{1}{8}\,(n < 4,\, N = 3)$ and

$\lambda > \max\{\frac{1}{8}, \frac{3n-1}{7}, n-2, n-m-1\}$ ($\lambda < \min\{\frac{4n+7}{3}, 4\}$, $N = 3$). The finite speed of propagation is proved in case of the constructed nonnegative local solutions of the Neumann problem. The property of solution allows to build the local solutions to the Cauchy problem if $m > 0, n \in (\frac{1}{8}; 2)$, $\lambda \in (1; \mu + 1 + \max\{n + \mu, m\})$ ($\mu = \frac{2}{N}\min\{\frac{n+4}{3}, 3-n\}$) if $N \in \{1,2\}$; and $\lambda \in (1; \min\{\frac{4n+7}{3}, 4\})$ if $N = 3$, and to obtain the global solutions to the problem mentioned above in case of more strong restriction on $\lambda \in (\max\{1, \frac{3n-1}{4}\}; \frac{5N+8}{4N} + \min\{n, \frac{5}{4}\})$ if $N \in \{1,2\}$; and $\lambda \in (\max\{1, \frac{3n-1}{4}\}; 2 + \min\{n, \frac{5}{4}\})$ if $N = 3$.

Joint talk with A.E.Shishkov.

Regular perturbations of the cauchy problem

Nikolai Tarkhanov (University of Potsdam, Germany)

Let X be a smooth n-dimensional manifold and D be an open connected set in X with smooth boundary ∂D. Perturbing the Cauchy problem for an elliptic system $Au = f$ in D with data on a closed set $\varGamma \subset \partial D$ we obtain a family of mixed problems depending on a small parameter $\varepsilon > 0$. Although the mixed problems are subject to a non-coercive boundary condition on $\partial D \setminus \varGamma$ in general, each of them is uniquely solvable in an appropriate Hilbert space $\mathcal{D}_T$ and the corresponding family $\{u_\varepsilon\}$ of solutions approximates the solution of the Cauchy problem in $\mathcal{D}_T$ whenever the solution exists. We also prove that the existence of a solution to the Cauchy problem in $\mathcal{D}_T$ is equivalent to the boundedness of the family $\{u_\varepsilon\}$. We thus derive a solvability condition for the Cauchy problem and an effective method of constructing its solution. Examples for Dirac operators in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ are considered. In the latter case we obtain a family of mixed boundary problems for the Helmholtz equation.

References

[1] A. Shlapunov and N. Tarkhanov, *Mixed Problems with a Parameter,* Preprint 2004/02, Institut für Mathematik, Universität Potsdam, 2004, 28 S.

Weighted Schur classes and functional model

Tikhonov A. S. (Taurida National University)

Let G_+ be a multiply connected domain, $C = \partial G_+$ be a Carleson curve, $\mathfrak{N}_\pm$ be separable Hilbert spaces. Let $\Xi_\pm(\zeta), \zeta \in C$ be operator-valued functions such that $\Xi_\pm, \Xi_\pm^{-1} \in L^\infty(C, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_\pm))$, $\Xi_\pm(\zeta) = \Xi_\pm(\zeta)^*$, $\Xi_\pm(\zeta) \geq 0$. We consider weighted Schur classes S_Ξ of operator-valued functions $\Theta(\zeta)$ such that $\Theta \in H^\infty(G_+, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}_-))$ and $||\Theta(\zeta)n||_{\zeta,-} \leq ||n||_{\zeta,+}$ for all $n \in \mathfrak{N}_+$, and a.e. $\zeta \in C$, where $||m||_{\zeta,\pm} := (\,\Xi_\pm(\zeta)\, m, m\,)^{1/2}$, $m \in \mathfrak{N}_\pm$. For operator-valued functions of this class, one can define notions of inner, outer, pure function and construct a functional model of S.-Nagy-Foias type. We systematically study relations between properties of functions of class S_Ξ and the corresponding properties of the functional model.

Нелокальные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений

Тихонов И. В. (Москва, МИФИ)

В банаховом пространстве E на отрезке $[0, T]$ рассматривается задача

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \qquad (0 \leq t \leq T), \qquad \int_0^T u(t)\, d\mu(t) = 0. \qquad (1)$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в E, скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$. Считаем, что интеграл по мере $d\mu(t)$ не может быть сужен на промежуток меньший, чем $[0, T]$. Изучается вопрос единственности решения. Свойства задачи (1) выражаются через нули характеристической функции

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t}\, d\mu(t) \qquad (\lambda \in \mathbf{C}). \qquad (7)$$

Справедлив критерий единственности: для того чтобы задача (1) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции (2) не был собственным значением оператора A. В докладе обсуждается этот результат и его следствия (см. [1]). Отдельно рассматривается обобщение на нелокальное условие операторного вида.

Литература

[1] Тихонов И.В.// Известия РАН, серия матем. 2003. Т.67. N 2. С.133-166.

Global Well-posedness for Three-Dimensional Planetary Geostrophic Models of Ocean Dynamics

Edriss S. Titi (Departments of Mathematics, Mechanical and Aerospace Engineering
University of California, USA)

The basic problem faced in geophysical fluid dynamics is that a mathematical description based only on fundamental physical principles, which are called the “Primitive Equations”, is often prohibitively expensive computationally, and hard to study analytically. In this talk we will survey the main obstacles in proving the global regularity for the three dimensional Navier–Stokes equations and their geophysical counterparts. However, taking advantage of certain geophysical balances and situations, such as geostrophic balance and the shallowness of the ocean and atmosphere, geophysicists derive more simplified and manageable models which are easier to study analytically. In particular, I will present the global well-posedness for the three dimensional Benard convection problem in porous media, and the global regularity for a three dimensional viscous planetary geostrophic models. Furthermore, these systems will be shown to have finite dimensional global attractors.

On Determination of Certain Conductivity Distribution via Partial Boundary Measurements

Trooshin I.Yu. (Precision Mechanics and Control Institute of Russian Academy of Sciences, Saratov)

We considered an inverse conductivity problem to identify conductivities of special type via partial boundary measurements when the given domain is a rectangle and the conductivity depends only on one variable. We proved unique identifiability in this case using classical results of the inverse Sturm-Liouville theory. This work was done jointly with Prof. Hyeonbae Kang (Seoul National University, Korea) and June-Yub Lee (Ewha Womans University, Korea)

Асимптотика по параметру вязкости краевых задач газовой динамики

Тупчиев В. А. (Обнинск ГТУ Институт Атомной Энергетики)

Рассматриваются задачи о поршне и истечении вязкого газа в вакуум [1] для одномерного изэнтропического течения вязкого газа в эйлеровой системе координат. Строится по методу пограничных функций [2] асимптотическое разложение высокого порядка по малому параметру вязкости m решений указанных задач, а также вспомогательных задач для уравнения Бюргерса. Особенностью указанных разложений является то, что на слабом разрыве они строятся по степеням m, в то время как на сильном разрыве по степеням m с использованием угловых пограничных функций. Для уравнения Бюргерса, как и для обобщенного уравнения Бюргерса, дается полное обоснование асимптотических разложений по схеме работы [3], для задач газовой динамики получено обоснование по невязке.

Литература

[1] Рождественский Б. Н., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике.* М.: Наука, 1978.

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* М.: Наука, 1973

[3] Тупчиев В. А. *Асимптотика решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Бюргерса.*// Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. 2004. Т.1

Условия самосопряженности некоторых операторов возникающих при вторичном квантование

Тверитинов И. Д.

Изучаются дифференциальные операторы на пространстве Винера–Сигала–Фока $\mathrm{Ł}_2(Q,\mu_{\frac{\sqrt{B^{-1}}}{2}})$ ($\mu_{\frac{\sqrt{\mathrm{B}^{-1}}}{2}}$–Гауссовская мера с корреляционным оператором $\frac{\sqrt{\mathrm{B}^{-1}}}{2}$) имеющие следующий вид:

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathrm{f})(\mathrm{x}) = \mathrm{tr}(-\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}}{\mathrm{d}^2\mathrm{x}} + 2\sqrt{\mathrm{B}}\mathrm{x}\otimes\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} - \\ -2i\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}\otimes\mathrm{T}'(\mathrm{x}) + 2i\sqrt{\mathrm{B}}\mathrm{x}\otimes\mathrm{T}'(\mathrm{x})\cdot\mathrm{f}(\mathrm{x}) - i\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{T}).$$

Иначе говоря изучаются квантовые гамильтонианы, полученные из квадратичной функции Гамильтона после применения процесса квантования Винера–Сигала–Фока. Основной упор сделан на нахождение условий (на квадратичную форму и меру) при которых данные операторы будут самосопряженными в существенном на областях специального вида. Все результаты получены путем явных построений.

Элементарные ротации операторов в правильных банаховых пространствах

Тышкевич Д. Л. (Таврический национальный университет им. Вернадского, Симферополь)

Рассмотрим $(\mathfrak{X},[\cdot,\cdot],\|\cdot\|)$ — правильное банахово пространство с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]$ и канонической нормой $\|\cdot\|$ (см. [1],[3]). Пусть $\mathfrak{D}$, $\tilde{\mathfrak{D}}$ — некоторые правильные банаховы пространства, и $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}[+]\mathfrak{D}, \mathfrak{Y}[+]\tilde{\mathfrak{D}})$ назовём *элементарной ротацией* (ср.[2] для случая *пространств Крейна*) оператора T, если U — унитарный оператор (в смысле индефинитной метрики), представимый матрицей $U = \begin{bmatrix} T & D \\ \tilde{D} & L \end{bmatrix}$, где операторы D, $\tilde{D}$ удовлетворяют условиям: $\ker D = \{0\}$, $\ker \tilde{D}^\sharp = \{0\}$ ($D^\sharp$ — сопряжённый оператор к D относительно $[\cdot,\cdot]$). Получен следующий результат. **Теорема.** *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — правильные банаховы пространства. Для любого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ существует элементарная ротация $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}[+]\mathfrak{D}, \mathfrak{Y}[+]\tilde{\mathfrak{D}})$, где $\mathfrak{D}$, $\tilde{\mathfrak{D}}$ — некоторые правильные банаховы пространства.*

Литература

[1] Ароншайн Р. *Квадратичные формы на векторных пространствах*// Математика (сб. переводов). —1964. т.8, №5. — С. 105 -168

[2] Dritschel M. A. and Rovnyak J. *Operators on indefinite inner product spaces*, Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994). —Fields Institute Monographs —vol.3 — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. p. 141 -232

[3] Bognar J. *Indefinite inner product spaces.* — Berlin.: Springer. — 1974. — 225 p.

On slowdown of wave packages in periodic media

B. Vainberg (UNC at Charlotte, USA)

This is a joint work with S.Molchanov.

The goal of this work is the analysis of possible mechanisms of slowdown of propagation of wave packages in periodic media. This slowdown is crucial in many applications. For example, it is fundamental for synchronizing the work of very fast optical elements and much slower electronics in many devices. The problem of creating compact and efficient optical delay devices has not yet been solved technologically, but for the last several years it has been very actively discussed in applied physical literature. A special coupled resonators optical waveguide (CROW) is very often suggested as a base for an optical delay device. It can be realized as a set of identical periodic cavities in a dielectric medium.

We provide a simple mathematical model for CROW type devices. The model describes propagation of wave packages through finite slabs of periodic media. An incident pulse is considered whose frequency is distributed in a small neighborhood of a singular frequency for which the dispersion relation of the medium is very flat, and the group velocity (for the infinite medium) is small. The main conclusion from considering this model is the following. Under appropriate conditions, only a negligible part of the energy of the incident pulse goes through the media with the speed of light. The major part of the energy which enters the slab propagates with the group velocity. The slowdown is related to the multiple reflection of the light inside of the medium. The price to pay for this slowdown is the reflection of the main part of the pulse.

О дискретном спектре несамосопряженных дифференциальных операторов

Валеев Н. Ф. , Султанаев Я. Т.
(г.Уфа, Башкирский государственный университет)

В данной работе рассматриваются вопросы локализации дискретного спектра несамосопряженных дифференциальных операторов с комплекснозначными коэффициентами. Для исследования локализации спектра в комплексной плоскости авторами предлагается метод, основанный на специальных изоспектральных деформациях, которые соединяют исходный оператор с более простым оператором.

Оказалось, что указанный метод является достаточно универсальным и удобным инструментом изучения дискретного спектра широких классов как обыкновенных линейных дифференциальных операторов, так и дифференциальных операторов в частных производных, заданных в ограниченных или неограниченных областях.

Приведем характерный результат.

Рассмотрим задачу на собственные значения. $L(\lambda)y = -\frac{d^2}{dx^2}y + \lambda q(x)y = 0$, $x \in (0,l)$ $y(0) = y(l) = 0$, где

$q(x)$- кусочно-аналитическая комплекснозначная функция, $\arg q(x) \neq const$. При некоторых неограничительных условиях на $q(x)$ мы доказываем, что спектр этого оператора локализуется вдоль конечного числа лучей в комплексной плоскости, и далее вычисляем асимптотику собственных значений расположенных вдоль этих лучей.

О системах двух сингулярно возмущённых квазилинейных уравнений второго порядка

Васильева А. Б. (МГУ)

Рассматриваются системы вида:

$$\epsilon y'' = A(x,y)y' + B(x,y),\ \{y, z = y' \in R^2,\ 0 < x < 1\}. \qquad (1)$$

1) Задача Коши

$$y(0,\epsilon) = y^0, \quad z(0,\epsilon) = z^0/\epsilon. \qquad (2)$$

Известно, что в одномерном случае ($y, z \in R^1$) задача имеет решение с пограничным слоем на одном конце: левом при $A < 0$ и правом, когда $A > 0$, но условия (2) заданы уже при $x = 1$. В двумерном случае задача (1)–(2) рассмотрена в предположениях, когда $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, ($i = 1{,}2$) и каждая из величин $A_{i1}dy_1 + A_{i2}dy_2$, ($i{=}1{,}2$) является полным дифференциалом.

2) Краевая задача

$$y(0,\epsilon) = y^0, \quad y(1,\epsilon) = y^1. \qquad (3)$$

В случае а) $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ решение имеет пограничный слой слева и асимптотика строится на базе задачи Коши. В случае б) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ решение имеет пограничный слой на обеих границах и асимптотика строится с использованием определенной модификации стандартной схемы. Контрастная структура типа ступеньки в случае а) вообще говоря не существует, но появляется в случае б).

3) Критический случай

$$\epsilon y'' = A(x,y)y' + \epsilon B(x,y),\ \{y, z = y' \in R^2,\ 0 < x < 1\}. \qquad (4)$$

Здесь предполагается, что $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \equiv 0$. Вырожденная задача приводит к интегро–дифференциальному уравнению. Чтобы вырождение было регулярным, компоненты z^0 должны быть связаны.

Устойчивость траекторий в окрестности гомоклинической кривой

Васильева Е. В. (Санкт-Петербургский Государственный Университет)

Рассматривается трехмерная автономная система дифференциальных уравнений класса C^1, имеющая ω-периодическое движение Γ_1 и гомоклиническое к нему движение Γ_2. Устойчивое и неустойчивое многообразия касаются в точках кривой Γ_2. Ранее в работах Иванова Б.Ф., Ньюхауса Ш., Шильникова Л.П. и др. было показано, что при определенном способе касания такие системы могут иметь бесконечно много устойчивых периодических решений, траектории которых лежат в малой окрестности $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, но по крайней мере один из характеристических показателей стремится к нулю при стремлении периода к бесконечности. Цель работы — показать, что при изменении способа касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точках кривой Γ_2, существует класс систем, имеющих счетное множество устойчивых периодических решений, характеристические показатели которых меньше некоторого отрицательного числа.

On solvability of the boundary value problem for Poisson equation with dynamic boundary condition in a domain with a corner point

Vasylyeva N.
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine)

We consider in weighted Hölder classes the unsteady boundary value problem for Poisson equation in the domain with a corner point. It is supposed the right-hand side of the equation depends on time and consequently the desired function depends on time as a parameter. The boundary condition contains the linear combination of the spatial and the derivatives and, moreover, a factor in the time derivative is singular with respect to the distance to the corner point. We construct the appropriate weighted Hölder spaces such that there are the coercive estimates for the solution of the problem. The similar problem was studied earlier by V.A. Solonnikov and H.V. Frolova in Sobolev spaces. However, the methods are applied to get the estimates in Hölder spaces are essentially different from ones in the Sobolev classes. Note that, the studied boundary value problem may be considered as a model problem under investigation of free boundary problems (Stefan or Hele-Shaw problem).

Riesz Basis of the Root Functions of the periodic boundary value problem

Veliev O. A. (Dogus University, Turkey)

Let L be the operator generated in $L_2[0,1]$ by the ordinary differential expression of even order with the complex-valued summable coefficients and the periodic or antiperiodic boundary conditions. We obtain the asymptotic formulas for eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the operator L. Then using these asymptotic formulae, we find the conditions on coefficients for which the root functions (the eigenfunctions and associated functions) of L form a Riesz basis in $L_2(0,1)$. Note that the periodic and antiperiodic boundary conditions are regular boundary conditions, but are not strongly regular boundary conditions. Therefore, in general, the root functions of L do not form a Riesz basis, they form a basis with brachet (see [1]).

References

[1] A. A. Shkalikov, *The basis property of eigenfunctions of an ordinary differential operator,* Uspekhi Mat.Nauk 34 (1979), no. 5(209), 235-236.

Интегрируемая краевая задача для цепочки Вольтерра

Верещагин В. Л. (Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН)

Цепочка Вольтерра

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}),$$

где $c_n = c_n(t),\ t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$, является хорошо изученным объектом теории интегрируемых систем. Поставлена задача отыскать среди конечнозонных (квазипериодических) решений цепочки Вольтерра те, которые удовлетворяют так называемым интегрируемым краевым условиям на полуоси по переменной n. Искомые решения предъявлены с помощью явных условий на параметры римановой поверхности, определяющей конечнозонные формулы и ограничений на соответствующие дивизоры, причем задающее их условие имеет вид системы алгебраических уравнений.

Собственное значение как функция потенциала

Винокуров В. А. (МГУДТ), Садовничий В. А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Первая краевая задача на отрезке $[0, \ell]$, состоящая из дифференциального уравнения $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ и граничных условий $y(0) = 0\,, y(\ell) = 0$, сопоставляет каждой вещественной функции $q \in L_1[0, \ell]$ и номеру $n \in \mathbf{N}$ вещественное собственное значение λ_n кратности 1. Таким образом, для каждого натурального числа n определено отображение $\lambda_n : L_1[0, \ell] \to \mathbf{R}$. Кроме известных свойств этого отображения: мотононности, линейности по константам, дифференцируемости, — устанавливаются также следующие 2 свойства:

1) для любого номера $n \in \mathbf{N}$ и любого слабо компактного множества $G \subset L_1$ сужение $\lambda_n\Big|_G$ есть слабо непрерывная функция;

2) первое собственное значение $\lambda_1(q)$ есть вогнутая слабо полунепрерывная сверху функция на банаховом пространстве L_1.

Вводятся точная верхняя грань $\overline{\lambda}_{n,p}(t)$ и точная нижняя грань $\underline{\lambda}_{n,p}(t)$ n-ного собственного значения $\lambda_n(q)$ на замкнутом шаре радиуса $t > 0$ с центром в нуле банахова пространства L_p и изучаются свойства этих функций. В частности, устанавливается сведение этих функций к случаю первого собственного значения $\overline{\lambda}_{n,p}(t) = n^2\overline{\lambda}_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right), \underline{\lambda}_{n,p}(t) = n^2\underline{\lambda}_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right)$.

Основные результаты опубликованы в статье [1]. Расширенное изложение представленных результатов смотрите по адресу "http://vinokurov.150m.com/eval.html".

Литератрура

[1] Винокуров В. А., Садовничий В. А. *О границах изменения собственного значения при изменении потенциала.* 2003. Т. 392. № 5. С. 592-597.

Approximation of trajectories lying on the global attractor of a hyperbolic equation with rapidly oscillating in time external force

Vishik M. I. (Institute for Information Transmission Problems, RAS)

Attractors of dynamical systems corresponding to non-autonomous equations of mathematical physics with rapidly oscillating in time exiting forces can have a very complicated structure. So, a new problem was formulated to approximate trajectory lying on such attractors by using the trajectories lying on the attractors of the corresponding averaged equations which, in many cases, can have a simple structure. Besides, there is an important question how to estimate the error of this approximation.

Mentioned above approximations and error estimates were found for the non-autonomous dissipative wave equation of the form

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \Delta u - \delta^2 u - f(u) + g(x, t/\varepsilon)$$

with periodic boundary conditions, i.e. $x \in \mathbb{T}^n$. Here $\delta^2 > 0,\ \gamma > 0$, $|f(u)| \leq C\left(|u|^{\rho+1} + 1\right)$, where $\rho < 2/(n-2)$ for $n \geq 3$. The function

$f(u)$ also satisfies some additional conditions. The function $g(x, t/\varepsilon)$ has an average $\bar{g}(x)$ as $\varepsilon \to 0+$.

We assume that the wave equation

$$\partial_t^2 \bar{u} + \gamma \partial_t \bar{u} = \Delta \bar{u} - \delta^2 \bar{u} - f(\bar{u}) + \bar{g}(x),\ x \in \mathbb{T}^n,$$

with averaged external force $\bar{g}(x)$ has a finite number of stationary points and all of them are hyperbolic. In this case, the global attractor $\bar{\mathcal{A}}$ of the averaged equation has a simple structure: it is the union of unstable manifolds issuing from the stationary points.

We have proved the following main result: *any piece of trajectory lying on the global attractor $\mathcal{A}_\varepsilon$ of the initial equation and having the time length proportional to the logarithm* $\log(1/\varepsilon)$ *of the oscillating frequency* $1/\varepsilon$ *of the exiting force can be approximated by using a finite number of pieces of trajectories lying on the unstable manifolds of the averaged equation. We have also found the explicit formula for the error estimate of this approximation. We have proved that this error estimate is proportional to a certain power of* ε.

This result implies the following estimate for the Hausdorff distance from $\mathcal{A}_\varepsilon$ to $\bar{\mathcal{A}}$:

$$\mathrm{dist}_E \left(\mathcal{A}_\varepsilon, \bar{\mathcal{A}}\right) \leq \varepsilon^\alpha,$$

where $\alpha > 0$ and α depends on the data of the equation. Here H denotes the energy space.

The similar results concerning the approximations and error estimates are proved for some classes of non-autonomous systems of reaction-diffusion equations and for other equations of mathematical physics.

The results are obtained in collaboration with professor V. V. Chepyzhov.

Особеннонсти условий Неймана в задаче Штурма-Лиувилля с сингулярным весом

Владимиров А. А. , Шейпак И. А.
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

На отрезке $[0,1]$ рассматривается задача Штурма-Лиувилля с сингулярным весом

$$-y''(x) = \lambda\rho(x)y(x) \tag{1}$$

с условиями Дирихле или Неймана на концах отрезка.

Предполагается, что функция $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ (для задачи Неймана) или $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ (для задачи Дирихле). Знакоопределённости функции ρ не требуется, поэтому задача (1) может быть индефинитной. Даётся определение пучка $T_\rho(\lambda)$, отвечающего задаче (1). Изучаются его спектральные свойства. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Собственные значения пучка $T_\rho(\lambda)$ являются простыми.*

Дальнейшие свойства формулируются в случае арифметического самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ — первоообразной функции ρ.

Теорема 2. *Функция распределения собственных значений пучка $T_\rho(\lambda)$ имеет вид*

$$N(\lambda) = \lambda^D(s(\ln\lambda) + o(1)),$$

где $D \in (0,1)$ — спектральная размерность функции P, вычисляемая из условий самоподобия, $s(t)$ — периодическая непрерывная функция.

Если P — функция канторовского типа, то собственные значения обладают дополнительными свойствами:

Теорема 3. *В случае задачи Неймана и регулярного самоподобия собственные значения обладают свойством $\lambda_{2n-1} = \nu\lambda_n$,*

$\lambda_{2n} = \nu\mu_n$, $n = 1, 2\ldots$, где μ_n — собственные значения задачи (1) с краевым условием Неймана в нуле и третьим краевым условием в единице. ν — число, определяемое самоподобием P.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-01-00712 и грантом «Поддержки ведущих научных школ», грант № НШ-1927.2003.1.

Об оценках решений дифференциальных уравнений с последействием

Власов В. В. (МГУ)

Рассмотрим начальную задачу для системы дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}u^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m} B_j(s)u^{(j)}(t-s)ds = f(t), t > 0, \quad (1)$$

$$u(t) = g(t), t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Здесь A_{kj} - матрицы размера $r \times r$ с постоянными комплексными элементами, элементы матриц-функций $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0, h)$, числа h_k таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = h$.

Обозначим через $L(\lambda)$ характеристическую матрицу-функцию однородного уравнения (1) (см.[1]) через $l(\lambda) = detL(\lambda)$, через λ_q нули $l(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности ν_q, через Λ множество всех нулей функции $l(\lambda)$.

Теорема. *Пусть $detA_{0m} \neq 0, detA_{nm} \neq 0$, функция $g(t) \in W_2^m((-h, 0), \mathbb{C}^r)$, функция $f(t) \in L_2((0, T), \mathbb{C}^r)$ для любого T>0. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве $W_2^m((-h, T), \mathbb{C}^r)$ для любого T>0, и для ее решения $u(t)$ справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^m(t-h,t)} \leq d_0(t+1)^{M-1}exp(\varkappa_+ t)\|g\|_{W_2^m(-h,0)} +$$
$$+ d_1\sqrt{t}(\int_0^t (t-s+1)^{2(M-1)}exp(2\varkappa_+(t-s))\|f(s)\|^2_{\mathbb{C}^r}ds)^{1/2}, t \geq h; \quad (3)$$

с постоянными d_0 и d_1 не зависящими от функций g и f и величины $T > 0$, причем $\varkappa_+ = \sup\limits_{\lambda_q \in \Lambda} Re\lambda_q$, а постоянная M определяется структурой корней функции $l(\lambda)$ (подробнее см.[2]).

В случае отделимости множества Λ ($\inf\limits_{\lambda_p \neq \lambda_q} \mid \lambda_p - \lambda_q \mid > 0$) величина $M \leq N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$. При этом, оценка (3) является неулучшаемой. Она усиливает и обобщает оценки ранее установленные в [1],[3].

Работа поддержана РФФИ (грант №02-01-00790) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-1927.2003.1.

Литература

[1] Власов В.В., Медведев Д.А. Докл. РАН. 2003, т.389, №2, с.156-158

[2] Власов В.В., Иванов С.А. Алгебра и анализ, 2003,т.15, вып.4, с.115-141

[3] Власов В.В., Иванов С.А. Докл. РАН. 2004, т.396, №3, с.3-5

The Cauchy problem for strictly hyperbolic operators with small parameter at principal derivatives

Volevich L. R.

(Keldysh Institute of Applied Mathematics Russia Acad.Sci.,Moscow)

The Cauchy problem for PDO of the form

$$P(t, x, \partial_t, \partial_x, \epsilon) := \sum_{j=0}^{N} \epsilon^{N-j} P_{m-j}(t, x, \partial_t, \partial_x)$$

is considerd. Here P_j are PDO of order $m - j$ with real homogeneous principal part $P^0_{m-j}(t, x, \partial_t, \partial_x)$. Necessary and sufficient conditions on symbols $P^0_{m-j}(t, x, \tau, \xi)$ guaranteeing the existence of uniform (with respect to ϵ) two-sided energy estimates are formulated. The main part of these conditions is following: for arbitrary fixed (t, x) the pairs of polynomials $P^0_0(t, x, \tau, \xi)$ and $P^0_1(t, x, \tau, \xi)$ and $P^0_{N-1}(t, x, \tau, \xi)$ and $P^0_N(t, x, \tau, \xi)$ are strictly hyperbolic pairs. This means that 1) all these polynomials are strictly hyperbolic, 2) coefficients $P^0(t,x,1,0)$ and $P^1(t,x,1,0)$ (respectively, $P^0_{N-1}(t,x,1,0)$ and $P^0_N(t,x,1,0)$) have the same sign and 3) the zeros of $P^0_1(t,x,\tau,\xi)$ separate the zeros of $P^0_0(t,x,\tau,\xi)$, respectively, the zeros of $P^0_N(t,x,\tau,\xi)$ separate the zeros of $P^0_{N-1}(t,x,\tau,\xi)$.

All the results were obtained jointly with E. V. Radkevich.

To appear in Transactions of Moscow Mathematical Sosiety, vol. 65, 2004.

Плотность сепаратрисных связок в $\mathbb{C}^2$

Волк Д. С. (МГУ)

Рассмотрим пространство слоений в $\mathbb{C}^2$, порожденных полиномиальными векторными полями степени не выше n. В докладе будет показано, что множество слоений с сепаратрисной связкой, то есть таких, что две различные особые точки имеют общую сепаратрису, плотно в этом пространстве. Доказательство использует продолжение полиномиальных слоений в $\mathbb{C}^2$ до слоений в проективном пространстве $\mathbb{C}P2$ и опирается на свойства группы монодромии, порожденной обходами вокруг особых точек на бесконечно удаленной прямой.

Асимптотическое решение со слабой особенностью системы уравнений «мелкой воды» на плоскости.

Volosov K. A. (Moscow State University of Communication)

Построено асимптотическое решение в эллиптической области с малым эксцентриситетом. Показано, что из модели следует уравнение Гельмгольца и следует задача на собственные функции. Система мелкой воды:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \omega \mathbf{T}\mathbf{u} + \nabla \eta = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Вектор скорости $\mathbf{u} = (u, w)$, η - геопотенциал, $\mathbf{T}$ — матрица поворота на 90^0. Функция тока в несжимаемом случае $u(x,y,t) = \Psi(x,y,t)'_y, \quad w(x,y,t) = -\Psi(x,y,t)'_x$ следует $div\mathbf{u} = 0$,

$Y[t] = X'[t]/\omega$. Точка, соответствующая слабой особенности $\phi = 0$, $\psi = 0$, движется по эллипсам, $X(t)$ — решение уравнения $X''(t) + \omega^2 X(t) = 0$.

Теорема 1 Пусть решение (1) имеет вид $\Psi(x, y, t) = -xY'(t) + y * X'(t) + \Phi(\phi, \psi)|_{\phi=x-X(t),\psi=y-Y(t)}$. Тогда решение системы (первое уравнение (1)) $L_1\Phi = ((\Phi'_\phi)^2 - (\Phi'_\psi)^2)\Phi''_{\phi\psi} + \Phi'_\psi\Phi'_\phi(\Phi''_{\psi\psi} - \Phi''_{\phi\phi}) = 0$ и уравнения $\eta_{xy} = \eta_{yx} : L_2\Phi = H(\triangle\Phi + \lambda W(\Phi)) = (f'_\psi \frac{\partial}{\partial\phi} - f'_\phi \frac{\partial}{\partial\psi})\triangle\Phi = 0$ имеет вид $\Phi(\phi, \psi) = \frac{S(\phi,\psi)^{\alpha+1}}{1+S(\phi,\psi)^\alpha}$. Для всех $\alpha \in R$ функция $S(\phi, \psi)$ является решением переопределенной системы $L_iS(\phi, \psi) = 0, \quad i = 1, 2$.

Теорема 2 В обобщенных полярных координатах

$$\phi = aR\cos\theta,\ \psi = bR\sin\theta,\ R = \sqrt{(\phi/a)^2 + (\psi/b)^2}$$

асимптотическое решение (1) в эллиптической области $\mu = \varepsilon^2 = 1 - (b/a)^2$ имеет вид

$$S(\phi, \psi) = P(R) + \mu Z(R, \theta)+ \\ + \mu^2 Q(R, \theta) + O(\mu^3)|_{R=\sqrt{(\phi/a)^2+(\psi/b)^2},\theta=\arctan(\frac{b\psi}{a\phi})}.$$

и является решением переопределенной системы (6 уравнений на 3 функции) $L_{i\mu}P(R) = 0, \quad i = 1, 2, \quad L_{i1\mu}Z(R, \theta) = 0$, $L_{i2\mu}Q(R, \theta) = 0$ имеет вид $Z(R, \theta) = C_0 + (C_1\cos\theta + R/4\cos(2\theta) + C_2\sin\theta)P'_R$,

$$Q(R, \theta) = C_5 + \frac{1}{64R}\{(-16((C_1^2 - C_2^2)\cos 2\theta + 2C_1C_2\sin 2\theta)+ \\ +R^2(8\cos 2\theta - \cos 4\theta) + R(-8(-8C_3\cos\theta + C_1\cos 3\theta - 8C_4\sin\theta+ \\ +C_2\sin 3\theta)))P'_R\} + \frac{1}{64}\{(16((C_1^2 - C_2^2)\cos 2\theta + 2C_1C_2\sin 2\theta)+ \\ +R^2\cos 4\theta + R(16\cos 2\theta(C_1\cos\theta + C_2\sin\theta))P''_{RR}\}.$$

Дифференциальные операторы, высшие производные скобки и гомотопические алгебры

Воронов Т. (University of Manchester, UK)

С каждым дифференциальным оператором связана последовательность симметричных полилинейных операций, которые могут рассматриваться как «скобки». В случае нечетных операторов на супермногобразии подобные скобки появлялись в связи с формализмом Баталина–Вилковыского в квантовой теории поля. Мы показываем, что они подпадают под очень общую естественную схему так называемых высших производных скобок. Это конструкция бесконечной последовательности операций по простому набору данных на супералгебре Ли, дающая сильно-гомотопические (СГ) алгебры Ли и родственные алгебры. Конструкция мотивирована разнообразными примерами из геометрии и математической физики. В частности, она содержит стандартное описание произвольных СГ алгебр Ли на языке гомологических векторных полей и пример скобок, порожденных дифференциальным оператором (типа оператора Баталина–Вилковыского).

Об усреднении решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с тонкими каналами малой длины

Яблоков В. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Рассматривается задача усреднения решений эллиптических уравнений второго порядка в областях, состоящих из двух частей, соединенных ε-периодической системой тонких каналов, представляющих собой прямые цилиндры длины ε^q, (ε – малый параметр, $q = \mathrm{const} > 0$) и диаметра $a_\varepsilon = o(\varepsilon^q)$, количество каналов $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{1-n})$, где $n \geq 3$ – размерность пространства. На границе контакта областей и на боковой поверхности каналов ставится краевое условие Неймана, а на остальной части границы – условие Дирихле. Автор изучает асимптотику решений, выписывает предельную задачу, получает оценку близости решений исходной и предельной задач.

Исследование системы Лоренца с помощью Шварциана.

Якушкин Н. А. (Обнинский госудaрсотвенный технический университет атомной энергетики)

Как известно, потеря устойчивости неподвижной точки отображения или точки равновесия динамических систем может быть либо мягкой, либо жесткой. Это зависит от нормальной формы отображения. Найти же нормальную форму не всегда просто. В своей статье [1] Сатаев Е.А указал на возможность избежания сложной процедуры построения нормальной формы. Сатаев Е.А обобщил понятие производной Шварца на многомерные отображения и потоки.

Мой доклад посвящен использованию теории, развитой Сатаевым, для системы Лоренца. Мной рассмотрены возникающие при этом трудности и способы их преодоления.

Литература

[1] Сатаев Е.А. *Производная Шварца для многомерных отображений и потоков.* //Математематический сборник том 190 №1.

Infinitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations

Masaru Yamaguchi (Department of Mathematics, Tokai University, Japan)

We shall consider 3D wave equations with time-independent nonlinear forcing term in 3D-ball. We shall construct infinitely many time-periodic radially symmetric solutions with different periods. To this end we shall use some number-theoretic estimstes of the periods and precise estimates of solutions of some ODE related to the wave equations.

Continuous Dependence of Solutions from Coefficients of Differential-Operator Equations and Boundary Conditions

Yurchuk N. I. (Belarusian State University, Minsk, Belarus)

Using a priori estimates, a continuous dependence of solutions from coeficients of differential-operator equations and boundary conditions is proved. The obtained results are applied to construct the methods for the approximate solutions and to regularize of the non-corrrect problems.

Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов с точками поворота

Юрко В. А. (Саратовский госуниверситет)

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра следующего вида:

$$y''(x) + (r(x)\rho^2 + p(x)\rho + q(x))y(x) = 0. \qquad (1)$$

Здесь ρ– спектральный параметр, функции $r(x)$, $p(x)$, $q(x)$ непрерывны на заданном интервале, причем функция $r(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках, которые называются точками поворота. Исследуется обратная задача спектрального анализа для пучка (1) с точками поворота. Вводятся и изучаются спектральные характеристики, задание которых однозначно определяет коэффициенты пучка. Основным методом исследования является метод спектральных отображений [1]. Развивая идеи этого метода применительно к пучкам вида (1), мы доказываем теорему единственности решения обратной задачи, получаем конструктивную процедуру ее решения и даем необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования E02-1.0-186. и гранта Университеты России УР.04.01.042.

Литература

[1] Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанно-составного типа в неограниченной области

Зарубин А. Н. (Орловский государственныый университет)

В области $D = R^2$ рассмотрим уравнение

$$T\,F\,u = 0, \tag{1}$$

где $T \equiv L - H(x-\tau)H(y(\pi-y))R_x^\tau$, $F \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} - \lambda$, $L \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathrm{sgn}y(\pi-y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, причем R_x^τ – оператор сдвига по переменной x: $R_x^\tau q(x,y) = q(x-\tau,y)$; $0<\tau\equiv\mathrm{const}$, $\lambda\equiv\mathrm{const}$, $H(\xi)$ – фукнция Хевисайда, $u = u(x,y)$.

В случае $R_x^\tau \equiv 0$ и одной линии параболического вырождения ряд краевых задач для уравнения (1) исследован в [1].

Пусть $\gamma_i : x = (-1)^i y$, $\rho_i : x = (-1)^i(y-\pi)$ – характеристики уравнения $L\,u = 0$, $J_i = \{(x,y) : x\in R,\ y = (i-1)\pi\}$ $(i = 1,\,2)$.

Задача G. *Найти в области D функцию $u(x,y)$ из класса непрерывных в D и регулярных в $D\backslash(\gamma_1\cup\gamma_2\cup\rho_1\cup\rho_2\cup J_1\cup J_2)$ решений уравнения* (1)*, удовлетворяющих условиям*:

1. $$u(0,y) = \begin{cases} \alpha(y),\ y\ge\pi, \\ \beta(y),\ 0\le y\le\pi, \\ \gamma(y),\ y\le 0; \end{cases} \tag{2}$$

2. $$u\left((-1)^i y, y\right) = h_i(y),\ y\le 0; \tag{3}$$

$$u\left((-1)^i(y-\pi), y\right) = \psi_i(y),\ y\ge\pi; \tag{4}$$

3. *$F\,u(x,y)$ ограничена при $x^2+y^2\to+\infty$ и непрерывна во всех конечных точках плоскости, а ее производные* $\dfrac{\partial F\,u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F\,u}{\partial y}$

непрерывны во всех конечных точках области D за исключением, быть может, γ_i, ρ_i $(i = 1, 2)$, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы;

4. $$\gamma(y),\, h_i(y) \in C^2(-\infty, 0] \cap C^3(-\infty, 0);$$

$$\alpha(y),\, \psi_i(y) \in C^2[\pi, +\infty) \cap C^3(\pi, +\infty);$$

$$\beta(y) \in C^2(0, \pi).$$

Доказана теорема единственности и существования решения.

Асимптотика скорости сходимости для некоторых линейных систем

Зейфман А. И. (Вологодский госпедуниверситет и ВНКЦ ЦЭМИ РАН)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, описывающая процесс рождения и гибели с пространством состояний $S_N = \{0, \dots, N\}$. Матрица A такой системы является якобиевой; ее поддиагональные элементы a_k и наддиагональные элементы b_k положительны, а сумма элементов каждого столбца равна нулю. Пусть Σ_N — спектр матрицы A, а $(-\chi_N)$ и $(-\beta_N)$ — соответственно нижняя и верхняя грани множества $\Sigma_N \setminus \{0\}$. Как известно, все точки $\Sigma_N \setminus \{0\}$ действительны, отрицательны и различны. Положим $\alpha_k = a_k + b_{k+1} - \delta_{k+1}a_{k+1} - \delta_k^{-1}b_k$, $\zeta_k = a_k + b_{k+1} + \sigma_{k+1}a_{k+1} + \sigma_k^{-1}b_k$, где $\delta_k > 0,\ \sigma_k > 0$.

Известно [1], что существуют единственные положительные последовательности $\{\delta_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ такие, что $\alpha_k = \beta_N,\ \ \zeta_k = \chi_N,\ \ k = 0, \dots, N-1$.

В настоящей работе с помощью изучения $\{\delta_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ исследуется асимптотика β_N и χ_N для моделей среднего поля (для которых $a_k = (N-k)\lambda_k,\ b_{k+1} = (k+1)\mu_k,\ k = 0, \dots, N-1$, см [1]) в случае, когда число взаимодействующих частиц $N \to \infty$, и выясняется, что для широкого класса таких моделей $\beta_N = O(N), \quad \chi_N = O\left(N\left(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}\right)\right)$. Исследуется также асимптотика β_N и χ_N для модели, описывающей систему массового обслуживания $M/M/S/S$ в случае, когда $S \to \infty$.

Литература

[1] Грановский Б. Л., Зейфман А. И. *О нижней границе спектра для некоторых моделей среднего поля.* Теория вероятн. и прим., 2004, вып. 1.

Spatio-temoral chaos in reaction-diffusion systems in unbounded domains

Zelik S.

We give an example of a reaction-diffusion system in $\mathbb{R}^n$ such that its attractor contains an infinite-dimensional hyperbolic set which is homeomorphic to $(n+1)$-dimensional Bernoulli scheme $M := \{0,1\}^{\mathbb{Z}^{n+1}}$ and the associated Bernoulli shifts are conjugated by this homeomorphism to the spatio-temporal dynamics on the attractor. This example extendes the Sinai-Bunimovich model of spatio-temporal chaos from lattice dynamical systems to the case of continuous media.

Проблема устойчивости резонансных решений ограниченных задач многих тел

Земцова Н. И. (ВЦ РАН),
Ихсанов Е. В. (Атырауский инженерно-гуманитарный институт, Казахстан)

В ограниченных задачах многих тел существуют такие значения гравитационного и геометрического параметров, для которых собственные значения линеаризованной системы дифференциальных уравнений рационально соизмеримы (находятся в "резонансе"). Исследование устойчивости по Ляпунову таких стационарных решений проведено на основе КАМ-теории, в частности, теорем А.П.Маркеева.

Выведены условия устойчивости и неустойчивости данных резонансных решений для ограниченных задач шести и десяти тел.

Литература

[1] Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел*, Монография, 2-е издание - Москва, Изд-во РУДН, 2002, 209с.

[2] Zemtsova N.I. *Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry*, - Kiev: // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, V3(1), 2003, pp.105-116.

[3] E.A.Grebenikov, E.V.Ikhsanov, N.I.Zemtsova, *Linear Stability of Stationary Solutions of the Ring-Shaped Newton Ten-Body Problem*, TUM, Proceedings of the 6-th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, Passau, Germany, September 22 - 26, 2003, p. 179-186

[4] Маркеев А.П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.*

Sharp Bounds for the fundamental solution of Fokker-Plank equation

Zheng W. (University of California, USA)

Let $u(x,t,y)$ be the fundamental solution to the following Fokker-Plank equation in $R^n \times R_+$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\Delta_y u - \div_y(ub(y,t))$$

where $b(y,t) = (b_i(y,t))_{i=1,\dots,n}$ is a vector-valued measurable function such that $|b_i(y,t)| \leq 1$. We prove

$$\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{|x^i-y^i|/\sqrt{t}}^{\infty} ze^{-(z+t)^2/2}dz\right) \leq$$
$$\leq u(x,t,y) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{|x_i-y_i|/\sqrt{t}}^{\infty} ze^{-(z-t)^2/2}dz\right)$$

Moreover, the upper and lower bounds are attendable when $b_i(y,t) = sgn(z_i - y_i)$ and $b_i(y,t) = sgn(y_i - z_i)$ respectively.

О нелинейных гиперболических системах уравнений типа Лиувилля

Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я. (Институт Математики РАН, Уфа)

Известно, что в скалярном случае обрыв цепочки инвариантов Лапласа линеаризации гиперболического уравнения является критерием принадлежности этого уравнения к классу точно интегрируемых уравнений типа Лиувилля. Целью настоящей работы является обобщение этого факта на случай нелинейных систем гиперболичских уравнений. Введено понятие обобщенных инвариантов Лапласа для систем уравнений и получены критерии их существования и единственности. Существование и единственность завершающейся нулем цепочки обобщенных инвариантов Лапласа предложено считать определением систем типа Лиувиля. Показано, что экспоненциальные системы с матрицами Картана простых конечномерных алгебр Ли удовлетворяют этому определению. Предложена схема построениея симметрий и интегралов.

Basis properties of eigenfunctions of nonlinear Sturm-Liouville problems

Zhidkov P. E. (JINR, Dubna, Russia)

We consider a number of nonlinear Sturm-Liouville-type problems and establish results on basis properties in L_2 for systems of their eigenfunctions (or solutions). The following problem is one of those we deal with:

$$-u''+f(u^2)u = \lambda u,\ \ u = u(x),\ \ x \in (0,1),\ \ u(0) = u(1) = 0,\ \ u'(0) > 0,$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx = 1.$$

Here all quantities are real, λ is a spectral parameter, and f is a given function. The result for this problem is that if $f(s)$ is a smooth nondecreasing function of $s \geq 0$, then for any nonnegative integer n there exists a unique eigenfunction u_n that has precisely n zeros in the interval $(0,1)$ and the sequence $\{u_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ of all eigenfunctions is a basis (in addition, a Bari basis) in $L_2(0,1)$. Also, we consider an analog of the Fourier transform associated with a nonlinear problem on a half-line.

Basic automorphisms of cartan foliations and cartan orbifolds

Zhukova N. I. (Nizhny Novgorod State University)

Let $Aut(M,\mathcal{F})$ be a group of automorphisms of a foliation $(M,\mathcal{F})$ and $Aut_L(M,\mathcal{F}) := \{f \in Aut(M,\mathcal{F}) | f(L_\alpha) = L_\alpha,\ \forall L_\alpha \in \mathcal{F}\}$. The quotient group

$$Aut_B(M,\mathcal{F}) := Aut(M,\mathcal{F})/Aut_L(M,\mathcal{F})$$

is called *the group of basic automorphisms* of $(M,\mathcal{F})$. We investigate complete Cartan foliations in the sense of R.A.Blumenthal (Illinois J. Math. 31, 2 (1987)). We have introduced a structure Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ for Cartan foliation and have shown that $\mathfrak{g}_0$ is invariant of this foliation. We have proved that the triviality of $\mathfrak{g}_0$ is the sufficient condition for the group $Aut_B(M,\mathcal{F})$ of Cartan foliation $(M,\mathcal{F})$ to be a Lie group. A foliation $(M,\mathcal{F})$ is called proper if any leaf of F is embedded submanifold of M. In particular, we have proved that for an arbitrary proper Cartan foliation $Aut_B(M,\mathcal{F})$ is a Lie group. Estimation of dimension of this Lie group have been found.

The large classes of foliations such as foliations with transversally projectable connection, homogeneous, Riemannian, conformal and projective foliations can be considered as Cartan foliations.

We have proved also that the group of automorphisms of Cartan orbifolds is a Lie group. Estimations of dimensions of the Lie transformation groups of different Cartan structures on orbifolds have been found.

On Stabilization for Viscous Compressible Medium Equations with Nonmonotone State Functions

Zlotnik A. A. (Moscow Power Engineering Institute)

The large–time behavior of viscous compressible heat–conducting media in the case of complicated state equations and large data is of great interest but only few results in this field are known. We consider the Navier-Stokes system describing 1d–motions of such a medium

$$\eta_t = v_x, \quad v_t = \sigma_x + g, \quad e(\eta, \theta)_t = \pi_x + \sigma v_x,$$

$$\sigma = \nu \rho v_x - p(\eta, \theta), \ \rho = \eta^{-1}, \ \pi = \kappa(\eta, \theta) = \rho \theta_x,$$

for $x \in (0, M), t > 0$. The sought functions $\eta > 0, v$ and $\theta > 0$, namely, the specific volume, velocity and absolute temperature, are the functions of the Lagrangian mass coordinates (x, t). The functions ρ, σ and $-\pi$ are the density (for fluids), stress and heat flux; moreover, $p(\eta, \theta)$ and $e(\eta, \theta)$ are the pressure and internal energy.

We take $p(\eta, \theta) = p_0(\eta) + p_1(\eta)\theta$ with general nonmonotone functions p_0 and p_1, which allows us to treat various physical models of nuclear fluids or thermoviscoelastic solids. For solutions to an associated initial-boundary value problem with “fixed-free"boundary conditions and arbitrarily large data, we prove a collection of the uniform-in-time bounds, including the uniform two-sided bounds for η and global energy bounds for σ and π. Moreover, in spite of possible nonuniqueness and discontinuity of the stationary density, we establish the pointwise and in L^q stabilization for η along with L^2–stabilization for σ and π as $t \to \infty$. Consequently, H^1–stabilization of v and θ is valid as well.

References

[1] B. Ducomet and A.A. Zlotnik, Stabilization for equations of one–dimensional viscous compressible heat–conducting media with nonmonotone equation of state, J. Diff. Equat., **194** (2003) 51–81.

[2] A.A. Zlotnik, Stress and heat flux stabilization for viscous compressible medium equations with a nonmonotone state function, Appl. Math. Letters., **16** (2003) 1231–1237.

Задача граничного наблюдения за упругими колебаниями

Знаменская Л. Н.
(Институт программных систем — «Университет города Переславля»)

Решена задача восстановления начальных данных для волнового уравнения по результатам наблюдений за изменением натяжения на закрепленных концах струны. Найден период времени, в течение которого необходимо производить наблюдения для полного восстановления начальных данных.

Задача граничного наблюдения решается в классе обобщенных решений из L_2, для этого с помощью априорных оценок получен явный вид решения класса L_2 краевой задачи для волнового уравнения с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$ и однородными граничными условиями первого рода.

В случае классических решений первой краевой задачи с однородными граничными условиями задача граничного наблюдения решается однозначно, при этом на функции наблюдения налагаются дополнительные условия.

В случае обобщенных решений класса L_2 первой краевой задачи задача граничного наблюдения решается неоднозначно: начальное состояние системы $u(x, 0)$ находится с точностью до произвольной постоянной.

Об одной задаче усреднения для бигармонического оператора

Зубова М.Н., Шапошникова Т.А. (МГУ)

В работе рассматривается задача о контакте двух пластин, разделенных тонким слоем с малой жескостью на изгиб.

Author Index.

Научное издание

Международная конференция, посвященная 103–летию со дня рождения И. Г. Петровского

XXI совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 16–22 мая 2004 г.

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал–макета:
Хачлаев Т.С.
Дизайн обложки: Плешанов Е.В.

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.1997.

Подписано в печать 26.04.04.
Формат 70x100/16. Бумага офс. № 1.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 20,1.
Уч.-изд.л. 18,1. Тираж 400 экз.
Заказ №   . Изд. №

Ордена «Знак почета»
Издательство Московского университета.
103009. Москва. ул. Б.Никитская. 5/7
Отпечатано в типографии МГУ им. М.В. Ломоносова