СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы

Саратов, 27 января – 3 февраля 2004 года

Издательство ГосУНЦ "Колледж"
Саратов 2004

УДК 517.5; 517.94; 518; 533.7
ББК 22.161.5

С56 **Современные проблемы теории функций и их приложения:** Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2004. – 224 с.
ISBN 5-94409-034-0

Сборник содержит тезисы докладов и научных сообщений участников 12-й Саратовской зимней школы, посвященные различным вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по теории функций.

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту 04-01-10002 г

УДК 517.5; 517.94; 518; 533.7
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 5-94409-034-0

Абанин А.В. (Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru

ДВОЙСТВЕННАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Пусть K – компакт в $\mathbb{R}$, $J(K)$ – пространство последовательностей $f = (f^{[n]})_{n=0}^{\infty}$ непрерывных на K функций (= пространство джетов на K). С каждым элементом f из $J(K)$ свяжем непрерывные на $K \times K$ функции, играющие роль остаточных членов формулы Тейлора,

$$(R_y^m f)^{[n]}(x) := f^{[n]}(x) - \sum_{k=n}^{m} \frac{f^{[k]}(y)}{(k-n)!}(x-y)^{k-n} \quad (0 \leq n \leq m;\ m \in \mathbb{N}_0).$$

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

$$(\alpha)\ \omega(2t) = O(\omega(t)); \quad (\beta) \int_1^{\infty} t^{-2}\omega(t)\,dt < \infty; \quad (\gamma)\ \ln t = O(\omega(t));$$

(δ) функция $\varphi_\omega(x) := \omega(\exp x)$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Положим для $f \in J(K)$ и $p \in \mathbb{N}_0$

$$|f|_{\omega,p} := \sup_{n \geq 0} \sup_{x \in K} |f^{[n]}(x)| \exp(-p\varphi_\omega^*(n/p)),$$

$$|f|_\omega^p := \sup_{m \geq 0} \sup_{0 \leq n \leq m} \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|(R_y^m f)^{[n]}(x)|\ (m-n+1)!}{|x-y|^{m-n+1}\ e^{p\varphi_\omega^*(\frac{m+1}{p})}},$$

где φ_ω^* – функция, сопряженная с φ_ω по Юнгу. Обозначим через $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ пространство тех f из $J(K)$, для которых все нормы $|f|_{\omega,p} + |f|_\omega^p$ конечны $(p = 0, 1, \ldots)$, и наделим его топологией, задаваемой этими нормами.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02-01-00372).

Отметим, что при $\omega(t) = \ln(1+t)$ оно совпадает с классическим пространством джетов Уитни на K.

Положим $\omega^*(r) := \sup\{\omega(t) - tr : t \geq 0\}$. Определим по этой функции пространство $A_{(\omega)}(CK)$ тех аналитических в $\mathbb{C}\backslash K$ функций g, для которых

$$\sup\{|g(z)| \exp(-p\omega^*(dist(z,K)) : z \in \mathbb{C}\backslash K\} < \infty$$

при некотором $p = p(g) > 0$, и наделим его естественной индуктивной топологией.

Основной результат работы, который является новым и в классическом случае, содержится в следующей теореме.

Теорема. *Преобразование Коши функционалов устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным к $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ пространством и $A_{(\omega)}(CK)$.*

В докладе будут также представлены применения этой теоремы к неконструктивным доказательствам теорем типа Уитни о продолжении и удобным для приложений описаниям распределений с носителями, содержащимися в компактах, которые не обязательно выпуклы. Последнее можно воспринимать как обобщение теоремы Пэли-Винера-Шварца и ее аналогов.

Абанин А.В., Шабаршина И.С., Налбандян Ю.С.
(Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru, shabarshina@mail.ru

ПРОДОЛЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДО ЦЕЛЫХ С СОГЛАСОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ РОСТА И ТЕОРЕМЫ ТИПА ПЭЛИ-ВИНЕРА-ШВАРЦА[2]

Пусть $\psi: [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)$ – неубывающая по каждой переменной, позитивно однородная порядка $\rho \geqslant 1$ функция. Для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $\psi(x) := \psi(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$.

Пусть, далее, $\omega: [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная неубывающая функция, для которой выполнены условия:

(α) $\exists K > 1: \quad \omega(2t) \leqslant K(w(t)+1), \ \forall t \geqslant 0;$

(β) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty;$

(γ) $\ln t = o(\omega(t)), \ t \to +\infty;$

(δ) $\omega(e^t)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Положим $\omega(z) := \omega(|z|)$ для $z \in \mathbb{C}^n$ (здесь $|z| = \max\{|z_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$).

[2]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02-01-00372).

Будем использовать стандартные обозначения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс ($\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), а $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ – его длина; $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$, $\partial^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $r^\alpha := r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n}$.

Основным результатом работы является

Теорема.

1. Пусть u – целая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u(z)| \leqslant e^{\omega(z)+\psi(\operatorname{Im} z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда для любого мультииндекса α имеет место оценка

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant e^{\omega(2x)} \cdot \inf_{r \in \mathbb{R}^n_+} \frac{\alpha! e^{\omega(2r)+\psi(r)}}{r^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Пусть, обратно, $u(x)$ – бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция, для которой при некотором $\varepsilon > 0$ и всех мультииндексах α

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant e^{\omega(x)} \cdot \inf_{r \in \mathbb{R}^n_+} \frac{\alpha! e^{\psi(r)+\varepsilon|r|^\rho}}{r^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда u продолжается до целой в $\mathbb{C}^n$ функции и существует $C > 0$, зависящее от ε, такое, что

$$|u(z)| \leqslant C e^{\omega(z)+\psi(\operatorname{Im} z)+2\varepsilon|\operatorname{Im} z|^\rho}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Этот результат позволяет дать новые, не выходящие за рамки действительного анализа, формулировки теорем типа Пэли-Винера-Шварца в случае ультрараспределений с носителями в выпуклых симметричных относительно всех координатных гиперплоскостей компактах. Подобные версии теоремы Пэли-Винера-Шварца ранее рассматривались в [1] для распределений с компактными носителями и в [2] для ультрараспределений в рамках подхода Данжуа-Карлемана (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandache N. *A Paley–Wiener theorem and pseudolocal operators* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1990. – V. 35. – P. 321-328.

2. Chung J., Chung S.-Y., Kim D. *Real version of Paley–Wiener theorem for hyperfunctions and ultradistributions* // Preprint.

3. Komatsu H. *Ultradistributions, I* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A – 1973. – V. 20. – P. 25-105.

Агаев И.А. (Каспийск)
vazipat@mail.dgu.ru

О СИСТЕМАХ СИДОНА

В работе [2] доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть ортонормированная система функций (О.Н.С) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, удовлетворяет условию: $0 < m \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant M < \infty$ для любого $n = 1, 2, \dots$, п.в. $x \in [a,b]$. Тогда существует подсистема Сидона $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$; причем $n_k \leqslant \lambda^k$, $k = 1, 2, \dots$, $\lambda > 1$ и, значит,*

$$\alpha(n) = \sum_{n_k \leqslant n} 1 \geqslant c_1 \ln n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Напомним, что О.Н.С. $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, называют системой Сидона в том случае, когда для любого полинома по этой системе $P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n g_n(x)$ имеет место соотношение:

$$c'' \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant \|P\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant c' \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

Свойства тригонометрических подсистем Сидона хорошо известны (см. [1]). Рассмотрим О.Н.С. Уолша $W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, $w_0(x) \equiv 1$, $w_n(x) = r_{n_1+1}(x) \cdot r_{n_2+1}(x) \cdot \dots \cdot r_{n_s+1}(x)$, где $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_s}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_s$, $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Радемахера.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $\{w_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – любая подсистема W, являющаяся системой Сидона, тогда*

$$\alpha(n) \leqslant c_2 \ln n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Здесь и в теореме 1 $m, M, \lambda = \lambda(m, M)$, $c_1 = c_1(m, M)$, c_2, c', c'' – некоторые постоянные.

Таким образом, оценку (1) в теореме 1 улучшить нельзя. Основное место в доказательстве теоремы 2: для заданной монотонной последовательности $\gamma(n) \to \infty$ и совокупности чисел $\varepsilon_k^{(j)} = \pm 1$, $1 \leqslant k \leqslant S$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{n+1}$, n – натуральное число, $S = S(n) \geqslant n\gamma(n)$, доказывается, что для $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n > n(\varepsilon)$ существует набор чисел $a_k = \pm 1$, $1 \leqslant k \leqslant S$, такой, что

$$\left| \sum_{k=1}^{S} a_k \varepsilon_k^{(j)} \right| < \varepsilon S, j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}.$$

При этом используется вероятностная лемма.

Автор выражает благодарность проф. И.И. Шарапудинову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эдвардс Р. *Ряды Фурье.* Т. 2.– М.: Мир, 1985. – С. 261–285.

2. Агаев И. А. *О некоторых свойствах лакунарных ортогональных систем: Автореф. дисс. кандидата физ.-мат. наук. 01.01.01.* – Москва, 1987. – 66 с.

Акопян Р.Р. (Озерск)
info@vm.oti.ru

НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ[3]

В большом числе работ исследовались точные неравенства Колмогорова на оси и полуоси (подробнее см. в обзорных работах [1], [2]). Доклад посвящен неравенствам на пространствах Харди $H_p\,(|z|<1)$ функций, аналитических в круге $|z|<1$, с нормами $\|f\|_{H_\infty} = \sup\left\{|f(z)| : |z|<1\right\}$; $\|f\|_{H_p} = \lim\limits_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}$, $0<p<\infty$. Пусть $\Omega^{k,n}_{p,q,r}$ – функция двух неотрицательных переменных λ и μ, задаваемая формулой

$$\Omega^{k,n}_{p,q,r}(\lambda,\mu) = \sup\left\{\|D^k f\|_{H_q} \ : \ \|f\|_{H_p}\le\lambda,\ \|D^n f\|_{H_r}\le\mu\right\}, \qquad (1)$$

где $Df(z) = zf'(z)$, $D^s f(z) = D\left(D^{s-1}f(z)\right)$; $1\le k<n$. Из определения (1) функции $\Omega^{k,n}_{p,q,r}$ вытекает следующее точное неравенство Колмогорова $\|D^k f\|_{H_q}\le\Omega^{k,n}_{p,q,r}\left(\|f\|_{H_p},\|D^n f\|_{H_r}\right)$.

Теорема. *1. Для $0<q\le\infty$ и любых $\lambda,\mu\ge 0$ справедливо*

$$\Omega^{k,n}_{\infty,q,\infty}(\lambda,\mu)\le\min\{\mu,\lambda^{\frac{n-k}{n}}\mu^{\frac{k}{n}}\}. \qquad (2)$$

2. Для $0<q\le 2$, $2\le p,r\le\infty$ и любых $\lambda,\mu\ge 0$ справедливо

$$\Omega^{k,n}_{p,q,r}(\lambda,\mu)\le$$
$$\mu\min_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{(\nu^{2k}(\nu+1)^{2n}-\nu^{2n}(\nu+1)^{2k})(\lambda/\mu)^2+(\nu+1)^{2k}-\nu^{2k}}{(\nu+1)^{2n}-\nu^{2n}}\right)^{1/2}. \qquad (3)$$

В таблице указаны значения параметров, при которых в (2) или (3), соответственно, при всех $\lambda\ge 0$ имеет место равенство, а также вид экстремальных в (1) функций.

n	k	p	q	r	μ	
2	1	∞	∞	∞	$\ge\lambda$	$\lambda(z-\xi)/(1-z\xi), 0\le\xi\le 1$
любое	$1\le k<n$	∞	>0	∞	$\le\lambda$	*линейные*
любое	$1\le k<n$	∞	>0	∞	$\lambda m^n, m\in\mathbb{N}$	λz^m
любое	$1\le k<n$	2	2	2	≥ 0	$\alpha z^\nu+\beta z^{\nu+1}, \alpha^2+\beta^2=\lambda^2$
любое	$1\le k<n$	≥ 2	≤ 2	≥ 2	$\le\lambda$	*линейные*
любое	$1\le k<n$	≥ 2	≤ 2	≥ 2	$\lambda m^n, m\in\mathbb{N}$	λz^m

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-06379); Минобразования РФ и правительства Челябинской обл. (проект № 03-01-в).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арестов В.В. *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи* // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51. – Вып. 6(312). – С. 89-124.

2. Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г. *Неравенства для производных* // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика, механика. – М.:Наука, 1985. – С. 387-390.

Акулич Е.В. (Беларусь, Минск)
lebedev@bsu.by

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть C – алгебра кусочно-непрерывных функций на единичной окружности S^1, S – сингулярный интегральный оператор, действующий в $L^2(S^1)$, а P – проектор в пространстве Харди H^2 вида

$$P = \frac{I+S}{2}.$$

Через D мы обозначим алгебру, порожденную операторами, действующими следующим образом:

$$d_c f = P(cf),\ f \in H^2,\ c \in C.$$

Пусть U_h – оператор умножения на функцию $a(m)$, $|a(m)| = 1$, непрерывную на $S^1 \setminus \{m_0\}$, которая в окрестности точки m_0 имеет вид

$$a(m) = \begin{cases} e^{-ih\ln(m_0-m)} & \text{при } m < m_0, \\ e^{-ih\ln(m-m_0)} & \text{при } m_0 < m; \end{cases}$$

и V_α – оператор вида

$$(V_\alpha f)(m) = f(\alpha(m)),$$

где $\alpha : M \to M$ – диффеоморфизм кривой M, для которого точка m_0 является неподвижной и такой, что в окрестности этой точки отображение α имеет вид

$$\alpha(m) = m_0 + \lambda(m - m_0),\quad \lambda > 0.$$

В докладе строится символическое исчисление для элементов алгебры, порожденной операторами $b \in B$, U_h, $h \in \mathbb{R}$, V_α, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, и в терминах этого исчисления находятся условия фредгольмовости для исследуемых операторов.

Акулич Е.В., Лебедев А.В. (Беларусь, Минск)
lebedev@bsu.by

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть M – ориентированная замкнутая простая кривая Ляпунова, B – алгебра, порожденная операторами, действующими в $L^2(M)$, вида

$$b = c_1 + c_2 S,$$

где S – сингулярный интегральный оператор, c_1 и c_2 – операторы умножения на кусочно-непрерывные функции. Пусть U_h – оператор умножения на функцию $a(m)$, $|a(m)| = 1$, непрерывную на $M \setminus \{m_0\}$, которая в окрестности точки m_0 имеет вид

$$a(m) = \begin{cases} e^{-ih\ln(m_0-m)} & \text{при } m < m_0, \\ e^{-ih\ln(m-m_0)} & \text{при } m_0 < m; \end{cases}$$

и V_α – оператор вида

$$(V_\alpha f)(m) = f(\alpha(m)),$$

где $\alpha : M \to M$ – диффеоморфизм кривой M, для которого точка m_0 является неподвижной и такой, что в окрестности этой точки отображение α имеет вид

$$\alpha(m) = m_0 + \lambda(m - m_0), \quad \lambda \neq 0.$$

В докладе строится символическое исчисление для элементов алгебры, порожденной операторами $b \in B$, U_h, $h \in \mathbf{R}$, V_α, $\lambda \in \mathbf{R}$, и в терминах этого исчисления находятся условия фредгольмовости для исследуемых операторов.

Альдешова Ж.Ж, Мусабаева Г.К. (Казахстан, Астана)
er-nurs@yandex.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА L_{2q}

Бочкарев С.В. [1] для функций из $L_{2q}[0,1]$, $2 < q \leqslant \infty$ получил верхнюю оценку коэффициентов Фурье по ортонормированной системе Φ ограниченных в совокупности функций:

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}(a_k^*)^q\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{q/2-1}\right)^{1/q} \leqslant c\|f\|_{L_{2q}};$$

в частности,

$$\sup_{k>1}\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{1/2} a^* \leqslant c\|f\|_{L_{2\infty}}. \tag{1}$$

Им же доказано, что для некоторого класса мультипликативных систем данные неравенства не улучшаемы по порядку.

В работе Нурсултанова Е.Д [2] в случае $q = \infty$ для регулярной системы Ψ было получено уточнение (1). Пусть M – множество всех конечных арифметических прогресий $A \subset N$. Через $[A]_M$ обозначим число $[A]_M = \inf\left\{l : A = \bigcup\limits_{k=1}^{l} I_k, I_k \in M\right\}$, $|A|$ – количество элементов во множестве A. Тогда верно

$$\sup_{A\subset N}\frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}}\ln\left(1+[A]_M\right)^{\frac{1}{2}}}\left|\sum_{m\in A}\hat{f}(m)\right| \leqslant C\left\|f\right\|_{L_{2\infty}}.$$

Верна следующая

Теорема. *Пусть* $\Psi = \{e^{2\pi ikx}\}_{k\in Z}$ *– тригонометрическая система,* M *– множество всех арифметических прогрессий из* Z , $[A]_M = \inf\left\{l : A = \bigcup_{k=1}^{l} I_k, I_k \in M\right\}$. *Для любой функции* $f \in L_{2q}[0,1]$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{A\subset N}\frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}}\ln\left(1+[A]_M\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}\left|\sum_{m\in A}\hat{f}(m)\right| \leqslant C_p\left\|f\right\|_{L_{2q}},$$

где C_p *не зависит от выбора функции* $f \in L_{2q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочкарев В.С. *Теорема Хаусдорфа-Юнга-Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства* // Труды МИРАН. – 1997. – Т. 219. – С. 103-114.

2. Нурсултанов Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье из* L_p*-пространств* // Изв. РАН. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 95-122.

Андриенко В.А. (Украина, Одесса)
andrienko@paco.net

СКОРОСТЬ СУММИРОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ВОРОНОГО[4]

Пусть последовательности $0 < p_n \uparrow$ и $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k$ удовлетворяет следующим условиям:

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке украинско-французской программы «Днепр» (проект М/262-2003)

а) $(n+1)p_n = O(P_n)$;

б) $(n+1)^{-1}P_n \uparrow$;

в) $(n+1)^{-1}P_n^{\beta} = O(1)$ для некоторого $\beta \in (0,1)$, а $f(x)$ есть L^2-сумма ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \qquad \{c_n\} \in l^2, \qquad x \in [a,b], \tag{1}$$

и $W_n(p;f;x) = P_n^{-1}\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}c_k\varphi_k(x)$ – его средние Вороного.

Показано, что для рассматриваемого класса методов Вороного скорость приближения функции $f(x)$ п.в. средними Вороного такая же, как и в случае приближения средними Чезаро положительного порядка (см. [1]). Например, имеет место

Теорема. *Пусть последовательность $\lambda(n) > 0$ такова, что*

а) $\gamma(n) = \lambda(n)/\ln\ln n \uparrow$;

б) $\lambda(n)/n\ln\ln n \downarrow 0$.

Тогда

1) если

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\lambda^2(n) < \infty, \tag{2}$$

то для ортогонального ряда (1) по любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ п.в. на $[a,b]$

$$f(x) - W_n(p;f;x) = o_x\{\ln\ln n/\lambda(n)\} = o_x\{1/\gamma(n)\}; \tag{3}$$

2) если выполнено одно из условий: (α) $\mu(n) = n/\lambda(n) \uparrow \infty$ и $\lambda(n)\exp(-\ln^{\alpha} n) \downarrow$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$; (β) $\mu(n) \uparrow \infty$, но $\mu(n)\exp(-\ln^{\alpha} n) \downarrow$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$; (γ) $\mu(n) \downarrow$, то оценка (3) окончательна, т.е. для любой последовательности $v(n) \to \infty$ найдется ортогональный ряд такой, что выполнено условие (2) и для всех $x \in [a,b]$ верхний предел $\lim_{n\to\infty}\sup v(n)\gamma(n)|f(x) - W_n(p;f;x)| = \infty$.

Следствие. *Для рассматриваемого класса методов Вороного $(\ln\ln n)^2$ является точным множителем Вейля для W_n-суммируемости.*

Доказаны еще две теоремы, показывающие характер изменения скорости в (3) с ростом $\lambda(n)$. В частности, для $\lambda(n) = n^{\gamma}$, $(0 < \gamma < 1)$ получается наилучший возможный порядок $o_x\{1/\lambda_n\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrienko V.A. *On the rate of Cesáro summability of orthogonal series* // Analysis Math. - 1989. – V. 15, № 4. – P. 263-281.

Антоненкова О.Е. (Брянск)
anto-olga@yandex.ru

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, ..., z_n) : |z_j| < 1, j = \overline{1,n}\}$ – единичный поликруг в C^n, T^n – его остов. $\vec{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, ..., q_n)$, $0 < p_j, q_j < +\infty$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1,n}$, $\vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)$, ω_j – положительные функции, суммируемые на интервале $(0,1)$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через $L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ пространство измеримых в U^n функций f, для которых $\|f\|_{L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})} = \left(\int\limits_0^1 \omega_n(1 - r_n) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \left(\int\limits_0^1 \omega_1(1 - r_1) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\varphi_1}, ..., r_ne^{i\varphi_n})|^{p_1} \, d\varphi_1\right)^{\frac{q_1}{p_1}} r_1dr_1\right)^{\frac{p_2}{q_1}} ...d\varphi_n\right)^{\frac{q_n}{p_n}} r_ndr_n\right)^{\frac{1}{q_n}} < +\infty.$

Подпространство $L^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, состоящее из голоморфных в U^n функций, обозначим через $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$. Для формулировки основного результата работы введем также обозначения. D^α – интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля дробного порядка $\alpha \in R$. Пусть $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$, положим $e_z = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\xi_j z_j}$. Пусть $\vec{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, ..., q_n)$, где $p_j > 1$, $j = \overline{1,k}$; $0 < p_j \le 1$, $j = \overline{k+1,n}$, $1 \le k \le n$, $q_j > 1$, $j = \overline{1,m}$, $0 < q_j \le 1$, $j = \overline{m+1,n}$, $1 \le m \le n$, $k \le m$, обозначим через $\Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ множество всех голоморфных в U^n функций g, для которых $\|g\|_{\Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})} = \sup\limits_{(r_{m+1}e^{i\varphi_{m+1}}, ..., r_ne^{i\varphi_n}) \in U^{n-m}} \prod\limits_{j=m+1}^{n} \frac{(1-r_j)^{\alpha_j+1-\frac{1}{p_j}+1-\frac{1}{q_j}}}{(\omega_j(1-r_j))^{\frac{1}{q_j}}} \cdot$

$$\cdot \sup_{r_{k+1},...,r_m \in (0,1)} \prod_{j=k+1}^{m} \frac{(1-r_j)^{\alpha_j-\frac{1}{q_j}+1}}{(\omega_j(1-r_j))^{\frac{1}{q_j}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \|D^{\alpha+1}g(r_1e^{i\varphi_1}, ..., r_ne^{\varphi_n})\|^{p'_{k+1}}_{A^{p'_1,...,p'_k,q'_1,...,q'_k}(\omega_{\alpha_1},...,\omega_{\alpha_k})} d\varphi_{k+1}\right)^{\frac{p'_{k+2}}{p'_{k+1}}} ...d\varphi_m\right)^{\frac{1}{p'_m}} < +\infty,$$

где $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q_j} - 1 + \frac{1}{p_j}$, $j = \overline{1,n}$. Здесь $\frac{1}{p'_j} + \frac{1}{p_j} = 1$, $\frac{1}{q'_j} + \frac{1}{q_j} = 1$, $j = \overline{1,k}$, $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t)\left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^{q_j}$, $j = \overline{1,k}$.

Теорема. *Пусть $\vec{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\vec{q} = (q_1, ..., q_n)$, где p_j, q_j описаны выше, $\vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in U^n$. Тогда, если Φ – линейный непрерывный функционал на $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, то $g \in \Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ и Φ представим в* *виде:*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\xi) g(\rho\bar{\xi}) dm_n(\xi), \tag{1}$$

при этом существуют положительные константы c_1, c_2 *такие, что*

$$c_1 \|g\|_{\Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})} \le \|\Phi\| \le c_2 \|g\|_{\Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})}. \tag{2}$$

Верно и обратное: любая функция $g \in \Lambda^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$ *по формуле* (1) *порождает линейный непрерывный функционал на* $A^{\vec{p},\vec{q}}(\vec{\omega})$, *для которого справедливы оценки* (2).

Замечание 1. Аналог этой теоремы доказан также для всех $0 < p_j, q_j < +\infty$.

Замечание 2. В том случае, когда $p_j = q_j$, $j = \overline{1,n}$, утверждение теоремы установлено в работе [1], а когда $p_j = q_j = p$, $j = \overline{1,n}$ – в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. *Ограниченные проекторы и линейные непрерывные функционалы в весовых пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой.* – Брянск: Изд-во БГУ, 2002. - 26 с.
2. Шамоян Ф.А. *Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций* // Сиб. мат. жур. – 1990. – Т. 31, № 2. – С. 197-215.

Асеев В.В. (Новосибирск), Тетенов А.В. (Горно-Алтайск)
btp@math.nsc.ru (for Aseev), atet@mail.gasu.ru

ОБРАТНОЕ ИСКАЖЕНИЕ УГЛОВ ПРИ КВАЗИМЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Обобщенным углом в метрическом пространстве (X, ρ) называется четверка непустых множеств $\Phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$ таких, что $B_1 \cup B_2$ не пересекается с $A_1 \cup A_2$ и множество $B_1 \cup B_2$ не является одноточечным. Величиной $\alpha(\Phi)$ обобщенного угла Φ называется число

$$\alpha(\Phi) = \inf_{a_1\in A_1; a_2\in A_2} \sup_{b_1\in B_1; b_2\in B_2} \frac{\rho(a_1,a_2)\rho(b_1,b_2)}{\rho(a_1,b_1)\rho(a_2,b_2) + \rho(a_2,b_1)\rho(a_1,b_2)}.$$

В случае неоднолистных отображений постановка задачи об оценке искажений топологических углов в обычном смысле [1] невозможна из-за наличия точек ветвления. Однако, используя то, что полный прообраз обобщенного угла является обобщенным углом, мы можем получать оценки *обратного* искажения обобщенных углов при любых (неинъективных) отображениях метрических пространств. В частности, рассматривая квазимероморфные отображения [2] в пространстве $\bar{R}^n$, наделенном хордовым расстоянием, мы получаем следующий результат:

Теорема. *Пусть область $G \subset \bar{R}^n$ такова, что $\bar{R}^n \setminus G$ есть множество нулевой емкости, и пусть $f : G \to \bar{R}^n$ – непостоянное K-квазимероморфное отображение. Тогда для любого обобщенного угла $\Psi = (Q_1, \Gamma, Q_2, \Gamma)$, где $Q_1, Q_2 \subset fG$ и Γ есть невырожденный континуум в fG, имеет место оценка $\alpha(f^{-1}\Psi) \geq \omega(\alpha(\Psi))$. Здесь $f^{-1}\Psi = (f^{-1}(A_1), f^{-1}(\Gamma), f^{-1}(A_2), f^{-1}(\Gamma))$ и*

$$\omega(t) = \min\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\exp\left(-\left[\frac{K\Omega_{n-1}}{T_n(1/t)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\right)\right\},$$

где $T_n(t)$ – функция Тейхмюллера, а Ω_{n-1} – константа, зависящая лишь от n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agard S., Gehring F.W. *Angles and quasiconformal mappings* // Proc. London Math. Soc., (3) – 1965. – V. 14A. – P. 1-21.

2. Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A1 Math. – 1971. – V. 465. – P. 1-13.

Бабенко В.Ф. (Украина, Днепропетровск)
v_babenko@dp.ukrtel.net

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ НОРМАМИ ПРОИЗВОДНЫХ

В докладе будет обсуждаться следующая, восходящая к А.Н. Колмогорову, задача.

Пусть G есть $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ или $\mathbf{T}$. Пусть также заданы числа $n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$, и числа $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [1, \infty]$. Требуется охарактеризовать наборы положительных чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n$, для которых существует достаточно гладкая функция $x : G \to \mathbf{R}$ такая, что

$$\left\|x^{(k_i)}\right\|_{L_{p_i}(G)} = M_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Будет дан обзор известных, а также приведен ряд новых результатов по исследованию этой задачи.

Бадков В.М. (Екатеринбург)
Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

СГЛАЖЕННЫЕ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ[5]

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \ldots, \mu_k \in (-1, \infty)$, $g(\delta)$ – модуль непрерывности (положительный при $\delta > 0$). Тогда при $\delta \geq 0$ имеют смысл функции

[5]Работа поддержана грантами РФФИ (проект № 02-01-00783), программой «Фундаментальные исследования отделения математики РАН» (проект № Ф-12) и советом по грантам Президента РФ (НШ-1347.2003.01).

$$G_k(\mu_1,\ldots,\mu_k;g;\delta) := \int\limits_{[0,1]^k} \prod_{\nu=1}^{k}(\mu_\nu+1)u_\nu^{\mu_\nu}\cdot g(u_1\cdots u_k\delta)\,du_1\cdots du_k, \quad (1)$$

при $\mu_1=\ldots=\mu_k=0$ рассматривавшиеся в [1].

Теорема 1. *Функции* (1) *являются модулями непрерывности, причем вогнутыми, если* $g(\delta)$ *– вогнутый модуль непрерывности.*

Теорема 2. *Для функций* (1) *при всех* $\delta>0$ *верны неравенства*

$$G_1(\mu_1;g;\delta)<g(\delta),\ G_k(\mu_1,\ldots,\mu_k;g;\delta)<G_{k-1}(\mu_1,\ldots,\mu_{k-1};g;\delta),\ (k\geq 2).$$

Для фиксированных $c\in(0,1)$, $k\in\{2,3,\ldots\}$, $\mu_1>-1,\ldots,\mu_k>-1$ *можно указать вогнутый модуль непрерывности* $g(\delta)$ *такой, что для всех* $\delta>0$ *выполняются неравенства*

$$G_1(\mu_1;g;\delta)>cg(\delta),\ G_j(\mu_1,\ldots,\mu_j;g;\delta)>cG_{j-1}(\mu_1,\ldots,\mu_{j-1};g;\delta)\ \ (j\geq 2).$$

Теорема 3. *При вогнутом* $g(\delta)$ *для функций* (1) *верны неравенства*

$$G_k(\mu_1,\ldots,\mu_k;g;\delta)\geq\frac{\mu_1+1}{\mu_1+2}\cdots\frac{\mu_k+1}{\mu_k+2}g(\delta)\quad(\delta\geq 0,\ k\in\mathbb{N}), \qquad (2)$$

при $g(\delta)=\delta$ *превращающиеся в тождества. Для не обязательно вогнутого* $g(\delta)$ *константу* 1 *в правой части* (2) *следует заменить на* 1/2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадков В.М. *Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам* // Тр. МИАН. - 1980. - Т. 145. - С. 20-62.

Балашова Г.С. (Москва)
balashovags@mpei.ru

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. ПРИМЕНЕНИЯ

Условия квазианалитичности классов функций используют понятие выпуклой регуляризации посредством логарифмов (в.р.п.р.) [1] $\{M_n^c\}$ последовательностей $\{M_n\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{1/n}=\infty$. Такая регуляризация позволила получить условия нетривиальности пространств Соболева бесконечного порядка в различных областях [2]. Изучение условий вложения пространств Соболева бесконечного порядка $W^\infty\{a,p\}_{(G)}$, которые определяются неотрицательной последовательностью $\{a_n\}$, привело к необходимости регуляризовать последовательность $\{a_n\}$ так, чтобы полученная последовательность $\{a_n^{(1)}\}$ была строго положительной и определяемое ею пространство $W^\infty\{a_n^{(1)},p\}$ совпадало с исходным (в смысле принадлежности этим пространствам одних и тех же функций). Особенно не простым это оказалось для многомерных областей G. Предложено 2 метода построения матриц $\{a_\alpha^{(1)}\}$ со строго положительными элементами, которые определяют пространство Соболева бесконечного порядка, совпадающее с исходным. При этом целесообразность выбора регуляризации из двух предложенных диктуется видом матрицы $\{a_\alpha\}$. Это иллюстрируется примерами. Полученные результаты позволяют достаточно просто установить вложение и компактность вложения пространств Соболева бесконечного порядка и в случае многомерных областей [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельбрайт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* – М.: ИЛ, 1955.

2. Дубинский Ю.А. *О нетривиальности некоторых классов функций и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка* // Дифф. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 2. – С. 231-240.

3. Балашова Г.С. *Теоремы вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций нескольких переменных* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 47, № 6. – С. 3-14.

Барабошкина Н.А. (Екатеринбург)
Nataliya.Baraboshkina@imm.uran.ru

МИНИМАЛЬНАЯ КОНСТАНТА ДЖЕКСОНА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[6]

Пусть H – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (f,g), нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ и ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Наилучшим приближением элемента $f \in H$ конечномерным подпространством $Y \subset H$ называется число $E(f,Y)_H = \inf\{\|f-g\| :\ g \in Y\}$. Зафиксируем функционал p на H такой, что для каждого элемента $f \in H$ выполняются следующие свойства:

1) $p(f) \geq 0$;

2) $p(\alpha f) = \alpha p(f)$ при любом $\alpha \geq 0$;

3) при всех натуральных N справедливо неравенство $p(f - S_N(f)) \leq p(f)$, где $S_N(f) = \sum\limits_{k=1}^{N}(f,e_k)e_k$.

Обозначим через $\mathcal{K}(Y)$ наименьшую константу в неравенстве

$$E(f,Y)_H \leq \mathcal{K}(Y)p(f), \tag{1}$$

которое выполняется для всех $f \in H$. Величина $\mathcal{K}(Y)$ зависит еще и от p, но поскольку функционал p не варьируется, то явно мы это не указываем.

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00783) и программы Государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-1347.2003.1).

Основным здесь является следующее утверждение.

Теорема. *Для произвольного конечномерного подпространства $Y \subset H$ справедлива оценка $\mathcal{K}(Y) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}(F_n)$, где $F_n = \left\{g: \ g = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \ \alpha_k \in \mathbb{C}\right\}$ есть подпространство, натянутое на первые n элементов базиса.*

Очевидно, что классический модуль непрерывности $\omega_m(f,\delta)_{L_2}$ натурального порядка $m \geq 2$ при фиксированном аргументе $\delta > 0$, рассматриваемый как функционал на пространстве $H = L_2(0, 2\pi)$ комплекснозначных 2π-периодических функций, удовлетворяет условиям 1) – 3).

Рассмотрим известную задачу минимизации константы Джексона относительно подпространств размерности не выше заданной, т.е. задачу вычисления величины

$$K_l(\delta,\omega_m) = \inf \left\{K(\delta,\omega_m,Y): \ \ Y \subset L_2(0,2\pi), \ \dim_{\mathbb{C}} Y \leq l\right\}, \ l \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $K(\delta,\omega_m,Y)$ – наименьшая константа в неравенстве (1) при $p(f) = \omega_m(f,\delta)_{L_2}$ и $H = L_2(0,2\pi)$.

Теорема применительно к задаче (2), с учетом известных результатов Н.И. Черных, С.Н. Васильева, А.И. Козко и А.В. Рождественского, влечет следующее утверждение.

Следствие. $K_{2n}(\delta,\omega_m) = K_{2n-1}(\delta,\omega_m) = 1/\sqrt{C_{2m}^m}$, $\delta \geq \frac{7\pi}{5n}$, $n \geq 1$, $m \geq 2$.

Это утверждение является усилением известного результата Н.И. Черных (оценка сверху, 1967) и А.Г. Бабенко (оценка снизу, 2000), доказавших это равенство в случае $\delta \in \left[\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{m}\right)$, $n > m \geq 2$.

Задачу минимизации константы Джексона с первым модулем непрерывности решил Н.П. Корнейчук (в случае, когда наилучшее приближение в метрике L_p или C непрерывной периодической функции оценивается через ее равномерный модуль непрерывности). Аналог величины (2) для пространства $L_p(0,2\pi)$ $(1 \leq p \leq 2)$ при $m = 1$, нашли Н.И. Черных (оценка сверху) и В.И. Бердышев (оценка снизу).

Бахвалов А.Н. (Москва)
alex@abs.math.msu.su

МНОГОМЕРНЫЕ КЛАССЫ ВАТЕРМАНА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ[7]

Для промежутка I через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ из I. Обозначим

[7]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 03-01-00080, № 03-01-06154) и программ государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-1657.2003.01, МК-1643.2003.01).

через $f(I^1 \times \cdots \times I^m)$ симметрическое приращение функции f на I. Пусть $\Lambda^j = \{\lambda^j_n\}$, где $0 < \lambda^j_n \leqslant \lambda^j_{n+1}$, $\lambda^j_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\lambda^j_n = \infty$. Обозначим $\Lambda^j_k = \{\lambda^j_n\}_{n=k+1}^{\infty}$. Положим $H = \{n\}$. Для удобства при $b > a$ интервалом (b, a) будем считать интервал (a, b).

$(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$-вариацией функции $f(x)$ по всем переменным по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \cdots \times \Delta^m$ называется величина

$$V^{x^1,\ldots,x^m}_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;\Delta) = \sup_{\{I^j_{k_j}\}\in\Omega(\Delta^j)} \sum_{k_1,\ldots,k_m} \frac{|f(I^1_{k_1} \times \cdots \times I^m_{k_m})|}{\lambda^1_{k_1} \ldots \lambda^m_{k_m}}.$$

Пусть непустое $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \cdots < j_p$, а $\beta = \{1, \ldots, m\} \setminus \alpha$. Через $V^{x^\alpha}_{\Lambda^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$ обозначим $(\Lambda^{j_1}, \ldots, \Lambda^{j_p})$-вариацию f как функции от $x^{j_1}, \ldots, x^{j_p}$ по p-мерному параллелепипеду $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \cdots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных x^β (если β непусто). Скажем, что $f \in (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, если конечна величина $V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;\Delta) = \sum_{\alpha\neq\varnothing} \sup_{x^\beta\in\Delta^\beta} V^{x^\alpha}_{\Lambda^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$.

Пусть $f \in (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\Delta)$. Скажем, что $f \in C(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)V(\Delta)$, если для любого непустого $\alpha = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$ и для любого $j_k \in \alpha$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} V^{x^\alpha}_{\Lambda^{j_1},\ldots,\Lambda^{j_{k-1}},\Lambda^{j_k}_n,\Lambda^{j_{k+1}},\ldots,\Lambda^{j_p}}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = 0$ равномерно по $x^\beta \in \Delta^\beta$.

Рассмотрим преобразование Фурье интегрируемой в $\mathbb{R}^m$ функции и частичные интегралы Фурье по параллелепипедам: $\hat{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{t})}\, d\mathbf{t}$, $\sigma_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{-A^1}^{A^1} \cdots \int\limits_{-A^m}^{A^m} \hat{f}(\mathbf{u}) e^{i(\mathbf{x},\mathbf{u})}\, d\mathbf{u}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L(\mathbb{R}^m) \cap HBV(\mathbb{R}^m)$. Для заданных $\delta > 0$, $B \geqslant \delta$ и точки $\mathbf{x}$ положим $E_{\delta,B}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : \exists j\, |x^j - t^j| \leqslant \delta, \exists k\, |x^k - t^k| \geqslant B\}$. Тогда в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, в которой существуют 2^m пределов $f(x^1 \pm 0, \ldots, x^m \pm 0)$ и выполнены два условия:*
(А) $\lim\limits_{\delta\to+0} \sum V_H(f; \bigotimes_{i=1}^m (x^i, x^i \pm \delta)) = 0$ (сумма берется по 2^m комбинациям знаков);
(Б) найдутся такие $\delta_0 > 0$ и $B \geqslant \delta_0$, что $f \in CHV(\Delta)$ для любого параллелепипеда $\Delta \subset E_{\delta_0,B}(\mathbf{x})$,
имеет место равенство $\lim\limits_{\mathbf{A}\to+\infty} \sigma_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^m} \sum f(x^1 \pm 0, \ldots, x^m \pm 0)$, где $\mathbf{A} \to +\infty$ означает, что $\min\limits_j A^j \to +\infty$.

Построены также примеры, показывающие, что ни условие (А), ни условие (Б), вообще говоря, нельзя отбросить. В частности, в классе $HBV(\mathbb{R}^n)$ нет свойства локализации для интеграла Фурье, хотя из теоремы 1 следует, что в классе $HBV([-\pi,\pi)^n)$ выполняется свойство локализации для рядов Фурье.

Белов А.С. (Иваново)
asbel@ivanovo.ac.ru

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА МНОЖЕСТВЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[8]

Пусть n – натуральное число. Через $\mathbb{T}_n^+$ ($\mathbb{T}_n^{++}$) обозначим множество всех тригонометрических полиномов вида

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx), \tag{1}$$

которые удовлетворяют условию $T_n(x) \geq 0$ при всех x (соответственно, $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \cos(kx) \geq 0$ при всех x и всех $m = 1,\dots,n$).

Условимся говорить, что коэффициенты полинома (1) монотонны, если $2a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Пусть B_n – произвольное непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. В лекции речь пойдет об экстремальных задачах вида

$$D(B_n,n) = \min\{a_0 : T_n \in \mathbb{T}_n^+,\ (a_1,\dots,a_n) \in B_n\} \tag{2}$$

и

$$D_+(B_n,n) = \min\{a_0 : T_n \in \mathbb{T}_n^{++},\ (a_1,\dots,a_n) \in B_n\}. \tag{3}$$

Минимум в задачах (2) и (3) при описанных условиях всегда существует. При всех $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $g(a_1,\dots,a_n) = -\min\limits_x \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ и $g_+(a_1,\dots,a_n) = -\min\limits_{m=1,\dots,n} \min\limits_x \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos(kx)$. Тогда функции g и g_+ выпуклы и удовлетворяют условию Липшица на $\mathbb{R}^n$. Экстремальные задачи (2) и (3) можно записать, соответственно, в виде $D(B_n,n) = \min\{g(a_1,\dots,a_n) : (a_1,\dots,a_n) \in B_n\}$ и $D_+(B_n,n) = \min\{g_+(a_1,\dots,a_n) : (a_1,\dots,a_n) \in B_n\}$.

Экстремальные задачи вида (2) являются классическими. Например, если $B_n = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 + \dots + a_n = 1\}$, то по известному результату Фейера величина $D(B_n,n) = 1/n$ и единственный экстремальный полином в этой задаче – это полином с монотонными коэффициентами $T_n(x) = 2F_n(x)/n$, где F_n – ядро Фейера. Если $B_n = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 = 1\}$, то также хорошо известен результат Фейера, что в этом случае величина $D(B_n,n) = 1/(2\cos(\pi/(n+2))$ и можно показать, что соответствующий экстремальный полином единствен и имеет монотонные коэффициенты. Если $B_n = \{(a_1,\dots,a_n) \in$

[8]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00315).

$\mathbb{R}^n : a_n = 1\}$, то в этом случае $D(B_n, n) = 1$, и единственный экстремальный полином в этой задаче - это $T_n(x) = 1 + \cos(nx)$. Интересна также экстремальная задача (2) в случае, когда B_n - это множество всех точек $\mathbb{R}^n$ с натуральными координатами.

Автором получено точное решение задачи (2) в случае $B_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1\}$. В этом случае $M(n) = D(B_n, n) = \frac{1}{2}\Big(\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^2 + \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} c_k^2\Big)$, где $c_k = 2^{-2k}(k!)^{-2}(2k)!$ при $k \geq 0$. Оказалось также, что соответствующий экстремальный полином единствен, имеет монотонные коэффициенты и равен $V_n(x) = \frac{1}{2}\Big|\sum\limits_{k=0}^{n} c_{\min\{k,n-k\}} e^{ikx}\Big|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^n \cos(kx)$. Положим $\psi(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^n$. При каждом $\gamma \geq n$ автор рассмотрел экстремальную задачу

$$K_n(\gamma) = \min\{a_0 : T_n \in \mathbb{T}_n^+, a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} a_k = \gamma\}. \qquad (4)$$

Ясно, что это задача вида (2) с $B_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \gamma\}$ и $D(B_n, n) = K_n(\gamma)$. В этом случае при $\gamma \geq \psi(n)$ найдено точное значение величины (4) и соответствующий экстремальный полином. Доказано также, что экстремальный полином в этом случае единствен и имеет монотонные коэффициенты. Это позволило продвинуться в решении еще двух экстремальных задач. При $\gamma \geq 1$ положим $K^{\downarrow}(\gamma) = \min\Big\{-\min\limits_{x} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)\Big\}$, где нижняя грань берется по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots$. Для этой задачи доказано соотношение $K^{\downarrow}(\gamma) = \pi^{-1} \ln \gamma + O(1)$ при всех $\gamma \geq 1$. Вторая экстремальная задача состоит в нахождении при всех $\nu \geq M(n)$ величины

$$\varphi_n(\nu) = \max\Big\{\sum_{k=1}^{n} a_k : T_n \in \mathbb{T}_n^+, a_0 = \nu, a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1\Big\}. \qquad (5)$$

Из известного результата Фейера вытекает, что всегда $\varphi_n(\nu) \leq n\nu$. Нетрудно видеть, что $\varphi_n(\nu) = n\nu$ при всех $\nu \geq (n+1)/2$. Автором получено точное значение величины (5) при всех $\nu \geq M(n)$, найден соответствующий экстремальный полином и доказано, что он единствен и имеет монотонные коэффициенты.

В лекции также предполагается обсудить различные примеры, связанные с экстремальными задачами вида (2) и (3): примеры, когда экстремальных полиномов несколько, когда экстремальный полином не является полиномом с монотонными коэффициентами и некоторые другие.

Белоусова Л.П. (Саратов)
О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается интегральный оператор

$$Af = \int_0^{p(x)} A(p(x)f(t)\,dt \tag{1}$$

где $p(x) = \frac{1-x}{ax+1}$, $a > -1$. Функции $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$, $A(x,x) = 1$, $A_x(x,x) = 0$.

Впервые операторы вида (1) в случае $p(x) = 1-x$ были рассмотрены А.П. Хромовым. В частности, получены формулы точного обращения оператора, показана равносходимость разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье, например, в [1].

Обозначим через $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1}A_0$ и $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ резольвенты Фредгольма операторов A_0 и A, S_δ – область, получающаяся из всей λ-плоскости удалением нулей функции $\varphi(\lambda) = \frac{1}{a+1}\left(1 + \exp\left(-\sqrt{\frac{a^2-4\lambda^2(a+1)}{a}}\ln(a+1)\right)\right)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Теорема. *Для любой функции* $f \in L[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Omega_{r_n}(f)\right\|_{C[0;1]} = 0,$$

где $\Omega_r(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda f - R_\lambda^0 f)\,d\lambda$, $r_n \to \infty$, *окружности* $|\lambda| = r_n$ *находятся в* S_δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромов А.П. *Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования* // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа – М., –1999. – С 255-266.

Бердышев В.И. (Екатеринбург)
АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛЯ ВЫСОТ И НАВИГАЦИЯ[9]

Пусть требуется определить местоположение автономного летательного аппарата (ЛА) по информации о поле высот F региона и фрагменту φ поля, снятому лучом, сканирующим в некотором конусе Δ.

[9]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00782 и программы НШ.1347.2003.1.

Местоположение ЛА задается координатами центра масс $y \in \mathbb{R}^3$ ЛА и ориентаций ЛА, задаваемой преобразованием поворота a пространства $\mathbb{R}^3$. Далее, $\Delta = \{l\} \subset \mathbb{R}^3$ – конус лучей с началом в нуле, фрагмент $\varphi(l) = \varphi_{t,a}(l, F)$ $(l \in \Delta)$ – это функция, равная для $l \in \Delta$ расстоянию от точки t до множества $(t + al) \cap \mathrm{graph}\ F$. Информация о поле F задается посредством функции p из некоторого подпространства $P = \{p\}$, аппроксимирующей функцию F.

Пусть фрагмент φ известен, а t и преобразование a неизвестны. Задача навигации сводится к поиску

$$d(t,p) = \inf\{\|\varphi_{t,a}(l,F) - \varphi_{T,A}(l,p)\| : \ T, A\},$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма функции аргумента $l \in \Delta$. Предположим, что задача $d(t,p)$ имеет единственное решение $V(t,p) = (T(t,p), A(t,p))$. Евклидово расстояние $|v - V(t,p)|$, где $v = (t,a)$, есть ошибка навигации. Пусть $D(p) = \sup\limits_t\{|v - V(t,p)|\}$.

Наша цель – поиск функции $p^* \in P$, для которой

$$D(p^*) = \inf\{D(p) : \ p \in P\}.$$

В случае дифференцируемости отображения $p \mapsto V(t,p)$ для поиска p^* важно знать его производную $V'(t,p)(q) = (\gamma_i(p,q))_1^6$ в «точке» p по любому «направлению» $q \in P$. Пусть норма $\|\cdot\|$ дифференцируема, f_s – опорный функционал нормы в «точке» s, функции $p, q \in P$ дважды дифференцируемы, $S(\lambda, V, l) = \varphi_{T,A}(l, p + \lambda q) - \varphi_{t,a}(l, F)$,

$$W_{ij} = f_S(S''_{V_i V_j}), \quad W_{i,\lambda} = f_S(S''_{V_i,\lambda}),$$

B – определитель, составленный из элементов W_{ij} $(i,j = 1,\ldots,6)$, B_i получен из B заменой i-го столбца столбцом из элементов $W_{i,\lambda}$ $(i = 1,\ldots,6)$. В этих условиях отображение $p \mapsto V(t,p)$ дифференцируемо и компоненты $\gamma_i = \gamma_i(p,q)$ его производной имеют вид $\gamma_i = B_i/B$ $(i = 1,\ldots,6)$.

Беспалов М.С. (Владимир)
bespalov@vpti.vladimir.ru

ЯДРА ДИРИХЛЕ-УОЛША

Для системы Уолша [1] в нумерации Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ядром Дирихле называется $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k(x)$ $(x \in [0,1))$, а константой Лебега называется $L_n = \int\limits_0^1 |D_n(x)| dx$.

Преобразование Уолша [2] есть частный случай мультипликативного преобразования Фурье [1] и может быть формально определено так

$$\hat{f}(y) = \int\limits_0^\infty f(x)W(x,y)dx, \quad y \in [0,\infty),$$

где $W(x,y) = w_{[x]}(\{y\}) \cdot w_{[y]}(\{x\})$ – скрещенное произведение.

Обобщенным ядром Дирихле-Уолша называется [3]: $D(x;t) = \int\limits_0^t W(x,y)\,dy$.

Известно [1], что $D(\cdot;t) \in L^p[0,\infty)$, если $1 < p < \infty$.

Введем понятие обобщенной константы Лебега $L_t = \int\limits_0^\infty |D(x;t)|dx$.

Явный вид ядра Дирихле, полученный в [4] , можно обобщить на $D(x;t)$. В [3] рассматривается функция $h(x) = 2^m$, если $x \in [2^{-m-1}, 2^{-m})$, $m \in Z$.

Теорема 1. *Функция $h(x)$ является точной мажорантой для $D_n(x)$ и для $D(x;t)$. Для каждого фиксированного x модули ядер Дирихле $|D_n(x)|$ и $|D(x;t)|$ равномерно со скоростью 1 (по дискретному времени n или по непрерывному времени t соответственно) совершают перемещения от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно.*

Теорема 2. *Если $p > 2$, то $\|D_n(\cdot)\|_p \le n^{1-1/p}$, $\|D(\cdot;t)\|_p \le t^{1-1/p}$. $\|D_n(\cdot)\|^2_{L^2[0,1)} = n$, $\|D(\cdot;t)\|^2_{L^2[0,\infty)} = t$. Если $1 < p < 2$, то $\|D_n(\cdot)\|_p \ge n^{1-1/p}$, $\|D(\cdot;t)\|_p \ge t^{1-1/p}$. Если t – двоично-иррациональное, то $D(\cdot;t) \notin L[0,\infty)$. Если t – двоично-рациональное, то $D(\cdot;t) \in L[0,\infty)$ и $L_{2t} = L_t$, $L_{n+z} = (1-z)L_n + zL_{n+1} + L_z - z = (1-z)L_n + zL_{n+1} + \sum\limits_{k=0}^\infty \varphi(z \cdot 2^k)$, где n – натуральное, $z \in (0,1)$, $t = n+z$, $\varphi(u)$ – кусочно-линейная на $[0,\infty)$ функция с узлами $\varphi(n) = 0$, $\varphi(\frac{2n+1}{2}) = 1/2$.*

Замечание. Теорема 2 верна для ядер Дирихле, построенных не только по системе Уолша-Пэли, но и по таким перестановкам [4], которые сохраняют константы Лебега.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – 345 с.

2. Fine N.J. *The generalized Walsh functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 69. – P. 66-77.

3. Голубов Б.И. *О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной* // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 4. – С. 37-60.

4. Беспалов М.С. *Перестановки системы Уолша, сохраняющие константы Лебега* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68(1). – С. 36-48.

Бирюков Л.Н. (Москва)
liuis@yandex.ru

КЛАССЫ БЕРГМАНА С ВЕСОМ В ВИДЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИИ[10]

Пусть $p > 0$, $\alpha > -1$, l – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда классом $A_{p,\alpha,l}$ назовём класс функций, аналитических в единичном круге Δ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|^p_{p,\alpha,l} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta} |f(z)|^p \left(1-r^2\right)^{\alpha} \cdot l\left(\frac{1}{1-r}\right) dxdy < \infty.$$

Для функций l, удовлетворяющих дополнительному условию $1/r \cdot l(1/r) \in L([0,1])$ по той же формуле определяется класс $A_{p,-1,l}$.

В частном случае $l \equiv 1$ вопрос о поведении нулей этих функций изучался многими авторами. Так, Шапиро и Шилдс в 1962 году доказали, что если $f \in A_p = A_{p,0,1}$, то $n(r) = O\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right)$, где $n(r)$ – число нулей функции f в круге $|z| < r$.

Интересные результаты о классах $A_{p,\alpha} = A_{p,\alpha,1}$ получил Горовиц. В частности, в своей работе 1974 года он показал, что если $f \in A_{p,\alpha}$, $f(0) \neq 0$ и $\{z_k\}$ – упорядоченная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции f, то

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|z_k|} = O\left(N^{\frac{1+\alpha}{p}}\right), \quad N \to \infty. \tag{1}$$

Эта теорема обобщает теорему Шапиро и Шилдс на классы $A_{p,\alpha}$ и уточняет её.

А.М. Седлецкий в 1987 г. доказал точность, в некотором смысле, константы $(1+\alpha)/p$ в правой части (1).

Автором доказаны обобщения этих теорем на общий случай пространств $A_{p,\alpha,l}$:

Теорема 1. *Пусть $f \in A_{p,\alpha,l}$. Тогда при достаточно больших N имеет место формула*

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|z_k|} \leq C(p,l) \cdot N^{\frac{1+\alpha}{p}} \cdot \left(l(N)\right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

где C не зависит от N.

Теорема 2. *Пусть $0 < p < \infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдётся такая медленно меняющаяся на бесконечности функция l, что $1/r \cdot$*

[10]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00698).

$l(1/r) \in L([0,1])$, *и такая функция* $f \in A_{p,-1,l}$, *что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n(1-|z_n|)}{\log\left(\frac{1}{l(n)}\right)} > \frac{1}{p(1+\epsilon)}.$$

Эта теорема показывает, в частности, что в (2) константу $-1/p$ в показателе степени при $l(n)$ нельзя заменить меньшей по модулю (в случае $\alpha = -1$).

Блошанская С.К., Блошанский И.Л. (Москва)
i.bloshn@g23.relcom.ru

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ОРЛИЧА[11]

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset I^N = [0,1)^N$, $N \geq 1$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ (μ – мера Лебега). Ранее (см. [1,2]) нами исследовался вопрос о сходимости почти всюду (п.в.) кратных рядов Фурье-Уолша (суммируемых по прямоугольникам) функций $f \in L_p$, $p \geq 1$, равных нулю на $\mathfrak{A}$. Точнее, нас интересовал вопрос о сходимости п.в. указанных рядов либо на множестве $\mathfrak{A}$ (обобщенная локализация п.в.), либо на каких-либо его подмножествах $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$ – слабая обобщенная локализация п.в. (СОЛ).

Рассмотрим понятие свойства $\mathbb{B}_k$ (для $k = 1,2$) множества $\mathfrak{A}$. Пусть $J_s = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset M = \{1, 2, \ldots, N\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq N$, $1 \leq s \leq N$, и пусть $\Omega[J_k]$, $\Omega[J_k] \subset I[J_k]$, – произвольное (непустое) открытое множество, $W[J_k] = \Omega[J_k] \times I[M \setminus J_k]$, здесь $I[J_s] = \{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}) : 0 \leq x_{j_\nu} < 1, \ \nu = 1, \ldots, s\} \subset I^N$. Положим $W_k = \bigcup_{J_k \subset M} W[J_k]$ и (предполагая при $k = 2$, что $W_k^0 \neq \emptyset$) $W_k^0 = \bigcap_{J_k \subset M} W[J_k]$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$, если существует W_k такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$.

Для широкого класса множеств $\mathfrak{A}$ нами было доказано (см. [2]), что:

1) СОЛ в классе $L_1(I^N)$, $N \geq 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_1$;

2) СОЛ в классах $L_p(I^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, справедлива на $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2$.

В частности, показано, что для любой функции $f \in L_p$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ кратный ряд Фурье-Уолша (суммируемый по прямоугольникам) сходится п.в. к нулю на множестве W_k^0, $k = k(p,N)$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$ (причем $k = 1$, если $p = 1$, $N \geq 1$, и $k = 2$, если $p > 1$, $N \geq 2$).

[11]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00428).

Таким образом, справедливость СОЛ (для кратных рядов Фурье-Уолша суммируемых по прямоугольникам) на множестве $\mathfrak{A}$ в классах L_p, $p \geq 1$ существенно зависит от степени суммируемости разлагаемой функции, а также от структуры и геометрии $\mathfrak{A}$.

В настоящей работе мы исследуем вопрос о справедливости СОЛ для кратных рядов Фурье-Уолша в классах, «лежащих между» L_1 и L_p, $p > 1$. Точнее, мы даем ответ на вопрос: в каких классах $\Phi_2(L)$ ($\Phi_2(u) = o(u^p)$ при $u \to \infty$, $p > 1$), гарантирующих справедливость СОЛ на измеримом множестве $\mathfrak{A}$, структура и геометрия этого множества должны определяться еще свойством $\mathbb{B}_2$, а в каких классах $\Phi_1(L)$ ($\Phi_1(u) = o(\Phi_2(u))$ при $u \to \infty$) для справедливости СОЛ на $\mathfrak{A}$ структура и геометрия этого множества должны определяться уже «более обременительным» свойством $\mathbb{B}_1$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанская С.К., Блошанский И.Л. *Обобщенная и слабая обобщенная локализации для кратных рядов Фурье-Уолша функций из* L_p, $p \geq 1$ // Доклады РАН. – 1993. – Т. 332, № 5. – С. 5-8.

2. Блошанская С.К., Блошанский И.Л. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье-Уолша функций из* L_p, $p \geq 1$ // Труды МИ РАН. – 1997. – Т. 214. – С. 83-106.

Блошанский И.Л. (Москва)
i.bloshn@g23.relcom.ru

СТРУКТУРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ[12]

1. Пусть E – произвольное измеримое множество $E \subset T^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geq 1$, $\mu E > 0$ (μ - мера Лебега), и пусть $A = A(T^N)$ некоторое линейное подпространство $L_1(T^N)$. Нас интересует вопрос о сходимости на множестве E (почти всюду (п.в.) или в каждой точке) кратного ряда Фурье функции f, $f \in A$, $f(x) = 0$ на E в зависимости от гладкости функции f (т.е. от вида (определения) пространства A) и от *структурно-геометрических характеристик* множества E ($СГХ(E)$). Таким образом, наша цель дать описание пары (A, $СГХ(E)$). Поставленную задачу оказалось удобно сформулировать и исследовать в терминах *обобщенной локализации почти всюду* (ОЛ) и *слабой обобщенной локализации почти всюду* (СОЛ). Последнее означает, что для кратного ряда Фурье функции f, равной нулю на множестве E, исследуется вопрос о сходимости п.в. либо на множестве E (ОЛ), либо на каких-либо его подмножествах $E_1 \subset E$, $\mu E_1 > 0$ (СОЛ).

2. Обозначим через $\mathbb{F} = \left\{A_k^{(j)}\right\}_{k,j}$ матрицу $N \times M$ ($N \geq 2$, $M \geq 6$), элементами которой являются функциональные пространства $A =$

[12] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00428).

$A_k^{(j)}$, $k = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$. При этом пространство $A_k^{(j)}$ либо L_1, либо некоторое линейное подпространство L_1. Например, $A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = L_1$; $A_2^{(2)} = L_\infty$; $A_2^{(4)} = L_2$; $A_2^{(5)} = L_p$, $1 < p < 2$; $A_2^{(6)} = L(\log^+ L)^2$; $A_k^{(2)} = H^{\omega^{(k)}}$, где $\omega^{(k)} = \omega^{(k)}(\delta)$ – некоторые модули непрерывности.

3. Далее, для каждого k, $1 \le k \le N$, определим некоторые структурно-геометрические характеристики множества E, которые мы будем называть $\mathbb{B}_k$ свойством множества E. Указанные характеристики множества E определяются существованием у E открытых п.в. (открытых с точностью до множества меры нуль) подмножеств Ω, имеющих определенную «крестообразную» геометрию, связанную с ортогональными проекциями некоторого подмножества $\Omega_1 \subset \Omega$ на k - мерные (если $k < N$) координатные плоскости. При $k = N$ множество E, обладающее свойством $\mathbb{B}_N$, это множество, для которого существует открытое п.в. подмножество.

4. Нами сформулированы результаты, описывающие взаимосвязь между «гладкостью» функции f (в рамках функциональных пространств матрицы $\mathbb{F}$) и структурно-геометрическими характеристиками множества E ($СГХ(E)$), на котором f равна нулю, для кратных тригонометрических рядов Фурье, суммируемых по прямоугольникам. Данная взаимосвязь описывается парой $(A_r^{(j)}, \mathbb{B}_k)$, $1 \le r, k \le N$, $j = 1, \ldots, M$.

5. Частные случаи полученных результатов были опубликованы в работах [1-4].

6. Данные исследования позволяют также решить другую задачу. Пусть Ψ некоторый класс линейных невырожденных преобразований $\mathbb{R}^N$. Спрашивается: как изменяются множества сходимости и расходимости всюду или п.в. кратного ряда Фурье функции $f \circ \psi$, где $f \in A_k^{(j)}$, $f = 0$ на E, $\psi \in \Psi$, в зависимости от класса Ψ ? (Для $A_1^{(j)} = L_1$ и Ψ – группы вращений $\mathbb{R}^N$ – см., например, работу [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И.Л. *Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1, равных нулю на заданном множестве* // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1989. – Т. 53, № 4. – С. 675-707.

2. Блошанский И.Л. *Точный множитель Вейля справедливости обобщенной локализации на любых открытых множествах для трехмерных рядов Фурье, суммируемых по прямоугольникам* // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 322, № 6. – С. 1022-1027.

3. Блошанский И.Л. *Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p, $p \ge 1$* // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1985. – Т. 49, № 2. – С. 243-282.

4. Блошанский И.Л., Мацеевич Т.А. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности.* В сб. статей *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа.* – М.: АФЦ. – 1999. – С. 37-56.

5. Блошанский И.Л. *Критерий слабой обобщенной локализации в классе L_1 для кратных тригонометрических рядов Фурье с точки зрения изометрических преобразований* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, № 4. – С. 508-521.

Блошанский И.Л., Иванова О.К. (Москва)
i.bloshn@g23.relcom.ru

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ОРЛИЧА[13]

Пусть $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – неубывающая функция; через $\Phi(L) = \Phi(L)(T^N)$ обозначим множество суммируемых функций f таких, что $\int\limits_{T^N} \Phi(|f(x)|)\,dx < \infty$, где $T^N = [-\pi,\pi)^N$, $N \geq 1$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset T^N$, $N \geq 1$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ (μ – мера Лебега). Рассмотрим понятие свойства $\mathbb{B}_k$ (для $k = 1,2$) множества $\mathfrak{A}$. Пусть $J_s = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset M = \{1,2,\ldots,N\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq N$, $1 \leq s \leq N$, и пусть $\Omega[J_k]$, $\Omega[J_k] \subset T[J_k]$, – произвольное (непустое) открытое множество, $W[J_k] = \Omega[J_k] \times T[M \setminus J_k]$, здесь $T[J_s] = \{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}) : -\pi \leq x_{j_\nu} < \pi,\ \nu = 1,\ldots,s\} \subset T^N$. Положим $W_k = \bigcup\limits_{J_k \subset M} W[J_k]$ и (предполагая при $k = 2$, что $W_k^0 \neq \emptyset$) $W_k^0 = \bigcap\limits_{J_k \subset M} W[J_k]$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$, если существует W_k такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$.

В работах [1,2] исследовался вопрос о сходимости почти всюду (п.в.) кратных тригонометрических рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) функций $f \in L_p$, $p \geq 1$, равных нулю на $\mathfrak{A}$. В частности, в [1,2] было введено понятие слабой обобщенной локализации п.в. (СОЛ) и найдены критерии (в терминах $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ свойств множества $\mathfrak{A}$) справедливости СОЛ в классах L_p, $p \geq 1$. Некоторые результаты о справедливости СОЛ в классах $\Phi(L)$ ($\Phi(u) = o(u^p)$ при $u \to \infty$, $p > 1$) на множествах $\mathfrak{A}$, обладающих свойством $\mathbb{B}_2$, были получены в [3].

В настоящей работе нами продолжаются исследования СОЛ в (указанных выше) классах $\Phi(L)$. В частности, получен следующий критерий СОЛ в любом классе $\Phi(L)$, где $\Phi(u) = o\left(u \cdot \left[(\log^+ u)/(\log^+ \log^+ u)\right]^{\frac{1}{2}}\right)$, $u \to \infty$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество $\mathfrak{A} \subset T^N$, $N \geq 1$, $\mu\mathfrak{A} > 0$, $\mathfrak{B} = T^N \setminus \mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int(\mathfrak{B})}) = 0 \quad \text{и} \quad \mu_1 Fr\, pr_{(J_1)}\{int(\mathfrak{B})\} = 0 \quad \text{для всех} \quad J_1 \subset M. \quad (1)$$

[13]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00428).

Тогда на множестве $\mathfrak{A}$ *в любом классе* $\Phi(L)(T^N)$, *где неубывающая на* $[0,\infty)$ *функция* Φ *удовлетворяет условию* $\Phi(u) = o\left(u \cdot [(\log^+ u)/(\log^+ \log^+ u)]^{\frac{1}{2}}\right)$ *при* $u \to \infty$ *справедлива СОЛ тогда и только тогда, когда множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_1$.

Заметим, что в части достаточности теорема справедлива без ограничений (1) (см. [2]). Также отметим, что при доказательстве теоремы использовалась функция, построенная С.В. Конягиным в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И.Л. *О критериях слабой обобщенной локализации в* N *-мерном пространстве* //Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 6. – С. 1294-1298.

2. Блошанский И.Л. *Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из* L_1, *равных нулю на заданном множестве* // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1989. – Т. 53. № 4. – С. 675-707.

3. Иванова О.К. *Слабая обобщенная локализация в пространствах Орлича: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук.* 01.01.01. – Москва, 1999.

4. Конягин С.В. *О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье* // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. № 1. – С. 103-126.

Бокаев Н.А., Аубакиров Т.У. (Казахстан, Караганда)
bokaev@kargu.krg.kz

О p-ИЧНЫХ АНАЛОГАХ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ И ХАРДИ-ЛИТТВУДА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $P^{(j)} = \{P_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, $(P_k^{(j)} \geq 2, k = 1,2,...; j = 1,...,n)$ – последовательность целых чисел, $m_s^{(j)} = \prod_{k=1}^{s} P_k^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots$.

Пусть $\overline{x} = (x_1,...,x_n) \in R_n^+$ и вектор $\overline{k} = (k_1,...,k_n)$ с целыми коэффициентами такой, что $m_{k_j}^{(j)} \leq x_j \leq m_{k_j+1}^{(j)}$, $j = 1,...,n$. Для функций $f(\overline{x})$, заданных на R_+^n положим $H_p(f)(\overline{x}) =$

$$= \sum_{j_1=k_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=k_n+1}^{\infty} \frac{1}{m_{j_1+1}^{(1)} \cdots m_{j_n+1}^{(n)}} \int_{m_{j_1}^{(1)}}^{m_{j_1+1}^{(1)}} \cdots \int_{m_{j_n}^{(n)}}^{m_{j_n+1}^{(n)}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

$$B_p(f)(\overline{x}) = \frac{1}{m_{k_1}^{(1)} \cdots m_{k_n}^{(n)}} \int_0^{m_{k_1}^{(1)}} \cdots \int_0^{m_{k_n}^{(n)}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

Оператор H_p назовем p-ичным оператором Харди, а B_p – p-ичным оператором Харди-Литтвуда. Они являются p-ичными аналогами известных операторов Харди и Харди-Литтвуда

$$H(f)(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy, \quad B(f)(x) = \frac{1}{x} \int\limits_{0}^{x} f(y) dy.$$

Пусть $\varphi_{\overline{k}}(\overline{x}) = \varphi_{k_1}(x_1) \cdot \varphi_{k_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{k_n}(x_n)$ – кратная мультипликативная система Прайса, где $\{\varphi_{k_j}(x_j)\}_{k_j=1}^{\infty}$ $(1 \leq j \leq n)$ – мультипликативная система Прайса с образующей последовательностью $\{P_{k_j}^{(j)}\}$, $\hat{f}(\overline{x}) = \int\limits_{R_+^n} f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y}$ – обобщенное мультипликативное преобразование функции $f \in L_r(R_+^n)$ (см. [1]). $BMO_p(R_+^n)$ – p-ичное пространство ограниченной средней осцилляции (в определении нормы sup берется по всем p-ичным параллелепипедам).

Теорема 1. *Оператор H_p ограничен в пространстве $L_r(R_+^n)$, при $1 \leq r < \infty$, а оператор B_p – при $1 < r \leq \infty$.*

Теорема 2. *Если $f(\overline{x}) \in L_r(R_+^n)$, то имеет место равенство $\hat{H}_p(f) = B_p(\hat{f})$.*

Теорема 3. *Оператор B_p ограничен в пространстве $BMO_p(R_+^n)$.*

Ограниченность классических операторов H и B в пространстве L_r доказана Харди [2], теоремы 2 и 3 для двоичных аналогов операторов Харди и Харди-Литтвуда (случай $p_n = 2$, $n = 1, 2, \ldots$) в одномерном случае доказаны Б.И.Голубовым ([3], [4]), для кратного случая в работе [5], для мультипликативных систем в одномерном случае в работе [5], [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987.

2. Харди Г.Г., Литтвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: ИЛ, 1948.

3. Голубов Б.И. *О двоичных аналогах операторов Харди и Харди-Литтлвуда* // Сиб. мат. журнал. – 1999. – Т. 40, № 6. – С. 1244-1257.

4. Голубов Б.И. *Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди-Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO* // Analisis Math. – 2000. – V. 26. – P. 287-298.

5. Бокаев Н.А., Жекебаев С.Ш. *О двоичных операторах Харди и Харди-Литтвуда для функций многих переменных* // Вестник КарГУ. – 2000. – № 3.

6. Сулейменова З.Р. *Обобщенные мультипликативные преобразования и операторы Харди и Харди-Литтлвуда* // Вестник КарГУ. – 2001. – № 1. – Вып. 2. – С. 22-27.

Болотин И.Б. (Смоленск)
ivan_bolotin@list.ru

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ КРУГА

1. Постановка задачи. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \bigcup L\}$.

В дальнейшем будем в основном пользоваться терминами и обозначениями принятыми в [1].

Пусть $G_k(t)$ $(k = 1,2)$ – заданные на L функции, класса H_0, и $G_k(t) \neq 0$. Обозначим точки разрыва функций $G_1(t)$ и $G_2(t)$ через $c_{11},...,c_{1m}$ и $c_{21},...,c_{2n}$ соответственно. Точки разрыва функций $G_k(t)$ следуя Н.И. Мусхелишвили (см. [2]) будем называть узлами, а остальные точки контура L – обыкновенными.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z)$, принадлежащие классу $A_2(D^{\pm}) \bigcap I^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности, ограниченные вблизи узлов и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \frac{g_1(t)}{t}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + i\frac{g_2(t)}{t}, \qquad (2)$$

где $g_k(t)$ $(k = 1,2)$ – заданные на L функции класса Гельдера. Здесь, в равенстве (1), множитель $1/t$ при $g_1(t)$ и равенстве (2), множитель i/t при $g_2(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу ради краткости будем называть *задачей $R_{1,2}$, а соответствующую однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ назовем задачей $R^0_{1,2}$.*

Отметим, что сформулированная задача представляет собой одну из основных краевых задач типа задачи Римана для бианалитических функций, поставленных в известной монографии Ф.Д. Гахова (см. [3], с. 316). В случае непрерывных коэффициентов и произвольных гладких замкнутых контуров рассматриваемая задача была подробно исследована в работах К.М. Расулова (см., например, [1]).

2. Основные результаты. Представляя искомые бианалитические функции в виде

$$F(z) = f_0(z) + (\bar{z}z - 1)f_1(z),$$

удается получить следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \bigcup L\}$. Тогда решение задачи $R_{1,2}$ в классе $A_2(D^{\pm}) \bigcap I^{(2)}(L)$ сводится к решению двух разрывных скалярных задач Римана в классах* *аналитических функций, исчезающих на бесконечности и имеющих бесконечность интегрируемого порядка в узлах контура L.*

На основании картин разрешимости обычных разрывных задач Римана для аналитических функций заключается, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Число p условий разрешимости неоднородной задачи $R_{1,2}$ и число l линейно независимых решений соответствующей однородной задачи $R^0_{1,2}$ являются конечными, то есть задача $R_{1,2}$ является нетеровой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов К.М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Боровских А.В. (Москва)
bor@bor.vsu.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ[14]

Для волнового уравнения в одномерной неоднородной среде

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s \tag{1}$$

получен аналог формулы распространяющихся волн. Решение представляется в виде суммы $u(t,s) = V^t(s) + W^t(s)$, где $V^t(s)$ и $W^t(s)$ – ориентированные возмущения («правая» и «левая» волны) в момент времени t в точке среды s. Ориентированные возмущения определяются формулами

$$V^t(s) = \sqrt{\tfrac{k(s-t)}{k(s)}}V^0(s-t) + \tfrac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}\sqrt{\tfrac{k(y)}{k(s)}}\cdot \\ \cdot\left[V^0(y)J^+\left(\tfrac{s+y-t}{2},\tfrac{s-y-t}{2},s\right) + W^0(y)J^-\left(\tfrac{s+y-t}{2},\tfrac{s-y-t}{2},s\right)\right]dy, \tag{2}$$

$$W^t(s) = \sqrt{\tfrac{k(s+t)}{k(s)}}W^0(s+t) - \tfrac{1}{2}\int\limits_{s-t}^{s+t}\sqrt{\tfrac{k(y)}{k(s)}}\cdot \\ \cdot\left[W^0(y)J^+\left(\tfrac{s+y+t}{2},\tfrac{s-y+t}{2},s\right) + V^0(y)J^-\left(\tfrac{s+y+t}{2},\tfrac{s-y+t}{2},s\right)\right]dy, \tag{3}$$

а начальные волны V^0, W^0 связаны с начальными данными соотношениями

$$V^0(s) + W^0(s) = u(0,s) \qquad (-k(s)V^0(s))' + (k(s)W^0(s))' = k(s)u_t(0,s).$$

[14]Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза РФ (проект № Е02-1.0-46), РФФИ (проект № 01-01-00417), программы «Университеты России» (проект № УР.04.01.047) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1643.2003.1

Ядра $J^{\pm}(\frac{s+y\pm t}{2}, \frac{s-y\pm t}{2}, s)$ имеют смысл коэффициентов переноса ориентированных возмущений из точки y в точку s за время t, они определяются из системы уравнений Вольтерра

$$J^+(\alpha,\beta,\gamma) = -\int_\alpha^\gamma \phi(\sigma-\beta)$$
$$J^-(\sigma,\beta,\gamma)\,d\sigma, \quad J^-(\alpha,\beta,\gamma) = \phi(\alpha) + \int_\beta^0 \phi(\alpha-\tau)J^+(\alpha,\tau,\gamma)\,d\tau. \tag{4}$$

В докладе будет представлено, как с помощью представления (2)-(3) удается выражать явным образом (через функции $J^{\pm}$) решения различных краевых задач для уравнения (1) и с помощью уравнений (4) доказывать различные тождества для функций $J^{\pm}$.

Формулы (2)-(3) позволяют, в частности, показать, что известный эффект распространения гармонических волн для уравнения Клейна-Гордона $u_{tt} = u_{ss} - a^2 u$ со скоростью, превышающей скорость распространения конечных возмущений (которая равна единице) является иллюзией, внешним результатом взаимодействия двух встречных волн, распространяющихся, как и полагается, со скоростью, равной единице.

Бородин П.А. (Москва)
borodin@mech.math.msu.su

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА С ЗАДАННЫМИ НАИМЕНЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ[15]

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – бесконечномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ – счетная система вложенных замкнутых линейных подпространств пространства X, полная в X: $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X$. Положим $\rho_n(x) = \rho(x, Y_n) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y_n\}$ – расстояние от элемента x до подпространства Y_n. Нетрудно видеть, что $\rho_1(x) \geq \rho_2(x) \geq \cdots \geq \rho_n(x) \geq \ldots$ и $\rho_n(x) \to 0$ (то есть $\rho_n(x) \searrow 0$) для любого элемента x. Естественно возникает следующий вопрос.

(1) *Для всякой ли последовательности $d_n \searrow 0$ найдется такой элемент $x \in X$, что $\rho_n(x) = d_n$, $n = 1, 2, \ldots$?*

В общем случае задача (1) до сих пор не решена. Теорема С.Н. Бернштейна (1938) утверждает, что для пространства $X = C[0,1]$ и подпространств $Y_n = P_n$ многочленов степени не выше n задача (1) решается положительно. А.Ф. Тиман [1] перенес доказательство теоремы Бернштейна на случай произвольной системы вложенных конечномерных

[15]Работа поддержана РФФИ (грант № 02-01-00913), РФФИ-БРФФИ (грант № 02-01-81031) и фондом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1892.2003.1)

подпространств в любом пространстве X. В.Н. Никольский [2] показал, что для положительного решения задачи (1) при любой системе $\{Y_n\}$ пространство X должно быть рефлексивным. Если X – бесконечномерное гильбертово пространство, то задача (1) имеет решение при любых Y_n (И.С. Тюремских [3]). Другие относящиеся к задаче (1) результаты приведены в [4].

Теорема. *Если X – сепарабельное банахово пространство, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная система таких вложенных подпространств, что среди факторпространств Y_n/Y_{n-1} лишь конечное число имеют конечную размерность, то для любой стого убывающей к нулю последовательности d_n найдется такой элемент $x \in X$, что $\rho_n(x) = d_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Строгая монотонность последовательности d_n в этом утверждении существенна [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А.Ф. *теория приближения функций действительного переменного* – М., 1960.

2. Никольский В.Н. // Уч. зап. Калиниск. пед. ин-та. – 1963. – Т. 29. – С. 121-125.

3. Тюремских И.С. // Уч. зап. Калиниск. пед. ин-та. – 1964 – Т. 39. – С. 53-75.

4. Бородин П.А. // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. – Воронеж, 2001. – С. 51-52.

Брайчев Г.Г. (Москва)
Braichev@yandex.ru

О ФУНКЦИЯХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В теории роста целых функций известна задача Адамара определения возможно более узких классов функций сравнения H таких, что для любой целой функции $f(z)$ найдется $h(x) \in H$ с условием $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln M_f(r)}{h(r)} = 1$, где $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| \le r\}$.

Наиболее общие результаты в этом направлении получены Осколковым В.А. [1], который в частности показал, что множество H_γ возрастающих на $\mathbb{R}_+$, дважды непрерывно дифференцируемых, строго выпуклых функций $\Phi(x)$ (т.е. $\Phi''(x) > 0$), удовлетворяющих условию $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Phi(x)\Phi''(x)}{(\Phi'(x))^2} \le \gamma$ с $\gamma = 1$ является классом сравнения для всех целых функций, но множество H_γ, с константой $\gamma < 1$, уже таковым не является.

Функция $\varphi(x) = \ln M(e^x)$ является выпуклой и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty. \qquad (1)$$

Обозначим через $H_r^{(2)}$ класс бесконечно дифференцируемых строго выпуклых на $\mathbb{R}_+$ функций, удовлетворяющих условию $\limsup\limits_{x\to\infty} \ln\Phi(x)\left(\dfrac{\Phi(x)\Phi''(x)}{(\Phi'(x))^2}-1\right) \le \gamma$.

Теорема 1. *Для любой выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию (1), существуют функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ из класса $H_1^{(2)}$ такие, что для всех x*

$$\Phi_1(x) \le \varphi(x) \le \Phi_2(x),$$

причем для некоторых последовательностей $x_n \to \infty$ и $\bar{x}_n \to \infty$ выполняются соотношения $\Phi_1(\bar{x}_n) = \varphi(\bar{x}_n) + o(1)$, $n \to \infty$, и $\Phi_2(x_n) = \varphi(x_n) + o(1)$, $n \to \infty$.

В то же время, для любого $\gamma < 1$ найдется выпуклая функция $\varphi(x)$ со свойством (1) такая, что для всех $\Phi(x) \in H_\gamma^{(2)}$ будет выполняться $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\Phi(x)} = +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} f_n z^n$ целая функция, F_n – выпуклая регуляризация Адамара $|f_n|$, и $h(e^x) = H(x) \in H_1^{(2)}$. Обозначим обратную функцию к $H'(x)$ через $\beta(t)$, а обратную к $\exp\left\{\beta(x) - \dfrac{H(\beta(x))}{x}\right\}$ – через $\omega(t)$, тогда*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{h(r)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(F_n^{-\frac{1}{n}}\right)} \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(|f_n|^{-\frac{1}{n}}\right)},$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{h(r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\omega\left(F_n^{-\frac{1}{n}}\right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Осколков В.А. *Современные методы теории функций и смежные проблемы* // ВЗМШ: Тез. докладов. – Воронеж, 1997. – С. 126.

Братищев А.В., Моржаков А.В. (Ростов-на-Дону)
brats@ic.ru, morzh80@mail.ru

О МУЛЬТИПЛИКАТОРЕ ПАРЫ МНОЖЕСТВ

В ряде задач комплексного анализа (разложение в ряды обощенных экспонент, обощенное преобразование Бореля, оператор обощенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева) возникает необходимость изучать множество, порожденное двумя заданными множествами A, B по следующему правилу :

$$\{z \in \mathbb{C} : z \cdot A \subseteq B\}$$

Назовем такое множество мультипликатором пары множеств A, B и обозначим $M(A,B)$. Обозначим $D^{-1} := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{z} \in D\}$, $D' := \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $D \cdot E := \{z_1 \cdot z_2 : z_1 \in D, z_2 \in E\}$, $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, $S(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$.

Можно показать, что $M(A,B) = (A^{-1}B')'$; $1 \in M(A,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$; $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $M(\lambda A, \mu B) = \frac{\mu}{\lambda} M(A,B)$; $0 \in M(A,B) \Leftrightarrow 0 \in B$, если $\infty \notin A$. Если B – выпуклое множество, то $M(A,B)$ выпукло. В сообщении будут изложены свойства мультипликатора, которые уточняют результаты сообщения [1] в важном частном случае, когда $A = B$ и является областью.

Теорема.

1) Если $z_0 \in intM(G)$, *и* $|z_0| = 1$, *то* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq M(G)$

2) Мультипликатор $M(G)$ *не обязательно является связным множеством даже в случае односвязной области* G

3) $0 \in M(G) \Leftrightarrow 0 \in G$, *при этом для ограниченной области* G $\exists \varepsilon > 0 : D(0, \varepsilon) \subset M(G)$

4) $M(G) = F \Leftrightarrow M(G \setminus \{0\}) = F \setminus \{0\}$

5) $M(G)$ *состоит из конечного числа n чисел тогда и только тогда, когда* $M(G) = \{1, z_0, \dots z_0^{n-1}\}$, *либо* $M(G) = \{0, 1, z_0, \dots z_0^{n-1}\}$ *где* $z_0 = \exp\left\{\frac{2\pi}{n} i\right\}$.

6) $S(0,1) = M(G)$ *тогда и только тогда, когда* $M(G)$ *содержит хотя бы одну точку* $\exp\{2\pi\alpha i\}$, *где* α *– иррациональное число.*

7) $M(G) \supseteq (0, +\infty) \Leftrightarrow M(G) = (0, +\infty)$ *либо* $M(G) = \mathbb{C} \setminus 0$ *либо* $M(G) = \mathbb{C}$

8) $[0,1] \subset M(G) \Leftrightarrow G$ *– звездная область относительно нуля.*

9) $M(G)$ *ограничен* $\Leftrightarrow M(G) \subset \overline{D(0,1)} \Leftrightarrow \{0\}$ *– внутренняя точка* GG'^{-1}

ЛИТЕРАТУРА

1. Братищев А.В. *О мультипликаторе области в комплексной плоскости* // Математика в ВУЗе. Материалы XVI международной научно-методической конференции. – Петразоводск, 2003. – С. 126-127.

Буланов А.П. (Обнинск)
bulanov@iate.obninsk.ru

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РАДИУСА СХОДИМОСТИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОСТЕЙШЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЦЕПНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ[16]

Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$, начиная с некоторого номера k_0, является периодической, если $a_{k_0+ml+j} = \alpha_j$; $j = 1, 2, \dots, m$; $l = 0, 1, \dots$. Каждому натуральному $n = 1, 2, \dots$ поставим

[16]Работа поддержана грантом Президента РФ (НШ-1892.2003.1).

в соответствие конечную цепную экспоненту $f_n(z)$, определяемую формулой

$$f_s(z) = \varphi_0(z),$$

где $-\varphi_{k-1}(z) = e^{a_k \cdot z \cdot \varphi_k(z)}$, $k = s, s-1, \dots, 2, 1$ и $\varphi_s(z) = 1$.

Последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, регулярной в некоторой области U, причем $U \supset D = \{z : |z| < \frac{1}{e \cdot \overline{a}}\}$, где $\overline{a} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|$ (см. [1]). В общем случае, если $\overline{a} > \underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|$, тогда вместо радиуса $\frac{1}{e \cdot \overline{a}}$ круга D будет величина $R = \frac{1}{e \cdot q}$, где $q < \overline{a}$.

В периодическом случае ($m \geq 2$) $\underline{a} = \underline{\alpha} = \min\limits_{1 \leq j \leq m} |\alpha_j| < \overline{\alpha} = \max\limits_{1 \leq j \leq m} |\alpha_j| = \overline{a}$ выполняются неравенства $\underline{\alpha} < q < \overline{\alpha}$ и ставится задача о нахождении зависимости величины q от коэффициентов $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, m$. В простейшем периодическом случае ($m = 2$), когда имеем чередование коэффициентов: $a_{2k-1} = \beta \geq 1, a_{2k} = 1, k = 1, 2, \dots,$ величина q зависит лишь от β. В работе [2] установлено, что $q = \sqrt{\beta} \cdot \exp\left(\frac{2\theta^2}{1-\theta^2}\right)$, где $\theta = \theta(\sqrt{\beta}) \in [0, 1)$ – решение уравнения $\sqrt{\beta} = \frac{1+\theta}{1-\theta} \cdot \exp\left(\frac{2\theta}{1-\theta^2}\right)$. Там же в явном виде величина q как функция от β при различных $\beta, 1 \geq \beta < \infty$ оценивается приближенно на трех непересекающихся связных множествах, сумма которых есть луч $[1, \infty)$.

В этом сообщении зависимость между радиусом сходимости $R = \frac{1}{eq}$ и коэффициентом β простейшей периодической цепной экспоненты

$$e^{\beta \cdot z \cdot e^{z \cdot e^{\beta \cdot z \cdot e^{\cdots}}}}$$

представляется в параметрическом виде:

$$\beta = t^2 \exp\frac{t^2 - 1}{t}, \qquad R = (t\exp(t))^{-1}, \quad 1 \leq t < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов А.П. *Регулярность степеней бесконечной кратности* // Известия АНРФ, серия мат. – Т. 62, № 5. – 1998. – С. 49-78.

2. Буланов А.П. *Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения* // Матем. сб. – Т. 192, № 11. – 2001. – С. 3-34.

Бурмистрова М.Д. (Москва)
bourmist@mtu-net.ru

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУММИРУЕМОСТИ В НУЛЕ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЛАГЕРРА

Рассматривается задача о необходимых и достаточных условиях сходимости в нуле последовательности линейных средних рядов Фурье-Лагерра функций из C_φ – пространства непрерывных функций $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, для которых $f(x)\varphi(x) \to 0$, $x \to +\infty$, $\varphi(x) = e^{-x/2}$. Линейные средние разложения Фурье по ортонормированной системе многочленов Лагерра $\hat{L}_k^\alpha(x)$, $\alpha > -1$, $k = 0,1,\ldots$ (см. [1]), задаются равенством

$$\tau_n^\alpha(f,x,\Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{a}_k \hat{L}_k^\alpha(x),$$

где k, $n = 0,1,\ldots$; $\lambda_0^{(n)} = 1$; $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \ge n+1$, $\hat{a}_k$ – коэффициенты Фурье-Лагерра функции f. Условие ограниченности функции Лебега-Лагерра линейных средних

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x,\Lambda) = \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{L}_k^\alpha(x) \hat{L}_k^\alpha(t) \right| e^{-t/2} t^\alpha \, dt$$

играет важную роль при исследовании сходимости в точке x линейных средних ряда Фурье функции $f \in C_\varphi$. Справедливо следующее утверждение, совпадающее с аналогичным результатом С.Г. Кальнея [2] для рядов Фурье-Якоби.

Теорема 1. *Пусть $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\mathcal{L}_n^\alpha(0,\Lambda) \le C \max_{0 \le k \le n} |\lambda_k^{(n)}| + C \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \left(\frac{n-k}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}|.$$

Доказательство основано на оценке норм сумм Валле-Пуссена по полиномам Лагерра $V_{n,k}^\alpha(t,0) = \frac{1}{k+1} \sum\limits_{m=n-k}^{n} \sum\limits_{i=0}^{m} \hat{L}_i^\alpha(0) \hat{L}_i^\alpha(t)$.

Лемма. *Если $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, то*

$$\int_0^\infty |V_{n,k}^\alpha(t,0)| e^{-t/2} t^\alpha \, dt \le C \left(\frac{n+1}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Теорема 2. *Пусть* $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. *Если* $\Delta^2\lambda_m^{(n)} \geq 0\,(\leq 0)$ *при* $m = 0, 1, ..., n-l$, *где* $l \geq 0$ *– фиксированное число, не зависящее от* n, *то для ограниченности* $\pounds_n^{\alpha}(0, \Lambda)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_m^{(n)}| \leq C; \quad \sqrt{n}\sum_{m=0}^{n}|\lambda_m^{(n)}|(m+1)^{\alpha}(n+1-m)^{-3/2-\alpha} \leq C.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегё Г. *Ортогогальные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

2. Кальней С.Г. *О необходимых и достаточных условиях суммируемости рядов Якоби* // Изв. ВУЗов, матем. – 1991. – Т. 348, № 5. – С. 75-78.

Бутерин С.А. (Саратов)
ButerinSA@info.sgu.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ ПО НЕПОЛНОМУ СПЕКТРУ[17]

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = \int_0^x M(x-t)f(t)\,dt + g(x)\int_0^{\pi} f(t)v(t)\,dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \qquad (1)$$

где $M(x) \in W_2^3[0, T]$ для любого $T \in (0, \pi)$, $(\pi - x)M'''(x) \in L_2(0, \pi)$, $M(0) = M''(0) = 0$, $M'(0) = -1$; $g(x)$, $v(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$. При этих условиях будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Будем решать следующую обратную задачу (ОЗ): по всем за исключением любых двух с учетом кратности характеристическим числам оператора $A = A(M, g, v) \in \mathcal{A}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны априори. Следующие две теоремы дают необходимые и достаточные условия разрешимости ОЗ, а также единственность ее решения.

Теорема 1. *Характеристичекие числа* λ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *оператора* $A \in \mathcal{A}$ *имеют вид*

$$\rho_k = \sqrt{\lambda_k} = k + \omega_k, \quad \{\omega_k\} \in l_2, \quad \lambda_k \neq 0. \qquad (2)$$

Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 \neq k_2$. Обозначим $\Lambda_{k_1,k_2} = \{k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \neq k_1, k_2\}$.

---

[17] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта «Ведущие научные школы» (проект НШ-1295.2003.1) и гранта Минобразования (проект № Е02-1.0-186)

Теорема 2. *Пусть заданы функции $g(x)$, $v(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$, и последовательность комплексных чисел λ_k, $k \in \Lambda_{k_1,k_2}$, вида* (2). *Тогда существует единственный оператор $A = A(M,g,v) \in A$, для которого $\{\lambda_k\}$ являются характеристическими числами.*

Возможность «выбросить» два характеристических числа связана с наличием дополнительного согласования между спектром оператора $A(M,g,v)$ и функциями $g(x)$, $v(x)$, которое позволяет получить соотношения для нахождения λ_{k_1}, λ_{k_2}. Решение ОЗ основано на выводе и исследовании так называемого основного нелинейного интегрального уравнения. Доказана его глобальная разрешимость, что позволило доказать теорему 2 и указать алгоритм построения функции $M(x)$. Аналогичные результаты имеют место и для других классов операторов вида (1) (см. также [1-3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Buterin S.A. *Reconstruction of the one-dimentional perturbation of the convolution operator* // Functional Analysis and its Applications. – Lviv: Lviv Univ. Press, 2002. – P. 48-49.

2. Бутерин С.А. *Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки* // Математика. Механика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2003. – Вып. 5. – С. 8-10.

3. Бутерин С.А. *Обратная задача для одномерного возмущения оператора свертки.* – Саратов, 2003. – 84 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.10.03 № 1754-В2003.

Вагабов И.А. (Махачкала)
vazipat@mail.dgu.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ В $C[-1,1]$ НОРМ ОПЕРАТОРОВ ФЕЙЕРА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЛЕЖАНДРА

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^N$ – нули многочлена Лежандра $P_N(x)$. Хорошо известна следующая квадратурная формула Гаусса [1]

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \rho(x_i), \tag{1}$$

где $\rho(x)$ – произвольный алгебраический многочлен степени не выше $2N-1$, λ_i – коэффициенты Кристоффеля.

Положим

$$\hat{P}_m(t) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}} P_m(t). \tag{2}$$

В силу (1) система $\{\hat{P}_m(t)\}_{m=0}^{N-1}$ образует ортонормированную систему на $\{x_i\}_{i=1}^N$ относительно скалярного произведения $(f,q) =$

$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i) q(x_i)$. Сумму Фурье-Лежандра порядка $m \leqslant N-1$ функции $f \in C[-1,1]$ по системе многочленов (2) запишем в виде

$$S_{m,N}(f,t) = \sum_{j=0}^{m} c_j \hat{P}_j(t),$$

где

$$c_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i) \hat{P}_j(x_i).$$

Пусть

$$\sigma_{n,N}(f,t) = \tfrac{1}{n+1}\left[S_{0,N}(f,t) + S_{1,N}(f,t) + \cdots + S_{n,N}(f,t)\right]$$

– дискретные средние Фейера функции $f \in C[-1,1]$.

Доказана следующая

Теорема. *Если* $n \leqslant \gamma N$, $0 < \gamma < 1$, *то существует такая постоянная* $c(\gamma)$, *что*

$$\|\sigma_{n,N}\|_{C[-1,1]} \leqslant c(\gamma).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сегё. Г. *Ортогональные многочлены.* – М., 1962. – 500 с.

Вакарчук С.Б. (Украина, Днепропетровск)
yiv@dnp.ukrpack.net

ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ L_2-ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ПРЯМОЙ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Пусть $L_2(\mathbb{R})$ – пространство функций $f(x)$, определенных и измеримых на $\mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию $\|f\| = \left\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$, а $L_2^r(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N})$ – множество функций $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-ая производная $f^{(r-1)}(x)$ $\left(f^{(0)}(x) \equiv f(x)\right)$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)}(x) \in L_2(\mathbb{R})$.

Для $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ полагаем $\mathcal{A}_\sigma(f) = \inf\left\{\|f - g_\sigma\| : g_\sigma \in B_{\sigma,2}\right\}$, где $B_{\sigma,2}$ – подпространство целых функций конечной степени $\leq \sigma$, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\Omega_k(f,t) = \left\{\frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_h^k f(x)\|^2 dh_1 \cdots dh_k\right\}^{1/2} \quad (t > 0),$$

где $\overline{h} = (h_1, \cdots, h_k)$; $\Delta^k_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_k}$; $\Delta^1_{h_i} f(x) = f(x+h_i) - f(x)$ $(i = \overline{1,k})$. Отношение 0/0 полагаем равным нулю. Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. *Для произвольных чисел $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ и $0 < t \le \pi/2$ справедливы равенства*

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r A_\sigma(f)}{\Omega_k(f^{(r)}, t/\sigma)} : f(x) \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-k/2}$$

(в случае $r = 0$ верхняя грань берется по всем функциям $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, не эквивалентным нулю).

Пусть $\Phi_*(t) = t^{k/(\pi-2)}$ и $W_k^r(\Phi_*)(r \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N})$ есть класс функций $f(x) \in L_2^r(\mathbb{R})$, для которых $\Omega_k(f^{(r)}, t) \le \Phi_*(t)$ при $0 < t \le 2\pi$. Используя понятия среднего колмогоровского $(\overline{d_\nu})$, бернштейновского $(\overline{b_\nu})$ и линейного $(\overline{\delta_\nu})$ поперечников, введенных Г.Г. Магарил-Ильяевым [1] для решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации на прямой [2], показано, что справедлива

Теорема 2. *Для любых чисел $r \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N}$ и $\nu > 0$ имеют место равенства*

$$\overline{\Pi}_\nu(W_k^r(\Phi_*), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_k^r(\Phi_*)) = \frac{\pi^{k/2-r}\nu^{-r-k/(\pi-2)}}{2^{k(1/2+1/(\pi-2))}(\pi-2)^{k/2}},$$

где $A_{\nu\pi}(W_k^r(\Phi_*)) = \sup\{A_{\nu\pi}(f) : f \in W_k^r(\Phi_*)\}$, а $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ есть любой из средних поперечников $\overline{d_\nu}(\cdot), \overline{b_\nu}(\cdot)$ или $\overline{\delta_\nu}(\cdot)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магарил-Ильяев Г.Г. *Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой* // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 318(1). – С. 35-38.

2. Вакарчук С.Б. *О сильной асимптотике средних N-поперечников классов функций, аналитических на вещественной оси* // Известия вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 1-4.

Варава Б.Н., Маергойз Л.С. (Красноярск)
maergoiz@krsk.info

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОНИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОЛДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[18]

Рассматривается задача экстраполяции квазиполинома, некоторые из показателей экспонент которого известны, по его заданным значениям в конечном числе узлов равномерной сетки. Эта задача в более

[18]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00460) и гранта Президента РФ по ведущим научным школам (проект НШ-1212.2003.1)

точной формулировке эквивалентна обратной задаче для неоднородного ОЛДУ

$$y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + \ldots + a_r = af, \tag{1}$$

где f – заданная конечная экспоненциально гармоническая сумма вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} \cdot P_k(t), \tag{2}$$

а $a_1, ..., a_r, a$ – неизвестные постоянные комплексные коэффициенты. В формуле (2) показатели экспонент $\{\lambda_k\}$ и коэффициенты полиномов $\{P_k\}$ – тоже (известные) комплексные числа. Требуется найти решение $y = y(t)$, $t \in \mathbb{C}$ уравнения (1) по его заданным значениям $y_j = y(t_0 + jh)$, $j = 0, 1, ..., N$ на равномерной сетке с шагом h. В докладе излагаются условия существования и единственности решения этой проблемы и описывается зона его устойчивости к малым колебаниям входной информации. В случаях $f(t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 1$ эти вопросы рассмотрены в [1, глава 2]. Полученные результаты опираются на так называемый алгоритм Прони, его модификации (см., например, [2, глава 11]) и некоторые результаты теории целых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике.* – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991.– 272 с. English transl., *Asymptotic characteristics of entire functions and their applications in mathematics and biophysics, Second edition (revised and enlarged).* – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 362 p.

2. Марпл-мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ.* – М.: Мир, 1990. – 584 с.

Веденяпин А.Д. (Волгоград)
alexander.vedenyapin@volsu.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ

Пусть пространство V_n с метрикой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ вложено в V_m с метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, при этом V_n определяется формулами

$$y^\alpha = f^\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots m).$$

Тогда для произвольного расстояния в V_n справедливо равенство

$$a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{ij} dx^i dx^j$$

или

$$a_{\alpha\beta} \frac{dy^\alpha}{dx^i} \frac{dy^\beta}{dx^j} = g_{ij}.$$

Если за V_4 взять пространство с метрикой

$$ds^2 = dx^1dx^3 + dx^2dx^4 + f(x^4)(dx^4)^2, \tag{1}$$

то оказывается, что V_4 можно вложить как гиперповерхность в плоское пространство S_m.

Определение. *Пространство S_m называется плоским, если все компоненты риманова тензора равны нулю*

Тогда справедлива теорема

Теорема. *Пространство V_4 с метрикой* (1) *вкладывается в пространство S_5. Эти пространства оказываются минимальными.*

Доказательство теоремы сводится к проверке выполнения уравнений Гаусса, Кодацци для пространства V_n вложенного в V_m [1]. Выписывается конечное уравнение поверхности, на которой реализуется метрика (1). Эта поверхность оказывается минимальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – Москва, 1948.

Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. (Ульяновск)
velmisov@ulstu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФУРЬЕ И ТФКП ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ[19]

Рассматривается один класс математических моделей механических систем «трубопровод – датчик давления». Методами ТФКП или Фурье решение задач сводится к исследованию уравнений, описывающих деформации упругих элементов датчиков.

Приведем пример. В линейной постановке, соответствующей малым прогибам упругого элемента и малым возмущениям потенциала скорости рабочей среды, одна из математических моделей определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \qquad (x,y): 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0$$

$$\varphi_y(x,0,t) = 0, \quad x \in (0,x_0);$$

$$\varphi_x(0,y,t) = 0, \quad y \in (0,y_0);$$

$$\varphi_y(x,y_0,t) = \begin{cases} 0, x \in (0,a) \cup (b,x_0) \\ \dot{\omega}(x,t), x \in (a,b) \end{cases};$$

$$P_* - \rho\varphi_t(x_0,y,t) = P(y,t), \qquad y \in (0,y_0);$$

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \delta\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega =$$

[19]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-8570-34).

$$= P_* - P_0(x,t) - \rho\varphi_t(x,y_0,t), \quad x \in (a,b).$$

Здесь $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости рабочей среды, $\omega(x,t)$ – прогиб пластины, x_0, y_0 – продольный и поперечный размеры трубопровода, $P(y,t)$ – закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод, $P_0(x,t)$ – распределенная внешняя нагрузка на пластину, a, b – координаты концов пластины, штрих и точка соответствуют дифференцированию по x и t.

Данную задачу можно решить с помощью методов теории функций комплексного переменного. Возможно также решение этой задачи методом Фурье. В последнем случае представим потенциал скорости в виде

$$\varphi(x,y,t) = \xi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)(e^{\lambda_n y} + e^{-\lambda_n y})\cos(\lambda_n x) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)(e^{\nu_n x} + e^{-\nu_n x})\cos(\nu_n y),$$

где $\xi(t), \varphi(t), \psi(t)$ – произвольные функции. Тогда решение задачи сводится к исследованию уравнения, связывающего деформацию упругого элемента датчика с законом давления рабочей среды на входе в трубопровод

$$L(\omega) = -P_0(x,t) + \frac{1}{y_0}\int_0^{y_0} P(y,t)dy -$$
$$-\frac{2\rho}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n x)\frac{\operatorname{cth}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n}\int_a^b \ddot{\omega}(x,t)\cos(\lambda_n x)dx -$$
$$-\frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}(\nu_n x)\frac{\cos(\nu_n y_0)}{\operatorname{ch}(\nu_n x_0)}\int_0^{y_0} P(y,t)\cos(\nu_n y)dy,$$
$$\nu_n = \frac{n\pi}{y_0}, \ \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}x_0$$

Виноградов О.Л. (Санкт-Петербург)
olvin@math.spbu.ru

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ СПЛАЙНАМИ И ВТОРОГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ[20]

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой, $\omega_2(f,h)$ – второй модуль непрерывности функции f с шагом h, $S_{2n,\mu}$ – $2n$-мерное пространство 2π-периодических

[20]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-01112 и МАС 03-01-06465).

сплайнов порядка μ минимального дефекта по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{n}$ $(k \in \mathbb{Z})$, т.е. функций, имеющих непрерывную $(\mu-1)$-ю производную, являющихся алгебраическими многочленами степени не выше μ на каждом интервале между соседними узлами, $S^{\times}_{2n,\mu}$ – $(2n-1)$-мерное подпространство пространства $S_{2n,\mu}$ сплайнов, удовлетворяющих дополнительному условию $\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\beta_k = 0$, где β_k – скачок μ-й производной сплайна в узле $\frac{k\pi}{n}$, $E^{\times}_{n,\mu}(f)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ пространством $S^{\times}_{2n,\mu}$.

Устанавливаются точные неравенства типа Джексона для приближений периодических функций сплайнами.

Теорема 1. *Пусть $n, \mu - 1 \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$1 - \frac{1}{2n} \leqslant \sup_{f \in C} \frac{E^{\times}_{n,\mu}(f)}{\omega_2(f, \frac{\pi}{2n})} \leqslant 1.$$

Из теоремы 1 следует, что не зависящая от f и n постоянная 1 в неравенстве

$$E^{\times}_{n,\mu}(f) \leqslant 1 \cdot \omega_2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)$$

не может быть уменьшена.

Оценка сверху была ранее получена О.Л. Виноградовым и В.В. Жуком с помощью линейного метода приближения. Аналогичный результат для приближений тригонометрическими многочленами (формально получающийся из теоремы 1 при $\mu \to \infty$) известен и принадлежит В.В. Жуку (оценка сверху) и В.В. Шалаеву (оценка снизу).

Вишневский В.Э., Иванова О.А. (Санкт-Петербург)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ В ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В работе приводится алгоритм построения кусочно-программного оптимального решения в задаче быстродействия:

$$\dot{q} = \Xi \cdot q + \tilde{v}(t) + \langle q\,|W(t)|\,q\rangle, \quad q_{(1)} \xrightarrow[T_{\min}]{\tilde{v}} 0.$$

Необходимое условие

$$\tilde{v}_i = \operatorname{sgn} p_i, \quad i \in \overline{1:n},$$

где p_i – исходный импульс, выполняющий роль сопряженной переменной для q_i в условиях принципа максимума (множитель Лагранжа). Получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = -\Xi^* p - \partial_q \langle \langle q|W(t)|q\rangle |p\rangle.$$

Применяя преобразование Ли ld_t^{-1} и параллельный перенос, имеем следующую систему уравнений:

$$\dot{X} = \Xi X + \pi(t), \quad X_{(1)} \underset{T_{\min}}{\overset{\pi}{\to}} 0$$

– задачу быстродействия и уравнения

$$\dot{Q} = \Xi Q + \tilde{v}(t), \quad \dot{P} = -\Xi^* P,$$

с начальными данными

$$Q_{(1)} = X_{(1)} : \quad Q_{(1)} \underset{T_{\min}}{\overset{\tilde{v}}{\to}} Q(t, V(t, \tilde{v})).$$

Начальные данные $q^0 = q_{(1)} \iff Q_{(1)}$, влекут в явном виде p^0 и P^0 для сопряженных переменных, после чего имеем

$$\tilde{v}_i(t) = \operatorname{sgn} \tilde{p}_i(t, t_0, g^0, {}_M p^0(q^0), V(t, \tilde{v})), \quad i \in \overline{1:n},$$

где $\tilde{p}_i$ – известная функция своих аргументов

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В.Э. *Представление ограниченных решений полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.*// Механика спл. сред и управл. движ. Вопр. мех. и проц. упр. --Л.: ЛГУ, 1983. Вып. 6 – С. 146-170.

2. Найфе А. *Методы возмущений.* – М.: Мир, 1976. – 455 с.

Волосивец С.С., Скорынская О.С. (Саратов)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ ПО СИСТЕМАМ ХААРА-ВИЛЕНКИНА

Пусть $p > 1$. Для разбиения $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ определим p-вариационную сумму ($p \geq 1$) функции $f(x)$ по разбиению ξ формулой $\kappa_\xi^p(f) = (\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{1/p}$. Модулем непрерывности $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ порядка $1 - 1/p$ функции $f(x)$ называется величина $\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup\limits_{|\xi| \leq \delta} \kappa_\xi^p(f)$, где $|\xi| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. Будем писать, что $f \in V_p[a, b]$, если $V_p(f, [a, b]) := \omega_{1-1/p}(f, b - a) < \infty$. Пространство $V_p[a, b]$ является банаховым относительно нормы $||f||_p = \max(\omega_{1-1/p}(f, b - a), \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|)$. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система Хаара-Виленкина, построенная по ограниченной последовательности p_n (см.[1, с. 476]), $a_n(f) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\psi_n(t)}dt$, и $E_n(f)_{L_p}$ – наилучшее приближение в $L_p[0, 1]$ полиномами порядка n по этой системе.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in L_p[0,1]$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}E_n(f)_{L_p}$. *Тогда* $f(x)$ *эквивалентна* ($f(x) = f_0(x)$ *почти всюду на [0,1]*) *некоторой функции* $f_0(x) \in V_p[0,1]$. *Если же* E'_n – *монотонно убывающая к нулю последовательность, такая что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}E'_n = \infty$, *то существует* $g \in L_p[0,1]$, *такая что* $E_n(g)_{L_p} = O(E'_n)$, *но* $g(x)$ *не эквивалентна ни одной функции класса* $V_p[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(\delta)$ *является функцией сравнения порядка* $1-1/p$ *(см.[2]). Тогда для того, чтобы каждая функция* $f \in H^{\omega}_{1-1/p} := \{f \in V_p[0,1] : \omega_{1-1/p}(f,\delta) \le C\omega(\delta)\}$ *удовлетворяла соотношению* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|a_n(f)|^{\beta} < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta/2-\beta/p}\omega^{\beta}(1/n)$.

Результаты данной работы обобщают теоремы 3 и 5 из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов* – М.: Физматгиз, 1958.

2. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Труды ММО. – 1956. – Т. 5. – С. 484-521.

3. Волосивец С.С. *Приближение функций ограниченной p-вариации полиномами по системам Хаара и Уолша* // Матем.заметки. – 1993. – Т. 53. – Вып. 6. – С. 11-21.

Выгодчикова И.Ю. (Саратов)
VigodchikovaIY@info.sgu.ru

ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Пусть $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$, $y_{2,k} \ge y_{1,k}, k \in [0:N]$; $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k\in[0:N]} f(A,k) \longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}}, \tag{1}$$

где $f(A,k) = \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k);\ p_n(A,t_k) - y_{1,k}\}$.

Обозначим через $\rho^* = \min\limits_{A\in R^{n+1}} \rho(A)$; $m = \max\limits_{k\in[0:N]} \frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}$; $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < ... < t_{j_{n+1}}\}$; $M = \left\{k \in [0:N] : \frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} = m\right\}$.

Пусть $N \geq n+1$. *Амплитудными* назовем функции

$$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{2,j_k}, & k - \text{четно}, \\ y_{1,j_k}, & k - \text{нечетно}, \end{cases} \quad \varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{1,j_k}, & k - \text{четно}, \\ y_{2,j_k}, & k - \text{нечетно}, \end{cases}$$

$k \in [0 : n+1]$.

Для каждой амплитудной функции существует единственный алгебраический полином степени не выше n наилучшего равномерного приближния ([1]). Обозначим вектор его коэффициентов через $A_i(\sigma) \in R^{n+1}$, $i \in 0 : 1$. Согласно теореме 2.1 ([1]), выполняются равенства

$$h_i(\sigma) = (-1)^{k+i}\left(y_{\frac{3+(-1)^{k+i}}{2}, j_k} - p_n(A_i(\sigma), t_{j_k})\right), \; k \in [0 : n+1], \; i \in 0 : 1.$$

Определим величину $\beta \in 0 : 1$ из условия $h_\beta(\sigma) = \max\{h_0(\sigma), h_1(\sigma)\}$. Можно показать, что $h_\beta(\sigma) \geq 0$. Пусть, далее $\Im = \{A_\beta(\sigma) : \sigma \subseteq T\}$. Ясно, что $|\Im| = C_{N+1}^{n+2}$, где $|\Im|$ обозначает количество элементов множества $\Im$.

Через $\aleph$ обозначим множество решений $A \in R^{n+1}$ линейных систем

$$(1 - \xi_k)(y_{2,q_k} - p_n(A, t_{q_k})) + \xi_k(p_n(A, t_{q_k}) - y_{1,q_k}) = m, \tag{2}$$

$k \in [0 : n]$, $\xi_k \in \{0, 1\}$, $M \subset \{t_{q_0} < t_{q_1} < \ldots < t_{q_n}\} \subset T$, удовлетворяющих условию

$$\max_{k \in [0:N]} f(A, k) = m. \tag{3}$$

Поскольку каждая система из (2) имеет единственное решение, то $|\aleph| \leq 2^{n+1} C_{N+1-|M|}^{n+1-|M|}$. Процедура решения задачи (1) заключается в следующем.

1. Пусть $|M| \geq n+1$. Берем индексы $\{k_0 < k_1 < \ldots < k_n\} \subseteq M$ и решаем относительно $A \in R^{n+1}$ систему $p_n(A, t_{k_i}) = \frac{1}{2}(y_{2,k_i} - y_{1,k_i})$, $i \in [0 : n]$. Если выполняется равенство (3), то вектор $A \in R^{n+1}$ будет единственным решением задачи (1) ([2]), и процедура завершается.

2. Формируем множество $\Im$. Если существует $A_\beta(\sigma) \in \Im$ такой, что выполняется равенство $\max\limits_{k \in [0:N]} f(A_\beta(\sigma), k) = h_\beta(\sigma)$, то $A_\beta(\sigma)$ будет единственным решением задачи (1) ([2]), процедура завершается. В противном случае, задача (1) имеет бесчисленное множество решений и $\rho^* = m$.

3. Формируем множество $\aleph$, решая конечное число линейных систем (2). Чтобы построить решение задачи (1), достаточно взять любой элемент из множества $\aleph$ (непустота этого множества следует из ([3])). Более того, множество $\aleph$ содержит все крайние точки множества решений задачи (1), и только их ([3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс.* – М.:Наука, 1972.

2. Выгодчикова И.Ю. *Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом* // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2002. – Вып. 4. – С. 27-31.

3. Выгодчикова И. Ю. *О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом* // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2003. – Вып. 5.

Гаджиева З.Д. (Махачкала)
sharapud@datacom.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ-МЕЙКСНЕРА

Работа посвящена приближению дискретных функций $f = f(x)$, определенных на сетке $\Omega_h = 0, h, 2h, \ldots$. В качестве аппарата приближения рассматриваются суммы Фурье $S^{\alpha}_{n,N}(x)$ по функциям Мейкснера $\mu^{\alpha}_{n,N}(x)$, образующим ортогональную систему на Ω_h с весом

$$\eta_N(x) = (1-e^{-h})^{\alpha+1} e^{-x} \frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}$$

Через $l_{\infty,h}$ обозначим нормированное пространство дискретных функций $f = f(x)$, заданных на Ω_h, для которых норма определена следующим образом $\|f\| = \sup\limits_{x\in Z^+} |f(x)|$. Сумма Фурье-Мейкснера $S^{\alpha}_{n,N}(f,x)$ представляет собой линейный непрерывный функционал $S^{\alpha}_{n,N} : f \to S^{\alpha}_{n,N}(f,x)$. Норму этого функционала обозначим через $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$. Неравенство Лебега для сумм $S^{\alpha}_{n,N}(f,x)$ имеет вид

$$|f(x) - S^{\alpha}_{n,N}(f,x)| \le (1 + \lambda^{\alpha}_{n,N}(x))E_n(f,N), \tag{1}$$

где $E_n(f,N)$ – наилучшее приближение функции f полиномами вида $\varphi_n(x) = e^{-x/2}p_n(x), p_n(x)$ – алгебраический полином степени не выше n. Неравенство (1) приводит к задаче об оценке функции Лебега $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$, $x \in \Omega_h$. Мы рассматриваем эту задачу при условии $\alpha = -1/2$, $n \le \lambda N$, $\lambda > 0$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть* $\lambda > 0, n \le \lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:* $(\theta = \theta_n = 4n+2)$

$$\lambda_{n,N}(x) \le c(\lambda) ln(n+1), \qquad x \in [0, 3/\theta]$$

$$\lambda_{n,N}(x) \le c(\lambda) ln(n+1), \qquad x \in [3/\theta, \theta/2]$$

$$\lambda_{n,N}(x) \le c(\lambda)[n^{1/4}|\mu(x,h)| + ln(n+1)], \qquad x \in [\theta/2, \theta - 2\theta^{1/3}]$$

В заключении хочу выразить благодарность моему научному руководителю Шарапудинову И.И. за поставленную задачу и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарапудинов И.И. *Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения.* – Махачкала: ДГПУ, 1997.

Галатенко В.В. (Москва)
vvgalatenko@yahoo.com

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ОШИБКАМ В ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ[21]

Пусть H – пространство со скалярным произведением над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированная система элементов H ($\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), f – элемент H, $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность числовых пар. Определим индуктивно последовательность $\{r_n^e(f)\}_{n=0}^{\infty}$ элементов H и числовую последовательность $\left\{\widehat{f}_n^e\right\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $r_0^e(f) = f$; если уже определен элемент r_n^e, то положим $\widehat{f}_{n+1}^e = (r_n^e(f), e_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1}$, $r_{n+1}^e(f) = r_n^e(f) - \widehat{f}_{n+1}^e e_{n+1}$.

Определение. *Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n^e e_n$ будем называть орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E.*

Отметим, что орторекурсивное разложение с нулевыми ошибками ($\varepsilon_n = \xi_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) совпадает с обычным орторекурсивным разложением, определенным Т.П. Лукашенко (см. [1], [2]).

Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое множество последовательностей числовых пар. Орторекурсивное разложение по нормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть абсолютно устойчивым к ошибкам из множества $\mathcal{E}$, если для любого элемента $f \in H$ и любой последовательности $E \in \mathcal{E}$ орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками E сходится к f. Орторекурсивное разложение по нормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть абсолютно устойчивым к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, если оно абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0$ – это множество последовательностей $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, содержащих лишь конечное число ненулевых пар. Примеры систем, орторекурсивное разложение по которым абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов, можно найти в работах [1]–[3].

[21] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00420, 03-01-06534), программы «Университеты России» (проект УР.04.03.006) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1657.2003.1).

Теорема 1. *Пусть орторекурсивное разложение по нормированной системе абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к ошибкам из множества* $\mathcal{E}_{1-,l^2}$, *где* $\mathcal{E}_{1-,l^2}$ *– это множество последовательностей числовых пар* $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, *таких, что* $\limsup\limits_{n\to\infty} |\varepsilon_n| < 1$ *и* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

Теорема 2. *Пусть нормированные системы* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квадратично близки (т.е.* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\widetilde{e}_n - e_n\|^2 < \infty$*) и орторекурсивное разложение по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов. Тогда орторекурсивное разложение по системе* $\{\widetilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *также абсолютно устойчиво любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашенко Т.П. *Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера-Шаудера* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 10-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2000. – С. 83.

2. Лукашенко Т.П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 2001. – № 1. – С. 6-10.

3. Кудрявцев А.Ю. *Орторекурсивные разложения по системам неортогональных всплесков* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 106-108.

Галатенко В.В., Лившиц Е.Д. (Москва)
vvgalatenko@yahoo.com, livshitz@pochta.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЖАДНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ОШИБКАМ В ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ[22]

Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, D – подмножество H, такое, что нормы всех элементов D равны единице и $\overline{\operatorname{span} D} = H$, f – произвольный элемент H, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольные числовые последовательности. Определим индуктивно последовательнось остатков разложения $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}$ и последовательность разлагающих элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $r_0 = f$. Если уже определен остаток r_n, то в качестве e_{n+1} выберем произвольный элемент из множества D, удовлетворяющий условию $|(r_n, e_{n+1})| \geq t_{n+1} \sup\limits_{e\in D} |(r_n, e_{n+1})| - q_{n+1}$, и положим $c_{n+1} = (1+\varepsilon_{n+1})(r_n, e_{n+1}) + \xi_{n+1}$, $r_{n+1} = r_n - c_{n+1}e_{n+1}$.

[22]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00248, 02-01-00420, 03-01-06534), программы «Университеты России» (проект УР.04.03.006) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1657.2003.1).

Определение. *Описанный выше процесс будем называть обобщенным приближенным слабым жадным алгоритмом (gAWGA – generalized Approximate Weak Greedy Algorithm), а формальный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ – *gAWGA-разложением элемента* f *по системе* D *с ослабляющими последовательностями* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и последовательностями ошибок* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Если для всех натуральных n справедливы равенства $q_n = \xi_n = 0$, то обобщенный приближенный слабый жадный алгоритм совпадает с обычным приближенным слабым жадным алгоритмом (AWGA), предложенным Р. Грибонвалем и М. Нилсеном в работе [1].

Сформулируем теорему о достаточных условиях для сходимости gAWGA-разложений к разлагаемому элементу, обобщающую соответствующий результат для AWGA-разложений (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть* f *—произвольный элемент* H *и параметры gAWGA-разложения* f *по системе* D *удовлетворяют следующим условиям:*

a) *существуют такие действительные положительные числа* δ *и* C, *что для всех натуральных* n *справедливы неравенства* $|\varepsilon_n + \delta| < 1 - \delta$ *и* $|\mathrm{Im}\,\varepsilon_n| \le C\,\mathrm{Re}\,(\varepsilon_n + 1)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n\left(1-|\varepsilon_n|^2\right)^{1/2}}{n} = \infty$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n|^2}{1-|\varepsilon_n|^2} < \infty$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} q^2 \left(1 - |\varepsilon_n|^2\right) < \infty$.

Тогда gAWGA-разложение элемента f *сходится к* f.

Отметим, что условие c) теоремы 1, по крайней мере в случае $|\varepsilon_n| < 1-\gamma$ $(\gamma > 0, n = 1, 2, 3, ...)$, в степенной шкале является окончательным. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Существуют гильбертово пространство* H, *система* D, *элемент* $f \in H$ *и последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, *такие, что для всех натуральных* n *справедливо неравенство* $|\alpha_n| \le Cn^{-1/2}$, *но gAWGA-разложение элемента* f *по системе* D *с параметрами* $t_n = 1$, $q_n = 0$, $\varepsilon_n = 0$, $\xi_n = \alpha_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ *не сходится к* f.

Аналогичный результат справедлив и для условия d) теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gribonval R., Nielsen M. *Approximate Weak Greedy Algorithms* // Adv. Comput. Math. – 2001. – V. 14(4). – P. 361-378.

2. Galatenko V.V., Livshitz E.D. *On the converge of Approximate Weak Greedy Algorithms* // East J. on Approx. – 2003. – V. 9, № 1. – P. 43-49.

Гараев К.Г., Дараган М.А., Осадчая Д.М. (Казань)
enasyrova@yandex.ru

ОПТИМАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КЛИНЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИЯ

В работе поставлена и решена задача построения оптимального закона вдува охлажденного воздуха в ламинарный пограничный слой, возникающий на клине при сверхзвуковом обтекании. Предлагается, что угол полураствора клина меньше критического, так что ударная волна является присоединенной и давление за ней определяется по линейной теории Аккерета [1, 2]; температура стенки постоянна; зависимость вязкости от температуры линейная.

В качестве математической модели взята аппроксимирующая система второго приближения А.А. Дородницына [3]

$$\frac{d\theta_0}{dx} = 18m - \frac{32q}{\theta_1} + \frac{34q}{\theta_0}, \tag{1}$$

$$\frac{d\theta_1}{dx} = 12m - \frac{16q}{\theta_1} + \frac{20q}{\theta_0},$$

где $q = \alpha_e \left(1 - \alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, $\alpha_e = \frac{1-\beta/\sqrt{M_\infty^2-1}}{\sqrt{1+5/M_\infty^2}}$; $\gamma = 1,4$.

Ньютоновское сопротивление трения, испытуемое клином с точностью до постоянной оценивается интегралом

$$X_{mp.} = \int_0^l \frac{dx}{\theta_0(x)}. \tag{2}$$

В качестве ограничения выбрана мощность системы управления

$$Q = a \int_0^l m^2 dx. \tag{3}$$

Требуется найти безразмерный закон вдува $m(x)$, реализующий минимальное значение функционала (2) при дифференциальных связях (1) и изопериметрическом условии (3).

Получена приближенная аналитическая формула для оптимального закона вдува, справедливая при любых числах Маха и угла полураствора клина:

$$m(x) = \beta \left[1 - \left(\tfrac{x}{l}\right)^p\right].$$

Здесь p – положительный корень квадратного уравнения

$$(a_0 a_1)^2 p^2 + \left(16qa_0^2 - 34qa_1\right)^2 \cdot p + 96q^2 = 0;$$

где постоянные a_0 и a_1 определяются из соответствующей алгебраической системы [3], а постоянная β – в соответствии с изопериметрическим условием (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гошек И. *Аэродинамика больших скоростей* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. – 539 с.

2. Дракин И.И. *Аэродинамический и лучистый нагрев в полете* – М.: Государственное научно-техническое издательство. Оборонгиз, 1961. – 96 с.

3. Дородницын А.А. *Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя*// Прикл. математика и техн. физика. – 1960. – № 3. – С. 11-118.

Golinskii L.B. (Ukraine, Kharkov)
golinskii@ilt.kharkov.ua

ABSOLUTELY CONTINUOUS MEASURES ON THE UNIT CIRCLE WITH SPARSE VERBLUNSKY PARAMETERS

Given a probability measure μ on the unit circle T with infinite support, $\operatorname{supp}\mu$, the polynomials $\phi_n(z) = \kappa_n(\mu)z^n + \ldots$, orthonormal on T with respect to μ are uniquely determined by the conditions $\kappa_n(\mu) > 0$ and

$$\int\limits_T \phi_n(\zeta)\overline{\phi_m(\zeta)}d\mu = \delta_{n,m}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

The monic orthogonal polynomials Φ_n are $\Phi_n(z) = \kappa_n^{-1}\phi_n(z) = z^n + \ldots$.

The numbers $\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$, $n = 0, 1, \ldots$, known as the *Verblunsky parameters*, define completely both orthonormal and monic orthogonal polynomials.

Let $\mu = \mu' dm + \mu_s$ be the Lebesgue decomposition with respect to the normalized Lebesgue measure dm on T. One of the highlights of the theory of orthogonal polynomials on the unit circle – Geronimus' theorem – states that

$$\log \mu' \in L^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty. \tag{1}$$

The measures with property (1) constitute the Szegö class. It is crystal-clear from (1) that $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ makes no effect on the singular component μ_s of the measure μ.

The situation changes substantially when we deal with certain subclasses of the Szegő class. Let $\Lambda := \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ be a sequence of positive integers with the Hadamard gaps

$$\lambda = \deg \Lambda = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1. \tag{2}$$

The Verblunsky parameters $\{\alpha_n\}$ are said to be *sparse* if

$$\alpha_n = 0, \qquad n \notin \Lambda \tag{3}$$

Theorem 1. *Let μ be a measure on the unit circle with the Verblunsky parameters* (1)-(3). *Then μ is absolutely continuous. Futhermore, for each closed arc $\Gamma \subset T\backslash\{1\}$ and $p > 0$ we have $(\mu')^{\pm 1} \in L^p(\Gamma)$.*

REFERENCES

1. Kiselev A., Last Y., Simon B. *Modified Prufer and EFGP transforms and the spectral analysis of the one-dimensional Schrodinger operators* // Comm. Math. Phys. – 194. – 1998. – P. 1-45.

Голубов Б.И. (Москва)

О ДРОБНОМ ДВОИЧНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ НА $\mathbb{R}_+$ [23]

Определим функцию $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ равенствами $h(x) = 2^{-n}$, $2^n \le x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Через $\psi(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, обозначим обобщенную функцию Уолша, а через $\oplus$ – операцию двоичного сложения на $\mathbb{R}_+$ (см. [1]). Отметим, что $\psi(x,y) = \psi(y,x)$, $\psi(x,y) = \pm 1$, для $x, y \in \mathbb{R}_+$. Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ положим $W_n^\alpha(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} \int_{2^{-n}}^{2^m} \psi(x,y)(h(y))^\alpha dy$, $\Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha}\psi(x,t)dt$.

Лемма 1. *Функция $W_n^\alpha(x)$ определена для $x > 0$, причем $W_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$.*

Функция $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(x \oplus y)dy$, $x \in \mathbb{R}_+$ называется двоичной сверткой функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Как и в случае обычной свертки $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$.

Определение 1. *Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то функцию $g \equiv J_\alpha(f)$ назовем модифицированным сильным двоичным интегралом (МСДИ) порядка α функции f. Если в этом определении функцию W_n^α заменить функцией Λ_n^α, то получим определение модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) порядка α функции f.*

Определение 2. *Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел $j_\alpha(f) \equiv \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{2^{-n}}^{2^n} (h(x))^\alpha \tilde{f}(y)\psi(x,y)dy$, то назовем его модифицированным двоичным интегралом (МДИ) порядка α функции f в точке x.*

---

[23] Работа поддержана РФФИ, код проекта 02-01-00428

Определение 3. *Если* $\alpha > 0$ *и для функции* $f \in L(\mathbb{R}_+)$ *в точке* $x \in \mathbb{R}_+$ *существует конечный предел* $d^{(\alpha)}(f)(x) \equiv \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{2^n} (h(y))^{-\alpha}\tilde{f}(y)\psi(x,y)dy$, *то назовем его модифицированной двоичной производной (МДП) порядка* α *функции* f *в точке* x.

Определение 4. *Точка* $x \in \mathbb{R}_+$ *нызывается двоичной точкой Лебега локально интегрируемой на* $\mathbb{R}_+$ *функции* f, *если* f *имеет в точке* x *конечное значение и* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \int\limits_0^{2^{-n}} |f(x\oplus t) - f(x)|dt = 0$.

Почти все точки локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f являются ее двоичными точками Лебега.

Теорема 1 (двоичный аналог теоремы Лебега). *Пусть* $\alpha > 0$, *а функция* $f \in L(\mathbb{R}_+)$ *имеет МСДИ* $J_\alpha(f)$ *порядка* α. *Тогда во всякой двоичной точке Лебега* $x \in \mathbb{R}_+$ *функции* f, *а следовательно, почти всюду на* $\mathbb{R}_+$, *справедливо равенство* $d^{(\alpha)}(J_\alpha(f))(x) = f(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, *а функция* $f \in L(\mathbb{R}_+)$ *имеет МСДП* $D^{(\alpha)}(f)$ *порядка* α. *Тогда во всякой двоичной точке Лебега* $x \in \mathbb{R}_+$ *функции* f, *а следовательно, почти всюду на* $\mathbb{R}_+$, *справедливо равенство* $j_\alpha(D^{(\alpha)}(f))(x) = f(x)$.

Теорема 3. *Если у функции* $f \in \mathbb{R}_+$ *при некотором* $\alpha > 0$ *существует МСДИ* $J_\alpha(f)$, *то у* $J_\alpha(f)$ *существует МСДП порядка* α, *причем* $D^{(\alpha)}(J_\alpha(f)) = f$.

Теорема 4. *Если у функции* $f \in L(\mathbb{R}_+)$ *при некотором* $\alpha > 0$ *существует МСДП* $D^{(\alpha)}(f)$ *порядка* α *и выполняется равенство* $\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = 0$, *то у* $D^{(\alpha)}(f)$ *существует МСДИ порядка* α, *причем* $J_\alpha(D^{(\alpha)})(f) = f$.

Будут изложены и другие результаты о дробном двоичном интегродифференцировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения* – М.: Наука, 1987.

Горбунов О.Б.(Саратов)
GorbunovOB@info.sgu.ru

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА С НЕЙТЕГРИРУЕМЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА[24]

Рассмотрим краевую задачу $L = L\Big(Q_\omega(x),\ Q(x),\ \alpha,\ \beta\Big)$ для систе-

[24]Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и Мин. Образования РФ (Е02-1.0-186).

мы Дирака следующего вида

$$\ell Y(x) := BY'(x) + \Big(Q_\omega(x) + Q(x)\Big)Y(x) = \lambda Y(x),\ 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)Y(0) = 0, \quad (\cos\beta,\ \sin\beta)Y(\pi) = 0,$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix},$$

$Q_\omega(x) = Q_\omega^{(k)}(x) = \dfrac{\mu_k}{x-\gamma_k}\begin{pmatrix} \sin 2\eta_k & \cos 2\eta_k \\ \cos 2\eta_k & -\sin 2\eta_k \end{pmatrix}$, $x \in \omega_{k-1/2} \cup \gamma_{k+1/2}$, $k = \overline{1, N}$.

Здесь $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N < \pi$, $\omega_p = (\gamma_{p-1}, \gamma_p)$, $\gamma_{k+1/2} = 0.5(\gamma_{k+1} + \gamma_k)$, $k = \overline{1, N-1}$, $\gamma_{1/2} = \gamma_0 = 0$, $\gamma_{N+1/2} = \gamma_{N+1} = \pi$, $q_j(x)$ – комплекснозначные функции, μ_k, α, β, η_k - комплексные числа. Пусть, для определенности, α, β, $\eta_k \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathrm{Re}\mu_k > 0$, $\mu_k + 1/2 \notin \mathbb{N}$, также будем предполагать, что $q_j(x)$ – абсолютно непрерывна внутри ω_k, $k = \overline{1, N}$, $q_j'(x) \in \mathcal{L}(0, \pi)$ и $|q_j(x)| \prod\limits_{k=1}^{N} |x - \gamma_k|^{-2Re\mu_k} \in \mathcal{L}(0, \pi)$.

При изучении этой системы (1) важную роль играет специальная фундаментальная система решений, по которой осуществляется склейка решений в особых точках. Аналитические и асимптотические свойства этой системы изучались в [1].

Определение. *Функцией Вейля $\mathcal{M}(\lambda)$ задачи L будем называть $\mathcal{M}(\lambda) = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha)\Phi_1(0, \lambda)$, где $\Phi_1(x, \lambda)$ – решение системы (1) при $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\Phi_1(0, \lambda) = 1$, $(\cos\beta,\ \sin\beta)\Phi_1(\pi, \lambda) = 0$.*

Постановка обратной задачи. *По функции Вейля $\mathcal{M}(\lambda)$ восстановить L.*

Далее, наряду с задачей L рассмотрим задачу $\widetilde{L} = L\Big(\widetilde{Q}_{\widetilde{\omega}}(x),\ \widetilde{Q}(x),\ \widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta}\Big)$ того же вида, но с другими коэффициентами. Будем считать, что если A – некоторый объект задачи L, то $\widetilde{A}$ – аналогичный объект задачи $\widetilde{L}$.

Теорема. *Если $\mathcal{M}(\lambda) = \widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ и $\alpha = \widetilde{\alpha}$, то $L = \widetilde{L}$.*

Опираясь на функцию Вейля, можно построить процедуру решения обратной задачи, центральное место в которой занимает основное уравнение обратной задачи. Это основное уравнение будет линейным в соответствующем банаховом пространстве, и можно доказать его однозначную разрешимость.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Горбунов О.Б. *О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала* // Математика.Механика, изд-во Саратовского ун-та. – Саратов, 2000. – Вып. 2. – С. 21-25.

Горяйнов В.В. (Волжский)
goryainov@vgi.volsu.ru

ДИНАМИКА ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

Пусть f - голоморфное отображение единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ в себя. Известная теорема Данжуа-Вольфа утверждает, что в случае, когда f отлично от мебиусова преобразования единичного круга на себя, последовательность натуральных итераций $f^1 = f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, сходится локально равномерно в $\mathbb{D}$ к некоторой константе $q \in \overline{\mathbb{D}}$. В случае $q \in \mathbb{D}$ эта точка является неподвижной для функции f, т.е. $f(q) = q$. Если q попадает на границу единичного круга, то ее также можно считать неподвижной точкой, поскольку, в смысле углового предела, $f(z) \to q$ и $f'(z) \to \gamma$ при $z \to q$, где $0 < \gamma \leq 1$. В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f, и она играет важную роль в изучении динамики отображения f. Один из вопросов динамики голоморфного отображения состоит в возможности вложения натуральных итераций в непрерывную полугруппу, т.е. вопрос существования такого семейства $\{f^t\}_{t \geq 0}$, что $f^0(z) \equiv z$, $f^1 = f$ и $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ при $s, t \geq 0$. В случае существования такого семейства будем называть f вложимой. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть f – голоморфное отображение $\mathbb{D}$ в себя, отличное от мебиусова преобразования единичного круга на себя, с точкой Данжуа-Вольфа q, $|q| < 1$, и $f'(q) = \gamma \neq 0$. Тогда f вложима в том и только том случае, если существует решение F функционального уравнения Шредера $F \circ f(z) = \gamma F(z)$, которое представляет собой голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям:*

$$\frac{(z-q)F'(z)}{F(z)} = \frac{(1-|q|^2)p(q)}{(1-\overline{q}z)p(z)},$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция с положительной вещественной частью и $exp\{(|q|^2 - 1)p(q)\} = \gamma$.

В случае $q = 0$ этот результат содержится в [1]. В теории случайных ветвящихся процессов вопрос вложимости вероятностной производящей функции связан с вложимостью процесса Гальтона-Ватсона в однородный марковский ветвящийся процесс. При этом требуется, чтобы и все дробные итерации также были вероятностными производящими функциями. Получены условия на решение уравнения Шредера, обеспечивающие это свойство. Рассмотрены также другие вопросы, связанные с приложениями к теории ветвящихся процессов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Elin M., Goryainov V., Reich S., Shoikhet D. *Fractional Iteration and*

Functional Equations for Functions Analytic in the Unit Disk // Computational Methods and Function Theory. – 2002. – V. 2, No.2. – P. 353-366.

Граф С.Ю., Ступин Д.Л., Шеретов В.Г. (Тверь)
a000110@tversu.ru

ОЦЕНКИ В ГРУППЕ НОРМИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНО-КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА[25]

Пусть $\tilde{S}$ – класс всех локально-конформных отображений f единичного круга Δ, нормированных условиями: $f(0) = f'(0)-1 = 0$ и $f(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Семейство $\tilde{C} = \{h: \ h \in Hol(\Delta),\ h(0) = 1,\ 0 \notin h(\Delta)\}$ образует группу относительно операции поточечного умножения элементов. Очевидно, что $h(z) = z \cdot f'(z)/f(z) \in \tilde{C}$ для произвольной функции $f \in \tilde{S}$ и f восстанавливается по h интегрированием:

$$f(z) = z \cdot \exp\Big(\int_0^z \frac{h(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta\Big).$$

Пусть $h_\nu(z) = z \cdot f'_\nu(z)/f_\nu(z)$, $\nu = \overline{1,2}$. Положим

$$\big(f_1 * f_2\big)(z) = \big(f_2 * f_1\big)(z) = z \cdot \exp\Big(\int_0^z \frac{h_1(\zeta)\cdot h_2(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta\Big).$$

Относительно операции $*$ множество $\tilde{S}$ образует группу. Известный класс S является подмножеством, но не подгруппой группы $\tilde{S}$.

В сообщении предполагается обсудить задачи:

а) об оценках коэффициентов в подклассах

$$Prod_n S = \{F \in \tilde{S}: \ F = f_1 * f_2 * \dots * f_n,\ f_\nu \in S,\ \nu = \overline{1,n}\};$$

б) об искажении и однолистном покрытии в классах $Prod_n S$;

в) об условиях однолистности отображений

$$f_\alpha(z) = z \cdot \exp\Big(\int_0^z \frac{h^\alpha(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta\Big),\ \text{где } f \in S,\ h = z \cdot f'/f,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Громова Л.Л. (Саратов)

ОБ ОЦЕНКЕ $|a_4|$ В КЛАССЕ $S(k)$II [26]

Пусть $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots$ регулярна и однолистна в единичном круге и допускает k - квазиконформное гомеоморфное продолжение до римановой сферы $\bar{C}, f(\infty) = \infty$. Обозначим класс таких функций через $S(k)$. Использовав метод площадей [1], доказано следующее утверждение.

[25]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00112).
[26]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00123).

Теорема. *В классе $S(k)$ имеем*

$$|a_4| \le \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k\gamma(x^*),\ 0.15 \le k < \frac{\sqrt{7}}{15},$$

где x^* – единственный корень уравнения

$$3(0.22 - k^2)x^2 - 3.68x + 6k^2 + 1.62 = 0, x^* \in (0;1),$$

а

$$\gamma(x) = (0.22 - k^2)x^3 - 1.84x^2 + (6k^2 + 1.62)x.$$

Полученный результат улучшает оценку R. Kühnau [2] при $0.15 \le k < \frac{\sqrt{7}}{15}$.

Отметим, что применяя численные методы, можно увеличить промежуток

$$[0.15; \tfrac{\sqrt{7}}{15}) \text{ до } (0.1013; \tfrac{\sqrt{7}}{15}).$$

Если взять $f(z) \in S(k)$ с $a_2 = 0$, то аналогичным методом приходим к точной оценке $|a_4|$ с экстремальной функцией

$$f(z) = z(1 - k\eta z)^{-2/3}, 0 < k < 1, |h| = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н.А. *Принцип площадей в теории однолистных функций* – М.: Наука, 1975. – 336 с.
2. Kruschkal S.L., Kühnau R. *Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anvendungen*// Teubner-Texte zur. Math. 54. Teubner. Leibzig, 1983.

Гудошникова Е.В. (Саратов)
GudoshnikovaEV@info.sgu.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ОТ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Для линейных положительных операторов хорошо известны (см. [1]) условия, обеспечивающие сходимость последовательности операторов к тождественному:

Теорема Коровкина. *Пусть L_n – последовательность линейных положительных операторов, для которой выполнены условия $L_n(1;x) \to 1$; $L_n(t;x) \to x$; $L_n(t^2;x) \to x^2$. Если функция g непрерывна на $[a,b]$, непрерывна слева в точке a, непрерывна справа в точке b, то $L_n(g;x) \to g(x)$ для всех $x \in [a,b]$.*

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $L_n(g;x) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)$ – сумматорные линейные положительные операторы. Для функции $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$, по операторам L_n построим линейные положительные операторы

$$S_n(f;\bar{x}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_r}{n}\right) \prod_{i=1}^{r} p_{n,k_i}(x_i).$$

Опираясь на теорему Коровкина, легко показать, что $S_n(f;\bar{x}) \to f(\bar{x})$ для любой функции $f \in C(\mathbb{R}_r)$. Рассмотрим поведение операторов на одном подклассе разрывных функций.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Операторы L_n удовлетворяют условиям 1-3 теоремы Коровкина и кроме того существует последовательность чисел $\delta_m > 0$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0 \ \text{и} \ \lim_{m\to\infty} \sum_{|k/m-x|\geq\delta_m} p_{m,k}(x) = 0;$$

2. f – ограниченная функция, имеющая в точке $\bar{x}_o$ конечное число частичных пределов $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, E_m – проколотая δ_m-окрестность точки $\bar{x}_o$, которую можно разбить на конечное число непересекающихся связных множеств $E_{j,m}$ таких, что на каждом из них f непрерывна,

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{x}_o \\ \bar{x}\in E_{j,m}}} f(\bar{x}) = \lambda_j, \quad \mu(E_m) = \sum_{j=1}^{l} \mu(E_{j,m}),$$

где $\mu(E)$ – мера Лебега множества E и для всех $j = 1, \ldots, l$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\mu(E_{j,m})}{\mu(E_m)} = \alpha_j$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f;\bar{x}_o) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \alpha_j$.

Отметим, что для функции одного переменного теорема 1 примет вид:

Теорема 1*. *Если выполнено условие 1 теоремы 1 и f – ограниченная функция, имеющая в точке x_o разрыв первого рода, то*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f;x_o) = \frac{1}{2}\left[f(x_o+0) + f(x_o-0)\right].$$

Аналогичное утверждение имеет место для частных сумм ряда Фурье, которые не являются линейными положительными операторами, а условие на функции $p_{n,k}$, сформулированное в теореме 1, в некотором смысле аналогично принципу локализации для частных сумм ряда Фурье.

В случае функции двух переменных условиям теоремы удовлетворяют ограниченные функции, имеющие разрывы по линиям, проходящим через точку x_o.

Примерами линейных положительных операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут служить операторы Бернштейна, Саса-Миракьяна, Баскакова и другие операторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П.П. *Линейные положительные операторы и теория приближений.* – М.:1959.

Гулынина Е.В.(Ставрополь), Зверева М.Б. (Воронеж)
zalex@rambler.ru

ПРИНЦИП ХИКСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[27]

Пусть на отрезке $[0, l]$ задано уравнение

$$-(pu')' + Q'u = F' \quad (0 \leq x \leq l), \tag{1}$$

где штрихи обозначают обобщенное дифференцирование, а функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются функциями ограниченной вариации на $[0, l]$, причем $\inf\limits_{(0,l)} p > 0$. Такое уравнение согласно концепции Покорного Ю.В. может быть адекватно описано в виде поточечно задаваемого (т.е. обыкновенного) уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p\frac{d}{dx}u\right) + qu = f,$$

где обозначено $q = \dfrac{d}{d\sigma}Q$, $f = \dfrac{d}{d\sigma}F$, и где $\sigma(x)$ – строго возрастающая на отрезке $[0, l]$ функция, определяемая лишь по «внешним» параметрам задачи (1), а символ $\dfrac{d}{d\sigma}$ означает поточечное σ-дифференцирование. В качестве решений рассматриваются непрерывные на отрезке $[0, l]$ функции.

Назовем точку $x = 0$ (или $x = l$) закрепленным концом уравнения (1), если его решения обусловлены равенством $u(0) = 0$ (соответственно $u(l) = 0$). Будем обозначать через $\Delta z(\xi)$ скачок функции $z(x)$ в точке ξ, т.е. $\Delta z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi - 0)$.

Если оба конца отрезка $[0, l]$ не закреплены, то в каждом из концов уравнение (1) превращается в традиционное краевое условие Штурма-Лиувилля, т.е. в точке $x = 0$ уравнение (1) принимает вид $-p(+0)u'(+0) + u(0)\Delta Q(0) = \Delta F(0)$, а в точке $x = l$ $p(l-0)u'(l-0) + u(l)\Delta Q(l) = \Delta F(l)$.

Теорема 1. *Пусть оба конца отрезка* $[0, l]$ *не закреплены, и пусть функции* $Q(x)$ *и* $F(x)$ *монотонно не убывают, причем* $Q \neq const$, $F \neq const$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u(x)$, *которое вдобавок является строго положительным на отрезке* $[0, l]$.

Из теоремы 1 следует, что при переходе от задачи (1) к задаче

$$-(pu_1')' + Q'u_1 = F_1' \quad (0 \leq x \leq l), \tag{2}$$

[27]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (КЦСПбГУ) (грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 01-01-00418, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.047) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1

где $F_1' \geq F'$ (в том смысле, что функция $F_1 - F$ не убывает) решение задачи (2) будет связано с решением задачи (1) неравенством $u_1(x) \geq u(x)$ для всех $x \in [0, l]$.

Теорема 2 (аналог принципа Хикса). *При переходе от задачи* (1) *к задаче* (2) *максимум относительного приращения, т.е.* $\max\limits_{[0,l]} \dfrac{u_1(x) - u(x)}{u(x)}$, *достигается в точках роста функции* $F_1 - F$.

Гуменюк П.А. (Саратов)
gumenuk@sgu.ru

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА РАЗМЕРА БАССЕЙНА ПРИТЯЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ РАДИУС ОДНОЛИСТНОСТИ[28]

Пусть $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ – мероморфная функция, а f^n – её n-ая итерация. Одна из главных задач комплексной динамики как части теории функций состоит в установлении связи между поведением последовательности $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и характеристиками функции f, определение которых не содержит итераций. Например, известно, что если $f(z_0) = z_0$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{C}$ и $|f'(z_0)| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(z) = z_0$ для всех z достаточно близких к z_0. Множество $\mathcal{A}(f, z_0)$ всех точек z, в которых функции f^n определены и имеет место это предельное соотношение, называется *бассейном притяжения неподвижной точки* z_0. (Подробнее об основных понятиях и результатах комплексной динамики см., например, [1-4].)

В докладе рассматривается задача нахождения точной нижней оценки расстояния $R(f) = \mathrm{dist}(0, \partial \mathcal{A}(f, 0))$ в классе $\lambda S_m = \{\lambda f_0 : f_0 \in S_m\}$, $\lambda \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$, где S_m обозначает множество всех мероморфных в плоскости функций f, однолистных в единичном круге $\mathbb{D}$ и имеющих там разложение $f(z) = z + a_2 z^2 \ldots$, $z \in \mathbb{D}$. Как следует из теоремы роста для однолистных в круге функций,

$$R(f) \leqslant 1 - \sqrt{|\lambda|}, \qquad f \in \lambda S_m, \tag{1}$$

причём для $\lambda > 0$ эта элементарная оценка является точной.

Нами доказана теорема, улучшающая оценку (1). В частности, из неё вытекают следующие утверждения

Предложение 1. *При* $\lambda \in \mathbb{D} \backslash [0; 1)$ *оценка* (1) *не является точной.*

Теорема 1. *Пусть* $t \in (0; 2\pi)$. *Тогда*

$$\inf_{f \in \lambda S_m} R(f) = \frac{\mu + 2 - \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2}, \qquad \lambda = \mu e^{it},$$

для достаточно малых $\mu > 0$.

[28]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03-01-06010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Beardon A.F. *Iteration of Rational Functions* – Springer-Verlag, 1991.

2. Bergweiler W. *Iteration of meromorphic functions*// Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). – 1993. – V. 29. – No. 2. – P. 151-188.

3. Carleson L., Gamelin T.W. *Complex Dynamics* – Springer-Verlag, 1993.

4. Милнор Дж. *Голоморфная динамика* – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

Гуревич А.П., Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ СЛАБО НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ[29]

Пусть L – оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1],\ p_k(x) \in L[0,1],$$

и нормированными ([1], с.66) краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{\sigma_j} a_{jk}y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{\sigma_j} b_{jk}y^{(k)}(1) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В настоящей статье изучаются такие операторы, для которых ядро $G(x,t,\lambda)$ резольвенты R_λ допускает любую степенную оценку. Пусть $\lambda = -\rho^n$, $\rho \in \cup_{j=1}^4 S_j$, где $S_j = \{\rho|\ \frac{\pi}{2n}(j-1) \le \arg\rho \le \frac{\pi}{2n}j\}$. Известно ([1], с.58-59), что в каждом из секторов $S_1 \cup S_2$ и $S_3 \cup S_4$ уравнение $l(y) + \rho^n y = 0$ имеет систему решений $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$ с асимптотикой $\frac{d^m y_k(x,\rho)}{dx^m} = (\rho\omega_k)^m[1]\exp\rho\omega_k x$, $m = 0, \ldots, n-1$, где $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ – различные корни n-й степени из -1, занумерованные так, что выполняются неравенства $Re\,\rho\omega_1 \ge Re\,\rho\omega_2 \ge \ldots \ge Re\,\rho\omega_n$ (нумерация ω_k зависит от сектора), $[a] = a + O(\frac{1}{\rho})$. Обозначим $U_j(y_k) = A_{jk} + B_{jk}\exp\rho\omega_k$. Разложим характеристический определитель $\Delta(\rho) = \det(U_j(y_k))$ в сумму, каждое слагаемое которой представляет собой определитель, составленный из A_{jk} и B_{jk}, умноженный на экспоненту вида $\exp\rho(\omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_\mu})$. Пусть число ν определяется из условия: при $\rho \in S_j$ выполняется $Re\,\rho\omega_\nu \ge 0 \ge Re\,\rho\omega_{\nu+1}$. Обозначим через P_0, P_1 ($\tilde P_0$, $\tilde P_1$) определители в разложении $\Delta(\rho)$, стоящие при $\exp\rho\Big(\sum\limits_{k=1}^{\nu}\omega_k\Big)$ и $\exp\rho\Big(\sum\limits_{k=1}^{\nu+1}\omega_k\Big)$ соответственно, при условии, что число ν выбрано в предположении

[29]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169).

$\rho \in S_1$ ($\rho \in S_3$). Предположим, что выполняется условие: существуют вещественные α_1, β_1, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$ такие, что

$$\begin{gathered}\lim_{\rho\to\infty}\frac{P_0}{\rho^{\alpha_1}}\neq 0,\ \lim_{\rho\to\infty}\frac{P_1}{\rho^{\beta_1}}\neq 0,\ \rho\in S_1\cup S_2;\\ \lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde{P}_0}{\rho^{\tilde{\alpha}_1}}\neq 0,\ \lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde{P}_1}{\rho^{\tilde{\beta}_1}}\neq 0,\ \rho\in S_3\cup S_4.\end{gathered}\qquad(1)$$

Операторы с условием (1) и представляют собой рассматриваемый класс слабо нерегулярных операторов.

В данной статье изучаются средние Рисса вида $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma R_\lambda f\,d\lambda$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C[0,1]$ *и удовлетворяет краевым условиям, которые не содержат производных. Тогда* $\lim\limits_{r\to\infty}\left\|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma R_\lambda f\,d\lambda\right\|_{C[h,1-h]} = 0$, *где* r *такие, что на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* L, $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\gamma > 0$ *и* $\gamma \geq \sigma-\alpha$, $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j$, $\alpha = \min\{\alpha_1,\beta_1,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1\}$.

Пусть L' – другой оператор рассматриваемого вида с параметрами $\alpha_1', \beta_1', \tilde{\alpha}_1', \tilde{\beta}_1', \sigma' = \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j', \alpha' = \min\{\alpha_1',\beta_1',\tilde{\alpha}_1',\tilde{\beta}_1'\}$ и R'_λ – его резольвента.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \geq \max\{\sigma-\alpha, \sigma'-\alpha'\}$ $(\gamma > 0)$. *Тогда для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *и любого* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ $\lim\limits_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma(R_\lambda f - R'_\lambda f)\,d\lambda\right\|_{C[h,1-h]} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1968.

Данченко В.И., Данченко Д.Я. (Владимир)
danch-m2@vpti.vladimir.su

О ЧИСЛЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[30]

Пусть $D: |z| < 1$, $z_0 \in D$ и фиксированы натуральные s и n. По-

[30]Работа выполнена при финансовой поддержаке РФФИ (проект № 02-01-00913), РФФИ-БРФФИ (грант № 02-01-81031) и ведущих научных школ (проект НШ-1892.2003.1)

ложим $\alpha(z) = -\frac{1}{s}\frac{1}{(z-z_0)^s}$, $A_s = A_s(z_0) = \frac{1}{s}\frac{1}{(1-|z_0|)^s}$, $q(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k(z)}{k!}$. Несложно показать, что

$$\int\limits_{|z|=1} \left|\frac{1}{(z-z_0)^{s+1}} - \frac{q'(z)}{q(z)}\right| |dz| \le 4\pi e^{A_s+n} A_s s \left(\frac{A_s}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Здесь $\frac{q'(z)}{q(z)} = \sum_{k=1}^{ns} \frac{1}{z-\zeta_k} - \frac{ns}{z-z_0}$, а $\{\zeta_k\}$ – нули функции $q(z)$, которые находятся по формуле $\zeta_k = z_0 + \frac{1}{\tau_k}$, где τ_k – корни уравнения (относительно t)

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{t^s}{s}\right)^m = 0. \tag{2}$$

Пусть f – голоморфная в D функция. При $n > 5A_s$ (тогда все точки ζ_k лежат в D) и достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{s!}f^{(s)}(z_0)+ns\,f(z_0)-\sum_{k=1}^{ns} f(\zeta_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1-\varepsilon} f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0)^{s+1}} - \frac{q'(z)}{q(z)}\right) dz.$$

Отсюда и из (1) получается

Теорема. *Пусть фиксированы $z_0 \in D$ и натуральные s и $n > 5A_s$. Тогда для любой голоморфной в D функции f с $\|f\| = \|f\|_{\infty,D} < \infty$ имеем*

$$\frac{1}{s!}f^{(s)}(z_0) \approx -ns\,f(z_0) + \sum_{k=1}^{ns} f(\zeta_k) \tag{3}$$

со следующей оценкой погрешности

$$\Delta(f,z_0,s,n) := \left|\frac{1}{s!}f^{(s)}(z_0) + ns\,f(z_0) - \sum_{k=1}^{ns} f(\zeta_k)\right| \le 2\|f\|e^{n+A_s} A_s s \left(\frac{A_s}{n}\right)^n,$$

где $\zeta_k = z_0 + \frac{1}{\tau_k} \in D$, а τ_k – корни уравнения (2), причем $\left(\frac{ns}{5}\right)^{1/s} \le |\tau_k| \le (2ns)^{1/s}$.

Приведем еще одну оценку погрешности формулы (3).

Теорема. *При любых $z_0 \in D$, $s \in \mathbb{N}$, $p \ge 5$ и $n = [pA_s] + 1$ имеем*

$$\Delta(f,z_0,s,n) \le \|f\| s e^{-A_s(\ln p-2)p}.$$

Дербенев С.А., Осадчая Д.М. (Казань)
enasyrova@yandex.ru

РАСЧЕТ РАЦИОНАЛЬНОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Организация рациональной тепловой защиты поверхностей, обтекаемых сверхзвуковым потоком сжимаемого вязкого газа является одной из актуальных проблем современной газовой динамики. В работе рассматривается задача создания постоянной температуры на определенном участке стенки. Существует несколько технических способов организации тепловой защиты [1, 2, 3].

Наиболее важной является подача защитной струи через встроенный в тело пористый участок, соответствующую щель, насадок или создать охлаждаемый участок тела, а остальную часть не охлаждать. Эти три пути тепловой защиты далее рассмотрены в предлагаемой работе.

Теоретический расчет турбулентного течения пока не возможен, поэтому разработаны полуэмпирические методы расчета турбулентного пограничного слоя и они позволяют приближенно рассчитать развитие пограничного слоя на стенке. В работе использована математическая модель основанная на интегральных уравнениях количества движения, кинетической энергии и момента количества движения для пограничного слоя.

Проведен сравнительный анализ моделей и расчет тепловых завес в этих трех случаях с предвключенным участком величиной 5 см. и последующим участком величиной 15 см., для которого и осуществляется тепловая защита. Расчетные данные получены на высотах от 1 км. до 20 км., при различных числах Маха от M=1 до M=3, скоростях вдува от 50 м/с до 200 м/с и различных температурах охладителя (253°К, 263°К, 273°К), а в качестве охладителя берется воздух. При тангенциальном вдуве высота щели изменялась от 1 мм. до 2 мм.

Полученные результаты показали, что наиболее эффективным является тангенциальный вдув с высотой щели 2 мм. и скоростью вдува 200 м/с. Он позволяет на всех режимах достигнуть постоянной температуры защищаемой части стенки, а при этом максимальный расход газа будет 0,16 кг/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С.С. *Основы теории теплообмена.* – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1970. – 660 с.

2. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. *Тепломассообмен в турбулетном пограничном слое.* – М.: Энергия, 1972. – 323 с.

3. Романенко П. Н. *Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое. Справочник.* – М.: Энергия, 1974. – 464 с.

Джандаров Р.А., Нурсултанов Е.Д. (Казахстан, Астана)
roman180@rambler.ru, er-nurs@yandex.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича-

Калдерона [1] в дигональном случае($p_0 = q_0, p_1 = q_1$)имеющая вид:

Теорема. *Пусть T – полуаддитивный оператор,* $0 < r_0, r_1 \le \infty$, $p_0 \ne p_1$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$,

$$T : L_{p_0 r_0} \to L_{p_0 \infty} \text{ с нормой } M_0 \tag{1}$$

$$T : L_{p_1 r_1} \to L_{p_1 \infty} \text{ с нормой } M_1. \tag{2}$$

Тогда $T : L_{p\tau} \to L_{p\tau}$ *и* $\|T\| \le c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}{}_{T:L_{p\tau}\to L_{p\tau}}$, *где* $1 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $1 \le \tau \le \infty$

Как видно из теоремы, если условия (1) и (2) заменить на более сильные, т.е. если $T : L_{p_0 r_0} \to L_{p_0 s_0}$ $s_0 \le \tau_0$, $T : L_{p_1 r_1} \to L_{p_1 s_1}$ $s_0 \le \tau_0$, то утверждение останется прежним.

Овчинниковым была получена оптимальная интерполяционная теорема:

Теорема. *Пусть T – полуаддитивный оператор,* $0 < r_0, r_1, s_0, s_1 \le \infty$, $p_0 \ne p_1$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$

$$T : L_{p_0 r_0} \to L_{p_0 s_0} \text{ с нормой } M_0$$
$$T : L_{p_1 r_1} \to L_{p_1 s_1} \text{ с нормой } M_1.$$

Тогда $T : L_{p\tau} \to L_{ps}$ *с нормой* $\|T\| \le c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, *где* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s})_+ = (1-\theta)(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{s_0})_+ + \theta(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{s_1})_+$

В данной работе исследуется задача, когда усиление условия (1) можно компенсировать ослаблением условия (2) так, чтобы имело место сильное неравенство:

Теорема. *Пусть* $0 < r_0, r_1 \le \infty$, $p_0 \ne p_1$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$, $\theta \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\beta(1-\theta) = \alpha\theta$, *и линейное отображение удовлетворяет условиям:*

$$\sup_{\substack{k\in Z\\ k\ne 0}} \frac{2^{\frac{k}{p_0}}}{|k|^{\alpha}} (Tf)^*(2^k) \le M_0 \|f\|_{L_{p_0 r_0}}, \quad \sup_{\substack{k\in Z\\ k\ne 0}} 2^{\frac{k}{p_1}} |k|^{\beta} (Tf)^*(2^k) \le M_1 \|f\|_{L_{p_1 r_1}}.$$

Тогда $\|Tf\|_{L_p} \le c \|f\|_{L_p}$.

Получены также и другие интерполяционные теоремы.

Дитциан З. (Эдмонтон), Тихонов С.Ю. (Москва)
tikhonov@mccme.ru

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СРЕДНИМИ СТЕКЛОВА[31]

Будем говорить, что функция $\varphi(\delta)$, определенная на $[0,1]$, принад-

[31] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00080 и 03-01-06155), NSERC (grant A 4816) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ 1657.2003.1).

лежит классу Φ, если она не убывает, не тождественно равна нулю и $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Средние Стеклова функции f определим следующим образом:

$$f_h(x) := \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+t)\,dt, \qquad f_h^*(x) := \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{h} f(x+t)\,dt.$$

Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции f в метрике L_p при помощи тригонометрических полиномов T_n степени не выше, чем n, т.е. $E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n} \|f - T_n\|_p$.

Далее запишем следующее на мажоранту (см. [1]): функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B_β), если

$$\int\limits_{1/n}^{1} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+1}}\,dt = O\left[n^\beta \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Справедлива

Теорема. *Пусть* $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$ *и* $\varphi \in \Phi$.

1) Если $\varphi \in B_2$, *то условие*

$$\|f - f_h\|_p = O[\varphi(h)]$$

эквивалентно условию

$$E_n(f)_p = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

2) Если $\varphi \in B_1$, *то условие*

$$\|f - f_h^*\|_p = O[\varphi(h)]$$

эквивалентно условию

$$E_n(f)_p = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Для случая $p = 2$ эта теорема доказана в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*// Труды Московского Матем. общ-ва. – 1956. – 5. – С. 483-522.

2. Ланина Е.Г. *Наилучшее приближение функций и приближения функциями Стеклова* // Вестник Московского Университета. Сер. I. Мат. Мех. – 2000. – № 2. – С. 49-52.

Долженко Е.П. (Москва)
eugen@aottl.msk.su

ОБЗОР ТЕОРИИ ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ[32]

Ниже P – неотрицательный выпуклый положительно однородный функционал на некотором линейном нормированном пространстве Λ с нормой $\|\cdot\|$; $W(P;L) = \sup\{\|f\|/P(f) : f \in L,\ f \neq 0\}$ – *свобода* системы $(P;L)$ $(L \subset \Lambda)$; $E(P;L,f) = \inf\{P(l-f) : l \in L\}$, $l(P;L,f)$ и $A(P;L,f)$ – наименьшее уклонение L от $f \in \Lambda$, соответствующий элемент наилучшего приближения и множество всех таких элементов для f соответственно. Знакочувствительным весом на $J = [a,b]$ называем пару $p = (p_-, p_+)$ неотрицательных функций на J и говорим, что вес p ограничен, непрерывен, полунепрерывен и т.д., если таковы обе функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$; $\|p\| := \max\{\|p_-\|_{C(J)}, \|p_+\|_{C(J)}\}$; $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^- := f^+ - f$, $(f,p) := f^+p_+ - f^-p_-$, $|f|_{p,J} := \|(f,p)\|_{C(J)}$ – «p-норма» функции f (в общем случае $|f|_{p,J}$ – несимметричная полунорма и не является нормой, в общем случае она не является и несимметричной нормой, будучи таковой лишь если $|f|_{p,J} \neq 0$ $\forall f \in C(J)$, $f \neq 0$); $W(p,L) := W(P;L)$ при $P(\cdot) = |\cdot|_{p,J}$ и $L \subset C(J)$; $\mathbf{supp}(g)$ – замкнутый носитель функции $g(x)$ на J; $\omega(f,\delta)$ и $\omega(p,\delta) := \max\{\omega(p_-,\delta), \omega(p_+,\delta)\}$ – модули непрерывности функции f и веса p; чебышевское подпространство в $C(J)$ – конечномерное подпространство всевозможных линейных комбинаций некоторой чебышевской системы функций из $C(J)$.

Теорема 1 [1]. *Если L – чебышевское подпространство из $C(J)$, вес p ограничен на J, то для наличия у каждой функции $f \in C(J)$ хотя бы одного элемента $l(p,L,f)$ необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: (a) $W(p,L) < \infty$, (b) $W(p,L) = \infty$ и каждая точка из $\mathbf{supp}\,(p_-) \cap \mathbf{supp}\,(p_+)$ является изолированной для $\mathbf{supp}\,(p_-) \cup \mathbf{supp}\,(p_+)$.*

Теорема 2 [1]. *Пусть L – n-мерное чебышевское подпространство из $C(J)$, вес p ограничен. Для того, чтобы каждая функция $f \in C(J)$ имела ровно один элемент $l(p,L,f)$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathbf{supp}\,(p_-) \cap \mathbf{supp}\,(p_+)$ состояло не менее чем из n точек.*

В случае $\Lambda = C(J)$, n-мерного чебышевского подпространства L и конечного полунепрерывного сверху веса p в [1] получен критерий элемента $l = l(p,L,f)$, непосредственно обобщающий теорему Чебышева об альтернансе: при этом лишь вместо (чебышевского) альтернанса для разности $(f,(1,1))(x) = l(x) - f(x)$ фигурирует альтернанс для взвешенной разности $(l-f,p)(x)$. В случае $\Lambda = C(J)$, семейства $L = L_n$ алгебраических полиномов степени $\leq n$ и произвольного знакочувствительного

---

[32]Работа поддержана РФФИ (грант № 02-01-00913), РФФИ-БРФФИ (грант № 02-01-81031) и фондом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1892.2003.1)

веса p (его компоненты $p_-(x)$ и $p_+(x)$ могут принимать и значение $+\infty$, что соответствует аппроксимации с условием интерполяции, а также односторонней аппроксимации) критерий получен в [4].

Теорема 3 [1]. *Если множество $L \subset \Lambda$ выпукло, $W(P;L) < \infty$, $f \in \Lambda$, то $A(P;L,f)$ также выпукло, и*

$$\operatorname{diam} A(P;L,f) \le 2W(P;L)(E(P;L,f) + E(P;L,-f)),$$

и при $W(P;L) = \infty$ имеем равенство $\operatorname{diam} A(P;L,f) = \infty$ $\forall f \in \Lambda$. Если же $\Lambda = C(J)$, L – чебышевское подпространство в $C(J)$, p – знакочувствительный вес на J, то $\operatorname{diam} A(p,L,f) \le 2W(p,L)E(p,L,-f)$ $\forall f \in C(J)$.

Ниже $\omega(L,\delta) := \sup\{\omega(l/\|l\|_{C(J)},\delta) : l \in L,\, l \ne 0\}$ – модуль непрерывности семейства $L \subset C(J)$. Приведем одну теорему об устойчивости элемента наилучшего приближения.

Теорема 4 [2]. *Если $\|p\| = \|q\| = 1$, $d = d(p,q)$ – d-расстояние между p и q (см. [1]), L – чебышевское подпространство из $C(J)$, $0 < k = \text{const} < 1$, $\omega(L,d) + d \le (1-k)/W(p,L)$, $E(p,L,f) > 0$, то $\|l(p,L,f) - l(q,L,f)\|_{C(J)} \le C(p,L,f)[\omega(L,d) + \omega(f/\|f\|_{C(J)},d) + d]/k$.*

В [3] дана неулучшаемая по порядку величин оценка наименьших уклонений произвольной $f \in C(J)$ от полиномов степени (порядка) $\le n$ в «p-метрике» $|\cdot|_{p,J}$ через модули непрерывности функции f и веса p, а также модуль непрерывности функции f относительно несимметричной p-нормы (эта оценка – прямое обобщение неравенства Джексона), получены обратные теоремы.

В [5] определение скалярного произведения с весом непосредственно обобщено до скалярного произведения со знакочувствительным весом, дано соответствующее определение ортогональности, получены прямые обобщения основных теорем теории ортогональных функциональных рядов и теории ортогональных полиномов, квадратурных формул.

Следующая теорема аналогична теореме Банаха-Мазура из функционального анализа.

Теорема 5 [6]. *Каждое сепарабельное линейное пространство с вообще говоря несимметричной нормой вкладывается изометрически и изоморфно в пространство непрерывных функций на $J = [0,1]$ с несимметричной полунормой $|\cdot|_{p,J}$, где $p = (p_- \equiv 1,\, p_+ \equiv 0)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности)*// Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62, № 6. – С. 59-102.

2. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Аппроксимации со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63, № 3. – С. 77-118.

3. Рамазанов А.-Р.К. *О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса* // Analysis Mathematica. – 1995. – Т. 21, № 4. – С. 191-212.

4. Рамазанов А.-Р.К. *Характеризация полинома наилучшего приближения непрерывной функции со знакочувствительным весом* // Матем. сб. (сдано в печать).

5. Рамазанов А.-Р.К. *Полиномы, ортогональные со знакочувствительным весом* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59(5). – С. 737-752.

6. Бородин П.А. *Теорема Банаха-Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения к выпуклому анализу* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69(3). – С. 329-337.

Дубровский В.В. (Магнитогорск)
vvdubrov@mail.ru

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ[33]

Пусть $\Pi_3 = \{(x_1, x_2, x_3)| \quad 0 \le x_1 \le a_1, \quad 0 \le x_2 \le a_2, \quad 0 \le x_3 \le a_3\}$ – прямоугольный параллелепипед, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Рассмотрим в $L_2(\Pi_3)$ оператор T, определяемый краевой задачей Дирихле для уравнения Лапласа.

Введем оператор $T_\beta = \int\limits_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ – разложение единицы оператора T, степень $\beta > \frac{3}{2}$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Предположим, что числа a_1^2, a_2^2, a_3^2 – попарно несоизмеримы, тогда спектр оператора T_β будет однократным.

Пусть P – оператор умножения на вещественную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p(x_1, x_2, x_3)$ с областью определения Π_3. Допустим, что функция $p(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет еще двум условиям:

$$p(x_1,x_2,x_3) = p(a_1-x_1,x_2,x_3) = p(x_1,a_2-x_2,x_3) = p(x_1,x_2,a_3-x_3) \quad (1)$$

для почти всех $(x, y, z) \in \Pi_3$, и

$$\iiint\limits_{\Pi_3} p(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \iiint\limits_{\Pi_3} p(x_1,x_2,x_3)\cos\left(\frac{2\pi m_i x_i}{a_i}\right)dx_1dx_2dx_3 = \quad (2)$$

[33]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования России для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов вузов (шифр А03-2.8-59).

$$= \iiint\limits_{\Pi_3} p(x_1,x_2,x_3)\cos\left(\frac{2\pi m_i x_i}{a_i}\right)\cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right)dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

где $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$; $m_i, m_j \in \mathbb{N}$.

Обозначим через μ_t и λ_t собственные числа операторов $T_\beta + P$ и T_β, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, $t = \overline{1,\infty}$.

Пусть $f_t(\lambda)$ – такие целые функции, что $f_t(\lambda_j) = \delta_{j,t}$ и $\sup(|f_t(\lambda)||\lambda|^2) < \infty$ при $Re\lambda > 0$, $j,t = \overline{1,\infty}$; $\varphi_t(\lambda) = \int\limits_0^\lambda f_t(z)dz$.

Введем полную ортонормированную систему функций в $L_2(\Pi_3)$

$$\psi_t(x_1,x_2,x_3) = \frac{8}{\sqrt{a_1a_2a_3}}\prod_{i=1}^{3}\cos\left(\frac{2\pi m_i x_i}{a_i}\right), \text{ где } \lambda_t = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\pi^2 m_i^2}{a_i^2}\right)^\beta.$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема. *Если $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$ – последовательность чисел, удовлетворяющих неравеству $\sqrt{a_1a_2a_3}\|\sum\limits_{t=1}^{\infty}\xi_t\psi_t\|_\infty \leq (1 - \sqrt{a_1a_2a_3}\omega\varepsilon)\varepsilon$, где число $\omega = \omega(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\sqrt{a_1a_2a_3}\omega\varepsilon < 1$, то в шаре $U(\varepsilon) = \{p(x_1,x_2,x_3) \mid \|p\|_\infty \leq \varepsilon\}$ существует один и только один потенциал, удовлетворяющий условиям* (1), (2).

Дудов С.И., Дудова А.С. (Саратов)
DudovSI@info.sgu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ШАРОВОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ГРАНИЦУ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА[34]

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$ – выпуклый компакт, отличный от евклидова шара, $\|\cdot\|$ – евклидова норма,

$$R(x) = \max_{y\in\mathcal{D}}\|x-y\|, \quad \rho(x) = \min_{y\in\Omega}\|x-y\|, \quad \Omega = \overline{\mathbb{R}^p\backslash\mathcal{D}}. \tag{1}$$

Геометрический смысл задачи

$$\Phi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \to \min_{x\in\mathcal{D}} \tag{2}$$

[34]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

состоит в построении шарового слоя наименьшей толщины с центром из компакта $\mathcal{D}$, содержащего границу. Известно ([1]), что решение задачи (2) единственно.

Пусть $\mathcal{D}_\varepsilon$ – выпуклый телесный компакт такой, что $h(\mathcal{D},\mathcal{D}_\varepsilon) \le \varepsilon$, где $h(\cdot,\cdot)$ – расстояние Хаусдорфа. Обозначим далее через $R_\varepsilon(\cdot)$, ρ_ε и $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ функции соответствующие объектам (1)-(2), где компакт $\mathcal{D}$ заменен на $\mathcal{D}_\varepsilon$,

$$x_0 = \arg\min_{x\in\mathcal{D}} \Phi(x), \quad x_\varepsilon = \arg\min_{x\in\mathcal{D}_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x).$$

Доказана следующая

Теорема. *Для* $\varepsilon > 0$ *имеет место*

$$|\Phi(x_0) - \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon)| \le 2\varepsilon,$$

$$\|x_\varepsilon - x_0\| \le 4R(x_0)\sqrt{\frac{2\varepsilon(1+O(\varepsilon))}{R(x_0)-\rho(x_0)}},$$

где $O(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barany. I. *On the minimal ring containing the boundary of convex body* // Acta Sci. math. Acta Univ. Szeged. – 1988. – V. 52, No. 1/2. – P. 93-100.

Дудова А.С. (Саратов)
DudovSI@info.sgu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ[35]

Пусть $\mathcal{D}$ – компакт из $\mathbb{R}^p$, а функция $n(x)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^p$ аксиомам нормы. Тогда задачу о построении шара наименьшего радиуса в норме $n(\cdot)$, содержащего в себе множество $\mathcal{D}$, можно записать в виде

$$R(x) = \max_{y\in\mathcal{D}} n(x-y) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Показано, что в случае, когда $n(\cdot)$ является строго квазивыпуклой нормой, задача (1) имеет единственное решение $x^* \in \mathbb{R}^p : R(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} R(x)$.

Пусть $\mathcal{D}_\varepsilon$ – компакт из $\mathbb{R}^p$ такой, что

$$h(\mathcal{D},\mathcal{D}_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где $h(\cdot,\cdot)$ – расстояние Хаусдорфа.

[35]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Обозначим через $R_\varepsilon(x) = \max\limits_{y \in \mathcal{D}_\varepsilon} n(x-y)$, а $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^p$: $R_\varepsilon(x_\varepsilon) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} R_\varepsilon(x)$.

Определение 1 [1]. *Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется r-сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r.*

Определение 2. *Будем говорить, что норма $n(\cdot)$ является r-сильно квазивыпуклой, если ее единичный шар является r-сильно выпуклым множеством.*

Доказана следующая

Теорема.

1) $\left|\min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} R(x) - \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} R_\varepsilon(x)\right| \le \varepsilon,$

2) если $n(\cdot)$ – r-сильно квазивыпуклая норма, причем $\|x\| \le cn(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$, то

$$\|x^* - x_\varepsilon\| \le 4\sqrt{c\varepsilon(rR(x_\varepsilon) - c\varepsilon)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Половинкин Е.С. *Сильно выпуклый анализ* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187, №. 2. – С. 102-130.

Дьяченко Д.М. (Москва)
dmd84@mail.ru

ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ КЛАССА $Lip\,\alpha$

Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая, интегрируемая по Лебегу функция на $[0, 2\pi]$, а

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ее ряд Фурье. Обозначим через $\|f\|_A$ – сумму модулей коэффициентов Фурье этой функции, т.е.

$$\|f\|_A = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|.$$

Так как a_n и b_n (при $n = 1, 2, 3\ldots$) одинаковы у функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$), то будем рассматривать те $\tilde{f}$, у которых $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)dx = 0$. При $\alpha \in (0,1]$ за $Lip_M\alpha$ обозначим класс функций, удовлетворяющих следующему условию : $M > 0$ и $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha.$$

В 1914 году С.Н. Бернштейн вывел (см.[1], с. 608) для $Lip_M\alpha$ следующее свойство

Теорема А. *Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно.*

Тогда при $\alpha > \frac{1}{2}$ сумма модулей коэффициентов Фурье функции из $Lip_M\alpha$ конечна и возникает вопрос о поведении величины $\sup\limits_{f\in Lip_M\alpha} \|f\|_A$. Справедливо утверждение, говорящее об асимптотике данной величины.

Теорема. *Пусть даны числа $M > 0$ и $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Тогда справедливы неравенства*

$$A_1\frac{M}{2\alpha-1} \le \sup_{f\in Lip_M\alpha} \|f\|_A \le A_2\frac{M}{2\alpha-1},$$

где $A_1 = \frac{(1-\alpha)}{10(2\alpha+1)(2-\alpha)2^\alpha}$ *и* $A_2 = \frac{8\sqrt{2}(2\alpha+1)}{\sqrt{3}}$.

Видно, что по порядку полученная двусторонняя оценка является окончательной. Вопрос о точности констант остается открытым.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору П.Л. Ульянову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* – М.: Физматгиз, 1961.

Дьяченко М.И. (Москва)
dyach@mail.ru

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНЫХ СУММАХ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ[36]

Пусть $m \ge 2$, $\mathbf{Z}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbf{R}^m$, $T = [-\pi, \pi]$ и $f(\mathbf{x}) \in C(T^m)$. Пусть, также

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m} a_\mathbf{n}(f)e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}} \tag{1}$$

– это m-кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$.

Если число $r \ge 1$ и

$$\Gamma_r = \{\mathbf{n} = (n_1, ..., n_m) \in \mathbf{Z}^m : |n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m| \le r^m$$

$$\text{и} \max_{1\le j\le m} |n_j| \le r^m\},$$

[36]Исследования проведены при финансовой поддержке проекта РФФИ № 03-01-00080 и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-1657.2003.1.

то определим

$$Y_r(f;\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\Gamma_r} a_{\mathbf{n}}(f)e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

– гиперболическую частичную сумму ряда (1) (или частичную сумму ряда (1) по гиперболическому кресту Γ_r).

Нам также понадобится определение классов Никольского. Пусть для $f(\mathbf{x}) \in C(T^m)$ норма

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x}\in T^m} |f(\mathbf{x})|.$$

Затем, если k – натуральное число, то определим модуль гладкости порядка k как

$$\omega_k(f;\delta)_\infty = \sup_{\mathbf{t}\in R^m:|\mathbf{t}|\le\delta} \left\|\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r f(\mathbf{x}+r\mathbf{t})\right\|_\infty .$$

Если $k = 1$, мы будем называть его модулем непрерывности. Теперь мы можем определить классы Никольского $H_\infty^\alpha(T^m)$ и $h_\infty^\alpha(T^m)$.

Определение 1. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда положим $H_\infty^\alpha(T^m) = \{f(\mathbf{x}) \in C(T^m)$: при всех $k > \alpha$ имеем $\omega_k(f;\delta)_\infty = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to {}_+0\}$. Если в этом определении O заменить на o, будем обозначать соответствующий класс через $h_\infty^\alpha(T^m)$.*

Из результатов А.А. Юдина, В.А. Юдина, Е.С. Белинского и И.Р. Лифлянда вытекает, что если функция $f(\mathbf{x}) \in C(T^m)$ принадлежит классу Никольского $h_\infty^{\frac{m-1}{2}}(T^m)$, то ее кратный ряд Фурье равномерно сходится по гиперболическим крестам. В докладе устанавливается окончательность этого результата. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Пусть $m \ge 2$. Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in H_\infty^{\frac{m-1}{2}}(T^m)$ такая, что гиперболические частичные суммы $Y_r(f;\mathbf{x})$ расходятся в некоторой точке.*

Елизаров А.М., Лапин А.В. (Казань)
elizarov@ksu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[37]

Один из способов регуляризации решений внешних обратных краевых задач (ОКЗ) для аналитических функций заключается в построении их квазирешений [1] для выполнения условий разрешимости, к которым относят, прежде всего, условия замкнутости искомого контура.

[37]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00015)

В качестве дополнительных используют условия, учет которых необходим, когда ОКЗ моделирует какой-либо физический процесс. В таких ситуациях эти дополнительные ограничения становятся по-существу условиями разрешимости, а их учет при задании множеств корректности становится обязательным. В выражении через управляющую 2π-периодическую функцию $p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$, определяемую по начальным данным ОКЗ, условия разрешимости принимают вид

$$\int\limits_0^{2\pi} p(\gamma)d\gamma = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} p(\gamma)\cos\gamma d\gamma = A_1, \quad \int\limits_0^{2\pi} p(\gamma)\sin\gamma d\gamma = B_1, \qquad (1)$$

A_1 и B_1 – известные постоянные. Одним из дополнительных ограничений в ОКЗ аэрогидродинамики [2] служит условие

$$p(\gamma) \leq \ln\left[v_{\max}\left|2(\sin\gamma + \sin\beta)\right|^{-1}\right] + (\varepsilon - 1)\ln\left|2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\right|, \qquad (2)$$

$v_{\max}$ – заданная величина, ограничивающая максимум скорости, β – теоретический угол атаки (параметр оптимизации), $\varepsilon \in [1, 2]$. Квазирешение определяется как минимум функционала $J(p) = \frac{1}{2} \parallel p - p_d \parallel^2_{L_2}$ на выбранном множестве корректности функций $p(\gamma)$, удовлетворяющих как минимум ограничениям (1) и (2) ($p_d(\gamma)$ также определяется по начальным данным ОКЗ).

С другой стороны, ОКЗ в исходной постановке не предполагают обеспечения каких-либо экстремальных свойств искомого решения. Известна схема перехода от ОКЗ к вариационным обратным задачам, когда одно из краевых условий заменяется оптимизационным. В результате получается такой класс краевых задач с неизвестными границами, которые относятся к задачам оптимального проектирования (например, [3]) и в которых отыскиваются как аналитическая функция, так и сама область G ее определения, причем последняя обладает экстремальным свойством, а на ∂G задается одно краевое условие. Экстремальное свойство G выражается в виде требования минимизации заданного функционала при ограничениях. Наличие или отсутствие последних существенно влияет на картину разрешимости задач.

Таким образом, вариационная техника позволяет описать множества корректности и построить решения ОКЗ, прежде всего, вариационных. В этом заключается основное содержание настоящей работы. В ней даны постановки вариационных ОКЗ и соответствующих им оптимизационных задач; доказаны теоремы существования и единственности решений последних; построены функции Лагранжа для вариационных задач и (или) их конечномерных аппроксимаций; доказаны теоремы о существовании седловых точек; в ряде случаев указан явный вид двойственных задач. Рассмотрены и исследованы некоторые итерационные методы решения, основанные как на прямых, так и на двойственных постановках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А. М. *О квазирешениях внешней обратной краевой задачи* // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 42-50.

2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей.* – М.: Физматлит, 1994. – 436 с.

3. Haslinger J., Neittaanmaki P. *Finite element approximation for optimal shape design: theory and application.* – New York: John Wiley and sons Ltd., 1988. – 335 p.

Episkoposian S.A. (Armenia, Yerevan)
sergoep@ysu.am

ON THE EXISTENCE OF UNIVERSAL SERIES BY TRIGONOMETRIC SYSTEM

Let $\mu(x)$ be a measurable on $[0,2\pi]$ function with $0<\mu(x)\le 1$, $x\in[0,2\pi]$ and let $L^1_\mu[0,2\pi]$ be a space of measurable functions $f(x)$, $x\in[0,2\pi]$ with

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|\mu(x)dx<\infty.$$

In this tolk we prove the following

Theorem 1. *There exists a series by trigonometric system of the form*

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_ke^{ikx},\quad C_{-k}=\overline{C}_k, \tag{1}$$

with

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}C_ke^{ikx}\right|\le\lambda_m,\quad x\in[0,2\pi],\quad \lambda_m\nearrow^{\infty},\quad m=1,2,...,$$

so that for each $\varepsilon>0$ a weighted function $\mu(x), 0<\mu(x)\le 1, |\{x\in[0,2\pi]:\mu(x)\neq 1\}|<\varepsilon$ can be constructed, so that the series (1) is universal in the weighted space $L^1_\mu[0,2\pi]$ with respect simultaneously to rearrangement as well as to subseries.

Theorem 2. *Let $\omega(t)$ be a continuous function, increasing in $[0,\infty)$ and $\omega(+0)=0$. Then there exists a series of the form*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{ikx}\ \text{ with }\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^2\omega(|C_k|)<\infty,\quad C_{-k}=\overline{C}_k, \tag{2}$$

with the following property: for each $\varepsilon>0$ a weighted function $\mu(x)$, $0<\mu(x)\le 1$, $|\{x\in[0,2\pi]:\mu(x)\neq 1\}|<\varepsilon$ can be constructed, so that *the series (2) is universal in the weighted space $L^1_\mu[0,2\pi]$ with respect to rearrangement.*

Remark. The Theorems 1 and 2 true for Walsh system.

Жантакбаева А.М. (Казахстан, Караганда)
ayagoz@kargu.krg.kz

О СХОДИМОСТИ УСРЕДНЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Множество всех измеримых функции определенных на $[0,\pi]$ называется пространством Лоренца $L_{pq}[0,\pi]$, если конечны величины:
при $0 < q < \infty$

$$\|f\|_{L_{pq}[0,\pi]} = \left(\int\limits_0^\pi \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

при $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p\infty}[0,1]} = \sup_{0 \le t \le \pi} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Здесь $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Пусть $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$. Нас интересует вопрос о сходимости различных усреднений последовательности коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца по тригонометрической системе. В работе [1] получен следующий результат:
Если $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ и $f \in L_{pq}[0,\pi]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} \bar{a_k} \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \qquad \bar{a_k} = \frac{1}{k} \left| \sum_{m=1}^{k} a_m \right|.$$

А в [2] доказано, что если $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 \le q \le \infty$ и $f \in L_{pq}[0,\pi]$, тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m} \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Теорема. $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $\alpha > \frac{1}{p'}$, $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$, $1 \le q \le \infty$, $f \in L_{pq}[0,\pi]$. *Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям*

1) $\sup\limits_{r\le k}\frac{1}{r^{\alpha}}\left|\sum\limits_{m=1}^{r}\lambda_m\right|\le D\frac{1}{k^{\alpha}}\left|\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_m\right|,$

2) $|\lambda_k-\lambda_{k+1}|\le D\frac{1}{k^2}\left|\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_m\right|$, *$D$ – некоторая константа не зависящая от индекса k.*

Тогда имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\frac{1}{p'}}\bar{a_k}(\lambda)\right)^q\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}}\le cD\|f\|_{L_{pq}[0,1]},$$

где $\bar{a_k}(\lambda)=\frac{1}{\left|\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_m\right|}\left|\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_m a_m\right|,\ k\in N.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нурсултанов. Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье.* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. – 64, 1. – С. 93-122.

2. Нурсултанов Е.Д., Жантакбаева. А.М. *О сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье.* // Материалы Республиканской научной конференции. 2-5 октября. – Астана, 2001. – С. 33-34.

3. Вуколова. Т.М. *Некоторые свойства тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами.* // Вест. Москов. унив. Матем. Мех. – 1984. – № 6. – С. 18-23.

Жеребьёв Ю.А. (Москва)
yura@zhereby.mccme.ru

ACG_δ-ФУНКЦИИ И КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДАНЖУА-ПЕРРОНА[38]

Множество пар $\pi=\{(x_j,I_j)\}_{j=1}^{p}$ таких, что $x_j\in I_j\subset B(x_j,\delta(x_j))$, где точки $x_j\in X$ и все интервалы I_j попарно не перекрываются, называется *разбиением на множестве X, согласованным с функцией $\delta: X\to(0,+\infty)$*. Функция интервала F является *$AC_\delta(X)$-функцией*, если для любого $\varepsilon>0$ существуют функция $\delta: X\to(0,+\infty)$ и число $\eta>0$ такие, что для любого разбиения $\{(\xi_i,I_i)\}_{i=1}^{p}$ на множестве X, согласованного с $\delta(\cdot)$, для которого $\sum\limits_{i=1}^{p}|I_i|<\eta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{p}|F(I_i)|<\varepsilon$. Функция интервала F называется *$ACG_\delta(X)$-функцией*, если существуют множества X_n такие, что $X=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}X_n$ и F является $AC_\delta(X_n)$-функцией.

[38]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты НШ–1657.2003.1 и 02-01-00428).

Известно, что класс $ACG_\delta(X)$-функций на прямой совпадает с классом $ACG^*(X)$-функций, а значит, даёт одно из эквивалентных определений интеграла Данжуа-Перрона на прямой (см. [1]).

Распространение понятия ACG^*-функции на многомерный случай затруднительно. В связи с этим роль этого класса функций исполняет класс ACG_δ-функций.

Теорема.

1) Функция F является $ACG_\delta(X)$-функцией тогда и только тогда, когда вариационная мера, порождённая функцией F, абсолютно непрерывна на множестве X относительно меры Лебега (определение вариационной меры см. [2]);

2) Если F является $ACG_\delta(X)$-функцией, то обычная производная $F'_{ord}(x)$ конечна почти всюду;

3) Если F является ACG_δ-функцией на множестве X класса F_σ, то множества X_n, на которых F является AC_δ-функцией, можно выбрать замкнутыми.

Сказанное выше позволяет распространить на многомерный случай понятие интеграла Данжуа-Перрона следующим образом:

Определение. *Аддитивная функция интервала F является неопределённым DP^*-интегралом функции $f(x)$ на m-мерном интервале I_0, если F является $ACG_\delta(I_0)$-функцией и обычная производная $F'_{ord}(x) = f(x)$ почти всюду на I_0.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Gordon R. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* // Graduate Studies in Mathematics. - AMS: Providence, 1994. - V. 4.

2. Di Piazza L. *Variational measures in the theory of the integration in* $\mathbb{R}^m$. // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2001 – 51(126). - P. 95-110.

Жир С.И., Вакарчук С.Б. (Украина, Днепропетровск)
academy@amsu.dnp.ukrpack.net

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАИЛУЧШЕГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Данное сообщение продолжает исследования авторов [1]-[3] в многомерном случае. Приведем один из полученных результатов, используя шкалу роста целых функций, предложенную М.Н. Шереметой в [4]. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_m)$, где $z_j = r_j \exp(it_j)$, $j = \overline{1,m}$ - точки m-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m; U^m = \{z \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1, \ j = \overline{1,m}\}$ – единичный поликруг. Через $H_p(U^m)$ $(p \geq 1)$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из аналитических в U^m функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{0<r_j<1,\\ j=\overline{1,m}}} \left\{(2\pi)^{-m} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} |f(r_1e^{it_1}, \ldots, r_me^{it_m})|^p \, dt_1 \ldots dt_m\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Для произвольного мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ полагаем $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^m \mathbf{k}_j$, $z^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{k_m}$, $c_{\mathbf{k}} = c_{k_1,\ldots,k_m}$. Величину наилучшего полиномиального приближения произвольной функции $f(z) \in H_p(U^m)$ обозначим через

$$E_n(f, H_p(U^m)) = \inf\left\{\|f(z) - \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}\|_p : \, c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}\right\}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия теоремы 1 из* [4], *налагающие ряд ограничений на функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$; γ *– конечное положительное число и* $f(z) \in H_p(U^m)$. *Тогда соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(-\frac{1}{n}\ln E_n\big(f, H_p(U^m)\big)\Big)} = \gamma$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(z)$ *была целой трансцендентной функцией обобщенного порядка* $\rho(f; \alpha, \beta) = \gamma$.

При $m = 1$ из данной теоремы следует, например, один из результатов работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакарчук С.Б., Жир С.И. *О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций* // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9(4). – С. 595-603.

2. Вакарчук С.Б., Жир С.И. *Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций* // Украинский мат. журнал. – 2002. – Т. 54(9). – С. 1155-1162.

3. Жир С.И., Вакарчук С.Б. *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в пространствах В.И. Смирнова* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней мат. школы. – Воронеж, 2003. – С. 98-99.

4. Шеремета М.Н. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Изв. ВУЗов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100-108.

Завьялов М.Н. (Красноярск)
chm@gasa.krs.ru

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОНИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОЛДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[39]

Пусть дана неоднородная система обыкновенных линейных диффе-

[39]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1 и гранта РФФИ (проект 03-01-00460).

ренциальных уравнений (ОЛДУ) с постоянными комплексными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t) + \Lambda F(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $Y(t)$ – вектор-функция из n компонент, $F(t)$ – вектор-функция, составленная из n квазиполиномов $f_i(t)$, A – матрица $n \times n$ из постоянных комплексных чисел, такая, что её собственные числа лежат в полосе $\Pi(d) = \{z \in \mathbb{C} : |Im\ z| < \pi/d\}$, Λ – диагональная матрица $n \times n$, с коэффициентами из постоянных комплексных чисел. При этом элементы матриц A и Λ – неизвестные числа.

Напомним, что квазиполиномом называется конечная сумма экспонент с полиномиальными коэффициентами. Это означает, что $f_i(t)$ имеют следующий вид:

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}(t)e^{\beta_{ij}t}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $P_{ij}(t)$ – полиномы с комплексными коэффициентами.

Рассматриваются прямая и обратная задачи решения системы (1) при краевых условиях вида:

$$C_k := Y(t_k), \quad t_k = kd, \quad d > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

где N – достаточно большое число, d – заданный временной шаг.

Существует алгоритм (идущий от Прони), с помощью которого решаются подобные задачи (см. [1], [2, гл.11], [3, гл.2], [4]). В докладе обсуждаются условия, при которых этот алгоритм корректно поставлен (т.е. существование, единственность, и устойчивость к малым колебаниям входных данных). Однородный случай (матрица Λ - нулевая) рассмотрен в [5]. Полученные результаты исследований опираются на методы решения подобной задачи для ОЛДУ конечного порядка с постоянными коэффициентами [3, гл.2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Prony G.R.B. *Essai experimental et analytique, etc.* // J. de L'Ecole Polytechnique. – 1795. – V. 1, No 2. – P. 24-76.

2. Марпл-мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения* – М.: Мир, 1990.

3. Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991; English transl., Asymptotic characteristics of entire functions and their applications in mathematics and biophisics, Second edition (revised and enlarged), Dordrecht/Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

4. Голубков В.В., Щербов С.Я. *Экспоненциальная аппроксимация* – М., 1980.

5. Завьялов М.Н. *Модификация алгоритма Прони для системы ОЛДУ с постоянными неизвестными коэффициентами* // Сб. «Многомерный комплексный анализ», – КГУ, Красноярск, 2002. – С. 37-47.

Задорожний В.Г. (Воронеж)
zador@zador.vsu.ru

ФУНКЦИОНАЛЫ ЭРМИТА

Рассматривается уравнение (предложено профессором Даринским Б.М.)

$$\int_T\int_T \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\delta}{\delta\xi(x_1)}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\delta}{\delta\xi(x_2)}\psi(\xi)- \\ -(\int_T \alpha'(x)dx)^2(\int_T \alpha(s)ds)^2\psi(\xi) = E\psi(\xi), \tag{1}$$

где $\psi : L_2(T) \to C$ – искомый функционал, $\alpha \neq const$ – заданная функция, $\alpha'(x)$ – производная функкия, $E \in C, \delta/\delta\xi(x)$ – вариационная производная [1].

Рассмотрим многочлены Эрмита [2]

$$h_n(y) = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2},\ n = 0,1,2,\dots$$

и функционалы

$$H_n(\xi) = h_n(\int_T \alpha(s)\xi(s)ds),\ n = 0,1,2,\dots.$$

Теорема 1. *Функционалы*

$$F_n(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}(\int_T \alpha(s)\xi(s)ds)^2)H_n(\xi),\ n = 0,1,2,\dots$$

являются собственными функционалами уравнения (1), *соответствующими собственным значениям*

$$E_n = (\int_T \alpha'(x)dx)^2(2n-1),\ n = 0,1,2,\dots.$$

Функционалы $F_n(\xi)$ называются функционалами Эрмита.

Теорема 2. *Функционалы* $H_n(\xi)$ *связаны рекуррентными соотношениями*

$$\frac{\delta H_n(\xi)}{\delta\xi(x)} = 2nH_{n-1}\alpha(x),\ n = 1,2,\dots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* – М.: Мир, 1989. –637 с.

2. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* – М.: Наука, 1984. – 831 с.

Захарова А.А. (Москва)
root@zaharova.mccme.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РИССА И ИХ СВОЙСТВА[40]

Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Введем определение интегрального базиса Рисса, обобщающее определение дискретного базиса Рисса (о базисах Рисса см. [1]).

Определение 1. *Пусть A – линейный ограниченный оператор с ограниченным обратным, отображающий ортоподобную систему $\{e^w\}_{w\in\Omega}$ (см. [2]) в некоторую систему $\{\psi^w\}_{w\in\Omega}$. Тогда назовём $\{\psi^w\}_{w\in\Omega}$ интегральным базисом Рисса.*

Определим интегральный фрейм как обобщение дискретного фрейма.

Определение 2. *Назовём систему функций $\Phi = \{\varphi^w\}_{w\in\Omega} \subset H$ интегральным фреймом, если существуют a, b: $0 < a \leqslant b < \infty$ и*

$$a\,\|g\|_H^2 \leqslant \int\limits_\Omega |(g,\varphi_w)|^2 d\mu(w) \leqslant b\,\|g\|_H^2$$

для любого $g \in H$.

Сформулируем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система была интегральным фреймом (аналогичные условия для дискретного фрейма см. в [3]).

Теорема. *Для того чтобы система $\Phi = \{\varphi^w\}_{w\in\Omega} \subset H$ была интегральным фреймом в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство H', такое что $H \subset H'$, и в нём интегральный базис Рисса $\Psi = \{\psi^w\}_{w\in\Omega}$, такой что*

$$a'\left(\int\limits_\Omega |\gamma_w|^2 d\mu(w)\right)^{1/2} \leqslant \left\|\int\limits_\Omega \gamma_w\psi^w d\mu(w)\right\|_{H'} \leqslant b'\left(\int\limits_\Omega |\gamma_w|^2 d\mu(w)\right)^{1/2}$$

для любого набора $\{\gamma_w\}_{w\in\Omega}$, такого что функция $\gamma_w\psi^w$ интегрируема на Ω и

$$\varphi^w = \pi_{H'\to H}(\psi^w), \quad w \in \Omega,$$

где $\pi_{H'\to H}$ – ортогональная проекция пространства H' на H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. *Биортогональные системы* // Ученые записки МГУ. – 1951. – Т. 4. – Вып. 148. – С. 68-107.

2. Лукашенко Т.П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным.* // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188, № 12. – С. 57-72.

3. Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. *Замечание об описании фреймов общего вида* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72, № 6. – С. 941-945.

[40]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00420).

Зейфман А.И., Сатин Я.А., Шилова Г.Н. (Вологда), Орсингер Э. (Рим)
shgn@mail.ru

О ПОСТРОЕНИИ ДВОЙНОГО СРЕДНЕГО ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Вопросы, связанные с построением различных характеристик неоднородных процессов рождения и гибели (ПРГ), активно изучаются в современной теории массового обслуживания, см., например, [1].

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых важных параметров для ПРГ с 1-периодическими интенсивностями, при этом применяются методы, разработанные одним из авторов настоящего доклада, см. [2]. Пусть интенсивности ПРГ удовлетворяют условиям: $\lambda_n(t) = \lambda_n a(t)$, $\mu_n(t) = \mu_n b(t)$, $t \geq 0$, $n \geq 0$, где $\mu_0 = 0$, $0 \leq \lambda_n \leq L$, $n = 0, \dots$, $0 < \mu_n \leq M$, $n = 1, \dots$, а функции $a(t)$, $b(t)$ предполагаются неотрицательными, 1-периодическими, интегрируемыми на $[0,1]$. Кроме того, для удобства предполагаем, что $a(t) \leq \mathrm{a}, b(t) \leq \mathrm{b}$.

Обозначим через $E(t,k)$ среднее для ПРГ $X(t)$ при условии, что $X(0) = k$, а через $E_N(t,k)$ среднее при тех же начальных условиях для «усеченного» ПРГ $X_N(t)$.

Пусть $1 = d_{-1} = d_0 \leq d_1 \leq \dots$ – некоторая последовательность положительных чисел. Положим $\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t)$, $k \geq 0$.

Введем величины $\alpha(t) = \inf\limits_k \alpha_k(t)$, $\alpha^* = \int\limits_0^1 \alpha(t)\,dt$, $M_0 = \sup\limits_{|t-s|\leq 1} \int\limits_s^t \alpha(u)\,du$, $\mathrm{M} = e^{M_0+\alpha^*}$, $\mathrm{W} = \inf\limits_k \frac{\sum_{i=0}^{k-1} d_i}{k}$, $\mathrm{W}_N = \inf\limits_{k\geq 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} d_{N-1+i}}{N+k}$.

Будем говорить, что ПРГ имеет двойное среднее $\mathbf{E}$, если существует предел $\mathbf{E} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t E(u,k)\,du$, не зависящий от k.

Теорема. *Пусть найдется последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^* > 0$ и, кроме того, $\inf\limits_{k\geq 1} d_{k-1}/k > 0$. Тогда ПРГ имеет двойное среднее $\mathbf{E}$ и справедлива следующая оценка*

$$\left|\mathbf{E} - \int\limits_t^{t+1} E_N(u,0)\,du\right| \leq \frac{\mathrm{M}^2 \mathrm{a}\lambda_0}{\mathrm{W}\alpha^*} e^{-\alpha^* t} + \frac{4(t+1)\mathrm{M}\mathrm{a}\lambda_0 (L\mathrm{a} + M\mathrm{b})}{\mathrm{W}_N \alpha^*}.$$

Пример. Рассмотрим число требований в системе обслуживания $M(t)/M(t)/2$. Пусть $a(t) = 1 + \sin 2\pi t$, $b(t) = 4 + 2\cos 2\pi t$. Имеем $\lambda_n = \mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_n = 2$ при $n \geq 2$. Следовательно, $L = 1$, $M = 2$ and a = 2, b = 6. Положим $d_k = 2^k$, $k \geq 1$. Тогда $\alpha(t) = 3 - \sin 2\pi t + 2\cos 2\pi t$, $\alpha^* = \int\limits_0^1 \alpha(t)\,dt = 3$, $M_0 = \sup\limits_{|t-s|\leq 1} \int\limits_s^t \alpha(u)\,du = 3 + \frac{1}{2\pi}$ и M = $e^{M_0+\alpha^*} = e^{6+\frac{1}{2\pi}} < 500$. С другой стороны, W = $\inf\limits_k \frac{\sum_{i=0}^{k-1} d_i}{k} = 1$, а $W_N = \inf\limits_{k\geq 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} 2^{N-1+i}}{N+k} = \frac{2^{N-1}}{N}$. Тогда из теоремы вытекает оценка

$$\left| \mathbf{E} - \int\limits_t^{t+1} E_N(u,0)\,du \right| \leq 2\cdot 10^5 e^{-3t} + \frac{10^4 N(t+1)}{2^{N-2}}.$$

Полагая, например, $t = 11, N = 19$, находим отсюда $|\mathbf{E} - 0.266042916| < 10^{-8}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Di Crescenzo A., Nobile A.G. *Diffusion approximation to a queueing system with time dependent arrival and service rates*// QUESTA. – 1995. – V. 19. - P. 41-62.

2. Zeifman A.I. *Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes* // Stoch. Proc. Appl. – 1995. – V. 59. – P. 157-173.

Зюзин В.С., Рычкова Н.А. (Саратов)
ZyuzinVS@info.sgu.ru

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЛАЙНАМИ, БЛИЗКИМИ К НАИЛУЧШИМ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть правая часть уравнения такова, что решение задачи (1) существует при любом $y_0 \in R$ и обладает достаточной гладкостью для построения сплайн-функций.

Используя идею σ-метода, изложенную в [1], строим сплайн-приближение решения задачи (1). При нахождении решения используются многочлены Тейлора.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k S_k(x),$$

где q_k – постоянная, а S_k – частные суммы ряда Тейлора.

Предлагается алгоритм нахождения коэффициентов q_k таких, что многочлен $P_n(x)$ является приближением, близким к наилучшему для $y(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зюзин В.С. *Приближение обобщенных гипергеометрических функций алгебраическими многочленами, близкими к наилучшим*// Вычислительные методы и программирование. – Саратов: Изд-во СГУ, – 1970. – Вып. 3.

Иванишко И.А. (Беларусь, Минск)
krotov@bsu.by

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КАЛЬДЕРОНА-КОЛЯДЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНОГО ТИПА

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, d – квазиметрика, задающая на X топологию, $B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}$, $x \in X$, $t > 0$, μ – положительная борелевская мера на X, связанная с квазиметрикой d условием удвоения: существуют постоянные $c > 0$ и $\gamma > 0$, такие что

$$\mu B(x, st) \leq cs^\gamma \mu B(x,t), \;\; x \in X, \; 0 < t < s.$$

Обозначим через Ω класс всех возрастающих на $(0,\infty)$ функций η, таких, что $\eta(t)/t$ убывает и $\eta(+0) = 0$. Введем для $\eta \in \Omega$ и $q \geq 1$ максимальные функции

$$\mathcal{N}_{\eta,q} f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \left(\frac{1}{\mu B(y,t)} \int\limits_{B(y,t)} |f(z) - f(x)|^q d\mu(z) \right)^{\frac{1}{q}},$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B(y,t)$, содержащим точку $x \in X$. Они называются максимальными шарп-функциями (максимальными функциями, измеряющими локальную гладкость).

Впервые такие максимальные функции для случая $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$ (тогда $\gamma = n$), $\eta(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, рассматривал А. Кальдерон [1]. В этой же ситуации для любой $\eta \in \Omega$ их изучал В.И. Коляда [2] при $q = 1$.

Теорема. *Пусть $q \geq 1$, $1 \leq \theta < p < \infty$, $\eta, \sigma \in \Omega$ удовлетворяют условию*

$$\eta(t) \leq \sigma(t) t^{\gamma(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p})}, \qquad t \in (0,1].$$

Тогда существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|\mathcal{N}_{\sigma,q} f\|_{p,\theta} \leq c \|\mathcal{N}_{\eta,q} f\|_\theta \qquad (f \in L^q(X)),$$

Здесь $\|f\|_{p,\theta}$ – норма в пространстве Лоренца $L^{p,\theta}(X)$. Этот результат является обобщением теоремы В.И. Коляды [2], где рассматривался случай $X = [0,1]^n$, $q = 1$. Доказательство нашей теоремы построено по схеме этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calderon A.P. *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions* // Studia Math. - 1972 - V. 44. - P. 167-186.

2. Kolyada V.I. *Estimates of maximal functions measuring local smoothness* // Analysis Math. - 1999. - V. 25 - P. 277-300.

Игнатьев М.Ю. (Саратов)

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ[41]

Теорема 1. *Пусть*

1) функции $Q_1(x,t), Q_2(x,t), x \geq 0$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = v(t)Q_2 \\ \dot{Q}_2 = v(t)Q_1 + 8Q_2''' \end{cases}$$

и краевым условиям $Q_k^{(j)}(0,t) = 0, j = 0,1; k = 1,2, Q_2''(0,t) = v(t)/8$,

2) $r(x,t), x \geq 0$ *- решение сверточного уравнения*

$$r(x,t) = \int_0^x Q_1(x-s,t)r(s,t)ds + Q_2(x,t),$$

3) $K(x,\xi,t), \xi \in [-x,x]$ *- решение уравнения*

$$K(x,\xi,t) = \int_{-\xi}^x K(x,s,t)r(\xi+s,t)ds + r(\xi+x,t),$$

причем данное уравнение однозначно разрешимо для любых фиксированных $x > 0$ *и* t. *Тогда функция* $q(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t)$ *удовлетворяет уравнению КдФ* $\dot{q} = q''' - 6qq'$ *на полуоси* $x > 0$ *и краевым условиям* $q(0,t) = q''(0,t) = 0, q'(0,t) = v(t)$.

Ильясов Н.А. (Азербайджан, Баку)
nilyasov@yahoo.com

ВОКРУГ КРИТЕРИЯ М. РИССА АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Доклад посвящен исследованию задачи: найти точные порядки убывания величины $\rho_n(h)$, $n \in \mathbb{N}$, характеризующей скорость абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье, на классах функций

[41]Работа выполнена при поддержке грантов Минобразования РФ (Е02-1.0-186) и Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

$h = f * g$ (h - свертка функций f и g) с заданными структурными (поведение модуля гладкости) либо конструктивными (поведение последовательности наилучших приближений) условиями на $f \in L_p(T)$ и $g \in L_q(T)$, где $T = [-\pi, \pi]$, $1 \le p, q \le \infty$, $\rho_n(h) = \sum\limits_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu(h)|$, $c_\nu(h)$ - коэффициенты Фурье функции $h \in L_1(T)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В частности, получены следующие результаты:

1) Скоростная версия критерия М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций [1, с. 635; 2, с. 399; 3, с. 17], а именно: для того, чтобы ряд Фурье функции $h \in C(T)$ абсолютно сходился со скоростью $\rho_{n-1}(h) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, необходимо и достаточно существование функций $f \in L_2(T)$ и $g \in L_2(T)$ таких, что $h = f * g$ и $E_{n-1}(f)_2 \cdot E_{n-1}(g)_2 = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям: $0 < \lambda_n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$). Отметим, что последнее утверждение остается справедливым, если условие $E_{n-1}(f)_2 \cdot E_{n-1}(g)_2 = O(\lambda_n)$ заменить на $E_{n-1}(f)_2 = O(\lambda_n^{1/2})$ и $E_{n-1}(g)_2 = O(\lambda_n^{1/2})$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Оценки сверху величины $\rho_n(h)$ в терминах последовательностей наилучших приближений $\{E_{n-1}(f)_p\}$ и $\{E_{n-1}(g)_q\}$, а также модулей гладкости $\omega_k(f;\delta)_p$ и $\omega_l(g;\delta)_q$ функций $f \in L_p(T)$ и $g \in L_q(T)$, где $k, l \in \mathbb{N}$, при определенных областях изменения параметров p и q;

3) Различные оценки сверху равномерного модуля гладкости $\omega_m(h;\delta)$ функции $h \in C(T)$ в терминах последовательностей $\{\rho_{n-1}(h)\}$, $\{E_{n-1}(f)_p\}$, $\{E_{n-1}(g)_q\}$, $n \in \mathbb{N}$, а также модулей гладкости $\omega_k(f;\delta)_p$ и $\omega_l(g;\delta)_q$, при определенных соотношениях между параметрами $m, k, l \in \mathbb{N}$ и $1 \le p, q \le \infty$;

4) Точность в смысле порядка оценок из пунктов 2) и 3) на соответствующих классах функций $f \in L_p(T)$ и $g \in L_q(T)$, определяемых поведением мажорант (в некоторых случаях, при условии их определенной регулярности) рассматриваемых характеристик. Ниже приведен один из типичных результатов: пусть $[a]_+ = a$ при $a > 0$ и $[a]_+ = 0$ при $a \le 0$, $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha \in ([1/p - 1/2]_+, \infty)$, $\beta \in ([1/q - 1/2]_+, \infty)$, $E_{p,\alpha} = \{f \in L_p(T) : E_{n-1}(f)_p \le n^{-\alpha},\ n \in \mathbb{N}\}$, $E_{q,\beta} = \{g \in L_q(T) : E_{n-1}(g)_q \le n^{-\beta},\ n \in \mathbb{N}\}$; тогда $\sup\{\rho_n(h) : h = f * g,\ f \in E_{p,\alpha},\ g \in E_{q,\beta}\} \asymp n^{-[\alpha+\beta+1-(\max\{1/2,1/p\}+\max\{1/2,1/q\})]}$, $n \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* – М.:Физматгиз, 1961. – 936 с.

2. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т 1 – М.: Мир, 1965. – 616 с.

3. Кахан Ж.-П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье* – М.: Мир, 1976. – 208 с.

Калитвин А.С., Калитвин В.А. (Липецк)
kalitvin@lipetsk.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C(T \times S)$

Пусть T и S - компактные множества положительной лебеговой меры в конечномерных пространствах. Через L, M, N, K обозначим операторы

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \iint\limits_{T\times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \ K = L + M + N,$$

где $t, \tau \in T, s, \sigma \in S, l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ - измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Аналогично [1], ядра $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ назовем ядрами Вольтерра, если в T и S заданы семейства замкнутых множеств $\{T(t) : t \in T\}$ и $\{S(s) : s \in S\}$, причем $t \in T(t), s \in S(s)$, при $\bar{t} \in T(t)$ $T(\bar{t}) \subset T(t)$, при $\bar{s} \in S(s)$ $S(\bar{s}) \subset S(s)$ и выполнены следующие свойства: для каждого $\delta > 0$ существуют такие конечные множества $T(\delta) = \{t_1, \ldots, t_p\}, S(\delta) = \{s_1, \ldots, s_q\}$, что $mes(T(t_{i-1})\Delta T(t_i)) < \delta$ $(i = 1, \ldots, p, T(0) = \oslash), \cup_{i=1}^p T(t_i) = T$, $mes(S(s_{j-1})\Delta S(s_j)) < \delta$ $(j = 1, \ldots, q, S(0) = \oslash), \cup_{j=1}^q S(s_j) = S$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств; $l(t,s,\tau) = 0$ при $\tau \notin T(t), m(t,s,\sigma) = 0$ при $\sigma \notin S(s), n(t,s,\tau,\sigma) = 0$ при $\tau \notin T(t)$ или $\sigma \notin S(s)$. Оператор K с ядрами Вольтерра будем называть оператором Вольтерра с частными интегралами.

При $T = [a,b], S = [c,d]$ ядра $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ будут ядрами Вольтерра, если $l(t,s,\tau) = 0$ при $\tau > t, m(t,s,\sigma) = 0$ при $\sigma > s, n(t,s,\tau,\sigma) = 0$ при $\tau > t$ или $\sigma > s$. При $T = [a,b] \times [a,b], S = [c,d] \times [c,d]$ ядра $l(t,s,\tau) = l(t_1,t_2,s_1,s_2,\tau_1,\tau_2), m(t,s,\sigma) = m(t_1,t_2,s_1,s_2,\sigma_1,\sigma_2), n(t,s,\tau,\sigma) = n(t_1,t_2,s_1,s_2,\tau_1,\tau_2,\sigma_1,\sigma_2)$ будут ядрами Вольтерра, если $l(t,s,\tau) = 0$ при $\tau_i > t_i, m(t,s,\sigma) = 0$ при $\sigma_j > s_j, n(t,s,\tau,\sigma) = 0$ при $\tau_i > t_i$ или $\sigma_j > s_j$, где i и j принимают хотя бы одно из значений 1 или 2.

Теорема 1. *Если операторы L, M, N с ограниченными ядрами Вольтерра действуют в $C(D)$, то спектральный радиус оператора K равен нулю: $r(K) = 0$.*

Через $\chi_\Omega(\omega)$ обозначим характеристическую функцию множества Ω.

Теорема 2. *Если $\bar{l}(t,s,\tau)$, $\overline{m}(t,s,\sigma)$ и $\overline{n}(t,s,\tau,\sigma)$ - непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции* [2],

$l(t,s,\tau) = \bar{l}(t,s,\tau)\chi_{T(t)}(\tau)$, $m(t,s,\sigma) = \overline{m}(t,s,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = \overline{n}(t,s,\tau,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma)$, *то* $r(K) = 0$.

В заключение отметим, что к интегральным уравнениям, содержащим операторы Вольтерра с частными интегралами, приводятся различные задачи теории изгиба тонких пластинок и упругих оболочек, дифференциальных уравнений с частными производными и ряд других задач. Библиография работ по теории операторов и уравнений с частными интегралами приведена в [2,3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Забрейко П.П. *С-теория линейных интегральных уравнений второго рода* // Вестник БГУ, 1991. – № 3. – С. 38-42.

2. Калитвин А.С. *Линейные операторы с частными интегралами.* – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А.С. *Нелинейные операторы с частными интегралами.* – Липецк: ЛГПУ, 2002. - 208 с.

Кальней С.Г. (Москва)
hm2@miee.ru

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ЯКОБИ В СЛУЧАЕ ПОЛУЦЕЛЫХ α [42]

В сообщении ранее полученные автором результаты ([1], [2]) распространяются на случай суммирования разложений Фурье по ортонормированной системе многочленов Якоби $\{p_m^{(\alpha,\beta)}(t)\}$ когда $\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ Пусть Λ – треугольная матрица с элементами $\lambda_m^{(n)}$, a_m – коэффициенты Фурье-Якоби функции f, $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta f(t) \in L[-1,1]$, $\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f,t;\Lambda) = \sum\limits_{m=0}^{n} \lambda_m^{(n)} a_m p_m^{(\alpha,\beta)}(t)$ – линейные средние ряда Якоби функции f.

Пусть точка $t = 1$ является точкой Лебега функции f, то есть для некоторого числа A $\int\limits_{1-h}^{1} |f(t) - A|\,dt = o(h)$, $h \to +0$.

Теорема. *Пусть* $\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $\gamma = \alpha + \frac{3}{2}$, *а элементы матрицы* Λ *ограничены и удовлетворяют условиям:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} = 1$;

б) $\sum\limits_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1}(n+1-m)\ln\frac{n+2}{n+1-m} \cdot |\Delta^{\gamma+1}\lambda_m^{(n)}| \le c$;

в) $\sum\limits_{m=0}^{n} (m+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m^{(n)}| \le c(n+1)^{-\delta}$ *для некоторого* $0 < \delta < \frac{1}{2} + \beta$.

[42] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00787)

Если $\int\limits_{-1}^{0} |f(t)|(1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4}\,dt < \infty$, *то линейные средние* $\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f,1;\Lambda)$ *сходятся к* A.

В случае $-1<\beta\le -\frac{1}{2}$ утверждение сохраняет силу, если матрица Λ удовлетворяет лишь усовиям а) и б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kal'nei S.G. *On the summability of Jacobi serias at Lebesgue points*// Analysis Mathematica. – 2003. – V. 29. – P. 181-194.

2. Кальней С.Г. *О сходимости линейных рядов Якоби в точках Лебега*// Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты. Сб. статей. – М.: МИЭТ, 2003. – С. 124-139.

Карелин В.В. (Санкт-Петербург)
Vladimir.Karelin@VK10377.spb.edu

ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ[43]

Рассмотрим задачу дискретной идентификации некоторого динамического объекта.

$$J(x,\theta)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i,\theta_i)\to \inf; \tag{1}$$

$$x_{i+1}=\varphi_i(x_i,\theta_i),\ i=0,...,N-1, \tag{2}$$

где θ – неизвестный вектор параметров, $\theta_i\in\Theta$ – множество всех r-мерных конечных последовательностей. Систему (2) можно представить в виде $z=h(z,\theta,i)$, где $z_0=x_0,...,\ z_i=x_{i+1}, h_0=h_{i+1}=1,\ h_i=f_i\ \ ,i=1,...,N-1$. Введем множество $\Omega:=\{z\in P_n[0,N],\ \ x\in P_n[0,N],\ \ \varphi(z,\theta)=0\}$, где

$$\varphi(z,\theta):=\left[\sum_{i=0}^{N-1}\left(z_i-h_i\left(x_0+\sum_{j=1}^{i} z_j,\theta_i\right)\right)^2\right]^{1/2},$$

а $P_n[0,N]$ – множество всех n-мерных конечных последовательностей. Задача (1) эквивалентна следующей: найти

$$\min_{z\in P[0,N],\theta_i\in\Theta,\varphi(z,\theta)=0}\Phi(z,\theta),\quad \text{где}\quad \Phi(z,\theta)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_0+\sum_{j=1}^{i} z_j,\theta_i).$$

Функция Φ дифференцируема по Гато. Можно доказать следующую теорему.

[43]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00668).

Теорема *Если функция Φ липшицева, то найдется такое $\lambda_0 \geq 0$, что для любого $\lambda \geq \lambda_0$ множество точек минимума функции Φ на множестве Ω совпадает с множеством точек минимума функции*

$$F(z,\theta) = \Phi(z,\theta) + \lambda\varphi(z,\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i\left(x_0 + \sum_{j=1}^{i} z_j, \theta\right) +$$
$$+\lambda\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \left[z_i - h_i\left(x_0 + \sum_{j=1}^{i} z_j, \theta\right)\right]^2 \right\}^{1/2}$$

на всем пространстве.

Поскольку функция Φ дифференцируема, а функция φ дифференцируема по направлениям, то можно применить численные методы, разработанные для решения задач безусловной минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И. *Метод штрафов в выпуклом программировании* // Докл. АН СССР. - 1967. - Т. 173. - С. 748-751.

2. Demyanov V.F., Giannessi F., Karelin V.V. *Optimal Control Problems via Exact Penalty Function*// J. of Global Optimiz. - 1998. - Vol. 12, 3. - P. 215-223.

Карташева Л.В., Радченко Т.Н. (Ростов-на-Дону)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

Обозначим через C_τ^p пространство непрерывных функций, имеющих на отрезке $[a,b]$ тейлоровские (разностные) производные в нуле до порядка p включительно. Имея в виду, что непрерывная функция $\varphi(x)$ имеет тейлоровские (разностные) производные до порядка p, если существуют последовательные пределы $\varphi^{\{k\}}(0)$, определяемые по формулам

$$\varphi^{\{k\}}(0) = k! \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{\{j\}}(0)}{j} x^j}{x^k},$$

$k = 0,1,2,\ldots,p,\quad p \in \mathbb{N}$ и полагаем $\varphi^{\{0\}}(0) = \varphi(0)$.

Лемма 1. *Функция $\varphi(x) \in C_\tau^p$ тогда и только тогда, когда она имеет вид:*

$$\varphi(x) = x^p g(x) + \sum_{k=0}^{p-1} c_k x^k,$$

где $g(x) \in C$, c_k – константы.

Используя это, на C_τ^p введем норму следующим образом:

$$\|\varphi\|_{C^p_\tau} = \|g(x)\|_C + \sum_{k=0}^{p-1} |c_k|.$$

Нормированное таким образом пространство C^p_τ является банаховым.

Рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

с ядром $k(x,t) \in C^{p+n}_\tau \times C^{p+n}_\tau$.

Теорема 1. *Если $k(x,t) \in C^{p+n}_\tau \times C^{p+n}_\tau$, то оператор $(K\varphi)(x)$ непрерывен из C^n_τ в C^{n+p}_τ.*

Рассмотрим интегральное уравнение третьего рода:

$$(A\varphi)(x) = x^p\varphi(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi^{\{k\}}(0) +$$

$$+ \textstyle\sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t^k}\,dt = f(x),$$

$x \in [a,b]$, где $p,n \in \mathbb{N}$; $k(x,t)$, $f(x)$, $a_k(x)$ и $b_k(x)$ известные непрерывные функции, принадлежащие пространству C^{p+n}_τ. Искомая функция $\varphi(x) \in C^n_\tau$.

Теорема 2. *Оператор A, действующий из C^n_τ в C^{n+p}_τ нетеров и его индекс $\varkappa(A) = -p$.*

Катковская И.Н., Кротов В.Г. (Беларусь, Минск)
krotov@bsu.by

СХОДИМОСТЬ СВЕРТОК С КОРНЕМ КВАДРАТНЫМ ИЗ ЯДРА ПУАССОНА В ПОЛИКРУГЕ

Пусть $D = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости, $T = [-\pi,\pi]$. Для $f \in L^1(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$, положим

$$\mathcal{P}_n f(z) = \int_{T^n} f(\varphi) \prod_{k=1}^{n} \left(|z_k - e^{i\varphi_k}| \ln \frac{e}{1-|z_k|} \right)^{-1} d\varphi.$$

Такие операторы возникают как нормированные свертки с произведением корней квадратных из одномерных ядер Пуассона [1].

Для изучения граничного поведения таких операторов введем области

$$\mathcal{L}_{a,\delta}(\varphi) = \{z = (r_1e^{i\theta_1}, \ldots, r_ne^{i\theta_n}) \in D^n :$$

$$|\theta_k - \varphi_k| < a(1-r_k)\left(\ln\tfrac{e}{1-r_k}\right)^\delta, \ 1 \le k \le n\}$$

и соответствующие максимальные функции

$$\mathcal{M}_\delta f(\varphi) = \sup\left\{|f(z)| : z \in \mathcal{L}_{a,\delta}\right\}.$$

(постоянная $a \geq 1$ не играет существенной роли).

Теорема. *Если $f \in L^p(T^n)$, $p > 1$, то*

$$\|\mathcal{M}_p(\mathcal{P}_n f)\|_{L^p(T^n)} \leq c\|f\|_{L^p(T^n)}.$$

(с зависит только от a и p), и $\mathcal{P}_n f$ имеет $\mathcal{L}_{a,p}(\varphi)$-предел для почти всех $\varphi \in T^n$.

Этот результат усиливает некоторые теоремы из [2]. Доказательство основано на результатах [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Sjögren P. *Convergence results for the square root of the Poisson kernel* // Pacific J. Math. – 1988. – V. 131, No 2 – P. 361-391.
2. Rönning J.-O. *Convergence results for the square root of the Poisson kernel* // Math. Scand. – 1997. – V. 81. – P. 219-235.
3. Катковская И.Н., Кротов В.Г. *Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 89-90.

Каюмов И.Р. (Казань)
ikayumov@ksu.ru

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЯДОВ В КРУГЕ С ЗАДАННЫМИ МОДУЛЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ[44]

Пусть последовательность целых чисел λ_k лакунарна по Адамару, т.е. $\liminf\limits_{k\to\infty} \lambda_{k+1}/\lambda_k > 1$. Предположим, что ряд $\sum a_k z^{\lambda_k}$ является аналитической в круге $\{|z| < 1\}$ функцией. Для лакунарных рядов известно, что сумма квадратов модулей коэффициентов этого ряда ограничена тогда и только тогда, когда этот ряд имеет почти всюду радиальные пределы.

И.И. Привалов ([1], стр. 149) обратил внимание на этот замечательный факт и сформулировал проблему о нахождении других классов аналитических в круге функций, которые обладают аналогичными свойствами.

Введем следующие обозначения. Через $\mathbf{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Пусть $F : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, такая функция, что $F(x) > x$ для любого натурального числа x и существует множество $M \subset \mathbf{N}$, такое, что $F^m(M) \cap F^n(M) = \emptyset$ при $m \neq n$ и $\{F^m(M)\}_{m=0}^{\infty}$ покрывает все множество натуральных чисел за исключением, быть может, конечного множества. Здесь $F^m(x)$ – m-я итерация функции $F(x)$, $F^0(x) = F(x)$.

[44]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 02-01-00168, 03-01-00015

Положим $a = \min\{l : l \in M\}$, $m(k) = \min\{m : F^{m-1}(a) \geq k\}$. Для удобства будем считать, что $a \geq 1$.

Основным результатом является

Теорема. *Если* $0 < \alpha < p < \infty$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||a_{F(k)}|^\alpha - |a_k|^\alpha|^{\frac{p}{\alpha}} m(k)^{\frac{p}{\alpha}} < \infty,$$

то следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty,$$

причем для произвольной последовательности вещественных чисел $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такой, что* $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$, *существует последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k ||a_{F(k)}|^\alpha - |a_k|^\alpha|^{\frac{p}{\alpha}} m(k)^{\frac{p}{\alpha}} < \infty$$

и справедливо (1), *но* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = \infty$.

С помощью этой теоремы мы предъявляем новые классы аналитических в круге функций для которых существование радиальных пределов почти всюду влечет ограниченность нормы в H_2. Эта же теорема применяется для усиления одного результата, полученного в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций* – Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1950. – 336 с.

2. Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A. *Harmonic, Gibbs, and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I* // Ann. of Math. – 1989. – V 2. – P. 1-40.

Колесников В.С. (Иваново)
kolesn@ivanovo.ac.ru

О ПОЛИНОМАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(t)$ – четная 2π-периодическая функция, $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$ – ее ряд Фурье, $T_n(t)$, $n \geq 1$, – тригонометрические полиномы наилучшего приближения функции $f(t)$ в L^p, $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$.

Вообще говоря, если коэффициенты a_k удовлетворяют условию монотонности

$$a_k \geq a_{k+1} \geq 0, \quad 0 \leq k < \infty,$$

то коэффициенты Фурье полинома $T_n(t)$ не обязаны быть монотонными.

Из результата Б. Надя [2] легко следует, что если коэффициенты Фурье a_k, $0 \le k < \infty$, функции $f(t)$ образуют неотрицательную трижды монотонную последовательность (то есть если: $\Delta a_k = a_k - a_{k+1} \ge 0$, $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \ge 0$, $\Delta^3 a_k = a_k - 3a_{k+1} + 3a_{k+2} - a_{k+3} \ge 0$, $k \ge 0$), то все полиномы $T_n(t)$, $n \ge 1$, имеют монотонные коэффициенты Фурье.

А.С. Беловым был поставлен следующий вопрос: существует ли четная 2π-периодическая функция $f(t)$, коэффициенты Фурье которой монотонны, такая, что для всех, или хотя бы для бесконечного числа полиномов $T_n(t)$, коэффициенты $T_n(t)$ не являются монотонно убывающими?

Этот вопрос в общем случае остается открытым.

В пространствах L^1 и L^∞ нетрудно построить примеры функций с монотонными убывающими коэффициентами Фурье, у которых хотя бы один полином наилучшего приближения имеет коэффициенты Фурье, таким свойством не обладающие [1].

Для случая пространства L^1 имеет место следующая

Теорема. *Существует четная 2π-периодическая бесконечно дифференцируемая функция, такая, что все полиномы $T_{2n}(t)$ $(n \ge 2)$ наилучшего приближения в L^1 не являются полиномами с монотонными коэффициентами.*

В качестве такой функции можно взять

$$f(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8^{k-1}} \left(\cos 2kt + \cos\,(2k+1)t\right).$$

В доказательстве используется теорема Маркова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников В.С. *О полиномах наилучшего приближения*// Вестник Тамбовского университета: Тезисы докладов. – Тамбов, 2003. – Т. 8. – Вып. 3. – С.397-398.

2. Nagy B. Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // Berichte Acad.d.Wiss.Leipzig 90. – 1938.

Колпаков В.И. (Саратов)
victor38@sun.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН ДЛЯ ФУНКЦИИ КЛАССА $W^4L_\infty(M,a,b)$, ЗАДАННОЙ δ-ПРИБЛИЖЕНИЕМ В $C[a,b]$

В [1] построен интерполяционный кубический сплайн для функции класса $W^4L_\infty(M,a,b)$, заданой δ-приближением в $C[a,b]$, относительно которого справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* $0 < \delta \le \delta_0 = \left(\frac{|b-a|}{4}\right)^4 \frac{M}{3}$, $h^* = \alpha^*$, $\alpha = \alpha^* = 2\left(\frac{3\delta}{M}\right)^{1/4}$, $f \in W_\delta^4$, *где* $W_\delta^4 = \{f \in W^4L_\infty(M,a,b),\ f_\delta \in C[a,b] : \ \|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \le \delta\}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\Delta_{k,4}(\delta) = \sup_{f\in W_\delta^4} \|S_3^{(k)}(f_\delta, x) - f^{(k)}(x)\|_I \le \begin{cases} C_k h^{4-k} M, & \text{для } \delta = 0 \\ A_k \omega_{k,4}(\delta), & \text{для } \delta \ne 0, \end{cases}$$

где $\omega_{3,4}(\delta) = 2^{3/2}3^{1/4}M^{3/4}\delta^{1/4}$, $\omega_{2,4}(\delta) = \frac{10}{\sqrt{3}}M^{1/2}\delta^{1/2}$, $\omega_{1,4}(\delta) = \frac{2^{5/2}}{3^{1/4}}M^{1/4}\delta^{3/4}$, $\omega_{0,4}(\delta) = \delta$, (*см.* [2]), $A_{3,4} = \frac{19}{12\sqrt{2}}$, $A_{2,4} = \frac{17}{10}$, $A_{1,4} = \frac{49}{48}\sqrt{2}$, $A_{0,4} = 16\frac{3}{4}$, $C_{3,4} = \frac{41}{24}$, $C_{2,4} = \frac{5}{4}$, $C_{1,4} = \frac{1}{6}$, $C_{0,4} = \frac{87}{384}$, $\omega_{k,4}(\delta) = \sup\{\|f^{(k)}\|_{C[a,b]} : \ \|f\|_{C[a,b]} \le \delta,\ \|f^{(4)}\|_{L_\infty[a,b]} \le M\}$, $I = C[a,b]$ *для* $k = 0,1,2$, $I = L_\infty[a,b]$ *для* $k = 3$.

Проведенный вычислительный эксперимент в системе MATLAB 6.1 для функции $f_\delta(x) = \exp(x) + \delta\sin(2\pi x)$, $x \in [0,1]$, дал следующие результаты, сведенные в таблицу.

j	δ_j	n_j	$n1_j$	$A_{0,n1_j}$	$A_{1,n1_j}$	$A_{2,n1_j}$	$A_{3,n1_j}$
1	$5.6631e-006$	10	100	1.2465	0.6347	0.7739	0.8547
2	$3.5394e-007$	20	200	1.1643	0.6980	0.8100	0.8815
3	$9.0609e-009$	50	500	1.2698	0.7361	0.8316	0.8990

где $A_{k,nl_j} = \Delta_{k,4}(\delta_j)/\omega_{k,4}(\delta_j)$, $k = \overline{0,3}$, $j = \overline{1,3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков В.И. *Сглаживающий кубический сплайн* // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докладов Всероссийской научной конференции. Екатеринбург, 2001. – С. 37- 38.

2. Звягинцев А.И. *Оценки промежуточной производной функции* // Латвийский математический ежегодник. – Вып.32. – Рига, 1989. – С. 183-186.

Колпакова Э.В., Колпаков В.И. (Саратов)
victor38@sun.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ КЛАССА $W^3L_\infty(M,a,b)$ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СПЛАЙНА, КОГДА ФУНКЦИЯ ЗАДАНА δ-ПРИБЛИЖЕНИЕМ В $C[a,b]$

Постановка задачи (см.[1]). Пусть кривая $y = f(x)$, $f \in W^3L_\infty(M,a,b) = \{f \in C[a,b] : \ \|f^{(3)}\|_{L_\infty[a,b]} \le M\}$, задана δ-приближением $f_\delta \in C[a,b] : \ \|f - f_\delta\|_{C[a,b]} \le \delta$, $0 < \delta \le \delta_0 = \left(\frac{|b-a|}{3}\right)^3 \frac{M}{3}$. Требуется восстановить длину дуги кривой, т.е. вычислить

$l(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. В [2] построен интерполяционный параболический сплайн $S_2(f_\delta, x)$, $x \in [a,b]$, который применяется для построения приближенного решения поставленной задачи, т.е. в качестве приближенного решения взят функционал $l(f_\delta) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(S_2^{(1)}(f_\delta,x))^2}\,dx$, относительно которого справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* $0 < \delta \le \delta_0$, $h^* = 2\alpha^*$, $\alpha^* = \left(\frac{3\delta}{M}\right)^{1/3}$, $f \in W_\delta^3$. *Тогда справедливы неравенства* $|l(f) - l(f_\delta)| \le \left\{\frac{45}{64}h^2M \text{ для } \delta = 0;\ \frac{191}{72}\Omega_{1,3}(\delta) \text{ для } \delta \ne 0\right\}$, *где* $W_\delta^3 = \{f \in W^3L_\infty(M,a,b), f_\delta \in C[a,b] : \|f - f_\delta\|_{C[a,b]} \le \delta\}$, $\Omega_{1,3}(\delta) = \frac{3^{5/3}}{2}M^{1/3}\delta^{2/3}$.

Доказательство. $|l(f) - l(f_\delta)| \le \int\limits_a^b \left|\sqrt{1+(f'(x))^2} - \sqrt{1+(S_2'(f_\delta,x))^2}\right| dx \le \int\limits_a^b |f'(x) - S_2'(f_\delta,x)|\,dx \le |b-a|\|f' - S_2'(f_\delta)\| \le |b-a|\left\{\frac{45}{64}h^2M \text{ для } \delta = 0;\ \frac{191}{72}\Omega_{1,3}(\delta) \text{ для } \delta \ne 0\right\}$.

Выражение $\int\limits_a^b \sqrt{1+(S_2'(f_\delta,x))^2}\,dx = \sum\limits_{i=0}^{n} \int\limits_{\overline{x}_i}^{\overline{x}_{i+1}} \sqrt{1+(S_2'(f_\delta,x))^2}\,dx$ вычисляется в квадратурах, т.к. $S_2'(f_\delta,x)$ – кусочно-линейная функция для $x \in [a,b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпакова Э.В., Колпаков В.И. *Восстановление длины дуги кривой, заданной с погрешностью в равномерной метрике* // Математическое моделирование и управление в технических системах: Сб. науч. трудов. – Вып. 1. - Саратов, 1985. – С. 30-34.

2. Колпаков В.И. *Сглаживающий параболический сплайн* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докладов Воронеж. зимней математической школы. – Воронеж, 2001. – С. 146-147.

Коноплев А.Б. (Саратов)
alekon@inbox.ru

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ВЕРХНИХ ВЫПУКЛЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ[45]

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = X \times Y$, $F : X \to 2^Y$ – многозначное отображение с замкнутыми образами. Рассмотрим функцию расстоя-

[45]Работа выполнена при финансовой поддрежке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

ния (ФР) от точек до образов многозначного отображения в произвольной норме

$$d_F(z) = \inf_{v \in F(x)} \|y - v\|, \qquad z = (x, y).$$

Введем обозначения $z_0 = (x_0, y_0) \in domF \times Y$, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, 0_X – нулевой элемент пространства X, $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение, $\partial \| \cdot \|$ – субдифференциал нормы, Γ^+ – положительно сопряженный конус к конусу Γ,

$$W(z_0) = \{w \in Y \mid \|y_0 - w\| \le d_F(z_0)\}, \quad Q(z_0) = W(z_0) \cap F(x_0),$$
$$\Psi_Y = \{\psi : [0, \alpha_0] \to Y \mid \alpha^{-1}\psi(\alpha) \to 0, \alpha \downarrow 0\},$$
$$L_F(z_0, v, x) = \{y \in Y \mid \exists \alpha_0 > 0, w(\alpha) \in W(z_0), \psi(\alpha) \in \Psi_Y :$$
$$w(\alpha) \to v, \alpha \downarrow 0, w(\alpha) + \alpha y + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha x), \alpha \in [0, \alpha_0]\}.$$

Следующая теорема дает способ построения верхних выпуклых аппроксимаций [1] ФР.

Теорема. *Пусть $v \in Q(z_0)$, ФР локально липшицева в точке z_0, а $\Gamma(\cdot)$ – положительно однородное замкнутое выпуклое многозначное отображение, равномерно ограниченное во всех точках своей эффективной области. Кроме того, для всех $x \in X$ выполняется включение $\Gamma(x) \subset L_F(z_0, v, x)$. Тогда функция*

$$h^{\uparrow}(z_0, \bar{z}) = \sup_{z \in \{0_X\} \times \partial \|y_0 - v\| - gr\Gamma^+} < z, \bar{z} >$$

является верхней выпуклой аппроксимацией ФР в точке z_0, т. е. $h^{\uparrow}(z_0, \bar{z}) \ge \limsup_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}(d_F(z_0 + \alpha \bar{z}) - d_F(z_0))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* – М.: Наука, 1980. – 320 с.

Кореновский А.А. (Украина, Одесса)
anakor@paco.net

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБРАТНОМУ НЕРАВЕНСТВУ ГЕЛЬДЕРА[46]

Пусть ненулевые числа $\alpha < \beta$. Для постоянной $B > 1$ через $RH_{\alpha,\beta}(B)$ обозначается совокупность всех неотрицательных на отрезке I_0 функций f, удовлетворяющих «обратному неравенству Гельдера»

$$\left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f^{\beta}(x)\, dx \right\}^{1/\beta} \le B \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f^{\alpha}(x)\, dx \right\}^{1/\alpha} \qquad (1)$$

[46]Работа частично поддержана украинско-французской программой научного сотрудничества «Дніпро».

равномерно по всем отрезкам $I \subset I_0$. При $p > 1$ класс $RH_{-1/(p-1),1}(B)$ называется классом Макенхаупта, а $RH_{1,p}(B)$ – классом Геринга. Изучению этих классов посвящено достаточно большое количество работ различных авторов. Основное свойство функций из классов Макенхаупта и Геринга, на котором базируются их многочисленные приложения, состоит в «самоулучшении» показателя суммируемости. В данной работе находятся точные предельные границы показателей суммируемости функции из класса $RH_{\alpha,\beta}(B)$. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть неотрицательная на отрезке I_0 функция f удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любого $\gamma \notin [\alpha,\beta] \cup \{0\}$, такого, что*

$$(1-\alpha/\gamma)^{1/\alpha} > B\,(1-\beta/\gamma)^{1/\beta}, \tag{2}$$

найдутся положительные постоянные $B' \equiv B'(\alpha,\beta,B,\gamma)$ и $B'' \equiv B''(\alpha,\beta,B,\gamma)$, для которых неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{B'}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I f^{\alpha}(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \le \left\{\frac{1}{|I|}\int_I f^{\gamma}(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \le \\ \le B''\left\{\frac{1}{|I|}\int_I f^{\beta}(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \tag{3}$$

справедливо на любом отрезке $I \subset I_0$. Если же число $\gamma \notin [\alpha,\beta] \cup \{0\}$ не удовлетворяет условию (2), *то одно из двух неравенств* (3), *вообще говоря, теряет силу, а именно, при $\gamma < \alpha$ – левое, а при $\gamma > \beta$ – правое.*

Заметим, что уравнение $(1-\alpha/\gamma)^{1/\alpha} = B\,(1-\beta/\gamma)^{1/\beta}$ при любом $B > 1$ имеет два корня $\gamma^- < \min(0,\alpha)$ и $\gamma^+ > \max(0,\beta)$, а неравенство (2) справедливо при $\gamma \in (\gamma^-, \min(0,\alpha)) \cup (\max(0,\beta), \gamma^+)$. Поскольку неравенство (3) при $\gamma \in [\alpha,\beta] \setminus \{0\}$ обращается в обычное неравенство Гельдера с постоянными $B' = B'' = 1$, то теорема 1 утверждает, что условие (1) влечет выполнение неравенства (3) для всех $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+) \setminus \{0\}$ и эти значения γ^- и γ^+, вообще говоря нельзя улучшить.

В многомерном случае теорема 1 остается справедливой, если условие (1) предполагать выполненным по всевозможным параллелепипедам со сторонами, параллельными координатным осям.

Некоторые частные случаи теоремы 1 ранее были установлены в работах [1-3] и других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кореновский А.А. *О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта*// Матем. заметки. – 1992. – Т. 52(6). – С. 32-44.

2. Popoli A. *Optimal integrability in B_p^q classes*// Le matematiche. – 1997. – V. 25(1). – P. 159-170.

3. Malaksiano N.A. *The precise embeddings of the one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes*// Acta Sci. Math., Szeged. – 2002. – V. 68. – P. 237-248.

Коркмасов Ф.М. (Махачкала)
layuza@dinet.ru

ОБ ОЦЕНКЕ МАКСИМУМА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА НА $[-1,1]$ ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ НА КОНЕЧНОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ $\Omega_N \in [-1,1]$

Пусть H^m – пространство алгебраических многочленов степени m, $\Omega_N = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ – система различных точек отрезка $[a,b]$ таких, что $a \le x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N \le b$. Предположим, что значения произвольного алгебраического многочлена $p_m \in H^m$ на Ω_N ограничены некоторым положительным числом λ, т.е.

$$|p_m(x_j)| \le \lambda. \tag{1}$$

В некоторых задачах и приложениях численного анализа возникает необходимость оценить величину

$$\|p_m\| = \max_{a \le t \le b} |p_m(t)|, \tag{2}$$

зная лишь информацию о значениях многочлена $p_m(t)$ на множестве Ω_N отрезка $[a,b]$. Возникает вопрос: какие условия нужно наложить на степень многочлена m и число точек N множества Ω_N, чтобы при условии (1) величина (2) была бы ограниченной (когда $m, N \to \infty$).

Отметим, что при $m \ge N$ величина (2) становится неограниченной. Например, если $m = N$, то можно построить интерполяционный многочлен $\sigma_m(t)$ степени m по $N+1$ точкам следующим образом: положить $\sigma_m(x_j) = \lambda$, а в некоторой точке $\theta \in \Omega_N$ из $[a,b]$ определить значение $\sigma_m(\theta)$ произвольным образом. При $m \to \infty$ за счет выбора $\sigma_m(\theta)$ величину (2) можно сделать сколь угодно большой.

При $m \le N-1$ вопрос об оценке величины (2) для $[a,b] = [-1,1]$ и системы равноотстоящих точек $\Omega_N = \{-1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ рассматривался в работах [1], [2], [3], [4]. В частности, в работах [1], [2] было получено, что при $m \le \delta\sqrt{N-1}$ (δ – фиксированное положительное число)

$$\|p_m\| \le c(\delta), \tag{3}$$

где $c(\delta)$ – положительная постоянная, зависящая от δ, а в частном случае при $\delta = 1$ и $\delta = \pi/\sqrt{2}$ оценка (3) была получена, соответственно, в работах [3] и [4].

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос об оценке величины (2) для $[a,b] = [-1,1]$, когда в качестве системы точек $\Omega_N = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ выбраны нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ (при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$). Приведенная здесь теорема обобщает результат, полученный нами в работе [5] для случая $\alpha = \beta = 0$.

Теорема. *Пусть* $\Omega_N = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ *– совокупность нулей многочлена Якоби* $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ $(-1/2 < \alpha, \beta < 1/2)$, *произвольный алгебраический многочлен* $p_m \in H^m$ $(m \le N-1)$ *на* Ω_N *удовлетворяет условию* (1). *Тогда при* $m \le aN$ *(a – фиксированное число,* $a \in (0,1)$ *) имеем*

$$\|p_m\| \le \lambda \cdot c(a),$$

где $c(a)$ *– положительная постоянная, зависящая от a* (вообще говоря разная для разных α, β).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарапудинов И.И. *Об ограниченности в* $C[-1,1]$ *средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье-Чебышева*// Матем. сборник. – 1996. – Т. 187. – N 1. – С. 143-160.

2. Coppersmith D., Rivlin T.J. *The growth of polynomials bounded of equally spaced points* // SIAM. J. Math. Anal. – 1992. – V. 23. – P. 970-983.

3. Ehlich H., Zeller K. *Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten* // Math. Z. – 1964. – V. 86. – P. 41-44.

4. Schonhage A. *Fehlerfortpflantzung bei interpolation* // Numer. Math. – 1961. – V. 3. – P. 62-71.

5. Коркмасов Ф.М. *Об оценке максимума алгебраического многочлена на отрезке* $[-1,1]$ *по его значениям в нулях многочлена Лежандра* // Вестник Дагестанского научного центра РАН. – 2001. – № 10. – С. 23-24.

Корнев В.В., Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[47]

Обозначим через L дифференциальный оператор:

$$Ly = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1], \ p_k(x) \in [0,1],$$

с краевыми условиями:

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

[47]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169).

Предполагаем, что краевые условия (1) после приведения их к нормированному виду удовлетворяют регулярности Биркгофа ([1], с. 65-69).

Занумеруем все собственные значения оператора L в порядке возрастания модулей: $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$. Пусть $\lambda = \rho^n$, γ_m – окружности в ρ-плоскости с центрами в $\rho_m = \lambda_m^{1/n}$ одного и того же достаточно малого радиуса $\delta > 0$ и Γ_m – образы γ_m в λ-плоскости.

Теорема. *Пусть $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ удовлетворяет условиям:*

а) $f(x)$ есть функция ограниченной вариации;

б) $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$;

в) $f(0) = f(1) = 0$.

Тогда при любом $x \in [0,1]$

$$\sum_1^{\infty} \left| \int_{\Gamma_m} R_\lambda f \, d\lambda \right| \le C,$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, E - единичный оператор и константа C не зависит от x.

Этот результат обобщает признак Зигмунда ([2], с. 614) абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Если среди краевых условий (1) есть условие $y(0) - y(1) = 0$, то в) заменяется на него.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969.

2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М., 1961.

Кошкарова Б.С. (Казахстан, Караганда)
rootphm@kargu.krg.kz

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ УРАВНЕНИИ

Известно, что многие краевые задачи математической физики и гидродинамики сводятся к решению эквивалентных интегральных уравнений, включающие в себя интегральные операторы с неизвестной плотностью.

В круге $K = K\{w : |w| < 1\}$, $w = u + iv$, рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$\rho(w) = \frac{U\rho}{D\rho + \sqrt{|D\rho|^2 + |U\rho|^2}} \overline{U\rho} + T_1\rho - 2\overline{T_1\rho} - \overline{\Phi_0'(w)} = S\rho, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{1}$$

Здесь

$$D\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - \overline{w})} d\xi d\eta + \frac{2}{\pi(w - \overline{w})}\int_w^{\overline{w}} \iint_K \frac{\rho(\zeta)}{1 - \overline{t}\zeta} d\xi d\eta d\overline{t} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\rho(\zeta)(1 - \overline{\zeta} w - \overline{\zeta}\overline{w})}{(1 - \overline{\zeta} w)(1 - \overline{\zeta}\overline{w})} d\xi d\eta + \frac{1}{w - \overline{w}}\int_w^{\overline{w}} \Phi_0'(w) dw,$$

$$U\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\xi d\eta - \frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta\rho(\zeta)}}{(1 - \overline{\zeta} w)^2} d\xi d\eta,$$

$$T_1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta} w} d\xi d\eta,$$

$$\Phi_0(w) = a_1 \ln(1 - w) - a_3 \ln(1 + w) - a_2 t_0 \ln(1 - \overline{t}_0 w) - a_2 \overline{t}_0 \ln(1 - t_0 w),$$

где $\rho(w)$ – плотность из подбираемого класса, $t_0 = e^{i\gamma}$, $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$, a_1, a_2, a_3 – действительные положительные постоянные, причем $a_1 + a_3 = 2a_2$.

Сингулярное интегральное уравнение (1) было получено редукцией краевой задачи со свободной границей, возникающей при соударении двух осесимметрических струй идеальной несжимаемой жидкости [1].

Разрешимость уравнения (1) исследована в дробных пространствах $B^{\alpha}_{p,1}(K)$ [2]. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* $\rho \in B^{\alpha}_{p,1}(K)$, $1 < p < 2$, $0 < \alpha < \frac{2}{p} - 1$, *то оператор* $S\rho$ *является ограниченным оператором в пространстве* $B^{\alpha}_{p,1}(K)$.

Теорема 2. *При достаточно малом* a_2 *сингулярное интегральное уравнение имеет единственное решение, которое может быть найдено как предел последовательности*

$$\rho_{n+1} = S\rho_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем в качестве $\rho_0(w)$ *можно выбрать любой элемент из шара* $\|\rho\| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игликов А., Кошкарова Б.С. *Задача об осесимметрических соударяющихся струях несжимаемой идеальной жидкости*// Мат.журнал. – 2002. – Вып. 4. – С. 47-57.

2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения* – М.: Наука, 1975. – 480 с.

Кротов В.Г., Смовж Л.В. (Беларусь, Минск)
krotov@bsu.by

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОПЕРАТОРОВ С ОБЩИМИ ЯДРАМИ

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}$ – семейство открытых шаров в X $(x \in X,\ t > 0)$, $\mathbf{X} = X \times [0,1)$.

Пусть еще $\Omega(0)$ – класс непрерывных возрастающих функций $\omega : (0,1] \mapsto (0,1]$ таких, что $\omega(+0) = 0$, $\omega(1) = 1$, а также $\omega(t)t^{-b}$ почти возрастает при некотором $b > 0$; если $\gamma_0 > 0$, то $\Omega(\gamma_0)$ – подкласс функций $\omega \in \Omega(0)$, для которых $\omega(t)/t^{\gamma_0 - b}$ почти убывает при некотором $b > 0$.

Мы изучаем поведение операторов вида

$$\mathcal{K}_\omega u(x,r) = \int\limits_0^1 \omega(1-s)u(x,rs)\frac{ds}{1-s},\ u \in C(\mathbf{X}),$$

при подходе к границе $\mathbf{X}$ в терминах областей

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{(y,r) : d(x,y) < a\varepsilon(1-r), 0 \le r < 1\},\ \ a > 0,$$

определяемых функцией $\varepsilon \in \Omega(1)$, и соответствующих максимальных операторов

$$\mathcal{N}_\varepsilon u(x) = \sup\{|u(y,r)| : (y,r) \in \Gamma_\varepsilon(x)\},$$

(при $\varepsilon_0(t) = at$ обозначаем $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}$).

Теорема. *Пусть $p > 0$, $\varepsilon \in \Omega(1)$ и для некоторого $\gamma_0 > 0$*

$$\gamma \in \Omega(\gamma_0),\ \ \omega \in \Omega(0),\ \ \gamma\omega^{-p} \in \Omega(0),\ \ \beta(t) \equiv \gamma\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)\left[\omega\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)\right]^{-p}.$$

1) Если ν – внешняя мера, μ – мера на X, удовлетворяющие условию

$$\frac{\nu\left(B\left(x,s\right)\right)}{\beta(s)} \le c\frac{\mu\left(B\left(x,t\right)\right)}{\gamma(t)},\ \ x \in \mathbf{X},\ 0 < t < s \le 1,$$

то для любой функции $u \in C(\mathbf{X})$

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon\left(\mathcal{K}_\omega u\right)\|_{L^p_\nu} \le c\,\|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu}.$$

2) Если дополнительно

$$\frac{\mu\left(B\left(x,s\right)\right)}{\gamma(s)} \le c\,\frac{\mu\left(B\left(x,t\right)\right)}{\gamma(t)},\ \ x \in \mathbf{X},\ 0 < t < s \le 1,$$

то для любой функции $u \in C(\mathbf{X})$ с $\mathcal{N}u \in L^p_\mu(X)$ для ν-почти всех $x \in X$ существует $\Gamma_\varepsilon(x)$-предел $K_\omega u$.

Утверждение 1) доказано совместно, 2) принадлежит второму автору. Частные случаи и примеры см. в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В.Г., Смовж Л.В. *Касательные максимальные функции для операторов с общими ядрами* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 104-105.

Кузнецов А.А. (Саратов)
KuznetsovAA@pisem.net

АППРОКСИМАЦИЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПОЗИЦИЯМИ[48]

В работе рассматривается вопрос об аппроксимации однолистных функций композициями. Данная тема возникла сравнительно недавно. Так, в работах [2,3,4] рассматривался вопрос о представлении некоторых гиперболических и элементарных функций с помощью конечных или бесконечных композиций канонических отображений. В работе [1] рассматривался вопрос о том, как и какие свойства семейства функций из класса $\mathcal{M}$, однолистных голоморфных функций f отображающих единичный круг $\mathbb{U} = \{z, |z| < 1\}$ в себя с нормировкой $f'(0) > 0$, будут гарантировать то, что композиции данных функций будут плотны в классе $\mathcal{M}$.

Рассмотрим класс $\mathcal{S}$ однолистных голоморфных функций в единичном круге с нормировкой $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Пусть функция $p^\gamma_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}z + \ldots, \alpha > 0$ отображает $\mathbb{U}$ на единичный круг с радиальным разрезом с концевой точкой $e^{i\gamma}, \gamma \in \mathbb{R}$. Мы будем рассматривать аппроксимацию функции $f \in \mathcal{S}$ функциями вида $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n p^{\gamma_1}_{\alpha_1} \circ p^{\gamma_2}_{\alpha_2} \circ \ldots p^{\gamma_n}_{\alpha_n}$.

Класс $\mathcal{S}$ является подмножеством пространства всех голоморфных функций в $\mathbb{U}$. Топология в этом пространстве задается полунормами $\|f(z)\|_r = \max\limits_{|z|\leqslant r}|f(z)|$. Таким образом, мы будем рассматривать скорость приближения именно по этим полунормам.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathcal{S}$ и любых двух натуральных чисел n и m существуют $\alpha_j, \gamma_j, j = 1, 2\ldots nm$ такие, что*

$$\|f - \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{nm} p^{\gamma_1}_{\alpha_1} \circ p^{\gamma_2}_{\alpha_2} \circ \ldots p^{\gamma_{nm}}_{\alpha_{nm}}\|_r \leqslant$$
$$\leqslant \frac{11r^2}{(1-r)^6}\frac{\log n}{n} + \frac{15r^2}{(1-r)^5}\frac{1}{m} + \frac{3r^2}{(1-r)^4}\frac{1}{n}, \quad 0 < r < 1.$$

[48]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 01-01-00123).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.А., Представление однолистных функций в виде бесконечных композиций// Изв. ВУЗов. Математика. – 2002. – № 10 – С. 56-63.

2. Kuznetsov A., Gumenuk P., *Representation of analyitic functions as infinite compositions.*// Abstracts of ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equations and Related topics. – Yerevan, 2002. – P. 38.

3. Mejía D., Pommerenke Ch., *Hyperbolically convex functions, dimension and capacity*// Preprint of Technische Universität. – Berlin, 2000.

4. Michalska M., Prokhorov D.V., Szynal J., The compositions of hyperbolic triangle mappings// Complex Variables Theory Appl. – 2000. – V. 43 – P. 179-186.

Кулибеков Н.А. (Махачкала)
ts@mail.ru

О ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛЯЮЩИХ НУЛИ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ[49]

Обозначим через $Q_n(x) = Q_n(x, N)$ конечную последовательность многочленов Чебышева, нормированных условием $Q_n(0) = 1$, образующую ортогональную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, ..., N-1\}$ в следующем смысле

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Q_n(k)Q_m(k) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{1}{\pi_n}, & n = m, \end{cases}$$

где

$$\pi_n = \pi_n(N) = (2n+1)\frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N+n}{n}}.$$

Эти многочлены являются частным случаем общих многочленов Чебышева $Q_n(x) = Q_n(x; \alpha, \beta, N)$ при $\alpha = \beta = 0$, образующих ортогональную систему на сетке Ω_N с весом $\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\beta)/(\Gamma(x+1)\Gamma(N-x))$ [1]. В работе [2] указаны границы, отделяющие корни многочлена $Q_n((N-1)(1+t)/2)$. Этот результат основан на асимптотической формуле установленный в работе [1]. Через $\tau_n^{(0)} < \tau_n^{(1)} < \cdots < \tau_n^{(n)}$ обозначим точки экстремумов функции $(1-t^2)^{\frac{1}{4}} P_n^{(0,0)}(t)$, где $P_n^{(0,0)}(t)$ – многочлен Лежандра степени n, а через $t_{n,N}^{(1)} < t_{n,N}^{(2)} < \cdots < t_{n,N}^{(n)}$ – нули многочлена $Q_n((N-1)(1+t)/2)$. В [2] доказана

[49]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00611 а).

Теорема. *Если* $2 \le n \le \lambda(N-1)^{\gamma}$, $N \ge A$, *то справедлива следующая оценка*

$$\tau_n^{(j-1)} < t_{n,N}^{(j)} < \tau_n^{(j)} \quad \left(j = 1, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

где $\gamma = 1/3$, $\lambda = (0,22)^{\gamma}$, $A = 7856$.

В настоящей работе предпринята попытка ослабить требования в условии теоремы на параметры n, N. Получены численные результаты, уточняющие границы этих параметров с тем, чтобы утверждение теоремы сохранилось для всех n и N не выходящих за новые уточненные границы.

В заключении хочу выразить благодарность Шарапудинову И.И. за постановку задачи, а также за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарапудинов И.И. *Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения.* Махачкала: Из-во Даг.гос.пед.ун-та, 1997 г.

2. Кулибеков Н.А. *Некоторые типы квадратурных формул и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.01.* - Саратов, 2002. – 108 с.

Курдюмов В.П. (Саратов)

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[50]

Исследуется вопрос о асимптотике собственных функций и собственных значений интегро-дифференциального оператора L:

$$\begin{gathered} y^{(n)}(x) + Ny^{(n-1)}(x), \quad n = 4\mu + 2,\ x \in [0,1], \\ y^{(2k)}(0) = y^{(2k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tfrac{n}{2} - 1, \end{gathered} \tag{1}$$

где $Nf(x) = q(x) \int\limits_0^1 p(t)f(t)\,dt$, $q(x) \in L_2[0,1]$, $p(x) \in L[0,1]$.

Для случая $n = 2$ и $p(x), q(x) \in L_2[0,1]$ поставленная задача рассматривалась Е.Л. Ульяновой в [1]. В настоящей работе уточняется и обобщается результат из [1].

Теорема. *При k достаточно больших и произвольном $m = 1, 2, \ldots$ для собственных функций $\varphi_k(x)$ и собственных значений ν_k оператора L справедливы оценки*

$$\left|\varphi_k(x) - e_k(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x,k)\right| \le 2a^{m+1}||p||^{m+1}\alpha^{m+1}(k),$$

[50]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169).

$$\left| \nu_k - \lambda_k - \frac{(Ne_k^{(n-1)}(x), e_k(x)) - \sum\limits_{i=1}^{m} (Ng_i^{(n-1)}(x,k), e_k(x))}{1 - \sum\limits_{i=2}^{m+1} (g_i(x,k), e_k(x))} \right| \le$$

$$\le \pi^n k^{n-1} a^{m+2} \|p\|^{m+2} \alpha^{m+2}(k),$$

и, кроме того, $|g_m(x,k)| \le \sqrt{2} a^m \|p\|^m \alpha^m(k)$,

$$\left| \frac{(Ng_m^{(n-1)}(x,k), e_k(x)}{1 - \sum\limits_{i=2}^{m+1} (g_i(x,k), e_k(x))} \right| \le 2\sqrt{2}\pi^n k^{n-1} a^{m+1} \|p\|^{m+1} \alpha^{m+1}(k),$$

где $g_i(x,k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \int\limits_{\Gamma_k} G_i(x,t,\lambda) e_k(t)\, d\lambda\, dt$, $i = 1, 2, \ldots$, $G_i(x,t,\lambda)$ *- ядро интегрального оператора* $(-1)^i R_{0,\lambda}(ND^{n-1}R_{0,\lambda})^i$, $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ *– резольвента оператора* L_0*, порожденного дифференциальным выражением* $y^{(n)}(x)$ *и условиями* (1), $D = \frac{d}{dx}$, $e_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x$, $\lambda_k = -(k\pi)^n$, $\alpha(k) = \max\left\{ |q_k|, \sum\limits_{i=1,\, i\ne k}^{\infty} \frac{|q_i|}{|i-k|} \right\}$, $q_k = (q, e_k)$, $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$, $a = \pi^{-1}4\sqrt{2}$, Γ_k *– непересекающиеся контуры в* λ*-плоскости вокруг точек* λ_k *содержащие лишь одно собственное значение оператора* L, $\|\cdot\|$ *– норма в* $L[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульянова Е.Л. *Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерным: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.* – Воронеж, 1998.

Кусаинова Л.К. (Казахстан, Караганда)
rootphm@kargu.krg.kz

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В работе рассматриваются весовые пространства $W = W_p^l(\Omega; \rho, v)$ типа Соболева, определяемые как пополнение линейного многообразия $C^\infty W = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_W < \infty\}$ по норме

$$\|u\|_W = |u; W_p^l(\Omega; \rho, v)| = \left(\int\limits_\Omega |\nabla_l u|^p \rho \right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |u|^p v \right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty,$$

где $\nabla_l u = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\right)^{1/2}$, ρ, v – весовые функции на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функцию $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ будем называть мультипликатором, действующим из пространства W_1 в W_2, если $\gamma W_1 = \{\gamma u,\ u \in W_1\} \subset W_2$. Запись $\gamma \in M(W_1 \to W_2)$. Через Q будут обозначаться кубы $Q = Q_d = Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y_i - x_i| < d/2,\ i = 1,\dots,n\}$. Положительную функцию $d(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющую условиям: $\sup\limits_{x\in\Omega} d(x) < C$ и $Q(x) = Q_{d(x)}(x) \subset \Omega\ \ \forall x \in \Omega$, будем называть функцией длины ребра, $Q_{(\varepsilon)}(x) = (1-\varepsilon)Q(x)$. Если к тому же существует такое $\eta \in (0,1)$, что $d(y) \geq \eta d(x)$, как только $y \in Q_{(\varepsilon)}(x)$, то $d(x)$ назовем регулярной функцией длины ребра. К примеру, $d_\Delta(x) = \min\{1, \Delta(x)\}$, где $\Delta(x) = \sup\limits_{d>0}\{d : \ Q_d(x) \subset \Omega\}$, является регулярной функцией длины ребра на $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Функция $d(x)$ задает дифференциальный базис кубов $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x\in\Omega} \{Q : \ Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)\}$. Пусть $M^*f(x)$ – максимальная функция типа Харди, построенная на базисе $\mathcal{B}$.

Теорема 1. *Пусть $v(x) = d(x)^{-lp}$, где $d(x)$ – регулярная функция длины. Тогда $W_p^l(\Omega; 1, v)$ реализуется как линейное подпространство в $\{u \in L(\Omega; loc) : \ |u; W_p^l(\Omega; 1, v)| < \infty\}$.*

Запись $\omega \in A^*$ будет означать, что существуют такие $\tau \in (0,1)$ и $R > 1$, что $\forall\ Q \in \mathcal{B}\ \sup\limits_Q M(\omega \mathcal{X}_Q) \leq R \sup\limits_{Q\setminus e} M(\omega \mathcal{X}_Q)$, как только $e \subset Q$, $|e| \leq \tau|Q|$. Mf – максимальная функция Харди, $\mathcal{X}_Q$ – характеристическая функция Q. Класс $A^*(\Omega)$ содержит веса, удовлетворяющие условию: $\forall Q \in \mathcal{B}\ c^{-1} < \omega(y)/\omega(x) < c$, если $y, x \in Q$. К примеру, если $\sup\limits_Q |\nabla\omega| \leq c\omega(x) d_\Delta(x)^{-1}\ \ \forall Q = (1-\varepsilon)Q_{d_\Delta(x)}(x)$, то вес ω «медленно колеблется» относительно базиса $\mathcal{B}$, построенного по функции длины ребра $d(x) = (c\sqrt{n})^{-1} d_\Delta(x)$.

Теорема 2. *Пусть m, l – целые, $0 < m < l$, $1 \leq p \leq q < \infty$; $p < q$ либо $p = q < n/l$ при $pl < n$, $p > 1$, и пусть $W_1 = W_p^l(\Omega; 1, d(\cdot)^{-lp})$, $W_2 = W_p^m(\Omega; \omega, \omega d(\cdot)^{-mq})$, $\omega \in A^*(\Omega)$ относительно регулярной функции $d(x)$, и для п. в. $x \in \Omega$*

$$K(x) = \sup_{Q_h \subset Q_{(\varepsilon)}(x)} \left\{ h^{-n/p+l} \left(\int\limits_{Q_h} |\nabla_m \gamma|^q M^*\omega \right)^{1/q} + \right.$$
$$\left. + h^{-n/p+(l-m)} \left(\int\limits_Q |\gamma|^q M^*\omega \right)^{1/q} \right\} \leq C < \infty.$$

Тогда $\gamma \in M(W_1 \to W_2)$. Норма $\|\gamma\| \leq c$ $\operatorname{vraisup}\limits_{x\in\Omega} K(x)$.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $pl \neq n$. *Тогда* $\gamma \in M(W_p^l(\mathbb{R}^n) \to W_p^m(\mathbb{R}^n))$, *если и только если*

$$K = \sup_{Q_h, h \leq 1} \left\{ h^{l-n/p} \left(\int\limits_{Q_h} |\nabla_m \gamma|^p \right)^{1/p} + h^{l-m-n/p} \left(\int\limits_{Q_h} |\gamma|^p \right)^{1/p} \right\} < \infty.$$

Норма $\|\gamma\| \sim K$.

Левизов С.В., Курбыко И.Ф. (Владимир)
hm@port33.ru

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ЛАКУНАРНОСТИ В ЦПТ ДЛЯ ПМОНС

Рассматривается периодическая мультипликативная ортонормированная система функций $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$ (сокращенно – ПМОНС), построенная с помощью последовательности чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ (подробное определение см.,например, в [1]). Пусть $\{n_k\}$ – последовательность номеров, подчиненная условию:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1 \sim \frac{c}{k^\alpha} \quad (c > 0,\ 0 < \alpha < 1/2),$$

начиная с некоторого k.

В [2]-[3] изучался вопрос о подчиненности подсистемы $\{\chi_{n_k}(x)\}$ (трактуемой как последовательность случайных величин) центральной предельной теореме (ЦПТ) в случае, когда числа $\{p_k\}$ ограничены в совокупности. Условие $\alpha < \frac{1}{2}$ было при этом весьма существенным – оно регулировало допустимый (для выполнения ЦПТ) порядок роста чисел $\{p_k\}$.

Рубеж $\alpha = \frac{1}{2}$ является «критическим» даже в случае ограниченной последовательности $\{p_k\}$ (см., например, [4]). В настоящей работе рассматривается лакунарность последовательности $\{n_k\}$ вида

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1 \sim \frac{\varphi(k)}{\sqrt{k}}$$

где $\varphi(k) \to \infty$ при $k \to \infty$ (не быстрее, чем $\sqrt{k}$). Получены соотношения, связывающие темпы роста величины $\varphi(k)$ и чисел $\{p_k\}$. В частности, получен результат: если в качестве $\{p_k\}$ взять простые числа, идущие подряд (в натуральном ряде), то достаточным для выполнения ЦПТ является условие

$$\varphi(k) = O\left((\ln k)^{1+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин Н.Я. *Дополнения к книге С.Качмажа и Г.Штейнгауза «Теория ортогональных рядов»*. – М.: Физматгиз, 1958.

2. Левизов С.В. *О ЦПТ для ПМОНС в случае неограниченного роста последовательности* $\{p(k)\}$ // Труды МЦ НИИММ. Казань. – Т. 8. – С. 149-150.

3. Левизов С.В. *О допустимом порядке роста чисел* $\{p(k)\}$ *в ЦПТ для ПМОНС* // «Современные проблемы теории функций и их приложения»: Тез. Докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 118-119.

4. Левизов С.В. *О центральной предельной теореме для системы Уолша* // Матем.заметки, 1984. - Т. 36(3). – С. 435-445.

Лившиц Е.Д. (Москва)
livshitz@pochta.ru

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ XGA-РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА[51]

Понятие XGA-разложения или X-гриди-алгоритма является обобщением на случай произвольного действительного банахова пространтсва X рассматриваемых в действительном гильбертовом пространстве PGA-разложения или чисто гриди-алгоритма. Пусть $x, y \in X$. Обозначим через $\lambda(x,y) \in R$ такое число, что $\|x-\lambda(x,y)y\| = \inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x-\lambda y\|$. Если X строго выпуклое, то $\lambda(x,y)$ определяется однозначно, в протичном случае определим $\lambda(x,y)$ произвольным допустимым образом.

Пусть D словарь в X, то есть подмножество единичной сферы в X, замыкание линейной оболочки которого совпадает с X, $f \in X$ и $0 \leq t \leq 1$. Рассмотрим следующий индуктивный процесс: $f_0^t(X,D) := f_0 := f$; для $n \geq 0$ последовательно определяем g_{n+1} – произвольный элемент словаря D, удовлетворяющий соотношению

$$\|f_n\| - \|f_n - \lambda(f_n, g_{n+1})g_{n+1}\| \geq t \sup_{g\in D} (\|f_n\| - \|f_n - \lambda(f_n, g)g\|)\,, \text{ и}$$
$$f_{n+1}^t(X,D) := f_{n+1} := f_n - \lambda(f_n, g_{n+1})g_{n+1}.$$

Описанный выше процесс называется X-гриди-алгоритмом, а формальный ряд – $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda(f_n, g_{n+1})g_{n+1}$ – XGA-разложением. Л. Джоунс [1] показал, что в случае, когда X является гильбертовым пространством, X-гриди алгоритм сходится для всех словарей D, $f \in X$ и чисел t, $0 \leq t \leq 1$ (т.е. $f_n^t(X,D) \to 0$). С историей вопроса и полученными в этой области результатами можно ознакомиться в обзоре В.Н. Темлякова [2]. Общие положительные результаты о сходимости XGA-разложения в произвольных банаховых пространствах автору не известны. Есть некоторые другие обобщения чисто гриди-алгоритма в гильбертовом

[51]Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 02-01-00248.

пространстве на случай банахового пространства, они определяются и изучаются, например, в работах [2] и [3].

Более того, до сих пор остается открытым вопрос о сходимости XGA-разложения (X-гриди-алгоритма) в случае, если в качестве пространства X берется $L_p[0,1]$, а в качестве D соответсвующим образом нормированная система Хаара. В настоящей работе мы рассматриваем начальные вектора из функционального класса $A^1_\gamma(X,D)$, но в этом случае доказываем не только сходимость X-гриди-алгоритма, но и то, что он в некотором смысле оптимален.

Рассмотрим класс $A^1_\gamma(X,D) = \{f \in X \mid \forall m \geq 1, \sigma_m(f,X,D) \leq m^{-\gamma}\}$, где $\sigma_m(f,X,D)$ – величина наилучшего m-членного приближения. Пусть $\mathcal{H}_p$ – система Хаара, нормированная в пространстве $L_p[0,1]$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда существует такое $\gamma_0 > 0$, что для всех γ, $0 < \gamma < \gamma_0$, и для всех $\epsilon > 0$ найдутся такие $C > 0$ и t, $0 < t < 1$, что для всех $f \in A^1_\gamma(L_p[0,1],\mathcal{H}_p)$ и всех $m \geq 1$ выполняется неравенство*

$$||f^t_m(L_p[0,1],\mathcal{H}_p)|| \leq Cm^{-\gamma+\epsilon}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones L. *On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression*// The Annals of Statistics – 15. – 1987. P. 880–882.
2. Temlyakov V.N. *Nonlinear methods of approximation* // IMI preprint. – University of South Carolina – 2001.
3. Лившиц Е.Д. *О сходимости гриди-алгоритмов в банаховых пространствах* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73(3). – С. 371-389.

Лосев А.Г. (Волгоград)

alexander.losev@volsu.ru

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[52]

Рассмотрим тройки $(S_i, d\theta_i^2, f_i)$, где $i = 1,\cdots,k$, S_i – компактное риманово многообразие без края, $d\theta_i^2$ – метрика на S_i, f_i – положительная гладкая функция на S_i. Пусть риманово многообразие M представимо в виде $M = B \cup D$, где B – компакт, а D изометрично прямому произведению $[r_0,\infty) \times S_1 \times \cdots \times S_k$ с метрикой

$$ds^2 = \prod_{i=1}^k f_i^2(\theta_i)dr^2 + \sum_{i=1}^k q_i^2(r) \prod_{j\neq i} f_j^2(\theta_j)d\theta_i^2.$$

Решения уравнения

$$\sigma^{-1}\mathrm{div}(\sigma\nabla)u = 0,$$

[52]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03-01-00304)

являются гармоническими функциями на соответствующем весовом многообразии. В дальнейшем будем называть их *σ-гармоническими*. Будем предполагать, что на скрещенном произведении D выполнено $\sigma(r,\theta) = \delta(r)\prod_{i=1}^{k} h_i(\theta_i)$. Пусть λ_j^i - j-е собственное число заданного на S_i оператора $-L_i$, где $L_i = \operatorname{div}(f_i^{\frac{2n-4}{n_i}}(\theta)h_i^{\frac{2}{n_i}}(\theta)\nabla)$, а $\dim S_i = n_i$. Обозначим $A_j^i(r)$ – решение уравнения

$$\frac{d^2v(r)}{dr^2} + \left[\sum_{i=1}^{k} n_i\frac{q_i'(r)}{q_i(r)} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)}\right]\frac{dv(r)}{dr} - \frac{\lambda_j^i}{q_i^2(r)}v(r) = 0$$

с краевыми условиями $v(r_0) = 0, \quad v'(r_0) = 1$. Введем обозначения:

$$s(t) = q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t),\ J_i = \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{\delta(t)s(t)}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\delta(z)\frac{s(t)}{q_i^2(t)}(z)dz\right)dt,$$

$$K = \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{\delta(t)s(t)},$$

где $r_0 > 0$, $i = 1,\ldots,k$. Тогда, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть M – квазимодельное многообразие, такое, что выполнены следующие условия:*

1. $K < \infty$;

2. для всех i выполнено $J_i = \infty$.

Тогда размерность пространства σ-гармонических функций на M, удовлетворяющих условию $u(r,\theta) = \overline{o}(A_l^i(r))$ для некоторого i при $r \to \infty$, не менее l.

Лукашенко Т.П. (Москва)
lukashen@mech.math.msu.su

ОБ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА И РАВЕНСТВЕ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[53]

Определения. *Если f является комплекснозначной 2π-периодической по каждой переменной интегрируемой по Лебегу на $T^n = [0,2\pi]^n$ функцией, то ее коэффициенты Фурье*

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(k_1,\cdots,k_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}(L)\int\cdots\int\limits_{T^n} f(\mathrm{t})e^{i\mathbf{kt}}\,\mathbf{dt}$$

[53]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00428), программы «Научные школы» (НШ-1657.2003.1) и программы «Университеты России» (проект УР 04.03.006).

для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, *где* $\mathbf{kt} = \sum_{j=1}^n k_j t_j$.

Если аддитивная комплекснозначная функции бруса G определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и является 2π-периодической по каждой переменной, соответствующая ей функция точки $G(\mathbf{t})$, определенная формулой

$$G(\mathbf{t}) = G(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^n \operatorname{sgn}(t_j)\, G\left(\prod_{j=1}^n [\min\{0, t_j\}, \max\{0, t_j\}]\right),$$

интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, то коэффициенты Фурье-Стилтьеса функции бруса G

$$\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \widehat{dG}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{j=1}^n \left((L)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} + \frac{ik_j}{2\pi}(L)\int\limits_0^{2\pi} e^{ik_j t_j}\right) G(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}$$

для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Следующая теорема обобщает на кратные тригонометрические ряды результат из [1, С. 255] (при более слабых условиях на функции f и G).

Теорема 1 (о равенстве Парсеваля). *Пусть комплекснозначная функция f является 2π-периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, комплекснозначная функция бруса G определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и 2π-периодична по каждой переменной, соответствующая ей функция точки $G(\mathbf{t})$ интегрируема по Лебегу на T^n. Если функция f интегрируема по $\overline{G}$ в смысле Римана-Стилтьеса на любом брусе $T^n_{\mathbf{a}} = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi]$, то выполняется равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(R - S)\int \cdots \int\limits_{T^n} f\,\mathbf{d}\overline{G} = (R, 2)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{\mathbf{d}G}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathbf{d}G}(\mathbf{k})$ соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье-Стилтьеса функции бруса G, интеграл в равенстве Парсеваля-Римана-Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля суммируется методом Римана $(R, 2)$.

Условие интегрируемости функции f по функции $\overline{G}$ в смысле Римана–Стилтьеса на любых брусах $T^n_{\mathbf{a}}$ существенно даже в одномерном случае, см. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.

2. Лукашенко Т.П. *Об интеграле Римана-Стилтьеса и равенстве Парсеваля.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 2002. – № 4. – С. 18-23.

Лукомский Д.С. (Саратов)
LukomskiiDS@info.sgu.ru

О ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ-ЮРКО[54]

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы вида:

$$ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,\rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0,\infty), \tag{1}$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_{k,k+1}^{(\xi)}}{\rho^i}.$$

Полагаем, что $p_{kk}, \beta_{k,k+1}^{(\xi)}$ – константы, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $i = \overline{k+2,n}$, $p_{k,k+1(x)} \in W^1(0,\infty)$, $k = \overline{1,n-1}$, где W^1 – множество функций $f(x)$ таких, что $f(x)$ абсолютно непрерывны и $f(x), f'(x) \in L(0,\infty)$.

Определим функции $\Phi_m(x,\rho)$ и $M_{mk}(\rho)$ $m = \overline{1,n}$, $k = \overline{m+1,n}$ так же, как в [1].

Определение. *Функции $M_{mk}(\rho)$, $k = \overline{m+1,n}$ называются функциями Вейля-Юрко, а матрица $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1,m}$ называется матрицей Вейля-Юрко.*

Обозначим $\omega_\xi(R) = R^{n-\xi} \sum\limits_{i=0}^{n-\xi} \frac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}$, $\Omega(j_1,...,j_p) = \det(\omega_{j_\nu}(R_k))_{\nu,k=\overline{1,p}}$. Пусть для всех $p = \overline{1,n-1}$, $\Omega(\overline{1,p}) \neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_ν. В статье [1] были исследованы некоторые аналитические и структурные свойства матрицы Вейля-Юрко. Однако в [1] не удалось точно описать области регулярности и непрерывности функций Вейля-Юрко. В данной работе этот недостаток исправлен. Пусть S_ν – сектора в которых выполнено неравенство $Re(\rho R_1) < \ldots < Re(\rho R_n)$, где $\{R_k\}_{k=1}^n$ – корни характеристического уравнения для (1), Γ_ν – луч, разделяющий два соседних сектора. Пусть при $\rho \in \Gamma_\nu$ выполнено

$$Re(\rho R_1) < \ldots < Re(\rho R_{m_1}) = \ldots = Re(\rho R_{m_1+p_1}) < \ldots$$

$$< Re(\rho R_{m_s}) = \ldots = Re(\rho R_{m_s+p_s}) < \ldots < Re(\rho R_n)$$

Обозначим $N_j = \{m : m = \overline{m_1, m_1+p_1-1}, \ldots, \overline{m_s, m_s+p_s-1}\}$, $J_m = \{j : m \in N_j\}$, $\gamma_m = \cup_{j\in J_m}\Gamma_j$, $\Sigma_m = C \setminus \gamma_m$ – ρ-плоскость с разрезами вдоль лучей γ_m, $\overline{\Sigma_m}$ – замыкание Σ_m (берега разрезов различаются).

[54]Работа выполнена при поддержке грантов Мин. Образования РФ (Е02-1.0-186) и Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1)

Теорема. *Функции Вейля-Юрко $M_{mk}(\rho)$ при $k > m$ регулярны в Σ_m за исключением не более чем счетного, ограниченного множества полюсов Λ'_m и непрерывна в $\overline{\Sigma_m}$ за исключением ограниченного множества Λ_m. Точнее при $j \in J_m$, $\rho \in \Gamma_j \setminus \Lambda_m$ существуют конечные пределы $M^{\pm}_{mk}(\rho) = \lim M_{mk}(z)$, $z \to \rho$, $z \in \Sigma_m$, $\pm(\arg z - \Theta_j) > 0$.*

Доказательство теоремы основано на исследовании аналитических и асимптотических свойств фундаментальной системы решений типа Биркгофа уравнения (1) и на свойствах матрицы Вейля-Юрко, исследованных в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукомский Д.С. *О матрице Вейля для пучков дифференциальных операторов на полуоси* // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000, – С. 69-71.

Лукомский С.Ф. (Саратов)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

О РЯДАХ ФУРЬЕ-ХЕНСТОКА[55]

Рассмотрим вопрос о слабой сходимости рядов Фурье-Хенстока и о справедливости равенства Парсеваля для интеграла Хенстока.

Совокупность 2π-периодических функций, интегрируемых в смысле Хенстока будем обозначать через $R^*(0, 2\pi)$. Если $\varphi(x) \geq 0$ возрастает и вогнута на $[0, 2\pi]$, то через M_φ обозначим пространство Марцинкевича, т.е.

$$M_\varphi = \left\{ f : \|f\|_{M_\varphi} = \sup_{\delta>0} \frac{1}{\varphi(\delta)} \int_0^\delta f^*(t)dt < +\infty \right\}.$$

Пусть далее функция $\psi(t) > 0$ на $(0, 2\pi]$, выпуклая, убывающая и такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t\psi(t)} < +\infty.$$

Пусть, кроме этого, существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\forall t(0, 2\pi)$

$$\psi\left(\left(\frac{t}{2\pi}\right)^\alpha\right) \leq \gamma \cdot \psi\left(\frac{t}{2\pi}\right).$$

Теорема 1. *Пусть $f \in R^*(0, 2\pi)$, $g \in AC(0, 2\pi)$, $g' \in M_\varphi(0, 2\pi)$ и*

[55]Работа выполнена при поддержке РФФИ(грант 03-01-00390) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1)

функция φ такова, что $d\varphi(t) = \frac{dt}{t\tilde{\psi}(t)}$, где $\tilde{\psi}(x) = \int\limits_x^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t}dt$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(R^*)\int\limits_0^{2\pi} g(x)(S_n(f)(x) - f(x))dx = 0, \tag{1}$$

а интеграл в левой части (1) понимается в смысле Хенстока.

Теорема 2. *Пусть f и g удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}(R^*)\int\limits_0^{2\pi} fg = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g). \tag{2}$$

Следствие. *Если в качестве ψ выбрать функцию $\psi(x) = \left(1+\log\frac{2\pi}{x}\right)^{\alpha}$ $(\alpha > 1)$, то $\varphi(x) = \left(1+\log\frac{2\pi}{x}\right)^{-\alpha}$ и получаем, что $\forall f \in R^*(0,2\pi)$, $\forall g \in AC(0,2\pi)$, у которой $g' \in M_\varphi$ с $\varphi(x) = \left(1+\log\frac{2\pi}{x}\right)^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ выполняются равенства (1) и (2).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Bartle R.G. *A Modern Theory of Integration* – Providence: AMS, 2001. –458 p.

Малютина А.Н., Соколов Б.В. (Томск)
ndm@main.tusur.ru

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ С (s,a)-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово n-мерное пространство, $n = 3,4,5,\ldots$, $x \in \mathbb{R}^n$, B^n – шар $|x| < 1$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $f \in Q_K^{s,\alpha}(k,D)$, если*

1) $f \in W^1_{n,loc}(D)$ – непрерывное, открытое, изолированное отображение, якобиан отображения $J(x,f) > 0$ почти всюду в D;

2) существует постоянная $K > 0$ такая, что при фиксированных s, a, $\frac{1}{n-1} < s < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, интеграл

$$I_{s,a}(f,k,D) = \left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)r^{\alpha}(x,\partial D)k(|x-y|)\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\right)^{\frac{1}{s}} \leq K,$$

где $\lambda(x,f) = \frac{|\nabla f|^n}{J(x,f)}$, $r(x,\partial D)$ – евклидово расстояние от точки x до границы ∂D области D, а ядро $k(t)$ (см. [1]) удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} (k(t))^{\frac{1}{s+1}} t^{\frac{n}{s+1}+\overline{\alpha}-1} dt = +\infty, \quad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha, \alpha \le 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases}.$$

Назовем отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ отображением с (s, a)-усредненной характеристикой ($f \in Q^{s,\alpha}(k, D)$), если ($f \in Q_K^{s,\alpha}(k, D)$), при каком-либо конечном $K > 1$.

Различные соотношения между классами $Q_K^{s,\alpha}(k, D)$) и классами отображений с ограниченными интегралами Дирихле и с ограниченным потенциалом градиента см. в [2].

Теорема. *Если $f \in Q_K^{s,\alpha}(k_\beta, B^n)$, $s > (n-1)\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)$, $\alpha \ge 0$, $0 < \gamma < 1$, то семейство $F = \{f\}$ монотонных отображений f нормально в B^n.*

Следствие. *Если в условиях и обозначениях теоремы $f(0) = 0$, то для любой точки $x \in B^n$ справедлива следующая оценка роста отображения f:*

$$|f(x)| \le (C \cdot K)^{\frac{1}{s+1}} \cdot |x|^q$$

где $q = \frac{2}{s} - \frac{\alpha+\beta}{ns}$, а C – постоянная, зависящая от f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куфарев Б.П., Соколов Б.В. *О граничном соответствии при отображениях областей из $\mathbb{R}^n$* // Доклады АН СССР – 1978. – Т. 243, № 3. – С. 568-571.

2. Малютина А.Н. *Классы отображений с ограниченным в среднем искажением* // Вестник ТГУ. – 2000. – № 269. – С. 51-55.

Медведева Н.М. (Волгоград)
nmedv@rambler.ru

КВАЗИКОНФОРМНОСТЬ ГАУССОВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть М - C^2-гладкая поверхность из $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим C^2-гладкую, неотрицательную функцию $\phi(\xi) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Если $n = (n_1, n_2, n_3)$– единичная нормаль к поверхности М, то можно построить функционал типа площади:

$$F(M) = \int_M \phi(n) dM. \tag{1}$$

Пользуясь методами вариационного исчисления, нетрудно получить условие экстремальности поверхности:

$$H = -\frac{1}{\phi} div(\nabla \phi^T), \tag{2}$$

где H – средняя кривизна поверхности M, div – дивергенция в метрике поверхности M, $\nabla\phi = (\frac{\partial\phi}{\partial n_1}, \frac{\partial\phi}{\partial n_2}, \frac{\partial\phi}{\partial n_3})$ и $(v)^T$ – ортогональная проекция вектора v на касательную плоскость к M в соответствующей точке.

Настоящая заметка посвящена определению условий q-квазиконформности гауссового отображения решения уравнения (2) для частного случая функции $\phi(n) = \varphi(n_3)$.

Теорема. *Если найдется* $0 < \delta < 1$, *такое что*

$$\frac{\varphi''(1-n_3^2)}{\varphi + 2\varphi' n_3} \leq \delta,$$

то гауссово отображение экстремалей функционала (1) *является q-квазиконформным с* $q \leq \frac{1}{1-\delta}$.

Аналогичные результаты для p-минимальных поверхностей были получены в [1], а для графиков решений некоторого класса квазилинейных уравнений в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tkachev V.G. *External geometry of p-minimal surfaces* // Geometry from the Pacific Rim, 1997.

2. Finn R. *On a problem of type, its application to elliptic partial differential equations* // J. Rat. Mech. and Anal. – V. 3(1954). – C 789-799.

Мокейчев В.С. (Казань)
valery.mokeychev@ksu.ru

БАЗИСНОСТЬ В СМЫСЛЕ РИССА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Базис $e = \{e_{(k)},\ k = 1, 2, ...\}$ в банаховом пространстве называется базисом Рисса, если при некоторых постоянных $c_1 > 0$, c_2 выполняются оценки:

$$c_1(\sum |a_k|^2)^{0.5} \leq \|\sum a_k e_{(k)}\| \leq c_2(\sum |a_k|^2)^{0.5},$$

в которых числа a_k удовлетворяют условию $\sum |a_k|^2 < +\infty$.

Предлагается один из ответов на вопрос: при каких асимптотических предположениях относительно последовательности собственных и присоединенных элементов (СПЭ) она будет базисом Рисса. При этом не будут использованы предположения относительно вполне непрерывности оператора A (либо $(A - \lambda_0 I)^{-1}$), а также поведении собственных значений, используемые в теореме Маркуса.

Пусть A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H, имеющий сопряженный A^*; $y = \{y_{(k)}, k = 1, 2, ...\}$, $y^* = \{y^*_{(k)},\ k = 1, 2, ...\}$ – СПЭ (соответственно A, A^*) таковы, что в y (соответственно в y^*) входит конечное число присоединенных (первый, второй,...) к собственному, причем $y_{(r)}$ – собственный тогда и только тогда, когда $y^*_{(r)}$ – собственный; при некотором базисе Рисса в H

$e = \{e_{(k)},\ k = 1, 2, ...\}$, некотором M и всех $N \geq M$, $a_k \in C$ выполняются оценки:

$$\left\| \sum_{k=M}^{N} a_k [y_{(k)} - e_{(k)}] \right\| \leq b (\sum_{k=M}^{N} |a_k|^2)^{0.5},$$

$$\left\| \sum_{k=M}^{N} a_k [y^*_{(k)} - e_{(k)}] \right\| \leq b (\sum_{k=M}^{N} |a_k|^2)^{0.5},$$

в которых $b < c_1$. Тогда, заменив в y (аналогично в y^*) первые $M - 1$ элементы на новые СПЭ, получим последовательности СПЭ, являющиеся базисами Рисса в H.

Замечание. Если последовательности y, y^* квадратически близки к е, то оценки выполняются, причем $b \to 0$ при $M \to +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков* – Кишинев: Штиинца, 1986.

Молоденкова И.Д. (Саратов)

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ k-ОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ранее разработанной методикой получения точных по порядку оценок погрешности восстановления функций с их производными интегральными операторами [1-3] для классов [3] получена оценка погрешности восстановления k-ой производной осредняющими интегральными операторами A_H с ядрами $K_H(x,t) = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i(x)\varphi_i(t)$, переводящими полиноминальные сплайны степени p дефекта 1 в их k-ые производные $(p \geq k)$ [4].

Для класса функций

$$M_2^r[0,1] = \{f(x) \in W_2^r[0,1] : \|f\|_{W_2^r} \leq 1\}$$

и величины

$$\Delta(\delta, A_H, M_2^r) = \sup\{\|A_H f_\delta - f^{(k)}\|_{C[0,1]} : f \in M_2^r[0,1],\ \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta\},$$

$k = 1, 2, \ldots, r-1$, доказана

Теорема. *При достаточно малых δ справедлива двусторонняя оценка:*

$$D\delta^{\frac{1}{2}} \leq \Delta(\delta, A_{H(\delta)}, M_2^r) \leq 2D\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение для D и согласование H с δ ($H = H(\delta)$) получены.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хромова Г.В. *О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций*// Вестн. МГУ. – Сер. 15. –1993. – № 1. – С. 13-18.

2. Хромова Г.В. *О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений 1 рода* // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 15. – 1994. – № 4. – С. 3-10.

3. Хромова Г.В. *Об оценках погрешностей приближенных решений уравнений первого рода* // ДАН. – 2001. – Т. 378. – № 5. – С. 605-609.

4. Молоденкова И.Д. *Построение операторов, восстанавливающих производные* // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2001. – С. 95-98.

Navasardian K.A. (Armenia, Yerevan)
knavasard@ysu.am

UNIVERSAL SERIES BY WALSH SYSTEM WITH MONOTONE COEFFICIENTS

Let S – is some class of measurable functions. The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

is called universal in S relative to signs, if for any function $F(x) \in S$ there exists a sequence of signs $\gamma_n = \pm 1$, for which the series $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ converges almost everywhere to $F(x)$.

In this talk we consider the question of existence the series by Walsh system is universal relative to signs.

We obtain the following result:

Theorem. *For any sequence $\{a_n\}$ satisfying $a_n \downarrow 0$ as $n \to \infty$ there exists a series $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ with coefficients $|b_n| \geq a_n$, which is universal in the class of almost everywhere finite measurable functions relative to signs.*

Насырова Е.В. (Казань)
enasyrova@yandex.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе поставлена и решена обобщенная внутренняя смешанная обратная краевая задача (ОКЗ) теории аналитических функций по параметру x для двусвязной области с полигональной границей, в которой требуется найти конечную двусвязную область D_z (вообще говоря, многолистную) с кусочно гладкой границей, расположенную в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, и аналитическую в этой области функцию $w(z)$, непрерывную вплоть до границы и конформно отображающую область D_z на заданную конечную двусвязную область D_w с кусочно ляпуновской границей в плоскости комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$, если известно, что граница L_z области D_z состоит из двух замкнутых жордановых линий: L_z^1 и L_z^2, кривая L_z^1 охватывает гладкую кривую L_z^2 и состоит из ломаной L_z^{11}, содержащей $n-1$ прямолинейных звеньев и гладкой кривой L_z^{12}, соединяющей концы полигона L_z^{11}. Кроме того, заданы: 1) внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_j ломаной L_z^{11}, равные $\alpha_j\pi$, $0 < \alpha_j < 2$, $(j = \overline{2, n-1})$, и угол $\eta_1\pi$, образованный звеном A_1A_2 ломаной L_z^{11} с действительной осью, $-\frac{1}{2} \leq \eta_1 < \frac{3}{2}$; 2) абсциссы x_1 и x_n концов ломаной L_z^{11}; 3) две замкнутые жордановы линии $L_w^1 = L_w^{11} + L_w^{12}$ и L_w^2, составляющие границу L_w области D_w, отвечающие при отображении $w(z)$ соответственно кривым L_z^1 и L_z^2, причем кривая L_w^1 охватывает кривую L_w^2; отметим, что положительному направлению обхода на L_z, при котором область D_z остается слева, отвечает положительное направление обхода на L_w, при котором область D_w остается слева; 4) образы вершин ломаной L_z^{11} на кривой L_w^{11}. Отметим, что кривая L_w^{12} задается как функция параметра x – абсциссы точки L_z^{12}, в виде $w = \varphi_1(x) + i\psi_1(x)$, $x \in [\tilde{x}_n, \tilde{x}_1]$, $x_1 \geq x_n$, $\tilde{x}_n \leq x_n$, $\tilde{x}_1 \geq x_1$, и состоит из однозначных ветвей, непрерывно переходящих друг в друга и не имеющих общих точек за исключением концов, причем эти ветви таковы, что L_w^{12} является кривой Ляпунова и положительному направлению на L_z^{12} отвечает положительное направление на L_w^{12}; кривая L_w^2 задается в виде двузначной функции, определяемой соотношением $w = \varphi_2(\tilde{x}) + i\psi_2(\tilde{x})$, $a \leq \tilde{x} \leq b$, $x = \tilde{x} + a_x$, $a_x = const$, где x – абсцисса точки L_z^2, значение a_x заранее не задается и определяется в процессе решения задачи, причем каждая из двух однозначных ветвей этой функции, непрерывно переходящих друг в друга в точках с координатами $\varphi = \varphi(\tilde{x}), \psi = \psi(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = a$ и $\tilde{x} = b$, такова, что L_w^2 является кривой Ляпунова и положительному направлению на L_z^2 отвечает положительное направление на L_w^2; кривая L_w^{11} задается в виде соотношения $F(\varphi, \psi) = 0$, таким образом, чтобы она была кривой Ляпунова, и кривые L_w^{11} и L_w^{12} не имели общих точек за исключением концов; кроме того, при задании кривых L_w^{11} и L_w^{12} требуется, чтобы малые, прилегающие к концам, участки этих линий являлись аналитическими кривыми.

Задача сводится к задаче о нахождении производной функции $z = z(\zeta)$, которая конформно отображает кольцо $D_\zeta : q < |\zeta| < 1$, расположенное в плоскости комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ на область D_z. Функция $z'(\zeta)$ является решением краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для указанного кольца [2]. Получены условия разрешимости и интегральное представление решения рассматриваемой смешанной ОКЗ, которые зависят от индекса æ указанной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.

2. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца* // Тр. сем. по кр. зад. – Казань: КГУ, 1980. – Вып. 17. – С. 141-154.

Новиков В.В. (Энгельс)

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛАГРАНЖА В НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ – последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке [-1,1] с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$;

$$-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1,n} < 1$$

– нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания.

Для функции $f \in C[-1;1]$ обозначим через $L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-ой строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{k,n} : k = \overline{1,n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Один из основных вопросов теории интерполирования функций связан с нахождением условий на $f \in C[-1;1]$, которые при заданной матрице узлов $\mathfrak{M}$ обеспечивали бы сходимость к f соответствующих интерполяционных многочленов $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}$. В 1986 году А.А. Приваловым [1] был установлен критерий критерий равномерной сходимости на [-1,1] интерполяционного процесса $L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,x), n \in \mathbb{N}$ при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, использующий только интерполяционные данные.

В настоящей работе получен аналогичный дискретный критерий для произвольных $\alpha, \beta > -1$.

Пусть $f \in C[-1;1]$ $0 < \delta < \varepsilon < 1$ и $n \geq 3$. Положим

$$R_{n,\varepsilon}(f) = \max_{x_{p,n} \in [-1+\varepsilon, 1+\varepsilon]} \left| \sum \frac{f(x_{2k+1,n}) - 2f(x_{2k,n}) + f(x_{2k-1,n})}{2k-p} \right|,$$

где суммирование распространяется на те индексы k , для которых $x_{2k,n} \in [-1+\delta, 1+\delta]$ и $2k \neq p$. Обозначим

$$F(x) = (1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Теорема. *Для равномерной сходимости к $f \in C[-1;1]$ на отрезке $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon], 0 < \varepsilon < 1$, интерполяционного процесса $\{L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,\varepsilon}(F) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов А.А. *Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа* // Изв. вузов. Сер. матем. – 1986. – № 5. – С. 44-59.

Новиков С.Я. (Самара)
nvks@ssu.samara.ru

ГРАНИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ЛАКУНАРНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Пусть X – банахово симметричное пространство измеримых функций, заданных на отрезке $[0,1]$. Для произвольного БСП X имеют место непрерывные вложения $L^\infty \subset X \subset L^1$. Если БСП X является подмножеством другого БСП Y, то оператор вложения X в Y является непрерывным, и, следовательно, существует число $C = C(X,Y) > 0$ такое, что $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$. Говорят, что БСП X вложено в БСП Y абсолютно непрерывно, если $\lim\limits_{\tau\to 0}\sup\limits_{f\in B_X}\|f^*\chi_{[0,\tau]}\|_Y = 0$. Здесь B_X обозначает единичный шар пространства X, f^* – убывающую перестановку функции $|f|$, χ_E – характеристическую функцию множества E. Легко проверяется абсолютная непрерывность вложения $L^{p_1} \subset L^{p_2}$ при $1 \leq p_2 < p_1$ и $L^\infty \subset X$ для произвольного БСП X.

Лемма. *Пусть БСП X абсолютно непрерывно вложено в БСП Y, пусть $\Phi = \{f_k\}$ – система функций из БСП X. Если существует число $A = A(X,Y;\Phi)$ такое, что для любого полинома по системе Φ справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k f_k\right\|_X \leq A\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k f_k\right\|_Y, \quad N = 1,2,\ldots, \tag{1}$$

то существует число $A_1 = A_1(X,\Phi)$ такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k f_k\right\|_X \leq A_1\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k f_k\right\|_1, \quad N = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

то есть нормы пространств X и L_1 эквивалентны на подпространстве, порожденном системой Φ.

Определение. *Последовательность $\Phi = \{f_k\}$ называется S_X-системой, если выполняется (2), т.е. система Φ порождает подпространство, на котором эквивалентны нормы пространств X и L^1.*

Если Φ – ОНС, $X = L^p$, $p > 2$ и $Y = L^2$, то неравенство (1) является определением классической S_p-системы [1]. По лемме, понятия S_p-системы и S_{L_p}-системы совпадают.

Теорема 1. *Эквивалентны следующие утверждения: 1) БСП X содержит бесконечную S_X-систему; 2) функция* $\mathrm{l}(t) = \ln^{1/2}\left(t^{-1}\right) \in X''$; *3) имеет место вложение $X \supset G$, где G – замыкание пространства L^∞ в пространстве Орлича L_{M_2} с* $M_2(u) = \frac{\exp(u^2)-1}{\exp u - 1}$.

Система функций Радемахера являет собой пример бесконечной S_G-системы.

Найдены граничные БСП для различных систем вероятностно независимых функций: r-устойчивых распределений ($0 < r < 2$); функций $\left\{g_k^{(r)}(\omega)\right\}$ с общей перестановкой, равной $\omega^{-1/r}$, $r > 0$.

Теорема 2. *Система функций $\left\{g_k^{(2)}\right\}$ является S_X-системой в БСП $X \supset L^{2,\infty}$. Кроме того,*

$$\left\|\sum_k \alpha_k g_k^{(2)}\right\|_X \asymp \|\{\alpha_k\}\|_{\ell_N},$$

где ℓ_N – пространство Орлича последовательностей с $N(u) = u^2 \ln\left(1 + u^{-1}\right)$, $u > 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды* – М.: АФЦ, 1999. – 550 с.

Новикова Л.В. (Ростов-на-Дону)
znanie@jeo.ru

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЛИНЕЙНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y + f(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + g(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x,y) = \sum\limits_{i,j=2}^{\infty} f_{ij} x^i y^j$, $g(x,y) = \sum\limits_{i,j=2}^{\infty} g_{ij} x^i y^j$ – аналитические функции в некоторой окрестности нуля.

В общем случае фазовый портрет системы (1) может выглядеть достаточно сложно. Для его исследования применяется метод ускоренной сходимости Колмогорова-Арнольда-Мозера. Приводящаяся ниже теорема указывает на класс нелинейностей f, g, для которых фазовый портрет легко описывается.

Теорема. *Пусть* $f(x,y) = \operatorname{Re}\Phi(x+iy)$, $g(x,y) = \operatorname{Im}\Phi(x+iy)$, *где* $\Phi(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \Phi_k z^k$ *– аналитическая функция в окрестности нуля комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *так что система* (1) *принимает вид*

$$\frac{du}{dt} = i\omega u + \Phi(u), \quad u = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Тогда найдется аналитическая в окрестности нуля в $\mathbb{C}$ *функция* $h(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} h_k z^k$ *такая, что замена переменных* $u = z + h(z)$ *переводит уравнение* (2) *в некоторой окрестности нуля в* $\mathbb{C}$ *в линейное уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = i\omega z. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на тот факт, что линейная часть $z \mapsto i\omega z$ уравнения (2) имеет одно собственное значение $i\omega$, тогда как линейная часть $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{smallmatrix}\right)$ системы (1) имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений.

В связи с этим при приведении системы (1) к нормальной форме могут оставаться резонансные составляющие в нелинейной части, а у системы (2) – нет.

Таким образом, к системе (2) может быть применена теорема Пуанкаре о приведении нелинейной системы уравнений к линейной нормальной форме [1], что и доказывает сформулированную выше теорему.

Решением уравнения (3) является функция $z(t) = e^{i\omega t} z(0)$, значит фазовый портрет уравнения (3) представляет собой набор концентрических окружностей с центром в нуле пространства $\mathbb{C}$.

Следовательно, решениями уравнения (2) (и системы (1)) являются функции

$$u(t) = e^{i\omega t} z(0) + h\big(e^{i\omega t} z(0)\big)$$

и фазовый портрет уравнения (2) (и системы (1)) расслоен в окрестности нуля в $\mathbb{C}$ (в $\mathbb{R}_2$) на замкнутые кривые – систему циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* – М., Наука, 1978. – 304 с.

Нурсултанов Е.Д. (Казахстан, Астана)
er-nurs@yandex.ru

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ

В теории пространств дифференцируемых функций фундаментальную роль играет неравенство разных метрик С.М. Никольского. Из него вытекает следствие: пусть $1 < p < r \le \infty$, $f \in L_p[0,1], f \sim \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m x}, S_k(f) = \sum\limits_{m=-k}^{k} a_m e^{2\pi i m x}, k \in \mathbb{N}$, то

$$\sup_{k\ge 1} k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|S_k(f)\|_{L_q[0,1]} \le c\|f\|_{L_p[0,1]}. \tag{1}$$

Возникает вопрос: на сколько неравенство (1) характеризуют рост L_q-номы частичных сумм ряда Фурье функций из L_p.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q \le \infty$, $0 < r \le \infty$. *Если* $f \in L_{pr}[0,1], f \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$, *то*

$$\|S_n(f)\|_{L_q} = o(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})$$

и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|S_k(f)\|_{L_q[0,1]}\right)^r}{k}\right)^{1/r} \le c\|f\|_{L_{pr}[0,1]}$$

Теорема 2 *Пусть* $1 < p < q \le \infty$, $0 < r < \infty$. *Существует функция* $f \in L_{pr}[0,1], f \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$, *но*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|S_k(f)\|_{L_q[0,1]}\right)^{r-\varepsilon}}{k} = \infty$$

Для любого $\varepsilon > 0$

Получены аналоги этих теорем в многомерном, анизотропном случае.

Осиленкер Б.П. (Москва)
b_osilenker@mail.ru

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА[56]

Пусть μ – конечная положительная борелевская мера с $\mu'(x) > 0$ почти всюду и $c_k \in [-1,1] (k = 1, 2, \dots, P)$. Обозначим через $\{\widehat{B}_n(x)\} (n \in \mathbb{Z}_+)$ ортонормированную на $[-1,1]$ систему полиномов n-ой степени:

$$\int_{-1}^{1} \widehat{B}_m(x)\widehat{B}_n(x)d\mu(x) + \sum_{k=1}^{P}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i}\widehat{B}_m^{(i)}(c_k)\widehat{B}_n^{(i)}c_k = \delta_{m,n}(m, n \in \mathbb{Z}_+),$$

[56]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00420).

где $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера, постоянные $M_{k,i} \geq 0 (i = 0, 1, \ldots, N_k, k = 1, 2, \ldots P)$. Полиномы $\widehat{B}_n(x)$ являются обобщением полиномов, ортонормированных по мере μ, они играют важную роль в ряде задач математической физики, теории функций и функционального анализа. В приложениях они возникают, например, при изучении собственных колебаний нагруженных струн и плит. Пусть

$$N_k^* = \begin{cases} N_k + 1, & \textit{если } N_k - \textit{нечетно} \\ N_k + 2, & \textit{если } N_k - \textit{четно} \end{cases}$$

и

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^{P} (x - c_k)^{N_k^*}, \qquad N = \sum_{k=1}^{P} N_k^*.$$

Ортонормированные полиномы $\widehat{B}_n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$w_n(x)\widehat{B}_n(x) = \sum_{j=0}^{N} a_{n,j}\widehat{B}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N} a_{n-j,j}\widehat{B}_{n-j}(x) \quad (\widehat{B}_{-s}(x) = 0, s \in \mathbb{N}).$$

Обозначим

$$E := (-1, 1) \setminus \bigcup_{k=1}^{P} \{a_k\}$$

При определенных условиях на меру μ и полиномы $\widehat{B}_n(x)$ в каждой точке $x \in E$ и равномерно на каждом компактном множестве из E справедлива обобщенная формула следа

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+N-j,j} - a_{n-j,j})\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+N-j}(x) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+N,j} - a_{n,j})\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+N+j}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu'(x)} U_{N-1}(x) w'_N(x),$$

где $U_{N-1}(x)$ – полиномы Чебышева второго рода порядка $N - 1$.

Парамонов П.В. (Москва)
PETR@paramonov.msk.ru

О C^m-ПРОДОЛЖЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[57]

В [1, §5] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть B – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и $f \in C^1(\mathbb{R}^n|_{\overline{B}})$ – функция, субгармоническая в B. Тогда найдется $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, субгармоническая на всем $\mathbb{R}^n$, причем $F = f$ на $\overline{B}$ и $||\nabla F||_{\mathbb{R}^n} \leq C||\nabla f||_B$, где $C > 0$ зависит только от n и $||f||_E = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$.*

[57] Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-2040.2003.1).

При $m \geq 0$ через $C^m(E)$ обозначается пространство комплексно-значных m-гладких функций на открытом множестве E в $\mathbb{R}^n$ (см. подробнее [2]).

Пусть L – однородный эллиптический дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ порядка $p \geq 1$ в частных производных с постоянными *комплексными* коэффициентами. Через $L_+(E)$ обозначим класс (обобщенных) функций u на открытом множестве E с условием $Lu \geq 0$ в E. Так, $\Delta_+(E)$ – класс субгармонических функций на E, если Δ – лапласиан ($p = 2$).

Фиксируем L и $m \geq 0$. В [2] сформулирована следующая

Задача. *Каковы условия на компакт X в $\mathbb{R}^n$, необходимые и достаточные для того, чтобы для всякой функции $f \in L_+(X^o) \cap C^m(\mathbb{R}^n)|_X$ нашлась $F \in L_+(\mathbb{R}^n) \cap C^m(\mathbb{R}^n)$ такая, что $F|_X = f$. В случаях, когда указанные продолжения существуют, имеет смысл дополнительный вопрос о наличии F с подходящими оценками.*

К настоящему времени получены следующие продвижения в указанной задаче:

(а) М.С. Мельников и автор установили, что аналог теоремы 1 (случай $L = \Delta$, $X = \overline{B}$, $n \geq 2$) верен при $m \in (1, 3)$, что не так для $m \in [0, 1)$ и $m \geq 3$. При $n = 2$, $L = \Delta$, $m \in [1, 3)$ аналог теоремы 1 остается справедливым для (замкнутых) жордановых областей X с Ляпуновской (грубо говоря, C^k-гладкой, $k > 1$) границей, но перестает быть верной для областей с C^1-гладкой границей.

(б) О.А. Зорина (ученица автора) установила аналог теоремы 1 для случая, когда L – оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}$ ($n = 2$, $p = 1$), $m = 0$ (ищется непрерывное продолжение) и X – замкнутый круг.

В случаях возможности продолжения получены оценки $C^{m-p+1}(\mathbb{R}^n)$-норм частных производных ($p - 1$)-го порядка у продолжений F через C^m-норму функции f на X.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вердера Дж., Мельников М.С., Парамонов П.В. *C^1-аппроксимация и продолжение субгармонических функций*// Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №. 4. – С. 37-58.

2. Парамонов П.В. *О C^m-продолжении решений однородных эллиптических неравенств* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 149-150.

Пелешенко Б.И. (Украина, Днепропетровск)
dsaupelesh@mail.ru

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Обозначим через Φ множество таких выпуклых и вогнутых, положительных, возрастающих на $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2t) =$

$O(\varphi(t))$, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +0$, и $\varphi(t) \to \infty$, если $t \to \infty$. Будем предполагать, что множеству Φ принадлежит также функция $\varphi(t) = \operatorname{sign} t$. Через α_φ, β_φ обозначаются, соответственно, нижний и верхний коэффициенты растяжения функции $\varphi(t)$ из множества Φ. Пусть $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка модуля измеримой по Лебегу на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественной функции $f(x)$. Далее будем предполагать, что функции $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t) \in \Phi$, $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает на $(0,\infty)$, область значений $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ совпадает с областью значений $\psi_0(t)/\psi_1(t)$, и $m(t)$ - измеримое положительное решение уравнения $\varphi_0(m(t))/\varphi_1(m(t)) = \psi_0(t)/\psi_1(t)$. Квазилинейный оператор T называется слабого типа $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \psi_0,\ \psi_1)$, если найдется такое $C > 0$, что для всех $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)+\Lambda_{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$(Tf)^*(t) \le C\left\{(\psi_0(t))^{-1}\int\limits_0^{m(t)} f^*(u)d\varphi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1}\int\limits_{m(t)}^{\infty} f^*(u)d\varphi_1(u)\right\}$$

в случае $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$, и для всех $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n) + L^{\infty 1}(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ выполняется неравенство

$$(Tf)^*(t) \le C\left\{(\psi_0(t))^{-1}\int\limits_0^{m(t)} f^*(u)d\varphi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1}\int\limits_{m(t)}^{\infty} f^*(u)u^{-1}du\right\},$$

когда $\varphi_1(t) = \operatorname{sign} t$, и $\sup\limits_{0<u<1} M_{\varphi_0}(u)(1-\ln u) \le 1$.

Операторы слабого типа $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \psi_0,\ \psi_1)$ являются аналогами операторов, изученных в работах А.П. Кальдерона, К. Бенетта и К. Рудника, и совпадают с операторами, исследованными С.Г. Крейном и Е.М. Семеновым в случае, когда φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 – квазивогнутые функции, а $\varphi(t) = \operatorname{sign} t$. Полагаем $\phi_1(t) = 1 - \ln t$, $\phi_{k+1}(t) = \phi_1(\phi_k(t))$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $\Phi_k(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)\cdots\phi_k(t)$.

В работе доказаны теоремы интерполяции таких операторов в пространствах Лоренца $\Lambda_{\varphi,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, определяемых квазинормой $\left\{\int\limits_0^1 [f^*(t)]^\alpha d\varphi(t)\right\}^{1/\alpha}$.

Теорема. *Пусть $\alpha > 1$, функции φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 из множества Φ такие, что $\alpha_{\varphi_1} > \beta_{\varphi_0}$, $\varphi_1(t) \neq \operatorname{sign} t$; функции $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ и $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ возрастают, а области их значений совпадают. Пусть $h(t)$ - убывающая, положительная, медленно меняющаяся на $(0,1]$ функция, которая удовлетворяет условию $\int\limits_0^1 [th(t)]^{-1}dt = \infty$, и k_0 - такое наименьшее из натуральных чисел, для каждого из которых* *при некотором* $\varepsilon \in (0,1]$ $\lim\limits_{t\to+0}\left([h(t)]^{-1}\phi^{\varepsilon}_{k_0}(t)\Phi_{k_0-1}(t)\right) > 0$. *Если квазилинейный оператор* T *– слабого типа* $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \psi_0,\ \psi_1)$, *то существует такое* $C > 0$, *что для всякой функции* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,\alpha}([0,1]^n)$ $(d\varphi(t) = t^{\alpha-1}[\varphi'(t)]^{\alpha}[h(t)]^{-1}\Phi^{\alpha}_{k_0}(t)dt)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^1 (Tf)^*(m^{-1}(t))\psi_0(m^{-1}(t))\frac{\varphi_0^{\alpha}(t)}{th(t)}dt \le C^{\alpha}\int\limits_0^1 (f^*(t))^{\alpha}t^{\alpha-1}[\varphi_0'(t)]^{\alpha}\frac{\Phi^{\alpha}_{k_0}(t)}{h(t)}dt.$$

Пелешенко Б.И., Тиман М.Ф. (Украина, Днепропетровск)
dsaupelesh@mail.ru, mtiman2002@yahoo.com

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Рассматриваются известные пространства Лоренца $L_{p,q}$ $(1 \le p,q \le \infty)$ 2π-периодических измеримых функций, для которых $\int\limits_0^{2\pi} x^{\frac{p}{q}-1}[f^*(x)]^q dx < \infty$, где $f^*(x)$ – равноизмеримая с $f(x)$ невозрастающая функция. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_n\}$ *– произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность действительных чисел. Пусть также заданы три функции:* $f_1(x)$ *– четная функция с коэффициентами Фурье* $\{a_n\}$; $f_2(x)$ *– нечетная функция с коэффициентами Фурье* $\{b_n\}$, *и нечетная функция* $f_3(x)$ *с коэффициентами Фурье* $\{c_n\}$, *где*

$a_n = \left\{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{-\frac{q}{p'}-1}(\nu-n+1)(\alpha_\nu^q-\alpha_{\nu+1}^q)\right\}^{\frac{1}{q}}$, $p' = \frac{p}{1-p}$, $1 < p < q < \infty$;

$b_n = \left\{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}[(\nu+1)\ln(n+1)]^{-1}(\nu-n+1)(\alpha_\nu^q-\alpha_{\nu+1}^q)\right\}^{\frac{1}{q}}$, $1 < p < q < \infty$;

$c_n = \sum\limits_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{-1}(\nu-n+1)(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})$.

Тогда:

1) $f_1(x) \in L_{p,q}$ *и для вложения ее в класс* $L_{p,p}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\ln^{\frac{p}{q}}(n+1)]^{-1}\alpha_n^p < \infty; \tag{1}$$

2) $f_2(x) \in L_{1,q}$ *и для вложения ее в класс* $L_{1,1}$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $p=1$, $1 < q < \infty$ *выполнялось условие* (1);

3) $f_3(x) \in L_{1,\infty}$ *и для вложения ее в класс* $L_{1,1}$ *необходимо и достаточно выполнение условия* (1) *при* $p=1$, $q=\infty$.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{b_n\} \in l_2$, *и при некотором* $q\ (1 \le q < 2)$

$$S(b_n; q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} b_n^2 \right\}^{\frac{q}{2}} [\ln(n+1)]^{-\frac{q}{2}} < \infty. \tag{2}$$

Тогда:

1) для любой ортонормированной на отрезке $[a, b]$ *системы* $\{\varphi_n(x)\}$, *которая при всяком* k *и любом наборе чисел* $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_{2,q}} \le A[\ln(n+1)]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_{2,2}}, \tag{3}$$

найдется функция $f(x) \in L_{2,q}[a, b]$, *для которой числа* $\{b_n\}$ *будут ее коэффициентами Фурье по системе* $\{\varphi_n(x)\}$ *и*

$$\|f(x)\|_{L_{2,q}}^q \le A_q S(b_n; q); \tag{4}$$

2) если для любой функции $f(x) \in L_{2,q}[a, b]$ *выполняется неравенство* (4), *то система* $\{\varphi_n(x)\}$ *удовлетворяет условию* (3).

Для тригонометрической системы неравенство (3) приведено в [1]. Для случая пространств $L_{p,p}$ вопросы аналогичного характера рассмотрены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Peleshenko B.I. *On the approximation of periodic functions from Lorentz spaces and imbeddinng theorem* // УМК-2001. Теоія наближень та гармонічний аналіз. Тези доповідей. – Київ, 2001. – С. 43.
2. Timan M.F. *Orthonormal systems satisfying an inequality of S.M. Nikol'skii* // Analysis Mathematica. – 1978. – No 4. – P. 75-82.

Петрак Л.В. (Екатеринбург)
petrak@imm.uran.ru

АЛГОРИТМ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ, УЧИТЫВАЮЩИЙ СПЕЦИФИКУ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ[58]

Пусть на множестве $X = \{x_i = (x_{ji})_{j=1}^{l}\}_{i=1}^{N}$ заданы функции $f(x)$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n}$, $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{m}$, $\mathbb{R}_{n,m}^{+} = \mathbb{R}_{n,m}^{+}(x)$ – множество рациональных

[58]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00782).

дробей $R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i\varphi_i(x)$, $Q(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} q_j\psi_j(x) > 0$ для $x \in X$, p_i $(i = \overline{1,n})$, q_j $(j = \overline{1,m})$ – действительные числа, $\Delta(R) = \Delta(P,Q) = \max\{|f(x) - R(x)| : \ x \in X\}$. Рассматривается численное решение задачи

$$\inf\{\Delta(R) : \ R \in \mathbb{R}^{+}_{n,m}\}. \qquad (1)$$

Среди алгоритмов решения этой задачи наиболее универсальным и надежным является известный алгоритм Чини-Лоэба, сводящий решение нелинейной задачи (1) к последовательному решению задач следующего вида:

$$\min_{P,Q}\max_{x\in X}\Big\{\Big[|f(x)Q(x)-P(x)|-\Delta_k Q(x)\Big]/Q_k(x)\Big\}, \qquad |q_j| \le 1, \ j = 1,\ldots,m,$$

где $\Delta_k = \Delta(P_k,Q_k)$, P_k/Q_k – дробь, полученная на k-м шаге. Начальная дробь $R_0 \in \mathbb{R}^{+}_{n,m}$ задается, вообще говоря, произвольно. В [1] доказано, что при определенных условиях на функции ψ_j, $j = \overline{1,m}$, в алгоритме можно ограничиться односторонними ограничениями на коэффициенты знаменателя, что позволяет уменьшить сложность решаемых на каждом шаге задач. Для чебышевских задач приближения специфическим является также наличие симметричных ограничений решаемой задачи. В.Л. Александренко построил алгоритм для полиномиальных приближений, использующий это свойство. Предлагается обобщение подхода В.Л. Александренко на случай рациональной аппроксимации. Основным элементом алгоритма является построение начального базисного множества в соответствующей задаче линейного программирования. Обозначим $\widetilde{Q}(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \psi_j(x)$, $\varphi_{ij} = \varphi_j(x_i)$, $A_{\pm i} = (\pm\varphi_{i1},\ldots,\pm\varphi_{in},(\Delta_k \mp f_i)\psi_{i1},\ldots,(\Delta_k \mp f_i)\psi_{im},\widetilde{Q}_i)^T$, $Y_i = E_{n+i}$, $\overline{\nu}_j = \widetilde{Q}_j + \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i|\alpha_{ij}|$, $d_j^{\Delta} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\widetilde{Q}_i\alpha_{ij} - f_j\widetilde{Q}_j$, где α_{ij} – коэффициенты в разложении вектора $A_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}A_i + \sum\limits_{i=n+1}^{n+m} \alpha_{ij}Y_{i-n}$. Пусть $\widetilde{Q}(x) > 0$ $\forall x \in X$, точки $x_i(i = \overline{1,n}) \in X$ таковы, что $det[\varphi_{ij}] \neq 0$, $i,j = \overline{1,n}$. Построим множество векторов S так: включим вектора Y_l, $l = \overline{1,m}$, если найдена точка $x_j \in X$, $x_j \neq x_i$, $i = \overline{1,n}$, такая, что $|d_j^{\Delta}| < \Delta_k\overline{\nu}_j$, в противном случае включим Y_l при $\alpha_{n+l,\pm j} \le 0$ и $-Y_l$ при $\alpha_{n+l,\pm j} > 0$, $l = \overline{1,m}$; добавим, если $d_j^{\Delta} < 0$, вектор A_j и вектора A_i при $\alpha_{ij} \le 0$, A_{-i} при $\alpha_{ij} > 0$, $i = \overline{1,n}$, а если $d_j^{\Delta} \ge 0$ – вектор A_{-j} и вектора A_i при $\alpha_{ij} \ge 0$, A_{-i} при $\alpha_{ij} < 0$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема. *Множество S является начальным базисным множеством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрак Л.В. *Об одном методе решения задачи наилучшей рациональной аппроксимации* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. – 1978. – Т. 18(4). – С. 860-869.

Платонов С.С. (Петрозаводск)
platonov@psu.karelia.ru

ОБОБЩЕННЫЕ СДВИГИ БЕССЕЛЯ И НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Непрерывное вейвлет-преобразование строится при помощи операторов сдвигов и сжатий на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (см. [1]). В докладе описывается аналог непрерывного вейвлет-преобразования на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, когда вместо сдвигов используются обобщенные сдвиги Бесселя (см. [2], [3]).

Пусть $\mathcal{B} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{d}{dx}$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, – дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(x)$ функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\mathcal{B}y + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Пусть $d\mu(x) = x^{2\alpha+1}\,dx$ – мера на $\mathbb{R}_+$, $L_{2,\alpha} = L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\langle f, g\rangle = \int f(x)\bar{g}(x)\,d\mu(x)$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}$ (все интегралы берутся по множеству $\mathbb{R}_+$, если не указаны пределы интегрирования). Преобразование Бесселя $f(x) \mapsto \widehat{f}(\omega)$ определяется формулой $\widehat{f}(\omega) := \int f(x) j_\alpha(\omega x)\,d\mu(x)$. Обобщенный сдвиг Бесселя $T^y f(x)$, $(x, y \in \mathbb{R}_+)$ задается формулой

$$(T^y f)(x) = A_\alpha \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi})\,(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi,$$

где $A_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}$. Оператор сжатия D^a, $a > 0$, определим обычным образом: $(D^a f)(x) = f(ax)$.

Пусть $\psi(x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\psi \in L_{2,\alpha}$;

2) $C_\psi := (2^\alpha\Gamma(\alpha+1))^{-2}\int \omega^{-1}|\widehat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega < \infty$.

Образуем из ψ двухпараметрическое семейство функций $\psi^{a,b}(x) := a^{-\alpha-1}T^b(D^{1/a}\psi)$. Непрерывное вейвлет-преобразование определим формулой

$$(W_\psi f)(a, b) := \langle f, \psi^{a,b}\rangle, \quad a > 0, b \geq 0.$$

Теорема (формула Планшереля). *Для любых* $f, g \in L_{2,\alpha}$

$$\int\int (W_\psi f)(a, b)\,\overline{W_\psi g}(a, b)\,a^{-2\alpha-3}b^{2\alpha+1}\,da\,db = C_\psi\langle f, g\rangle.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам* – Ижевск: Изд-во РХД, 2001. – 464 с.

2. Левитан Б.М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*// Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102-143.

3. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи* – М.: Наука, 1997. – 190 с.

Плотников М.Г. (Вологда)
mgplotnikov@mail.ru

О ДВУМЕРНЫХ РЯДАХ ХААРА, СХОДЯЩИХСЯ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ ЧАСТИЧНЫХ СУММ[59]

В работе изучаются вопросы единственности для рядов Хаара. В 1964 г. Ф.Г. Арутюнян и А.А. Талалян (см. [1]) доказали, что если ряд Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x) = \bar{o}_x(n)$ и всюду, кроме точек некоторого счетного множества, сходится по некоторой (зависящей от точки) подпоследовательности к суммируемой функции $f(x)$, то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$. Позже В.А. Скворцов обобщил данный результат на функции $f(x)$, интегрируемые в смысле узкого интеграла Данжуа (см. [2]). На невозможность в полной мере перенести данные результаты на многомерный случай указывает построенный в 1980 г. В.А. Скворцовым пример двумерного ряда Хаара (см. [3]), не все коэффициенты которого нулевые, но всюду на $[0,1]$ сходящегося к нулю по некоторой подпоследовательности прямоугольных частичных сумм $S_{n_k(x,y),m_k(x,y)}(x,y)$. Автором было построено семейство двумерных обобщенных интегралов, названных $(P_R(n_k))$- интегралами, и доказан следующий результат (где Q_d и I_d – множества двоично-рациональных и двоично-иррациональных точек, а $[a]$ – целая часть числа a).

Теорема 1. *Пусть двумерный ряд Хаара удовлетворяет следующим условиям:*

1) если $x, y \in I_d$, то существует подпоследовательность $n_k = n_k(x,y)$, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x,y) = S(x,y)$, где значение $S(x,y)$ конечно;

2) если $x \in Q_d$, $y \in I_d$, то для любого $i = 0,1$ существует подпоследовательность $n_k = n_k(i,x,y)$, что при $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + i$ выполняется условие $\sum\limits_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x,y) \to 0$ при $k \to \infty$;

3) если $x \in I_d$, $y \in Q_d$, то для любого $j = 0,1$ существует подпоследовательность $n_k = n_k(j,x,y)$, что при $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + j$

[59]Работа поддержана РФФИ (проект 02-01-00428) и программой поддержки ведущих научных школ (проект 1657.2003.1).

выполняется условие $\sum_{s=1}^{2^{n_k}} a_{s,m_k}\chi_{s,m_k}(x,y) \to 0$ *при* $k \to \infty$;

4) если $x, y \in Q_d$, *то для любых* $i, j = 0, 1$ *существует подпоследовательность* $n_k = n_k(i, j, x, y)$, *что при* $l_k = 2^{n_k - 1} + [x2^{n_k-1}] + i$, $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + j$ *выполняется условие* $a_{l_k,m_k}\chi_{l_k,m_k}(x,y) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Тогда функция $S(x,y)$ *является* $(P_R(n_k))$*- интегрируемой на* $[0,1]^2$ *и данный ряд будет рядом Фурье этой функции относительно построенного интеграла.*

Заметим, что условия 2)-4) вытекают из сходимости некоторой специальной, зависящей от точки, подпоследовательности частичных сумм. С этой точки зрения теорема 1 позволяет получить некоторые двумерные аналоги результатов работ [1, 2] (выше отмечалось, что «полные» аналоги этих результатов не могут быть получены).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Ф.Г., Талалян А.А. *О единственности рядов по системам Хаара и Уолша*// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28(6). – С. 1391-1408.

2. Скворцов В.А. *Вопросы единственности разложения функций в ряды по системам Хаара и Уолша и обобщенные интегралы: Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук. 01.01.01.* – М., 1982. – 214 с.

3. Скворцов В.А. *Об одном примере двойного ряда Хаара* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28(3). – С. 343-353.

Погодина А.Ю. (Казань)
enasyrova@yandex.ru

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА ЗАМКНУТОЙ НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ[60]

Рассмотрим множество $\mathcal{R}$ всевозможных графиков $\widetilde{\Gamma} = grY$ вещественных непрерывных функций Y на $[0,1]$, таких что $Y(0) = Y(1) = 0$. Будем предполагать, что кривые $\widetilde{\Gamma}^\varepsilon = \{x + iy : y = Y(x), x \in I^\varepsilon = [\varepsilon, 1]\}$ спрямляемы при любом $\varepsilon \in (0,1)$, но предел их длин при $\varepsilon \to 0$ может равняться бесконечности. Интеграл типа Коши по кривой $\widetilde{\Gamma}$ понимаем как несобственный:

$$C(\widetilde{\Gamma}, f; z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\Gamma}^\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (1)$$

Заданную на $\widetilde{\Gamma} \in \mathcal{R}$ функцию $f(z)$ отнесем к классу $h_\nu(\widetilde{\Gamma})$, если $f(0) = f(1) = 0$, $f(x + iY(x)) = f^*(x) \in H_\nu(I)$ для некоторого $\nu \in (0,1]$ и $f^* \in H_1(I^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Здесь $H_\nu(A)$, $\nu \in (0,1]$ – класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на множестве A.

[60]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00088).

Пусть кривая $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \bigcup I$ разбивает комплексную плоскость на две области D^+ и $D^- \ni \infty$. Рассмотрим краевую задачу Римана [2] о нахождении функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитических в D^+ и D^- и непрерывных в $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$, удовлетворяющих на Γ соотношению $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$, $g(t)$, $G(t) \in h_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0,1)$, $t \in \Gamma$. Будем говорить, что задача Римана решается в классе $H_\mu(\Gamma)$, если граничные значения на Γ функций $\Phi^\pm$ принадлежат этому классу.

Теорема. *Пусть* $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \bigcup I$, $\widetilde{\Gamma} = g\tau Y \in \mathcal{R}$, g, $G \in h_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu < 1$, $G \neq 0$ *и выполняются условия* $\mu = \min\{\nu, 1 - 2/p\}$, $\mu > \alpha_H(\Gamma) - 1$, *где* $\alpha_H(\Gamma)$ *– метрическая размерность кривой* Γ. *Тогда если для непрерывно дифференцируемой на отрезке* I *функции* $Y_0(x)$ *и некоторого числа* $p > 2$ *выполняется условие (см. теорему 2 из [1], с. 20)* $\int\limits_0^1 |df^*(x)/dx|^p |Y_1(x) - Y_0(x)| dx < \infty$, *где* $f^*(x) = f(x + iY(x)) = \ln[(x+iy)^{-\kappa} G(x+iy)]$, $\kappa = \mathrm{ind} G$, *то в классе* $H_\mu(\Gamma)$ *краевая задача Римана имеет классическую картину разрешимости:*

i) При $\kappa \geq 0$ *решение имеет вид* $\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\kappa(z)]$, *где*

$$\Psi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^\varepsilon} (g(\tau)/X^+(\tau)) d\log(\tau - z),$$

$P_\kappa(z)$ *– полином степени* κ *с произвольными комплексными коэффициентами.*

ii) При $\kappa = -1$ *неоднородная задача Римана имеет единственное решение.*

iii) При $\kappa < -1$ *для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение условий* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma^\varepsilon} (g(\tau)/X^+(\tau))\tau^{k-1} d\tau = 0$, $k = 1, \ldots, -(\kappa + 1)$. *При выполнении этих условий задача будет иметь единственное решение вида* $\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац Б.А., Погодина А.Ю. *О граничных значениях интеграла типа Коши на негладкой спрямляемой кривой*// Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 15-21.

2. Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 68-80.

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
anpokr@petrodvorets.spb.ru

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим приближение гладкой функции $y(x)$, $x \in [0,1]$, $y \in R^m$ функциями $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Такие задачи возникают, например, в теории скользящих режимов [1]. Вычитая $y(x)$ из $y_n(x)$, сводим задачу к приближению отрезка $[0,1]$ оси x функциями $y_n(x)$.

Так как функции $y_n(x)$ однозначны, мера Лебега $\lambda(dx)$ порождает меры $\mu_n(dy)$, носители которых – проекции функций $y_n(x)$ в R^m. Отрезок $[0,1]$ оси x ($y(x) = 0$) соответствует единичной атомной мере $\mu_0(dy)$ в R^m. Таким образом, вопрос о сходимости функций $y_n(x)$ сводится к сходимости вероятностных мер $\mu_n(dy)$.

В качестве примера рассмотрим случай [2], где $m = 1$, и положим, что $y'_n(x)$ имеет разрывы в точках x_i, $i = 1, 2, .., n$; $x_0 = 0$, $x_n = 1$, причем для $x_{i-1} < x < x_i$ имеем $y'_n(x) = -1$ при нечетных i и $y'_n(x) = +1$ при четных i . Интервалы $x_i - x_{i-1} = T_i/S_n$, где $S_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$, а числа $T_i \leq 1$ находятся [2] из известного рекуррентного уравнения: $T_{i+1} = rT_i(1 - T_i)$, где r – числовой параметр.

Вариант 1. *При* $1<r<3$ *рекуррентное уравнение имеет решение* $T_i = T_1 = 1 - 1/r$. *Если* $y_n(0) = 1/2n$, *то меры* $\mu_n(dy)$ *– равномерные распределения на* $(-1/2n,\ 1/2n)$; $\mu_n(dy)$ *слабо сходятся к* $\mu_0(dy)$.

Вариант 2. *При* $3 < r < 3{,}3$ *рекуррентное уравнение имеет устойчивое периодическое решение* T_1, T_2; $c = (T_2 - T_1)/(T_1 + T_2)$. *Последовательность* $y_n(x)$ *приближает функцию* $y^0(x) = cx$. *Вычитая* $y^0(x)$ *из* $y_n(x)$, *получаем новые функции* $y_n(x)$ *с теми же интервалами линейности, но с* $y'_n(x) = -1 - c$ *на нечетных интервалах и с* $y'_n(x) = 1 - c$ *на четных интервалах. Если* $y_n(0) = \beta_n = (1 - c^2)/4n$, *то меры* $\mu_n(dy)$ *– равномерные распределения на* $(-\beta_n, \beta_n)$, *которые слабо сходятся к* $\mu_0(dy)$.

Вариант 3. *При* $r > 3{,}57$ *последовательность* T_i *хаотическая, и вопрос о сходимости функций* $y_n(x)$ *требует отдельного исследования.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Уткин В.И. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.* – М.: Наука, 1981. – 368 с.

2. Скляров О.П. *Элементы теории ритма речи на основе физической феноменологии его нарушений: Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук. 01.04.02.* – Санкт-Петербург, 1999. – 324 с.

Полякова Л.Н. (Санкт-Петербург)
lyudmila.polyakova@pobox.spbu.ru

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[61]

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое выпуклое множество. Выберем произвольное неотрицательное ε. Рассмотрим выпуклое множество

$$X_\varepsilon = X + \varepsilon S_1(0_n), \tag{1}$$

где $S_1(0_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в нулевой точке, $||\cdot||$ – евклидова норма, $A + B$ – алгебраическая сумма двух выпуклых множеств A и B.

[61] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00668)

Отметим, что при любом положительном ε множество X_ε есть замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью.

Теорема 1. *При фиксированном положительном ε в каждой граничной точке $x \in \mathrm{bd}\,(X_\varepsilon)$ нормальный конус к множеству X_ε в этой точке состоит из единственного луча.*

Таким образом, в каждой граничной точке x множества X_ε существует единственная опорная гиперплоскость, которую назовем касательной гиперплоскостью в точке x к множеству X_ε. Отметим также тот факт, что данное свойство не будет выполняться, если при задании единичного шара будет использована негладкая норма, например, $||x|| = \max |x_i|$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^n$ – произвольные замкнутые множества,

$$\rho(A, B) = \sup\{\sup_{a \in A} \min_{b \in B} ||a - b||, \sup_{b \in B} \min_{a \in A} ||a - b||\}$$

– расстояние между множествами A и B в метрике Хаусдорфа. Так как справедливо включение $X \subset X_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, то, очевидно,

$$\rho(X_\varepsilon, X) = \max_{x_\varepsilon \in X_\varepsilon} \min_{x \in X} ||x_\varepsilon - x||,$$

то есть расстояние между множествами X_ε и X в метрике Хаусдорфа равно уклонению множества X_ε от множества X.

Теорема 2. *При фиксированном положительном ε справедливо равенство*

$$\rho(X_\varepsilon, X) = \varepsilon.$$

Рассмотрим семейство множеств $\{X_\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, образованных по правилу (1).

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \rho(X_\varepsilon, X) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ* – М.: Мир, 1973. – 472 с.

Потапов М.К. (Москва)
mkpotapov@mail.ru

О ВЗАИМОСВЯЗИ K-ФУНКЦИОНАЛА ПЕТРЕ И НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[62]

Скажем, что функция $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, если при $1 \le p < \infty$ f измерима на $[-1, 1]$, $\alpha > -\frac{1}{p}$, $\beta > -\frac{1}{p}$ и

$$||f||_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

[62]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, (проект № 03.01.00080) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1657.2003.1)

а для $p = \infty$ f непрерывна на $[-1,1]$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \max_{-1\leq x\leq 1} |f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}|$. Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции f при помощи алгебраических многочленов P_{n-1} степени не выше, чем $n-1$ в метрике $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{p,\alpha,\beta}$.

Введем оператор дифференцирования

$$D_{u,\nu,\mu} = (1-u^2)\frac{d^2}{du^2} + (\mu - \nu - (\mu+\nu+2)u)\frac{d}{du}.$$

Скажем, что функция $g \in AD(p,\alpha,\beta,\nu,\mu)$, если $g \in L_{p,\alpha,\beta}$ и имеет абсолютно непрерывную производную на каждом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ и $D_{u,\nu,\mu}g(u) \in L_{p,\alpha,\beta}$. Пусть

$$K(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta} := \inf_{g\in AD(p,\alpha,\beta,\nu,\mu)} (\|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^2\|D_{u,\nu,\mu}g(u)\|_{p,\alpha,\beta})$$

– K-функционал Петре.

Теорема. *Пусть даны числа s, r, p и α такие, что s и r – целые неотрицательные числа, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{s}{2} - \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{s}{2}$ при $p = 1$, $\frac{s}{2} - \frac{1}{2p} < \alpha \leq \frac{s}{2} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}$ при $1 < p < \infty$, $\frac{s}{2} \leq \alpha < \frac{s}{2} + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$. Пусть функция $f \in L_{p,\alpha+r,\alpha}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha+r,\alpha} \leq K(f,\frac{1}{n}, s+2r, s)_{p,\alpha+r,\beta} \leq \frac{C_2}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu(f)_{p,\alpha+r,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n.

Примак А.В. (Украина, Киев)
prymak@univ.kiev.ua

ПОТОЧЕЧНОЕ 3-ВЫПУКЛОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ С ЧЕБЫШЕВСКИМИ УЗЛАМИ

Три-выпуклое равномерное приближение сплайнами с фиксированными узлами изучалось в работах [1]-[3]. В даной работе мы обобщаем результат работы [2] для сплайнов с чебышевскими узлами, получая поточечную оценку на приближение в терминах третьего модуля непрерывности функции. А именно, доказана следующая

Теорема. *Для каждой 3-выпуклой на $[-1,1]$ функции f и натурального $n \geq 2$ существует 3-выпуклый на $[-1,1]$ квадратический сплайн с чебышевскими узлами $-1 = x_n < \cdots < x_1 < x_0 = 1$ такой, что*

$$|F(x) - S(x)| \leq c\omega_3(F;\rho_n(x)), \quad x \in [-1,1],$$

где $\rho_n(x) := n^{-2} + n^{-1}\sqrt{1-x^2}$, *и* c – *некоторая абсоютная постоянная.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Konovalov V.N. and Leviatan D., *Estimates on the approximation of 3-monotone function by 3-monotone quadratic splines* // East J. Approx. – 2001. – V. 7. – P. 333-349.

2. Prymak A.V., *Three-convex approximation by quadratic splines with arbitrary fixed knots* // East J. Approx. – 2002. – V. 8. – P. 185-196.

3. Leviatan D. and Prymak A.V., *On 3-convex approximation by piecewise polynomials* // J. Approx. Theory, submitted.

Прошкина А.В. (Москва)
proschkina_a@mail.ru

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[63]

Пусть $m,\ k > 0$, $L^p = \mathrm{L^p(R)}$, $\|\cdot\|_p$ – норма в пространстве L^p, $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, $z = x + iy$, $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f.

Рассматриваются целые функции вида

$$F(z) = \int\limits_R e^{-izt} \cdot e^{-m|t|\ln|kt|}\Big(|t|+1\Big)^{1/(2p)} f(t)dt; \qquad (1)$$

$$G(z) = \int\limits_R e^{-izt} \cdot e^{-\frac{m}{2k}\exp(2|t|/m-1)-\frac{|t|}{pm}} \cdot f(t)dt. \qquad (2)$$

Нас интересуют следующие вопросы:

1) если $f \in L^p$, то какими интегральными свойствами во всей плоскости обладают функции (1) и (2)?

2) какими интегральными свойствами должна обладать целая функция, чтобы иметь представление (1) или (2) с $f \in L^p$?

Ответ дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in L^p$, $p \in [1,2]$. *Тогда*

$$\int\limits_R e^{-\frac{mp}{k}\exp(|y|/m-1)} \cdot \|F_y\|_q^p dy < \infty, \qquad (3)$$

где $\|F_y\|_q$ – *норма функции* (1) *как функции переменной* x (y – *фиксировано).*

[63]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00698.)

Теорема 2. *Пусть $2 \le p < \infty$, и пусть для некоторой целой функции $F(z)$ выполнено условие* (3). *Тогда*

$$\hat{F}(t) \cdot \exp\Big(m|t|\ln|kt|\Big) \times (|t|+1)^{-\frac{1}{2p}} \in L^p,$$

и, следовательно, функция $F(z)$ представима в виде (1) *с $f \in L^p$.*

Теорема 3. *Пусть $f(t) \in L^p$, $p \in [1,2]$. Тогда*

$$\int\limits_R \exp\Big(-\frac{mp}{2} \cdot |y|\ln|ky|\Big)\|G_y\|_q^p dy < \infty, \tag{4}$$

где $\|G_y\|_q$ – норма функции (2) *как функции переменной x (y – фиксировано).*

Теорема 4. *Пусть $2 \le p < \infty$, и пусть для некоторой целой функции $G(z)$ выполнено условие* (4). *Тогда*

$$\hat{G}(t) \cdot \exp\Big(\frac{m}{2k}\exp(2|t|/m-1) + \frac{|t|}{pm}\Big) \in L^p,$$

и, следовательно, функция $G(z)$ представима в виде (2) *с $f \in L^p$.*

При $p = 2$ теоремы 1-4 дают описание классов целых функций (1), (2) с $f(t) \in L^2$ (аналоги теоремы Пэли-Винера, см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Proshkina A.V. *Paley-Wiener's type theorems for Fourier transforms of rapidly decreasing functions* // Integr. Transf. and Spec. Functions. – 2002. – 13. – P. 39-48.

Рамазанов А.К. (Калуга)
akramazan@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[64]

Введем необходимые обозначения.

$A_kL_2(D,\alpha)$ – пространство k-аналитических в D функций f с нормой, определяемой равенством

$$\|f\|_2 = \left\{\iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f(z)|^2\, dxdy\right\}^{1/2}, \ \alpha > -1;$$

$$A_kL_2^0(D,\alpha) = \{f \in A_kL_2(D,\alpha) :$$
$$f(z) = (1-|z|^2)^{-\alpha}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}((1-z\bar{z})^{k-1+\alpha}F(z))\},$$

[64]Работа поддержана РФФИ (проект 02-01-00913), РФФИ-БРФФИ (проект 02-01-81031) и грантом государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1892.2003.1).

где F голоморфна в D.

Теорема 1. *Если* $\varphi \in A_k L_2^0(D,\alpha)$, *то*

$$|\varphi(z)|^2 \le \frac{2k-1+\alpha}{\pi}\frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\|\varphi\|_2^2, \quad z \in D.$$

Теорема 2. *Если* $f \in A_m L_2(D,\alpha)$, *то*

$$|f(z)|^2 \le \frac{m^2+m\alpha}{\pi}\frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\|f\|_2^2, \quad z \in D.$$

Неравенства, полученные в теремах 1 и 2, являются точными.

Рассмотрим экстремальные задачи. Пусть $\zeta \in D$ – фиксировнная точка и

$$M_\zeta(k) = \left\{f \in A_k L_2^0(D,\alpha) : f(\zeta) = 1\right\}, \; M_\zeta = \left\{f \in A_m L_2(D,\alpha) : f(\zeta) = 1\right\}.$$

Теорема 3. *Экстремальная задача* $\|f\|_2 \to \inf$; $f \in M_\zeta(k)$, *имеет единственное решение* f_0:

$$f_0(z) = \frac{\mathcal{R}_k(z,\zeta)}{\mathcal{R}_k(\zeta,\zeta)}, \quad \|f_0\|_2^2 = \frac{\pi}{2k-1+\alpha}(1-\zeta\bar{\zeta})^{\alpha+2}, \quad z,\zeta \in D.$$

Теорема 4. *Экстремальная задача* $\|f\|_2 \to \inf$; $f \in M_\zeta$, *имеет единственное решение* f_0:

$$f_0(z) = \frac{\mathcal{R}(z,\zeta)}{\mathcal{R}(\zeta,\zeta)}, \quad \|f_0\|_2^2 = \frac{\pi}{m^2+m\alpha}(1-\zeta\bar{\zeta})^{\alpha+2},$$

где $\mathcal{R}(z,\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathcal{R}_k(z,\zeta)$, $z,\zeta \in D$.

Функции $\mathcal{R}(z,\zeta)$ и $\mathcal{R}_k(z,\zeta)$ определены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов А.К. *О строении пространств полианалитических функций*// Матем. заметки. – 2002. – Т.72(5). – С. 750-764.

Рамазанов А.-Р.К. (Махачкала)
rark@mail.dgu.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ[65]

Для заданных на отрезке $\Delta = [a,b]$ функции $f(x)$ и веса $p = (p_-, p_+)$ с неотрицательными компонентами $p_-(x)$ и $p_+(x)$ несимметричная p—норма определяется через (+)- и (–)-срезки функции $f(x)$ равенством

$$|f|_{p,\Delta} = \sup\{f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x) : x \in \Delta\}.$$

[65]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-01019) и программы государственной поддержки ведущих науных школ (проект НШ-1892.2003.1).

Для точки z из пересечения F множеств Δ_-^∞ и Δ_+^∞ всех тех точек $x \in \Delta$, в любой окрестности каждой из которых соответственно неограничены $p_-(x)$ и $p_+(x)$, через $m_{r+}(z)$ обозначим такое наименьшее натуральное m, что $(x-z)^m p_+(x)$ ограничено в некоторой правой окрестности точки z; считаем $m_{r+}(z) = +\infty$, если такое m отсутствует. Аналогично определяются $m_{r-}(z)$ (для правых окрестностей и компоненты $p_-(x)$) и $m_{l\pm}(z)$ (для левых окрестностей и соответствующей компоненты $p_\pm(x)$). Выберем минимум в каждой из пар $m_{r\pm}(z)$ и $m_{l\pm}(z)$ и через $m(z)$ обозначим больший из этих минимумов.

Теорема 1. *Если множество $F = \emptyset$, функция $f(x)$ непрерывна на Δ, то при любом $\varepsilon > 0$ существует (алгебраический) полином $Q(x)$ с $|Q - f|_{p,\Delta} < \varepsilon$.*

Теорема 2. *Если множество F бесконечно или величина $m(z) = +\infty$ в некоторой точке $z \in F$, функция $f(x)$ непрерывна на Δ, то либо существует полином $Q(x)$ с $|Q - f|_{p,\Delta} = 0$, либо существует константа $c > 0$ с $|Q - f|_{p,\Delta} \geq c$ для любого полинома $Q(x)$.*

Теорема 3. *Если множество F конечно, в каждой точке $z \in F$ величина $m(z) < +\infty$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на Δ, то при любом $\varepsilon > 0$ существует полином $Q(x)$ с $|Q - f|_{p,\Delta} < \varepsilon$.*

Получены также необходимые и достаточные условия полиномиальной аппроксимируемости непрерывной на Δ функции $f(x)$ в случае конечного множества F, которые формулируются в терминах аналога модуля гладкости функции $f(x)$ относительно несимметричной p—нормы.

Рамазанов З.А. (Махачкала)
rark@mail.dgu.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ[66]

Пусть функция $f(x)$ и вес $p = (p_-, p_+)$ ограничены на отрезке $\Delta = [a, b]$. Тогда несимметричная p-норма

$$|f|_{p,\Delta} = \sup\{f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x) : x \in \Delta\}$$

обобщает равномерную норму $||f||_\Delta = \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\}$, получаемую при $p = (1, 1)$.

Вопрос существования элемента наилучшего приближения в p-норме изучен в ряде работ Е.П. Долженко и Е.А. Севастьянова, в частности, ими показано, что если конечна величина (свобода системы «Вес – Полиномы»)

[66]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-01019) и программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1892.2003.1).

$$W(p,P_n)=\sup\{||Q||_\Delta/|Q|_{p,\Delta}:Q\in P_n, Q\neq 0\},$$

где супремум берется на множестве P_n всех алгебраических полиномов степени не выше n ($n=0,1,\dots$), то для любой ограниченной на Δ функции $f(x)$ существует полином $P\in P_n$ (наилучшего приближения в p-норме) с

$$|P-f|_{p,\Delta}=\inf\{|Q-f|_{p,\Delta}:Q\in P_n\}=E_n(f,p,\Delta);$$

если же $W(p,P_n)=\infty$, то существуют даже непрерывные функции $f(x)$, для которых нет полинома наилучшего приближения в p-норме.

Полином $Q_n(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n$ с

$$|Q_n|_{p,\Delta}=\mu(p,P_n)=\inf\{|a_0+a_1x+\dots+a_nx^n|_{p,\Delta}:|a_0|+|a_1|+\dots+|a_n|=1\}$$

назовем p-экстремальным на Δ.

Будем говорить, что полином $Q(x)$ доминирует в точке $t\in\Delta$ над функцией $f(x)$ с весом $p=(p_-,p_+)$, если существуют числа $\delta>0,\lambda>0,A$ и B, причем $B=0$ в случае нечетной кратности корня t полинома $Q(x)$, для которых при $x\in\Delta(p_->0)\cap(t-\delta,t+\delta)$ и $x\in\Delta(p_+>0)\cap(t-\delta,t+\delta)$ соответственно имеем

$$(\lambda Q(x)+A+B(x-t))p_-(x)\geq f(x)p_-(x)-E_n(f,p,\Delta),$$

$$(\lambda Q(x)+A+B(x-t))p_+(x)\geq f(x)p_+(x)+E_n(f,p,\Delta)$$

(если указанные множества точек x пусты, то считаем, что условия эти выполняются с произвольными $\lambda>0,A$ и B).

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ и вес $p=(p_-,p_+)$ ограничены на Δ и свобода системы $W(p,P_n)=\infty$ при заданном $n=0,1,\dots$.*

Тогда для существования $P\in P_n$ с $|P-f|_{p,\Delta}=E_n(f,p,\Delta)$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из p-экстремальных полиномов $Q_n(x)$ на Δ не имел нулей или доминировал во всех своих нулях над функцией $f(x)$ с весом p.

Расулов К.М. (Смоленск)
spgu@sci.smolensk.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть T^+ – конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная простым гладким контуром L, $T^-=\bar{C}\setminus(T^+\bigcup L)$.

В дальнейшем, в основном будем пользоваться терминами и обозначениями принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно-аналитические функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:

$$a(t)\varphi^+(t) + b(t)\overline{\varphi^+(t)} = c(t)\varphi^-(t) + d(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \qquad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ и $f(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера).

Отметим, что краевой задаче (1) посвящено много оригинальных работ (см., например, [2] и приведенную там библиографию).

В настоящем сообщении предлагается новый подход к исследованию задачи (1). Основной результат, который получен в данном сообщении, состоит в следующем.

Теорема 1. *Если* $\delta(t) = \overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0$, $t \in L$, *то задача* (1) *равносильна следующей обобщенной скалярной задаче Римана:*

$$\varphi^+(t) - G(t)\varphi^-(t) + \int_L A(t,\tau)\varphi^+(\tau)d\tau + \int_L B(t,\tau)\varphi^-(\tau)d\tau = Q(t), t \in L, \qquad (2)$$

где $G(t)$, $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)$ *и* $Q(t)$ – *функции, вполне определенным образом выражаемые через данные функции* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ *и* $f(t)$, *причем* $G(t) \neq 0$, $t \in L$.

Далее, используя известные результаты исследования задач вида (2) (см., например, [1]), устанавливается картина разрешимости и нетеровость рассматриваемой задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов К.М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.

2. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом* – М.: Наука, 1977. – 448 с.

Расулов К.М., Медведев Ю.А. (Смоленск)
spgu@sci.smolensk.ru

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, а $T^- = \bar{C} \backslash (T^+ \bigcup L)$.

В дальнейшем, в основном будем пользоваться терминами и обозначениями принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z)$ принадлежащие классу $A_2(T^\pm) \bigcap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:

$$A_{11}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}+A_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}}=G_{11}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}+G_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}}+g_1(t), \tag{1}$$

$$A_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}-A_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}}=G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}-G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}}+ig_2(t), \tag{2}$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_j(t)$ $(k=1,2;\ j=1,2)$ заданные на L функции класса $H(L)$.

В данном сообщении установлен следующий основной результат.

Теорема 1. *Если $\delta_k(t)=\overline{A_{k1}(t)}G_{k1}(t)-A_{k2}(t)\overline{G_{k2}(t)}\neq 0$, $t\in L$, $k=1,2$, то решение задачи (1)-(2) сводится к решению следующих двух векторно-матричных задач Римана относительно кусочно аналитических вектор-функций $\psi_k^{\pm}(z)=\{\psi_{k1}^{\pm}(z),\psi_{k2}^{\pm}(z)\}$:*

$$\psi_k^+(t)=G_k(t)\psi_k^-(t)+Q_k(t),\ t\in L,\ k=1,2,$$

где

$$\psi_{k1}^{\pm}(z)=\Phi_k^{\pm}(z),\quad \Phi_k^{\pm}(z)=z\frac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}+(-1)^{k-1}z\varphi_1^{\pm}(z),$$

$$\psi_{k2}^{\pm}(z)=\frac{1}{z}\overline{\Phi_k^{\mp}}\left(\frac{1}{z}\right),\ \beta_k(t)=t^3\left(\overline{A_{k1}(t)}G_{k2}(t)-A_{k2}(t)\overline{G_{k1}(t)}\right),$$

$G_k(t)$ – вполне определенная матрица, $Q_k(t)$ – определенный вектор-столбец, выражающиеся через заданные в условии задачи (1)-(2) функции, а $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\varphi_1^{\pm}(z)$ – аналитические компоненты искомой кусочно бианалитической функции $F^{\pm}(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов К.М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.

Робакидзе М.Г. (Москва)
irubak@rambler.ru

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИЛЬНОЙ ДВОИЧНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б.И. Голубовым [1] введено определение модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) следующим образом. Пусть

$\{\psi_y(x)\}$ – обобщенные функции Уолша на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $f * g$ – двоичная свертка функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ (см. [2, гл. 6]). Зададим последовательность ядер $\{\Lambda_n\}$ формулой

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-2k}\psi_{2^{-k}}(x)\chi_{[0,2^k)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где χ_E – характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}_+$. Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, что

$$\lim_{n\to+\infty} ||f * \Lambda_n - \varphi||_{L(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

то функцию φ называют МСДП функции f и обозначают через $D(f)$. Функцию $h \in L(\mathbb{R}_+)$ определим условием: $h(x) = 2^{-n}$, если $2^n \le x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Получен следующий результат:

Теорема. *Пусть преобразование Фурье-Уолша* $\tilde{f}$ *функции* $f \in L(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{f}(x)|[h(x)]^{-1}dx < +\infty.$$

Тогда функция f *имеет МСДП* $D(f)$ *и* $\tilde{D}(f) = \tilde{f}/h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И. *Двоичная сильная производная и интеграл дробного порядка* // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – 2003. – Т. 19. – С. 73-78.

2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.

Родина А.В. (Саратов)
anninavv@mail.ru

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

Пусть заданы $2l$, $l \in \mathbb{N}$, точки $a_1, \dots, a_{2l}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 2l$, $a_1 < \dots < a_{2l}$, и пусть $E = \bigcup_{k=1}^{l} [a_{2k-1}, a_{2k}]$, $H(x) = \prod_{k=1}^{2l} (x - a_k)$. Через R и S обозначим многочлены степени l, знак которых при переходе от i-ого к $(i+1)$-ому отрезку меняется, и которые удовлетворяют соотношению $R(x)S(x) = H(x)$.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию: $\operatorname{Im}\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Определим пространство рациональных функций: $L_n = span\{B_1, \dots, B_n\}$, где $B_0 = 1$, $B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{|1+\alpha_k^2|}{1+\alpha_k^2} \cdot \frac{z-\alpha_k}{z-\overline{\alpha_k}}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Для данной рациональной функции $\phi_n(z) \in L_n$, ортогональной относительно веса $\frac{R(z)}{(1+z^2)\sqrt{-H(z)}}$, существует многочлен p степени $l-1$ и рациональная функция $\chi_n(z) \in L_n$ такие, что*

$$\phi_n^2(z)R(z) - \chi_n^2(z)S(z) = B_{n-1}(z)p(z)\frac{1+z^2}{z-\overline{\alpha}_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bultheel A., Gonzalez-Vera P., Hendriksen E., Njastad O. *Orthogonal rational functions.* Cambridge Univ.Press. – Cambridge, 1999.

2. Peherstorfer F. *On Bernstein-Szego orthogonal polinomials on several intervals* // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – V. 21, № 2. – P. 461-482.

3. Лукашов А.Л. *Ортогальные рациональные функции на нескольких дугах единичной окружности* // Известия НАН Армении. Математика. – 2001. – Т.36, № 5. – С. 52-61.

Родионов Т.В. (Москва)
rodiontv@mech.math.msu.su

СХОДИМОСТЬ В L^p РАЗЛОЖЕНИЙ ПО БЕССЕЛЕВЫМ СИСТЕМАМ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ[67]

Пусть X и Y – σ-конечные измеримые пространства со счетно-аддитивными неотрицательными мерами μ и ν соответственно. Пусть $\Phi = \{\varphi_y\}_{y\in Y}$ – бесселева система в $L^2(X)$, т.е. $\int\limits_Y |\hat{f}_y|^2\,d\nu(y) \leqslant B\|f\|_2^2$, где $\hat{f}_y = \int\limits_X f(x)\overline{\varphi_y(x)}\,d\mu(x)$, для всех $f \in L^2(X)$, и, кроме того, ν-почти все функции $\varphi_y \in L^\infty(X)$ с нормами $\|\varphi_y\|_\infty \leqslant M(y)$.

Теорема. *Пусть $p \geqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\Delta > 0$ и δ – измеримая положительная функция на Y, такая что при всех $z>0$*

$$\int\limits_{\{y\in Y:\,\delta(y)M^2(y)>z\}} \frac{d\nu(y)}{\delta^2(y)M^2(y)} \leqslant \frac{\Delta}{z}. \tag{1}$$

Тогда, если функция $c(y)$ удовлетворяет условиям

$$I_q(c) \equiv \Big(\int\limits_Y |c(y)|^q M^{2-q}(y)\,d\nu(y)\Big)^{1/q} < \infty,$$

[67] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00420) и грантов Президента РФ для молодых российских ученых и ведущих научных школ (НШ-1657.2003.1 и МК-862.2004.1).

или

$$J_p(c) \equiv \Big(\int\limits_Y |c(y)|^p M^{p-2}(y)\delta^{p-2}(y)\,d\nu(y)\Big)^{1/p} < \infty, \tag{2}$$

то существует такая функция $f \in L^p(X)$, *что* $f = \int\limits_Y c(y)\varphi_y\,d\nu(y)$ *в* L^p *и справедливы неравенства* $\|f\|_p \leqslant B^{1/p}I_q(c)$ *или* $\|f\|_p \leqslant E(q)\Delta^{\frac{2}{q}-1}B^{1/p}J_p(c)$ *соответственно.*

Замечание. Для произвольной функции $M(y)$ всегда существует хотя бы одна функция $\delta(y)$, удовлетворяющая условию (1). По конкретной же M стоит подбирать возможно меньшее δ, чтобы сделать условие (2) менее строгим.

Из этой теоремы получены следствия о восстановлении L^p-функции по ее коэффициентам Фурье относительно фрейма или двойственного фрейма, по ее непрерывному вейвлет-преобразованию и оконному преобразованию Фурье. Оценки $I_q(\hat{f})$ и $J_p(\hat{f})$ для $f \in L^p$, $1 < p < 2$, можно видеть в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов Т.В. *Оценки образов* L^p*-функций для одного класса интегральных операторов* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2003. – № 6. – С. 7-11.

Романова С.В., Прохоров Д.В. (Саратов)
RomanovaSV@info.sgu.ru, ProkhorovDV@info.sgu.ru

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ[68]

Пусть $B(t)$, $t \geqslant 0$ – класс всех функций f,

$$f(z,t) = e^{-t}(1 + c_1(t)z + \ldots), \tag{1}$$

аналитических в единичном круге U и удовлетворяющих в U условию: $0 < |f(z,t)| \le 1$. Обозначим

$$F_t(z) = \exp(-t(1-z)/(1+z)) = A_0(t) + A_1(t)z + \ldots.$$

Классические и новые методы привели к решению ряда экстремальных задач в классе $B(t)$ и его подклассах.

На линейном пространстве аналитических в U функций с разложением (1) рассмотрим линейный функционал

$$L(f) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda_k} c_k, \quad \lambda_n = 1, \tag{2}$$

[68]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00123) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-178).

и экстремальную задачу

$$\Re L(f) \to \max, \quad f \in B(t). \tag{3}$$

Теорема 1. *Существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0]$*

$$\max_{f \in B(t)} \Re c_n = |A_1(t)|.$$

Следствие 2. *Пусть векторы $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_{n-1}, 1)$ из окрестности точки $(0, \dots, 0, 1)$ задают функционалы L из (2). Тогда разным векторам $\overline{\lambda}$ соответствуют различные экстремальные функции задачи (3) в классе $B(t)$ при достаточно малых $t > 0$.*

Теорема 3. *Существует $t^0 > 0$ такое, что для всех $t > t^0$*

$$\max_{f \in B(t)} \Re c_n = |A_n(t)|.$$

Следствие 4. *Пусть векторы $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_{n-1}, 1)$ из окрестности точки $(0, \dots, 0, 1)$ задают функционалы L из (2). Тогда в задаче (3) им соответствует экстремальная функция F_t в классе $B(t)$ при достаточно больших $t > 0$.*

Следующая теорема позволит определить те t, для которых функция F_t доставляет локальный максимум $\Re c_n$ в классе $B(t)$.

Теорема 5. *Пусть для $t > 0$ тригонометрический многочлен $Q_n(u) = -2 \sum\limits_{j=1}^{n} A_{n-j}(t) \cos ju$ имеет ровно одну точку максимума u_0 на $(-\pi, \pi]$ и $Q_n'(u_0) < 0$, то функция F_t доставляет локальный максимум $\Re c_n$ в классе $B(t)$.*

Аналогичная теорема справедлива и для функции $F_t(z^n)$.

Рудометкина И.П. (Мичуринск)
rudometkina@email.ru

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОПЕРАТОРА УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^{(1)}(D)$

Рассмотрим оператор Урысона с частными интегралами

$$(Bx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau,x(\tau,s))d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma +$$

$$+ \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\sigma d\tau, \tag{1}$$

где $l(t,s,\tau,u)$, $m(t,s,\sigma,u)$, $n(t,s,\tau,\sigma,u)$ – вещественные функции, определенные при $t,\tau \in [a,b]$, $s,\sigma \in [c,d]$, $u \in (-\infty;+\infty)$.

Обозначим $C^{(1)}(D)$ – пространство функций $x(t,s)$, непрерывных вместе со своими частными производными по t и s 1-го порядка включительно.

Оператор (1) является нелинейным оператором с частными интегралами. Его свойства принципиально отличаются от свойств оператора Урысона. При исследовании разрешимости уравнений Урысона с частными интегралами методом Ньютона-Канторовича требуется дифференцируемость соответствующего оператора и формула для вычисления его производной. Свойства оператора Урысона с частными интегралами, действующего в квазибанаховых идеальных пространствах, изложены в [1].

Ниже приведены условия дифференцируемости по Фреше оператора (1) в пространстве $C^{(1)}(D)$ – функций, имеющих непрерывные производные по t и s. Напомним, что производная Фреше $B'(x)$ – это линейный непрерывный оператор такой, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} = 0, \qquad \text{где} \qquad \omega(x,h) = B(x+h) - B(x) - B'(x)h.$$

Теорема. *Пусть B – оператор Урысона с частными интегралами, ядра l,m,n определены на $D \times [a,b] \times R$, $D \times [c,d] \times R$, $D \times D \times R$ соответственно. И пусть в соответствующих областях выполняются следующие условия:*

1) ядра l,m,n и их частные производные 1-го порядка по t,s,u непрерывны;

2) смешанные производные второго порядка l''_{ut}, l''_{tu}, l''_{us}, l''_{su}, m''_{ut}, m''_{tu}, m''_{us}, m''_{su}, n''_{ut}, n''_{tu}, n''_{us}, n''_{su} непрерывны;

3) смешанные производные $l''_{u^2}, l'''_{tu^2}, l'''_{su^2}, l'''_{u^3}, m''_{u^2}, m'''_{tu^2}, m'''_{su^2}, m'''_{u^3}, n''_{u^2}$ – существуют.

Тогда $B : C^{(1)}(D) \to C^{(1)}(D)$, дифференцируем в любой точке $x \in C^{(1)}(D)$ и

$$B'(x)h(t,s) = \int_a^b l'_u(t,s,\tau,x(\tau,s))h(\tau,s)d\tau +$$

$$+ \int_c^d m'_u(t,s,\sigma,x(t,\sigma))h(t,\sigma)d\sigma + \int_a^b \int_c^d n'_u(t,s,\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))h(\tau,\sigma)d\sigma d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Калитвин А.С. *Нелинейные операторы с частными интегралами.*// – Липецк: ЛГПУ, 2002. –208 с.

Рыхлов В.С. (Саратов)
RykhlovVS@info.sgu.ru

О КЛАССИФИКАЦИИ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[69]

Пусть L – оператор, порожденный на отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением $\ell(y) := y^{(n)}$ и краевыми условиями

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(j-1)}(0) + \beta_j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где $n = 2m+1$, $m \geq 2$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ для $j = \overline{1,n}$, $\alpha_s \neq 0$ и $\beta_s = 0$ для некоторого $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\beta_j = 1$ для $j \neq s$.

Обозначим через $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{n}$, $j = \overline{1,n}$, корни n-й степени из -1. Пусть $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T$ и $\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^n$. Очевидно, $\det\Omega \neq 0$. Введем числа $a_\nu := \hat{\alpha}_\nu\omega_1^{\nu-1}$, $\nu = \overline{1,n}$, где $\hat{\alpha}_\nu$ есть компоненты вектора $\hat{\alpha} := \left(\Omega^T\right)^{-1}\alpha$. Пусть $\tilde{a}_j := a_j - \dfrac{2a_{j-1}}{\omega_1^{2(s-1)}} + \dfrac{a_{j-2}}{\omega_1^{4(s-1)}}$, где индексы изменяются циклически по модулю n. Введем следующие определители

$$\hat{\Delta}_{12\ldots k} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_n & \ldots & \tilde{a}_{k+5} & \tilde{a}_{k+4} \\ \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & \ldots & \tilde{a}_{k+6} & \tilde{a}_{k+5} \\ \tilde{a}_4 & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 & \ldots & \tilde{a}_{k+7} & \tilde{a}_{k+6} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n-k-1} & \tilde{a}_{n-k-2} & \tilde{a}_{n-k-3} & \ldots & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_{n-k} & \tilde{a}_{n-k-1} & \tilde{a}_{n-k-2} & \ldots & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,n-2}.$$

В терминах этих определителей можно дать классификацию множества рассматриваемых операторов L по степени их вырождения.

Теорема 1. *Оператор L является регулярным по Биркгофу (см. [1, с. 66-67]) тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m} \neq 0$ и $\hat{\Delta}_{12\ldots m+1} \neq 0$.*

Теорема 2. *Оператор L является слабо нерегулярным или, что то же самое, нормальным (в смысле определения из [2]) тогда и только тогда, когда или $\hat{\Delta}_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} = 0$, или $\hat{\Delta}_{12\ldots m} = 0 \wedge \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} \neq 0$.*

Определение 1. Будем называть оператор L сильно нерегулярным, если он не является ни регулярным, ни нормальным.

Теорема 3. *Оператор L является сильно нерегулярным тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m} = \hat{\Delta}_{12\ldots m+1} = 0$.*

На самом деле получено более детальное описание сильно нерегулярных операторов L в терминах определителей $\hat{\Delta}_{12\ldots k}$, но из-за ограниченности объема тезисов это описание здесь не приводится.

[69]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 00-01-00075).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1983. – 9. – С. 190–229.

Рябцева Н.Н., Ищенко А.С. (Белгород)
science@bupk.ru

О ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ СТИЛТЬЕСА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ НА МЕТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Физически естественные краевые задачи имеют обычно вариационную природу. Анализ различных сингулярных задач, связанных с обобщенным дифференцированием можно начинать, следуя Ю.В. Покорному, с использования дифференциалов Стилтьеса уже на этапе описания функционала энергии. Нами использован этот подход при описании и анализе задачи Штурма-Лиувилля на метрической сети.

Пусть Γ – конечная связная метрическая сеть из $\mathbb{R}^n$. Нам удобно считать ее составленной из прямолинейных интервалов и некоторого набора внутренних узлов, где эти ребра-интервалы смыкаются. Пусть на Γ задан дифференциал Стилтьеса $d(\sigma)(x)$ так, что для любого подграфа $\Gamma_0 \subset \Gamma$ его σ-мера определена равенством $m(\Gamma_0) = \int\limits_{\Gamma_0} d\sigma(x)$, а для произвольной функции множества $F(\Omega)$ (где $\Omega \subset \Gamma$) производной $\frac{dF}{d\sigma}$ мы будем называть такую функцию точки $f(x)$, что $F(\Omega) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, d\sigma(x)$ для любого σ-измеримого Ω из Γ.

Если Γ составлен из стильтьесовских струн, то энергия каждой из них (т.е. каждого ребра), накопленная под воздействием внешней силы с плотностью dF определяется формулой

$$\Phi(u) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{u'^2(x)}{2}\, d\sigma - \int\limits_{\Gamma} \frac{u^2(x)}{2}\, dQ + \int\limits_{\Gamma} u\, dF,$$

где dQ – плотность упругой реакции окружающей среды и $d\sigma$-метрическая плотность исходной системы.

Мы вынуждены, чтобы рассмотренные интегралы имели смысл, считать функцию $\sigma(x)$ многозначно дифференцируемой в каждой внутренней вершине при подходе к ней по разным ребрам, а на каждом ребре $\sigma(x)$ – обычная функция ограничений вариации. При этом сохранение смысла у интеграла $\int\limits_{\Gamma} u'^2\, d\sigma$ для любой абсолютно непрерывной $u(x)$ требует предположения $\sigma'(a) = 0$ для любой внутренней вершины a.

При таком описании энергии виртуальных деформаций мы будем иметь для реальных деформаций обычное уравнение $-\sigma'(u')' + uQ' = F'$ (внешние штрихи обозначают обобщенные производные) на каждом ребре, причем в каждой из внутренних вершин первое слагаемое может быть записано в виде $(\sum_i \sigma_i'(a+0)u_i'(a+0))$, где суммирование ведется по индексам ребер, примыкающих к a, а $\varphi_i'(a+0)$ означает крайнюю производную сужения $\varphi(x)$ на i-тое ребро.

Сабурова Т.Н. (Москва)

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Система Фабера-Шаудера $\varphi_m(x)$, как известно, является базисом в C[0,1] – пространстве функций, непрерывных на отрезке [0,1]. Она порождается одной функцией $\varphi_2(x)$: если $m = 2^k + l$, то $\varphi_m = \varphi_2(2^k x - (l-1))$, причем предполагается, что $\varphi_2(x)$ равна нулю вне отрезка [0,1]. Из результатов [1] следует, что произведение $\varphi_{m_1}(x_1)\varphi_{m_2}(x_2)...\varphi_{m_n}(x_n)$ (при нумерации по квадратам) образует базис в $C[0,1]^n$ – пространстве функций, непрерывных на n-мерном единичном кубе $[0,1]^n$. Такой базис также назовем базисом Фабера-Шаудера (БФШ).

В этой работе мы будем рассматривать случай n=2. Пусть $T = \{T_m(x,y)\}$ – БФШ на квадрате $[0,1]^2$; А – класс функций $f(x,y) \in C[0,1]^2$, у которых сходится ряд $\sum |a_m(f)|$ (здесь $\{a_m(f)\}$ – последовательность коэффициентов Фурье БФШ $f(x,y)$). Нас будет интересовать вопрос: при каких условиях, наложенных на функцию $F(t)$, можно утверждать, что для любой функции $f(x,y) \in$ A суперпозиция $F(f(x,y)) \in$ A. Такого рода задачи в одномерном случае решали ранее многие авторы применительно к той или иной системе, например, для тригонометрической – Y. Katznelson и P. Levy, для Хаара – П.Л. Ульянов, автором также рассматривался этот вопрос для системы Фабера-Шаудера.

Для функций двух перменных удалось получить следующий результат.

Теорема. *Если функция $f(x,y) \in A$ $(a \le f(x,y) \le b)$, а функция $F(t) \in C[a;b]$ и $F''(t) \in Lip\ 1$ на отрезке $[a;b]$, то функция $F(f(x,y)) \in A$.*

Замечание. При n=1 справедлива более общая теорема (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Semadeni Z. *Product Schauder Bases and Approximation with Nodes in Spaces of Continuous Functions* // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. – 1963. – T.X 1, No 6. – С. 387-391.

2. Сабурова Т.Н. *Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера-Шаудера* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1972. – Т. 36, No 2. – С. 401-423.

Сакбаев В.Ж. (Москва)
fumi2003@mail.ru

О СХОДИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА[70]

В ряде задач для уравнений с частными производными возникают последовтельности $\{f_n\}$ решений регуляризованных задач, которые аппроксимируют решение f исследуемой задачи, и требуется изучить свойства сходимости (по норме или слабой) последовательности аппроксимирующих решений как элементов некоторого гильбертова пространства H (см. [1], [2]).

В случае только слабой сходимости последовательности $\{f_n\}$ в гильбертовом пространстве H дополнительную информацию о характере ее сходимости дает поведение семейства последовательностей

$$\{(\mathbf{A}f_n, f_n)\}, \qquad \mathbf{A} \in \mathcal{B}^1(H), \tag{1}$$

при $n \to \infty$; где $\mathcal{B}^1(H)$ – некоторое семейство операторов из банахова пространства $\mathcal{B}(H)$. Установлены следующие результаты о связи сходимости последовательности значений квадратичных форм (1) и сходимости решений аппроксимирующих задач:

Теорема 1. *Если последовательность элементов гильбертова пространства H такова, что для любого оператора $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(H)$ последовательность $(f_n, \mathbf{A}f_n)$ сходится, то множество значений последовательности $\{f_n\}$ компактно в пространстве H, причем если φ и ψ – ее частичные пределы, то существует число $\lambda:\ |\lambda| = 1$, такое, что $\varphi = \lambda\psi$.*

Пусть f_n – последовательность единичных векторов гильбертова пространства H, а $\mathbf{P}_{f_n}$ – последовательность ортогональных проекторов на соответствующие векторы.

Следствие 1. *Последовательность проекторов $\mathbf{P}_{f_n}$ сходится в пространстве $\mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда, когда для любого оператора $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(H)$ последовательность $\{(f_n, \mathbf{A}f_n)\}$ сходится.*

Теорема 2. *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность элементов сепарабельного гильбертова пространства H. Последовательность средних значений $\{(f_n, \mathbf{A}f_n)\}$ произвольного компактного оператора $\mathbf{A} \in C^0(H)$ сходится тогда и только тогда, когда существует такое $\varphi \in H$, что множество слабых частичных пределов последовательности $\{f_n\}$ принадлежит окружности $T(\varphi) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.*

В работе [2] изучено поведение последовательностей (1), для которых $\mathcal{B}^1(H)$ есть линейное многообразие операторов умножения на гладкую финитную функцию; установлена возможность выделить из последовательности $\{f_n\}$ такую подпоследовательность, для которой

[70]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00407.

последовательности (1) сходятся при любом $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^1(H)$, и указан вид предельного функционала на многообразии $\mathcal{B}^1(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В.В. *К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях* // Функ. ан. и его прил. - 2001. - Т. 35, № 1. - С. 23-39.

2. Gerard P. *Microlocal defect measures* // Comm. Part. Diff. Eq. - 1991. - V. 16, No 11. - P. 1761-1794.

Салахудинов Р.Г. (Казань)
rsalahudinov@ksu.ru

L^p-НОРМЫ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ И ЕВКЛИДОВЫ МОМЕНТЫ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ В $\mathbf{R}^n$ [71]

Пусть G – открытое множество в $\mathbf{R}^n$ с непустой границей ∂G. Классической функцией напряжения $u(x, G)$ области G называют решение следующей краевой задачи:

$$\Delta u = -1 \text{ в } G; \quad u = 0 \text{ на } \partial G.$$

Когда G – односвязная область на плоскости, L^1–норма $u(x, G)$ с точностью до константы совпадает с физическим функционалом области G – жесткостью кручения. Для этого случая в [1] был получен геометрический критерий ограниченности жесткости кручения и его двусторонние оценки. В качестве такой геометрической характеристики был использован новый геометрический функционал – евклидов момент инерции области относительно границы:

$$\int_G \operatorname{dist}^2(x, \partial G) \mathrm{d}x.$$

Некоторое уточнение констант было доказано в работе [2]. В работе [3] была рассмотрена аналогичная проблема для областей в $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) и доказано, что евклидов момент инерции является подходящей геометрической характеристикой в некоторых классах областей (области, удовлетворяющие строгому условию Харди). В частности, проблема решена в классе выпуклых областей:

$$\frac{1}{2n} \int_G \operatorname{dist}^2(x, \partial G) \mathrm{d}x \leq \int_G u(x, G) \mathrm{d}x \leq 6\pi^{1/2} \frac{\Gamma((n+1)/2) 5^{n-1}}{\Gamma((n+2)/2)} \int_G \operatorname{dist}^2(x, \partial G) \mathrm{d}x.$$

Нашим основным результатом является следующая

Теорема. *Пусть G – выпуклая область в $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) и $p > 1/2$. Тогда*

$$\frac{1}{2n} \|\operatorname{dist}^2(x, \partial G)\|_p \leq \|u(x, G)\|_p \leq C^p(n, p) \|\operatorname{dist}^2(x, \partial G)\|_p ,$$

[71] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ грант № 02-01-00168.

где

$$C^p(n,p) = n^{n+p}\,\frac{\pi^{n/2-1}[n!]^p p^{2p-n-1}}{(2p-1)^{2p}\,2^{n(p-1)-4p}}\,\frac{\Gamma(p+n/2)}{\Gamma(p)}\left[\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p)}\right]^n.$$

В случае выпуклой области на плоскости функцию расстояния до границы можно заменить на конформный радиус. В работе также рассматривается случай $0 < p \le 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи* – Казань: Изд-во Казанский фонд «Математика», 1996. – 216 с.

2. Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane* // J. of Inequal.& Appl. – 2001. – V. 6. – P. 253–260.

3. Bañuelos R., van den Berg M. and Carroll T. *Torsional Rigidity and Expected Lifetime of Brownian motion* // J. London Math. Soc. (2). – 2002. – V. 66. – P. 499–512.

Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. (Казань)
shabalin@ksaba.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ И БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ[72]

Задача Гильберта с бесконечным индексом и непрерывными коэффициентами решена в работах [1], [2] методом сведения к соответствующей задаче Римана. В [3] методом регуляризирующего множителя получено решение и проведено исследование картины разрешимости такой же задачи, как и в [2]. Разработанный в [3] метод оказался перспективным и при решении более сложной задачи с бесконечным индексом и счетным множеством точек разрыва коэффициентов.

Пусть L – вещественная ось в плоскости комплексного переменного, D – верхняя полуплоскость. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в области D по краевому условию $\mathrm{Re}[(a(t)+ib(t))\Phi(t)] = c(t)$, $t \in L$, коэффициенты которого имеют разрывы в точках монотонных неограниченных последовательностей $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, $t_k > 0$, $t_{-k} < 0$, $k = \overline{1,\infty}$, с показателем сходимости $\kappa < 1$, а индекс задачи обращается в бесконечность степенного порядка.

При построении регуляризующего множителя особенности коэффициентов учтены специально построенными функциями вида $P_\pm(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-z/t_{\pm k})^{\kappa_{\pm k}}$, исследование асимптотического поведения и характера гладкости которых приводится к оценкам некоторого сингулярного интеграла и налагает дополнительные ограничения на выбор точек $t_{\pm k}$, а особенность индекса проявляется в том, что существование и число решений задачи связано с множеством целых функций, удовлетворяющих условию симметрии, ограничениям порядка и роста на L.

[72] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00168).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. сер. ф.-м.н. – 1974. – № 6. – С. 16-23.

2. Алекна П.Ю. *Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости* // Лит. мат. сб. – 1977. – № 1. – С. 5-12.

3. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73(5). – С. 724-734.

Свистула М.Г. (Самара)
svism@ssu.samara.ru

ПОТОЧЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ САКСА

Здесь B – булева алгебра, Y – банахово пространство, $\mu : B \to Y$ – заряд, то есть конечноаддитивная функция.

Говорят, что заряд μ :

– исчерпывается, если $\mu(b_n) \to 0$ для любой последовательности попарно дизъюнктных элементов $\{b_n\} \subset B$;

– обладает свойством Сакса, если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы $\{b_1, ..., b_n\}$ такое, что

$$\sup\{\|\mu(a)\|,\ a \in B,\ a \le b_i\} < \varepsilon.$$

Известно, что для меры на булевой σ – алгебре свойство Сакса эквивалентно неатомичности.

Теорема 1. *Для того, чтобы для любого исчерпывающего заряда $\mu : B \to Y$ существовала сеть исчерпывающих, со свойством Сакса зарядов, поточечно сходящаяся к μ, необходимо и достаточно, чтобы стоуновское пространство булевой алгебры B было совершенным.*

Теорема 1 обобщает на векторный случай результаты работы [1] для вероятностных зарядов.

Теорема 2. *Пусть $\mu_n : B \to Y$ – исчерпывающий заряд со свойством Сакса, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mu(b) = \lim \mu_n(b)$, $b \in B$. Пусть для любой последовательности попарно дизъюнктных элементов $\{b_k\} \subset B$ $\lim_k \mu_n(b_k) = 0$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Тогда μ будет исчерпывающим зарядом со свойством Сакса.*

Следствие. *Поточечный предел последовательности неатомических мер на σ-алгебре есть неатомическая мера.*

В конкретных случаях булевой алгебры удается ослабить требования теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть B – алгебра измеримых по Жордану подмножеств $[0,1]$. Пусть $\mu_n : B \to Y$ – заряд со свойством Сакса, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mu(b) = \lim \mu_n(b)$, $b \in B$. Тогда μ будет зарядом со свойством Сакса.*

ЛИТЕРАТУРА

1. M.Bhaskara Rao and K.P.S. Bhaskara Rao. *Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces*// Mathematica.- 1973. – № 20. – P. 214-223.

2. Климкин В.М., Свистула М.Г. *О поточечном пределе векторных зарядов, обладающих свойством Сакса*// Матем.заметки. – 2003. – Т. 74(3). – С. 407-415.

Седлецкий А.М. (Москва)
sedlet@mail.ru

О БАЗИСАХ ИЗ СДВИГОВ ФУНКЦИИ НА ПРЯМОЙ[73]

Пусть Λ – подмножество в $\mathbb{R}$, пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Обозначим через $\Lambda(f)$ множество линейных комбинаций сдвигов

$$f(t-\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda,$$

функции f. По теореме Винера множество $\Lambda(f)$ плотно в $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ($\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$) тогда и только тогда, когда преобразование Фурье $\hat{f} \neq 0$ всюду (почти всюду) на $\mathbb{R}$.

При различных дополнительных условиях на скорость убывания $\hat{f}(x)$ при $x \to \pm\infty$ вопрос о плотности в L^2 множества $\Lambda(f)$, когда Λ – последовательность с единственной предельной точкой на бесконечности, рассматривался в работах Р. Залика, Б. Факсена, автора и других.

Существуют ли базисы из сдвигов функции в L^1 и L^2?

Т. Олсон и Р. Залик [1] установили,что в L^2 не существует базиса Рисса из сдвигов функции, т.е. базиса Рисса вида

$$f(t-\lambda_n), \tag{1}$$

где λ_n – вещественная последовательность. Вопрос о существовании в L^1 и L^2 базиса вида (1) без каких-либо дополнительных свойств (т.е. базиса Шаудера) оставался открытым. В последнее время он решён автором для пространства L^1. Верна следующая

Теорема. *В пространстве* L^1 *не существует базиса из сдвигов функции.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Olson T.E. and Zalik R.A. *Nonexistence of a Riesz basis of translates* // Approximation Theory: Proc. 6 Southeastern Approxim. Th. Annual Conf. – N.-Y.: Marcel Dekker, Inc., 1992. – P. 401-408.

---

[73]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00698.)

Семенов В.И. (Кемерово)
semvi@kuzstu.ac.ru

ВЗАИМНАЯ ОДНОЗНАЧНОСТЬ, ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ НЕГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА[74]

Объектом изучения являются непрерывные открытые отображения областей евклидова пространства, которые имеют все обобщенные производные первого порядка. С помощью топологического индекса можно описать достаточные условия взаимной однозначности отображений и дать достаточные условия для точек ветвления отображений. Идея вывода таких условий основывается на обратных интегральных неравенствах. Одно из применений обратных неравенств в теории функций связано с построением теории квазиконформных отображений и восходит к М.А. Лаврентьеву. Другое применение обратных неравенств к оценке степени суммируемости производных квазиконформного (однолистного и неоднолистного) отображения указано Ф. Герингом и Ю.Г. Решетняком. Формулируя новые обратные неравенства, можно получить нетривиальные оценки топологического индекса, которые позволяют установить нужные топологические свойства отображений.

Сенчилов В.В. (Смоленск)
spgu@sci.smolensk.ru

О РЕШЕНИИ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{t : |t| < 1\}$, $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \bigcup L)$. В точках окружности L зададим функцию вида:

$$G(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} G_1(t), \ t \in L, \qquad (*)$$

где $G_1(t)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера и не обращающаяся в нуль на L; здесь $\alpha_1, \ \ldots, \alpha_\mu$ и $\beta_1, \ \ldots, \beta_\nu$ – некоторые точки окружности L, а m_k и p_j – целые положительные числа.

Рассматривается следующая краевая задача. Требуется найти все метааналитические в области T^+ функции $F^+(z)$, удовлетворяющие на L, за исключением, быть может, конечного числа точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ и $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, следующему краевому условию:

---

[74]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 97-01-00763, 00-01-00726).

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G(t)\overline{F^+(t)} = g(t), \ t \in L, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_+}$ – производная по внутренней нормали к L, $G(t)$ – функция вида (*), $g(t)$ – заданная на L функция класса $H(L)$.

В случаях, когда $G(t) \equiv 0$ или $G(t) \neq 0, t \in L$, задача (1) была исследована в работе [2]. В данном сообщении задача исследуется в приведенной выше постановке.

Используя представление метааналитических функций через аналитические (см. [1], с. 139) устанавливается следующий основной результат.

Теорема. *Решение краевой задачи* (1) *сводится к решению скалярной задачи Римана (в исключительном случае) следующего вида:*

$$\Phi^+(t) = G_2(t)\Phi^-(t) + g_2(t), \ t \in L,$$

где $G_2(t) = t^3 G(t) e^{\overline{\lambda_0} t - \lambda_0 \bar{t}}$, $g_2(t) = -t^2 g(t) e^{-\lambda_0 \bar{t}}$,

$$\Phi^+(z) = z^3 \frac{d\,\varphi_0^+(z)}{d\,z} + z^2 \frac{d\,\varphi_1^+(z)}{d\,z} + \lambda_0 z \varphi_0^+(z) + (z + \lambda_0)\varphi_1^+(z), \ z \in T^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi_0^+}\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varphi_1^+}\left(\frac{1}{z}\right), \ z \in T^-,$$

а $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ – *аналитические компоненты искомой метааналитической функции* $F^+(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов К.М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 343 с.

2. Расулов К.М., Сенчилов В.В. *О нетеревости одной видоизмененной краевой задачи типа Неймана для метааналитических функций в круге* //Системы компьютерной математики и их приложения. Материалы междун. науч. конфер. СГПУ. – Смоленск, 2001. – С. 93-100.

Сидоров С.П.
SidorovSP@info.sgu.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[75]

Мы покажем, что оценка n-ой минимальной погрешности линейных алгоритмов для одной задачи аппроксимации в произвольном линейном

[75]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ, проект НШ-1295.2003.1

нормированном пространстве (и оценка соответствующего линейного n-поперечника по Колмогорову) сводится к решению в этом пространстве чебышевской задачи о нахождении многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, со старшим коэффициентом, равным единице. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть J_2 – линейное нормированное пространство и $\{f_i\}_{i=0}^n$ – система линейно-независимых элементов из J_2. Пусть J_1 – множество всех элементов вида $p = \sum_{i=0}^n a_i f_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим $J_0 = \{f \in J_1 : |a_n| \leqslant 1\}$. Тогда для линейного n-поперечника по Колмогорову $\lambda_n(J_0, J_2)$ множества J_0 справедлива следующая оценка*

$$\lambda_n(J_0, J_2) = \inf_{c_0,\ldots,c_{n-1}} \left\| f_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i \right\|.$$

Сильченко Ю.Т. (Воронеж)
silchenko@kfa.vsu.ru

ОБ ОДНОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[76]

Рассматривается система связанных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - z = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + v = 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in (0,1]$, $u \in [0,1]$, $v = v(t,x)$, $u = u(t,x), z = z(t,x)$ – неизвестные функции, $f(t,x)$ – заданная функция. Для этой системы задаются граничные условия

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad z(t,0) = z(t,1) = 0 \tag{2}$$

и условие при $t = 0$

$$\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2} = u_0(x) \tag{3}$$

($u_0(x)$ - заданная функция).

Нас будет интересовать решение этой задачи, такое, что функции, входящие в левые части уравнений принадлежат пространству L_p (по x), а дифференцирование по t понимается в смысле нормы этого пространства.

Указанную задачу будем рассматривать в банаховом пространстве $E = L_p(0,1) \times L_p(0,1) \times L_p(0,1)$ (по x) элементов $w = (u, v, z)$ при

[76]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00141).

некотором $1 \le p < \infty$ – с нормой $\|w\| = \|u\| + \|v\| + \| z \|$. Введем в этом пространстве матричные операторы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & -\frac{d}{dx} & 1 \\ -\frac{d}{dx} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с областями определения $D = D(A) = \{w \in W_p^2 \times W_p^1 \times W_p^2, \quad w = (u, v, z), \quad u(0) = u(1) = 0, z(0) = z(1) = 0\}, \quad D_B = D(B) = L_p$ и оператор дифференцирования $C = \frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $D(C) = \{z \in W_p^2(0,1), z(0) = z(1) = 0\}$. Тогда указанная задача (1)-(3) сведется к абстрактной задаче Коши

$$\begin{cases} Bw_t' - Aw = F(t) \\ w(0) = w_0 \end{cases} \tag{4}$$

где

$$F(t) = (0, 0, f(t, .)), \quad w_0 = (C^{-1}u_0, 0, 0).$$

Задача (4) исследуется известными методами (см., например, [1]). Основным моментом является установление оценки нормы обобщенной резольвенты

$$\| B(\lambda B - A)^{-1} \| \le C \mid \lambda \mid^{-\frac{1}{2}},$$

которая в данной задаче просчитывается непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1.Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Построение фазового пространства и решений линейных уравнений, не разрешенных относительно производной* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 371, № 3. – С. 295-298.

Симонов Б.В. (Волгоград)
dvr@vstu.ru

О НАИЛУЧШЕМ (φ_+, φ_-)-ПРИБЛИЖЕНИИ[77]

Пусть Φ – совокупность неотрицательных, неубывающих и непрерывных на $[0, +\infty)$ функций φ, удовлетворяющих Δ_2-условию; L_φ – множество μ-измеримых, конечных почти всюду на T функций f, для которых $\int\limits_T \varphi(| f(t) |)d\mu < \infty$; $L_{\varphi_+\varphi_-}$ – множество функций f таких, что $f \in L_{\varphi_+}$ и $f \in L_{\varphi_-}$;

$$\| f \|_{\varphi_+\varphi_-} = \int\limits_T \varphi_+(f^+(t))d\mu + \int\limits_T \varphi_-(f^-(t))d\mu,$$

[77]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00080).

где $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$. Для веса $p = (p_+, p_-)$, где $p_+, p_- \in L_0(T)$, и функции f введем обозначение: $(f;p)(t) = f^+(t) \cdot p_+(t) - f^-(t) \cdot p_-(t)$. Пусть H – конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+\varphi_-}$, $f, g \in L_{\varphi_+\varphi_-}$. Положим $\rho(f,g) = \| ((f-g);p) \|_{\varphi_+\varphi_-}$. Величину $\rho(f,H) = \inf\limits_{g\in H} \rho(f,g)$ назовем наилучшим (φ_+,φ_-)-приближением, а элемент $g_0 \in H$, для которого $\rho(f,g_0) = \rho(f,H)$ – элементом наилучшего (φ_+,φ_-)-приближения. Будем говорить, что функции φ_+,φ_- удовлетворяют условию (1), если они не являются константами или, наоборот, обе функции φ_+ и φ_- – константы.

Утверждение. *Пусть $\varphi_+,\varphi_- \in \Phi$ и удовлетворяют условию* (1). *Пусть также в случае, если обе функции не являются константами, они удовлетворяют одному из двух условий: или*

$$\lim_{u\in\infty} \varphi_+(u) = \lim_{u\in\infty} \varphi_-(u) = +\infty, \tag{2}$$

или

$$\lim_{n\in\infty} \varphi_+(u) = \lim_{n\in\infty} \varphi_-(u) = l < +\infty, \tag{3}$$

$$\varphi_+(0) = \varphi_-(0). \tag{4}$$

Пусть p – такой вес, что

$$\mu\{t \in T : p_+(t) = 0\} + \mu\{t \in T : p_-(t) = 0\} = 0. \tag{5}$$

Тогда для любого конечномерного подпространства H из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ и любой функции f из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ существует элемент наилучшего (φ_+,φ_-)-приближения в $L_{\varphi_+\varphi_-}$ подпространством H. Если к тому же φ_+,φ_- – строго выпуклые функции, то элемент наилучшего (φ_+,φ_-)-приближения будет единственным.

Замечание. Если рассмотреть случаи, когда в утверждении не выполнено одно из условий (1), (2), (3), (4), (5), то существуют пространства $L_{\varphi_+\varphi_-}$ и в них подпространства H, где нет элемента наилучшего (φ_+,φ_-)-приближения.

Скворцов В.А. (Москва)
vaskvor@mech.math.msu.su

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БАЗИСАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЛОКАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ФУНКЦИЙ[78]

Семейство $S = \{S(x) : x \in \mathbb{R}\}$ называется *локальной системой* если каждое $S(x)$ представляет собой совокупность множеств, обладающую следующими свойствами:

[78]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты НШ-1657.2003.1 и 02-01-00428).

(i) $\{x\} \notin S(x)$ для всех x;

(ii) если $s_1 \in S(x)$ и $s_1 \subseteq s_2$, то $s_2 \in S(x)$;

(iii) если $s \in S(x)$, то $x \in s$;

(iv) если $s \in S(x)$ и $\delta > 0$, то $s \cap (x - \delta, x + \delta) \in S(x)$;

(v) в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ множество $s_1 \cap s_2 \in S(x)$ как только s_1 и s_2 принадлежат $S(x)$.

Функция $\gamma : E \to 2^{\mathbb{R}}$ с $\gamma(x) \in S(x)$ называется $\mathcal{S}$-*выбором.* Для данной локальной системы $\mathcal{S}$ рассмотрим множества пар

$$\beta_\gamma = \{([u,v],x) : x = u,\ v \in \gamma(x) \text{ или } x = v,\ u \in \gamma(x);\ x \in \mathbb{R}\},$$

зависящие от $\mathcal{S}$-выбора γ. Тогда семейство $\{\mathcal{B}_\gamma\}_\gamma$ образует *дифференциальный базис* в смысле теории интегралов Курцвейля-Хенстока (см. [1]). Этому базису соответствует $H_{\mathcal{S}}$-интеграл типа Курцвейля-Хенстока и вариационная мера.

Другой важный пример таких дифференциальных базисов образован $\mathcal{P}$-ичными локальными системами. Частным случаем $\mathcal{P}$-ичного базиса является двоичный базис (см. [2]), в котором множество $\mathcal{S}(x)$ состоит из двоичных приближений числа x.

Для $H_{\mathcal{S}}$-интегралов может быть установлена дескриптивная характеристика в терминах абсолютной непрерывности вариационной меры.

Важную роль в этой теории играет свойство Варда дифференциального базиса. Оказывается, что не всякий базис, определяемый локальной системой, обладает свойством Варда. В частности $\mathcal{P}$-ичный базис обладает свойством Варда, если определяющая его последовательность $\mathcal{P}$ ограничена, а среди неограниченных последовательностей существуют такие, которые определяют базис, не обладающий свойством Варда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bongiorno D., Di Piazza L., Skvortsov V.A. *Variational measures related to local systems and the Ward property of $\mathcal{P}$-adic path bases.* // Czechoslovak Mathematical Journal (в печати).

2. Bongiorno B., Di Piazza L., Skvortsov V.A. *On dyadic integrals and some other integrals associated with local systems.* // Journal of Math. Anal. and Appl. – 2002 – 271. – C. 506-524.

Смаилов Е.С., Бимендина А.У. (Казахстан, Караганда)
esmailov@kargu.krg.kz

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА В ТЕРМИНАХ СРЕДНИХ ФУРЬЕ-ПРАЙСА

Пусть $L_{p\tau}([0,1]), 1 \le p < +\infty, 1 \le \tau \le +\infty$ – пространство Лоренца [1]. $f \in L_{p\tau}([0,1])$ разлагается в ряд Фурье-Прайса, и $\Delta_\nu(f;x) = \sum\limits_{k=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_k\varphi_k(x) = S_{m_{\nu+1}}(f;x) - S_{m_\nu}(f;x)$ – разность частичных сумм ряда Фурье-Прайса [2]. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $1 \le p < q < +\infty$, $1 \le \tau < +\infty$. *Если для* $f \in L_{p\tau}([0,1])$ *ряд*

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} m_{\nu+1}^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\Delta_\nu(f)\|_{p\tau}^{\tau}$$

сходится, тогда $f \in L_{q\tau}([0,1])$, *и имеет место неравенство:*

$$\|f\|_{q\tau} \le c_{pq\tau} \left\{ \|f\|_{p\tau} + \left[\sum_{\nu=0}^{+\infty} m_{\nu+1}^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\Delta_\nu(f)\|_{p\tau}^{\tau} \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\}$$

где $const = c_{pq\tau} > 0$ *от* $f \in L_{p\tau}$ *не зависит.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах.* – М.: Мир, 1974.

2. Голубов Б.И., Ефимов А.Б., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987.

Солодов А.П. (Москва)
asolodov@mech.math.msu.su

О СВЯЗИ ИНТЕГРАЛОВ МАК-ШЕЙНА И ХЕНСТОКА ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ[79]

В данной работе рассматриваются обобщения интеграла Лебега для функций со значениями в банаховом пространстве.

Хорошо известно, что для интегрируемой по Хенстоку функции, принимающей действительные значения, ее интегрируемость по Мак-Шейну равносильна интегрируемости модуля этой функции. Если же пространство значений X бесконечномерно, среди интегрируемых по Мак-Шейну функций могут оказаться функции, нормы которых неинтегрируемы и даже неизмеримы. Тем самым, условия интегрируемости по Мак-Шейну вектор-функции, интегрируемой по Хенстоку, приходится искать в других терминах.

Одно из таких условий использует еще одно обобщение интеграла Лебега – интеграл Петтиса. А именно, в [1] доказано, что интегрируемость по Мак-Шейну равносильна одновременной интегрируемости по Хенстоку и по Петтису. Здесь получено условие, не использующее понятия интеграла Петтиса.

Под *разбиением* T отрезка $[a, b]$ будем понимать конечный набор пар (ξ_k, Δ_k), где $\xi_k \in [a, b]$, отрезки $\Delta_k \subset [a, b]$ не перекрываются и в сумме составляют весь отрезок $[a, b]$.

Определение 1. *Функция* $f : [a, b] \to X$ *называется интегрируемой по Хенстоку, если найдется вектор* $I \in X$ *со следующим свойством: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой масштаб* $\delta : [a, b] \to$

[79]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00420), программы «Университеты России» (проект УР.04.03.006) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1657.2003.1).

$(0, +\infty)$, *что для всякого разбиения T отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\xi \in \Delta_k \subset (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$, выполняется неравенство* $\| \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| - I\| < \varepsilon$.

Определение 2. *Функция $f : [a, b] \to X$ называется интегрируемой по Мак-Шейну, если найдется вектор $I \in X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$, что для всякого разбиения T отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_k \subset (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k))$, выполняется неравенство* $\| \sum_k f(\xi_k)|\Delta_k| - I\| < \varepsilon$.

Теорема. *Функция $f : [a, b] \to X$ интегрируема по Мак-Штейну тогда и только тогда, когда она интегрируема по Хенстоку и ее неопределенный интеграл абсолютно непрерывен.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Fredmin D.H. *The Henstock and McShane integrals of vector-valued functions* // Illinois J. Math. – 1994. – V. 38(3). – P. 471-479.

Старков В.В. (Петрозаводск)
starkov@mainpgu.karelia.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕИ ЛИНЕЙНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ. НОВЫЙ ПОРЯДОК

Теория однолистных и локально однолистных гармонических функций стала активно развиваться в 80-е годы прошлого века. Идею линейной инвариантности для исследования однолистных гармонических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций певым использовал T.Sheil-Small в 1990 г. в [1], в [2] и [3] эта идея использовалась для изучения локально однолистных квазиконформных гармонических функций и гармонических функций Блоха. В докладе будут обсуждаться новые результаты в этом направлении. В частности, вводится новое определение порядка, более удобное для описания поведения якобиана отображения и его оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* // J. London Math. Soc. – 1990. – V. 42(2). – P. 237-248.

2. Starkov V.V. *Harmonic locally quasiconformal mappings* // Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Ser.A. – 1995. – V. 49. – P. 183-197.

3. Старков В.В. *Круги однолистности гармонических локально квазиконформных отображений и гармонические функции Блоха*// Сиб. матем. журнал. – 1997. – Т. 38, № 4. – С. 915-924.

Субботин А.В. (Москва)
awsubbotin@mail.ru

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

В области $G \subset \mathbb{C}$ с C^1-гладкой границей Γ нормальная максимальная функция $Mu(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, произвольной функции u, определенной в области G, задается равенством $Mu(\zeta) = \sup\limits_{z\in N_\zeta} |u(z)|$, где N_ζ – внутренняя нормаль в точке ζ. Гармоническую в G функцию u относят классу h^p_{max}, $p > 0$, если $Mu(\zeta)$ интегрируема в p-ой степени по мере Лебега на Γ. Метрика в пространствах h^p_{max}, $p > 0$, определяется формулой $\rho_p(u_1, u_2) = \left(\|u_1 - u_2\|^*_p\right)^{\alpha_p}$, $u_1, u_2 \in h^p_{max}$, где $\alpha_p = \min(1, p)$ и

$$\|u\|^*_p = \left\{\int\limits_\Gamma [Mu(\zeta)]^p \, |d\zeta|\right\}^{1/p}, \quad u \in h^p_{max}.$$

В дальнейшем рассматриваем только случай, когда G или единичный круг $|z| < 1$ (см. [1]), или верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. В этих случаях известная теорема Ганди, Буркхолдера и Сильверстейна [2] характеризует функции классов h^p_{max}, $p > 0$, в терминах действительных частей аналитических функций классов Харди в области G.

Теорема 1. *Любая функция u класса h^p_{max}, $p > 0$, обладает конечными нормальными пределами $u(\zeta) = \lim\limits_{N_\zeta \ni z \to \zeta} u(z)$ почти всюду на Γ.*

Теорема 2. *Пространства h^p_{max}, $p > 0$, изоморфны некоторым действительным подпространствам комплексных пространств Харди аналитических функций в области G и, следовательно, представляют собой сепарабельные F-пространства относительно метрик ρ_p, сходимость в которых сильнее равномерной сходимости на компактах области G.*

Для любой функции u в G под u_h, $h > 0$, понимаем функцию $u((1-h)z)$ в случае круга $|z| < 1$ и $u(z+h)$ в случае полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема 3. *Для любой функции $u \in h^p_{max}$ функции u_h, $h > 0$, сходятся к u при $h \to 0+$ по метрике ρ_p.*

Теорема 4. *Множество L в пространстве h^p_{max}, $p > 0$, вполне ограничено в том и только в том случае, когда оно ограничено и, кроме того, либо сходимость $u_h \to u$ при $h \to 0+$ (в метрике ρ_p) равномерна по $u \in L$, либо выполнены следующие три условия:*

1) несобственные интегралы $\int\limits_\Gamma [Mu(\zeta)]^p \, |d\zeta|$ сходятся равномерно по $u \in L$ как несобственные интегралы первого рода;

2) первообразные функций $[Mu(\zeta)]^p$, $u \in L$, равностепенно абсолютно непрерывны на каждом компакте из Γ;

3) из любой последовательности функций множества L можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на почти каждой внутренней нормали области G.

В случае, когда G – единичный круг, теоремы 1-4 доказаны в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов В.И., Захарян В.С., Субботин А.В. *Линейно-топологические свойства максимальных пространств Харди гармонических функций в круге* // Докл. Нац. Акад. Наук Арм. – 2002. – Т. 102, № 3. – С. 203-210.

2. Burkholder D.L., Gundy R.F., Silverstein M.L. *A maximal function characterization of the class H^p*// Trans. AMS. – 1971. – V. 157, No 1. – P. 137-153.

Субботин Ю.Н. (Екатеринбург)

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И НАИЛУЧШИЕ ОЦЕНКИ МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ[80]

В докладе речь пойдет о решении двух типов экстремальных задач. Первая из них связана с колмогоровскими поперечниками для классов $\widetilde{W}_{L_r}H^{\omega_2}$, где L_r – линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными коэффициентами.

Пусть $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta)$ не убывает, непрерывна и выпукла вверх на $[0, \pi]$. Найти систему $2n$-непрерывных линейно-независимых 2π-периодических функций, что для любого полинома $Q_{2n}(x)$ по этой системе выполняется неравенство $\omega_2(L_rQ_{2n}, \delta) \leq A(L_r, n)\omega(\delta)$ $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{n}$ с минимально возможной точной константой $A(L_r, n)$, где $\omega_2(f, \delta)$ – модуль гладкости второго порядка.

Дано точное решение этой задачи в случае, если характеристический многочлен формально самосопряженного дифференциального оператора $L_r = L_r(\mathcal{D}) = \sum\limits_{k=0}^{r} c_k\mathcal{D}^k$ ($\mathcal{D}^k$ – оператор дифференцирования k-го порядка) имеет лишь вещественные корни. При этом используются результаты Ю.Н. Субботина, А. Шармы и И. Цимбаларио, В.Э. Гейта.

Решение указанной задачи тесно связано с методами решения задач экстремальной интерполяции и интерполяции в среднем на равномерной сетке на $(-\infty, \infty)$ с минимальным значением нормы значений оператора $L_r(\mathcal{D})$ на интерполянте. Будет дан обзор по этой тематике и сформулированы нерешенные проблемы в том числе и для оператора $L_r(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^r$. В частности, в последнем случае при интерполяции в среднем с шагом h при натуральных $h \geq 2$ изучаемые величины равны бесконечности.

Субботин Ю.Н., (Екатеринбург), Теляковский С.А. (Москва)
sergeytel@mtu-net.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОДНЫМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ[81]

Пусть W^r – класс 2π-периодических функций f, удовлетворяющих условию

$$\left|f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'')\right| \leqslant |x' - x''|,$$

[80]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00764 и программы НШ.1347.2003.1.

[81]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00764 и 02-01-00787).

и $s_{r-1,2n}(f,x)$ – сплайн степени $r-1$, дефекта 1 с узлами в $2n$ равноотстоящих точках периода, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах сплайна, если $r-1$ нечетно, и в серединах между узлами, если $r-1$ четно.

В.М. Тихомиров установил, что колмогоровские поперечники $d_{2n}(W^r)$ достигаются при приближении функций $f(x) \in W^r$ не только тригонометрическими полиномами порядка $2n$, но и сплайнами $s_{r-1,2n}(f,x)$. Н.П. Корнейчук показал, что производные первого порядка сплайнов $s'_{r-1,2n}(f,x)$ доставляют наилучшее на классе W^r приближение производных $f'(x)$.

Нами изучается задача о приближении производных $f^{(r-1)}(x)$ функций из W^r производными сплайна $s^{(r-1)}_{r-1,2n}(f,x)$.

Теорема. *Справедлива равномерная по r и n оценка*

$$A_{r,n} := \sup_{f\in W^r} \| f^{(r-1)}(x) - s^{(r-1)}_{r-1,2n}(f,x) \|_C = \frac{2}{\pi n}\log\min(r,n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отметим, что из результатов А.А. Сазанова о приближении на всей оси непериодических функций интерполяционными сплайнами следует равномерная по r и n оценка

$$A_{r,n} \leqslant \frac{2}{\pi n}\log r + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Суетин В.Ю. (Тверь)
Suetin.Valeriy@tversu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЛОЩАДЕЙ К ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА Σ

Класс Σ образован всеми однолистными во внешности единичного круга функциями $f(z)$ вида

$$f(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots.$$

Выделим подкласс

$$\Sigma_0 = \{f \in \Sigma : b_0 = 0\}.$$

При фиксированном натуральном n и $\eta = e^{2\pi i/n}$ определим функцию, ассоциированную с функцией $f(z)$:

$$F(z) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \eta^{\nu} f(\eta^{-\nu} z) = z^n(1 + c_n z^{-n} + c_{2n} z^{-2n} + c_{3n} z^{-3n} + \dots) \quad (1)$$

и $Q(w) = w^{1/2}$.

Теорема 1. *Если при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ и $\eta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ для функции $f \in \Sigma$ образ внешности единичного круга при отображении* (1) *n-листен, то справедливо неравенство площадей в метрике квадратичного дифференциала $(Q'(w)dw)^2$:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)|\beta_\nu|^2 \le 1, \qquad (2)$$

где $\left(F(z)\right)^{1/2} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^{\frac{n}{2}(1-2\nu)}$.

С учетом $\beta_1 = \frac{1}{2}c_n$ можем записать следствие из неравенства (2) в виде $\frac{1}{2}|c_n| \le 1$; спецификации этого неравенства дают для класса Σ_0 неравенства типа Альфорса, связывающие b_{n-1} с b_1 и b_2, а также точные снизу двусторонние оценки $1/2 \le \max|b_3| \le 1$; $2/5 \le \max|b_4| \le 16/15$; $1/3 \le \max|b_5| \le 11/9$; $2/7 \le \max|b_6| \le 142/105$; $1/7 \le \max|b_7| \le 67/45$; $2/9 \le \max|b_8| \le 1.4$; $1/5 \le \max|b_9| \le 1.9$; $2/11 \le \max|b_{10}| \le 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* – М.-Л.:ГИФМЛ, 1952. – 540 с.

Таджигитов А.А.(Казахстан, Астана)
tadjigit@yandex.ru

О ЗАВИСИМОСТИ НОРМЫ МАТРИЦЫ ОТ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть дана матрица А размерности $N \times N$. Числа $d_1, ..., d_m$, $m < N$ – значения ее ненулевых элементов.

В работе изучаются следующие задачи:

1. Как расположить эти ненулевые элементы $d_1, ..., d_m$ так чтобы:

а) норма $\|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}}$ была бы максимальной (минимальной).

б) спектральный радиус $r(A)$ был бы максимальным (минимальным).

2. Пусть в матрице А ненулевые элементы $d_1, ..., d_{m-1}$ зафиксированы. Как расположить в данной матрице ненулевой элемент d_m чтобы:

а) норма $\|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}}$ была бы максимальной (минимальной).

б) спектральный радиус $r(A)$ был бы максимальным (минимальным).

Множество $Q = \{(k,l) : k,l = 1,2,...,N\}$ назовем решеткой размерности $N \times N$.

Множество

$$Q_0 = \{(k_i, l_j) : \{k_i\}_{i=1}^{r} \subset (1,2,...,N), \{l_j\}_{j=1}^{m} \subset (1,2,...,N)\}$$

назовем подрешеткой размерности $r \times m$.

Пусть $m \in N$, $d_1, ..., d_m$ – положительные числа. Через D_m обозначим множество неотрицательных матриц A, ненулевые элементы которых принимают значения $d_1, ..., d_m$. В дальнейшем будем рассматривать такие матрицы.

Пусть $A \in D_m$. Через $P(A)$ обозначим множество индексов с положительными элементами.

Теорема 1. *Если $m \leq N$, Q_0 – произвольная подрешетка размерности $1 \times m$, то*

$$\sup_{P(A) \subset Q} \|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}} = \sup_{P(A) \subset Q_0} \|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}}$$

Если $m = kN$, $k \leq N$, Q_1 – произвольная подрешетка размерности $k \times N$, то

$$\sup_{P(A) \subset Q} \|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}} = \sup_{P(A) \subset Q_1} \|A\|_{l_2^{(N)} \to l_2^{(N)}}$$

Теорема 2. *Пусть $d_1 = ... = d_m = d$, $m < (N-1)^2$, Q_0 – произвольная подрешетка размерности $([N^{1/2}]) \times ([N^{1/2}]+1)$, главная диагональ которой лежит во множестве $(x, y) \in R^{2n} : x = y$. Тогда*

$$\sup_{P(A) \subset Q} r(A) \leq N^{\frac{1}{2}} d, \qquad \sup_{P(A) \subset Q_0} r(A) \geq [N^{\frac{1}{2}}] d$$

где $[N^{\frac{1}{2}}]$- целая часть числа $N^{\frac{1}{2}}$

Теорема 3. *Пусть $d_1, ..., d_m$ значения ненулевых элементов матрицы A. Пусть A_0 – минимальная подматрица, содержащая эти элементы, так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находился хотя бы один нулевой элемент. Через A_d обозначим матрицу, полученную из матрицы A добавлением в одно из свободных мест, т.е. мест, где стоят нулевые элементы, элемента со значением d. Тогда*

$$\sup_{d \in A} \|A_d\| = \sup_{d \in A_0} \|A_d\|$$

Теляковский Д.С. (Москва)
telaykov@mtu-net.ru

ОБ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ K' МЕНЬШОВА[82]

Рассматриваются функции $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, для которых при отображении $w = = f(z)$ сохраняются углы между лучами из некоторого набора попарно неколинеарных лучей, исходящих из точек области, т.е.

[82]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00913) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-1892.2003.1.

для $\xi \in G$ существует $\lim \operatorname{Arg} \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}$, при $z \to \xi$ вдоль лучей из набора.

Функции $f(z)$, для которых отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между тремя попарно неколинеарными лучами, исходящими из точки ξ, Д.Е. Меньшов назвал удовлетворяющими условию K' в точке ξ. Д.Е. Меньшов доказал, что однолистная непрерывная в области функция, которая удовлетворяет условию K' во всех точках области, за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек, аналитична. Ю.Ю. Трохимчук снял в этой теореме предположение об однолистности $f(z)$.

Легко видеть, что в этой теореме условие непрерывности функции нельзя заменить условием ее ограниченности. Чтобы это сделать, надо увеличить количество лучей и наложить дополнительное условие на их расположение. Будем говорить, что пятерка попарно неколинеарных лучей, исходящих из точки ξ, растопырена, если с каждой стороны от любой проходящей через ξ прямой лежит по крайней мере два луча из пятерки.

М.Т. Бродович доказала, что если ограниченная в области функция $f(z)$ в каждой точке области сохраняет углы между лучами из двух растопыренных пятерок, причем для каждого натурального числа m не все углы между этими десятью лучами кратны $2\pi/m$, то функция $f(z)$ аналитична.

Доказано, что в этой теореме достаточно предполагать, что углы сохраняются между лучами из одной растопыренной пятерки.

Терёхин П.А. (Саратов)
TerehinPA@info.sgu.ru

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОСРЕДСТВОМ ПОДПРОСТРАНСТВ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА[83]

Для функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ положим

$$V(\varphi) = \overline{span}\{\varphi(\cdot - \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}^d\}$$

– замыкание по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ линейной оболочки системы целочисленных сдвигов функции φ. Подпространство $V(\varphi)$ называется инвариантным относительно сдвига подпространством, порожденным функцией φ. Далее, рассмотрим систему подпространств

$$V_k(\varphi) = \{v(2^k\cdot) : v \in V(\varphi)\}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Теорема. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет следующему условию: существует окрестность нуля Ω такая, что для п.в. $x \in \Omega$*

[83]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00123) и гранта «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-1295.2003.1).

выполняются неравенства $|\hat{\varphi}(x)| \geq c > 0$ *и*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\varphi}(x-\alpha)|^2 \leq C |\hat{\varphi}(x)|^2.$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *справедливо представление*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} v_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\| < \infty,$$

для некоторой последовательности функций $v_k \in V_k(\varphi)$, $k = 0, 1, \ldots$

Тиман М.Ф., Шаврова О.Б. (Украина, Днепропетровск)
mtiman2002@yahoo.com

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются полигармонические уравнения $\Delta^k U = 0$, где $\Delta^k U = \Delta(\Delta^{k-1}U)$, k – целое число, $\Delta U(r,x)$ $(0 \leq r < 1,\ 0 \leq x \leq 2\pi)$ – оператор Лапласа для функции $U(r,x)$. Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция является граничной для функции $U(r,x)$, когда $r \to 1$, а $\omega_m(f, 1-r)$ – модуль гладкости порядка m в равномерной метрике. Пусть, кроме того, нормальные производные порядка μ $(\mu = 1, 2, \ldots, k-1)$ функции $U(r,x)$ на границе единичного круга равны нулю. Функция $U(r,x)$, удовлетворяющая указанной выше краевой задаче, имеет вид: $U(r,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \left\{1 + \sum\limits_{\mu=1}^{k-1} (1-r^2)^{\mu} P_{\mu}(n)\right\} A_n(x)$, где $A_0(x) = \frac{a_0}{2}$, $A_{\nu}(x) = a_{\nu}\cos\nu x + b_{\nu}\sin\nu x$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, a_{ν}, b_{ν} – коэффициенты Фурье граничной функции $f(x)$, а полиномы $P_{\mu}(n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, k-1)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\left\{\frac{d^m}{dr^m}\left[r^n + \sum_{\mu=1}^{k-1} r^n (1-r^2)^{\mu} P_{\mu}(n)\right]\right\}_{r=1} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Теорема. *В равномерной метрике при* $r \to 1$ *справедливы точные порядковые равенства*

$$\|U(r,x) - f(x)\| \cong \omega_k(f, 1-r), \tag{1}$$

когда k *– четное число, а для нечетного* k

$$\|U(r,x) - f(x)\| \cong \omega_{k+1}(f, 1-r) + (1-r)^{-1}\omega_{k+1}(F, 1-r), \tag{2}$$

где функция $f(x)$ *имеет ряд Фурье* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, *а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *есть ряд Фурье функции* $F(x)$.

В случае $k = 2$ оценка сверху в (1) получена С. Каниевым (см. [1]). Порядковые равенства (1) для $k = 2$ и (2) для $k = 1$ получены в [2]. Соотношения типа (1) и (2) получены также и для интегральных метрик. Рассмотрены аналогичные вопросы и для решений полигармониеских уравнений в верхней полуплоскости, то есть для уравнений $\Delta^k U(x, y)$ $(-\infty < x < \infty,\ y > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каниев С. *Об отклонении в среднем бигармонических в круге функций от их граничных значений* // Функциональный анализ и теория функций. Сб. 2. Изд. Казанского университета. – 1994. – С. 148.

2. Тиман М.Ф. *Оценка производных решений краевой задачи для полигармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 3. – С. 574-579.

Тимофеев В.Г. (Саратов)

О ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ В СЛОЕ ФУНКЦИЯХ

Пусть $C = C(R^m)$ – пространство непрерывных ограниченных на R^m функций с нормой $\|u\|_C = sup\{|u(x)| : x \in R^m\}$; $L_\infty = L_\infty(R^m)$ – пространство измеримых существенно ограниченных на R^m функций с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)| : x \in R^m\}$; $D = D(R^m)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых на R^m функций. Обозначим через U класс функций $u \in C$, для которых значение оператора Лапласа

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

принадлежит $L_\infty(R^m)$. Оператор Лапласа при этом понимается в следующем смысле: относительно пары $u \in C$ и $v \in L_\infty$ считаем, что $u \in U$, а $v = \Delta u$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется равенство

$$\int\limits_{R^m} v\varphi dx = \int\limits_{R^m} u \Delta \varphi dx.$$

Выделим в R^m слой

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in R^m : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = \overline{2,m}\}, h > 0.$$

В работах автора [1,2] получено интегральное представление функций $u \in U$

$$u(x) = -\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{(m-2)2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}d\xi - \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{(m-2)2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\Pi_h} \Delta u(\xi)G(\xi,x)d\xi, \tag{1}$$

где $x \in \Pi_h$, $G(\xi, x)$ – функция Грина слоя Π_h, а $\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}$ – производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Pi_h$ области Π_h.

Представление (1) (для $m > 2$ [2], для $m = 2$ [1]) дает возможность нового понимания гармонических и полигармонических функций в слое Π_h [3].

Считаем в дальнейшем, что функция из некоторого класса является полигармонической порядка n в Π_h, если функция

$$\Delta_h u(P) = -\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{(m-2)2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}d\xi - u(P), m > 2 \tag{2}$$

или

$$\Delta_h u(P) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}d\xi - u(P), m = 2 \tag{3}$$

является полигармонической функцией порядка $n-1$, где точка $P \in \Pi_h$, а h – любое достаточно малое положительное число.

Используя (2), (3), можно изучать свойства равномерно сходящихся последовательностей полигармонических функций, в частности, получать теоремы типа теоремы Арцелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев В.Г. *Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа* // Теория функций и приближений,Саратов,изд-во СГУ, – 1983. – С. 84-92.

2. Тимофеев В.Г. *Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных* // Матем.заметки. – 1985 – Т. 37(5) – С. 676-689.

3. Привалов И., Пчелин Б. *К общей теории полигармонических функций* // Матем. сборник. – 1937 – Т. 2(44), № 4 – С. 745-758.

Тлеуханова Н.Т. (Казахстан, Астана)
er-nurs@yandex.ru

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Класс Коробова $E^\alpha[0,1]^n$ определятся как множество 1-периодических функций f из $L_1[0,1]^n$ с коэффициентами Фурье $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, удовлетворяющих соотношению $\|f\|_{E^\alpha[0,1]^n} = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} |\bar{k}^\alpha a_k| < \infty$, здесь и далее $\bar{k}^\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} \bar{k}_j^\alpha$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}, j = 1, 2, ..., n$.

Будем рассматривать следующую задачу. Пусть $f \in L_1$, $f \sim \sum\limits_{k\in Z^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ некоторая последовательность комплексных чисел.

Определим мультипликативное преобразование $f_\lambda \sim \sum\limits_{k\in Z^n} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx}$. Для функции f из пространства Коробова требуется приближенно вычислить мультипликативное преобразование f_λ, по значениям функции f в некоторых узлах $\{t_k\}_{k=1}^{M}$ из $[0,1]^n$ и оценить погрешность.

Пусть $\mu \in \mathbb{Z}^n$, G_m – ступенчатый гиперболический крест порядка m. Для функции $f \in C[0,1]^n$ и мультипликатора $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu\in Z^n}$ определим оператор

$$F_{2^m}(f,\lambda;x) = \sum_{\mu\in G_m} \lambda_\mu \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j\geq\nu_j}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(r_j+sgn(k_j-\nu_j))} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \ldots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) e^{2\pi i\mu\left(\frac{r}{2^k}+x\right)}.$$

Теорема 1. *Пусть $2 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 1$, $f \in E^\alpha[0,1]^n$, G_m – ступенчатый гиперболический крест порядка m, последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{\mu\in Z^n} (\lambda_\mu \mu^{-\alpha})^{q'} < \infty$. Тогда*

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q} \leq C\left[\frac{1}{2^{\alpha m}}\left(\sum_{s=0}^{m}(m-s)^{(n-1)q'} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=s} \sum_{r_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{r_n=0}^{2^{\nu_n}-1} |\lambda_r|^{q'}\right)^{1/q'} + \left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m} (\lambda_\mu \mu^{-\alpha})^{q'}\right)^{1/q'}\right] \|f\|_{E^\alpha}.$$

Следствие. *Пусть $2 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$, последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ удовлетворяет условию $|\lambda_k| \leq C|k|^{-\beta}$, $k \in Z^n \setminus \{0\}$. Тогда*

$$\textit{при } q'\beta < n \quad \|f_\lambda - F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q} \leq C_{q,\alpha} \frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+\frac{\beta}{n})}}{M^{(\alpha+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q'})}} \|f\|_{E^\alpha},$$

при $q'\beta = n$ $\quad \|f_\lambda - F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q} \le C_{q,\alpha}\dfrac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+1)+\frac{n}{q'}}}{M^\alpha}\|f\|_{E^\alpha},$

при $q'\beta > n$ $\quad \|f_\lambda - F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q} \le C_{q,\alpha}\dfrac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+1)}}{M^\alpha}\|f\|_{E^\alpha},$

где M *количество узлов в* $F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)$.

Трошина Н.Ю (Саратов)
TroshinaNU@info.sgu.ru

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ t = 0,\dots,T-1,$$

$$Px(0) + Qx(T) = a,$$

$$J(x,u) = \sum_{t=0}^{T} x^*(t)Mx(t) + \sum_{t=0}^{T-1} u^*(t)Du(t) \to \ min,$$

где $A,\ M$ – $n\times n$-матрицы, $B,\ D$ – матрицы размерностей $n\times m,\ m\times m$ соответственно, P, Q – $r\times n$-матрицы, $Tm \ge n, r \le 2n$. Предполагается, что матрицы $A,\ D$ обратимы, $M,\ D$ – положительно определенные, $rank[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n,\ rank[P,Q] = r$. При сделанных предположениях решение рассматриваемой задачи существует и единственно, и для нее справедлив принцип максимума Понтрягина как необходимое и достаточное условие оптимальности. Краевая задача принципа максимума имеет вид:

$$x(t+1) = Ax(t) + BD^{-1}B^*\psi(t+1),$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mx(t),$$

$$Px(0) + Qx(T) = a,$$

$$\psi(0) = -P^*\lambda, \quad \psi(T) = Q^*\lambda - Mx(T). \tag{1}$$

Так как $rank[P,Q] = r$, то из условий трансверсальности (1) можно исключить множитель λ и записать их в виде

$$R\psi(0) + S(-\psi(T) - Mx(T)) = 0,$$

где $R,\ S$ – матрицы размерностей $(2n-r)\times n$.

Теорема. *Для решения* $(x(t),\psi(t)),\ t = 0,\dots,T$, *краевой задачи справедливы формулы:*

$$x(t) = A_t x(T) + B_t\psi(T),\ t = 0,\dots,T-1,$$

$$\psi(t) = C_t x(T) + D_t \psi(T),\ t = 0, \dots, T-1,$$

где коэффициенты $A_t,\ B_t,\ C_t,\ D_t$ *вычисляются рекуррентно:*

$$A_{T-1} = A^{-1},\ B_{T-1} = -A^{-1}BD^{-1}B^*,\ C_{T-1} = -MA_{T-1},$$
$$D_{T-1} = A^* - MB_{T-1},$$

$$A_t = A^{-1}(A_{t+1} - BD^{-1}B^*C_{t+1}),$$
$$B_t = A^{-1}(B_{t+1} - BD^{-1}B^*D_{t+1}),\ t = 0, \dots, T-2,$$
$$C_t = A^*C_{t+1} - MA_{t+1},\ D_t = A^*D_{t+1} - MB_{t+1},\ t = 0, \dots, T-2.$$

При этом $x(T), \psi(T)$ *удовлетворяют системе уравнений:*

$$(PA_0 + Q)x(T) + PB_0\psi(T) = a,$$
$$(RC_0 - SM)x(T) + (RD_0 - S)\psi(T) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Трошина Н.Ю. *Решение одной дискретной краевой задачи принципа максимума*// Математика. Механика. Сб. науч. трудов. – Саратов, 2001.

2. Трошина Н.Ю. *Необходимость и достаточность принципа максимума для одной дискретной задачи оптимального управления.* Деп. в ВИНИТИ 05.05.2003, №864-В2003.

Трушкова Е.А. (Переславль-Залесский)
katerinatr@mail.ru

ФУНКЦИИ, СИНТЕЗИРУЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассматриваем всевозможные задачи оптимального управления вполне управляемой системой

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0,1],$$

где x, u – n-векторы, $A(t)$, $B(t)$ – аналитические на отрезке $[0,1]$ матрицы-функции размера $n \times n$, $\det B(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$, на минимум интегрального квадратичного критерия качества

$$J = \int_0^1 \Big(u(t), u(t)\Big) dt \to \min$$

при различных условиях, связывающих значения $x(0)$ и $x(1)$.

Используя соотношения принципа максимума Л.С. Понтрягина

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \frac{1}{2}B(t)B^T(t)\psi(t), \quad \dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t),$$

из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделены семейства

$$M^*_{n,D,d} = \left\{ x(t) \middle| \exists p \in R^n : x(t) = \Psi(t)\Phi_1(t)(Dp + d) \right\},$$

где $\Psi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $\Phi_1(t)$ – первые n строк фундаментальной матрицы решений соотношений принципа максимума, D – $2n \times n$ матрица, все миноры порядка n которой, за исключением минора, состоящего из строк с номерами $1, 2, \ldots, i-2, i-1, i+1, i+2, \ldots, n-1, n, n+i$, $i = \overline{1,n}$, вырождены, d – $2n$-вектор. Положим $F(t,x,D,d) = D(\Phi_1(t)D)^{-1}\left(\Psi^{-1}(t)x - \Phi_1(t)d\right) + d$, $N(D)$ – множество нулей функции $\det(\Phi_1(t)D)$ на $[0,1]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество $N(D)$ на отрезке $[0,1]$ конечно.*

Синтезирующая функция выделенных семейств получена в виде

$$u(t,x) = B^{-1}(t)\Psi(t)\dot{\Phi}_1(t)F(t,x,D,d).$$

Для нее справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если $x(t)$ есть решение системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t,x), \quad t \in [0,1],$$

и $\dot{x}(t)$ непрерывна на $N(D)$, то $x(t) \in M^*_{n,D,d}$. Обратно, если $x(t) \in M^*_{n,D,d}$, то $x(t)$ является решением системы (1), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна на $N(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромов А.П. *О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества*// Теория функций и приближений: Сб. тр. 4-ой Сарат. зимн. шк. – Ч.1. – Саратов, 1990.

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

О СУЩЕСТВОВАНИИ УСЛОВНЫХ ЧЕБЫШЕВСКИХ ЦЕНТРОВ

Если X – банахово пространство, L – замкнутое подпространство в X, A – ограниченное множество в X, то $r_L(A) = \inf\limits_{y \in L} \sup\limits_{x \in A} \|y - x\|$ – чебышевский радиус множества A относительно L. Элемент $y^* \in L$, для которого $\sup_{x\in A}\|y^* - x\| = r_L(A)$ – условный чебышевский центр множества A в L. Справедливо утверждение общего характера.

Теорема. *Если в подпространстве $L \subset X$ существует условный чебышевский центр для любого ограниченного множества $A \subset X$, E – рефлексивное подпространство в X, то в подпространстве $L+E$ существует условный чебышевский центр для любого ограниченного множества $A \subset X$.*

Нерешенной остается следующая задача: каждое ли подпространство существования $L \subset C(Q)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$ содержит условный чебышевский центр для любого компактного множества $K \subset C(Q)$ (см. [1]). Положительное решение этой задачи установлено для некоторых подпространств Гротендика $L \subset C(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carlo Franchetti and Cheney E.W. *The embedding of proximinal sets*// J. of Appr. Theory. – 1986. – V. 48, № 2. – P.213-226.

Фарков Ю.А. (Москва)
farkov@msgpa.ru

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТАХ НА ПОЛУОСИ[84]

Для произвольных $p, n \in \mathbb{N}, p \geq 2$, найдены коэффициенты $\{a_\alpha\}$ такие, что функциональное уравнение

$$\varphi(x) = p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(px \ominus \alpha) \tag{1}$$

имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами:

1) система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$;

2) $\operatorname{supp}\varphi = [0, p^{n-1}]$;

3) φ генерирует кратномасштабный p-анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В уравнении (1) через $\ominus$ обозначено вычитание по модулю p на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ (см., например, [1, с. 29]).

Коэффициенты $\{a_\alpha\}$ находятся из некоторой системы линейных алгебраических уравнений. В случае $n = 1$ все $a_\alpha = 1/p$ и решением уравнения (1) является функция Хаара $\varphi = \chi_{[0,1)}$. Если $p = n = 2$, то

$$a_0 = (1+a+b)/4, \quad a_1 = (1+a-b)/4, \quad a_2 = (1-a-b)/4, \quad a_3 = (1-a+b)/4$$

и

$$\varphi(x) = (1/2)\chi_{[0,1)}(x/2)(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}(x/2)), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

[84]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00386).

где $0 < |a| \leq 1, |a|^2 + |b|^2 = 1$, $\{w_m\}$ – классическая система Уолша (см. [2]). В общем случае уравнение (1) имеет решение

$$\varphi(x) = (1/p^{n-1})\chi_{[0,1)}(x/p^{n-1})(1 + \sum_{m\in\mathbb{N}(p,n)} A(m)W_m(x/p^{n-1})), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $\mathbb{N}(p,n)$ – подмножество в $\mathbb{N}$, определяемое по p и n, $\{W_m\}$ – обобщенные функции Уолша, а коэффициенты $\{A(m)\}$ явно выражаются через те же параметры, что и $\{a_\alpha\}$ (при $p = n = 2$ формула (3) совпадает с (2)). Для $p = 2$ вейвлет ψ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, ассоциированный с масштабирующей функцией φ, находится по формуле

$$\psi(x) = 2\sum_{\alpha=0}^{2^n-1}(-1)^\alpha\overline{a}_\alpha\varphi(2x\ominus(\alpha\ominus 1)).$$

При $p > 2$ функции φ соответствуют $p-1$ вейвлета в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Вывод формулы (3) будет опубликован в IJWMIP (International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.

2. Lang W.C. *Wavelet analysis on the Cantor dyadic group* // Houston Journal of Mathematics. – 1998. – Vol. 24, № 3. – P. 533-544.

Федоровский К.Ю. (Москва)
const@fedorovski.mccme.ru

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[85]

В докладе предполагается рассмотреть задачу Дирихле для бианалитических функций в ее классической постановке. Скажем, что ограниченная область Ω является *регулярной в смысле задачи Дирихле для бианалитических функций* (далее, *$\bar\partial^2$-регулярной*), если для любой функции φ непрерывной на $\partial\Omega$ найдется функция f, непрерывная в $\overline{\Omega}$, бианалитическая на Ω и такая, что $f_{|\partial\Omega} = \varphi$.

Имеет место гипотеза о том, что всякая ограниченная область Ω *не является* $\bar\partial^2$-регулярной. В докладе будут приведены результаты, поддерживающие эту гипотезу. Так, будет показано, что всякая жорданова область с границей класса $C^{1,\alpha}$ (где $\alpha \in (0,1)$) не является

[85]Автор поддержан фондом INTAS (проект YSF 2001/2-16 Renewal) и Программой поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2003.2040.1).

$\bar{\partial}^2$-регулярной. Кроме того, будут приведены некоторые результаты касающиеся свойства единственности решения в задаче Дирихле для бианалитических функций и связь этой задачи с вопросами равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами, полученные в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кармона Х.Х., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций* // Матем. сб. – 2002. – Т. 193(10). – С. 75-98.

Хабибуллин Б.Н., Чередникова Л.Ю. (Уфа)
khabib-bulat@mail.ru

МНОЖЕСТВА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВЕСОВЫХ АЛГЕБР ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[86]

Пусть Ω – *ограниченная* область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(\Omega)$ - пространство голомофных в Ω функций. Подмножество $\Lambda \subset \Omega$ – *множество неединственности* для подпространства L из $H(\Omega)$, если существует ненулевая функция $f \in L$, обращающаяся в нуль на Λ; далее $\#(\Lambda \cap S)$ – число точек из Λ, лежащих в $S \subset \Omega$.

Пусть $p \geqslant 0$ – *субгармоническая функция в Ω с мерой Рисса ν_p*. Ниже в терминах меры ν_p даются условия, при которых $\Lambda \subset \Omega$ – множество неединственности для алгебры $A_p(\Omega) = \{f \in H(\Omega) : |f(z)| \leqslant C_f \exp(C_f p(z)),\ z \in \Omega,\ C_f$ – постоянная$\}$.

Энтропией линейной связности подмножества $S \subset \Omega$ называем величину

$$\ell(S;\Omega) = \sup_{z,w\in S} \inf_{l(z,w)\subset\Omega} \frac{\text{длина}\, l(z,w)}{\operatorname{dist}\big(l(z,w),\partial\Omega\big)},$$

$$l(z,w) \text{ – спрямляемые дуги, } z,w \in l(z,w),$$

a $\operatorname{dist}(B,\partial\Omega)$ – евклидово расстояние от $B \subset \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω.

Теорема неединственности. *Пусть при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ для всех $z \in \Omega$*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\big(z + \varepsilon \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)e^{i\theta}\big)\, d\theta + \ln\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \leqslant Cp(z) + C,$$

где C - постоянная, а для некоторого семейства $\{S_k\}$, $k = 1,2,\ldots$, $\Lambda \subset \cup_{k=1}^{\infty} S_k$, борелевских непересекающихся относительно компакт-

[86]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00033) и фонда «Государственная поддержка ведущих научных школ» (проект НШ-1528.2003.1).

ных подмножеств в Ω имеют место соотношения

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\#(\Lambda\cap S)}{\nu_p(S_k)} < \infty, \text{ а также } \overline{\lim}_{k\to\infty} \ell(S_k;\Omega) < \infty \\ \text{или } \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\text{диаметр}\, S_k}{\operatorname{dist}(S_k,\partial\Omega)} < 2. \qquad (*)$$

Тогда Λ – множество неединственности для алгебры $A_p(\Omega)$.

Частично используя [1, теорема 2.2], можно убедиться, что *условия (*) в теореме неединственности точны.* Последнее неравенство в (*), вообще говоря, слабее предыдущего. С условием в виде последнего неравенства из (*) эта теорема неединственности для случая, когда Ω – *круг*, следует из основного результата работы [2]. В приведенном виде она содержится в объемном исследовании [3], где доказана и

Теорема устойчивости [3]. *Пусть функция p такая же, как в теореме неединственности. Если для подмножеств $\Lambda = \{\lambda_k\}$ и $\Gamma = \{\gamma_k\}$ из Ω выполнено $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{|\lambda_k-\gamma_k|}{\operatorname{dist}\big([\lambda_k,\gamma_k],\partial\Omega\big)} < \infty$ или $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{|\lambda_k-\gamma_k|}{\min\big\{\operatorname{dist}(\lambda_k,\partial\Omega),\operatorname{dist}(\gamma_k,\partial\Omega)\big\}} < 2$, то Λ и Γ являются последовательностями неединственности для $A_p(\Omega)$ лишь одновременно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамоян Ф.А. *Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста*// Изв. АН Арм. ССР. Математика. – 1978. – Т. XIII(5-6). – С. 405-422.
2. Чередникова Л.Ю. *Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге*// Матем. заметки (принята к печати).
3. Хабибуллин Б.Н. *Поддивизоры нулей для классов голоморфных функций и энтропия линейной связности*// Изв. РАН. Сер. матем. (направлена в печать).

Халова В.А. (Саратов)
HalovaVA@info.sgu.ru

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[87]

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор:

$$Af(x) = \alpha_1 \int\limits_0^x (x-t)f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} (1-x-t)f(t)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^m g_k(x)(f,v_k), \quad x\in[0,1], \qquad (1)$$

[87]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169).

где $(f,v_k)=\int\limits_0^1 f(t)v_k(t)\,dt$, $\beta=\alpha_1^2-\alpha_2^2\neq 0$, $v_k\in C^2[0,1]$, $g_k\in C^2[0,1]$, системы $\{g_k''\}_1^m$, $\{v_k''(t)\}_1^m$ линейно независимые.

Оператор (1) является одним из простейших интегральных операторов, некоторые производные ядер которых имеют разрывы первого рода на линиях $t=x$ и $t=1-x$. Такие операторы рассматривал впервые А.П. Хромов (см., например, [1]).

Обозначим $L=\frac{1}{\beta}D^2T$, где $D=\frac{d}{dx}$, $T=\alpha_1E-\alpha_2S$, E – единичный оператор, $Sf(x)=f(1-x)$. Пусть $\Delta=\det|\beta\delta_{kj}+(D^2Tg_k,v_j)|_1^m\neq 0$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Тогда в [2] показано, что A^{-1} существует и имеет вид

$$A^{-1}y(x)=Ly(x)-\frac{\beta}{\Delta}\sum_{k,j=1}^m Lg_k(x)(Ly,v_j)\Delta_{jk},$$

$$\mathcal{V}_p(y)=\sum_{\tau=0}^{\sigma_p}[a_{\tau p}y^{(\tau)}(0)+b_{\tau p}y^{(\tau)}(1)]-(y,\varphi_p)=0,\quad p=1,2,\ \sigma_1=1,\ \sigma_2=0, \tag{2}$$

где Δ_{jk} – алгебраические дополнения определителя Δ. Считаем, что условия (2), представляющие собой условия теоремы 2 [2] при $n=2$ после нормировки, регулярны по Биркгофу.

Обозначим $R_\lambda=(E-\lambda A)^{-1}A$ – резольвента Фредгольма оператора (1), $R_{1,\lambda}=(L_1-\lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора $L_1:\ Ly(x)$, $\mathcal{V}_p(y)=0$, $p=1,2$. Имеет место

Теорема. *Функция $y(x)=R_\lambda f(x)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:*

$$y(x)=R_{1,\lambda}f(x)-y'(0)R_{1,\lambda}N(x,0)+y'(1)R_{1,\lambda}N(x,1)-R_{1,\lambda}N_t'y'(x),$$

где $N_t'f(x)=\int\limits_0^1 N_t'(x,t)f(t)\,dt$, $N_t'(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}N(x,t)$, $N(x,t)=\frac{1}{\Delta}\sum\limits_{k,j=1}^m Lg_k(x)Tv_j(t)\Delta_{jk}$.

Замечание. Формула для резольвенты $R_{1,\lambda}f(x)$ получена в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях*// Матем. сборник, 2001. – Т.192, № 10. – С. 33-50.

2. Халова В.А. *Задача обращения одного класса интегральных операторов* // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – Вып. 2. – С. 125-127.

3. Халова В.А. *Резольвента для одного класса интегральных операторов* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2002. – С. 220-221.

Холщевникова Н.Н. (Москва)
Natasha@malykhin.mccme.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПО СФЕРАМ[88]

Будем рассматривать кратные тригонометрические ряды

$$\sum_n a_n e^{inx}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}^d, x \in \mathbb{T}^d, nx = \sum_{k=1}^d n_k x_k, a_n \in \mathbb{C}$ и $|n| = \sqrt{nn}$.

В работе Дж.М. Эша и Г. Вэнга [1] доказана

Теорема А. *Пусть $q \in \mathbb{T}^d$. Предположим, что кратный тригонометрический ряд S (1) сходится по сферам всюду за исключением , быть может, точки q к конечной функции f, суммируемой на $\mathbb{T}^d$. Тогда S есть ряд Фурье функции f.*

Множество $E \subset \mathbb{T}^d$ называется множеством единственности для сходимости по сферам, кратко U-множеством, если из сходимости по сферам к нулю ряда S (1) на $\mathbb{T}^d \setminus E$ следует, что $a_n = 0 (n \in \mathbb{Z}^d)$.

Ряд (1) (сферически) суммируется методом Абеля в точке x к числу s, если $\lim\limits_{t \to +0} f(x,t) = s$, где $f(x,t) = \sum\limits_n a_n e^{inx-|n|t}$.

Множество $E \subset \mathbb{T}^d$ называется множеством единственности для метода Абеля, кратко U_A-множеством, если из суммируемости методом Абеля ряда S (1), с коэффициентами, удовлетворяющими условию $\sum\limits_{R/2 \le |n| < R} |a_n|^2 = o(R^2)$ при $R \to \infty$ и $a_n = o(1)$ при $|n| \to \infty$, к нулю на $\mathbb{T}^d \setminus E$, следует, что $a_n = 0 (n \in \mathbb{Z}^d)$.

Дж.М. Эш и Г. Вэнг [2] доказали, что всякое измеримое U_A-множество имеет меру нуль, существуют совершенные U_A-множества, объединение счетного числа замкнутых U_A-множеств является U_A-множеством (а, в частности, и U-множеством).

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть тригонометрический ряд S (1) сходится по сферам всюду за исключением, быть может, множества $E \subset \mathbb{T}^d$ к конечной, существенно ограниченной функции f, где E есть объединение*

[88]Настоящие исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект 02-01-00428.

счетного числа замкнутых U_A-множеств. Тогда S есть ряд Фурье функции f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ash J.M., Wang G. *Some spherical uniqueness theorems for multiple trigonometric series*// Annals of Math. – 2000. – V. 151. – P. 1-33.

2. Ash J.M., Wang G. *Sets of uniqueness for spherically convergens multiple trigonometric series*// Trans. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 354(12).– P. 4769-4788

Хромова Г.В. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

О ТОЧНЫХ ПОРЯДКАХ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ[89]

Данное сообщение представляет собой распространение результатов, полученных в [1] для периодической функции, на произвольную l раз непрерывно дифференцируемую функцию, заданную на отрезке.

Пусть $f(x) \in C^l[a,b]$, $f_\delta(x)$ – ее δ-приближение в среднеквадратичной метрике, $R_{\alpha p}$ – семейство операторов, соответствующее приближению функции $f^{(p)}(x)$ в методе регуляризации Тихонова ($p = 0, 1, \ldots, l$). Рассмотрим величины:

$$\Delta_1(R_{\alpha p}, M_2^{l+1}) = \sup\{\|R_{\alpha p}f - f^{(p)}\|_{C[a,b]} : f \in M_2^{l+1}\},$$

$$\Delta(\delta, R_{\alpha p}, M_2^{l+1}) = \sup\{\|R_{\alpha p}f_\delta - f^{(p)}\|_{C[a,b]} : f \in M_2^{l+1},\ \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta\},$$

где $M_2^{l+1} = \{f(x) \in W_2^{l+1}[a,b] : \|f\|_{W_2^{l+1}} \le 1\}$, W_2^{l+1} – пространство Соболева.

Теорема 1. *Справедливы представления, асимптотические по α при $\alpha \to 0$:*

$$\Delta_1(R_{\alpha p}, M_2^{l+1}) = C_{1p}\alpha^{\frac{2(l-p)+1}{4(l+1)}} + O\left(\alpha^{\frac{l-p+1}{l+1}}\right),$$

$p = 0, 1, \ldots, l$, *константы C_{1p} вычислены.*

Теорема 2. *Справедливы двусторонние оценки, асимптотические по δ при $\delta \to 0$:*

$$\frac{1}{2}C_{2p}\varphi(\delta) \le \Delta(\delta, R_{\alpha_p(\delta),p}, M_2^{l+1}) \le C_{2p}\varphi(\delta),\ p = 0, \ldots l,$$

где

$$\varphi(\delta) = \delta^{\frac{2(l-p)+1}{2(l+1)}} + O\left(\delta^{\frac{2(l-p)+3}{2(l+1)}}\right),\ \alpha_p(\delta) = C_p\delta^2,$$

[89]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-1295.2003.1)

константы C_{2p}, C_p вычислены, а величины $\Delta(\delta, R_{\alpha_p(\delta),p} M_2^{l+1})$ имеют тот же порядок по δ, что и $\inf_\alpha \Delta(\delta, R_{\alpha p}, M_2^{l+1})$.

Теорема 3. *Утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми, если на функции $f(x)$ наложены краевые условия вида:*

$$U_i(f) = \sum_{k=0}^{l} a_{ki} f^{(k)}(a) + b_{ki} f^{(k)}(b), \ i = 1, \dots, m, \ 1 \le m \le l,$$

где a_{ki}, b_{ki} – константы, линейные формы $U_i(f)$ линейно независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромова Г.В. *Об оценках погрешностей приближенных решений уравнений первого рода* // Доклады Академии Наук. – 2001. – Т. 378., № 5. – С. 605-609.

Царьков И.Г. (Москва)
tsarkov@mech.math.msu.su

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ[90]

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – компактная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, являющаяся замыканием ее внутренности Ω_0. Рассмотрим функции $\varphi_i, \tau_i : \Omega \to \mathbf{R}$, принадлежащие пространству $L_q(\Omega)$ при $q \in (1, +\infty]$, и такое локально гельдеровское отображение $F : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $F(\cdot, 0) \equiv 0$ на Ω. В дальнейшем будем использовать обозначение $\omega = \Omega \times \mathbf{R}$. Рассмотрим две квазилинейные неоднородные задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u_i = F(x, u_i) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0 \\ u = \tau_i & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

($i = 1, 2$). Наша задача состоит в следующем: при определенных условиях на функцию F, которые, вообще говоря, не обеспечивают ни единственность, ни существование в этих задачах, по дополнительной информации о решениях $u_i \overset{\circ}{\in \to} W_2^1(\Omega)$ (считая, что они существуют) оценить их уклонение друг от друга в равномерной метрике. Здесь мы будем предполагать, что решения непрерывны, хотя их непрерывность будет вытекать из условий на F, τ_i, φ_i . В качестве дополнительной информации о решениях u_i ($i = 1, 2$) будем рассматривать их значения на сетке, и покажем, в частности, что если их значения на некоторой конечной сетке одинаковы и $\varphi_1 = \varphi_2$, то эти функции совпадают на Ω.

Будем рассматривать следующие условия на F :

а) $q > \max\{1, \frac{n}{2}\}$, $\delta > 0$.

б) Если $n \geqslant 3$, то $\alpha \in (0, \frac{n+2}{n-2})$, $\delta \in (0, \frac{4}{n-2})$, $\eta \geqslant \frac{2n}{4-\delta(n-2)}$. Если $n = 2$, то $\eta > 1$. Если $n = 1$, то $\eta = 1$.

[90]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00248)

в) Найдутся функции $r(x) \in L_\eta(\Omega)$, $\mu(x), \lambda(x) \in L_1(\Omega)$, и число $K > 0$ такие, что $\forall (x,u) \in \omega : |u| \geqslant K$ верны неравенства:

$$|F(x,u)| \leqslant \mu(x)|u|^\alpha + \lambda(x); \quad |F'_u x, u| \leqslant r(x)|u|^\delta, \text{ и}$$

$$F(x,u)\operatorname{sign}(u) \geqslant -D|u| + C(x), \text{ где}$$

$C : \Omega \to \mathbf{R}$ – некоторая функция из $L_q(\Omega)$, а D – некоторое число из полуинтервала $[0, \gamma^{-2})$, и γ – наименьшая константа в неравенстве Фридрихса, т.е.

$$\gamma = \sup\left\{ \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}} \middle| u \in \overset{\circ}{\to} W_2^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

Здесь $\overset{\circ}{\to} W_2^1(\Omega)$ – замыкание финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций относительно нормы пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$. Положим $A = \max\{|F(x,t)| + |F'_u(x,t)| \mid (x,t) \in \omega, |t| \leqslant K\}$.

Теорема. *Пусть выполняются условия* а)-в), $M = \max\limits_{i=1,2}\{\|\tau_i\|_{L_q(\Omega)}, \|\Delta\tau_i\|_{L_q(\Omega)}, \|\varphi_i\|_{L_q(\Omega)}, \|r\|_{L_\eta(\Omega)}, \|\mu\|_{L_1(\Omega)}, \|\lambda\|_{L_1(\Omega)}, \|C\|_{L_q(\Omega)}, A\} < \infty$. *Тогда найдутся число* $\beta \in (0,1) : \nu = \frac{1}{2}(\beta + \frac{n}{q}) < 1$ *и числа* $\varepsilon_0, P > 0$, *зависящие только от* $\Omega, M, q, \eta, \alpha, \delta, K, D$ *и такие, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и всякой* ε*-сети* Γ *в множестве* Ω *условие* $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ *влечет неравенство* $\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant P\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^{\frac{\beta}{\nu}}$, *где* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Цвиль М.М. (Ростов-на-Дону)
vpm@jeo.ru

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФАБЕРА-ФУРЬЕ[91]

В работе, представленной данным сообщением, дается обзор результатов, полученных при изучении различных видов сходимости двойных рядов Фабера-Фурье интегрируемых функций.

Пусть остов σ бицилиндрических областей $D_1^\pm \times D_2^\pm$ в C^2 образуют спрямляемые жордановы кривые L_k, $k = 1,2$; $Z^2_{\pm\pm}$ – подмножества целочисленной решетки Z^2.

$\{\Phi_{k\ell}(z_1, z_2)\}_{(k,\ell)\in Z^2_{\pm\pm}}$ – системы обобщенных полиномов Фабера для соответствующих бицилиндрических областей $D^{\pm\pm}$ и весовых функций $g^{\mp\mp}(z_1, z_2)$.

Каждой функции $f(z_1, z_2) \in L_p(\sigma)$, $p > 1$ поставим в соответствие двойной ряд Фурье-Фабера:

$$\sum_{(k,\ell)\in Z^2} f_{k\ell}\Phi_{k\ell}(z_1; z_2). \tag{1}$$

[91]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-8570-34).

В случае двух переменных выделяют, в основном, три вида частичных сумм (прямоугольных, квадратных и круговых) и изучают сходимость по квадратам, по прямоугольникам, по кругам. Виды сходимости различают не только способом составления частичных сумм, но и характером поведения их на σ. Прежде всего, это равномерная сходимость, сходимость почти всюду, сходимость в метрике пространства L_p. Используя известные результаты из теории кратных рядов Фурье и теорию двойных интегралов типа Коши, их граничные свойства, получены новые результаты для всех видов сходимости ряда (1).

Чиж Е.А., Павленко В.Н. (Челябинск)
ekaterina@csu.ru, pavlenko@csu.ru

СИЛЬНО РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[92]

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$K = \{v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega) | \, v(x) \geq \psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\},$$

где $\psi \in \mathbf{C}_2(\overline{\Omega})$, $q > n$, $\psi(x) \leq 0 \ \forall x \in \Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ – фиксировано, а $d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ.

Рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} (v-u)_{x_j} dx + \int_\Omega (a_0(x) - \lambda_0) u(x)(v-u)(x) dx + \\ + \int_\Omega g(x,u)(v-u)(x) dx \geq 0 \ \ \forall \, v \in K,\end{gathered} \tag{1}$$

где $Lu(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)u(x)$ – равномерно эллиптический дифференциальный оператор, $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_0 \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $a_0(x) \geq 0$ на Ω, λ_0 – минимальное собственное значение оператора L с граничным условием $u|_\Gamma = 0$. Функция $g : D \to R$ ($D = \{(x, \xi) : \ x \in \Omega$ и $\xi \geq \psi(x)\}$)– суперпозиционно измерима [1] , то есть для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω со значениями $u(x) \geq \psi(x)$ функция $g(x, u(x))$ измерима по Лебегу на Ω . Кроме того, предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ может иметь на $[\psi(x), +\infty)$ разрывы только первого рода и непрерывна

[92]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-02-96441 р2001урал).

при $\xi = \psi(x)$, $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in [\psi(x), +\infty)$, $g_-(x,\xi) = \liminf_{s\to\xi} g(x,s)$, $g_+(x,\xi) = \limsup_{s\to\xi} g(x,s)$.

Основной результат работы – следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) существует функция $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ $(q > n)$ такая, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,\xi)| \le a(x)\ \forall \xi \ge \psi(x);$$

2) существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \ge 0$, такие что

$$\int\limits_{\{x\in\Omega\ |\ d(x,\Gamma)<r_1\}} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\{x\in\Omega\ |\ d(x,\Gamma)\ge r_1\}} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \ge 0,$$

где $\varphi(x)$– положительная в Ω собственная функция оператора L с граничным условием $u|_\Gamma = 0$, соответствующая минимальному собственному значению λ_0;

3) существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in D \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \mathbf{W}^2_{1,loc}(\Omega)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_+(x,\xi) \ne g_-(x,\xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого $(x,\xi) \in S_i$ и либо
$(L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g_-(x,\psi_i(x)))(L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g_+(x,\psi_i(x))) > 0$, *либо*
$L\psi_i(x) - \lambda_0\psi_i(x) + g(x,\psi_i(x)) = 0$.

Тогда найдется функция $u \in \mathbf{W}^2_q(\Omega) \bigcap K$, удовлетворяющая (1).

Замечание. Данная теорема обобщает соответствующий результат из [2] на случай разрывной нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом* – М.: Наука, 1983. – 272 с.

2. Adly S., Goeleven D. and Thera M. *Recession mappings and noncoercive variational inequalities* // Nonlinear Anal. – 1996. – V. 26., № 9. – P. 1573-1603.

Чистяков В.В. (Нижний Новгород)
czeslaw@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ НА АЛГЕБРЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ КЛАССА BV [93]

Пусть $I_a^b = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ – брус в $\mathbb{R}^n$, где $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ и $a < b$, т.е. $a_i < b_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ (всюду ниже отношения $=$, $<$ и $\le$ и операции $+$ и $-$ в $\mathbb{R}^n$ также определяются покоординатно). Смешанная n-я разность Витали функции $f : I_a^b \to \mathbb{R}$ на подпрямоугольнике $I_x^y \subset I_a^b$ $(a \le x < y \le b)$ есть $\mathrm{md}_n(f, I_x^y) =$

[93]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00473).

$\sum\limits_{0\le\alpha\le 1}(-1)^{|\alpha|}f\bigl(x+\alpha(y-x)\bigr)$, где сумма берется по всем мультииндексам $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, не меньшим $\mathbf{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ и не превосходящим $\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ и i-я координата $x+\alpha(y-x)$ равна $x_i+\alpha_i(y_i-x_i)$, $i=1,\dots,n$. Вариация Витали порядка n функции $f:I_a^b\to\mathbb{R}$ есть величина $V_n(f,I_a^b)=\sup\limits_{\mathcal{P}}\sum\limits_{1\le\beta\le\kappa}|\mathrm{md}_n(f,I_{x(\beta-1)}^{x(\beta)})|$, где супремум берется по всем мультииндексам $\kappa\in\mathbb{N}^n$ и сеточным разбиениям $\mathcal{P}=\{x(\beta)=(x_1(\beta_1),\dots,x_n(\beta_n))\in I_a^b\mid \mathbf{0}\le\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\le\kappa\}$ бруса I_a^b, таким что $x(\mathbf{0})=a$, $x(\kappa)=b$ и $x(\beta-\mathbf{1})<x(\beta)$ в $\mathbb{R}^n$ для всех $\mathbf{1}\le\beta\le\kappa$.

Для $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, мультииндекса $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $\gamma\ne\mathbf{0}$, и функции $f:I_a^b\to\mathbb{R}$ полагаем (ниже $\lfloor\gamma$ означает операцию срезания мультииндексом γ): $x\lfloor\gamma=(x_i\mid i\in\{1,\dots,n\},\ \gamma_i=1)$, $I_a^b\lfloor\gamma=I_{a\lfloor\gamma}^{b\lfloor\gamma}$ и $f_\gamma(x\lfloor\gamma)=f\bigl(a+\gamma(x-a)\bigr)$, $x\in I_a^b$. Отметим, что функция f_γ определена на брусе $I_a^b\lfloor\gamma\subset\mathbb{R}^{|\gamma|}$ (зависит лишь от $|\gamma|$ переменных), поэтому в силу сказанного ранее для нее определена вариация порядка $|\gamma|$ (в модификации Харди и Краузе) $V_{|\gamma|}(f_\gamma,I_a^b\lfloor\gamma)$. Для $f:I_a^b\to\mathbb{R}$ полагаем $\|f\|=\sum\limits_{\mathbf{0}\le\gamma\le\mathbf{1}}V_{|\gamma|}(f_\gamma,I_a^b\lfloor\gamma)$, где $V_0(f_{\mathbf{0}},I_a^b\lfloor\mathbf{0})=|f(a)|$, а также $\mathrm{BV}=\{f:I_a^b\to\mathbb{R}\mid \|f\|<\infty\}$ – пространство функций ограниченной вариации (в смысле Витали, Харди и Краузе). В работе [1] показано, что BV есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Основные результаты настоящей работы – следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пространство* BV *с поточечными операциями и нормой* $\|\cdot\|$ *является банаховой алгеброй, причем* $\|f\cdot g\|\le 2^n\|f\|\cdot\|g\|$ *для всех* f, $g\in\mathrm{BV}$.

Теорема 2. *Пусть функция* $h:I_a^b\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна по первому аргументу и порождает оператор суперпозиции* H *по правилу:* $(Hf)(x)=h(x,f(x))$ *для всех* $x\in I_a^b$ *и* $f:I_a^b\to\mathbb{R}$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $H:\mathrm{BV}\to\mathrm{BV}$ *и* $\exists L\ge 0$ *такое, что* $\|Hf_1-Hf_2\|\le L\|f_1-f_2\|$ $\forall f_1,f_2\in\mathrm{BV}$;

2) $\exists f$, $g\in\mathrm{BV}$ *такие, что* $h(x,u)=f(x)u+g(x)$ *для всех* $x\in I_a^b$ *и* $u\in\mathbb{R}$.

Представленные теоремы обобщают результаты работ [2] (для $n=1$), [3] и [4] (для $n=2$) и справедливы для отображений n переменных ограниченной вариации со значениями в метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А.С. *Замечания о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, № 1. – С. 69-80.

2. Matkowski J., Miś J. *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space* BV$\langle a, b\rangle$ // Math. Nachr. – 1984. – V. 117. – P. 155-159.

3. Чистяков В.В. *Обобщенные вариации в многозначном анализе* // Дисс. ... доктора физ.-матем. наук. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2001. – 252 с.

4. Chistyakov V.V. *Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation* // Monatsh. Math. – 2002. – Bd. 137, No 2. – P. 99-114.

5. Чистяков В.В. *Метрические полугруппы и конусы отображений конечной вариации нескольких переменных и многозначные операторы суперпозиции* // Докл. АН – 2003. – Т. 393, № 6.

Шалтыко Д.Г. (Саратов)
ShaltykoDG@info.sgu.ru

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ 5-ГО ПОРЯДКА[94]

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ краевую задачу:

$$y^{(5)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2}$$

В настоящей работе приводится необходимое условие сходимости рядов по собственным функциям этой задачи.

Обозначим $w_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$. Через D_β обозначим четырехугольник в комплексной области, образованный прямыми

$$\eta = \left(\xi \cos\frac{2k-\pi}{5} - \beta \sin\frac{2\pi}{5}\right) \sin\frac{2k-\pi}{5}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Теорема 1. *Собственные значения задачи* (1)-(2) *образуют две бесконечные последовательности* $\lambda_{k,1}$ *и* $\lambda_{k,2}$, *для которых справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_{k,1} = -\left(\rho_{k,1}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \text{где} \quad \rho_{k,1}^{(0)} = \frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)\sin\frac{\pi}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_{k,2} = -\left(\rho_{k,2}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \text{где} \quad \rho_{k,2}^{(0)} = \frac{k\pi}{\alpha \sin\frac{2\pi}{5}} w_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

[94]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-00169).

При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые. Для соответствующих им последовательностей собственных функций справедливы формулы:

$$y_{k,1}(x) = e^{\rho_{k,1}^{(0)}(w_2+w_1x)}\left(1 - e^{(2i\frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)}+O(\frac{1}{k}))(1-x)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$y_{k,2}(x) = e^{\rho_{k,2}^{(0)}(w_2+w_1x)}\left(1 + w_2 e^{(-2i\frac{k\pi}{\alpha}+O(\frac{1}{k}))x} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Теорема 2. *Пусть ряды $\sum a_{k,1}y_{k,1}(x)$ и $\sum a_{k,2}y_{k,2}(x)$ сходятся равномерно на некотором отрезке $[x_0, x_1] \subset (0,1)$. Тогда ряд $\sum a_{k,1}y_{k,1}(z) + \sum a_{k,2}y_{k,2}(z)$ сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области, лежащей в D_{x_1} и представляет собой в этой области регулярную функцию.*

Шамоян Р.Ф. (Брянск)
root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.ru

ОБ ОПЕРАТОРЕ ТИПА ЧЕЗАРО В ГОЛОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $F_s^{p,q}$ [95]

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, T – его граница, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций, D^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, – дифференциальный оператор Римана-Лиувиля. В работе недавние результаты статей [1]-[3] об операторе Чезаро $T_g(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)g'(t)dt$ обобщаются на классы функций $F_s^{p,q} = \{f \in H(D) :$ $\|f\|_{F_s^{p,q}} = \left(\int\limits_T \left(\int\limits_0^1 |D^k f(re^{i\varphi})|^q (1-r)^{(k-s)q-1}dr\right)^{\frac{p}{q}} d\varphi\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$, $0 < p, q < +\infty$, $k \in Z_+$, $k > s$ и на случай $F_s^{\infty,q}, s \in R$, $q \in (0, +\infty)$.

Теорема 1. *1) Пусть $p, q \in (0, +\infty)$, $t \in (-\infty, 0)$, тогда оператор T_g действует из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p,q}$, в том и только том случае, когда $g \in F_0^{\infty,q}$.*

2) Пусть $p_1 > p, \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{s}$, $t < 0$, тогда оператор T_g действует из $F_t^{p_1,q}$ в $F_t^{p,q}$ тогда и только тогда, когда $g \in H^s$.

3) Пусть $t < \frac{1}{p_1}, t < 1$, $0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \leq 1$, тогда оператор T_g действует из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{z\in D} |D^s g(z)|(1 - |z|)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}} < +\infty$.

4) Пусть $\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \geq 1$, тогда оператор T_g действует из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$ только при $g(z) \equiv 0$.

[95]Работа поддержана РФФИ (грант 01-01-00992)

Замечание. При $q = 2$, $t = 0$ утверждение теоремы установлено в [1]-[2]. Обозначим через Λ_α – гельдеровский класс аналитических в D функций.

Теорема 2. *1) Пусть $g \in \Lambda_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда*

а) оператор T_g действует из $F_s^{p,q}$ в $F_s^{\infty,m}$ при $p = \frac{1}{\alpha}$, $s < \min(1, \frac{1}{p})$.

б) Из $F_s^{p,q}$ в $\Lambda_{\alpha-\frac{1}{p}+s}$ при $\alpha > \frac{1}{p} - s > 0$.

в) Из $F_s^{p,q}$ в $F_s^{\frac{p}{1-\alpha p},m}$ при $0 < p < \frac{1}{\alpha}$.

2) T_g действует из H^∞ в $F_s^{\infty,q}$ при $g \in F_s^{\infty,q}$.

В работе также устанавливаются аналоги теорем 1, 2 для операторов Чезаро C_α (см. [3]). При доказательстве теоремы 1 и 2 существенно используются результаты работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aleman A., Siskakis A. *An integral operator on H^p*// Complex Variables. – 1995. – V. 28. – P. 149-158.

2. Aleman A., Cima F.J. *An integral operator on H^p and Hardy inequality*// Anal. Math. – 2001. – V. 85. – P. 157-176.

3. Xiao I. *Cesaro-type operators on Hardy, BMOA and Bloch spaces*// Arch. Math. – 1997. – V. 68. – P. 398-406.

4. Cohn W., Verbitsky I. *Factorization of tent spaces and Hankel operators*// Journ. of Funct. Anal. – 2000. – V. 175. – P. 308-329.

Шамоян Р.Ф. (Брянск)
root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.ru

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КВАЗИНОРМЫ В НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ[96]

В работе даны эквивалентные квазинормы для классов Лизоркина-Трибеля и Харди в поликруге. Всюду ниже будут использоваться стандартные обозначения из теории функций в поликруге [1-2].

Теорема.

A) Пусть $f \in H^{\max(1,p)}(U^n)$, $0 < p \le q < +\infty$, $\beta > \alpha q - 1$, $\alpha, q > 0$, $\alpha > \gamma$, $\frac{t-\beta}{q} = \gamma - \alpha$, и выполнено одно из двух неравенств:

а) $0 < q \le 1$, $\alpha > \frac{\beta+1}{q} + \frac{1}{p} - 1$;

б) $q > 1, \alpha > \frac{\beta+1}{q}$,

тогда следующие условия равносильны:

$$\int\limits_{T^n} \Big(\int\limits_{I^n} |D^\alpha f(z)|^q (1-|z|)^\beta d|z| \Big)^{\frac{p}{q}} dm_n(\xi) < +\infty,$$

[96] Работа поддержана РФФИ (грант 01-01-00992).

$$\int\limits_{T^n}\Bigl(\int\limits_{I^n}\Bigl(\int\limits_{U^n}\frac{|D^\gamma f(w)-D^\gamma f(z)|}{|1-\overline{w}z|^{\alpha+1}}(1-|w|)^{\gamma-1}dm_{2n}(w)\Bigr)^q$$

$$(1-|z|)^\beta d|z|\Bigr)^{\frac{p}{q}}dm_n(\varphi)<+\infty.$$

Б) Пусть $0<p<2$, *предположим* $D_{z_2,\dots,z_n}f=\frac{\partial^{n-1}(z_2,\dots,z_nf(z_1,\dots,z_n))}{\partial z_2,\dots,\partial z_n}\in H^p(U^n)$, *тогда следующие условия равносильны:*

1) $f\in H^p(U^n)$,

2) $\int\limits_{T^n}\Bigl(\int\limits_{\Gamma(\xi)}|Df(z)|^2dm_{2n}(z)\Bigr)^{\frac{p}{2}}dm_n(\xi)<+\infty.$

В) Пусть $0<p<2$, $f\in H(U^n)$, *тогда следующие условия равносильны:*

1) $f\in H^p(U^n)$,

2) $\int\limits_T\Bigl(\int\limits_{\Gamma(\xi_n)}\dots\Bigl(\int\limits_T\Bigl(\int\limits_{\Gamma(\xi_1)}|Df(z_1,\dots$

$\dots,z_n)|^2dm_2(z_1)\Bigr)^{\frac{p}{2}}dm_1(\xi_1)\Bigr)^{\frac{2}{p}}\Bigr)\dots\Bigr)^{\frac{p}{2}}dm_1(\xi_n)<+\infty.$

Здесь D^α – интегро-дифференциальный оператор Римана-Лиувилля, $D=D^1$ (см. [2]), $\Gamma(\xi)=\Gamma_{\alpha_1}(\xi_1)\times\Gamma_{\alpha_2}(\xi_2)\times\dots\times\Gamma_{\alpha_n}(\xi_n)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in T^n$, $\Gamma(\xi_j)=\Gamma_{\alpha_j}(\xi_j)=\{z_j\in U:\ |1-\xi_jz_j|\le\alpha_j(1-|z_j|^2)\}$, $j=\overline{1,n}$, $I^n=[0,1]^n$.

Утверждения пунктов Б) и В) теоремы при $n=1$ хорошо известны (см. [3]). Пусть $R_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\gamma}=\{\tilde\theta:\ \tilde\theta(z_1,\dots,z_n)=c\int\limits_U(\theta(z)(1-|z|)^\beta)$ $D^\gamma\Bigl(\prod\limits_{k=1}^n\frac{1}{(1-z\bar z_k)^{\alpha_k}}\Bigr)dm_2(z)\}$, $\beta=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i-2$, $\beta>-1$, $\alpha_i\in N$, θ – внутренняя функция.

Теорема 2. *1) Справедлива оценка* $\|D^\beta\tilde\theta(z)\|_{H^\infty(U^n)}\le c\|D^\gamma\theta(z)\|_{H^\infty(U)}$, $\beta\ge0$, $D^\beta\tilde\theta\in R_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\gamma}$, $\alpha_n>2+\sum\limits_{k\neq n}\alpha_k$.

2) Пусть $D^\beta\tilde\theta\in R_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\gamma}$. *Тогда* $D^\beta\tilde\theta\in H^p(U^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{k=0}^\infty(1-|w_k|)^{1-ps}<\infty$, $\frac{n}{p}-1<\gamma<\frac{n}{p}$, $s=\gamma-\frac{n-1}{p}$, $n>1$, *где* $\{w_k\}$ *– нули внутренней функции* θ.

Замечание. Аналог теоремы 2 при $n=1$ установлен в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. *Теория функций в поликруге* – М.: Мир, 1974.

2. Djrbashian M.M., Shamoyan F.A. *Topics in the theory of A^p_α spaces*// Teubner. Texte. Leipzig. – 1988. – V. 105.

3. Coifman R.R., Meyer Y., Stein E. *Some new function spaces and their applications*// Jour. Func. Analysis – 1985. – V. 62. – P. 304-335.

4. Вербицкий И.Э. *Внутренние функции, пространства Бесова, мультипликаторы*// ДАН СССР – 1984. – Т. 29, № 3.

Шамоян Ф.А. (Брянск)
root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.ru

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И ДЕЛЕНИЕ НА ВНУТРЕННЮЮ ФУНКЦИЮ В НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[97]

Пусть $U = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, T – его граница. $H(U)$ – множество всех голоморфных функций в U, H^p – класс Харди, ω – функция типа модуля непрерывности. Через $\Lambda_\alpha(\omega), (\alpha > -1)$ обозначим множество тех $f \in H(U)$, для которых $|D^{\alpha+2}f(z)|| \le \frac{c_f\omega(1-|z|)}{(1-|z|)}$, где D^α – производная дробного порядка α. Теплицевым оператором с символом $h \in L^1(T)$ называется интегральный оператор вида: $T_h(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\xi)h(\xi)}{\xi - z}d\xi,\ z \in U,\ f \in X\bigcap H^\infty$, где X – некоторое подпространство пространства $H(U)$. Эти операторы имеют существенные приложения в различных вопросах анализа (см. [1], [2]). Пусть $\alpha > -1,\ A(\alpha,\omega) = \{f \in H(U) : \|f\|_{A(\alpha,\omega)} = \int\limits_U |f(z)|\omega(1-|z|)$ $(1-|z|)^\alpha dm_2(z) < +\infty\}$, где m_2 – плоская мера Лебега. Положим также $A_n(\alpha,\omega) = \{f :\ f^{(n)} \in A(\alpha,\omega)\}$. В $A_n(\alpha,\omega)$ вводится естественная норма, $J(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt,\ f \in H(U)$.

Теорема. *Пусть* $h \in H^1$,

1) $0 \le n < \alpha + 2$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) T_h *действует в* $A_n(\omega,\alpha)$;

б) $J^n(f) \in \Lambda_\alpha(\omega)$.

2) Пусть $n = \alpha+2$. T_h *действует в* $A_n(\alpha,\omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{z\in U}\{|h^{(1)}(z)|(1-|z|)\int\limits_{1-|z|}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\} < +\infty$.

3) Пусть $h \in L^1(T)$, $n > \alpha + 2$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

а) T_h *действует в* $A_n(\alpha,\omega)$;

б) h *допускает представление* $h(\xi) = h_1(\xi) + \overline{h_2(\xi)}$, *где* $h_1 \in A_n(\alpha,\omega)$, $h_2 \in H^\infty$.

Следствие. *Пусть* $f \in A_n(\alpha,\omega)$, $n > \alpha + 2$. *Предположим, что* $f = J_f \cdot Q_f$, *где* J_f *– внутренняя часть функции* f, *а* Q_f *– внешняя*

[97]Работа поддержана РФФИ (грант 01-01-00992)

часть, тогда $f/J \in A_n(\alpha,\omega)$ для произвольной внутренней функции $J: \frac{J_f}{J} \in H^\infty$.

Замечание. Утверждение теоремы в менее общем виде установлено в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамоян Ф.А. *Об ограниченности одного класса операторов связанных с делимостью аналитических функций*// Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. – 1973. – Т. 8, № 6. – С. 474-490.

2. Пеллер В.В., Хрущев С.В. *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы*// УМН – 1982. – Т. 37, Вып. 1(223). – С. 53-124.

3. Shamoyan F.A. *Teoplitz operators and Division by an Inner function in some spaces of analytic functions*// Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – Vol. 133. – P. 5-9.

Шамраева В.В. (Ростов-на-Дону)

МОДИФИКАЦИЯ L^2-МЕТОДА H.SCODA В ЗАДАЧЕ О ПОРОЖДАЮЩИХ[98]

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^N$ $(N \geqslant 1)$; $H(\Omega)$ – пространство всех голоморфных в Ω функций. Пусть, далее, E и E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ – подмножества в $H(\Omega)$; $\overline{g} = (g_i)_{i=1}^p$ – фиксированный набор функций из $H(\Omega)$. Рассматривается задача о том, при каких условиях справедливо равенство $E = \sum\limits_{j=1}^{p} g_j E_j$. В случае, когда все E_j совпадают с E и E_j имеют структуру кольца, эта задача изучалась многими авторами (Л.Карлесон, Л.Хермандер, Б.А.Тейлор, Дж.Келлехер, А.Скода, В.В.Напалков и др.). В ситуации, когда E_j могут отличаться друг от друга и могут не иметь структуру кольца, О.В.Епифановым и А.В.Абаниным была разработана модификация метода Л.Хермандера. В настоящей работе для этой же ситуации обобщается L^2-метод А.Скода. Модифицированный метод А.Скода позволил существенно ослабить исходные предположения по сравнению с методом Л.Хермандера.

В качестве приложений получены результаты о порождающих в пространствах целых функций нескольких переменных с заданной оценкой индикатора. Введём необходимые обозначения. Пусть P_ρ – класс непрерывных плюрисубгармонических позитивно однородных порядка ρ в $\mathbb{C}^N$ функций. Для заданной функции $k(z) \in P_\rho$ обозначим через $[\rho, k)$ ($[\rho, k]$) пространство целых функций роста не выше порядка ρ конечного типа, регуляризованный радиальный индикатор которых строго меньше, чем $k(z)$ (меньше, либо равен, чем $k(z)$) при $z \neq 0$. Пусть $|\overline{g}|^2 = \sum\limits_{j=1}^{p} |g_j|^2 e^{-\psi_j}$, где $\psi_j \in P_\rho$.

---

[98]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-8570-34)).

Теорема 1. *Пусть положительные функции $k(z)$ и $k^j(z)$ (при $z \neq 0$) из P_ρ, причем $k - k^i - qk^j \in P_\rho$, где $q = Inf(N, p-1)$, $i, j = \overline{1,p}$. Для того, чтобы любая функция f из $[\rho, k)$ допускала разложение*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} g_i(z)h_i(z),$$

с коэффициентами $h_i \in [\rho, k - k^j]$, достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon > 0 : \ |\overline{g(z)}| > A_\varepsilon e^{-\varepsilon |z|^\rho}, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

Теорема 2. *Пусть положительные функции $k(z)$ и $k^j(z)$ (при $z \neq 0$) из P_ρ. Предположим дополнительно, что имеется такая функция $h \in P_\rho$, $h(z) > 0$ при $z \neq 0$, что $k - k^i - qk^j \in P_\rho$, где $q = Inf(N, p-1)$, $i, j = \overline{1,p}$. Для того, чтобы любая функция f из $[\rho, k)$ допускала разложение*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} g_i(z)h_i(z),$$

с коэффициентами $h_i \in [\rho, k - k^j)$ достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon > 0 : \ |\overline{g(z)}| > A_\varepsilon e^{-\varepsilon |z|^\rho}, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

Шарапудинов И.И. (Махачкала)
ts@mail.ru

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО НЕКОТОРЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[99]

В работах автора были исследовванны смешанные ряды по классическим ортогональнывм полиномам и их дискретным аналогам. В настоящей работе идея построения смешанных рядов переносится на систему Хаара $\{\mathcal{X}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого натурального r рассмотрим систему функций $\{\mathcal{X}_{r,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, в которой

$\mathcal{X}_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\mathcal{X}_n(t)dt$. В частности, $\mathcal{X}_{r,1}(x) = \frac{1}{r!}x^r$ и, если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $u_+^r = u^r$, при $u \geq 0$ и $u_+^r = 0$, при $u < 0$, то (конечная разность берется по переменной t) $\mathcal{X}_{r,n}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!}\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x-t)_+^r|_{t=\frac{i-1}{2^k}}$, т.е.

$$\mathcal{X}_{r,n}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!}\begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{i-1}{2^k}, \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r, & \frac{i-1}{2^k} \leq x \leq \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r - 2(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}})^r, & \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{i}{2^k}, \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r - 2(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}})^r + (x - \frac{i}{2^k})^r, & \frac{i}{2^k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

[99]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00611 а).

Для $p \geq 1$ через $W^r_{L_p}$ обозначим класс, состоящий из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, а $f^{(r)} \in L_p(0,1)$. Пусть $f \in W^r_{L_p}$, тогда мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье-Хаара функции $f^{(r)}(x)$: $f_{r,n} = \int\limits_0^1 f^{(r)}(t)\mathcal{X}_n(t)dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема. *Пусть r – натурально, $p \geq 1$, $f \in W^r_{L_p}$. Тогда имеет место разложение*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\mathcal{X}_{r,n}(x), \tag{1}$$

причем ряд, фигурирующий в правой части равенства (1) *сходится равномерно относительно* $x \in [0,1]$.

Правую часть равенства (1) мы будем называть смешанным рядом по системе Хаара. Общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\mathcal{X}_{r,n}(x)$, входящего в (1) получается умножением коэффициента Фурье-Хаара $f_{r,n}$ функции $f^{(r)}(x)$ на функцию $\mathcal{X}_{r,n}(x)$. Заметим, что система $\{\mathcal{X}_{r,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не является ортогональной. В частности, при $r = 1$ функции этой системы с точностью до постоянных множителей совпадают с функциями системы Фабера-Шаудера $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Соответственно, ряд (1) совпадает с рядом Фабера-Шаудера для функции $f(x)$. Таким образом, если $f(x)$ абсолютно непрерывна, то ее ряд Фабера-Шаудера есть не что иное, как смешаненый ряд по системе Хаара, соответствующий случаю $r = 1$. Отметим также, что частичные суммы

$$\mathcal{Y}_{r,N}(f) = \mathcal{Y}_{r,N}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + \sum_{n=1}^{N} f_{r,n}\mathcal{X}_{r,n}(x)$$

смешанного ряда (1) могут быть использованы для одновременного приближения функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, \ldots, r-1)$. В самом деле, из определения смешанного ряда вытекает равенство $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{r,N}(f,x) = \mathcal{Y}_{r-\nu,N}(f^{(\nu)},x)$, поэтому при $N \to \infty$, $0 \leq x \leq 1$ в силу теоремы $|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{r,N}(f,x)| = |f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{r-\nu,N}(f^{(\nu)},x)| \to 0$.

В докладе будет рассказано об аппроксимативных свойствах операторов $\mathcal{Y}_{r,N}(f)$ на классах $W^r_{L_p}$

Шаталина А.В. (Саратов)
ПРОЦЕССЫ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть AC – множество аналитических в единичном круге $|z| < 1$ и непрерывных в его замыкании функций с равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{z\in\{|z|\leqslant 1\}} |f(z)|$$

и обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$; $M = \{z_{k,n}\}$ – треугольная матрица узлов интерполирования, $M \in \{|z| = 1\}$, $k = 0,1,...,n-1$, $n = 1,2,....$

Напомним, M называется правильной матрицей, если узлы каждой ее n-ой строки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг.

Пусть $\{H_{2n-1}(M,f,z)\}$ – последовательность многочленов Эрмита-Фейера степени $np-1$, $p \geqslant 2$, интерполирующих функцию f в узлах $z_{k,n}$.

Обозначим через Ω множество функций $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности. Введем классы, заданные $\omega(\delta)$:

$AC(\omega), \omega\in\Omega$ – класс функций $f \in AC$, у которых $\omega(f,\delta) = O(\omega(\delta))$,

$AC^*(\omega), \omega\in\Omega$ – класс функций $f\in AC$, у которых $\omega(f,\delta) = o(\omega(\delta))$.

Теорема 1. *Пусть M – матрица узлов интерполирования, составленная из корней n-ой степени из (-1), и для $\omega(\delta)$ выполнено:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n > 0.$$

Тогда существует функция $f \in AC$, для которой процесс Эрмита-Фейера расходится всюду на единичной окружности.

Если выполнено условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \infty,$$

то существует функция $f \in AC^*$, для которой процесс Эрмита-Фейера неограниченно расходится всюду на единичной окружности.

Для произвольных правильных матриц с некоторым ограничением на распределение узлов также найдена метрическая характеристика множества точек расходимости рассматриваемых процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозинский С.М. *Об интерполяционном процессе Fejer'a*// ДАН СССР. – 1939. – Т. 24 – С. 318-321.

2. Шаталина А.В. *Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности*// Сарат. ун-т. – Саратов, 1990. – 30 с. – Деп.в ВИНИТИ 19.07.90, №4060-В90.

Шихшинатова М.М. (Махачкала)
vazipat@mail.dgu.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ СУММ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА

Пусть $\alpha,\beta > -1$, N – натуральное число, $N \geqslant 2$;

$$K_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)},$$

$$\mu(x) = \mu(x, \alpha, \beta, N) = K_{n,N}^{\alpha,\beta} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}.$$

Через $\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ обозначим классические многочлены Чебышева, ортонормированные на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha,\beta}(x) \tau_k^{\alpha,\beta}(x) = \delta_{n,k}.$$

Положим $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-2}{2}(1+x), N\right]$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j) \tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j) \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j) = \delta_{n,k},$$

где $x_j = -1 + \frac{2j}{N-1}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, $\rho(x) = \mu\left[\frac{N-1}{2}(1+x), \alpha, \beta\right]$, $\delta_{n,k}$ – символ Кронеккера.

Для $f \in C[-1,1]$ сумму Фурье-Чебышева по системе $\{\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{N-1}$ обозначим через

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x), \quad n \leqslant N-1,$$

где $\hat{f}_k = \hat{f}_k(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j) f(x_j) \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)$. Норму оператора средних Валле-Пуссена $V_{n,m,N}^{\alpha,\beta}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} S_{k,N}^{\alpha,\beta}(f, x)$ в пространстве $C[-1,1]$ обозначим через

$$\|V_{n,m,N}^{\alpha,\beta}\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \frac{|V_{n,m,N}^{\alpha,\beta}(f,x)|}{\|f\|}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $-1 < \alpha, \beta \leqslant 0$, $a, b, d > 0$, $a \leqslant b$, $1 \leqslant n \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, $a \leqslant \frac{m}{n} \leqslant b$. *Тогда* $\|V_{n,m,N}^{\alpha,\beta}\| \leqslant C(\alpha, \beta, a, b, d)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды* – М.: Мир, 1965. – Т. 2.

2. Голубов Б.И. *О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации*// Сиб. мат. журн. – 1974. – Т. 15, № 2. – С. 262-291.

3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* – М.: Наука, 1986.

Шишкин А.Б. (Армавир)
Shishkin-home@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_\nu\}$ – некоторая система односвязных областей в $\mathbb{C}$; $H_j = H(\Omega_j)$ – пространство функций голоморфных в Ω_j, с топологией компактной сходимости; $\mathbb{H}$ – топологическое произведение $H_1 \times \ldots \times H_\nu$; $P_j = P(\Omega_j)$ – топологический модуль целых функций, ассоциированный с областью Ω_j; $\mathbb{P}$ – топологическое произведение $P_1 \times \ldots \times P_\nu$. Рассмотрим два дифференциальных оператора $r(D)$, $r'(D)$ с постоянными коэффициентами, действующих в $\mathbb{H}$ покомпонентно. Топологический изоморфизм $T_{r,r'} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется *оператором преобразования для* $r(D)$ *и* $r'(D)$, если $T \circ r(D) = r'(D) \circ T$. При наличии оператора преобразования для операторов $r(D)$ и $r'(D)$, задачи спектрального синтеза для этих операторов являются эквивалентными.

Область $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ называется *n-симметричной, с центром симметрии $a \in \Omega$*, если эта область инвариантна относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, с центром в точке a. В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_\nu\}$ – система выпуклых n-симметричных областей. Тогда для операторов $r(D)$ и $r'(D)$ существует оператор преобразования $T_{r,r'} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.*

Пусть $\pi_1(z), \ldots, \pi_q(z)$ – произвольная конечная система многочленов, l – ее многочлен Люрота. Выберем произвольную конечную совокупность функционалов $S^{(1)}, \ldots, S^{(k)}$ из $\mathbb{H}^*$. Рассмотрим соответствующую ей систему однородных уравнений π-свертки

$$S^{(1)} * f = 0, ..., S^{(k)} * f = 0, \quad f \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Из теоремы редукции, доказанной в работе [2], вытекает

Теорема 2. *Замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство решений системы (1) допускает спектральный синтез в том и только в том случае, когда допускает спектральный синтез его максимальное замкнутое $l(D)$-инвариантное подпространство.*

Пусть $\pi'(z) = (\pi'_1(z), \ldots, \pi'_{q'}(z))$ – другая конечная система многочленов, l' – ее многочлен Люрота. Предположим, что многочлены l и l' имеют одинаковую степень. Рассмотрим систему однородных уравнений π'-свертки

$$S'^{(1)} *' f = 0, ..., S'^{(k)} *' f = 0, \quad f \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

где функционалы $S'^{(1)}, \ldots, S'^{(k)}$ из $\mathbb{H}^*$ определяются однозначно следующими соотношениями $S'^{(1)} = T^*_{l,l'}(S^{(1)}), \ldots, S'^{(k)} = T^*_{l,l'}(S^{(k)})$.

Теорема 3. *Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_\nu\}$ – система выпуклых п-симметричных областей. Тогда замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство решений системы (1) допускает спектральный синтез в том и только в том случае, когда допускает спектральный синтез замкнутое $\pi'(D)$-инвариантное подпространство решений системы (2).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез* // Мат. сб. – 1992. – Т. 183, № 8. – С. 23-46.

2. Красичков-Терновский И.Ф., Шишкин А.Б. *Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа* // Мат. сб. – 2001. – Т. 192, № 11. – С. 35-54.

Шишкина А.В. (Петрозаводск)
anvas@inbox.ru

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Как известно, обратное к правилу Лопиталя утверждение неверно: из существования предела отношения функций не всегда следует существование предела отношения производных этих функций. Однако, оно справедливо при некоторых дополнительных условиях. Примером может служить теорема Харди и Литтлвуда [1, с. 215-216]: *Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(0,1)$, $f'(x)$ возрастает на $(0,1)$, $c > 0$, и $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)(1-x)^c = A > 0$, то существует предел $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)(1-x)^{c+1} = Ac$.*

В случае аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций в этом направлении в [2] была доказана следующая

Теорема A. *Пусть $f(z)$ аналитическая в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функция, $\eta \in (0, \pi/2)$, $c \in \mathbb{C}$, W_η – угол Штольца величиной 2η с вершиной в точке $z = 1$, и существует конечный предел $\lim\limits_{W_\eta \ni z \to 1} f(z)(1-z)^c = A$, то для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$ существует предел $\lim\limits_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \to 1} f'(z)(1-z)^{c+1} = Ac$.*

В действительности справедливо более общее утверждение, которое можно считать обращением правила Лопиталя, при некоторых дополнительных предположениях.

Теорема. *Пусть B – односвязная область, которая имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ, ни одна внутренняя точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ; точка $\xi \in \gamma$; V_η – такой угол Штольца величиной*

2η и вершиной в точке ξ (биссектриса угла V_η ортогональна касательной к γ в точке ξ), что $V_\eta \subset B$; функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в B; и существует предел

$$\lim_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{f(z)}{g(z)} = A \neq \infty.$$

Если значения функции $\dfrac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z)$ отделены от нуля в V_η при $z \to \xi$, то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} \frac{f'(z)}{g'(z)} = A.$$

Если $\lim\limits_{V_\eta \ni z \to \xi} \dfrac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0,$ *то для любого* $\varepsilon \in (0, \eta)$ $\lim\limits_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} \dfrac{f'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0.$

Также получено обобщение теоремы A на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харли Г. *Расходящиеся ряды* -- М.: Ин. лит., 1951.
2. Годуля Я., Старков В.В. *О граничном поведении в угле Штольца аналитических в круге функций*// Матем. заметки. – 2002. – Т. 71(5). - С. 652-661.

Шишкова Е.В. (Саратов)

О ПОГРЕШНОСТИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ВМЕСТЕ С ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ[100]

В данном сообщении приводятся точные по порядку оценки погрешностей приближения функции и её производной на некоторых компактных классах, полученные методом из [1].

Рассмотрим семейство интегральных операторов $T_\alpha^k, k = 0, 1$:

$$T_\alpha^0 f = -\frac{3}{4\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} [(t-x)^2 - \alpha^2] f(t)dt,$$

а ядро оператора T_α^1 есть производная по x от ядра оператора T_α^0, $\alpha > 0$ – параметр.

Рассмотрим классы функций:

$$M_2^r[a,b] = \{f(x) \in W_2^r[a,b] : \ ||f||_{W_2^r} \leqslant 1\}, \quad r = 1, 2,$$

[100]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-1295.2003.1).

где $W_2^r[a,b]$ – одномерные пространства Соболева, и величины:

$$\Delta_1^{(p)}(T_\alpha^0, M_2^r) = \sup\{||T_\alpha^p f - f^{(p)}||_{C_\varepsilon} : \ f(x) \in M_2^r[a,b]\},$$
$$\Delta(\delta, T_\alpha^p, M_2^r) = \sup\{||T_\alpha^p f_\delta - f^{(p)}||_{C_\varepsilon} : \ f \in M_2^r, \ ||f_\delta - f||_{L_2} \leqslant \delta\},$$

$r = 1,2, \ p = \overline{0, r-1}$, где f_δ – δ-приближение к f в среднеквадратичной метрике, $C_\varepsilon = C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

Теорема. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\Delta_1^{(p)}(T_\alpha^0, M_2^r) = C_{1r}^{(p)}\alpha^{\beta_{pr}} + \psi_{1r}^{(p)}(\alpha), \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}(C_r^{(p)}\delta^{\gamma_{pr}} + \psi_r^{(p)}(\delta)) \leqslant \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}^p, M_2^r) \leqslant C_r^{(p)}\delta^{\gamma_{pr}} + \psi_r^{(p)}(\delta), \tag{2}$$

где $r = 1,2, \quad p = \overline{0, r-1}, \quad \alpha(\delta) = C_{pr}\delta^{m_{pr}}, \ \beta_{01} = \beta_{12} = \frac{1}{2}, \ \beta_{02} = \frac{3}{2}, \quad \gamma_{01} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{02} = \frac{3}{4}, \gamma_{12} = \frac{1}{4}, \quad m_{01} = 1, \quad m_{02} = m_{12} = \frac{1}{2}$, *константы* $C_r^{(p)}, \quad C_{1r}^{(p)}, \quad C_{pr}$ *и порядки функций* $\psi_{1r}^{(p)}(\alpha)$, $\psi_r^{(p)}(\delta)$ *– вычислены.*

При этом равенства (1) *асимптотические по* α *при* $\alpha \to 0$, *оценки* (2) *– по* δ *при* $\delta \to 0$.

Равенства (1) при $p = 0,1, \ \ r = 2$ приведены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромова Г.В. *Оценки погрешностей приближенных решений уравнений первого рода*// Докл. Академии наук. – 2001. – Т. 378, № 5. – С. 605-609.

2. Хромова Г.В., Шишкова Е.В. *О точном порядке скорости сходимости приближений функции вместе с ее производной*// Тез. докладов VIII конференции «Обратные и некорректно поставленные задачи». – Москва. – 2003. – С. 67.

Щербаков В.И. (Жуковский)

ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА И ФУРЬЕ-УОЛША В ТОЧКАХ РАЗРЫВА ВТОРОГО РОДА

Известно, что ряды Фурье по системам Хаара $\chi_n(t)_{n=0}^\infty$ (см. [1] и [2]) и по системам Уолша $\omega_n(t)_{n=0}^\infty$ (см. [3] и [4]) расходятся во всякой неустранимой двоично-иррациональной точке точке разрыва первого рода; более того, расходятся даже частные суммы Фурье с номерами 2^n, которые должны сходится во всякой точке непрерывности функции. Однако, переставив надлежащим образом систему Хаара или Уолша (эта перестановка зависит как от точки x, так и от функции $f(t)$, по которой определятся ее ряд Фурье), можно добиться сходимости ряда Фурье-Хаара или Фурье-Уолша в заданной (двоично-иррациональной) точке x, то есть имеет место следующая

Теорема. *Для всякой точки* x *и интегрируемой (по Лебегу) на отрезке* $[0,1]$ *функции* $f(t)$ *такой, что существуют* $f(x+)$, $f(x-)$, *и*

$f(x+) \neq f(x-)$, можно так представить систему Хаара $\chi_n(t)_{n=0}^{\infty}$, что полученный после такой перестановки ее ряд Фурье будет сходиться в точке x.

По теореме Римана об условно сходящихся рядах, в зависимости от перестановки можно получить сходимость к любому наперед заданному вещественному числу.

Аналогичная теорема имеет место и для систем Уолша $\omega_n(t)_{n=0}^{\infty}$.

К сожалению, такая перестановка ухудшает поведение частных сумм Фурье в других точках, и для всякой такой «хорошей» перестановки (для заданной двоично-иррациональной точки x) можно найти такую точку непрерывности y_0 функции $f(t)$, в которой этот «исправленный» (для двоично-иррациональной точки x) ряд Фурье-Хаара (или Уолша) разойдется (более того, разойдутся даже частные суммы $S_{2^n}(y_0; f)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Faber G. *Uber die orthogonalfunctionen des Herr Haar* // Jahresber. Deuth. Math. Ver. – 1910. – V. 2. – P. 104-112.

2. Ульянов П.Л. *Ряды по системам Хаара* // Мат. сб. – 1964. – Т. 69, № 3. – С. 356-391.

3. Alexits G. *Convergence problems of orthonormal series* // Oxford-London-New York-Paris. – 1961. – V. 20.

4. Walsh J.L. *A closed set of normal orthonormal functions* // Amer. J. Math. – 1923. – V. 45. – P. 5-24.

Щитов А.Н., Вакарчук С.Б. (Украина, Днепропетровск)
academy@amsu.dnp.ukrpack.net

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ-ХААРА И ПОЛИНОМАМИ ХААРА В МЕТРИКЕ L_p

Продолжая исследования [1]-[2], связанные с вычислением точных оценок погрешности аппроксимации, сформулируем некоторые из полученных результатов. Предварительно напомним ряд обозначений и определений. Пусть $f(x)$ – заданная на отрезке $[0,1]$ функция; ξ – произвольное разбиение $[0,1]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$; $|\xi| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = \overline{1,n}\}$; $V(f,\xi) = \left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right\}^{1/p}$ $(1 \leq p < \infty)$ – вариационная сумма p-го порядка для $f(x)$ по ξ; $\omega_{1-1/p}(f,t) = \sup\left\{V(f,\xi) : |\xi| \leq t\right\}$ – модуль непрерывности $f(x)$ порядка $1 - 1/p$; $V_p(f) = \omega_{1-1/p}(f,1)$ – p-вариация функции $f(x)$; V_p – класс определенных на $[0,1]$ функций, имеющих ограниченную p-вариацию. Известно, что $\omega_p(f,t) \leq t^{1/p}\omega_{1-1/p}(f,t)$ $(1 \leq p < \infty)$, где $\omega_p(f,t)$ – интегральный модуль непрерывности.

Обозначим $n' = \{2^m$, если $n = 2^m + k\,(m \in \mathbb{N}, k = \overline{1, 2^m - 1}); 2^{m+1}$, если $n = 2^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)\}$; $E_n(f, L_p)$ – наилучшее приближение $f(x) \in V_p$ в метрике $L_p([0,1])$ полиномами порядка не выше n, построенными по системе Хаара.

Теорема 1. *Пусть $1 \le p < \infty$ и $n = 2, 3, \ldots$. Тогда имеет место неравенство*

$$E_n(f, L_p) \le 2^{-1}(n')^{-1/p}\omega_{1-1/p}(f, 1/n') \quad (\forall f(x) \in V_p)\ , \tag{1}$$

которое является точным на классе V_p в том смысле, что существует функция $f_0(x) \in V_p$, обращающая (1) в равенство.

Теорема 2. *Пусть $KV_p = \{f(x) \in V_p : V_p(f) \le K\}$, где $1 \le p < \infty$ и K – положительная константа, $h = 2^{-(m+1)}$. Тогда справедливы равенства*

$$E_n(KV_p, L_p) = \sup\{E_n(f, L_p) : f(x) \in KV_p\} =$$

$$= 2^{-1}Kh^{1/p}\{2^{1/p},\ \textit{если}\ n = 2^m + k\,(m \in \mathbb{N}, k = \overline{1, 2^m - 1});$$
$$1,\ \textit{если}\ n = 2^{m+1}(m \in \mathbb{Z}_+)\}.$$

При $p = 1$ класс KV_1 совпадает с классом H_V, рассмотренным в [3], а теорема 2 содержит соответствующий результат, как частный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щитов А.Н., Вакарчук С.Б. *О точных оценках погрешности приближения классов функций нескольких переменных частными суммами Фурье-Хаара и полиномами по системе Хаара в метрике C* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней мат. школы. – Воронеж, 2003. – С. 98-99.

2. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. *О приближении функций полиномами по системе Хаара и оценках коэффициентов Фурье-Хаара* // Труды Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 19. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы шестой Казанской междунар. летней школы-конф. – Казань, 2003. – С. 40-41.

3. Хорошко Н.П. *О наилучшем приближении в метрике L некоторых классов функций полиномами по системе Хаара* // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6(1). – С. 47-54.

Юрко В.А. (Саратов)

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПОЛУОСИ И ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ[101]

Пусть $u(x,t), v(x,t)$ – решение системы

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 6v_x,\ v_t = 2v_{xxx} - 6uv_x, \quad x \ge 0,\ t \ge 0, \tag{1}$$

[101] Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования E02-1.0-186.

и пусть $M_{mj}(t,\lambda)$, $1 \le m < j \le 4$ – функции Вейля для дифференциального уравнения

$$Ly := y^{(4)} - 2(uy')' + wy = \lambda y, \quad x > 0, \quad w := v + u^2 - u'',$$

соответствующие линейным формам $U_\xi(y) := y^{(\xi-1)}(0)$, $\xi = \overline{1,4}$ (см. [1]). Для случая полуоси $x \ge 0$ эволюционные уравнения на функции Вейля являются нелинейными. Однако их можно свести к цепочке трех последовательно решаемых уравнений Риккати. Обозначим $u_k = u^{(k-1)}_{|x=0}$, $v_k = v^{(k-1)}_{|x=0}$, $F = [F_{kj}]_{k,j=\overline{1,4}}$, где $F_{11} = -F_{44} = 3u_2$, $F_{22} = -F_{33} = u_2$, $F_{12} = 6u_1$, $F_{23} = F_{34} = -2u_1$, $F_{13} = F_{24} = 0$, $F_{34} = -4$, $F_{21} = -4\lambda + 4v_1 + 4u_1^2 - u_3$, $F_{32} = -4\lambda + 4v_1 + 4u_1^2$, $F_{43} = -4\lambda + 4v_1 - u_3$, $F_{31} = 4v_2 + 8u_1u_2 - u_4$, $F_{42} = 8v_2 + 12u_1u_2 - u_4$, $F_{41} = -2u_1(\lambda - v_1 - u_1^2 - 3u_3) + 4v_3 + 8(u_2^2) - u_5$.

Теорема 1. *Пусть* $Z_1 = [M_{12}, M_{13}, M_{14}]^T$ *(T – знак транспонирования),* $Z_2 = [M_{23}, M_{24}]^T$, $Z_3 = M_{34}$. *Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_k = Q_{21}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} Z_k - Z_k Q_{11}^{(k)} - Z_k Q_{12}^{(k)} Z_k, \quad k = 1,3,$$

где $Q_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{21} \\ F_{31} \\ F_{41} \end{bmatrix}$, $\quad Q_{11}^{(1)} = F_{11}, \quad Q_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}$,

$$Q_{12}^{(1)} = [F_{12}, F_{13}, F_{14}], \quad Q_{21}^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{32} - F_{12}M_{13} \\ F_{42} - F_{12}M_{14} \end{bmatrix}, \quad Q_{11}^{(2)} = F_{22} - F_{12}M_{12},$$

$$Q_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{33} - F_{13}M_{13} & F_{34} - F_{14}M_{13} \\ F_{43} - F_{13}M_{14} & F_{44} - F_{14}M_{14} \end{bmatrix},$$

$$Q_{12}^{(2)} = [F_{23} - F_{13}M_{12}, F_{34} - F_{14}M_{12}],$$

$$Q_{21}^{(3)} = F_{43} - F_{23}M_{24} - (M_{14} - M_{12}M_{24})F_{13}, \quad Q_{11}^{(3)} = 0,$$

$$Q_{22}^{(3)} = F_{44} - F_{33} - F_{24}M_{24} + F_{23}M_{23} +$$

$$+ (M_{13} - M_{12}M_{23})F_{13} - (M_{14} - M_{12}M_{24})F_{14},$$

$$Q_{12}^{(3)} = F_{34} - F_{24}M_{23} - (M_{13} - M_{12}M_{23})F_{14}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Yurko V.A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory* // Inverse and Ill-posed Problems Series. – VSP, Utrecht, 2002. – P. 303.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов
12-й Саратовской зимней школы

Отв. за выпуск Е.В. Гудошникова
Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX

Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98

Подписано в печать 26.12.03 Формат $60\times84\frac{1}{16}$
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times
Усл. печ.л. 13,02(14,0). Уч.-изд. л. 13,0 Тираж 300 Заказ 320
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Изд-во ГосУНЦ "Колледж".
Отпечатано ООО "Волга-Принт"
410600, Саратов, Московская, 84, оф. 37.