СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы
26 января - 1 февраля 1998 года

Издательство Саратовского университета
1997

УДК 517.5;517.94;518;533.7
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:
С56 Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. - 180с.

ISBN 5-292-02115-6

Сборник содержит тезисы докладов и научных сообщений участников 9-й Саратовской зимней школы, посвященные различным вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по теории функций.

Оргкомитет школы:

чл.-кор. РАН П.Л.Ульянов (председатель), чл.-кор. РАН Д.И.Трубецков (зам. председателя), проф. А.П.Хромов (зам. председателя), акад. РАН С.М.Никольский, чл.-кор. РАН Б.С.Кашин, проф. акад. МАН ВШ Е.П.Долженко, проф. Б.И.Голубов, проф. Ю.Ф.Коробейник, проф. Ю.В.Покорный, проф. Д.В.Прохоров, проф. А.М.Седлецкий, проф. Ю.Н.Субботин, проф. В.А.Юрко, доц. А.Л.Лукашов (секретарь)

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту 98-01-10006

Текст сборника печатается в авторской редакции

ИСПРАВЛЕНИЯ

1. Фамилию автора на стр. 8 следует читать Андриянов Г.И.
2. Следует стр.55 разместить после стр. 62.

$\text{С}\dfrac{1702050000-283}{176(02)-97}$ Без объявл.

ISBN 5-292-02115-6

Ф. Г. Авхадиев (Казань)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЛАСТЕЙ В R^n

Рассматриваются неравенства Пуанкаре и Соболева в плоских и пространственных областях произвольного вида. Исследуется следующая задача: найти геометрические характеристики областей, эквивалентные нормам операторов вложения. Доказано, что на множестве плоских односвязных областей подходящими геометрическими характеристиками являются степени обобщенных моментов инерции области относительно своей границы. В общем случае обобщенные моменты инерции области позволяют оценить снизу нормы операторов вложения.

В доказательствах существенную роль играют весовые неравенства, не содержащие неопределенных констант, имеющие и самостоятельный интерес.

Предлагаются также новые неравенства, представляющие собой конформно-инвариантные аналоги неравенств Пуанкаре и Фридрихса.

Работа поддержана РФФИ, грант N 96-01-00110.

Г. А. Акишев (Караганда)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ–ХААРА ФУНКЦИЙ ИЗ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть X симметричное пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций и $\phi(t)$ фундаментальная функция этого пространства. Хорошо известно, что в симметричном пространстве ограниченно действует оператор σ_τ подобного преобразования аргумента

$$(\sigma_\tau f)(t) = f\left(\frac{t}{\tau}\right), \text{ если } \frac{t}{\tau} \in [0,1]$$

и

$$(\sigma_\tau f)(t) = 0, \text{ при } \frac{t}{\tau} \notin [0,1]$$

Числа

$$\alpha_X = \lim_{\tau\to 0}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|}{\ln\tau} \quad ; \quad \beta_X = \lim_{\tau\to\infty}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|}{\ln\tau}$$

называются индексами Бойда пространства X.

$\omega(f,\delta)_X$ — модуль непрерывность фунуции $f \in X$; $E_n(f)_X$ — наилучшее приближение функции $f \in X$ полиномами по системе Хаара.

Рассмотрим функциональные классы

$$H^\omega = \{f \in X : \omega(f,\delta)_X \le \omega(\delta), 0 \le \delta \le 1\}$$

$$E(\lambda) = \{f \in X : E_n(f)_X \le \lambda_n\}$$

где $\omega(\delta)$ — данный модуль непрерывность; $\lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел $\lambda_n \downarrow 0$, $n \to +\infty$.Доказана

Теорема. *Пусть X— сепарабельное симметричное пространство и $0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$. Для того, чтобы для любой функции $f \in E(\lambda)$ ее ряд Фурье-Хаара абсолютно и равномерно сходился на $[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\phi(n^{-1})]^{-1}\lambda_n < +\infty$$

Аналогичный результат получен для элементов класса H^ω.

Р. Р. Акопян (Озерск)

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА В H_2 ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ НУЛЕЙ

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических полиномов степени не более, чем n, с комплексными коэффициентами. При $0 \le p \le \infty$ имеет место точное неравенство Бернштейна

$$\|P_n'\|_p \le n\|P_n\|_p, \quad P_n \in \mathcal{P}_n, \tag{1}$$

На полиномах вида cz^n неравенство (1) обращается в равенство, причем для $0 < p \le \infty$ других экстремальных полиномов нет. Этот результат при $p = \infty$ получил С.Н.Бернштейн [1], при $1 \le p < \infty$ – А.Зигмунд [2], при $0 \le p < 1$ – В.В.Арестов [3].

Пусть $\mathcal{P}_n(R)$ при $R > 0$ есть множество полиномов $P_n \in \mathcal{P}_n$, не имеющих нулей в круге радиуса R с центром в начале координат комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Обозначим через $K_n(R)_p$ точную (наименьшую) константу в неравенстве

$$\|P_n'\|_p \le K_n(R)_p\|P_n\|_p, \quad P_n \in \mathcal{P}_n(R). \tag{2}$$

P.Erdös выдвинул гипотезу, позднее доказанную P.D.Lax'ом [4], что $K_n(1)_\infty = \frac{n}{2}$. В настоящее время константа $K_n(R)_p$ для всех значений p известна лишь при $R = 1$. В этом случае на полиномах вида $c(z^n+1)$ неравенство (2) обращается в равенство. Этот результат при $p = \infty$ и $p = 2$ получил P.D.Lax [4], при $1 \le p < \infty$ – N.G.De Bruyn [5], при $0 \le p < 1$ – Q.I.Rahman и G.Schmeisser [6]. Отметим еще результат M.A.Malik'a [7], который доказал, что для $p = \infty, R \ge 1$ на полиномах вида $c(z+R)^n$ неравенство (2) обращается в равенство.

В докладе изучается точная константа в неравенстве (2) в случае $p = 2$.

Теорема 1. *Для любых $n \ge 1$, $R \ge 1$ в неравенстве (2) существует экстремальный полином и все n нулей каждого экстремального полинома лежат на окружности $|z| = R$.*

Теорема 2. *Для $n = 1,2,3,4$ при $R \ge 1$ неравенство (2) обращается в равенство на одном из полиномов Q_j, где в зависимости от n, $Q_j = Q_{j,n}$, $1 \le j \le m(n)$ есть следующие полиномы при $n = 1 : z - \varepsilon$; при $n = 2 : z^2 - \varepsilon^2$, $(z-\varepsilon)^2$; при $n = 3 : z^3 - \varepsilon^3$, $(z-\varepsilon)^3$; при $n = 4 : z^4 - \varepsilon^4$, $(z^2-\varepsilon^2)^2$, $(z-\varepsilon)^4$; где $|\varepsilon| = R$.*

Теорема 3. *Пусть $R > 0$ и $1 - 2n + (n-1)^2R^{2n} \le 0$ или $R \ge 1$ и $(1+R^{2n})(R^2(n-1)^2 - R^{2(n-1)}) - n^2(R^2 + R^{2(n-1)}) \le 0$. Тогда на полиномах вида $c(z^n + \varepsilon^n)$, $|\varepsilon| = R$, неравенство (2) обращается в равенство.*

Теорема 4. *Пусть $R \ge 1$ удовлетворяет неравенству $(\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 R^{2k})(R^{2\nu}(n-\nu)^2 + R^{2(n-\nu)}\nu^2) - (R^{2\nu} + R^{2(n-\nu)})(\sum_{k=0}^n (n-k)^2 R^{2k}(C_n^k)^2) \ge 0$, где $\nu = [\frac{n}{2}]$.*

Тогда на полиномах вида $c(z+\varepsilon)^n$, $|\varepsilon| = R$, неравенство (2) обращается в равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1.Бернштейн С.Н.*Собрание сочинений*, М.Изд. АНСССР, 1952.

2.Зигмунд А.*Тригонометрические ряды*, т.2, М.Мир, 1965.

3.Арестов В.В.*Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных*, Известия АНСССР, т.45, 1982, с.3-22.

4.Lax P.D.*Proof of the conjecture of P.Erdos on the derivative of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 1947, p.509-513.

5.De Bruyn N.G.*Inequalitics concerning polynomials in the complex domain*, Nederl. Akad. Watensh. Proc.,50, 1947, p.1265-1272.

6.Rahman Q.I. and Schmeisser G., *Inequalities for polynomials*, J.Aprox. Theory, 53, 1988, p.26-33.

7.Malik M.A.*On the deriative of polynomials,* J.London. Math. Soc. (2),1, 1969, p.57-60

А. Р. Алимов(Москва)

СОХРАНЕНИЕ СОЛНЕЧНОСТИ ДЛЯ MAX–НОРМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В последние годы появился ряд работ, посвященных исследованию задач наилучшего приближения относительно семейства норм, заданных на линейном пространстве [1]. Посредством (LNN) обозначается класс всех линейных пространств X с несимметричной нормой $\rho : X \times X \to \mathbf{R}_+$ (см. [2,3]). Любая несимметричная норма на X есть в точности функционал Минковского некоторого выпуклого ограниченного тела на плоскости, ядро которого содержит нулевой элемент. *Всякое линейное нормированное пространство лежит в* (LNN). Всегда предполагается $X \in (LNN)$.

Множество $\emptyset \neq M \subset X$ называется *чебышёвским*, если для любой точки $x \in X$ множество $P_M x$ её ближайших элементов из M состоит из одной точки. Множество M называется *солнцем*, если для любой точки $x \in X \setminus M$ найдется точка $y \in M$ со свойством $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$, $\lambda \geq 0$.

Пусть $\mathcal{X}$ — система пространств $\{(X, \rho_i)\}_{i \in I}$, где X — фиксированное линейное действительное пространство, ρ_i — несимметричная норма на X, так что $(X, \rho_i) \in (LNN)$. Положим $\rho(0,x) := \sup_{i\in I} \rho_i(0,x)$ и предположим $\rho(0,x) < \infty$ для любого $x \in X$. Тогда $\rho(x,y) := \rho(0, y-x)$ — несимметричная норма на X и $(X,\rho) \in (LNN)$. Единичный шар пространства (X,ρ) есть пересечение единичных шаров пространств (X,ρ_i).

Теорема. *Пусть* $\dim X = 2$ *и пусть* $M \subset X$ *— солнце в каждом пространстве* $(X,\rho_i) \in \mathcal{X}$. *Тогда* M *— солнце в пространстве* (X,ρ).

Напомним, что в конечномерном X каждое чебышёвское множество является солнцем (V. Klee).

Следствие. *Пусть* $\dim X = 2$ *и пусть* $M \subset X$ *- - чебышёвское множество в каждом* $(X,\rho_i) \in \mathcal{X}$. *Тогда* M *— солнце в* (X,ρ). *Если* $\#I < \infty$, *то* M *— чебышёвское множество в* (X,ρ).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Isac G., Postolică V. The best approximation and optimization in locally convex spaces, (Approximation & Optimization, 2), Peter Lang, Frankfurt am Main, 1993.

[2] Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets II // Math. Scand., 18 (1966), 5–15.

[3] Alimov A.R. Chebyshev set's complement // East J. Appr., 2, 2 (1996), 215–232.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований. Проект 96-01-00212.

Г.И.Андриянов(Калуга)

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Пусть D - односвязная открытая ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbb{C}}_z$. $A(exp, D)$ пространство целых функций $F(z)$, представимых в виде преобразования Бореля и имеющих ассоциированные из пространства $A_0(CD)$, с топологией "индуцированной" топологией пространства $A_0(CD)$.

Пусть задано P, $P \in \mathbb{N}$, $P \geq 1$, P-фиксировано. Пусть заданы P функций $W_j(z)$, $j = 1, 2, 3, ..., p$ - однолистных и голоморфных в области D . Кроме того, заданы P функций $\varphi_j(z)$, голоморфных в области D и P последовательностей комплексных чисел $\{a_{np+j-1}\}_{n=0,j=1}^{\infty,p}$.

В настоящей работе рассматривается следующая задача:

1. Найти последовательность чисел $\{a_{np+j-1}\}_{n=0,j=1}^{\infty,p}$ являющуюся допустимой, т.е. последовательность, для которой заведомо существует функция $\gamma(z) \in A_0(CD)$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} [W_j(z)]^{np+j-1} \varphi_j(z)\gamma(z)dz = a_{np+j-1}; j = 1, 2, \ldots, p; n = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Интегрирование в (1) ведется по некоторой замкнутой спрямляемой жордановой кривой $\Gamma : int\Gamma \subset D$ и $\gamma(z)$ все еще регулярна на $\Gamma \bigcup ext\Gamma$.

2. В случае, когда последовательность чисел $\{a_{np+j-1}\}_{n=0,j=1}^{\infty,p}$ является допустимой, определить функцию $\gamma(z) \in A_0(CD)$, удовлетворяющую (1).

Постановка задачи очень близка к проблеме моментов Ю.А.Казьмина, но отличается от нее двумя существенными условиями:

1) во-первых, в (1) все функции $W_j(z)$, $j = 1, 2, 3, ..., p$ в общем случае различны;

2) во вторых, образы области D при отображениях функциями $W_j(z)$ не являются инвариантными относительно поворотов на угол $2\pi/p$ в $\mathbb{C}_W$.

При некоторых условиях на числовые последовательности $\{a_{np+j-1}\}_{n=0,j=1}^{\infty,p}$ в правой части (1) найдены необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы моментов (1) и вид $\gamma(z)$.

Для решения проблемы моментов (1) используются методы краевых задач функций комплексного переменного.

Н.Л.Андреева(Саратов)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИММАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая описывается линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + b\,u, \quad ,x(t_0) = x_0, \quad ,x(t_1) = t_1, \tag{1}$$

интегральным критерием качества

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt \to \inf \tag{2}$$

и ограничениями на управляющую функцию

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{3}$$

Здесь A-матрица $n \times n; b, x_0, x_1 - n$векторы, $F(x,u,t)$-гладкая, ограниченная снизу, сильно выпуклая по (x,u) функция.

Для решения (1)-(3), как задачи на условный экстемум, к функционалу (2) добавляем штрафные функционалы $\Phi_k(x,u), (k = 1, 2, ..)$, которые выбираем в виде

$$\Phi_k(x,u) = \varepsilon_k^{-1}[\Delta_1(x,u) + \Delta_2(u)], \tag{4}$$

где $\Delta_1(x,u)$-невязка уравнений (1), $\Delta_2(u) > 0$ при выходе $u(t)$ за границы неравенства (3), ε_k числовая последовательность, $\varepsilon_k \swarrow 0,\ k \to \infty$ имеет смысл малого параметра.

Полученные уравнения для приближенных решений содержат малый параметр ε_k в знаменателе , что следует из вида $\Phi_k(x,u)$в (4).Эту трудность удается преодалеть, просвободившись в некоторых слагаемых от ε_k. Иследования уравнений для приблеженных решений позволяют доказать теорему о сходимости приблеженных решений к точному в пространстве $L_2[t_0, t_1]$.

В. А. Андриенко

ПРИБЛИЖЕНИЯ КРАТНЫМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ И ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ СУММ[1]

Создана теория скорости сходимости п.в. кратных ортогональных рядов $\sum_{n\geq 0} a_n\varphi_n(x)$, где $n = (n_1, ..., n_d)$, $(d \geq 1)$ - мультииндекс, а ОНС $\varphi = \{\varphi_n(x)\}$ определена на пространстве (X, F, μ) с положительной мерой, с L^2 -суммой $f(x)$ и прямоугольными частными суммами

$$s_n(x) = \sum_{k\leq n} a_k\varphi_n(x)$$

Условие

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2\lambda^2(n) < \infty, \tag{1}$$

где $\{\lambda(n) > 0 : n \geq 0\}$, $\lambda(n)/\Pi_{i=1}^d \ln n_i \uparrow (n \geq 2)$, $\lambda(0) = 1$ влечет за собой для любой ОНС φ п.в. на X оценку

$$f(x) - s_{n-1}(x) = o_x\left\{\sum_{i=1}^{d} \frac{\ln \alpha_i(n_i)}{\lambda_i(n_i)}\right\}, \quad n_* = \min_{1\leq i\leq d}(n_i) \to \infty, \tag{2}$$

где $\lambda_i(n_i) = \lambda(0, ..., 0, n_i, 0, ..., 0)$, $\quad e \leq \alpha_i(n_i) \leq n_i \quad (i = 1, 2, ..., d)$, а $\alpha_i(n_i)$ непрерывно изменяются в зависимости от порядка роста $\{\lambda(n)\}$.

Оценка (2) является точной по порядку на множестве всех ортогональных рядов, а условие (1) - необходимым, если (X, F, μ) - пространство с конечной, неатомической мерой.

Используемые методы позволяют получить оценки прямоугольных частных сумм $s_n(x)$. Пусть $\{m_n\}$ - решетка в Z_+^d, а последовательность $\{\lambda(n) > 0 : n \geq 0\}$ такова, что $\lambda(m_n)/\Pi_{i=1}^d \ln n_i \downarrow$, когда $n^* = \max_{1\leq i\leq d}(n_i) \to \infty$. Тогда условие (1) влечет для любой ОНС φ п.в. на X оценку

$$s_{m_n}(x) = o_x\left\{\Pi_{i=1}^d \ln n_i/\lambda(m_n)\right\}, \quad n^* \to \infty.$$

Если (X, F, μ) - пространство конечной неатомической меры и $\lambda(n) \geq q > 0$ для всякого $n \geq 0$, то эта оценка являеться точной по порядку на множестве всех ортогональных рядов.

[1]Эта работа частично поддержена грантом N APU 061002 Международной Соросовской Программы поддержки образования в области точных наук в Украине.

А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов(Ульяновск)

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ АЭРОУПРУГОСТИ МЕТОДАМИ Т.Ф.К.П.

Исследуется динамическая устойчивость вязкоупругих элементов крылового профиля. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Im = R^2 \setminus [0,l]$$

$$\varphi_y^+ = Vf_+{}'(x),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi_y^- = \begin{cases} \dot{w}_k(x,t) + Vw'(x,t) + Vf_-{}'(x),\ x \in (a_{2k-1}, a_{2k}), 0 \le a_{2k-1} < a_{2k} \le l, k = 1 \div n \\ Vf_-{}'(x), \qquad x \in [0,a_1] \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} [a_{2k}, a_{2k+1}] \bigcup [a_{2n}, l], \end{cases}$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0, \quad \varphi_y^\pm \equiv \varphi_y(x, \pm 0, t),$$

$$L(w_k) \equiv M_k\ddot{w}_k + D_k(w_k'''' - \int\limits_0^t R_{1k}(\xi,t) w_k''''(x,\xi)\,d\xi) + \beta_{0k}(w_k - \int\limits_0^t R_{2k}(\xi,t) w_k(x,\xi)\,d\xi) + \beta_{1k}\dot{w}_k$$

$$+\beta_{2k}\dot{w}_k'''' + N_k w_k'' = p_0 - p_* - \rho(\varphi_t(x,-0,t) + V\varphi_x(x,-0,t)),\ x \in (a_{2k-1}, a_{2k}), k = 1 \div n.$$

Здесь x,y,t - декартовы координаты и время; $\varphi(x,y,t)$ - потенциал скорости; $f_+(x), f_-(x)$ - функции, задающие форму профиля; $w_k(x,t)$ - прогибы пластин; штрих обозначает производную по x и τ, точка- по t.

Используя методы теории функций комплексного переменного , решение задачи можно привести к исследованию уравнения:

$$L(w_k) = p_0 - p_* + \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_{a_1}^{l} \frac{\partial\omega_-(\tau,t)}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{(l-x)x} + \sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-\tau)\tau}(x-\tau)}\right)d\tau -$$

$$-\frac{V\rho}{2\pi}\int\limits_0^l \frac{\partial f_+(\tau)}{\partial\tau}\left(\frac{\sqrt{(l-x)x} - \sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau + \frac{V\rho}{2\pi}\int\limits_0^l \frac{\partial f_-(\tau)}{\partial\tau}\left(\frac{\sqrt{(l-x)x} + \sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau$$

$$+\frac{V\rho}{2\pi}\sum_{k=1}^n \int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{\partial\omega_-(\tau,t)}{\partial\tau}\left(\frac{\sqrt{(l-x)x} + \sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau, \quad x \in (a_{2k-1}, a_{2k}), \quad k = 1 \div n. \tag{1}$$

$$\omega_-(x,t) = \begin{cases} 0, \quad x \in [0,a_1], \\ \int\limits_{a_1}^{x} (w_{1t} + Vw_{1x})\,dx, \quad x \in (a_1, a_2), \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} (w_{kt} + Vw_{kx})dx, \quad x \in (a_{2m}, a_{2m+1}), m = 1 \div n-1, \\ \sum\limits_{k=1}^{m-1} \int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} (w_{kt} + Vw_{kx})dx + \int\limits_{a_{2m-1}}^{x} (w_{mt} + Vw_{mx})dx, x \in (a_{2m-1}, a_{2m}), m = 2 \div n, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} (w_{kt} + Vw_{kx})dx, \quad x \in (a_{2n}, l); \end{cases}$$

Теорема. *Пусть концы вязкоупругих элементов закреплены либо жестко ($w_k = w_k' = 0$), либо шарнирно ($w_k = w_k'' = 0$), меры релаксации $Q_{1k}(\tau,t) = \dfrac{\partial R_{1k}(\tau,t)}{\partial\tau}$ удовлетворяют неравенствам $\dfrac{\partial Q_{ik}(\tau,t)}{\partial\tau} \ge 0$, $\dfrac{\partial Q_{ik}(0,t)}{\partial t} \le 0$, $\dfrac{\partial^2 Q_{ik}(\tau,t)}{\partial\tau\partial t} \le 0$ $(i = 1,2)$, и* *выполнены условия*

$$D_k > 0,\ M_k \geq \rho K_{0k}/\pi,\ \beta_{ik} \geq 0 (i = 0,1,2),\ N_k < \lambda_{1k} D_k (1 + Q_{1k}(0,\infty)) - \rho K_{0k} V^2/\pi,$$

где $K_{0k} = \sup\limits_{x \in (a_{2k-1}, a_{2k})} \sum\limits_{m=1}^{n} \int\limits_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} ln \dfrac{\sqrt{(l-\tau)x} + \sqrt{(l-x)\tau}}{|\tau - x|} d\tau, k = 1 \div n,$

λ_{1k} *-наименьшие собственные значения соответствующих краевых задач для уравнения* $\psi''''(x) = -\lambda \psi''(x)$, *тогда решения* $w_k(x,t)$ *системы уравнений (1) устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений* $w_k(x,0), \dot{w}_k(x,0), w''_k(x,0)$.

Н. Ю. Антонов (Екатеринбург)

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ПО КУБАМ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Известно [1], что если функция, определенная на d-мерном торе $[-\pi,\pi)^d$, $d\geq 2$, принадлежит классу $f\in L(\log^+L)^d(\log^+\log^+L)_{[-\pi,\pi)^d}$, то кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится по кубам почти всюду.

Неотрицательную неубывающую функцию $\psi(u)$ назовем медленно растущей, если при любом $\delta>0$ функция $\psi(u)u^{-\delta}$ убывает при достаточно больших u.

Будем говорить, что функция $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ удовлетворяет условиям (1), если

$$\begin{cases}\varphi(0)=0, & \varphi(u) \text{ выпуклая и возрастающая на } 0\leq u<\infty,\\ \varphi(u^{\frac{1}{2}}) & \text{вогнутая, } u\in[0,+\infty).\end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\psi(u)$ медленно растущая и пусть для всех натуральных d функции*

$$\varphi_d(u)=u\psi(u)(\log(u+u_d))^{d-1},\quad u_d=const,$$

удовлетворяют условиям (1). Предположим, что для любой функции $f\in\varphi_1(L)_{[-\pi,\pi)}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=f(x)\quad\text{п.в.}$$

Тогда для любого $d\geq 1$ если $f\in\varphi_d(L)_{[-\pi,\pi)^d}$, то ряд Фурье функции f и все его сопряженные ряды сходятся почти всюду.

Следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 1 и нашего результата [2] о сходимости почти всюду простых рядов Фурье функций из класса $f\in L(\log^+L)(\log^+\log^+\log^+L)_{[-\pi,\pi)}$, улучшает вышеупомянутый результат работы [1].

Теорема 2. *Если $f\in L(\log^+L)^d(\log^+\log^+\log^+L)_{[-\pi,\pi)^d}$, $d\geq 1$, то ряд Фурье функции f и все его сопряженные ряды сходятся по кубам почти всюду.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Sjölin P. *Convergence almost everywhere of sertain singular integrals and multiple Fourier series* // Arkiv för mat.. – 1971. – V.9. – № 1. – P. 65–90.

2. Antonov N. Yu. *Convergence of Fourier series* // East Journal on Approx.. – 1996. – V.2. – № 2. – P.187–196.

В. В. Арестов, А. Г. Бабенко (Екатеринбург)

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, *СВЯЗАННОЙ С ОЦЕНКОЙ СВЕРХУ* КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Изучается экстремальная задача для непрерывных на отрезке функций, представимых рядами по ортогональным многочленам, с ограничениями на значения функций и коэффициенты разложений, возникшая в исследованиях Ф.Дельсарта границ упаковок в некоторых метрических пространствах. Идея Ф.Дельсарта была развита и успешно применена в работах Г.А.Кабатянского и В.И.Левенштейна, Э.Одлыжко и Н.Слоэна, В.М.Сидельникова, в частности, для исследования контактных чисел τ_m евклидовых пространств $\mathbf{R}^m$, равных максимальному числу шаров единичного радиуса с непересекающимися внутренностями, касающихся единичного шара пространства. В настоящее время точное значение τ_m известно лишь при $m = 2, 3, 8, 24$, а именно, $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$, $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$. Для произвольных значений m известны оценки снизу и сверху константы τ_m; так в четырехмерном случае $24 \le \tau_4 \le 25$.

Пусть $R_k = R_k^{\alpha,\alpha}$, $k \ge 0$, есть система ультрасферических многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$, $\alpha = \frac{m-3}{2}$, нормированных условием $R_k(1) = 1$, $k \ge 0$. Обозначим через $\mathcal{F}_m$ множество непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций f, представимых в виде ряда $f(t) = \sum_{k\ge 0} f_k R_k(t)$ с неотрицательными коэффициентами $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $f_0 > 0$, неположительных на отрезке $[-1, \frac{1}{2}]$. На этом множестве функций рассматривается величина

$$w_m = \inf\left\{\frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathcal{F}_m\right\}. \qquad (*)$$

В работах Г.А.Кабатянского, В.И.Левенштейна, Э.Одлыжко, Н.Слоэна доказано, что любая функция $f \in \mathcal{F}_m$ дает оценку $\tau_m \le \frac{f(1)}{f_0}$, и, значит, справедливо неравенство $\tau_m \le w_m$; на этом пути за счет выбора конкретных функций $f \in \mathcal{F}_m$ они получили хорошие оценки сверху контактных чисел τ_m, и, в частности, вычислили τ_m при $m = 8, 24$.

Нами сделано следующее. Выписана двойственная задача и приведена соответствующая теорема двойственности для несколько более общей задачи, чем (*). Дано точное решение задачи (*) при $m = 4$. При этом оказалось, что $w_4 = 25.558429097\ldots$, и решением является многочлен, близкий к выписанному ранее Э.Одлыжко и Н.Слоэном. Наш результат, в частности, означает, что неравенство $\tau_4 \le w_4$ не может дать для числа τ_4 оценку сверху, лучшую, чем оценка $\tau_4 \le 25$, полученная Э.Одлыжко и Н.Слоэном.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант N 96-01-00122.

С.В.Асташкин (Самара)

О ВЕЩЕСТВЕННОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Для $x \in X_0 + X_1$ (X_0, X_1 – симметричные пространства (СП) на $[0,1]$) и $t > 0$ определим:

$$K(t, x; X_0, X_1) = \inf\{||x_0||_{X_0} + t||x_1||_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

Пространства с нормой

$$||x||_{\theta,p} = \left\{\int_0^\infty (K(t, x; X_0, X_1)t^{-\theta})^p \frac{dt}{t}\right\}^{1/p}$$

(с модификацией при $p = \infty$) называются пространствами вещественного метода интерполяции.

Фундаментальная функция СП X определяется равенством: $\varphi_X(t) = ||\chi_{(0,t)}||_X$ $(0 \le t \le 1)$, ($\chi_{(0,t)}$ – характеристическая функция интервала $(0,t)$).

В докладе рассматривается вопрос, когда с точностью до эквивалентности пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \ (0 < \theta < 1, 1 \le p \le \infty) \qquad (+)$$

определяются лишь фундаментальными функциями пространств X_0 и X_1.

Приведем некоторые из полученных результатов. Далее Φ – класс возрастающих вогнутых на $[0,1]$ функций $\varphi(t) \ge 0$, таких, что $\varphi(+0) = 0$; $\tilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$, φ^{-1} – обратная функция, γ_φ и δ_φ – нижний и верхний показатели растяжения функции φ.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$, φ_1/φ_0 *возрастает и выполнено хотя бы одно из двух условий:* $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$ *или* $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} > 1$. *Тогда для произвольных* $0 < \theta < 1, 1 \le p \le \infty$ *пространства (+) не зависят от СП* X_0 *и* X_1, *если только их фундаментальные функции* $\varphi_{X_i} = \varphi_i \, (i = 0,1)$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$, φ_1/φ_0 *возрастает и* $\delta_{\varphi_0} < 1$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$;

2) существует $p \in [1,\infty]$, *такое, что для всех* $0 < \theta < 1$ *пространства (+) не зависят от СП* X_0 *и* X_1, *если только их фундаментальные функции* $\varphi_{X_i} = \varphi_i \, (i = 0,1)$.

В отличие от имеющихся утверждений об устойчивости вещественного метода приведенные теоремы, вообще говоря, не являются следствием реитерационных соотношений. Основной элемент их длказательства – критерий слабой интерполяционности пространств Лоренца.

Аналогичные результаты получены для более общих функторов.

Е. Г. Ахмедзянова (Владивосток)

ЗАДАЧА ФЕКЕТЕ ДЛЯ ТРАНСФИНИТНОГО ДИАМЕТРА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

Трансфинитным диаметром ограниченного замкнутого множества E называется предел

$$d(E) = \lim_{n\to\infty} \max\{ \prod_{1\le k<l\le n} |z_k - z_l|^{2/n(n-1)} : z_1, ..., z_n \in E\}.$$

Известно, что трансфинитный диаметр совпадает с логарифмической емкостью множества E и постоянной Чебышева. Следующая задача восходит к Фекете [1, с.117]: найти нижнюю оценку трансфинитного диаметра множества E через линейную меру пересечения E с системой из n лучей, выходящих из некоторой точки z_0 под равными углами. В случае, когда пересечение E с данными лучами представляет из себя n отрезков, выходящих из одной точки, задача была решена ранее Сегё и ее решение связано с понятием усредняющей симметризации [1]. Позднее в работах Клейна, Зедека и Маркуса приводится решение задачи Фекете, но с заменой линейной меры на логарифмическую (см., например, [2]). Полное решение задачи Фекете содержится в следующей теореме.

Теорема . *Пусть E – ограниченное замкнутое множество комплексной плоскости z. Тогда для любых Θ, n и z_0 справедливо неравенство*

$$d(E) \ge \sqrt[n]{\frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n} L(\Theta + 2\pi k/n, E, z_0)},$$

где $L(\Theta, E, z_0)$ означает линейную меру пересечения E с лучом $arg(z - z_0) = \Theta$.

Знак равенства достигается для множества E, состоящего из n равных отрезков, выходящих из точки z_0 под углами $\Theta + 2\pi k/n$, $k = 1, ..., n$.

Для доказательства этой теоремы применяются известные свойства трансфинитного диаметра, а также теорема о поведении трансфинитного диаметра при разделяющем преобразовании [2, с.30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Szego G. *On a certain kind of symmetrization and its applications*// Ann. math. pura appl. - 1955. - Ser.4. - T.40 - p. 113-119

2. Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*// Успехи математических наук. - 1994. - No 1. - С. 3–76.

В. М. Бадков (Екатеринбург)

ПОРЯДОК КРУГОВОГО ПАРАМЕТРА В СЛУЧАЕ ОБОБЩЕННОГО ВЕСА ЯКОБИ

Пусть $\varphi_{\sigma,n}(z)_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на единичной окружности по мере $d\sigma(\tau)$. Круговыми параметрами этой системы называются числа

$$a_n = -\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}/\kappa_{\sigma,n+1}$$

где $\kappa_{\sigma,n} > 0$ — старший коэффициент многочлена $\varphi_{\sigma,n}$. Некоторые результаты теории многочленов, ортогональных на окружности, формулируются в терминах круговых параметров. При исследовании асимптотических свойств ортогональных многочленов часто возникает потребность в оценках для a_n. Основным результатом доклада является

Теорема. *Пусть* $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau)$, *где*

$$\varphi(\tau) = h(\tau) \mid \sin[(\tau - \theta_1)/2] \mid^{\gamma_1} \ldots \mid \sin[(\tau - \theta_m)/2] \mid^{\gamma_m};$$

$$m \in \mathbf{N};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_m > -1;\ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leq \pi;$$

h *— ограниченная снизу положительной константой функция ограниченной вариации. Тогда найдется положительная константа* $C(\varphi)$ *такая, что*

$$\mid a_n \mid \leq C(\varphi) n^{-1}\ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Как известно [1,2], в случае веса

$$\varphi(\tau) = (1 - \cos\tau)^{\alpha+1/2}\ \ (\alpha > -1,\ \ \alpha \neq -1/2)$$

эта оценка является двусторонней. Установленная теорема используется при исследовании асимптотического поведения коэффициентов трехчленного рекуррентного соотношения для ортогональных на отрезке обобщенных многочленов Якоби.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No 96-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голинский Б. Л. *О проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов*// Матем.заметки. - 1974. - Т.15.- No 1.- С. 21-32.

2. Бадков В. М. *Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов*//Тр.МИАН. - 1983. - Т.164. - С. 3–36.

В. С. Балаганский (Екатеринбург)

О ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ АНТИПРОКСИМАЛЬНЫХ МОЖЕСТВАХ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИЕЙ РАССТОЯНИЯ

Подмножество $A \neq X$ линейного нормированного пространства X называется антипроксиминальным, если для любой точки $x \in X \backslash A$ в множестве A нет ближайшей точки. Об антипроксиминальных множествах см. [1].

Пусть Q – бикомпакт, принадлежащий линейному пространству, и пусть Q – центрально-симметричное и звездное относительно 0 множество,
$d(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ – функция расстояния.

Рассмотрим два банаховых пространства:

$$Z = \{f \in C(Q) : \forall t \in Q \ \ f(t) = f(-t)\},$$

$$Y = \{f \in C(Q) : \forall t \in Q \ \ f(t) = -f(-t)\}.$$

Теорема 1. *В бесконечномерных банаховых пространствах Z и Y существуют непустые выпуклые замкнутые ограниченные антипроксиминальные тела.*

Теорема 2. *Если в сепарабельном банаховом пространстве X существует непустое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество, то в X существует непустое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество с функцией расстояния, дифференцируемой по Гато.*

Теорема 3. *В пространстве c_0 существует непустое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество с функцией расстояния, дифференцируемой по Фреше.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант *No* 96-01-00121.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балаганский В. С. *Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций*// Матем. заметки. - 1996. - Т.60. - No 5. - С. 643-657.

К. А. Бекмаганбетов (Караганда)

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА $L_p[0, 2\pi)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Неравенство разных метрик в пространствах Лебега и Лоренца были изучены в работах С. М. Никольского и Л. А. Шерстневой [1]. Нами исследуется неравенство разных метрик в многопараметрических пространствах Лебега $L_{\mathbf{p}}[0, 2\pi)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, введеных Е. Д. Нурсултановым [2]. Эти пространства являются обобщениями пространств ЛебегаL_p и пространств Лоренца L_{pq}.

Теорема. *Пусть T_n – тригонометрический полином порядка не выше, чем $n-1$. Если $0 < \mathbf{p}_i = (p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k^i, p_{k+1}^i, \ldots, p_n^i) \le \infty$
$(i = 1, 2)$, $k \ge 2$ и $p_k^2 < p_k^1$, то*

$$\|T_n\|_{L_{\mathbf{p}_2}[0, 2\pi)} \le c\{\underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{k-1}(n + 2^{k-1})\}^{1/p_k^2 - 1/p_k^1} \|T_n\|_{L_{\mathbf{p}_1}[0, 2\pi)},$$

где c – постоянная, не зависящая от T_n.

И в частности, при $0 < p < \infty$, $0 < q_2 < q_1 < \infty$ справедливо неравенство

$$\|T_n\|_{L_{pq_2}[0, 2\pi)} \le c\{\log_2(n+2)\}^{1/q_2 - 1/q_1} \|T_n\|_{L_{pq_1\infty}[0, 2\pi)}. \tag{1}$$

Данная теорема является не только обобщением, но и усилением теоремы 3 из [1]. Это следует из (1) и вложения $L_{pq} \hookrightarrow L_{pq\infty}$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Шерстнева Л. А. *Неравенство Никольского для тригонометриеских полиномов в пространствах Лоренца* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1981, No 4, 75 -79.

2.Нурсултанов Е. Д. *Метод многопараметрической интерполяции и многопараметрические пространства Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$* // Функциональный анализ и его приложения, 1997, т. XXXI, No 2, 79-82.

А. С. Белов (Иваново)

О НЕКОТОРЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При любых натуральном n и действительном φ через $C_\varphi(n)$ $(K_Z(\varphi;n))$ обозначим величину $\inf\{-\min_x \sum_{s=1}^n \cos(k_s x+\varphi)\}$, где нижняя грань берется по всем различным (не обязательно различным) натуральным $k_1,\dots,k_n$.

Пусть $K(\varphi;n)=\inf\{-\min_x \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \cos(kx+\varphi)\}$, где нижняя грань берется по всем $\alpha_k \in \{0\}\cup[1,\infty)$ таким, что $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = n$. Ясно, что всегда $1 \le K(\varphi;n) \le K_Z(\varphi;n) \le C_\varphi(n)$.

Отметим, что при любом заданном n величины $K(\varphi;n)/\cos\varphi$, $K_Z(\varphi;n)/\cos\varphi$ и $C_\varphi(n)/\cos\varphi$ не убывают на промежутке $\varphi \in [0,\pi/2)$, а величины $K(\varphi;n)$, $K_Z(\varphi;n)$ и $C_\varphi(n)$, как функции от φ, удовлетворяют условию Липшица с коэффициентом n.

Теорема 1. *При всех $n \ge 1$ справедливы оценки снизу:*

$$K(\varphi;n) \ge (-\cos\varphi)n \text{ при } |\varphi| \in (\pi/2,\pi];$$

$$K(\varphi;n) \ge (-\cos(2\varphi)/2)^{1/2}\sqrt{n} \text{ при } |\varphi| \in (\pi/4, 3\pi/4);$$

$$K(\varphi;n) \ge 2^{-7} n^{2|\varphi|/\pi}(1+\ln n)^{2|\varphi|/\pi - 1/m} \text{ при } |\varphi| \in \left(\frac{\pi}{4(m+1)}, \frac{\pi}{4m}\right] \text{ и } m=1,2,\dots.$$

Теорема 2. *При всех натуральных n верны оценки сверху:*

$$C_\varphi(n) \le An^{2/3} \text{ при } |\varphi| \le \pi/2;$$

$$C_\varphi(n) \le A(1-2|\varphi|/\pi)^{-1/2}\sqrt{n}(1+\ln n)^{1/2} \text{ при } |\varphi| < \pi/2;$$

$$K_Z(\pi/4;n) \le A\sqrt{n}(1+\ln n)^{1/4};$$

$$K_Z(\varphi;n) \le An^{2|\varphi|/\pi}(1+\ln n)^{\pi/(2|\varphi|)-1} \text{ при } |\varphi| \in (0,\pi/2],$$

где A – положительная абсолютная постоянная.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: проект 96–01–00094

В. И. Бердышев (Екатеринбург)

ПРОИЗВОДНАЯ УКЛОНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ

В докладе рассматривается экстремальная задача, связанная с проблемой навигации (привязки) аппарата, автономно двигающегося над заданным регионом Q, по геофизическому полю, т.е. проблема определения местоположения $t \in Q$ аппарата с использованием данных $f = \{f(x) : x \in Q\}$ о поле f в целом, хранящихся на бортовом компьютере, и фрагмента $\varphi_t(x) = f(x+t) \quad (x \in \Delta)$ этого поля, замеренного аппаратом над точкой t, здесь Δ - область визирования. С целью компактного хранения данных о поле f приходится функцию $f(x)$ аппроксимировать на Q посредством легковычислимой функцией $p(x)$ из некоторого заданного класса $\mathcal{P} = \{p\}$. Задача привязки при выбранном элементе $p(x)$ сводится к поиску нижней грани

$$\inf_T \|p(x+T) - \varphi_t(x)\|_\Delta$$

а задача выбора $p \in \mathcal{P}$, наилучшего с точки зрения привязки – это задача минимизации по $p \in \mathcal{P}$ функционала

$$\mathcal{D}(p) = \sup_{t:\Delta+t\in Q} \ \sup_{T\in arg(1)} |t - T|,$$

где $|\ |$ - евклидова норма. Для практического решения задачи

$$\inf\{\mathcal{D}(p) : p \in \mathcal{P}\}$$

важно исследовать функционал $\mathcal{D}(p)$ на дифференцируемость. Если она имеет место, то полезно иметь выражение для производных. В докладе рассмотрены случаи чебышевской и среднеквадратической норм $\|\cdot\|$, даны условия дифференцируемости (или односторонней дифференцируемости), даны формулы для производных. Это облегчает разработку методов приближенного нахождения элемента, наилучшего с точки зрения навигации.

Работа поддержана грантом РФФИ 96-01-00121.

Е. Е. Бердышева (Екатеринбург)

ЗАДАЧА ЛОГАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $E^+_{m,\tau}$ при $\tau > 0$ есть класс вещественных суммируемых функций на $\mathbf{R}^m$, преобразование Фурье которых неотрицательно в начале координат. Пусть, далее, V – центрально-симметричное выпуклое замкнутое тело в $\mathbf{R}^m$, порождающее норму $\|\cdot\|_V$. Рассматривается задача о нахождении величины

$$\mathcal{T}(m,\tau;V) = \inf\{T(f;V) : f \in E^+_{m,\tau}, f \not\equiv 0\}, \qquad (1)$$

где $T(f;V) = \sup\{\|t\|_V : f(t) > 0\}$.

В случае $m = 1$ задачу (1) решил B. F. Logan [1]; именно, $\mathcal{T}(1,\tau;[-1,1]) = \frac{\pi}{\tau}$, и нижняя грань достигается на функции $f_\tau(x) = \frac{1}{2\pi\tau}\int\limits_0^\tau \sin\frac{\pi}{\tau}t\,\cos xt\,dt$. Подобные задачи изучали Н. И. Черных, В. А. Юдин, А. Г. Бабенко.

Введем две характеристики множества V:

$$\zeta(V) = \min\{\|x\|_V : x = (2k_1+1,\ldots,2k_m+1), (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbf{Z}^m\},$$

$$\eta(V) = \max\{\|x\|_V : \|x\|_{\ell_2(\mathbf{R}^m)} = \sqrt{m}\}.$$

Теорема. *При любом $\tau > 0$ имеют место неравенства*

$$\frac{\pi\zeta(V)}{\tau} \le \mathcal{T}(m,\tau;V) \le \frac{\pi\eta(V)}{\tau}.$$

Оценка снизу получена методами, близкими к методам B. F. Logan'a [1]. Оценка сверху получена с помощью функции, построенной В. А. Юдиным в работе [2].

Теорема дает точное решение задачи (1) в случае, когда $\zeta(V) = \eta(V)$; при этом $\zeta(V) = \eta(V) = \|(1,1,\ldots,1)\|_V$. Такое равенство будет иметь место, например, если в качестве V взять единичный шар $B_p(\mathbf{R}^m)$ пространства $\ell_p(\mathbf{R}^m)$, $1 \le p \le 2$. Поэтому выполняется

Следствие. *Пусть $1 \le p \le 2$. Тогда $\mathcal{T}(m,\tau;B_p(\mathbf{R}^m)) = \frac{\pi m^{1/p}}{\tau}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS 94-4070.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logan B. F. *Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions.*// SIAM J.MATH.ANAL.–1983.–Vol.14.–N.2.–p. 253-257.

2. Юдин В. А. *Многомерная теорема Джексона в L_2.*// Математические заметки. – 1981. – 29. – No 2. – С. 309 - 315.

К.О. Бесов

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ КОМПОНЕНТ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Известно, что для полигармонической функции F (т.е., такой, что $\Delta^n F = 0$) в единичном шаре D^m справедливо представление

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}, \qquad F_k = (1-r^2)^k \Phi_k, \qquad k = \overline{0, n-1}, \tag{1}$$

где $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2$, а Φ_k – гармонические функции. Оно является обобщением следующего представления для полианалитических функций (т.е., таких, что $\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^n f = 0$, $z = x + iy$) в D^2:

$$f = P + f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}, \qquad f_k = (1-|z|^2)^k \phi_k, \qquad k = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

$$P = \bar z P_1 + \ldots + \bar z^{n-1} P_{n-1},$$

где ϕ_k – аналитические функции, P_k – полином от z степени $\leq k-1$. Пусть p – вещественное число, $< \cdot >$ – наименьшее целое число, строго меньшее p. Скажем, что функция f принадлежит классу $M^p(D^m)$, если — при $p \leq 0$ – $f = O((1-r^2)^p)$, $r \to 0$ — или при $p > 0$ – f имеет в D^m все частные производные порядка $< p >$, которые принадлежат классу $\mathrm{Lip}^\alpha(D^m)$, $\alpha = p - < p >$, $0 < \alpha \leq 1$. В работе обобщается на случай полигармонических функций следующая

Теорема (Е.П. Долженко, [1]). *Пусть полианалитическая функция f в D^2 представлена в виде* (2). *Тогда при всех p справедливы эквиваленции*

$$f \in M^p(D^2) \Leftrightarrow f_k \in M^p(D^2), \quad k = \overline{0, n-1} \quad \Leftrightarrow \phi_k \in M^{p-k}(D^2), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Долженко Е.П. *О граничном поведении компонент полианалитической функции* // Доклады АН. 1994. Т. 338. No 5. С. 585-588.

М. С. Беспалов(Владимир)

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМАМ КРЕСТЕНСОНА

Для рядов по системе Уолша в нумерации Пэли справедлива теорема о сходимости всюду, кроме может быть нуля, и равномерной сходимости на любом отрезке, принадлежащем $(0,1)$, рядов с монотонными коэффициэнтами. А для рядов по системе Уолша в нумерации Качмажа известно, что если $c_n \neq o(1/\log n)$, то ряд с монотонными коэффициентами c_n расходится п.в. Обобщением системы Уолша служит система Крестенсона. Для простоты формулировок остановимся на случае $p = 3$. Рассмотрим группу бесконечных последовательностей из трех цифр 0,1,2, которые можно интерпретировать как представление чисел из $[0,1]$ в виде троичной дроби. При этом троично-рациональные числа представимы двумя способами: начиная с некоторого разряда все цифры равны 2 для первого и равны 0 для второго способа. Определим функции $r_n(x)$ аналогичные функциям Радемахера:$r_0(x) = 1$ при $x \in [0;1/3)$, $r_0(x) = e^{2\pi i/3}$ при $x \in [1/3;2/3)$,$r_0(x) = e^{-2\pi i/3}$ при $x \in [2/3;1)$. Продолжим $r_0(x)$ периодически с периодом 1. Тогда $r_n(x) = r_0(3^n x)$. Для любого натурального n имеем $n = \sum_{k=1}^{m} n_k 3^{k-1}$, где n_k равно 0,1 или 2. Определим систему функций Крестенсона:$\chi_0(x) \equiv 1$, $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{m} r_{k-1}(x)^{n_k}$. А по аналогии с системой Уолша определим систему Крестенсона в нумерации Качмажа$(n_m \neq 0)$:$\phi_0(x) \equiv 1$, $\phi_n(x) = r_{m-1}^{n_m}(x)*\prod_{k=1}^{m} r_{m-k-1}(x)^{n_k}$. Тогда $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x)$ - ядра Дирихле этих систем.

Теорема 1. *Константы Лебега систем Крестенсона и Крестенсона в нумерации Качмажа совпадают, то есть* $\int_0^1 |D_n(x)|dx = \int_0^1 |K_n(x)|dx$.

Сходимость п.в. и равномерная сходимость на любом отрезке $[a,1]$, где $a > 0$, рядов по системе Крестенсона с монотонными коэффициентами следует из существования мажоранты для $|D_n(x)|$. Рассмотрим $b(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} |K_n(x)|$. Обозначим $B = \{x : b(x) = \infty\}$. На дополнении к множеству B ряд по системе Крестенсона-Качмажа с монотонно убывающими к нулю коэффициентами сходится. Изучив далее структуру множества B заметим, что, в отличии от ряда по стистеме Уолша-Качмажа, для него невозможна расходимость п.в.

Лемма. *Если в троичной записи числа x, начиная с некоторого разряда не встречается более чем k подряд идущих нулей, то $b(x) \leq 3^k$. Если в троичной записи числа x после любого разряда встретится k подряд идущих нулей, то $b(x) \geq 3^k$.*

Теорема 2. *Множество B состоит из тех чисел, в троичной записи которых длина наборов подряд идущих нулей не ограничена.*

Ю. А. Блинков, В. Л. Мыльцин (Саратов)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАЗИСОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОДНОСТОРОННИХ ФУНКЦИЙ

Понятие асимметричных криптосистем (открытого ключа), введеное в [1], основанно на построении, так называемых, односторонних функций с "ловушкой".

Пусть задан порядок переменных $x_1 \succ \cdots \succ x_n$ и любое допустимое, относительно умножения, упорядочение мономов m_{ij}. Рассмотрим множество полиномов (1) с коэффициентами $c_{ij} \in Z_p$ принадлежащими множеству целых чисел по модулю простого числа p.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11} + m_{12} \cdot c_{12} + m_{13} \cdot c_{13} + \ldots, \\ \quad \ldots, \\ m_{r1} + m_{r2} \cdot c_{r2} + m_{r3} \cdot c_{r3} + \ldots. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Пусть для любых двух лидирующих мономов из (1) для $i \neq j$, $\mathbf{lcm}(m_{i1}, m_{j1}) = m_{i1} \cdot m_{j1}$ их наименьшее общее кратное равно их произведению. Тогда, согласно критерию Бухбергера [2], все S-полиномы обратятся в нуль и это множество будет являться базисом Грёбнера. Если добавить условие, что ни один лидирующий моном не делит моном, принадлежащий другому полиному, то получим авторедуцированный базис Грёбнера, который имеет единственное представление для данного идеала.

Построенный базис будет сохранять свои свойства при любых коэффициентах мономов, что позволяет их использовать для хранения информации.

Для построения односторонней функции с "ловушкой" сделаем следующую замену переменных (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = z_1^{l_{11}} \cdot z_2^{l_{12}} \cdot \ldots \cdot z_m^{l_{1m}}, \\ \quad \ldots, \\ x_n = z_1^{l_{n1}} \cdot z_2^{l_{n2}} \cdot \ldots \cdot z_m^{l_{nm}}. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = z_{n+1}, \\ \quad \ldots, \\ a_{m-n} = z_m. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Здесь предполагается, что ранг квадратной матрицы, составленной из целых чисел $l_{ij} > 0$, $1 \leq j \leq n$, равен n, а также $a_i \in Z_p$ и следовательно обратная замена существует. После нетривиальной замены (2) порядок мономов относительно допустимого упорядочения изменится, что приведет к нарушению критерия Бухбергера и множество не будет являться базисом Грёбнера. Построение для этого множества авторедуцированного базиса Грёбнера определяет одностороннюю функцию, отображающую коэффициенты c_{ij} в множество полиномов. Для построения обратной функции необходимо сделать обратную замену переменных и построить в ней авторедуцированный базис Грёбнера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 96-15-96030.

ЛИТЕРАТУРА

1. Diffie W., Hellman M. E. *New directions in cryptography.* IEEE transactions on Information Theory IT-22. 1976. 644-654 p.

2. Buchberger B. *Gröbner Bases: an Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory.* In: Recent Trends in Multidimensional System Theory, Bose, N.K. (ed.), Reidel, Dordrecht. 1985. 184-232 p.

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, Т. Ю. Рослова [1] (Москва)

ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В КЛАССАХ ОРЛИЧА

Пусть $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$–неубывающая функция, через $\Phi(L) = \Phi(L)(I^2)$ обозначим множество суммируемых функций f таких, что $\int_{I^2} \Phi(|f(x)|)\, dx < \infty$, где $I^2 = [0,1)^2$, и пусть $S_n(x; f; \Psi)$ — прямоугольные ($S_{n_0}(x; f; \Psi)$ — квадратные) частичные суммы двойного ряда Фурье по тригонометрической системе ($\Psi = \mathcal{E}$) и по системе Уолша-Пэли ($\Psi = W$).

Теорема 1. *Пусть Ω — произвольное (непустое) открытое множество $\Omega \subset I^2$, и пусть $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(I^2)$, $f(x) = 0$ на Ω. Тогда для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ имеем:*

1. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f; \Psi) = 0$ *для почти всех* $x \in \Omega$;

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu\Omega_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$, такое, что*

$$а)\ \|\sup_n |S_n(x; f; \Psi)|\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \le C_\varepsilon \int_{I^2} |f(x)|(\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon,$$

$$б)\ \|\sup_n |S_n(x; f; \Psi)|\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \le C_\varepsilon(p) \|f\|_{L_p(I^2)}, \quad 1 < p < \infty.$$

Отметим, что оценка 2б) для $\Psi = \mathcal{E}$ следует из [1], а для $\Psi = W$ из [2].

Теорема 2. *Пусть Ω–произвольное измеримое множество, $\Omega \subset I^2$, $\mu\Omega > 0$, не являющееся плотным в I^2. Для каждой из систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ существуют неубывающие функции $\Phi_\Psi(u)$, $u \in [0, \infty)$, подмножество $\Omega_0 = \Omega_0(\Psi) \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 > 0$ и функция $f = f_\Psi \in \Phi_\Psi(L)(I^2)$, $f(x) = 0$ на Ω, такие, что $\Phi_{\mathcal{E}}(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, а $\Phi_W(u) = u(\log^+ \log^+ u)^{1-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, но $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |S_n(x; f; \Psi)| = +\infty$ для п.в. $x \in \Omega_0$.*

Заметим (см.[3]), что $\lim_{n_0 \to \infty} S_{n_0}(x; f; \mathcal{E}) = f(x)$ п.в. на I^2 для функций $f \in L(\log^+ L)^2 \log^+ \log^+ L(I^2)$, и (см.[4]) существует $f \in \Phi(L)(I^2)$, где $\Phi(u) = o(u \log^+ u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, такая, что $\overline{\lim}_{n_0 \to \infty} |S_{n_0}(x; f; \mathcal{E})| = +\infty$ п.в. на I^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И. Л.//Матем.заметки.–1975.–Т.18.–No2.–С.153–168.

2. Блошанская С. К., Блошанский И. Л.//Матем.сборник.–1995.–Т. 186.–No 2.–С. 21–36.

3. Sjölin.P. // Arkiv Matem.–1971.–V.9.–No1.–P.65–90.

4. Konyagin S.V.//Acta Sci.Math.(Szeged).–1995.–V.61.–P.305–329.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00332). Работа второго и третьего авторов выполнена также при поддержке РФФИ, проект поддержки научных школ (грант 96-15-96073).

А. В. Боровских (Воронеж)

О ВЫДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В РЯДУ ФУРЬЕ

Предлагается решение одной задачи, принадлежащей Н.Н.Лузину – о выделении максимальных коэффициентов в ряду Фурье. Пусть функция $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$, c_k – ее комплексные коэффициенты Фурье, т.е. $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, где ряд ~~можно, для определенности, считать~~ сходящимся в L_2. Обозначим $\rho = \max\limits_k |c_k|$. Через $f^{\{n\}}(x)$ будем обозначать n-кратную свертку функции $f(x)$ с собой: $f^{\{1\}}(x) \equiv f(x)$, $f^{\{n+1\}}(x) = (f * f^{\{n\}})(x)$.

Теорема. *Абсолютная величина ρ максимального (максимальных) коэффициентов и число N коэффициентов c_k, для которых $|c_k| = \rho$ может быть вычислены по формулам*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \|f^{\{n\}}\|_{L_2}^{\frac{1}{n}}, \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f^{\{n+1\}}\|_{L_2}}{\|f^{\{n\}}\|_{L_2}}, \quad N = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f^{\{n\}}\|^2}{\rho^{2n}}.$$

Если $N = 1$ (максимальный коэффициент единственен) то соответствующий номер k_0, коэффициент c_{k_0} и соответствующее слагаемое в ряду Фурье могут быть вычислены по следующим формулам

$$c_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n+1\}}(x)}{f^{\{n\}}(x)} \quad c_{k_0} = \lim_{n\to\infty} f^{\{n\}}(x)^{\frac{1}{n}} \quad c_{k_0} e^{ik_0 x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^{n-1}},$$

$$k_0 = \frac{1}{ix} \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{c_{k_0}^n}\right), \quad k_0 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{(f^{\{n\}}(x))'}{f^{\{n\}}(x)}, \quad k_0 = \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\{n\}}(x)}{Jf^{\{n\}}(x)}.$$

В последней тройке формул вторая может применяться только если свертки функции $f(x)$ дифференцируемы, начиная с некоторого номера (это имеет место, например, если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию), а третья – если среднее значение функции $f(x)$ (т.е. коэффициент c_0) равно нулю. Через J обозначен оператор интегрирования $Jf(x) = \int_0^x f(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sf(s)\,ds$, который, как нетрудно проверить, определен и действует в подпространстве функций с нулевым средним значением. Пределы во всех формулах существуют в смысле равномерной сходимости и не зависят от x.

Получены также формулы для случая нескольких максимальных коэффициентов, и для функции двух переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, М.: Гостехиздат, 1951.

П. А. Бородин (Москва)

О ЧЕБЫШЕВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ В ПРОСТРАНСТВЕ H^1 ХАРДИ

Подпространство Y банахова пространства X называется *чебышевским*, если для любого элемента $x \in X$ в Y существует и единствен элемент наилучшего приближения $P_Y(x)$ ($\|x - P_Y(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$). Возникающий при этом однозначный оператор $P_Y : X \mapsto Y$ называется оператором метрического проектирования X на Y.

В докладе приводятся результаты исследования чебышевских подпространств в пространстве $H^1 = H^1(U)$, состоящем из аналитических в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций f, для которых $\|f\| := \sup_{0<r<1}\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\phi})|\,d\phi\} < \infty$.

Теорема 1. *Пусть Y - конечномерное подпространство в H^1, в котором каждая функция аналитична в некоторой окрестности замкнутого круга $\overline{U}$. Подпространство Y является нечебышевским тогда и только тогда, когда существует такое разбиение единичной окружности на четное число последовательных дуг $C_1, ..., C_{2n}$, что во всех точках разбиения некоторая функция $f \not\equiv 0$ из Y обращается в нуль, и при этом равенство*

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \int_{C_k} \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|} y(z)\,|dz| = 0$$

выполняется для любой функции $y \in Y$.

Следствие (С.Я.Хавинсон [1]). *Для любого $d \in \mathbf{Z}_+$ комплексные многочлены $P(z)$ степени не выше d образуют чебышевское подпространство в H^1.*

Теорема 2. *Пусть $A \subseteq \mathbf{Z}_+$, а Y_A - подпространство тех функций из H^1, у которых все тейлоровские коэффициенты с номерами $n \notin A$ равны 0. Подпространство Y_A является чебышевским тогда и только тогда, когда A - конечная или бесконечная арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

Теорема 3. *В H^1 нет нетривиальных собственных чебышевских подпространств с линейным оператором метрического проектирования, кроме чебышевских подпространств коразмерности 1.*

Работа поддержана РФФИ (проект No 96-01-01366).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хавинсон С. Я. *О единственности функции наилучшего приближения в метрике пространства L_1* // Изв. АН СССР. Сер.матем. - 1958. - Т.22, No 2. - С. 243-270.

А. В. Братищев

О БАЗИСАХ И ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ В ОСЛАБЛЕННОЙ ТОПОЛОГИИ

Пусть E отделимое локально выпуклое пространство с топологией ν, задаваемой семейством преднорм P, а μ - более слабая отделимая топология, определяемая семейством преднорм $Q \subseteq P$. Обозначим W замыкание линейной оболочки последовательности элементов $\{e_n\} \subset E$. $\{e_n\}$ называется псевдобазисом (В.П. Захарюта) в W (в топологии μ), если

$$\forall_{x\in W}\ \exists_{\{a_n\}\subset C}\ x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{1}$$

в топологии μ. Наиболее известными подклассами псевдобазисов являются представляющие последовательности (Ю.Ф. Коробейник) и базисы.

Если у псевдобазиса дополнительно существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность непрерывных функционалов $\{t_n\}$ и $\forall_{q\in Q}\ \exists_{p\in P}\ \forall_{x\in W}\ \sup\limits_{N\geq 1} q\left[\sum\limits_{n=1}^{N} \langle x, t_n\rangle\, e_n\right] \leq p(x)$, то $\{e_n\}$ называется Q-шаудеровским базисом. В случае $Q = P$ такие базисы встречались ранее под именем е-базисов.

Если у псевдобазиса дополнительно существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность непрерывных функционалов $\{t_n\}$, соотношение (1) имеет место на всем E и

$$\forall_{q\in Q}\ \exists_{p\in P}\ \forall_{x\in E}\ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, t_n\rangle|\, q(e_n) \leq p(x),$$

то $\{e_n\}$ называется Q-Кете представляющей последовательностью на E.

Будут изложены общие свойства Q-шаудеровских базисов и Q-Кете представляющих последовательностей, и приведены примеры.

В. М. Брук, А. А. Коломоец (Саратов)

О СТАТИСТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНОГО АНАЛОГА МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ КАРМАНА

Модифицированная система уравнений Кармана с "вязким членом" [1] может быть записана в виде дифференциально-операторного уравнения в пространстве $L_2(H;0,T)$ $(T<\infty)$ с левой частью $Mu=u''-\alpha Au''+A^2u+A^2B(u,B(u,u))$, где $\alpha>0$; A – самосопряженный положительно определенный оператор в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H, имеющий вполне непрерывный обратный; $B: H_{+1}\times H_{+1}\to H_{+1}$ – билинейный непрерывный оператор, причем форма $(B(u,\vartheta),\omega)_{H_{+1}}$ не зависит от порядка аргументов $u,\vartheta,\omega\in H_{+1}(H_s(-\infty<s<\infty)$ – гильбертова шкала, порожденная $A)$.

Пусть F,μ – независимые вероятностные меры на $\mathcal{B}(L_2(H;0,T))$ и $\mathcal{B}(H_{+1}\times H)$ соответственно, ($\mathcal{B}(\Omega)$ – борелевская σ_2-алгебра на Ω), причем

$$\int\limits_{L_2(H;0,T)}\|f\|^2_{L_2(H;0,T)}dF(f)<\infty,\qquad \int\limits_{H_{+1}\times H}\|h\|^2_{H_{+1}\times H}\,d\mu(h)<\infty.$$

Через Z,L обозначаются пространства

$$Z=L_2(H_j;0,T)\cap C^1(H_{-1};0,T)\quad (j<1),$$

$$L=\{u: u\in L_2(H_{+1};0,T),\ u''\in L_2(H_{-1};0,T)\}$$

с нормами

$$\|u\|_z=\|u\|_{L_2(H_j;0,T)}+\|u\|_{C^1(H_{-1};0,T)},$$

$$\|u\|_L=\|u\|_{L_2(H_{+1};0,T}+\|u''\|_{L_2(H_{-1};0,T)}.$$

Теорема. *Существует единственная операторная мера P на $\mathcal{B}(Z)$ со свойствами:*

$$1) P(L)=1;$$

$$2) P(M^{-1}\omega_1)=F(\omega_1), P(\gamma_0^{-1}\omega_2=\mu(\omega_2)$$

для всех $\omega_1\in\mathcal{B}(L_2(H;0,T)),\omega_2\in\mathcal{B}(H_{+1}\times H)$, где $\gamma_0u=\{u(0),u'(0)\},u\in Z$;

$$3)\int\limits_Z\left[\|u\|_L+\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|^2_{H_{+1}}+\sup_{0\le t\le T}\|u'(t)\|^2_H\right]dP(u)<C.$$

По аналогии с [2] меру P можно назвать статистическим решением для уравнения с левой частью Mu, соответствующим правой части F и начальной мере μ. Такая задача может быть записана в виде интегрального уравнения, которое из-за недостатка места здесь не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж. Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: "Мир". – 1972.

2. Вишик М. И., Фурсиков А. В. *Математические задачи статистической гидромеханики.* – М.: "Наука". – 1980.

А. П. Буланов (Обнинск)

О СТЕПЕНИ БЕСКОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИМЕЮЩИМИ ПООЧЕРЕДНО ДВА ЗНАЧЕНИЯ

В работе [1] была сформулирована

Теорема. *Степень бесконечной кратности*

$$a_0 z^{a_1 z^{a_2 z^{\cdots}}} \tag{1}$$

является регулярной функцией в некоторой области U, которая содержит в себе область $D \cap e^k$, где

$$D = \{z : |\arg z| < \pi\},\ e^K - \ K = \left\{|w| < \frac{1}{e\overline{a}}\right\} \tag{2}$$

при отображении $z = e^w$, $\overline{a} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|$.

К степеням бесконечной кратности приводят решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений (см. [2] и [3]). В частности одно из уравнений имеет решение в виде (1), где $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = \alpha$, $a_1 = a_3 = \cdots = \beta$, $\alpha \neq \beta$. Сформулированная теорема дает гарантию, что степень бесконечной кратности с такими коэффициентами будет сходиться в указанной области с учетом того, что в формуле (2) $a = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Такая кратная степень просто сводится к случаю, когда $|\alpha| = 1$, $|\beta| > 1$, а вместо круга (2) в плоскости W следует брать в плоскости $W_\alpha = \alpha \cdot W$ круг

$$K_\alpha = \left\{|w_\alpha| < \frac{1}{e\,|\beta|}\right\} \tag{3}.$$

В этом докладе показывается, что область сходимости такой кратной степени можно расширить так, что в формуле (3) вместо $\overline{a} = |\beta|$ можно взять величину

$$\overline{a} = \sqrt{|\beta|}\left(1 + \frac{1}{2}\ln|\beta|\,\frac{\sqrt{|\beta|}-1}{\sqrt{|\beta|}+1}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов А. П. *Замечание о регулярности бесконечно кратных степеней*// Теория функций и приложения. Тезисы докладов школы-конференции (15-22 июня 1995 г., г. Казань), С. 9-10.

2. Буланов А. П. *Кратные степени и локальные приближения*// Труды МИАН СССР - 1987. - Т. 180. - С. 65-67.

3. Буланов А. П. *О сходимости кратной степени, являющейся решением нелинейного дифференциального уравнения*// Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева (16- 22 июня 1997 г., г. Казань) - С. 40-41.

А.В.Булинский (Москва)

О РЕГУЛЯРНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУГРУПП ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЖАТИЙ АЛГЕБР НЕЙМАНА

Пусть G — сепарабельная локально компактная абелева группа, порождаемая подполугруппой S, т.е. $G = S - S$, пусть τ — представление полугруппы S вполне положительными нормальными сжатиями W^*-алгебры M, непрерывное в точечно-слабой топологии $\mathcal{L}(M)$. В литературе по функциональному анализу, математической физике, квантовой теории вероятностей значительное внимание уделялось проблеме расширения τ до представления θ группы G автоморфизмами W^*-алгебры N, удовлетворяющего тем или иным условиям регулярности, включающим существование нормальной инъекции $j : M \to N$ такой, что $\theta_t \circ j = j \circ \tau_t$, $t \in S$, где $\theta_t \in \mathrm{Aut}(N)$, $t \in G$.

Наибольший интерес с точки зрения приложений в теории динамических полугрупп вызывают случаи а) $S = \mathbf{R}_+$, $G = \mathbf{R}$; а также б) $S = \mathbf{Z}_+$, $G = \mathbf{Z}$ и в) S — плотная счётная полугруппа в $\mathbf{R}_+$.

Мы рассматриваем также "промежуточную" проблематику продолжения динамической полугруппы $\{\tau_t\}_{t\geq 0}$ до E_0-полугруппы эндоморфизмов $\theta_t \in \mathrm{End}(N)$ и расширения таких E_0-полугрупп. Изучаются минимальные регулярные продолжения, определяется их тип, классы коциклической сопряжённости, числовые характеристики типа индекса полугруппы. В частности, установлена

Теорема. *Для E_0-полугруппы сдвигов $\{\tau_t\}_{t\geq 0}$ на M существует минимальное расширение, определяющее на N структуру K-системы.*

В качестве применения полученных результатов рассматриваются т.н. квазисвободные динамические полугруппы и их возмущения.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (Грант 96–1.7.-100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булинский А. В. Алгебраические K-системы и полупотоки сдвигов Пауэрса // УМН. – 1996. – Т.51. – No 2 С.145–146.

2. Arveson W. and Kishimoto A. A note on extension of semigroups of *- endomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – Vol. 116, No 3. – P.769–774.

3. Batty G. J. K. and Greenfield D. A. Extensions of isometric dual representations of semigroups // Bull. Lond. Math. Soc. – 1996. – Vol. 28. – P.375–384.

4. Bhat B. V. R. An index theory for quantum dynamical semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – Vol. 348, No 2. – P.561–583.

А. П. Буслаев, О. В. Селезнев(Москва)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Исследуется наилучшая точность приближения линейными методами гельдеровского класса случайных процессов $H_r^{m,\beta}(K)$, $m \geq 0$, $1 \geq \beta > 0$,

$$||X^{(m)}(t) - X^{(m)}(s)||_r \leq K|t-s|^\beta, \quad 1 \leq r < \infty, t, s \in [0,1], K > 0,$$

где $||X(t)||_r = (E|X(t)|^r)^{1/r}$. Как и в классической (нестохастической) теории приближения, границы точности определяются условиями гладкости класса и числом используемых линейных функционалов. Точность приближения случайного процесса $X(t), t \in [0,1]$, задается средними ошибками в смешанных (r,q)-нормах, $1 \leq r < \infty, 1 \leq q \leq \infty$, $||X||_{(1,q,r)} = (\int_0^1 ||X(t)||_r^q \, dt)^{1/q}$ и $||X||_{(2,q,r)} = ||(\int_T |X(t)|^q \, dt)^{1/q}||_r$. Рассматриваются два типа экстремальных характеристик точности приближения: линейные и регрессионные поперечники. Линейный поперечник характеризует точность приближения при использовании неслучайных (детерминированных) методов классической теории аппроксимации (например, полиномами, сплайнами). Регрессионный поперечник соотвествует точности приближения для задач линейной регрессии, например, когда значения гауссовского процесса $X(t)$ восстанавливается в точке t по наблюдениям $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ с наименьшей среднеквадратической ошибкой. Показано, что эти характеристики для класса $H_r^{m,\beta}(K)$ при использовании n линейных функционалов от реализаций случайного процесса имеют порядок $n^{-(m+\beta)}$, $2 \leq q \leq \infty$, $r = 2$. Для гауссовских процессов исследован и более общий случай $1 \leq r < \infty$, в частности для $q = \infty$ получена оценка сверху, имеющая порядок $(\ln n)^{1/2} n^{-(m+\beta)}$, причем для $\beta = 1/2$ нижняя оценка имеет тот же порядок. Полученные результаты могут быть использованы, например, для обоснования методов аппроксимации реализаций случайных процессов в различных теоретических и прикладных задачах.

Вагабов И.А.(Махачкала)

О НЕРАВЕНСТВЕ ЗИГМУНДА В $L_{p(x)}[0,2\pi]$.

Для тригонометрического полинома

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x.$$

А. Зигмунд в $L_p[0,2\pi]$ $(p \geq 1)$ получил следующее неравенство

$$\|T'(*)\|_p \leq n\|T(*)\|_p. \tag{1}$$

Пусть $p(x)$ 2π – периодическая измеримая и существенно ограниченная функция. Через $L_{p(x)}[0,2\pi]$ обозначим пространство измеримых 2π – периодических функций $f(x)$ таких, что $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. Известно [1], что при $p(x) \geq 1 (0 \leq x \leq 2\pi)$ пространство $L_{p(x)}[0,2\pi]$ является нормированным. Одна из эквивалентных норм в $L_{p(x)}[0,2\pi]$ задается следующим образом

$$\|f\| = \inf\left\{\alpha > 0 \left| \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \leq 1 \right.\right\}.$$

Автором получен аналог неравенства Зигмунда (1) в $L_{p(x)}[0,2\pi]$. Точнее, доказана следующая

Теорема. *Пусть $p(x)$ 2π – периодическая функция, для которой выполнено условие Дини-Лифшица* $|p(x') - p(x'')| \ln |\frac{1}{x'-x''}| = O(1)$ $(x', x'' \in [0,2\pi])$. Тогда для полинома (1) в $L_{p(x)}[0,2\pi]$ имеет место неравенство

$$\|T'(*)\|_{p(x)} \leq cn\|T(*)\|_{p(x)}$$

где $c = c(\bar{p})$ постоянная, зависящая лишь от $\bar{p} = \mathrm{Vraisup}_{0 \leq x \leq 2\pi}\, p(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарапудинов И.И.*О топологии пространства* $L_{p(x)}([0,1])$// Матем. заметки. - 1979 - No 4. - C.613-632.

2. Шарапудинов И.И.*О равномерной ограниченности в* $L_p(p=p(x))$ *некоторых семейств операторов свертки*// Матем. заметки. -1996. - No 2.- C. 291-302

А. И. Васильев (Екатеринбург)

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАНТЫ (B)-СВОЙСТВА ДЛЯ F-ПРОСТРАНСТВ

Отправляясь от известной теоремы С.Н.Бернштейна о последовательности наилучших приближений [1,с.51], В.Н.Никольский [2,3] ввел понятие (B)-свойства банаховых пространств. Мы рассмотрим некоторые варианты этого понятия для F-пространств, т.е. полных вещественных линейных метрических пространств с метрикой, инвариантной относительно сдвига. Пусть X—F-пространство с метрикой d, $\dim X = \infty$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$. По определению X обладает свойством (B_i) (соответственно свойством (b_i)), где $i \in \mathbf{N} \cup \{0\} =: \mathbf{N}_0$, если для любой последовательности $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств из X, удовлетворяющей условиям $\dim L_1 = i$, $L_n \subset L_{n+1}$, $L_n \neq L_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, и любой сходящейся к 0 последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ с $a_{n+1} \leq a_n < \sup\{d(x, L_n)\colon\ x \in X\} =: s(L_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ (соответственно для любого $m \in \mathbf{N}$ и любого набора чисел $a_1 \geq \ldots \geq a_m \geq 0$ с $a_n < s(L_n)$ $(n = 1, \ldots, m)$) $\exists x \in X$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ $d(x, L_n) = a_n$ (соответственно $d(x, L_n) = a_n$ при $n = 1, \ldots, m$ и $d(x, L_n) = 0$ при $n = m+1, m+2, \ldots$). Ясно, что $(B_i) \Longrightarrow (B_k)$ $(i < k)$ и $(B_i) \Longrightarrow (b_i)$ $(i \in \mathbf{N}_0)$. Метрика d называется монотонной, если из $x \in X \setminus \{\theta\}$, $0 < \alpha < \beta$ вытекает $d(\theta, \alpha x) \leq d(\theta, \beta x)$, где θ — нуль пространства X.

Теорема. *Пусть X — бесконечномерное F-пространство с монотонной метрикой, $i \in \mathbf{N}_0$. Тогда $(B_i) \Longleftrightarrow (b_i)$.*

Заметим, что, даже если метрика монотонна, $(B_i) \not\Longleftrightarrow (B_k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.*–М.: Физматгиз, 1960.–624 с.

2. Никольский В.Н. *О некоторых свойствах рефлексивных пространств* // Учен. зап. Калининск. гос. пед. ин-та.– 1963.–Т.29.–С. 121–125.

3. Никольский В.Н. *Некоторые замечания о пространствах, обладающих (B)-свойством* // Учен. зап. Калининск. гос. пед. ин-та. –1964.–Т.39.–С. 48–52.

Р. К. Васильев (Москва)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КЛАССА S_2

С помощью одного метода, использующего теорему о вычетах, строятся последовательности операторов типа суммирования рядов Фурье, имеющие ядра с двумя простыми нулями на $]-\pi,\pi]$ и дающие наилучший порядок приближения, равный $\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^4}\right)$ для дифференцируемых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Р. К. *Методы суммирования рядов Фурье, дающие наилучший порядок приближения* // Матем. Заметки. - 1993. - 54, No 2. - С. 145–151.

А.С. Великих (Магнитогорск)

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Договоримся под L_2 понимать пространство классов эквивалентных суммируемых с квадратом функций $y : [0,\pi] \to C$ и нормой $\|y\|_2 = \left(\int_0^\pi |y(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $T^{\mathcal{F}} : L_2 \to L_2$, $T^{\mathcal{F}} = -y''$ — оператор Штурма-Лиувилля либо с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (\text{при этом будем писать} \quad \mathcal{F} = D),$$

либо с краевыми условиями Неймана

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (\text{при этом будем писать} \quad \mathcal{F} = N);$$

$v_n^{\mathcal{F}}$ — собственные ортонормированные функции оператора $T^{\mathcal{F}}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_n^{\mathcal{F}}(0)$.

Положим

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}(2^l - 1)}{\sqrt{\pi}2^l}} - 1}{\sqrt{\pi}2^l}, \text{где} \quad l > 1 \text{- натуральное число.}$$

Теорема. *Если последовательность комплексных чисел* $\mu_n^{\mathcal{F}}$ $(\mathcal{F} = N, D, n = 1, \ldots)$, *расположенных в порядке возрастания действительных частей с учетом кратностей, такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n^{\mathcal{F}} - n^2|^2 < \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

то в шаре $U = \{p : \|p\|_2 \leq \sqrt{\pi}2^l\varepsilon\}$ *существует и притом единственный потенциал* p_0, *удовлетворяющий условиям*

$$p_0(x) = p_0(\pi - x) \quad \text{и} \quad \int_0^\pi p_0(x)dx = 0;$$

при этом $\mu_n^{\mathcal{F}} = \lambda_n^{\mathcal{F}}(p_0)$, *где* $\lambda_n^{\mathcal{F}}(p_0)$ — *собственные числа оператора* $T^{\mathcal{F}} + P_0$, P_0 — *оператор умножения на* p_0.

Замечание. Числа $\mu_n^{\mathcal{F}}$ суть собственные значения либо оператора $T^D + P_0$, либо оператора $T^N + P_0$, при этом k-ый член последовательности $\mu_n^{\mathcal{F}}$ является либо k-ым членом последовательности μ_n^N, либо k-ым членом последовательности μ_n^D.

В.Г.Вердиев (Махачкала)

ЧЕБЫШЕВСКИЙ АЛЬТЕРНАНС И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Доклад предпологается посвятить обзору результатов, относящихся к следующим вопросам.

1.Экстремальные задачи, решениями которых являются ужи, и алгоритмы постпоения ужей.

2.Эволюция нулей и точек полинома при изменении одного из экстремаль- ных значений.

3.Экстремальные задачи, связанные с расхождением последовательных точек чебышевского альтернанса и последовательных нулей полиномов.

4.Распределение множества точек чебышевского альтернанса и множества альтернанса ужей порожденных парой функций.

О.Л.Виноградов (Санкт-Петербург)

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЯ СУММ РОГОЗИНСКОГО ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$;

$$R_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2(n+1)}\cos kt; \qquad \mathcal{R}_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)R_n(t)\,dt \text{ —}$$

сумма Рогозинского порядка n функции f в точке x;

$$\omega_2(f,h) = \sup_{|t|\le h, x\in\mathbf{R}} |f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \text{ —}$$

второй модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом h;

$$D_n = \sup_{f\in C} \frac{\|\mathcal{R}_n(f) - f\|}{\omega_2(f, \frac{\pi}{n+1})}, \qquad D = \sup_{n\in\mathbf{Z}_+} D_n.$$

Установлены оценки величин D_n сверху и снизу вида $C_n' \le D_n \le C_n$, такие что

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n'.$$

Таким образом, найдено значение D. Отдельно найдено значение D_1.

Теорема 1.

$$D = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\Big(\mathrm{Si}\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,\pi + \mathrm{Si}\,\frac{3\pi}{2}\Big) + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\Big)\,dx = 0,581\ldots$$

$$D_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\Big) = 0,559\ldots$$

Теорема 1 улучшает один результат В.В.Жука 1974 года: $D \le \frac{5}{8}$. Для доказательства теоремы используется подходящее представление величины $\mathcal{R}_n(f) - f$ в виде суммы интегралов, содержащих вторые разности функции f с шагом, не превосходящим $\frac{\pi}{n+1}$. Оценки сверху верны для пространства с полунормой, инвариантной относительно сдвига и мажорируемой равномерной нормой.

В. В. Власов* (Москва)

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=0}^{n}\left(B_j u(t-h_j) + D_j \frac{du}{dt}(t-h_j)\right) = 0, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u(t) = y(t), \quad t \in [-h, 0); \quad u(+0) = \varphi_0 = y(-0). \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j $(j = 0, 1, \dots, n)$ — матрицы размера $m \times m$ с постоянными комплексными элементами, $u(\cdot)$ — вектор-функция со значениями $\mathbb{C}^m$, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$; вектор-функция $y(t) \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n}(B_j + \lambda D_j)\exp(-\lambda h_j) \tag{3}$$

через $l(\lambda) = \det \mathcal{L}(\lambda)$, через ν_q — кратности нулей λ_q функции $l(\lambda)$, через $y_{q,j,s}(t)$ экспоненциальные (элементарные) [1] решения уравнения (1).

Теорема. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, *и множество нулей* Λ *функции* $l(\lambda)$ *отделимо, т.е.* $\inf\limits_{\lambda_p \neq \lambda_q} \operatorname{dist}(\lambda_p, \lambda_q) > 0$. *Тогда:*

(a) *Любое сильное решение* $u(t) \in W_2^1((-h,T),\mathbb{C}^m)$, $T > 0$, *задачи* (1), (2) *допускает оценку*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^1(-h,0)} \leqslant d\exp(\kappa t)(t+1)^{N-1}\|y\|_{W_2^1(-h,0)}, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\kappa = \sup Re\,\lambda_q$, $N = \max \nu_q$; *а постоянная* d *не зависит от* $y(t)$.

(b) *Система экспоненциальных решений* $\{y_{q,j,s}(t)\}$ *уравнения (1) минимальна в пространстве* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

(c) *При дополнительном условии* $\det D_n \neq 0$ *система подпространств* $\{V_{\lambda q}\}$, *где* $V_{\lambda q}$ — *линейная оболочка экспоненциальных решений* $y_{q,j,s}(t)$, *отвечающих* λ_q, *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

В докладе рассматриваются некоторые спектральные вопросы, и на этой основе изучается асимптотическое поведение решений задачи (1), (2) и её обобщений (подробнее см. [1], [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.В. // Изв. вузов. Математика. - 1996. - №1. - С.22-25.
2. Власов В.В. // УМН. 1996. - Т.51. - Вып. 1.-С. 143-144.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-00333

А. М. Водолазов(Саратов)

О УСЛОВИИ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ УОЛША.

Пусть f, g функции , принадлежащие $L[0,1]$, $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ -система Уолша(см.[1,с.10]) c_k, c'_k -коэфиценты Фурье-Уолша функций f и g. Если

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_0^{\infty} c_k c'_k, \qquad (*)$$

то для функций f, g выполнено равенство Парсеваля.Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $g \in L[0,1], f$ ограниченная измеримая на[0,1] ,такая что выражение*

$$2^k \int_0^{1/2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{|f(x \oplus t \oplus \frac{j}{2^k} \oplus \frac{1}{2^{k+1}}) - f(x \oplus t \oplus \frac{j}{2^k})|}{j} dt$$

равномерно ограничено по x и сходится к 0 почти всюду на [0,1] при $k \to \infty$, то для f, g выполнено равенство Парсеваля и ряд справа сходится($\oplus$- двоичное сложение см.[1.с.13]).

Теорема 2. *Пусть g ограниченная измеримая на [0,1], $f \in L[0,1]$ и*

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{|f(t \oplus \frac{j}{2^k}) - f(t \oplus \frac{j}{2^k} \oplus \frac{1}{2^{k+1}})|}{j} dt$$

сходится к 0 при $k \to \infty$, то для f, g выполнено равенство Парсеваля и ряд справа сходится.

Аналоги теорем 1,2 имеют место и для ограниченых мултипликативных систем.

Теорема 3. *Пусть $f \in L[0,1]$,если для фиксированного x*

$$\int_0^{\frac{1}{2^k}} f(x \oplus t)dt = \bar{o}(\frac{1}{2^k})$$

$$\int_0^{1/2^{k-1}} (f(\xi \oplus t) - f(\xi \oplus t \oplus 1/2^{k+1}))dt = \bar{o}(\frac{1}{2^{k+1}})$$

при $k \to \infty$ равномерно по $\xi \in [0,1]$,тогда

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(x) = \bar{o}(\log n)$$

В тригонометрическом случае теоремы 1,2 доказаны в [2],теорема 3 в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1.Голубов Б .И .Ефимов А.В. Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.*//М: Наука, 1987.

2.Izumi S.Sato M.*Fourier series 1.*//Proc.Jap.Acad. –1956–V.32.–No7 p .446–450.

3.Sato M.*Fourier series 2.Order of partial sums.*//Proc.Jap.Acad. –1956–V.32.–No8–p .529–534.

С. С. Волосивец(Саратов)

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ P-АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$-ограниченная 2π-периодическая функция, $\xi = \{a = x_0 < \cdots < x_n\}$-разбиение периода, $|\xi| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \le i \le n\}$-диаметр разбиения.Положим по определению при $1 < p < \infty$,

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f,\delta) = \sup\{(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{\frac{1}{p}} : |\xi| \le \delta\}$$

Если $\lim\limits_{\delta\to 0} = \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0$, то f принадлежит классу C_p

p- абсолютно непрерывных функций.Пространство C_p с нормой

$$\|f\|_p = max\{\|f\|_C, \omega_{1-1/p}(f,2\pi)\}$$

является банаховым пространством. Пусть $E_n(f)_p$-наилучшее приближение $f \in C_p$ тригонометрическими полиномами степени не выше n по норме $\|\cdot\|_p$.Имеет место

Теорема. *Пусть* $1 < q < p < \infty, f \in C_p, n \ge 0$.*Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q/p} E_n^q(f)_p,$$

то $f \in C_q$ *и выполнено неравенство*

$$E_n(f)_q \le C(p,q)(n^{1/q-1/p}E_n(f)_p + (\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-q/p}E_k^q(f)_p)^{1/q})$$

Эта оценка аналогична теореме вложения П.Л. Ульянова [1] и является улучшением теоремы вложения типа Конюшкова-Стечкина [2,п.3.11].

ЛИТЕРАТУРА

1.Ульянов П .Л .*Вложение некоторых классов функций* H_p^ω.//Изв.АН СССР Мат.-1968.-Т .32,No 3-С .649-686.

2.Терехин А .П .*Приближение функций ограниченной р-вариации.*//Изв.Вузов Мат.-1965.-No 2.-С .171-187.

Н. П. Воронова, Н. И. Березовский (Минск)

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА СУШКИ ТОРФА

В исследованиях процессов добычи и обработки торфа [1] разработаны математические модели, применимость которых недостаточно изучена, нет стройной системы обоснованных моделей, мало разработаны вопросы проверки адекватности моделей и методов, редко ставится вопрос об оптимальности процессов.

Поставим задачу о выборе режима изменения влагосодержания [2] в слое торфа таким образом, чтобы в момент окончания процесса достичь желаемого результата за минимально возможное время.

Пусть процесс изменения влагосодержания описывается уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

где w - концентрация влаги в весовых проценах, t - время, x - расстояние от поверхности, $D(t)$ - коэффициент диффузии.

Предположим, что w_0 - начальное содержание влаги, $w_.(t)$ - содержание влаги на поверхности. Пусть заданное в момент окончания процесса распределение влаги в поверхностном слое $w(x) = w^*_.$ при $0 \le x \le x_0$. Задача состоит в выборе режима $w_.(t)$, чтобы в момент окончания процесса выполнялись условия

$$w(t_0, x_0) = w^*, \tag{2}$$

$$Y_0 = \int_0^{x_0} [w^*(x) - w(t_0, x)]^2\, dx \to \min \tag{3}$$

Ограничим класс выбираемых функций $w_.(t)$ двухступенчатыми функциями вида

$$w_.(t) = \begin{cases} w_1, & 0 \le t < t_1, \\ w_2, & t_1 \le t \le t_0, \end{cases}$$

и пусть $w_2 = w^*_.$. Тогда оптимальная задача сводится к выбору трех параметров w_1, t_1 и t_0.

Численными методами выбираются параметры, при которых выполняются условия (1), (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронова Н. П., Михнова Р. В. *Разработка оптимального по времени режима работы печи садочного типа.* Изв.вузов, Энергетика, N 1-2, 1996.

2. Богатов Б. А., Березовский Н. И. *Разработка математических моделей и номограмм для управления сушкой сыпучих материалов.* Изв.вузов, Энергетика, N4, 1993.

М.Н. Гаврилюк (Краснодар)

ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ДЖЕНКИНСА

Пусть $S(d)$ обозначает подкласс известного класса S функций $w = f(z)$, удовлетворяющих дополнительному условию: $cap(\partial f(U)) \leq d$, $d > 1$; где $f(U)$ – множество значений функции $w = f(z)$ в круге $U = \{z : |z| < 1\}$; $cap\ E$ – логарифмическая емкость континуума E. Такой класс рассмотрен Дженкинсом [1] в форме подкласса Σ. Автором в соавторстве с Солыниным А.Ю. рассмотрены некоторые экстремальные задачи в классе $S(d)$ [2], в частности решена задача об отыскании $\min\limits_{|z|=r}|f(z)|$ и $\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Применяя решение экстремально-метрической проблемы модуля [3] для 3-х гомотопических классов кривых на плоскости $\bar{C}_w$ и в круге U, доказана точная оценка сверху модуля производной функции $w = f(z)$ в точке z в зависимости от значения модуля $|f(z)|$ в этой же точке.

Теорема. *Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $S(d)$, $d > 1$, $|z| = r$, $|f(z)| = R$. Тогда*

$$|f'(z)| \leq F_r(|z|, d, R)$$

Равенство возможно только для функции $f(z) = e^{i\alpha}F_r(ze^{i\beta}, d, R)$, α, β – действительные.

Функция $w = F_r(z, d, R)$ конформно и однолистно отображает круг U на внутренность регулярной траектории квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = A\frac{(w - c_1)(w - c_2)}{w^2(w - R)^2}dw^2$$

Такая траектория обладает следующими свойствами: она отделяет $w = \infty$ от точек $w = 0$ и $w = R$; конформный радиус внутренности этой траектории относительно $w = 0$ равен 1, а ее логарифмическая емкость равна d. Нули дифференциала c_1 и c_2 в зависимости от r, d, R, удовлетворяют соотношениям: $c_1 \leq c_2$ или $c_2 = \overline{c_1}$, $A = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения* // М. – 1962. – 265 С.

2. Кузьмина Г.В. *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1980. – Т. 139. – 241 С.

3. Гаврилюк М.Н., Солынин А.Ю. *Оценки модуля функции в некоторых классах однолистных функций.* // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 1983. – вып. 63. – С. 47-56.

В. Ф. Гапошкин(Москва)

РАВНОМЕРНАЯ СИЛЬНАЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ УОЛША-ФУРЬЕ

Наряду с аппаратом тригонометрических рядов Фурье в теории передачи информации, теории распознавания образов и других прикладных областях широко применяются ряды Уолша-Фурье. При изучении спектральных представлений стационарных последовательностей с помощью этих рядов рассматриваются понятия логической ковариации $\tau(j)$ и спектральной плотности Уолша $f(\lambda)$.Если (x_n)-данная последовательность, $E(x_n) = 0,\ R(j) = E(x_n x_{n+j}),\ (w_j(\lambda))$-система Уолша на [0,1] ,то

$$\tau(j) = 2^{-n} \sum_{l=0}^{n} R(j \oplus k - k); j \in (2^n, 2^{n+1}); f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau(j) w_j(\lambda).$$

Статистическими оценками этих величин по N наблюдениям процесса $x_0, x_1, ..., x_{N-1}$ являются соответственно

$$\tau_N(j) = N^{-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_l x_{l \oplus j}; f_N(\lambda) = \sum_{j=0}^{M_N - 1} k(j/M_N) \tau(j) w_j(\lambda),$$

где функция $k(\lambda)$ задает спектральное окно (см.[1]). Для оценок $f_N(\lambda)$ доказаны результаты о равномерной сильной состоятельности (т.е. равномерной сходимости п.в.), обобщающие некоторые результаты работы [2]. Пусть

$$\delta_N = \sup_{0 \le \lambda \le 1} |f_N(\lambda) - f(\lambda)|.$$

Показано, что если ковариация процесса и семиинварианты четвертого порядка достаточно быстро убывают,а $k(\lambda)$ удовлетворяет условию Липшица, то при определенных предположениях относительно M_N отклонение δ_N стремится к нулю п.в., и можно оценить скорость сходимости. Например, если $M_N = N^\alpha, 0 < \alpha < 1/2, \epsilon > 0$,то почти всюду

$$\delta_N = O(N^{-\alpha} + N^{\alpha - 1/2} \ln^{3/2+\epsilon} N).$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Kohn R.*On the spectral decomposition of stationary series using Walsh functions*//Ad.-Appl.Probab.-1980-v.12-P.462-474.

2.Гапошкин В. Ф.*Сходимость п.в. оценок спектральной плотности стационарного процесса*//Теория вер.и ее примен.-1980-т.25-С.172-178.

Я. Годуля (Люблин), В. В. Старков (Петрозаводск)

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОЦЕНОК D. M. Campbell'а И Ch. Pommerenke.

Доклад посвящен вопросам точности некоторых известных оценок в универсальных линейно-инвариантных семействах U_α регулярных функций (см. [1]).

1) Установлено, что полученная в 1964 г. в [1] оценка $|\arg f'(z)|$, $z \in \Delta = \{z : |z| < 1\}$, является точной, указана экстремальная функция.

2) В U_α получена нижняя оценка производной Шварца.

3) Для $f \in U_\alpha$ получена точная оценка порядка функций $f_r(z) = \dfrac{f(rz)}{r}$, $r \in (0,1)$ (не точная оценка порядка была дана D. M. Campbell'ом) в [2]). Эта оценка используется далее при решении других известных задач в U_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I* // Math. Ann..–1964.–Hf. 155.-P. 108–154.

2. Campbell D. M. *Locally univalent fnctions with locally univalent derivatives* // Trans. Amer. Math. Soc..-1971.–No 162.– P. 395–409.

Б.И.Голубов (Долгопрудный)

АНАЛОГИ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ И ХАРДИ–ЛИТЛВУДА, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ УОЛША

Преобразование Уолша определено Н.Файном следующим образом. Пусть $x \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, а n — натуральное число. Положим

$$x_n = [2^n x] \pmod 2, \quad x_{-n} = [2^{1-n} x] \pmod 2,$$

где $[a]$ — целая часть числа a, а x_n и x_{-n} равны 0 или 1. Определим ядро Файна следующим образом

$$\chi(x, y) = (-1)^{\alpha(x,y)},$$

где $\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n y_{-n} + x_{-n} y_n)$ для $(x, y) \in (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$.

Преобразование Уолша $\hat{f}$ функции $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 \le p \le 2$, задаётся равенством

$$\hat{f}(x) \overset{L^q}{=} \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(y)\chi(x, y)\, dy \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Определим операторы Харди–Уолша и Харди–Литлвуда–Уолша соответственно равенствами

$$\mathcal{H}_\omega(f)(x) = \int_{\mathbf{R}_+} f(y) \left(\frac{D(y,t)}{t}\right)^{\wedge}(x)\, dy,$$

$$\mathcal{B}_\omega(f)(x) = \int_{\mathbf{R}_+} f(y) \left(\frac{D(x,t)}{t}\right)^{\wedge}(y)\, dy,$$

где $D(x, y) = \int_0^y \chi(x, t)\, dt$ — обобщённое ядро Дирихле–Уолша.

Отметим, что если в этих равенствах вместо ядра Файна $\chi(x, y)$ взять тригонометрическое ядро $\frac{2}{\pi}\cos xy$, то получатся операторы Харди

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(y)}{y}\, dy, \quad x > 0,$$

и Харди–Литлвуда

$$\mathcal{B}(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(y)}{y}\, dy, \quad x > 0,$$

Теорема. *Если $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 < p \le 2$, то*

$$\mathcal{H}_\omega(\hat{f}) = \widehat{\mathcal{B}(f)}, \qquad \mathcal{B}_\omega(\hat{f}) = \widehat{\mathcal{H}(f)}.$$

Аналогичный результат для косинус- и синус-преобразований Фурье и операторов Харди и Харди–Литлвуда функций $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ доказал Титчмарш.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(грант 96–01–00332).

Д. В. Горбачев (Тула)

Приближение в L_2 по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\,p(x)\,\frac{d}{dx}\,u(x)+\lambda\,p(x)\,u(x)=0,\quad 0\le x<+\infty,\quad p(x)>0,\quad u'(0)=0 \tag{1}$$

с неотрицательным спектром.

Пусть $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция, $u(x,\lambda)$, $\lambda\ge 0$ — собственные функции (1), $u(0,\lambda)=1$, $u'(0,\lambda)=0$;

$$L_2=\left\{f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}\,\middle|\,\|f\|_2=\left(\int_0^\infty |f(x)|^2\,p(x)\,dx\right)^{1/2}<\infty\right\};$$

для произвольной функции $f(x)$ из L_2

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\,u(x,\lambda)\,p(x)\,dx\ — \tag{2}$$

преобразование Фурье по собственным функциям (1), тогда

$$f(x)=\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,u(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{3}$$

при этом сходимость в (2), (3) понимается в среднем.

Обозначим через $T^y f(x)$ оператор обобщенного сдвига

$$T^y f(x)=\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,u(x,\lambda)\,u(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{4}$$

Известен [1] аналитический вид оператора (4)

$$T^y f(x)=\frac{\sqrt{p(x+y)}\,f(x+y)+\sqrt{p(|x-y|)}\,f(|x-y|)}{2\sqrt{p(x)\,p(y)}}+\frac{1}{2}\int_{|x-y|}^{x+y} f(z)\,W(x,y,z)\,p(z)\,dz,$$

где $W(x,y,z)=\sqrt{p(x)\,p(y)\,p(z)}\,w(x,y,z)$, $w(x,y,z)=w(y,x,z)$ и при $y\ge x$ функция $w(x,y,z)$ является решением следующей задачи Гурса

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,w-q(x)\,w=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,w-q(z)\,w,$$

$$w(x,y,y+x)=\frac{1}{2}\int_0^x\big(q(t)-q(y+t)\big)\,dt,\quad w(x,y,y-x)=\frac{1}{2}\int_0^x\big(q(t)-q(y-t)\big)\,dt,$$

с $q(x)=\big(\sqrt{p(x)}\big)''/\sqrt{p(x)}$.

Пусть $W(x,y,z)\ge 0$; для $R>0$

$$E_R(f)_2=\inf\left\{\|f-g\|_2 : g(x)=\int_0^R a(\lambda)\,u(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right\}\ —$$

величина наилучшего приближения функции $f(x)$ из L_2; с помощью оператора обобщенного сдвига (4) определим модуль непрерывности функции $f(x)$

$$\omega(\delta,f)_2=\sup_{0\le d\le\delta}\left(\int_0^\infty T_y^d\,|f(y)-f(x)|^2\Big|_{y=x}\,p(x)\,dx\right)^{1/2}=$$

$$=\sup_{0\le d\le\delta}\left(\int_0^\infty\left[\frac{\sqrt{p(x+d)}\,|f(x+d)-f(x)|^2+\sqrt{p(|x-d|)}\,|f(|x-d|)-f(x)|^2}{2\sqrt{p(x)\,p(d)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\int_{|x-d|}^{x+d}|f(z)-f(x)|^2\,W(x,y,z)\,p(z)\,dz\right]p(x)\,dx\right)^{1/2}$$

и пусть

$$D(\delta,R)_2=\sup_{f\in L_2}\frac{E_R(f)_2}{\omega(\delta,f)_2}\ —$$

константа Джексона. Справедлива

Теорема. *Если $R>0$, $\nu_R>0$ — первый нуль функции $u(x,R)$, то*

$$D(2\nu_R,R)_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига.* — М.: Наука, 1973.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 97-01-00318).

С. Ю. Граф (Тверь)

О КВАЗИКОНФОРМНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(e^{i\theta})$ — сохраняющий ориентацию ρ-квазисимметрический гомеоморфизм единичной окружности γ на границу Γ выпуклой ограниченной жордановой области D. Согласно классической теореме Радо-Кнезера-Шоке интеграл Пуассона

$$P_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2|z|\cos(\theta-\arg(z))} f(e^{i\theta})\,d\theta$$

определяет однолистное гармоническое отображение единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ на область D, продолжимое до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{\Delta}$ и $\overline{D}$ с граничными значениями $P_f(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Множество таких отображений $P_f(z)$ с граничной нормировкой $P_f(-1) = w_0$, $P_f(1) = w_1$ и $P_f(i) = w_2$ ($w_0, w_1, w_2 \in \Gamma$) образует компактный в топологии локально-равномерной сходимости в круге Δ класс, обозначаемый символом $H^0_\rho(D)$ [1]. С помощью свойств семейств нормированных квазисимметрических функций удается доказать, что локально-равномерная сходимость элементов из $H^0_\rho(D)$ в круге Δ влечет равномерную сходимость их продолжений в $\overline{\Delta}$.

Следующая теорема [1] вместе с известным условием Альфорса-Берлинга о квазисимметричности граничного гомеоморфизма квазиконформного отображения дает критерий квазиконформности гармонического отображения единичного круга на выпуклую жорданову область.

Теорема. *Интеграл $P_f(z)$ с ρ-квазисимметрической плотностью $f(e^{i\theta})$ является k-квазиконформным отображением круга Δ на выпуклую ограниченную жорданову область D с некоторым $k = k(\rho)$.*

Ранее достаточные условия квазиконформности гармонических отображений были получены О.Мартио (1969) и В.Г.Шеретовым (1980) в терминах свойств их граничных диффеоморфизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Граф С.Ю. *О квазиконформности гармонического продолжения квазисимметрической функции.*// Применение функционального анализа в теории приближений. Тверской гос. ун-т (в печати).

С. Ю. Граф (Тверь)

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ-ДУГЛАСА НА КЛАССАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ КРУГА, НОРМИРОВАННЫХ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим задачу о минимизации интеграла Дирихле-Дугласа

$$E_\sigma(f) = \int\int_\Delta (|f_z|^2 + |f_{\bar z}|^2)\,\sigma^2 \circ f(z)\,dx\,dy$$

на классе $H_\sigma(\delta)$ однолистных квазиконформных автоморфизмов единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, гармонических в Δ относительно метрики

$$\sigma^2(w)\,|dw|^2 \ (\int\int_\Delta \sigma^2(w)\,du\,dv < \infty),$$

продолжимых до автоморфизмов $\overline{\Delta}$ и нормированных условиями $f(e^{i2\pi\nu/n}) = e^{i\alpha_\nu}$, $\nu = \overline{0, n-1}$, где точки α_ν $(0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < 2\pi)$ образуют простой дивизор δ на $\gamma = \partial\Delta$.

В случае непустоты класса $H_\sigma(\delta)$ с его элементами $f(z)$ ассоциируются голоморфные квадратичные дифференциалы вида $\varphi(z)\,dz^2$, где функции $\varphi(z) = \sigma^2 \circ f(z)\, f_z \overline{f_{\bar z}}$ принадлежат пространству Харди $H^{\frac{1}{2}}$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если в классе $H_\sigma(\delta)$ существует такое отображение f_0, что ассоциированный с его продолжением по симметрии относительно $\gamma = \partial\Delta$ до автоморфизма $\tilde f_0$ сферы Римана квадратичный дифференциал $\tilde\varphi_0\,dz^2$ голоморфен на сфере Римана за исключением быть может точек $e^{i2\pi\nu/n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$, то*

а) функция f_0 с таким свойством единственна в $H_\sigma(\delta)$;

б) f_0 является единственной экстремалью интеграла Дирихле-Дугласа $E_\sigma(f)$ на классе $H_\sigma(\delta)$.

Доказана также

Теорема 2. *Пусть метрика $\sigma^2(w)\,|dw|^2$ имеет вид $|A'(w)\,dw|^2$, где $A(w)$ — мебиусов автоморфизм единичного круга Δ. Тогда в классе $H_\sigma(\delta)$ существует единственная экстремаль f_0 интеграла Дирихле-Дугласа $E_\sigma(f)$. Экстремальный элемент f_0 характеризуется тем свойством, что отображение $A \circ f_0$ представляет собой гармонический автоморфизм круга Δ с граничной функцией $e^{i\omega_0(\theta)}$, где $\omega_0(\theta)$ — кусочно-линейный автоморфизм отрезка $[0, 2\pi]$, не имеющий точек разрыва производной, отличных от $\theta_\nu = \frac{2\pi\nu}{n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$.*

В. В. Григорьева (Тверь)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ И ЛОГГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Плоским гармоническим отображением f называется комплекснозначное решение уравнения Лапласа $f_{z\bar{z}} = 0$. Такие отображения локально представляются в виде $f = \bar{g} + h$, где g и h— голоморфные функции. Рассмотрим связанный с известным классом C Каратеодори класс C_H^k, элементами которого являются k-квазиконформные функции $f = \bar{g} + h$ в единичном круге Δ, удовлетворяющие условиям $Ref(z) > 0$ для всех $z \in \Delta$, $h(0) = 1$, $g(0) = 0$.

Теорема 1. *Для любого измеримого компактно принадлежащего Δ множества E и любого элемента f класса C_H^k имеют место точные оценки*

$$4(1-k)(1+k)^{-1}mes_hE \le mesf(E) \le 4(1+k)(1-k)^{-1}mes_hE,$$

где $mesf(E)$— двумерная мера Лебега f-образа множества E,

$$mes_hE = \int\int_E (1-|z|^2)^{-2}dxdy$$

— гиперболическая мера Лебега множества E.

2. Логгармонические отображения имеют локальные представления $f = \bar{g}h$, где g и h— голоморфные функции. Рассмотрим класс S_{LH}^k логгармонических k-квазиконформных отображений круга Δ, нормированных условиями $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $g(0) = 1$.

Теорема 2. *Для любого измеримого компактно принадлежащего Δ множества E и любого элемента $f = \bar{g}h$ класса S_{LH}^k имеют место точные оценки $(1-k)(1+k)^{-1}mesf_\alpha(E) \le mesf(E) \le (1+k)(1-k)^{-1}mesf_\alpha(E)$, где $f_\alpha := e^{i\alpha}gh$, $\alpha \in R$.*

3. В последней части доклада предполагается обсудить новый подход к проблеме классификации особых точек гармонических и логгармонических отображений [1]. Особой для отображения f называется точка $z_0 \in C$, в любой окрестности $U(z_0)$ которой f не является однолистным. Тип неизолированной особой точки z_0 гармонического (логгармонического) отображения f связывается с взаимным расположением в $U(z_0)$ двух систем выходящих из z_0 аналитических кривых: нулевых линий якобиана J_f (общих складок) и ортогональных траекторий ассоциированного с f аналитического квадратичного дифференциала($\varphi_f = h'g'dz^2$ для гармонического отображения и $\phi_f = (h'g'/(hg))dz^2$ для логгармонического отображения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев А. А., Шеретова В. В. *Квадратичные дифференциалы и локальные свойства гармонических отображений*// Применение функционального анализа в теории приближений.– Тверь: ТвГУ. – 1994.– С. 48–60.

Е. Г. Григорьева (Волгоград)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННО ПОДОБНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Пусть $\Phi(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, выпуклая и однородная по переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, в котором скалярный квадрат любого вектора $\chi = (y_1, ..., y_n, t)$, приложенного в точке $(x,z) = (x_1, ..., x_n, z)$, вычисляется по формуле $|\chi|^2_{\mathcal{F}} = -t^2 + \Phi^2(x,y)$.

Вектор χ *называется* **пространственно подобным, времениподобным** *или* **светоподобным** *в пространстве* $\mathcal{F}$, *если* $|\chi|^2_{\mathcal{F}} > 0, |\chi|^2_{\mathcal{F}} < 0$ *или* $|\chi|^2_{\mathcal{F}} = 0$ *соответственно.*

Пусть k-мерная поверхность в $\mathcal{F}$ задается C^1-отображением

$$\mathcal{M}(u) = (x_1(u), ..., x_n(u), t(u)), \quad u \in D \subset \mathbb{R}^k\text{-}\textit{область}. \tag{1}$$

Поверхность $\mathcal{M}$ *называется* **пространственно подобной**, *если всякий касательный к ней вектор является пространственно подобным.*

Обозначим через $\bar{\Phi}$ сужение функции $\Phi(\cdot,\cdot)$ на проекцию $\bar{\mathcal{M}} = \pi(\mathcal{M})$ поверхности $\mathcal{M}$, где $\pi(x,z) = x$. Введем функцию, двойственную к $\bar{\Phi}$,

$$\bar{H}(u,\eta) = \sup_{\alpha_1,...,\alpha_k} \frac{\langle \eta, \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial x}{\partial u_i}(u)\rangle}{\bar{\Phi}(x(u), \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial x}{\partial u_i}(u))}.$$

Пусть $g_{ip}(u) = \sum_{l=1}^n \partial x_l/\partial u_i(u) \cdot \partial x_l/\partial u_p(u)$ и $G = \{g_{ip}\}_{k,k}$ – матрица размера $k \times k$ с элементами g_{ip}.

Положим

$$\rho(u,v) = \inf_\gamma \int_\gamma \bar{\Phi}(x(u), \sum_{i=1}^k \frac{\partial x(u)}{\partial u_i}(u) \cdot (G^{-1}(u)du)_i),$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым кривым γ, соединяющим точки u и v.

Пусть также $\Gamma(u,v) = \{w \in D : \ \rho(u,v) = \rho(u,w) + \rho(w,v)\}$.

Лемма. *Пусть* $\mathcal{M}$ *гладкая поверхность в* $\mathcal{F}$ *вида* (1), *причем* $\det G(u) \neq 0$ *всюду в* D. *Тогда условие пространственно подобности можно записать в виде*

$$\bar{H}(x(u), \sum_{i=1}^k \frac{\partial x(u)}{\partial u_i}(u) \cdot (G^{-1}(u)\nabla t(u))_i)) < 1.$$

Теорема. *Пусть* L - $(k-1)$*-мерная поверхность в* $\mathcal{F}$. *Предположим, что существует некоторая* k *- мерная* C^1*-поверхность* $\mathcal{M}_1(u) = (x_1(u), x_2(u), ..., x_n(u), f(u)) : D \to \mathcal{F}$, *имеющая в качестве границы поверхность* L *и для которой* $\det G \neq 0$. *Тогда, для существования* k*-мерной пространственно подобной поверхности* $\mathcal{M}$ *в* $\mathcal{F}$ *с границей* L *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$|t(u) - t(v)| \le \rho(u,v), \forall u,v \in \partial D,$$

$$|t(u) - t(v)| < \rho(u,v), \forall u,v \in \partial D, \text{ и } \Gamma(u,v) \setminus \partial D \neq \emptyset.$$

В. И. Данченко, Д. Я. Данченко (Владимир)

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ В $\mathbf{E}_p$

Пусть односвязная жорданова область G на комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ принадлежит классу Альфорса ($G \in \mathbf{A}$), т.е. ее граница γ локально спрямляема и $\sup\{\mathrm{mes}_1(\gamma \cap u)/\mathrm{diam}(u)\} < \infty$, где sup берется по всем кругам u на $\mathbf{C}$. Пусть имеется последовательность $\lambda = \{z_j\} \subset G$ попарно различных точек и последовательность комплексных чисел $\{a_j\}$ с $\|a_j\|_p = 1$, $1 < p < \infty$. В классе $f \in \mathbf{E}_p(G)$ рассмотрим следующую интерполяционную задачу

$$\rho_j^{1/p} f(z_j) = a_j, \quad \rho_j := \rho(z_j, \gamma), \ j \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Пусть $w = \varphi_j(z)$ - конформное однолистное отображение G на круг $\mathbf{U} = \{w : \mid w \mid < 1\}$ с условиями: $\varphi_j(z_j) = 0$ и $\varphi_j(a) \geq 0$ в какой-либо фиксированной точке $a \in$G. Последовательность λ будем называть h-отделимой (в смысле гиперболической метрики), если $\mid \varphi_j(z_s) \mid \geq \frac{1}{2}$ при $j \neq s$. Пусть точкам $z_j \in \lambda$ приписаны некоторые веса $\delta_j \geq 0$ и $\Delta_k := \sum_j \delta_j < \infty$, где сумма распространяется на те номера j, для которых $2^{k-1} < \rho_j \leq 2^k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Положим $D_k = \sup\{\delta_j : \rho_j \leq 2^k\}$, $k \in \mathbf{Z}$. При $1 < p < \infty$ введем величины $B_l = \sum_{s=l}^{\infty} 2^{-s/p} D_s$ ($l \in \mathbf{Z}$) и

$$\mathbf{K}(p, G, \lambda) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k 2^{k/q} \sum_{l=k}^{\infty} B_l^{p-1}(l + 1 - k)^2 \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Наконец, при $j \in \mathbf{N}$ положим $\mathbf{B}_{\lambda,j} := \prod_{s \neq j}^{\infty} \mid \varphi_s(z_j) \mid$ (подразумевается сходимость произведений).

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathbf{A}$, $\lambda = \{z_j\}$ - h-отделимая последовательность в G, $1 < p < \infty$. Тогда для набора чисел $a_j \in \mathbf{C}$ и $\delta_j = \mid a_j \mathbf{B}_{\lambda,j} \mid^{-1}$ найдется функция $f \in \mathbf{E}_p$, решающая задачу (1) и удовлетворяющая нормировке*

$$\|f\|_p \leq A\mathbf{K}^{1/p}(p, G, \lambda) \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Теорема 2. *Оценка нормы в теореме 1 неулучшаема. Например, при $n \geq 4$ в единичном круге $\mathbf{U}$ существует h-отделимое множество $\lambda = \{z_j\}_{j=1}^{n}$ такое, что для минимального решения задачи (1) с $\mid a_j \mid = 1$ имеем $\|f\|_p \asymp n^{1/p} \asymp \mathbf{K}^{1/p}(p, \mathbf{U}, \lambda)$.*

Е. П. Долженко (Москва), В. И. Данченко (Владимир)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ниже $\mathbf{A}_n(G)$ - семейство всех функций $f(z=x+iy)$, n-аналитических в области $G\subset\mathbf{C}$, т.е. решений уравнения $\partial^n f/\partial\overline{z}^n\equiv 0$ в G; как известно, $f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\phi_k(z)$, где функции ϕ_k голоморфны в G. Положим $\rho_G(z):=\frac{1}{2}\min\{\rho(z,\partial G),1\}\quad(z\in G)$.

Теорема 1. *Пусть* $2<p\le\infty$, $z\in G$, $\rho>0$, $0<\epsilon<1$, $\{t:|t-z|<(1+\epsilon)\rho\}\subset G$, $K:=\{t:(1-\epsilon)\rho<|t-z|<(1+\epsilon)\rho\}$, $\lambda>1$, $\{t:|t-z|<(\lambda+1)\rho\}\subset G$, $Q:=\{t:(\lambda-1)\rho<|t-z|<(\lambda+1)\rho\}$. *Тогда, если* $f\in\mathbf{A}_n(G)$, *то*

$$|\partial^s f(z)/\partial z^s|\le A\rho^{-s-2/p}\parallel f\parallel_{L^p(Q)}\ (s\ge 0, A=C_p s!(\lambda-1)^{-s-1}\lambda^{n-1/p}),$$

$$|\partial^s f(z)/\partial\overline{z}^s|\le B\rho^{-s-2/p}\parallel f\parallel_{L^p(K)}\ (s=\overline{0,n-1}, B=C_p s!\epsilon^{s-n+1-1/p}(1-\epsilon)^{-s-1}).$$

Следующее утверждение непосредственно обобщает известную теорему Харди-Литтлвуда, получающуюся из него при $n=1$, $p=\infty$, $s=1$ и $G=D=\{z:|z|<1\}$.

Определение. Измеримая по Лебегу в области G функция F принадлежит при $\alpha>0$ и $p\ge 1$ классу $lip(\alpha,p,G)$, если $\parallel F(\cdot)-F(z)\parallel_{L^p(D(z,\rho))}\le C\rho^\alpha$ при всех таких $z\in G$ и $\rho\in(0,\rho(G))$, что $D(z,\rho)=\{t:|t-z|<\rho\}\subset G$ (C не зависит от z и ρ, $\rho(G)>0$ зависит лишь от G, норма берется по t от $F(t)-F(z)$.

Теорема 2. *Если* $2<p\le\infty$, $\alpha>0$ *и* $f\in lip(\alpha,p,G)\cap\mathbf{A}_n(G)\quad(n\ge 1)$, *то*

$$|\partial^s f/\partial z^s|+|\partial^s f/\partial\overline{z}^s|\le C(p,f,s)\rho_G(z)^{\alpha-s-2/p}\quad(s\ge 1, z\in G).$$

Если G - ограниченная область с дважды гладкой границей ∂G, $2<p\le\infty$, $\frac{1}{2p}<\alpha\le 1+\frac{2}{p}$, $\alpha\ne\frac{1}{p},\frac{2}{p}$, $n\ge 1$, то

$$f\in lip(\alpha,p,G)\cap\mathbf{A}_n(G)\Leftrightarrow|\partial f(z)/\partial z|+|\partial f(z)/\partial\overline{z}|=O(\rho(z,\partial G)^{\alpha-1-2/p}(z\to\partial G).$$

Теорема 3. *Если G - ограниченная область с обобщенно ляпуновской границей, $f\in\mathbf{A}_n(G)\quad(n\ge 1)$, $p\ge 1$, $r\ge s\ge k\ge 0$, где s и k - целые, $t\in G$, то*

$$C_1\parallel\rho_G^{r-s}(f-P)\parallel_{L^p(G)}\le\parallel\rho_G^r\partial^s(f-P)/\partial\overline{z}^k\partial z^{s-k}\parallel_{L^p(G)}\le C_2\parallel\rho_G^{r-s}(f-P)\parallel_{L^p(G)},$$

где $C_j=C_j(G,p,r,s,t)>0$, $P(z):=\sum_{k,l=0}^{s-1}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}f(t)}{\partial\overline{z}^k\partial z^l}(\overline{z}-\overline{t})^k(z-t)^l$.

Работа поддержана фондом РФФИ (проект No 96-01-01366).

Д. Г. Джумабаева (Караганда)

О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p[0,2\pi)$, $2 < p < \infty$

Тиманом М.Ф.[1] были установлены оценки для модуля непрерывности $\omega_r(f,\frac{1}{N})_p$ функции $f(x) \in L_p[0,2\pi)$. Позже Кокилашвили В.М. [2] получил порядковое равенство для $\omega_r(f,\frac{1}{N})_p$ функции $f(x)$ с квазимонотонными коэффициентами Фурье. В данной работе удалось ослабить условие квазимонотонности.

Определение. *Пусть Δ - отрезок в $\mathbf{Z}, d \in \mathbf{N}, |\Delta| < d$. Множество вида $I = \bigcup_{\nu\in Z}\{m+\nu d : m \in \Delta\}$ назовем* **гармоническим интервалом в Z.**

Обозначим чеоез M_0 множество всех гармонических интервалов I таких, что для любого $\nu \in N$, $|I \bigcap [-\nu,\nu]| > \nu$

Пусть последовательность комплексных чисел $\{a_\nu\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующему условию. Для любого $I \in M_0$ и произвольного $\nu \in N$ верно

$$|a_\nu| \le \frac{c}{|I|}\left|\sum_{m\in I\bigcap[-\nu,\nu]} a_m\right|, \tag{1}$$

Отметим, что если последовательность a_ν является монотонной или квазимоноонной, то она удовлетворяет условию (1). Обратное не всегда верно.

Пример. Последовательность $\{a_n\}$, которая задается следующим образом,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 3k, \\ \frac{1}{n}, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

удовлетворяет условию (1) и в то же время не является ни монотонной, ни квазимонотонной.

Теорема. *Пусть $2 < p < \infty$. Для функции $f(x) \in L_p[0,2\pi)$, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условию (1), справедливо следующее соотношение:*

$$\omega_r(f,\frac{\pi}{N})_p \sim \left\{\sum_{k=1}^{r} k^{rp-1}E_{k-1}^p(f)_p\right\}^{1/p}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман М.Ф. *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p и некоторые приложения.*// Автореферат диссертации–Тбилиси–1962.

2. Кокилашвили В .М . *О приближении периодических функций.*// Тр. Тбилис. матем.ин-та.– 1968.

А. В. Домрина (Москва)

О ЧЕТЫРЕХЛИСТНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ В $\mathbf{C}^2$. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Пусть $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ – полиномиальное отображение такое, что

$$Jacobian(f) = const \neq 0. \tag{1}$$

Известная гипотеза о якобиане состоит в том, что такое отображение полиномиально обратимо (см. обзоры [1], [2]).

Полиномиальная обратимость отображения f, удовлетворяющего условию (1), эквивалентна тому, что общая точка из $\mathbf{C}^2$ имеет не более одного прообраза. Число прообразов общей точки называется топологической степенью отображения. Известно, что не бывает полиномиальных отображений топологической степени 2 и 3, удовлетворяющих (1). Первый случай элементарен, а второй разобран в [3]. Мы изучаем отображения топологической степени 4.

Автором совместно с С.Ю.Оревковым было доказано, что не существует полиномиального отображения $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ топологической степени 4 с одной дикритической компонентой.

Теперь мы завершаем изучение отображений топологической степени 4.

Теорема *Если топологическая степень полиномиального отображения $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ равна четырем, то якобиан отображения f не может быть ненулевой константой*

ЛИТЕРАТУРА

1. Vitushkin A. G. *On polynomial transformations of* $\mathbf{C}^n$ Tokio Univ. Press, 1975. P. 415-417.

2. Bass H., Connell E. H., Wright D. *The jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*// Bull. Amer. Math. Soc. - 1982. V. 7 - P. 287-330.

3. Оревков С. Ю. *О трехлистных полиномиальных отображениях* $\mathbf{C}^2$// Мат. Заметки. – 1986. – Т. 50. – С. 1231-1240.

Работа выполнена при финансовой поддержкс РФФИ (проект 96-01-01218).

В.В. Дубровский , Л.В. Смирнова (Магнитогорск)

К ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Данная работа основана на статье [1] Х. Исосеку, тщательный анализ которой позволил сформулировать и доказать теорему единственности восстановления потенциала для краевой задачи Робина в ограниченных областях Ω из R^n с границей S класса C^2 по неточно заданным спектральным данным.

Рассмотрим задачу Робина для действительной функции $q \in C^2(\Omega)$ и действительной функции $\delta \in C^2(S)$:

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = \lambda v, \\ \left[\frac{\partial v}{\partial \nu} - \delta v\right]_s = 0, \end{cases}$$

где ν - внутренняя нормаль. Под решением задачи будем понимать функцию из $C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую ей всюду на $\overline{\Omega}$. Задача имеет не более счетного числа собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, каждое из которых имеет конечную кратность. Пусть $v_1, v_2, v_3, \ldots$ - соответствующие им собственные ортонормированные функции.

Теорема. *Если q_p, $p = 1, 2$ - действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{\Omega}$, и существует подпоследовательность i_k - натуральных чисел такая, что $\|v_{i_k}(q_p)\|_{L_2(S)} \leq const|\lambda_{i_k}|^\beta$, где $0 \leq \beta < 4^{-1}$, то существует такая бесконечная подпоследовательность i_{k_l} натуральных чисел, что из условия*

$$\lambda_i(q_1) = \lambda_i(q_2), \quad i \neq i_{k_l}$$

$$v_i(q_1) = v_i(q_2), \quad i \neq i_{k_l}$$

следует, что $q_1 = q_2$.

Первый автор поддержан общеобразовательным грантом N 192g Сороса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirochi Isosaki//J.Math.Kyoto Univ.1991.V.31.N3.p.743-753.

2. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G.//Commun. Math. Phys.1988.V.115.p.595-605.

В. В. Дубровский, С. А. Терентьев (Магнитогорск)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА ЕДИНИЧНОЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

В сообщении приводятся формулы регуляризованных следов для оператора $T+P$, где $T=-\Delta$ — оператор Лапласа-Бельтрами на единичной двумерной сфере $S^2 \subset \mathbf{R}^3$, P — оператор умножения на ограниченную в существенном на сфере S^2 комплекснозначную функцию p.

Основной результат содержится в следующей теореме (см. также [1]).

Теорема. *Если K — вращение сферы такое, что $Kp(x) = p(Kx) = tp(x)$, $|t| = 1$, $t^2 \neq 1$, то для с.з. $\mu_{k,i}$ возмущенного оператора Лапласа-Бельтрами $T+P$ имеют место формулы*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) \Big) = 0.$$

В доказательстве теоремы используется достаточно хорошо разработанная В.А.Садовничим [2] и его учениками теория регуляризованных следов для различных классов линейных операторов $T+P$ с резольвентным оператором $R(\lambda, T) = (T-\lambda E)^{-1}$, принадлежащим некоторому S_p-идеалу $(1 \leq p \leq \infty)$ кольца ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровский В. В. *О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. - 1983. Вып. 9. - С. 40–44.

2. Садовничий В. А. *Теория операторов.* - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. - 368 с.

3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* - М.: Наука, 1965. - 448 с.

Л.Л.Дудко (Новгород)

Некоторые достаточные условия сильной L-радиальности оператора

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, а операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассмотрим L-радиальные операторы, представляющие собой обобщение (L,p)-секториальных операторов.

О п р е д е л е н и е . Оператор M называется *радиальным относительно* оператора L (короче, *L-радиальным*), если

(i) $\exists \mathrm{a} \in \mathbb{R}\ \forall \mu \in \mathbb{R}\ (\mu > \mathrm{a}) \Rightarrow (\mu \in \rho^{\mathrm{L}}(\mathrm{M}))$;

(ii) $\exists \mathrm{k} \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in \mathbb{R}\ (\mu > \mathrm{a})\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow (\|(\mu \mathrm{L} - \mathrm{M})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U}_L)} \leq \mathrm{k}) \wedge$
$\wedge(\max\{\|(R^L_\mu(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_L)}\ ,\ \|(L^L_\mu(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}\} \leq \dfrac{k}{(\mu-a)^n})$.

Разрешимость уравнения $L\dot{u} = Mu$ определяется существованием оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_L)$. Это возможно лишь в случае *сильной L-радиальности* оператора M. Установим достаточность некоторых необходимых условий сильной L-радиальности оператора M . Пусть

(B1) Существуют две сильно непрерывные и равномерно ограниченные полугруппы $\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{V^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, определенные на пространствах $\mathcal{U}_L$ и $\mathcal{U}$ соответственно.

Каждая из полугрупп имеет единицу $P = U^0$, $Q = V^0$. Положим $\mathcal{U}^0_L = \ker P$, $\mathcal{U}^1_L = \operatorname{im} P$, $\mathcal{U}^0 = \ker Q$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через $\{\tilde{U}^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{\tilde{V}^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathcal{U}^1_L$ и $\mathcal{U}^1$. Обозначим через S_1 (T_1) генератор полугруппы $\{\tilde{U}^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{\tilde{V}^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\})$. Согласно теореме Хилле-Иосиды-Феллера-Миядеры-Филлипса операторы S и T радиальны, причем луч $\mathbb{R}_+ \subset \rho(S_1) \cap \rho(T_1)$.

(B2) Существует топлинейный изоморфизм $L_1 : \mathcal{U}^1_L \to \mathcal{U}^1$ такой, что $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

(B3) Существует линейный замкнутый, биективный оператор $M_0 :\ \operatorname{dom} M_0 \to \mathcal{U}^0$ с областью определения $\operatorname{dom} M_0$ плотной в $\mathcal{U}^0_L$. Из условия (B3) следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{U}^0_L)$.

Т е о р е м а . *Пусть выполнены все условия* (B1) – (B3). *Тогда оператор M сильно L-радиален.*

Подробнее познакомиться с результатами исследования можно в работе *Дудко Л.Л.* Относительно радиальные операторы и непрерывные полугруппы операторов с ядрами //Рук.деп.в ВИНИТИ, 1996, Деп N 418-B96, 21 с.

С. И. Дудов (Саратов)

МАКСИМИН ФУНКЦИИ РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Интерес к максиминным задачам поддерживается их обширными приложениями в технике, экономике и самой математике. В процессе сотрудничества автора с разработчиками радиотехнических устройств некоторые задачи параметрической оптимизации проектируемых устройств (например, задачи о переменных и фиксированных допусках) удалось формализовать в виде:

$$\varphi(x) = \min_{y\in\Omega} f(x-y) \to \max_{x\in D}, \tag{1}$$

где Ω и D некоторые замкнутые множества из конечномерного пространства R^p, а $f(\cdot)$ функция, определенная на открытом множестве S, которое содержит множество $D-\Omega = \{x-y \in R^p / x \in D, y \in \Omega\}$.

Выяснилось, что некоторые задачи наглядного геометрического содержания (например, задачи о внутренней и внешней оценке множества шаром произвольной нормы) также сводятся к задаче вида (1).

Частным случаем функции $\varphi(x)$ в задаче (1) является функция расстояния (ФР) от точки до множества в некоторой норме $n(\cdot)$:

$$\rho_\Omega(x) = \min_{y\in\Omega} n(x-y). \tag{2}$$

Хорошо известна ее важная роль в негладком анализе, теории приближений и других разделах математики.

В докладе будет сделан обзор результатов автора ([1]–[5]) по исследованию задачи (1), дифференциальных свойств ФР и некоторых приложений задачи (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта N 95-01-00156

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудов С. И. *Необходимые и достаточные условия максимина функции разности аргументов.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32. – No 12. – С. 1869–1884.

2. Дудов С. И. *Дифференцируемость по направлениям функции расстояния.* // Матем. сборник. – 1995. – Т. 186. – No 3. – С. 29–52.

3. Дудов С. И. *Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – No 5. – С. 153–159.

4. Дудов С. И. *Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния.* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 61. – No 4. – С. 530–542.

5. Дудов С. И. *О задаче фиксированных допусков.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – No 8. – С. 937–944.

М. И. Дьяченко (Москва)

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ КУСОЧНО-МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящей заметке результаты, установленные ранее автором для кратных рядов Фурье, переносятся на непериодический случай.

Если $1 \le p < \infty$, то, как обычно, через $L_p(\mathbf{R}^m)$ обозначается пространство суммируемых в p-той степени функций с соответствующей нормой $\|f(\mathrm{x})\|_p$.

Согласно теореме Планшереля, для $f(\mathrm{x}) \in L_2(\mathbf{R}^m)$ преобразование Фурье может быть задано как L_2-предел

$$\hat{f}(\mathrm{x}) = \lim_{N\to\infty} \int_{[-N,N]^m} f(\mathrm{t}) e^{-i\mathrm{tx}} d\mathrm{t}. \tag{1}$$

Отсюда с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича нетрудно установить существование предела (1) для $f(\mathrm{x}) \in L_p(\mathbf{R}^m)$ при $p \in (1,2)$ либо в метрике $L_{\frac{p}{p-1}}(\mathbf{R}^m)$, либо в метрике пространства Пэли с нормой

$$\|f(\mathrm{x})\|_{\hat{p}} = \left(\int_{\mathbf{R}^m} |x_1 \cdot x_2 \cdots x_m|^{p-2} |f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Определение 1. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [-\infty, \infty]^m$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *и* γ – m*-мерный вектор из нулей и единиц. Тогда скажем, что функция* $f(\mathrm{x}) \in M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \gamma)$, *если* $f(\mathrm{x}) = 0$ *при* $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^m \backslash [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *и если для любых* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *таких, что* $(-1)^{\gamma_j} x_j \le (-1)^{\gamma_j} y_j$ *при* $j = 1, 2, ..., m$, *имеем* $f(\mathrm{x}) \ge f(\mathrm{y})$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(\mathrm{x}) \in PM$ *(* $f(\mathrm{x})$ *кусочно-монотонна), если существует такое конечное дизъюнктное разложение* $\mathbf{R}^m$ *на параллелепипеды* $[\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k))$, $k = 1, 2, ..., l$ *(здесь считаем, что* $[-\infty, b) = (-\infty, b)$ *) и такие векторы* $\gamma(1), ..., \gamma(l)$ *из нулей и единиц, что при* $k = 1, 2, ..., l$ *функция* $f(\mathrm{x}) X_{[\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k))}(\mathrm{x}) \in M(\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k), \gamma(k))$ *, где* $X_E(\mathrm{x})$ *– это характеристическая функция множества* E.

Оказывается, что справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $m \ge 2$, $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$ *и функция* $f(\mathrm{x}) \in L_p(\mathbf{R}^m) \cap PM$. *Тогда предел (1) существует относительно метрики пространства Пэли (2). Кроме того,* $\|\hat{f}(\mathrm{x})\|_{\hat{p}} \le C(p, m, l) \|f(\mathrm{x})\|_p < \infty$, *где* l *– число параллелепипедов монотонности функции* $f(\mathrm{x})$.

Если $-\infty \le a < x < b \le \infty$, причем хотя бы один из символов a, b конечен, то

$$q(a,b,x) = \begin{cases} \min(x-a, b-x) & \text{при} \quad -\infty < a < b < \infty \\ x - a & \text{при} \quad b = \infty \\ b - x & \text{при} \quad a = -\infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $m \ge 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < 2$, *функция* $f(\mathrm{x}) \in PM$, *причем для всех параллелепипедов монотонности* $[\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k))$, $k = 1, 2, ..., l$ *имеем*

$$J(f_k) = \int_{\mathbf{R}^m} |f_k(\mathrm{x})|^p \left(\prod_{j=1}^{m} q(a_j(k), b_j(k), x_j) \right)^{p-2} d\mathrm{x} < \infty.$$

Тогда предел (1) существует относительно метрики пространства $L_p(\mathbf{R}^m)$, причем

$$\|\hat{f}(\mathbf{x})\|_p \leq C(p,m) \sum_{j=1}^{l} (J(f_k))^{\frac{1}{p}}.$$

Исследования, описанные в данной статье, были выполнены при финансовой поддержке Р Ф Ф И, проекты NN 97-01-00010 и 96-01-00094.

А. М. Елизаров (Казань)

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ ЛЕРЭ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ [1]

Целый ряд краевых задач с неизвестными границами, поставленных и рассмотренных различными авторами, можно трактовать как обобщение классических задач струйного обтекания идеальной жидкостью криволинейных кусочно-гладких препятствий L_0, удовлетворяющих **ограничению Лерэ**: колебание угла $\Theta(s)$ наклона касательной к L_0 меньше π, где s – дуговая абсцисса. Указанное ограничение является достаточным для существования решений.

В докладе дан ответ на вопрос, можно ли ослабить ограничение Лерэ применительно к следующей задаче, содержащей как частный случай задачу струйного обтекания препятствия по схеме Кирхгофа.

Известный участок L_z^1 контура L_z искомой неограниченной односвязной области G_z состоит из n ляпуновских дуг L_j с длинами l_j, образующих в точках соединения внутренние углы $\pi\Delta_j$, $\Delta_j \in (0,2]$, $j=\overline{1,n}$. Абсцисса s отсчитывается от начала L_1 в направлении, когда G_z остается слева. Гельдеровская функция $\Theta_j(s)$, $s \in l_j$, $j=\overline{1,n}$, задает угол наклона касательной к L_j, $l_j = [\,\sum_{i=1}^{j-1} l_j, \sum_{i=1}^{j} l_j]$ – соответствующий интервал изменения s, причем $\beta_j = \pi^{-1}\max\limits_{s\in l_j}\Theta_j(s)$, $\quad \alpha_j = \pi^{-1}\min\limits_{s\in l_j}\Theta_j(s)$ и на каждой из дуг L_j выполнено ограничение Лерэ:

$$0 \le p_j \equiv \beta_j - \alpha_j < 1, \quad j=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Далее, в плоскости w с точностью до подобия относительно точки $w=0$ (с некоторым коэффициентом $l>0$) задана однолистная область G_w, ограниченная кусочно-ляпуновским контуром с ненулевыми внутренними углами в угловых точках и являющаяся образом G_z при искомом конформном отображении $w(z)$, причем на ∂G_w задано положение образа известного участка L_z^1 контура L_z.

Требуется найти область G_z и аналитическую функцию $w(z)$ по краевому условию на неизвестной части L_z^2 контура L_z, имеющей длину l:

$$|dw/dz|_{L_z^2} = f(\sigma), \quad \sigma\in[0,1], \quad \sigma=(s-l_0)/l, \quad l_0=\sum_{i=1}^{n} l_j,$$

где $f(\sigma)$ – положительная непрерывная функция. Обозначим

$$\eta(x)=(x/2)(signx+1), \quad a_{L,R}^{+}=\sum_{i=L}^{R}\eta(\alpha_i-\alpha_{i-1}), \quad b_{L,R}^{+}=\sum_{i=L}^{R}\eta(\beta_i-\beta_{i-1}).$$

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект N 96-01-00123

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены ограничения (1),*

$$\beta_j - \alpha_{j-1} < 1 - \max\{p_j, p_{j-1}\}, \quad j = \overline{2,n}, \tag{2}$$

$$\eta(\beta_2 - \alpha_1) + b^+_{3,n} < 1 - p_1; \qquad \eta(\beta_n - \alpha_{n-1}) + a^+_{2,n-1} < 1 - p_n \quad (\text{если} \quad n \geq 3) \tag{3}$$

и дополнительные условия при $n \geq 4$

$$\beta_{j+1} - \alpha_j + b^+_{j+2,n} < 1 - p_j, \ j \in [2, n-2]; \tag{4}$$

$$\beta_{j-1} - \alpha_{j-2} + a^+_{2,j-2} < 1 - p_{j-1}, \ j \in [4, n]. \tag{5}$$

Тогда исходная краевая задача имеет по крайней мере одно решение.

В случае гладкой дуги L^1_z ($n = 1$) условия (2)-(5) отсутствуют. Если разбить в этом случае дугу L^1_z на две части так, чтобы на каждой из них было выполнено ограничение Лерэ, то разрешимость задачи будет обеспечена, если

$$\max_{s\in I_2} \Theta_2(s) - \min_{s\in I_1} \Theta_1(s) < \pi[1 - \max\{p_1, p_2\}]. \tag{6}$$

Неравенство (6) существенно ослабляет ограничение Лерэ.

Есмаганбетов М.Г. (Караганда)

О ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИИ ИЗ L_2

Пусть $L_2[0,2\pi]$ - пространство измеримых по Лебегу 2π - периодических функции, квадрат которых суммируем на $[0,2\pi]$; $S_n(f;x)$- частичная сумма порядка n ряда Фурье, $\omega_r(f;\delta)_2$ - модуль гладкости , $f^{(\alpha)}$-пройзводная Вейля функции из L_2.

$||f||_2$ означает норму функции из L_2 .

Через L_2^α обозначим множество функции из L_2, у которых существует $f^{(\alpha)} \in L_2[0,2\pi]$. $d_n(H,L_2)$-n-мерный поперечник Колмогорова класса $H \subset L_2$. Определим класс $S_r^\alpha(\omega)$ следующим образом:

$$S_r^\alpha(\omega) = \{f \in L_2^\alpha :$$
$$[\sum_{k=n}^{\infty}(\frac{1}{k^{2r}} - \frac{1}{(k+1)^{2r}})||S_k^{(\alpha+r)}(f)||^2]^{\frac{1}{2}} \leq \omega(\frac{1}{n})\}.$$

В 1975 году на международной конференции по теории приближения функции в Калуге С.Б.Стечкин поставил задачу вычислить n -мерные поперечники по Колмогорову классов

$$W_r^\alpha = \{f \in L_2^\alpha; \omega_r(f;\delta)_2 \leq \omega(\delta)\}.$$

Решение задачи С.Б.Стечкина оказалось, по-видимому, достаточно трудным. Многие авторы (см. напр. [1-2]) вычислили поперечники классов дифференцируемых функции с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на можаранту $\omega(\delta)$ и не в классах $W_r^\alpha(\omega)$.

Доказана

Теорема . Пусть функция $f \in L_2[0,2\pi]$, $\alpha \geq 0, r > 0; N = 2n-1$ или $N = 2n$. Тогда справедливо равенство

$$d_N(S_r^\alpha(\omega); L_2) = \frac{\omega(\frac{1}{n})}{n^\alpha}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие найлучшие приближения и модуль непрерывности функции из L_2. Мат. заметки, 1976, т.20, с. 433-438.

[2] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов функции, определяемых модулями непрерывности высших порядков. Укр. матем. журнал, 1991, Т43, №1. с.125-129.

А. И. Ермаков (Луганск)

О ВЛИЯНИИ СКОРОСТИ ХАУСДОРФОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Пусть $I = [-1,1]$, $f^+(x) = max\{f(x),0\}$, $f^-(x) = min\{f(x),0\}$,

$$\Lambda(\delta) = max\{\omega(\delta, f^+), \omega(\delta, f^-), \delta\}$$

, $\Lambda_n = \Lambda(1/n)$, $H_rE_n(f)$ - наименьшее уклонение 2π - периодической функции f от тригонометрических полиномов порядка не выше n в r-метрике Хаусдорфа, $H_rE_n(f, I)$ - наименьшее уклонение функции f, определенной на I, от алгебраических полиномов степени не выше n в r-метрике Хаусдорфа.

Теорема 1. *Если* $K(f,r) := \limsup(((\pi/r) - nH_rE_n(f))\Lambda_n^{-1/2}) = +\infty$, *то* f *однозначна и непрерывна.*

Теорема 2. *Если* $0 < a < 1$ *и*

$$K(f,a,r) := \limsup(((\pi(1-a^2)^{1/2}/r) - nH_rE_n(f,I))\Lambda_n^{-1/2}) = +\infty$$

, *то* f *однозначна и непрерывна на* $[-a, a]$.

Доказывается неулучшаемость этой теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 96-01-01366).

В.В.Жук (Санкт-Петербург)

ФУНКЦИИ КЛАССА $C^{(r)}$ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В дальнейшем $\mathbf{R}, \mathbf{Z}_+, \mathbf{N}$ суть, соответственно множества вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; C — пространство 2π-периодических непрерывных функций $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$, H_n — множество тригонометрических полиномов порядка не выше n,

$$E_n(f) = \min_{T\in H_n} \|f - T\|, \qquad \omega(f,h) = \sup_{|t|\le h} \|f(\cdot + t) - f\|.$$

При $r \in \mathbf{Z}_+$, $0 < \alpha \le 1$ полагаем

$$C^{(r)} = \{\, f \in C : \exists f^{(r)} \in C \,\}, \quad W_\alpha^{(r)} = \{\, f \in C^{(r)} : \sup_{h>0}\{h^{-\alpha}\omega(f^{(r)},h)\,\} < +\infty \}.$$

Через Λ обозначаем множество таких последовательностей

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots),$$

что $\alpha_n \ge 0$, $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ при любом $n \in \mathbf{Z}_+$, $\lim \alpha_n = 0$. Если $\alpha \in \Lambda$, то

$$E(\alpha) = \{\, f \in C : E_n(f) = \alpha_n \quad n \in \mathbf{Z}_+ \,\}.$$

В силу известной теоремы С.Н.Бернштейна $E(\alpha) \ne \oslash$ при любой $\alpha \in \Lambda$.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \Lambda$. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (n+1)^{r-1}$ расходится, то существует функция $f \in C \setminus W_1^{(r-1)}$ такая, что $E_n(f) = \alpha_n$ при всех $n \in \mathbf{Z}_+$.*

Теорема 1 уточняет один хорошо известный результат С.Н.Бернштейна 1912 года. Функция

$$f_r(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos\left(kx + \frac{\pi(r-1)}{2}\right)}{k^{r+1}\ln k}$$

имеет абсолютно непрерывную r-ю производную, у которой ряд Фурье равномерно сходится на $\mathbf{R}$, $E_n(f_r) \asymp \frac{1}{(n+1)^r \ln(n+1)}$.

Следствие. *Пусть $r \in \mathbf{N}$. Существует функция $g_r \in C \setminus W_1^{(r-1)}$ такая, что $E_n(g_r) = E_n(f_r)$ при всех $n \in \mathbf{Z}_+$.*

Задача о возможности описания класса функций $W \subset C$ посредством наилучших приближений (н.п.) допускает следующую формализацию: если для любой фиксированной $\alpha \in \Lambda$ из того, что существует некоторая функция $f \in E(\alpha) \cap W$, вытекает, что $E(\alpha) \subset W$, то класс W описывается в терминах н.п., в противном случае нет. В силу классических результатов С.Н.Бернштейна, Д.Джексона, Ш.Валле-Пуссена класс функций $W_\alpha^{(r)}$ при $0 < \alpha < 1$ допускает описание в терминах н.п. Из следствия 1 вытекает, что классы $C^{(r)}$ и $W_1^{(r)}$ в терминах н.п. не описываются.

Н. Ш. Загиров (Махачкала)

О ПОРЯДКЕ РОСТА ПОЛИНОМОВ

Пусть P_n — множество алгебрических полиномов степени не выше чем n; для множества E и функции f, определенной на E

$$\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}, \|f\| = \|f\|_{[-1,1]}.$$

Положим (для $E \subset [-1,1], a \notin [-1,1]$)

$$W_n(E) = \sup\{\|p\|/\|p\|_E : p \in P_n, p \neq 0\},$$

$$V_n(E) = \sup\{p(a)/\|p\|_E : p \in P_n, p \neq 0\}.$$

Мы хотим получить оценки роста величин $W_n(E)$ и $V_n(E)$. Отметим некоторые известные оценки величины $W_n(E)$: для случая, когда E имеет положительную меру см., например [1], для равноотстоящих точек см. [2]. Очевидно

$$V_n(E) \leq W_n(E)|T_n(a)|,$$

где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева со старшим коэффициентом 2^{n-1}. В дальнейшем считаем, что $E = E_n \subset [-1,1]$, $\{-1,1\} \subset E$. Положим

$$\rho_n = \rho_n(E_n) = \max_{|x|\leq 1} \inf\{|x-y| : y \in E_n\}.$$

Ранее автором доказано [3], что для $\rho_n n^2 \leq c_1$ справедлива оценка $W_n(E) \leq c_2$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если $n\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$, то*

$$V_n(E) \leq c_0 \exp(c_1 \rho n^2)|T_n(a)|, \; W_n(E) \leq c_2 \exp(c_3 \rho n^2),$$

где c_i — абсолютные постоянные. Оценки в смысле порядка степени являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов А.-Р.К. *Об аналогах неравенства Стечкина-Ульянова для полиномов.*- Алгебра и анализ. Казань, 1997, с.177.

2. Шарапудинов И.И. *Об ограниченности в $C[-1,1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье-Чебышева.*// Матем. сб., 1996. Т.187, N1. С.143-160.

3. Загиров Н.Ш. *Об одной оценке роста алгебрических полиномов.*- Алгебра и анализ. Казань, 1997, с.95.

О. К. Иванова (Москва)

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

1. Фиксируем произвольное $k, 1 \le k \le N$ и обозначим: $J = J_k = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\} = \Delta$; Ω_J — произвольное (не пустое) открытое множество, $\Omega_J \subset T^k = \{x = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}) : -\pi \le x_{j_s} < \pi, s = 1, \dots, k\}$. Положим $W_J = \Omega_J \times [-\pi, \pi)^{N-k}$, $W_k^0 = \bigcap_{J_k \subset \Delta} W_J$, и, предполагая (при $k \ge 2$), что $W_k^0 \ne \emptyset$, $W_k = \bigcup_{J_k \subset \Delta} W_J$. Будем говорить, что множество $\mathbf{U}$ обладает свойством B_k, если существует множество W_k такое, что $\mu(W_k \setminus \mathbf{U}) = 0$ (μ-мера).

2. Пусть $\mathbf{U}$ — произвольное измеримое множество, $\mathbf{U} \subset T^N$, $N \ge 1$, $\mu\mathbf{U} > 0$. В работах И.Л.Блошанского [1], [2] была введена и исследована слабая обобщенная локализация п.в. (СОЛ), т.е. вопрос о сходимости п.в. на каких-либо подмножествах $\mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}$, $\mu\mathbf{U}_1 > 0$, кратных тригонометрических рядов Фурье, суммируемых по прямоугольникам, функций, равных нулю на $\mathbf{U}$. В частности, были найдены критерии (в терминах B_1 и B_2 свойств множества $\mathbf{U}$) справедливости СОЛ в классах L_p, $p \ge 1$.

3. Нами исследуется вопрос о справедливости СОЛ в классах "лежащих между" L_1 и L_p, $p > 1$. В частности, доказан следующий критерий СОЛ в классе $L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^N)$ при $N \ge 2$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{U}$ *— произвольное измеримое множество,* $\mathbf{U} \subset T^N$, $0 < \mu\mathbf{U} < (2\pi)^N$, $N \ge 2$, $\mathbf{U} = T^N \setminus \mathbf{U}$, *и пусть* $\mathbf{U}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\mu(\mathbf{B} \setminus \overline{\mathrm{int}(\mathbf{B})}) = 0, \quad \mu_2 \mathrm{Fr}\, \mathrm{pr}_{(J_2)}\{\mathrm{int}(\mathbf{B})\} = 0 \quad \text{для всех наборов } J_2 \subset \Delta \tag{1}$$

(μ_2 *— мера на плоскости). Тогда на множестве* $\mathbf{U}$ *в классе* $L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^N)$ *справедлива СОЛ тогда и только тогда, когда оно обладает свойством* B_2.

Заметим, что достаточность в теореме доказана нами без ограничений (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00332), а также *при поддержке РФФИ, проект поддержки научных школ (грант 96-15-96073).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И. Л. //Докл. АН СССР.–1983.–Т. 271.– No 6.–С. 1294–1298.

2. Блошанский И. Л. //Изв. АН СССР. Серия матем.–1989.–Т. 53.– No 4.–С. 675–707.

М. Ю. Игнатьев (Саратов)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОСБЕННОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $D \subset C$- звездная относительно 0 область, α - вещественное число. Через $A(D)$ обозначим пространство функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах, через $A_k(D)$, $k \in N$ обозначим пространство функций вида $z^k f$, $f \in A(D)$ Орcделим оператор I^α следующим образом:

$$I^\alpha f(x) = \int_0^1 \frac{ln^{\alpha-1}(1/\tau)}{\Gamma(\alpha)} f(z\tau)d\tau, \quad \alpha > 0; \quad I^{-1}f(z) = \frac{d}{dz}(zf(z));$$

$$I^{-n}f(z) = (I^{-1})^n, \quad n \in N \quad I^\alpha = I^{\alpha-[\alpha]}I^{[\alpha]}, \quad \alpha < 0, \quad I^0 = E,$$

E - тождественный оператор. Рассмотрим в $A(D)$ оператор вида:

$$L = I^{-\alpha}(E + H + I^{\sigma+1}Q), \quad Qf(z) = \int_0^1 Q(z,\tau)f(z\tau)d\tau, \quad Hf(z) = \int_0^1 H(\tau)f(z\tau)d\tau \quad (1)$$

где $Q(z,\tau)$ аналитична по z в D при каждом фиксированном τ, суммируемая по τ при каждом фиксированном $z \in D$, $\sigma > 0$.

Будем говорить, что D удовлетворяет условию $R(\gamma)$, $0 < \gamma < \Pi/2$, если вместе с каждой точкой z она содержит все точки вида

$$zexp(it)exp(-tctg\gamma)_{t\in(0,+\infty)} \quad zexp(-it)exp(-tctg\gamma)_{t\in(0,+\infty)}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 2$, D - область, удовлетворяющая условию $R(\gamma)$ для некоторого $\gamma \in (\Pi/2 - \Pi/\alpha, \Pi/2)$, L- оператор вида (1), $Q(z,\tau)$ аналитична по z в D, и существует $p > 1$ такое, что для каждого $z \in D$ $Q(z,\tau) \in L_p[0,1]$ как функция τ и для любой области D', такой, что $\bar{D}' \subseteq D$:*

$$\sup_{z\in D'} \|Q(z,\tau)\|_{L_p[0,1]} < \infty;$$

пусть функция $H(\tau)$ допускает представление вида:$H(\tau) = H_1(\ln 1/\tau)$, где $H_1(\tau)$ функция аналитическая в области $S_\alpha = \{z : |\arg z| < \Pi/2 + \Pi/\alpha\}$ и существуют такие $\epsilon > 0$, $\beta > 1$, $\beta > \epsilon$, что справедлива оценка:

$$|H_1(t)| \le C(|t|^{\epsilon-1} + |t|^{\beta-1}) \quad \forall t \in S_\alpha.$$

. Тогда найдется такое $n \in N$, что оператор L линейно эквивалентен в пространстве $A_n(D')$ для любой звездной области $D' \subseteq D$ оператору L_0 :

$$L_0 = I^{-\alpha}(E + H + I^{\sigma+1}Q_1) \quad \text{где} \quad Q_1 f(z) = \int_0^1 Q(0,\tau)f(z\tau)d\tau.$$

Н. А. Ильясов (Баку)

О порядке равномерной сходимости рядов Фурье периодических функций из классов $H_p^l[\omega]$

Рассматривается задача о точном порядке уклонения в равномерной метрике частных сумм рядов Фурье на классе 2π-периодических функций с заданной мажорантой L_p- модуля гладкости l-ого порядка . Для заданных чисел $1<p<\infty$, $l\in N$ и функции $\omega\in\Omega_l$ обозначим $H_p^l[\omega]=\{f\in L_p\,;\,\omega_l(f;\delta)_p\le\omega(\delta),\,\delta\in(0,\pi]\}$, где Ω_l - класс функций $\omega(\delta)$, определённых на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow 0(\delta\downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$.

Теорема. Пусть $1<p<\infty$, $f\in L_p$, $l\in N$, $r\in Z_+$, $l>\sigma=r+1/p$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega_l(f;\pi/n)_p<\infty;$$

тогда f эквивалентна некоторой функции $g\in C_{2\pi}^r$ (- класс функций , имеющих непрерывную r - ую производную) и справедлива оценка ($n\in N$)

$$\left\|g^{(r)}-S_n^{(r)}(f)\right\|_C\le C(l,r,p)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_l(f;\tfrac{\pi}{\nu})_p\ ,$$

где $\|\psi\|_C=\max\{|\psi(x)|;\,x\in[-\pi,\pi]\}$, $S_n(f;x)$- частная сумма порядка n ряда Фурье функции f.

Последняя оценка является точной в смысле порядка на классе функций $H_p^l[\omega]$:

$$\sup\left\{\left\|g^{(r)}-S_n^{(r)}(f)\right\|_C;\,f\in H_p^l[\omega]\right\}\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$$

при условии сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\sigma-1}\omega(\frac{\pi}{n})<\infty$, которое необходимо и достаточно для того , чтобы всякая функция $f\in H_p^l[\omega]$ была эквивалентна некоторой функции $g\in C_{2\pi}^r$.

Сформулированная теорема является обобщением и уточнением известных результатов П. Л. Ульянова [1] (теорема 5, с.208).

Литература

1. Ульянов П. Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем.сборник.-1967-Т.72(114) - №2 - с.193 - 225

Б.Ж. ИЩАНОВ (ОБНИНСК) [1]

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТИПА ЛЕРЕ ДЛЯ К-ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $C^n = \{z = (z_1 = x_1 + ix_{n+1}, ..., z_n = x_n + ix_{2n})\}$ — n-мерное комплексное пространство ($n \geq 1$). Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с неотрицательными целыми координатами положим

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \; z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial x_{j+n}}\right), \overline{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial \overline{z}_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial \overline{z}_n)^{\alpha_n}}, j = 1, ..., n.$$

Функцию g будем называть k-полианалитической на открытом множестве $G \subset C^n$ $(n, k \geq 1)$, если $g \in C^k(G)$ и $\overline{D}^\alpha g(z) = 0$ для всех $z \in G$ и всех α с $|\alpha| = k$. Класс k-полианалитических функций в G будем обозначать через $A_k(G)$. Как обычно $\langle \zeta, z \rangle = z_1\overline{\zeta}_1 + ... + z_n\overline{\zeta}_n$, и dm^{2n} — 2n мерная лебегова мера. Пусть B=B(z,r) — открытый шар в G, h(t) неотрицательна при $t > 0$. Положим

$$R_k(f, B) := inf\{\int_B |f(y) - g(y)| dm^{2n}(y) : g \in A_k(B)\},$$

и обозначим через $U_k(h(t), G)$ класс функций $\{f\}$, для которых величина выражения sup $R_k(f, B)$ имеет порядок малости O(h(t)) при $t \to 0$, где супремумы берутся по всем $B(x, t) \subset \overline{B}(x, t) \subset G$. Пусть теперь h(t) неотрицательна и не убывает при $t > 0$. Внешней хаусдорфовой h-мерой множества $E \subset C^n$ называется величина

$$mes_h(E) = \lim_{\epsilon \to 0} mes_h(\epsilon, E), \; mes_h(\epsilon, E) = inf[\sum_k h(r_k)],$$

где r_k - радиусы шаров B_k, образующих конечное или счетное покрытие множества E, а инфимум берется по всем таким покрытиям, что $r_k \leq \epsilon$. Всюду ниже G — открытое ограниченное множество в C^n с границей E_1, множество $E_2 \subset G$ замкнуто в G, $E = E_1 \cup E_2$, f определена всюду в C^n, принадлежит $A_k(C^n \setminus E)$ и равна нулю на $C^n \setminus G$, функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ неотрицательны и не убывают при $t > 0$, и $mes_{h_p}(E) < \infty$ (p=1,2); через f_α при $|\alpha| > 0$ обозначаем функцию, совпадающую с $\overline{D}^\alpha f$ на $C^n \setminus E$ и равную нулю на E, а при $\alpha = (0, ..., 0)$ — функцию, совпадающую с f всюду в C^n.

Теорема. *Если $f_\alpha \in U_1(th_1(t), C^n) \cap U_1(th_2(t), G)$ при $0 \leq |\alpha| \leq k-1$, то в $G \setminus E_2$ справедливо следующее представление*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \int_{E_1} \frac{(\overline{z} - \overline{\zeta})^\alpha \Phi_j^u(\zeta)}{\langle \zeta - z, u(\zeta) \rangle^n} \lambda_{\alpha,j}(\zeta) dmes_{h_1}(\zeta)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \int_{E_2} \frac{(\overline{z} - \overline{\zeta})^\alpha \Phi_j^u(\zeta)}{\langle \zeta - z, u(\zeta) \rangle^n} \lambda_{\alpha,j}(\zeta) dmes_{h_2}(\zeta),$$

где $u = (u_1, ..., u_n) : E \to C^n$ есть любое такое C^1 отображение, что $\langle \zeta - z, u(\zeta) \rangle \neq 0$ $\forall \zeta \in E$ и $\forall z \in G \setminus E_2$, $\lambda_{\alpha,j}$ — некоторые ограниченные борелевские функции на E, а

$$\Phi_j^u(\zeta) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \overline{u}_l \frac{\partial(\overline{u}_1, ..., \overline{u}_{l-1}, \overline{u}_{l+1}, ..., \overline{u}_n)}{\partial(\overline{\zeta}_1, ..., \overline{\zeta}_{j-1}, \overline{\zeta}_{j+1}, ..., \overline{\zeta}_n)}.$$

[1] Эта работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 96-01-01366

С. Г. Кальней (Москва)

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ЯКОБИ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Известно (см.[1]), что сходимость в точке Лебега $x = 1$ чезаровских средних (C, γ) ряда Фурье-Якоби интегрируемой функции зависит, вообще говоря, от поведения функции (скорости стремления ее к бесконечности) в противоположной точке $x = -1$ (такие условия на функцию в окрестности точки $x = -1$ называют антиполярными). Доказанное для (C, γ) в [1] антиполярное условие состоит в требовании интегрируемости функции $(1+x)^{\delta} f(x)$ на $(-1, 0)$ при некотором δ, не зависящем от порядка γ. В частном случае рядов Лежандра Е.Когбетлянц для средних Чезаро получил антиполярное условие отмеченного вида, где δ зависит от γ. В работах [2],[3] рассматривались произвольные методы суммирования, определяемые треугольными матрицами $\Lambda = \{\lambda_m^{(n)}\}$ $(\lambda_m^{(n)} = 0$ при $m \geq n+1)$. Найденное в них антиполярное условие состояло в том, что функция f должна быть итегрирусма в окрестности точки $x = -1$ со степенью p, зависящей от метода суммирования.

В данной работе получено условие, аналогичное условию Когбетлянца для линейных средних

$$\tau_n^{(\alpha,f)}(f, x; \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m^{(n)} a_m p_m^{(\alpha,\beta)}(x),$$

где a_m - коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе многочленов Якоби $p_m^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Теорема. *Пусть* $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$ *и ограниченная матрица* Λ *удовлетворяет условиям*

(a) $\lambda_0^{(n)} \to 1, n \to \infty$; () $\sum_{m=0}^{n} (m+1)^{\frac{1}{2}+\alpha} |\Delta^2 \lambda_m| \leq C n^{-\delta}, 0 < \delta < \frac{1}{2} + \beta$,
() $\sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} |\Delta^2 \lambda_m| \leq C$.

Если

$$\int_{1-h}^{1} |f(x) - f(1)|\, dx \to 0, h \to 0, \text{ и } (1+x)^{\frac{2\beta+2\delta-1}{4}} |f(x)| \in L(-1, 0),$$

то

$$\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1; \Lambda) \to f(1), \quad n \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеге Г.*Ортогональные многочлены.* Москва: ГИФМЛ, 1962.-500с.
2. Кальней С. Г. *Суммируемость рядов Якоби треугольными матрицами* // Матем.заметки.-1983. т.34,No 1. С.91 103.
3. Кальней С. Г. *О сходимости линейных средних рядов Якоби в точках Лебега*//Современные методы теории функций и смежпроблемы: Тезисы докладов школы. -Воронеж,ВГУ.-1997.- С.82.

В.В.Карелин (Санкт-Петербург)

ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ.

Задача безусловной оптимизации, к которой сводится задача условной оптимизации с ограничениями методом точных штрафных функций (МТШФ), оказывается обычно негладкой. Установленное в [1] достаточное условие для применения МТШФ может быть обобщено на случай задач оптимального управления. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Требуется найти

$$\min_{u \in \mathbf{V}} J(u) = \int_0^T F(x(t,u))dt, \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{P}[0,T]$ - класс n - мерных кусочно непрерывных на [0,T] функций. Рассмотрим множество

$$\Omega = \{[z,u] | z \in \mathbf{P}[0,T], u \in \mathbf{P}[0,T] : \varphi(z,u) = 0\}, \tag{3}$$

где

$$\varphi(z,u) = \left[\int_0^T \left(z(t) - f(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, u(t), t)\right)^2 dt\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Заметим, что $\varphi(z,u) \geq 0 \ \forall z, u \in \mathbf{P}[0,T]$. Если $z, u \in \Omega$, то функция $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$ удовлетворяет (1), и наоборот. Таким образом, задача разыскания решения системы (1) для некоторого $u \in \mathbf{V}$ эквивалентны нахождению $z \in \mathbf{P}[0,T]$ такого,что $\varphi(z,u) = 0$. Показывается,что функция φ удовлетворяет достаточному условию из [1] и поэтому возможно сведение задачи (2) к задаче оптимизации на множестве $\mathbf{P}[0,T] \times \mathbf{V}$ некоторой точной штрафной функции.

Установлена субдифференцируемость функционала φ , сформулированы необходимые условия оптимальности, получена связь с функцией и множителями Лагранжа.

Работа поддержана РФФИ, грант N 97-01-00499

ЛИТЕРАТУРА

1. Di Pillo G., Grippo L., "On the Exactness of a class of Nondifferentiable Penalty functions". J. Optim. Theory Appl. v. 57, pp. 397-408, 1988.

Д. С. Каримов(Караганда)

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТРЕЗКИ И ТЕОРЕМА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ РЯДОВ УОЛША

Хорошо известна теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов в пространстве Лебега. Этот результат для пространства Лоренца и более широкого класса - симметрических пространств доказан Е.М.Семеновым, В.А.Родиным, А.В. Гулисашвили. Для системы Уолша в пространстве L_p теорема Харди-Литтлвуда доказана Ф.Морицом.

Нами получена теорема Харди-Литтлвуда для системы Уолша в пространстве Лоренца, где условие монотонности заменено более слабым условием.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - система Уолша. Операция $*$ означает групповую операцию, соответствующую системе Уолша.

Всякую конечную арифметическую прогрессию в $\mathbf{Z}$ с шагом 1 назовем отрезком в $\mathbf{Z}$. Если Δ - отрезок в $\mathbf{Z}$, $\mathbf{d} \in \mathbf{N}$, $|\mathbf{\Delta}| < \mathbf{d}$(здесь $|\Delta|$ - количество элементов в отрезке Δ), то множество $B = \cup_{k=0}^{N-1}(\Delta * kd) = \{s * kd \in \mathbf{Z} : \mathbf{s} \in \mathbf{\Delta}, \mathbf{0} \le \mathbf{k} \le \mathbf{N-1}\}$ назовем гармоническим отрезком, относительно групповой операции $*$, в $\mathbf{Z}$. Пусть W_0 - множество всех гармонических отрезков из $\mathbf{Z}$.

Аналогично определяется гармонический отрезок в $[0,1)$. Для $q \subset [0,1), d \in R_+, k \in N$ это есть множество $Q = \cup_{m=0}^{k-1}(q * dm)$, где $|q| < d$, $dk < 1$. Пусть M_0 - множество всех гармонических отрезков из $[0,1)$.

Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет доминирующие гармонические осциляции, если $a_k^* \le c\bar{a}_k(M_0)$, где $\bar{a}_k(M_0) = \sup_{e\in M_0, |e|\ge k} \frac{1}{|e|}\left|q\sum_{m\in e} a_m\right|$.

Если $f^*(t) \le c\bar{f}(t, W_0)$, где $\bar{f}(t, W_0) = \sup_{e\in W_0, |e|>t} \frac{1}{|e|}\left|\int_e f(t)\, d\mu\right|$, то функция f имеет доминирующие гармонические осциляции.

Замечание. Если у функции f коэффициенты монотонны, то они имеют доминирующие гармонические осциляции. Обратное не верно.

Теорема *Пусть* $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k$.

а) Если $1 < p < 2$ *и функция* f *имеет доминирующие гармонические осциляции, то для того, чтобы* $f \in L_{pq}$ *необходимо и достаточно* $a_k \in l_{p'q}$.

б) Если $2 < p < \infty$ *и коэффициенты Фурье функции* f *имеют доминирующие гармонические осциляции, то для того, чтобы* $f \in L_{pq}$ *необходимо и достаточно* $a_k \in l_{p'q}$.

Л. В. Карташева, Т. Н. Радченко (Ростов-на-Дону)

О НЕКОТОРЫХ НАГРУЖЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ОБРАЩАЮЩИМСЯ В НУЛЬ СИМВОЛОМ.

В работе рассматривается сингулярный интегральный оператор вида

$$A\varphi \equiv (t-t_0)^n\left[a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+(k\varphi)(t)=f(t),$$

где $t_0\in\Gamma$, $a(t)\pm b(t)\neq 0$ Γ,

$$A: H_\lambda \longrightarrow H_\lambda(n,t_0)=\left\{f(t)\,:\,f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{\{k\}}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k+(t-t_0)^n g(t)\right\},$$

$$f^{\{m\}}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{\{k\}}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k}{(t-t_0)^m}$$

Доказано, что если оператор k имеет вид

$(k\varphi)(t)=\int\limits_\Gamma K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ и $K(t,\tau)\in H_\lambda(n,t_0)\times H_\lambda(n,t_0)$

то оператор $A\,:\,H_\lambda\longrightarrow H_\lambda(n,t_0)$

Φ – оператор и его индекс $æ(A)=ind\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}-n.$

В данной работе рассматривается оператор k трех видов:

$(k\varphi)(t)\equiv c(t)\varphi(t_0),\quad t_0\in\Gamma \qquad (1)$

$(k\varphi)(t)\equiv c(t)\varphi(t_1),\quad t_1\in\Gamma,\quad t_0\neq t_1 \qquad (2)$

$(k\varphi)\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{K(t,\tau)}{\tau-t_0}\,d\tau \qquad (3)$

Показано, что оператор А с операторами вида (1)–(3) так же является Φ - оператором и индекс его сохраняется. Особое внимание в работе уделяется вопросам разрешимости неоднородных уравнений: $A\varphi=f$

Доказано, что если оператор К имеет вид(1),(3), то оператор А нетеров по отношению к союзному оператору, действующему из пространства обобщенных функций $P_\lambda(n+1,t_0)=\left\{\Psi(t)\,:\,\Psi(t)=\frac{y(t)}{(t-t_0)^{n+1}}+\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\delta^{(k)}(t-t_0)\right\}$ в пространство обобщенных функций $P_\lambda(1,t_0)$. Оператор союзный оператору А (если А содержит k вида (2))действует из

$$P_\lambda(n,t_0;1,t_1)=\left\{\Psi(t)\,:\,\Psi(t)=\frac{y(t)}{(t-t_0)^n(t-t_1)}+\sum_{k=0}^{n-1}c_k\delta^{(k)}(t-t_0)+c_n\delta(t-t_1)\right\}$$

в $P_\lambda(1,t_1)$

А. В. Каспиров, Г. В. Савилов (Саратов)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В условиях перехода к рыночным отношениям в полностью дезагрегированной экономике России остро возникает вопрос математического моделирования экономических процессов. Важнейшим условием моделирования является адекватность математических моделей реальной ситуации. За последнее время успешно себя зарекомендовали, принося практический эффект, некоторые математические модели. Среди них такие как класс моделей линейного программирования типа задач о раскрое, о рационе, транспортной задачи и других. Наиболее близка к существующему состоянию России модель общего равновесия Вальраса, которая в дальнейшем трансформировалась в модель динамического равновесия Неймана. Указанные модели описывают экономику в целом. Для описания отдельных компонентов (объектов) экономики целесообразно применить математический аппарат теории массового обслуживания. Упрощенный аппарат уже используется для моделирования некоторых экономических процессов. Однако упрощенный вариант имеет ограниченное применение и низкую степень правдоподобия. Поэтому объективно возникает необходимость применения более сложных моделей теории массового обслуживания. В настоящее время имеется большой парк быстродействующей вычислительной техники, позволяющей достаточно оперативно производить расчеты по сложным математическим моделям. На рассмотрение предлагается математическая модель в виде двухфазной системы массового обслуживания с ожиданием и блокировкой по первой фазе, которая позволяет априорно оценивать эффективность деятельности и оптимизацию построения коммерческих структур на этапе их проектирования. Использование такой модели снижает степень риска организаторов коммерческой деятельности, поскольку позволяет отойти от традиционного экспериментального статистического метода оценок деятельности.

И. Р. Каюмов (Казань)

ОБТЕКАНИЕ ОДНОЛИСТНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ АТАКИ

В [1] была поставлена следующая экстремальная задача. Пусть дано течение идеальной несжимаемой жидкости с постоянной скоростью на бесконечности. При заданном угле атаки найти однолистный профиль, максимум скорости течения на котором был бы минимальным в классе всех однолистных профилей, внешний конформный радиус которых фиксирован.

Ф.Г. Авхадиев и А.М. Елизаров [1] показали, что вышеописанная задача эквивалентна следующей:

$$\sup_{|\zeta|>1}\left|\frac{(1-\frac{1}{\zeta})(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta})}{F'(\zeta)}\right| \to \min_{F\in\Sigma} = M(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

В этом неравенстве $\alpha/2$ — теоретический угол атаки.

В [1] было показано, что $M(\alpha) \le 1 + 2\alpha + o(\alpha)$. Мы доказываем, что

$$M(\alpha) \le 1 + \frac{\pi}{2}\alpha + o(\alpha).$$

Работа поддержана РФФИ, грант N 96-01-00123.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М., Фокин Д. А. *Максимизация критического числа Маха для несущих крыловых профилей* // Препринт N 94-1 НИИ мат. и мех. им. Н.Г.Чеботарева. –Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. 53 с.

А. А. Кельзон(Санкт-Петербург)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ (m, Φ)–ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В излагаемой работе продолжается исследование свойств функций (m, Φ)–ограниченной вариации,начатое в работах [1],[2].

Через ΦBV_m(m—фиксированное натуральное число) обозначим семейство измеримых функций f,заданных на отрезке $[a, b]$ и таких, что cf является функцией (m, Φ)–ограниченной вариации на этом отрезке при некотором $c > 0$.

Сформулируем один из результатов, являющийся аналогом принципа выбора Хелли.

Теорема. *Если для последовательности функций $\{f_n\} \subset \Phi BV_m$ существует $c > 0$ и $M <\infty$ такие, что $|cf_n(x)| < M$ для всех натуральных n и $x \in [a, b]$ и $V_{m,\Phi}(cf) < M$ для всех n, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ и функция $f \in \Phi BV_m$ такая, что $f_{n_k}(x) \to f(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $V_{m,\Phi}(cf) <= M$*

Эта теорема обобщает результат М.Шрамма [3], полученный им для случая $m =$ 1.

ЛИТЕРАТУРА

1.Кельзон А. А О функциях (m, Φ)–ограниченной вариации. //ДАН СССР.-1991.-Т.321.-No-4.-С.- 670–672.

2.Кельзон А. А.Функции (m, Φ)–ограниченной вариации и сходимость рядов Фурье//Изв.вузов. Математика. -1994. -No-8. -С. -29–38.

3.Schramm M. Functions of Φ– bounded variation and Riemann–Stieltjes integration //Trans. Amer. Math. Soc. -1985. -V.287. -No 1. -P. 49-63

В.В. Кожевников (Краснодар)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ, КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИЙ

Теорема. *Пусть A обозначает объединение конечного числа замкнутых или разомкнутых жордановых дуг конечной длины, произвольно расположенных в конечной w-плоскости. Каждая дуга из множества A должна принадлежать классу C^1, и если эта дуга разомкнута, она обязана иметь концевые предельные направления на обоих своих концах. Условимся считать, что на множестве A установлен порядок и определено направление обхода дуг, составляющих множество A. Пусть на множестве A задана функция $p(\xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) как функция комплексной переменной $p(\xi)$ интегрируема на любой дуге, входящей в состав множества A;

2) в точках множества A, там где $p(\xi) \neq 0$

$$Re\frac{e^{i\psi(\xi)}}{p(\xi)} > 0, \tag{1}$$

здесь $\psi(\xi) = (arg\ d\xi)(\xi)$, $d\xi$ – элемент касательной к соответствующей дуге множества A, взятый в точке ξ и имеющий направление, согласованное с обходом множества A;

3) в точках ξ множества A функция $p(\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$|p(\xi)| \le C \cdot \left|1 + e^{2i(arg\ p(\xi) - \psi(\xi))}\right|, \tag{2}$$

C – некоторая положительная постоянная.

В этих предположениях в дополнении ко множеству A существует однолистная кусочно-аналитическая вариация $v(w, \tau)$, аналитическая во всякой связной части этого дополнения, для которой на любом замкнутом подмножестве E из дополнения ко множеству A при достаточно малых $\tau, 0 < \tau < \tau^*$, выполняется равномерная[1] оценка

$$v(w, \tau) = w + \tau \int\limits_A \frac{p(\xi)}{\xi - w} d\xi + o(\tau), \quad \tau \to 0, \tag{3}$$

здесь интегрирование осуществляется в направлении установленного обхода множества A, а остаточный член $o(\tau)$ представляет собой функцию комплексной переменной w, регулярную на бесконечности.

Бесконечно малая $o(1)$, входящая в остаточный член формулы (3), имеет положительную бесконечно малую при $\tau \to 0$ мажоранту, которая также как и величина τ^*, монотонно зависит от конечного набора некоторых вещественных числовых и функциональных характеристик функции $p(\xi)$, множества E и гладких дуг, составляющих множество A.

[1]Имеется в виду, что бесконечно малая $o(1)$, входящая в остаточный член $o(\tau)$, равномерно по переменной w стремится к нулю при $\tau \to 0$ на произвольном замкнутом подмножестве E из дополнения ко множеству A

Колдаев Р.В.(Саратов)

Об одном интерполяционном процессе Лагранжа-Штурма-Лиувилля

Рассмотрим интерполяционный процесс:

$$L_m^{SL_n}(f,x) = \sum_{k=-m}^{m} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_k,n)(x-x_{k,n})}$$

где$x_{n,k} = \pi k/n, k \in \mathbf{Z}$ и $U_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ В выражении (1) $x \in R$.Фундаментальные по: номы Лагранжа равны:

$$l_{k,n}^{sl_n}(f,x) = \frac{U_n(x)}{U_n'(x_k,n)(x-x_{k,n})} = \frac{\sin(nx-\pi k)}{nx-\pi k}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Преобразование Фурье $f(x)$ обозначим через $g(y)$: $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}dx$

Теорема1.*Пусть выполнены условия:*

$$1)f(x) \in CL_1(-\infty,+\infty)$$

$$2)g(y)\text{-}финитная\ функция\ и suppg(y) \subset [-n,n]$$

3) *ряд Фурье для$g(y)$равномерно сходится к $g(y)$ на отрезке* $[-n,n]$.

Тогда:

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in(-\infty,+\infty)} |L_m^{SL_n}(f,x) - f(x)| = 0 \quad (3)$$

Лемма.*Система функций (2) ортогональна в* $L_2(-\infty,\infty)$.

Теорема2. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет требованиям:*

$$1)f(x) \quad CL_1(-\infty,+\infty) \cap L_2(-\infty,+\infty)$$

$$2)suppg(y) \subset [-n,n]$$

тогда частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе (2) е: не что иное,как интерполяционный полином (1).

Следствие.*Пусть $f(x)$ $L_2(-\infty,+\infty)$,тогда условия 1)-3) теоремы1 достаточ: чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной в $L_2(-\infty,+\infty)$ системе (2) рав мерно сходился к $f(x)$ на всей числовой прямой.*

В. И. Колпаков (Саратов)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ВОЗМУЩЕНИЕМ В НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

В этой работе решена задача приближенного нахождения решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа с начальными условиями для неограниченной струны (см.[1])

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

для $-\infty < x < \infty, t > 0, a = \mathrm{const} > 0$,

$$u(x,0) - \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

Постановка задачи. Пусть $\varphi \in C^2(R^1), \psi \in C^1(R)$, заданы своими δ-приближениями $\varphi_\delta(x)$ и $\psi_\delta(x)$ в $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, так, что

$$\|\varphi - \varphi_\delta\|_{L_p(-\infty,\infty)} \le \delta, \quad \|\psi - \psi_\delta\|_{L_p(-\infty,\infty)} \le \delta,$$

где δ – погрешность заданной функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в метрике $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \le p \le \infty$.

Требуется восстановить решение исходной задачи (1),(2), т.е. построить приближенное решение, когда вместо точных функций φ и ψ известны их δ-приближения φ_δ и $\psi_\delta \in L_p(-\infty,\infty), 1 \le p \le \infty$, которое стремилось бы к точному при $\delta \to 0+$.
В работе (см.[2,3]) построен регуляризатор и найдено согласование между параметром регуляризации α, и погрешностью δ, при котором регуляризованное решение стремится к точному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* - М. 1977.

2. Колпаков В. И. *приближенные методы восстановления в равномерной метрике функции вместе с ее производными по ее δ-приближению в $L_p[a,b]$.* Автореферат дисс. ... кан. физ.-мат. наук. - Саратов. - 1986.

3. Колпакова Э. В., Колпаков В. И. *Восстановление математических объектов по неполно заданной информации.* - Саратов. - 1996.

Э. В. Колпакова (Саратов)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Постановка задачи. Пусть кривая задана уравнением

$$y = f(x), \quad f \in MN_p^2 = \left\{ f \in C[a,b] : \|f''\|_{L_p[a,b]} \le N_p^2 \right\}, \quad 1 < p \le \infty,$$

то длина ее дуги $l(f)$ равна (см. [1, с.311])

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

где a и b – абциссы концов дуги.

Пусть теперь вместо функции $f \in MN_p^2, 1 < p \le \infty$, известно ее δ-приближение $f_\delta \in C[a,b]$ такое, что $\|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \le \delta$, $0 < \delta \le \delta_0$. Тогда задача вычисления длины дуги становиттся некорректно поставленной задачей и для ее решения надо применять методы решения некорректно поставленных задач.

В работе (см.[2,3]) построен конечномерный регуляризатор, получена оценка погрешности, найдена связь между параметром регуляризации α, шагом сетки h и погрешностью δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1986.

2. Колпаков В. И. *Оптимальный оператор восстановления производной функции на классе $W^2L_p(M,a,b)$.* // Саратов. Политехн. ин-т. – Саратов. – 1988. – 13 с. Деп. в ВИНИТИ 13.01.88. No 182–В88.

3. Колпакова Э. В., Колпаков В. И. *Конечномерная аппроксимация оптимального оператора восстановления первой производной функции.* // Саратов. ин-т мех. сельск. хоз-ва. – Саратов. – 1989. – 42 с. Деп. в ВИНИТИ 25.12.89. No 7648–В89.

А. А. Комаров (Тверь)

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ТЕЙЛОРА

Пусть $f(z)$ аналитическая в единичном круге Δ функция. Ее производная по $\varphi = \arg z$ определяется следующим образом:

$$f'_\varphi(z) = f'(z)\cdot z'_\varphi, \quad \text{где } z = \rho e^{i\varphi}.$$

Обозначим через $S_{n-1}(f;z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ частичную сумму ряда Тейлора аналитической функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $z \in \Delta$.

Рассмотрим задачу об изучении величины

$$U(n;\rho;r) = \sup_{\|f^{(r)}_\varphi\|_{c_1}\le 1} \|f - S_{n-1}(f)\|_{c_\rho},$$

где $\|f\|_{c_\rho} = \sup\limits_{|z|<\rho}|f(z)|$, $0 \le \rho \le 1$ и $f^{(r)}_\varphi(z)$ — производная функции $f(z)$ порядка r по φ.

Имеет место следующая

Теорема. *Для любого* $\rho \in [0;1)$ *и для любых натуральных* n *и* r *выполняется равенство* $U(n;\rho;r) = \frac{\rho^n}{n^r}\left\{\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\left(\rho e^{-\frac{r}{n}}\right)^{2k}}{k} + O(1)\right\}$ *с абсолютной константой в* $O(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теляковский С. А. *Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье*// Мат. заметки. - 1968. - Т. 4. - No 3. - С. 291–300.

Б. В. Коноплёв (Саратов)

О ПЛОТНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Пусть E *в дальнейшем означает на* $[0,1]$ *либо некоторое правильное пространство* измеримых функций [1], либо класс $\varphi(L)$ [2], где четная функция φ *положительна* и неубывает в $(0,+\infty)$, удовлетворяет ω-условию, и $\varphi(0)=\varphi(+0)=0$. В случае, когда φ ограничена, класс $\varphi(L)$ совпадает с $S(0,1)$. Ниже замкнутость и плотность системы функций в E понимаются в смысле метрики, если E пространство, или в смысле квазиметрики класса $\varphi(L)$:

$$\int_0^1 \varphi(f(x)-g(x))dx, \quad f-g\in\varphi(L).$$

Любой рассматриваемый случай E может мыслиться как обобщение пространств Орлича и, в конечном счете, $L^p(0,1)$.

Теорема 1. *Для замкнутости любой системы функций в* $C(0,1)$ *и* E *необходимо,чтобы конечное или счетное множество функций этой системы разделяло точки отрезка* $[0,1]$ *и не исчезало на нем в случае* $C(0,1)$ *; разделяло почти все точки* $[0,1]$ *в случае* E *.*

Условия теоремы 1 являются достаточными для замкнутости систем определенного вида. Для $C(0,1)$ это следует из теоремы Стоуна-Вейерштрасса. Для E справедлива следующая

Теорема 2. *Алгебра существенно ограниченных на* $[0,1]$ *функций плотна в* E *тогда и только тогда, когда она содержит не более чем счетную подсистему функций, разделяющих почти все точки отрезка* $[0,1]$.

Для случая $E=L^2(0,1)$ это теорема Реньи [3].

Если E пространство, то при определенных условиях от требования существенной ограниченности функций системы можно отказаться. Здесь возможна трактовка теорем 1 и 2 в терминах полноты системы, как это делалось нами в [4],[5]. Возможны также дискретные аналоги приведенных теорем.

Из приведенных теорем видно, что незамкнутую систему функций можно сделать замкнутой, дополнив ее всевозможными конечными произведениями ее элементов на манер построения системы Уолша по функциям Радемахера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. и др. *Функциональный анализ (серия СМБ).* М. "Наука", 1972. - С. 92.

2. Ульянов П. Л. *Представление функции рядами и классы* $\varphi(L)$ // УМН - 1972. - 27, No 2. - С.3-52.

3. Rényi A. *On a conjecture of H. Steinhaus*// Roczn. Polskiego Towarz. Mat. --1952. -25. - p.279-287.

4. Коноплёв Б. В. *О полноте систем функций и систем ортогональных многочленов*//Anal. Math. - 1981. - 7, No 4. - С.239-256.

5. Konoplev B. V. *On incomplete systems of functions*// В кн.: "Научн. матем. чт. памяти М. Я. Суслина" Тез. конф. - Саратов, 1994. С.11.

О. Е. Королева, В. Г. Шеретов (Тверь)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЛОЩАДЕЙ К КЛАССАМ ПАР P-ЛИСТНЫХ K-КВАЗИКОНФОРМНЫХ ФУНКЦИЙ БЕЗ ОБЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

Элементами класса $M_p^k(R,0,\infty)$ *назовем* пары (F_1, F_2) p-листных k-квазиконформных функций в единичном круге Δ, имеющих в меньшем круге $\Delta_R = \{z : |z| < R\}$ либо в $\Delta_R \backslash \{0\}$ разложения

$$F_\nu(z) = b_q^{(\nu)} z^q + b_{q+1}^{(\nu)} z^{q+1} + \dots,$$

где $q = (-1)^{\nu-1} p$, $\nu = 1, 2$, и таких, что $F_1(\Delta) \cap F_2(\Delta) = \emptyset$.

Теорема. *Пусть* $(F_1, F_2) \in M_p^k(R, 0, \infty)$ *и* $\ln \frac{F_\nu(z)}{b_q^{(\nu)} z^q} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\nu)} z^n$, $\nu = 1, 2$, *в круге* Δ_R *для подходящей ветви логарифма. Тогда выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} &- \tfrac{2k^2}{1+k^2} \ln R - \tfrac{4pk^2}{1+k^2} \ln |b_p^{(1)}/b_{-p}^{(2)}| + \tfrac{1-k^2}{1+k^2} \cdot \frac{\left|\ln\left(b_p^{(1)}/b_{-p}^{(2)}\right)\right|^2}{2 \ln R} \geq \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu R^{2\nu} \left(|\alpha_\nu^{(1)}|^2 + |\alpha_\nu^{(1)}|^2 \right) \left(\tfrac{1-k^2}{1+k^2} \cdot \tfrac{1+R^{4\nu}}{1-R^{4\nu}} + 1 \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Как следствие получаются точные оценки

$$R^{4pk/(1-k)} \leq |b_p^{(1)}/b_{-p}^{(2)}| \leq R^{-4pk/(1+k)}.$$

В докладе обсуждаются также применения неравенства (1) к классам $C_{p,s}^k(R, a_1, a_2)$ пар (f_1, f_2) p-листных и k- квазиконформных функций в Δ, имеющих в Δ_R разложения

$$f_\nu(z) = a_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\nu)} z^n, \quad \nu = 1, 2,$$

и удовлетворяющих при заданном $s \in R$ условиям $f_1(z_1) \neq e^{\frac{2\pi i}{s}} f_2(z_2)$ для любой пары $(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta$. Специализация приводит к основным результатам работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандик В. П., Никульшина М. Н. *О регулярных функциях, не принимающих некоторые значения*// Экстремальные задачи теории функций. Томск:ТГУ. - 1980. - С. 66-77.

Костин В. В. (Москва)

МАРТИНГАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В СМЫСЛЕ А-ИНТЕГРАЛА В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Важную роль при изучении ортогональных рядов по некоторым классическим системам (системы Хаара, Уолша и др.) играет то обстоятельство, что для таких рядов последовательность частных сумм или некоторая ее подпоследовательность образуют мартингал. А именно, ряд по любой из вышеперечисленных систем является рядом Фурье некоторой функции f тогда и только тогда, когда соответствующая мартингальная последовательность (м.п.) частных сумм замкнута справа последним элементом f. Таким образом, получение новых достаточных условиий замкнутости справа м.п. приводит к новым критериям принадлежности указанных рядов к классу рядов Фурье.

Часто приходится иметь дело с представлением рядами сильно осциллирующих функций, интегрируемых лишь в смысле неабсолютных интегралов. Одним из таких интегралов является A-интеграл [1]. В смысле этого интеграла можно обобщить понятия мартингала, замкнутости справа м.п., ряда Фурье.

В этой работе получены следующие достаточные условия замкнутости справа м.п.:

Теорема. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n; n=1,2,\ldots\}$ *— м.п., сходящаяся по мере к случайной величине* X_∞ *и удовлетворяющая следующему условию:*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists C_\varepsilon \quad \forall C\geq C_\varepsilon \quad \exists N_C \quad \forall n\geq N_C \quad P\{|X_n|>C\}<\varepsilon$$

Тогда X_∞ *на каждом* $B\in\cup_n\mathcal{F}_n$ *A-интегрируема и является последним элементом м.п.* $\{X_n,\mathcal{F}_n\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists C_\varepsilon \quad \forall C\geq C_\varepsilon \quad \exists N_C \quad \forall n\geq N_C \quad \left|\int\limits_{B\cap\{|X_n|>C\}} X_n dP\right|<\varepsilon$$

Приводится также пример, доказывающий, что эта теорема дает существенно более общие достаточные условия замкнутости м.п. справа, чем теорема из [2], сформулированная в терминах равномерной -интегрируемости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-00332)

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* М.: Физматгиз, 1961, с.585-586.

2. Скворцов В.А. *Мартингальные последовательности в теории ортогональных рядов.* - В сб.:Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. М.:ТВП, 1996 г., с.151-152.

Г. Г. Кошелева (Москва)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ВАТЕРМАНА

Введем некоторые обозначения. Пусть Z - это множество всех целых чисел, $T = [-\pi, \pi)$. Все рассматриваемые ниже функции будут предполагаться 2π-периодическими. Для функций $f(x) \in L(T)$ обозначим при $\alpha > -1$ и $n = 1, 2, \ldots$ через $\sigma_n^\alpha(f, x)$ (C, α)-средние их тригонометрического ряда Фурье. Напомним определение классов Ватермана $\Lambda BV(T)$.

Определение 1. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi$, т.е. Λ является монотонно неубывающей последовательностью положительных чисел такой, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} = \infty,$$

и $f(x)$ - 2π-периодическая функция. Тогда говорят, что $f(x)$ принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV(T)$, если

$$\Lambda V_T f(x) = \sup_{a \in R} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k} \equiv \sup_{a \in R} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где Γ - система неперекрывающихся интервалов $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ из $T + a = [-\pi + a, \pi + a)$.

Отметим, что поскольку любая функция из класса Ватермана очевидно ограничена, для $f(x, y) \in \Lambda BV(T)$ можно определить величину $\Lambda V f = \Lambda V_T f(x) + \sup_T |f(x)|$.

Классы $\Lambda BV(T)$ были введены в рассмотрение Д.Ватерманом, который, в частности, установил, что если $f(x) \in HBV(T) \equiv \Lambda_0 BV(T)$, где $\Lambda_0 = \{j\}_{j=1}^\infty$, то частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ равномерно ограничены. Кроме того Д.Ватерман показал, что здесь класс $HBV(T)$ нельзя расширить. Оказывается, что справедливо следующее утверждение, обобщающее результат Д.Ватермана на случай чезаровских средних отрицательного порядка.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (-1, 0)$ и функция $f(x) \in \Lambda_\alpha BV(T)$, $\Lambda_\alpha = \{j^{1+\alpha}\}_{j=1}^\infty$. Тогда $|\sigma_n^\alpha(f, x)| \le C(\alpha) \Lambda_\alpha V f$ при всех $x \in T$ и $n \ge 1$.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (-1, 0)$ и $\Lambda BV(T)$ - некоторый класс Ватермана. Тогда для того, чтобы у произвольной функции $f(x) \in \Lambda BV(T)$ были равномерно ограничены (C, α)-средние ее ряда Фурье, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \ge A n^{-\alpha}$$

при всех n, где постоянная $A > 0$.

Отметим, что в части достаточности теорема 2 не является усилением теоремы 1.

В. А. Кощеев (Екатеринбург)

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ РАЗБИЕНИЯ КОМПАКТОВ, ДОПУСКАЮЩИХ T-СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются компакты Q, для которых в пространстве $C = C(Q, \mathbf{C})$ непрерывных на Q комплексных функций существует система Чебышева длины n (кратко T-система)

$$\{f_1(q), \ldots, f_n(q)\},$$

т.е. система линейно независимых функций из C, полиномы по которой с комплексными коэффициентами обладают свойством единственности элемента наилучшего приближения для любой функции из C.

Доказывается возможность вложения в сферу $\mathbf{S}^2$ циклических элементов пространства полунепрерывного сверху разбиения на континуумы компакта Q, допускающего T-систему длины $n > 2$.

В доказательстве используется связность в хаусдорфовой метрике семейства e_nQ всех конечных подмножеств метрического континуума Q, мощность которых точно равна n.

Понимая гладкость функций T-системы как в работе [1] для обобщенных чебышевских систем (кратко ET-систем) имеет место аналог известной теоремы Мэрхьюбера, а именно: на компакте Q тогда и только тогда существует ET-система локально аналитических функций длины $n \geq 2$ порядка $k \geq 2$, когда Q гомеоморфен подмножеству комплексной плоскости.

Аналогичный результат получаем для непрерывных (не обязательно дифференцируемых) функций, распространяя на этот случай известное определение ET-системы порядка $k = 2$ [3]. Для этого вместо строки из производных в определитель, фигурирующий в определении ET-системы, подставляем базисные векторы предельных подпространств, возникающих при "слипании" точек компакта.

Полученные результаты продолжают исследования Шенберга и Янга [2].

Работа поддержана РФФИ, грант $No96 - 01 - 00118$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кощеев В. А. *О чебышевских системах локально аналитических функций*// Матем. заметки. –1994. – Т. 55. No 4. – С. 35-46.

2. Schoenberg I.J., Yang C.T. *On the unicity of solutions of problems of best approximation* // Ann. Mat. Pura Appl. - 1961. - V.54. - P. 1–12.

3. Карлин С., Сталден В. *Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.* - М.: Наука., 1976. – 568 с.

К. В. Кравченко (Саратов)

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Рассматриваются дифференциальное уравнение и линейные формы вида:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \ ; \ 0 \le x \le T < \infty \tag{1}$$

$$U(y) \equiv Hy'(0) + hy(0) + \int_0^T y'(t)\,d\sigma(t) \ ; \ V(y) \equiv y(T) \tag{2}$$

на конечном интервале. Здесь $q(x) \in L(0,T)$ - комплекснозначная суммируемая функция; $\sigma(t)$ - непрерывная справа заданная комплекснозначная функция, имеющая ограниченную вариацию, а $H \neq 0$, h - известные комплексные числа. По заданным спектральным характеристикам требуется восстановить потенциал $q(x)$. В отличие от двухточечного случая, известных спектральных характеристик оказывается недостаточно для однозначного определения потенциала. Кроме того, для исследований не подходит метод оператора преобразования, который являлся основным методом в классическом случае.

В [1] автором предложены дополнительные спектральные характеристики и доказаны соответствующие теоремы единственности решения обратной задачи. В докладе излагается построение эффективной процедуры восстановления потенциала по этим спектральным характеристикам и известному модельному оператору. Центральное место занимает вывод и доказательство разрешимости так называемого основного уравнения обратной задачи, которое является линейным уравнением в пространстве ограниченных последовательностей. При рассуждениях используется метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла, Н. Левинсона, З. Л. Лейбензона и В. А. Юрко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко К. В. *О восстановлении дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями*// Деп ВИНИТИ No 2885 – В97 – 80 с.

В.Г.Кротов (Минск)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Пусть Ω - ограниченная липшицева область в $\mathbf{R}^n, n \geq 2$, $\varepsilon > 0$ и

$$D_\mathcal{E}(P) = \{x \in \Omega : |x - P| < a(\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega))^\mathcal{E}\}, P \in \partial\Omega,$$

Определим операторы

$$M_{k,\alpha,\mathcal{E}}u(P) = \sup_{x \in D_\mathcal{E}(P)} |x - P|^{-\alpha} \left| u(x) - \sum_{|l|<k} \frac{(x-P)^l}{l!} D^l u(P) \right|, P \in \partial\Omega,$$

на функциях $u \in C^k(\Omega)$, частные производные $D^l u$, $|l| < k$, которых почти всюду относительно поверхностной меры Лебега на $\partial\Omega$ имеют некасательные пределы (т.е. пределы вдоль $D_1(P)$).

Пусть $p > 0, 0 < \alpha < k < \frac{n-1}{p}, \frac{n-kp-1}{n-\alpha p-1} \leq \varepsilon < 1$ и ν - внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющие условию

$$\nu(B(P,t)) \leq ct^\beta, \text{ где } \beta = \frac{n-(k-\alpha\varepsilon)p-1}{\varepsilon}.$$

($c > 0$ не зависит от $P \in \partial\Omega$ и $t > 0$). Тогда

$$\|M_{k,\alpha,\mathcal{E}}u\|_{L^p(\nu)} \leq C \sum_{|l|=k} \|M(D^l u)\|_{L^p(\partial\Omega)}, \qquad (*)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $u \in C^k(\Omega)$. Здесь

$$Mu(P) = \sup\{|u(x)| : x \in D_1(P)\},$$

- некасательная максимальная функция и $B(P,t) = \{Q \in \partial\Omega : |Q - P| < t\}$ - поверхностные шары на $\partial\Omega$ ($P \in \partial\Omega$, $t > 0$).

Правая часть неравенства (*) конечна (и в этом случае оператор $M_{k,\alpha,\mathcal{E}}u$ корректно определен) для решений многих краевых задач для уравнений эллиптического типа (например, для полигармонической задачи Дирихле). Поэтому неравенство (*) дает количественные оценки асимптотического поведения решений таких краевых задач вблизи границы. Из этого неравенства можно вывести и соответствующий качественный результат:

$$D_\mathcal{E} - \lim_{x \to P} |x - P|^{-\alpha} \left| u(x) - \sum_{|l|<k} \frac{(x-P)^l}{l!} D^l u(P) \right| = 0$$

для ν-почти всех $P \in \partial\Omega$. Для некоторых краевых задач эти результаты являются точными.

П. М. Кудишин (Саратов)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОСОБЕНОСТЬЮ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО СПЕКТРА

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) и линейные формы (ЛФ) $L = (l, V_p)$ вида

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)} = \lambda y = \rho^n y, \quad 0 < x < T, \tag{1}$$

$$V_p(y) \equiv y^{(n-p)}(T) + \sum_{k=0}^{n-p-1} v_{pk}\, y^{(k)}(T) = 0, \quad p = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ - корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \sum_{j=0}^{n} \nu_j \prod_{k=0}^{j-1} (\mu - k), \quad \nu_n = 1, \quad \nu_{n-1} = 0.$$

Для определенности будем считать, что $\mu_k - \mu_j \neq sn \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$; $Re\mu_1 < \dots$ $\dots < Re\mu_n$. Предположим, что функции $q_j^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, j-1}$, локально абсолютно непрерывны и $q_j^{(\nu)}(x)\, x^{n-1-Re(\mu_n-\mu_1)-j+\nu} \in L(0,T)$, $\nu = \overline{0,j}$. При выполнении этих условий будем говорить, что $L \in U$.

Пусть $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_k(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}}$ - вектор-столбец решений Вейля (РВ) уравнения (1). Если λ_0 является полюсом РВ кратности N, то существует единственный набор матриц $M^+(\lambda_0) = \{M_{-p-1,0,k-1}(\lambda_0)\}_{p=\overline{0,N-1};\, k=\overline{1,N}}$ такой, что

$$\Phi_{<-k>}(x,\lambda_0) = \sum_{p=0}^{N-1} M_{-p-1,0,k-1}(\lambda_0) \Phi_{<p>}(x,\lambda_0), \quad k = \overline{1,N}, \quad x \in (0,T),$$

где $\Phi_{<j>}(x,\lambda_0)$ - j-ый коэффициент разложения в ряд Лорана $\Phi(x,\lambda)$ в окрестности $\lambda = \lambda_0$. Множество полюсов λ_0 РВ $\Phi(x,\lambda)$ и наборов $M^+(\lambda_0)$ называется спектральными данными (СД).

Получено основное уравнение обратной задачи в случае кратного спектра. Построен алгоритм восстановления коэффициентов ДУ (1) и ЛФ (2) по СД.

Некоторые результаты по прямым задачам для дифференциального оператора $L \in U$ см. в [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ $N97-01-00566$

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрко В. А. *О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью*//Матем.сб. 1995. Т.186, No 6. С. 133-160.

2. Кудишин П. М. *О дифференциальных операторах высших порядков с особенностью.* Деп. в ВИНИТИ, No 2057-В95, Саратов, 1995, 18с.

В.Н. Кузнецов (Саратов)

ЗАДАЧИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОЛРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается класс линейных операторов с параметрическими функциями уравнений вида

$$A(t) = A_0 + \varphi_1(t,x,y)A_1 + \varphi_2(t,x,y)A_2 + \varphi_3(t,x,y)A_3, \tag{1}$$

где $\varphi_i(t,x,y) \in L_\infty(0,T), L_2(\Omega))$, A_i – положительно определенные в пространстве $H_0^2(\Omega) = \{w \in L_2(w), w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \eta}|_\Gamma = 0\}$ операторы, для которых существует полная система функций f_n в $H_0^2(\Omega)$, являющаяся системой собственных функций для каждого оператора A_i, $(i = 0,1,2,3)$.

Вместе с классом линейных операторов вида (1) рассматривается класс операторных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -A(t)w + f(t,x,y), \tag{2}$$

где функция w удовлетворяет начальным условиям

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w(0,x,y) & = & w_0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0,x,y) & = & w_1, \end{array} \right. \tag{3}$$

Относительно единственности решения задачи (2), (3) в пространстве $L^\infty((0,T), H_0^2(\Omega))$ доказана

Теорема 1 *Существуют такие константы C_1,C_2,C_3, что при выполнении условий*

$$|\varphi_i(t,x,y)| < C_i, \quad i = 1,2,3, \ t \in [0;\ T]$$

задача (2), (3) имеет единственное решение в пространстве $L^\infty((0,T), H_0^2(\Omega))$

Замечание Результат теоремы 1 позволяет в ряде случаев доказать единственность решений моделей нелинейной механики.

Т.А. Кузнецова (Саратов)

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматривается класс операторных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = A(t)w + f(t), \quad t \in [0;\, T], \tag{1}$$

где функция w удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{cases} w(0,x,y) &= w_0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0,x,y) &= w_1, \end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищется в пространстве

$$H_0^2(\Omega) = \{w \in L_2(w), w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \eta}|_\Gamma\} = 0$$

Оператор $A(t)$ в уравнении (1) имеет следующй вид

$$A(t) = A_0 + \varphi_1(t,x,y)A_1 + \varphi_2(t,x,y)A_2 + \varphi_3(t,x,y)A_3, \tag{3}$$

где $\varphi_i(t,x,y) \in C_\infty(0,T), L_2(\Omega)), A_i$ – положительно определенные операторы в $H_0^2(\Omega)$, для которых существует полная ортонормированная система функций $\{f_n\}$, являющаяся системой собственных функций для каждого из этих операторов.

Относительно операторов вида (3) доказана

Теорема 1 *Существуют такие константы* C_1,C_2,C_3, *что при выполнении условий*

$$|\varphi_i(t,x,y)| < C_i, \ i = 1,2,3, \ t \in [0;\, T], \tag{4}$$

оператор $A(t)$ *вида* (3) *(при любом* $t \in [0;\, T]$*) эквивалентен оператору* A_0.

Эквивалентность операторов A_1 и A_2 понимается в том смысле, что существует ограниченный, взаимнооднозначный оператор Q, для которого $Q\,A_1 = A_2$.

Будем предполагать выполнение условий (4) теоремы 1. Обозначим через $E_n^H(w)$ величину наилучшего приближения решения задачи (1), (2) по собственным подпространствам оператора A_0 в банаховом пространстве H, где H – это либо пространство $C(0,T), L_p(\Omega)), \ p \geq 2$, либо пространство $C(0,T), V(\Omega))$, где $V(\Omega) = L_2(\Omega) \cup L_p(\Omega)$ для $1 \leq p < 2$.

Относительно величины $E_n^H(\Omega))$ доказана

Теорема 2 *Пусть* w_0, w_1 *принадлежат области определения оператора* A_0^k *и при любом* $t \in [0;\, T]$ $f(t)$ *также принадлдежит области определения оператора* A_0^k. *Тогда решение* $w(t,x,y)$ *задачи* (1), (2) *при любом* $t \in [0;\, T]$ *принадлдежит области определения оператора* A_0^k. *При этом имеют место оценки*

$$E_n^H(w) = o(\frac{1}{n^k})$$

Замечание В основе доказательства теоремы 2 лежит метод ограниченных полугрупп операторов.

Т.Ю.Куликова

Приближение функций в метрике L_2 с весом

Пусть на промежутке $< a, b >$ задана весовая функция $\lambda(x_1)$, а на промежутке $< c, d >$ задана весовая функция $\delta(x_2)$. Будем говорить, что $f \in L_{2,\lambda,\delta}$, если $\|f\| = (\int\limits_a^b\int\limits_c^d f^2(x_1,x_2)\lambda(x_1)\delta(x_2)dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. В этом докладе рассматриваются следующие весовые функции: если $< a, b >= [-1; 1]$, то $\lambda(x_1) = (1-x_1)^\alpha(1+x_2)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$; если $< a, b >= [0; +\infty)$, то $\lambda(x_1) = x_1^\alpha e^{-x_1}$, $\alpha > -1$; если $< a, b >= (-\infty; +\infty)$, то $\lambda(x_1) = e^{-x_1^2}$. Аналогично определяется $\delta(x_2)$ в зависимости от $< c, d >$. Допустимы все возможные комбинации весовых функций.

В зависимости от весовых функций вводятся T_{h_1} и T_{h_2} - операторы обобщенного сдвига на $L_{2,\lambda,\delta}$ по переменным x_1 и x_2 соответственно. Они задаются коэффициентами рядов Фурье. Объясняется также, почему выбраны именно эти операторы. Через Δ_{h_i} обозначается первая обобщенная разность, соответствующая оператору обобщенного сдвига по i-й переменной.

Вводятся также обобщенные операторные производные $D_1 f$ и $D_2 f$ по переменным x_1 и x_2 соответственно. Они определяются на некоторых множествах $\Lambda(D_i) \subset L_{2,\lambda,\delta}$, $i = 1, 2$. Через $\Lambda(D_i^{m_i} D_j^{m_j})$, $i, j = 1, 2$ обозначается область определения обобщенной производной порядков m_i и m_j по переменным x_i и x_j соответственно.

Пусть $r_i = m_i + \sigma_i$, $i = 1, 2$, $m_i \in Z_+$, $\sigma_i \in (0, 1]$. Будем говорить, что $f \in H^{(r_1 r_2)}$, если $f \in \Lambda(D_i)$; $i = 1, 2$ и $\|\Delta_{h_i}^{\lambda_i} D_i^{m_i} f\| \le C h_i^{\sigma_i}$, где $\lambda_i = 1$ при $\sigma_i \ne 1$ и $\lambda_i = 2$ при $\sigma_i = 1$, а константа C не зависит от h_i, $i = 1, 2$. Будем говорить, что $f(x_1, x_2) \in SH^{(r_1,r_2)}$, если $f \in \Lambda(D_1^{m_1} D_2^{m_2})$ и $\|\Delta_{h_1}^{\lambda_1}\Delta_{h_2}^{\lambda_2} D_1^{m_1} D_2^{m_2} f\| \le C h_1^{\sigma_1} h_2^{\sigma_2}$, где $\lambda_i = 1$ при $\sigma_i \ne 1$ и $\lambda_i = 2$ при $\sigma_i = 1$, а константа C не зависит от h_i, $i = 1, 2$.

Для функций $f \in L_{2,\lambda,\delta}$ вводится определение $E_{n_1,n_2}(f)$ - наилучшего приближения прямоугольником, и $Y_{n_1,n_2}(f)$ - наилучшего приближения углом из алгебраических многочленов в пространстве $L_{2,\lambda,\delta}$.

Теорема 1. *Функция $f(x_1, x_2)$ принадлежит классу $H^{(r_1,r_2)}$ тогда и только тогда, когда $E_{n_1,n_2}(f) \le M\left(\frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{r_2}}\right)$, где константа M не зависит от n_1 и n_2.*

Теорема 2. *Функция $f(x_1, x_2)$ принадлежит класссу $SH^{(r_1,r_2)}$ тогда и только тогда, когда $Y_{n_1,n_2}(f) \le M\left(\frac{1}{n_1^{r_1} n_2^{r_2}}\right)$, где константа M не зависит от n_1 и n_2.*

В. П. Курдюмов (Саратов)

О БАЗИСНОСТИ РИМАНА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

Изучается интегральный оператор A вида

$$Af(x) = \int_0^{1-x} (1 + A(1-x,t))f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$A_x^{(k)}(x,t)|_{t=x} = 0, \quad k = 0,1. \tag{2}$$

Операторы (1)-(2) изучались, например, А.П.Хромовым и А.П.Гуревичем в [1], где была доказана равносходимость разложений для $f(x) \in L[0,1]$ по собственным и присоединенным функциям оператора A и в обычный тригонометрический ряд.

В настоящей работе устанавливается такой факт.

Теорема. *Если функция $A(x,t)$ один раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0 \le t \le x$ и удовлетворяет условиям (2), то собственные и присоединенные функции оператора A образуют базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

Работа выполнена при финансовой поддерке РФФИ, грант №97-01-00566

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. П., Хромов А. П. *О равносходимости спектральных разложений интегральных операторов* / Воронежская зимняя мат. школа "Понтрягинские чтения". – 1985. Тезисы докладов.

Л. К. Кусаинова(Караганда)

О ВЕСОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ВЛОЖЕНИЯ

Пусть $\Omega \subseteq R^n$; ρ, v–весовые функции на Ω, $\rho^{1-p'} \in L_{p'}(\Omega; loc)$ $(p' = p/(p-1), 1 < p < \infty)$; μ–мера на Ω; $d(x)$–положительная функция на Ω такая, что для п.в. x в Ω $Q(x) \subset \Omega$, где $Q(x) = Q_{d(x)}(x)$, а для произвольных $d > 0$, $x \in R^n$ $Q_d(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in R^n : |y_i - x_i| < d/2,\ i = 1, \dots, n\}$. Пусть $W_p^l(\Omega; \rho, v)$– весовое пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega;\rho,v)} = \left(\int_\Omega |\nabla_l u|^p \rho + \int_\Omega |u|^p v\right)^{1/p}.$$

Будем говорить, что весовая пара (ρ, v) удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}(\Omega))$ (относительно функции $d(x)$), если существуют такие функция $d(x)$ и числа $0 < \delta < 1, 0 \leq \varepsilon < 1$, что

$$\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(x)^{l-n} \left(\int_{Q_{(\varepsilon)}(x)} \rho^{1-p'}\right)^{1/p'} \left(\inf_e \int_{Q_{(\varepsilon)}(x)\setminus e} v\right)^{1/p} \geq 1,$$

где $Q_{(\varepsilon)}(x) = (1-\varepsilon)Q(x)$, а infimum берется по всем $e \subset Q_{(\varepsilon)}(x)$ с лебеговой мерой $|e| \leq \delta |Q_{(\varepsilon)}(x)|$
($\varepsilon = 0$ только при $\Omega = R^n$). Краткая запись: $(\rho, v) \in \Pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}(\Omega)$. Пример: $(v, (1-\tau)v) \in \Pi_{(\delta,0),p,l}(R^n)$, если v удовлетворяет условию (A_∞), δ, τ–параметры условия (A_∞) (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $l - k \geq n$, $1 < p \leq q < \infty$; $(\rho, v) \in \Pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}(\Omega)$ и*

$$K = \operatorname{vrai}\sup_{x\in\Omega} d(x)^{l-k-n} \mu(Q_{(\varepsilon)}(x)) \left(\int_{Q_{(\varepsilon)}(x)} \rho^{1-p'}\right)^{1/p'} < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_\Omega |\nabla_k u|^q\right)^{1/q} \leq cK\, \|u\|_{W_p^l(\Omega;\rho,v)}, \quad u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^l(\Omega; \rho, v). \tag{1}$$

Следствие 1. *Пусть $l - k > n$, $1 < p < q < \infty$; вес v на R^n удовлетворяет условию*

$$K = \sup_Q \left(|Q|^{-1} \int_Q v^q\right)^{1/q} \left(|Q|^{-1} \int_Q v^{-p'}\right)^{1/p'} < \infty,$$

где supremum берется по всем $Q = Q_d(x)$, $d > 0, x \in R^n$. Тогда справедливо неравенство

$$\|v \nabla_k u\|_q \leq c\, K(\|v \nabla_l u\|_p + \|vu\|_p), \quad u \in C_0^\infty(R^n).$$

Пусть $\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\lambda > 0 : Q_\lambda(x) \subset \Omega\}$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \sigma(x) < 1\}$, $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_1$; $\tilde{d}(x) = 1$, если $\sigma(x) \geq 1$, $\tilde{d}(x) = \sigma(x)$, если $\sigma(x) < 1$.

Теорема 2. *Пусть $l - k \geq n$, $1 \leq q < p < \infty$; ρ, v– веса на Ω такие, что $(1, v/\rho) \in \Pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}(\Omega)$ относительно $d(x) = \tilde{d}(x)$, и*

$$c_0^{-1} < \rho(y)/\rho(x) < c_0, \text{ если } y \in Q_{(\varepsilon)}(x);$$

и пусть

$$K = \|\sigma^{l-k-n/p}\rho^{-1/p}\|_{L_q(\Omega_1;\mu)} + \|\rho^{-1/p}\|_{L_q(\Omega';\mu)} < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство (1).

ЛИТЕРАТУРА

1.Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. *Весовые оценки сингулярных интегралов и их применения* // Мат.анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ. 1983. Т.21. С.42-129.

В. А. Кутепов (Саратов)

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА, ПОСТРОЕННЫХ ПО МАТРИЦАМ ЛАГЕРРА

Пусть $X = [0, +\infty)$; $C_0(X)$ - совокупность заданных на X действительных ограниченных функций f, непрерывных на $[0, +\infty)$ и таких, что $f(x^2)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$; $\mathfrak{M}^\alpha, \alpha > -1$ - матрица Лагерра, то есть матрица узлов интерполирования, n-я строка которой состоит из корней многочлена Лагерра n-ой степени; $\omega_m(f, \delta, a, b)$ - модуль гладкости порядка m функции f на $[a, b] \subset X$; Ω_m - множество всех неубывающих непрерывных на $[0, +\infty)$ полуаддитивных функций $\omega_m(\delta)$ таких, что $\omega_m(0) = 0, \omega_m(\lambda\delta) \le (1+\lambda)^m \omega_m(\delta), \lambda > 0$; $C(\omega_m)$ - совокупность функций $f \in C_0(X)$, для которых на любом отрезке $[a, b] \subset X$ справедливо $\omega_m(f, \delta, a, b) = O(\omega_m(\delta))$.

$L_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x)$ – интерполяционный многочлен функции f, построенный по n-ой строке матрицы Лаггера $\mathfrak{M}^\alpha$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема. *Пусть $\alpha > -1, \mathfrak{M}^\alpha$ - матрица Лагерра, функция $\omega_m \in \Omega_m$. Тогда условие*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_m\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0$$

является необходимым и достаточным, чтобы для любой функции $f \in C(\omega_m)$ везде на $(0, +\infty)$ и равномерно по x на любом отрезке $[a, b]$, $[a, b] \subset (0, +\infty)$ было справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\mathfrak{M}^\alpha, f, x) = f(x).$$

В.В.Лебедев(Москва)

О ФУНКЦИЯХ НА ОКРУЖНОСТИ, ВСЯКАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ КОТОРЫХ С ГОМЕОМОРФИЗМОМ ПРИНАДЛЕЖИТ ПРОСТРАНСТВУ $A_p(T)$ $(=\mathcal{F}l^p)$

Мы рассматриваем пространства $A_p(T)$, $1 \le p \le \infty$, состоящие из функций f на окружности T, последовательность коэффициентов Фурье которых (по тригонометрической системе) принадлежит l^p:

$$\|f\|_{A_p(T)} = \left(\sum_{k\in Z} |\hat{f}(k)|^p\right)^{1/p}.$$

В [1] имеется следующий вопрос: *каковы функции f, обладающие тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности T на себя суперпозиция $f\circ h$ принадлежит $A_p(T)$?* Ранее было известно, что при $p=1$ лишь $f \equiv \text{const}$ обладает указанным свойством. Это следует, например, из одного результата Кахана и Кацнельсона, [2], с. 29. Мы ограничимся случаем непрерывных функций и $1 < p < 2$.

Пусть $V_2(f,n)$ обозначает n-ю 2-вариацию Чантурии функции f:

$$V_2(f,n) = \sup\left(\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2\right)^{1/2},$$

где sup берется по всевозможным разбиениям окружности n точками $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le 2\pi$.

Несложно показать (и, конечно, хорошо известно), что, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_2(f,n)/n)^p < \infty, \tag{1}$$

то $f \in A_p(T)$. Очевидно, условие (1) инвариантно относительно гомеоморфных замен переменной и, следовательно, *(1) влечет $f\circ h \in A_p(T)$ для любого гомеоморфизма $h: T \to T$*. В частности, это имеет место, если $V_2(f,n) = O(n^{\frac{1}{q}-\varepsilon})$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, $\varepsilon > 0$.

Нами получена

ТЕОРЕМА. *Пусть f — непрерывная функция на T такая, что $f\circ h \in A_p(T)$ каков бы ни был гомеоморфизм $h: T\to T$. Тогда $V_2(f,n) = O(n^{\frac{1}{q}})$.*

Отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Следующие условия эквивалентны (f непрерывна):*

а) $f\circ h \in \bigcap_{p>1} A_p(T)$, каков бы ни был гомеоморфизм $h: T\to T$;

б) $\log V_2(f,n) = o(\log n)$.

Автор был частично поддержан грантом РФФИ 96-01-01438.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олевский А.М., Модификации функций и ряды Фурье, Успехи матем. наук, т. 40 (1985), Вып. 3 (243), с. 157–193.

2. Кахан Ж.-П., Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, М., Мир, 1976.

С. В. Левизов

ОБ ОДНОМ СТАТИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ СЛАБОЛАКУНАРНОГО РЯДА ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Пусть $0 \leq x \leq 1$ *и* $\{\varphi_n(x)\}$ - система Уолша в порядке Пэли; $\{n_k\}$ некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов. Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ подчинена центральной предельной теореме (ЦПТ), если для любого множества $E \subset [0,1], |E| > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|E|}|\{x : x \in E, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n_k}(x) \leq z\}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} exp(-\frac{z^2}{2})dz \qquad (1)$$

(здесь $|E|$ означает лебегову меру множества E).

Известно, что если последовательность $\{n_k\}$ такова, что $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$ (лакунарна по Адамару),то соотношение (1) имеет место. Более того, оно продолжает выполняться и тогда, когда индексы $\{n_k\}$ подчинены более слабому условию лакунарности:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 1 + CK^{-\alpha}, \qquad (2)$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, а C - любая положительная константа.

Вто же время при $\alpha \geq \frac{1}{2}$ найдутся такие наборы $\{n_k\}$, что для подсистем $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ соотношение (1) не выполняется.

В настоящей работе сделана попытка рассмотрения несколько иного условия лакунарности, накладываемого на последовательность $\{n_k\}$. Именно, доказана

Теорема: *пусть $f(k)$ - произвольная функция натурального аргумента, удовлетворяющая условию $f(k) \to +\infty$. Тогда найдется последовательность $\{n_k\}$, подчиненная условию лакунарности*

$$n_{k+1} - n_k = O(f(k))$$

и такая, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ подчинена ЦПТ.

Замечание: как сдеует из сказанного, соотношение (1) может выполняться для подсистем $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, связанных с гораздо более "густыми" последовательностями индексов $\{n_k\}$, чем это позволяет условие (2).

А. Г. Лосев(Волгоград)

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M – полное риманово многообразие без края, устроенное следующим образом: внешность некоторого компакта B в M состоит из m компонент связности $D_1, \cdots, D_m$. Пусть кроме того, каждая из областей D_i изометрична произведению $\mathrm{R}_+ \times \mathrm{S}_{i1} \times \cdots \times \mathrm{S}_{ik}$ (где $\mathrm{R}_+ = (0, \infty)$, а S_{ij} – компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = h_i^2(r)dr^2 + g_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + \cdots + g_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2.$$

Здесь $h_i(r)$ и $g_{ij}(r)$ – положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta_{ij}^2$ – метрика на S_{ij}. Пусть $\dim S_{ij} = n_{ij}$.

Введем следующие обозначения

$$I_{ij} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{g_{i1}^{n_{i1}}(t) \cdots g_{ik}^{n_{ik}}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} h_i(z) \frac{g_{i1}^{n_{i1}}(z) \cdots g_{ik}^{n_{ik}}(z)}{g_{ij}^2(z)} dz \right) dt,$$

и

$$I_i = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{g_{i1}^{n_{i1}}(t) \cdots g_{ik}^{n_{ik}}(t)} dt,$$

где $r_0 = const > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть риманово многообразие M такое, что выполнены следующие условия:*

1. для всех $i = 1, \cdots, m$ и всех $j = 1, \cdots, ik$ выполнено $I_{ij} = \infty$,

2. для $i = 1, \cdots, l$, где $l \geq 1$, выполнено $I_i < \infty$.

Тогда размерность пространства ограниченных гармонических на M функций равна l.

Замечание 1. Если для всех $i = 1, \cdots, m$ выполнено $I_i = \infty$, то на M справедливо лиувиллево свойство, т.е. любая ограниченная гармоническая на M функция равна константе.

Замечание 2. Если для некоторых номеров i и j выполнено $I_{ij} < \infty$, то пространство ограниченных гармонических на M функций имеет бесконечную размерность.

Н. В. Лосева (г.Волжский)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТРУБОК ПРЕДПИСАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В пространстве R^{n+1} рассматривается трубчатая гиперповерхность F неотрицательной средней кривизны с наименьшим радиусом обхвата ρ_0. Для функции обхвата $\rho(t)$ поверхности F справедливо, доказанное в [1], дифференциальное неравенство

$$\frac{\rho''(t)}{(1+\rho'^2(t))^{3/2}} - \frac{n-1}{\rho(t)(1+\rho'^2(t))^{1/2}} \geq nH(\rho(t),t), \tag{1}$$

где

$$\rho(t) \in W^2_{1,\mathrm{loc}}, \quad H(r,t) \text{ — средняя кривизна поверхности } \quad F.$$

Изучая поведение решений дифференциального неравенства (1) в зависимости от правой части, получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть для средней кривизны гиперповерхности $F \subset R^{n+1}$ существует неотрицательная миноранта $H_1(r)$ такая, что при $r \to \infty$ $H_1(r) = o(r^{-m})$, где $m > n$.*

Если m удовлетворяет неравенству $\rho_0^{m-1} < \frac{n}{m-n}$, то проекция F на гиперплоскость $t = 0$ находится внутри шара радиуса $R = \rho_0\left(1 - \frac{m-n}{n}\rho_0^{m-1}\right)^{\frac{1}{n-m}}$.

Если же m удовлетворяет неравенству $\rho_0^{m-1} > \frac{n}{m-n}$, то проекция F на гиперплоскость $t = 0$ не ограничена.

Теорема 2. *Если для средней кривизны гиперповерхности $F \subset R^{n+1}$ выполнено $0 \leq h \leq H(r,t)$, $h = const$, то F проектируется на гиперплоскость $t = 0$ в шар радиуса $R = \rho_0 + \frac{1}{h}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосева Н. В. *О некоторых свойствах трубчатых гиперповерхностей заданной средней кривизны*// Рукопись представлена Волгоградским ун-том. Деп. в ВИНИТИ 23 мая 1995 г. – N 1449–В 95. – 24с.

А. П. Лукавый (Брянск)

О ГЛАДКОСТИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Пусть $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг на C, T – его граница; $D^n = D \times D \times \cdots \times D$; $T^n = T \times T \times \cdots \times T$.; ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям:

$$\int_o^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt = O[\omega(\delta)]; \quad \delta\int_\delta^{Const} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = O[\omega(\delta)], \ (\delta \to 0). \tag{1}$$

Через $K_n f(z)$ обозначим n-кратный интеграл типа Коши:

$$K_n f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)}; z \in D^n, \ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \ (\zeta - z) = \prod_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j), \ \ d\zeta = \prod_{j=1}^{n} d\zeta. \tag{2}$$

$H(\alpha, T^n)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера порядка α на T^n, $(0 < \alpha < 1)$:

$$|f(e^{i(\theta_1+h_1)}, \ldots, e^{i(\theta_n+h_n)}) - f(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})| = O[|\delta|^\alpha]; \ |h| \le \delta. \tag{3}$$

Известна классическая теорема Привалова об инвариантности класса Гельдера относительно интеграла типа Коши [3]. Ерикке Б. в [1] показала, что в случае полидиска такое утверждение неверено: если $f \in H(\alpha, T^n)$, то модуль непрерывности интеграла типа Коши в полидиске оценивается сверху через $\omega(K_n f, \delta) = O[\delta^\alpha(\log\frac{1}{\delta})^{n-1}]$, причем этот результат нельзя улучшить.

Получено обобщение этого результата на классы с произвольным модулем непрерывности, удовлетворяющим (1).

Определение 1. *Пусть $H(\omega, T^n)$ – класс функций на T^n таких, что* $|f(e^{i(\theta_1+h_1)}, \ldots, e^{i(\theta_n+h_n)}) - f(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})| = O[\omega(\delta)]$; $|h| \le \delta$; ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий (1).

Теорема 1. *Если $f \in H(\omega, T^n)$, то $\omega(K_n f, \delta) = O[\omega(\delta)(\log\frac{1}{\delta})^{n-1}]$.*

Теорема 2. *Существует $f \in H(\omega, T^n)$ такая, что для модуля непрерывности $K_n f$ в полидиске справедлива оценка $\omega(K_n f, \delta) \ge C\omega(\delta)(\log\frac{1}{\delta})^{n-1}]$.*

Для функций, сопряженных в смысле Чезарри, аналогичный результат получил Окулов В.А. в [2].

Возникает вопрос: как можно одномерные гельдеровские классы обобщать на многомерный случай, так чтобы эти классы были инвариантны относительно интеграла типа Коши. Впервые ответ на этот вопрос был получен в работах [4],[5] для случая $\omega_j = t^{\alpha_j}$, где $0 < \alpha_j < 1$. Аналогичный результат имеет место для произвольных $\omega_j(t)$, удовлетворяющих (1).

Определение 2. *Скажем, что $f \in \tilde{\Lambda}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, если* $\Delta_{k=1}^m h(f)| = O[\prod_{k=1}^{m} \omega_{j_k}(|\,h_{j_k}|)]$ $\forall m \le n$, $1 \le j_k \le m$, *ω_{j_k} удовлетворяют (1), где*

$$\Delta_{k=1}^m h(f) = \Delta h_{j_k}(\Delta h_{j_{k-1}} \ldots (\Delta h_{j_1}) \ldots)(f); \ h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m;$$

$$\Delta h_{j_k}(f) = f(e^{i(\theta_1)}, \ldots, e^{i(\theta_{j_k}+h_{j_k})}, \ldots, e^{i(\theta_n)}) - f(e^{i(\theta_1)}, \ldots, e^{i(\theta_n)}).$$

Теорема 3. *Если $f \in \tilde{\Lambda}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, то $K_n f \in \tilde{\Lambda}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерикке Б. *Многомерный аналог теоремы Привалова*// Math. Nachr. - 1982. - 107. - С. 221-223.

2. Привалов И. И. ДАН СССР - 1939. - 23. - С. 859.

3. Окулов В .А. *Многомерный анолог одной теоремы Привалова*// Мат. сборник. - 1995. - 186. - No 2. - С. 93-104.

4. Шамоян Ф. А. Арутюнян А. В. *О некоторых анизотропных пространствах голоморфных в полидске функций.*// Деп. Арм. НИИНТИ - No1. - 1990. - 36стр.

5. Шамоян Ф. А. Арутюнян А. В. *Об анизотропных пространствах голоморфных в полидске функций, гладких вплоть до его границ.*// Изв. АН Армении. - 1993. - т.28. - No 6. - С.634-654.

Т. П. Лукашенко (Москва)

ОБОБЩЁННЫЕ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ, ПОДОБНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМ

Ранее автором было дано определение системы разложения, подобной ортогональной в [1, 2].

Определение 1. *Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbf{R}$ или (необязательно сепарабельное), а Ω — пространство с мерой μ. Систему элементов $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ будем называть системой разложения, подобной ортогональной, в H, если любой элемент $y \in H$ представляется в виде $y = \int_\Omega \widehat{y}_\omega e^\omega \, d\mu(\omega)$, где $\widehat{y}_\omega = (y, e^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причём в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbf{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$), быть может зависящее от y, что функция $\widehat{y}_\omega e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и $y = \int_\Omega \widehat{y}_\omega e^\omega \, d\mu(\omega) \equiv \lim_{k\to\infty}(L) \int_{\Omega_k} \widehat{y}_\omega e^\omega \, d\mu(\omega)$.*

Системы разложения, подобные ортогональным, имеют аналоги почти всех свойств ортогональных систем и охватывают ряд известных неортогональных систем — всплески Габора, всплески Морле и другие. Но преобразование Фурье не подходит под определение 1.

Определение 2. *Пусть в гильбертовом пространстве H имеется система замкнутых подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$, $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$, замыкание $\bigcup_{n=1}^\infty H_n$ совпадает с H. Пусть Ω — пространство с мерой μ, а $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — система, каждый элемент которой e^ω является последовательностью $\{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ с $e_n^\omega \in H_n$ и e_n^ω — ортогональная проекция e_{n+1}^ω на H_n. Система $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ будет называться обобщенной системой разложения, подобной ортогональной, в H, если проекция $P_n(y)$ любого элемента $y \in H$ на H_n представляется в виде $P_n(y) = \int\limits_\Omega \widehat{y}_\omega^n e_n^\omega \, d\mu(\omega)$, где $\widehat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H.*

Преобразование Фурье подходит под определение 2. Обобщённые системы разложения, подобные ортогональным, имеют аналог равенства Парсеваля-Планшереля и аналоги ряда других свойств ортогональных систем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лукашенко Т. П. *О системах разложения, подобных ортогональным*//Междун. конф. по теории прибл. функций. Калуга, 26-29 июня 1996г. Тезисы докл. Т. 2. Тверь: изд-во ТГУ, 1996. - С. 135-136.

2. Лукашенко Т. П. *Системы разложения, подобные ортогональным*// Фундам. и прикл. матем. - 1997. - Т. 3, No 2. - С. 487-517.

А.Л.Лукашов(Саратов)

Обобщение многочленов Лагерра и Эрмита на случай двух промежутков

Найдены многочлены, которые можно рассматривать как обобщение некоторых классических ортогональных многочленов на случай двух промежутков. А именно, при некотором n они имеют свойства многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита (ортогональность производных, решение дифференциального уравнения второго порядка). Приведем точную формулировку для обобщений многочленов Эрмита.

Теорема 1 *Пусть $a, b, \alpha_1, \alpha_2, a < b, \alpha_1, \alpha_2 > -1$ таковы, что*

1. *Многочлен $H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)$, ортогональный на $E = (-\infty, 0] \cup [b, +\infty)$ с весом*

$$h(x) = \begin{cases} -(a-x)^{\alpha_1}(b-x)^{\alpha_2}e^{-x^2/2}, & x \in (-\infty, a) \\ (x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\alpha_2}e^{-x^2/2}, & x \in (b, +\infty) \end{cases}$$

множеству H_{n-1}, будет ортогонален одночлену x^n;

2. $$\int_E \left(H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)\right)' h(x)\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}dx = 0,$$

где c - единственный нуль $H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)'}(x)$ в интервале (a, b).

Тогда многочлен $y = H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y''(x-a)(x-b)(x-c) + y'\left(-x(x-a)(x-b)(x-c) + (\alpha_1+1)(x-b)(x-c)+\right.$$

$$\left.(\alpha_2-1)(x-a)(x-c) - (x-a)(x-b)\right) + n(x-c)^2(x-d)y = 0,$$

где d - единственный нуль функции

$$\left(H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)'}(x)\frac{|x-a|^{\alpha_1+1}|x-b|^{\alpha_2+1}}{x-c}e^{-x^2/2}\right)'$$

в интервале (a, b). При этом $\left(H_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)\right)'$ ортогонален H_{n-2} на E относительно веса $h(x)\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$.

Д. С. Лукомский (Саратов)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ПОЛУОСИ

Рассматриваются дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (l, U)$ вида:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,\rho) y^{(k)}, \qquad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x) \tag{1}$$

$$U_{\xi,0}(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{(n-\xi)} \rho^k U_{k\xi} y^{(n-k-\xi)}(0), \qquad U_{k\xi} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta^{(\xi)}_{k,k+i}}{\rho^i} \tag{2}$$

на полуосии. Здесь p_{kk}, $\beta^{(\xi)}_{k,k+i} = const$, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $p_{kn}(x) \in C^1[0,\infty)$, $k = \overline{1, n-1}$, $i = \overline{k+1, n}$.

Исследуется обратная задача восстановления коэффициентов дифференциального уравнения (1) и линейных форм (2) по так называемым функциям Вейля. Исследованы аналитические свойства решений Вейля и функций Вейля. Доказана теорема единственности решения обратной задачи. При $p_{nn} = 1$, $p_{00} = -1$, $p_{kk} = 0$, $k = \overline{1, n-1}$ получено основное уравнение обратной задачи, приводится процедура решения. При доказательстве используется метод, развивающий идеи метода контурного интеграла, а так же метод спектральных отображений.

Для дифференциальных операторов высших порядков с линейной зависимостью от спектрального параметра близкие к этим результаты были получены В. А. Юрко и изложены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Yurko *Recovery of nonselfadjoint differential operators on the half-line from the Weyl matrix*// Math. USSR Sbornik Vol.72, No 2. – 1992.–p.p. 413–438.

С.Ф.Лукомский (Саратов)

О РАСХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ДВОЙНЫХ РЯДОВ УОЛША

С.В.Конягин [1] доказал, что если для последовательности $n(k)$ одномерные константы Лебега $L_{n(k)}$ по системе Уолша-Пэли неограничены в совокупности, то частичные суммы $S_{n(k),n(k)}$ двойного ряда Фурье-Уолша некоторой интегрируемой функции не сходятся по мере. Незначительно изменяя доказательство можно добиться, чтобы функция, для которой нет сходимости по мере, принадлежала пространству $L\varphi(L)(D^2)$,где $\varphi(x) = o(\log x) \quad (x \to \infty)$. Т.о. справедлива

Теорема 1 (С.В.Конягин). *Если одномерные константы Лебега $L_{n(k)}$ неограничены в совокупности, то для любой функции $\varphi(x) = o(\log x)$ существует функция $f \in L\varphi(L)(D^2)$, для которой частичные суммы $S_{n(k),n(k)}(f)$ двойного ряда Фурье-Уолша не сходятся по мере, а значит не сходятся и почти всюду.*

Оказывается, что в этой теореме можно добиться расходимости почти всюду.

Теорема 2. *Если одномерные константы Лебега $L_{n(k)}$ неограничены в совокупности, то для любой функции $\varphi(x) = o(\log x)$ существует функция $f \in L\varphi(L)(D^2)$, для которой частичные суммы $S_{n(k),n(k)}(f)$ двойного ряда Фурье-Уолша расходятся почти всюду.*

Доказательство теоремы 2 проводится методом, предложенным автором в работе [2].

Остается неясным, можно ли в теореме 2 выбирать функцию $f \in L\log(L)(D^2)$ или $f \in L\log^{1+\varepsilon}(L)(D^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Конягин С.В. *О подпоследовательности частичных сумм Фурье-Уолша*//Мат.зам.-1993.-т.54, в.4.-с.69-75.

2.Лукомский С.Ф. *Критерий сходимости почти всюду квадратных частичных сумм Фурье-Уолша интегрируемых функций*//-1995.- т. 186, N7.-с.133-147.

Мазепа Е.А. (Волгоград)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В данной работе рассматриваются ограниченные решения уравнения вида

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — неотрицательная, гладкая функция на некомпактном многообразии M, устроенном следующим образом. Пусть M – полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B – некоторый компакт, а D изометрично произведению $\mathrm{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2$ (где $\mathrm{R}_+ = (0, \infty)$, а S_i – компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = h^2(r)dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2.$$

Здесь $h(r)$ и $g_i(r)$ – положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta_i^2$ – метрика на S_i. Пусть $\dim S_i = n_i$. Ясно, что $\dim M = n_1 + n_2 + 1$.

Будем говорить, что на многообразии M разрешима задача Дирихле для уравнения (1), если для любой непрерывной на $S_1 \times S_2$ функции $\Psi(\theta_1, \theta_2)$ на M существует решение уравнения $u(x)$ такое, что

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta_1, \theta_2) = \Psi(\theta_1, \theta_2).$$

В дальнейшем будем считать, что на D выполнено условие $c(r, \theta) \equiv c(r)$.

Введем обозначения

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g_1^{n_1}(t) g_2^{n_2}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} c(z)h(z)g_1^{n_1}(z)g_2^{n_2}(z)dz \right) dt,$$

$$I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g_1^{n_1}(t) g_2^{n_2}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} h(z)\frac{g_1^{n_1}(z)g_2^{n_2}(z)}{g_i^2(z)}dz \right) dt,$$

где $r_0 = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема. *Для того, чтобы на была однозначно разрешима задача Дирихле для уравнения* (1) *необходимо и достаточно чтобы* $I < \infty$, $I_1 < \infty$, $I_2 < \infty$.

Дж. И. Мамедханов (Баку)

Вопросы рациональной аппроксимации

Известно, что если функция определена лишь на замкнутой границе области, то приближать её посредством многочленов, вообще говоря, невозможно.

На наш взгляд , самым естественным агрегатом приближения в этом случае является рациональная функция вида

$R_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(z-a)^k$, где число a находится внутри рассматриваемой области.

Эти рациональные функции ведут себя, практически, как многочлены и хорошо поддаются изучению.

С помощью таких рациональных функций мы строим, подобную классической, конструктивную теорию для функций , определённых лишь на границе области и принадлежащих классам Липшица порядка α ($0< \alpha < 1$) или Зигмунда.

Посредством таких рациональных функций нам удаётся решать задачи полиномиальной аппроксимации на дугах в комплексной плоскости. Рассматриваемые вопросы актуальны, как в равномерной , так и в интегральных метриках.

Эти вопросы в метрике пространства C были рассмотрены вместе с нашими учениками И. Батчаевым и Д. Исрафиловым. В частности, нам удалось доказать следующую теорему.

<u>Теорема</u> Пусть Γ- есть произвольная квазикомформная дуга в комплексной плоскости и $f(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)$ ($0< \alpha \le 1$) ($H^{\alpha}(\Gamma)$ - класс Гёльдера порядка α). Тогда существует многочлен $P_n(z)$ такой , что

$$|f(z) - P_n(z)| \le \text{const}\, d^{\alpha}(z,\tfrac{1}{n}),$$

где $d(z,\frac{1}{n})$ - расстояние от точки $z\in\Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$.

Подобные вопросы, независимо от нас, позже были рассмотрены В. Андриевским.

Предполагается доложить дальнейшее развитие этих вопросов.

С.Т. Махашев (Караганда)

Об абсолютной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара функций из пространства Орлича

Пусть L_M - пространство Орлича,определенное N-функциями$M(u)$. Норма в этом пространстве определяется следующим равенством,$u(x) \in L_M$

$$||u||_M = \sup_{\rho(v,N)\leq 1} |\int_0^1 u(x)v(x)dx|$$

Через $\{\chi_n(t)\} = \chi\{p_k\}$-обозначим обобщенную систему Хаара. Рассмотрим функциональные классы:

$$H_M^\omega = \{f \in L_M : \omega(\delta, f)_M \leq \omega(\delta), 0 \leq \delta \leq 1\},$$

$$E_M(\lambda) = \{f \in L_M : E_n(f)_M \leq \lambda_n, n = 1, 2, ...\}$$

где $\omega(\delta)$- модуль непрерывности,$0 \leq \delta \leq 1$,$\lambda = \{\lambda_n\}$-последовательность положительных чисел ,$\lambda_n \downarrow o, n \to \infty$ $E_n(f)_M$-наилучшее приближение функций $f \in L_M$ полиномами по системе $\chi\{p_n\}$, $\omega(\delta)$- модуль непрерывности функций $f \in L_M$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 *Для того чтобы для любой функции $f \in E_M(\lambda)$ ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\chi_n(t) \tag{1}$$

абсолютно и равномерно сходился на [o,1] необходимо и достаточно,чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M^{-1}(n)}{n}\lambda_n < +\infty$,

где $M^{-1}(n)$-есть обратная N-функция функции $M(n)$

Теорема 2 *Пусть дан модуль непрерывности $\omega(\delta), o \leq \delta \leq 1$. Для того чтобы для любой функции $f \in H_M^\omega$ ряд (1)абсолютно и равномерно сходился на [0,1] достаточно,а при* $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^{-1}(k)}{k} \leq \frac{M^{-1}(n)}{n}$ $n = 1, 2, ...$ *и необходимо, чтобы*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^{-1}(n)}{n}\omega(n^{-1}) < +\infty$$

Т. А. Мацеевич † (Москва)

О СПРАВЕДЛИВОСТИ СЛАБОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H^ω

1. Пусть $S_n(x;f)$ - прямоугольная частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_p(T^N)$, $p \geq 1$, $N \geq 1$, $T^N = (-\pi,\pi]^N$.

2. Фиксируем произвольное k, $1 \leq k \leq N$ и обозначим: $J = J_k = \{j_1,\ldots,j_k\} \subset \{1,\ldots,N\} = M$; Ω_j - произвольное (не пустое) открытое множество, $\Omega_j \subset T^k = \{x = (x_{j_1},\ldots,x_{j_k}) : -\pi < x_{j_s} \leq \pi, s = 1,\ldots,k\}$. Положим $W_J = \Omega_j \times (-\pi;\pi]^{N-k}$, $W_k^0 = \bigcap_{J_k \subset M} W_J$ и, предполагая (при $k \geq 2$), что $W_k^0 \neq \emptyset$, $W_k = \bigcup_{J_k \subset M} W_J$. Далее, будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$, если существует множество W_k такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$; свойство $\mathbb{B}_k(W_k^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным свойством этого множества, если для любого множества W_k^0 такого, что $\mu(W_k^0 \setminus W_k^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_k(W_k^0)$.

3. И.Л.Блошанский доказал, что для произвольного измеримого множества $\mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ $(N \geq 1)$ и любой функции $f \in L_p$ $(p \geq 1)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$

$$S_n(x;f) \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для почти всех } x \in W_k^0, k = k(p,N) \qquad (1)$$

тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k$ $(k = 1,2)$, причем

а) если $p = 1$, $N \geq 1$, то оценка (1) справедлива при $k = 1$;

б) если $p > 1$, $N \geq 2$, то оценка (1) справедлива при $k = 2$.

Заметим, что необходимость в случае б) была доказана И.Л.Блошанским при дополнительных условиях на множество $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A} = \mathrm{T}^N \setminus \mathfrak{A}$:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{\{int\mathfrak{B}\}}) = 0 \text{ и } \mu_k Fr\ pr_{(J_k)}\{int\mathfrak{B}\} = 0 \text{ для всех наборов } J_k \subset M. \qquad (2)$$

4. Нами исследуется вопрос о справедливости оценки (1) при $N \geq 3$ в классах $H^\omega(T^N)$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset T^N$, - произвольное измеримое множество, $\mu\mathfrak{A} > 0$, $N \geq 3$.*

1. *Если множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_3(W_3^0)$, то для любой функции $f \in H^\omega(T^N)$, $\omega(\delta) = o([log\frac{1}{\delta}logloglog\frac{1}{\delta}]^{-1})$, $\delta \to +0$, такой, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, справедлива оценка (1) при $k = 3$.*

2. *Пусть $\mathfrak{B} = T^N \setminus \mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (2) при $k = 3$. Тогда, если свойство $\mathbb{B}_3(W_3^0)$ множества $\mathfrak{A}$ является максимальным свойством $\mathbb{B}_3$ множества $\mathfrak{A}$, то существует функция $f \in H^\omega(T^N)$, $\omega(\delta) = \omega_1(\delta) = \phi(\delta)(log\frac{1}{\delta})^{-1}$, ($\omega_1(\delta)$ -регулярная функция, $\phi(\delta) \to +\infty$, а $\omega_1(\delta) \to +0$ при $\delta \to +0$) такая, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, но*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}|S_n(x;f)| = +\infty \text{ почти всюду на } T^N \setminus W_3^0.$$

---

† Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00332).

В. С. Мокейчев (Казань)

ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

2π - периодическое распределение [1] u, определяемое коэффициентами Фурье $u_k, k \in Z^n$, называется 2π - периодическим решением уравнения
$P(\lambda)u = f(x) \in H = L^2((0, 2\pi))$, если

$$\sum_k P(\lambda)\left(u_k \exp(ik \bullet x)\right) = f(x), \tag{1}$$

и ряд сходится к $f(x)$ в H по норме. В том случае, когда $f(x) \equiv 0$ и $\{u_k\}$ - ненулевая, число λ называется собственным значением.

Рассматривается задача (A) о нахождении такого решения $\{u_k\}$ бесконечной системы уравнений

$$\sum_k \langle P(\lambda)\exp(ik \bullet x), \exp(ip \bullet x)\rangle u_k = f_p, p \in Z^n \tag{2}$$

для которого сходится в H по норме ряд в (1). Очевидно, что 2π - периодическая задача и задача (A) "равносильны". Проблема собственных значений решена в [1] для случая, когда (2) можно переписать в виде

$$Q_p(\lambda)u_p = \sum_{k \in M(p)} T_{p,k}(\lambda)u_k = 0, p \in Z^n, \tag{3}$$

и при всех достаточно больших $p > 0$

$$M(p) \subset (k_o, p), M(-p) \subset (-p, k_o), \tag{4}$$

$$\sum_{k \in M(p) \cap (|k| \geq N)} \left|T_{k,p}(\lambda) \bullet (Q_k(\lambda))^{-1}\right| \leq c < 1 \tag{5}$$

Ниже изучается проблема при нарушении (4) и сохранении (5). Фиксируются $N(1) \in Z^n$, $N(2) \in Z^n$:

$$\sum_{k \in M(p)} \left|T_{k,p}(\lambda) \bullet (Q_k(\lambda))^{-1}\right| \leq c < 1, \forall p : (p \leq N(1)) \bigcup (p \geq N(2))$$

и доказывается, что для решения $\{U_k\}$ задачи (A) при $f(x) \equiv 0$ имеет место

$U_k = 0, \forall k \leq \bar{N}(1) \leq N(1)$, если $T_{\bar{N}(1),q} = 0, \forall q \in M\left(\bar{N}(1)\right) \cap \left\{q \geq \bar{N}(1)\right\}$

$U_r = 0, \forall r \leq \bar{N}(2) \leq N(2)$, если $T_{\bar{N}(2),q} = 0, \forall q \in M\left(\bar{N}(2)\right) \cap \left\{q \geq \bar{N}(2)\right\}$

С использованием свойства $u_k = 0$, $\forall k \leq \bar{N}(1)$ (либо $u_r = 0$, $\forall r \leq \bar{N}(2)$) частично решается проблема собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокейчев В.С.*Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* - *Казань, изд-во Казанского ун-та. 1985.*

А. В. Московский (Тула)

ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, $1 \le p \le 2$ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Пусть $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $J_\lambda(r)$ - функция Бесселя первого рода порядка λ, t_λ - ее первый положительный нуль, $j_\lambda(r) = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)r^{-\lambda}J_\lambda(r)$, $1 \leq p \leq 2$, $d\mu_\lambda(r) = 2^{-\lambda}\Gamma^{-1}(\lambda+1)r^{2\lambda+1}dr$,

$$L_{p,\lambda}(R_+) = \left\{ f : R_+ \to C \mid \| f \|^p_{p,\lambda} = \int\limits_0^\infty |f(r)|^p d\mu_\lambda(r) < \infty \right\},$$

$$\tilde{f}(\rho) = \int\limits_0^\infty f(r) j_\lambda(\rho r) d\mu_\lambda(r) -$$

преобразование Фурье-Ханкеля, $R > 0$,

$$E_R(f)_{p,\lambda} = \inf\{\|f - g\|_{p,\lambda} \mid \operatorname{supp} \tilde{g} \subset [0, R]\} -$$

величина наилучшего приближения,

$$\omega(\delta, f)_{p,\lambda} = \sup_{0 \le r \le \delta} \left(\int\limits_0^\infty c(\lambda) \int\limits_0^\pi |f(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi}) - f(\rho)|^p \sin^{2\lambda}\varphi d\varphi d\mu_\lambda(\rho) \right)^{1/p} -$$

обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_{p,\lambda}(R_+)$.

Здесь

$$c(\lambda) = \left(\int\limits_0^\pi \sin^{2\lambda}\varphi d\varphi \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}.$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если $R > 0$, $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, то для любой $f \in L_{2,\lambda}(R_+)$ справедливо точное неравенство*

$$E_R(f)_{2,\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(2t_\lambda/R, f)_{2,\lambda}. \tag{1}$$

При $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ аргумент $2t_\lambda/R$ - минимальный для которого (1) *выполняется для любой $f \in L_{2,\lambda}(R_+)$.*

Теорема 2. *Если $R > 0$, $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $1 \leq p < 2$, то для любой $f \in L_{p,\lambda}(R_+)$ справедливо неравенство*

$$E_R(f)_{p,\lambda} \leq 2^{-1+1/p} \omega(4t_\lambda/R, f)_{p,\lambda}. \tag{2}$$

Вопрос о точности константы $2^{-1+1/p}$ в (2) открыт.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 97-01-00318).

А. Ю. Напеденина (Москва)

О СОВПАДЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

В работе [1] определен оператор обобщенного сдвига

$$T_t(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 - \sin^2 t\,\cos 2\varphi - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\sin 2t\,\cos\varphi\right) f(R)\,d\varphi,$$

где $R = x\,\cos t + \sqrt{1-x^2}\,\cos\varphi\,\sin t$.

При помощи этого оператора определяется обобщенный модуль гладкости порядка r, $r \in \mathbf{N}$,

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i|\le\delta;\ i=1,\dots,r} \|\Delta^r_{t_1\dots t_r}(f,x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где $\Delta^1_t(f,x) = T_t(f,x) - f(x)$, $\Delta^r_{t_1\dots t_r}(f,x) = \Delta^1_{t_r}(\Delta^{r-1}_{t_1\dots t_{r-1}}(f,x),x)$.

Обозначим через $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$ класс функций $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ (т.е. таких, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p[-1;1]$), удовлетворяющих условию $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \le C_1\delta^\lambda$, где C_1 не зависит от δ. Обозначим через $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$ класс функций $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, удовлетворяющих условию

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta} \le C_2\,n^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$, C_2 не зависит от n, P_n — алгебраические многочлены степени не выше, чем $n-1$.

Справедлива теорема:

Теорема. *Пусть даны числа p,α,β,r,λ такие, что $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbf{N}$, $0 < \beta \le \alpha \le 1$ при $p = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2p} < \beta \le \alpha < 2 - \frac{1}{p}$ при $1 < p < \infty$, $\frac{1}{2} \le \beta \le \alpha < 2$ при $p = \infty$ и $2max(\alpha + \frac{1}{2p} - 1, \alpha - \beta) < \lambda < 2r$. Тогда совпадают классы функций $E(p,\alpha,\beta,\lambda)$ и $H(p,\alpha,\beta,r,\lambda)$.*

При $r = 1$ и более узких пределах изменения параметров эта теорема доказана в работе [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке научной школы, проект N 96/97-15-96073.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов М. К. *Об одном несимметричном операторе обобщенного сдвига*// Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева. Казань. 1997. С. 175-176.

Е. В. Насырова (Казань)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается следующая смешанная ОКЗ теории аналитических функций по параметру x для двусвязной области в случае полигона:

НАЙТИ

- *конечную двусвязную область D_z (вообще говоря, многолистную) с кусочно гладкой границей, расположенную в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, и*
- *аналитическую в этой области функцию $w(z)$, непрерывную вплоть до границы и конформно отображающую область D_z на заданную конечную двусвязную область D_w с кусочно ляпуновской границей в плоскости комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$,*

если известно, что граница L_z области D_z состоит из двух замкнутых жордановых линий: L_z^1 и L_z^2, контур L_z^1 охватывает гладкую кривую L_z^2 и состоит из ломаной L_z^{11}, содержащей $n-1$ прямолинейных звеньев и гладкой кривой L_z^{12}, соединяющей концы полигона L_z^1.

На контуре L_z^2 (L_z^{12}) заданы значения функции $w(z)$ в виде однозначных ветвей, непрерывно переходящих друг в друга, представляющих собой функции параметра x - абсциссы точки L_z^2 (L_z^{12}), которые определяют кривую Ляпунова L_w^2 (L_w^{12}). Кроме того, в неявном виде $F(\varphi, \psi) = 0$ задана кривая Ляпунова L_w^{11}, которая вместе с кривой L_w^{12} образует замкнутую жорданову кривую $L_w^1 = L_w^{11} + L_w^{12}$, охватывающую замкнутую кривую L_w^2. Контуры L_w^1 и L_w^2 образуют границу области D_w. На кривой L_w^1 заданы образы вершин ломаной L_z^1.

Указан способ сведения (при выполнении определенного условия) данной задачи к задаче о нахождении производной функции $z = z(\zeta)$, конформно отображающей кольцо $D_\zeta : q < |\zeta| < 1$, расположенное в плоскости комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ на область D_z. Функция $z'(\zeta)$ является решением краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для указанного кольца. Проведено полное исследование последней задачи. В итоге получены условия разрешимости и интегральное представление рассматриваемой смешанной ОКЗ, которые зависят от индекса κ указанной задачи, тесно связанного с геометрией границы искомой области (κ может принимать любое значение). Отметим, что в полученное интегральное представление входят произвольные действительные постоянные, число которых зависит от κ и может быть равным нулю.

С. М. Никольскиий (Москва)

ПРИБЛИЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Расматривается m-мерное ($1 \leq m \leq n$) замкнутое ограниченное многообразие $\Gamma = \Gamma_m$ в n-мерном евклидовом пространстве $R^n \ni x = (x_1, ..., x_n)$ и класс $H_p^r(\Gamma)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ функций , определенных на Γ . Ставиться вопрос о приближении на Γ этих функций алгебраическими многочленами

$$P_N = \sum_{|k| \leq N} a_k x^k, \quad k = (k_1, ..., k_n), \quad |k| = \sum_1^n k_j, \quad x^k = x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$$

или тригонометрическими полиномами , или целыми функциями экспоненциального типа в метрике

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\varphi(x)^p d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = \|\varphi\|_{C(\Gamma)} = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)| \tag{1}$$

Возможно получить прямую теорему о приближении функций $f \in H_p^r(\Gamma)$ для достаточного гладкого многообразия Γ с краем и без края.

Вопрос здесь связан с возможностью продолжения функкий $f \in H_p^r(\Gamma)$ с Γ на R^n до класса $H_p^{r+\frac{n-m}{p}}(R^n)$ Дается обзор результатов, связанных с этим продолжением.

Затем продолженные функции приближаются или тригонометрическими полиномами или целыми функциями экспоненциального типа посредством обобщенных методов Джексона.

Полученные приближенные функции можно приблизить снова уже алгебраическими многочленами, используя Чебышевское разложение этих функций.

Указанный эффективный метод приводит к оценкам

$$\|f - \Lambda_N\|_{L_p(\Gamma)} \leq cN^r \qquad (N \geq 1) \tag{2}$$

$$\|\Lambda_N\|_{H_p^r(\Gamma)} \leq C \tag{3'}$$

для $f \in H_p^r(\Gamma)$, где Λ_N может быть:

Γ_N -тригонометрический полином,

P_N -алгебраический многочлен,

G_n -целой функцией экспоненциального типа N^- .

Таким образом,

$$f \in H_p^r(\Gamma) \quad \longrightarrow (2), (3')$$

Имеет место и обратное утверждение:

$$(2), (3') \quad \longrightarrow f \in H_p^r(\Gamma);$$

доказательство его требует использования теории продолжения функции за пределы области определения с сохранением класса. Но класический подход к этим вопросам требует установления утверждения:

$$f \in H_p^r(\Gamma) \quad \longrightarrow (2), (3') \tag{5}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00212) и программе поддержки ведущих научных школ (96-15-96102)

и ему обратного:

$$(2), (3') \quad \longrightarrow f \in H_p^r(\Gamma) \qquad (\text{}$$

где (3) есть неравенство более слабое чем (3′):

$$\|\Lambda_N\|_{L_p(\Gamma)} \qquad (\text{}$$

Эти два взаимообратных утверждения (5) и (6) составляют, например, класич скую теорию приближений периодических функций тригонометрчскими полиномам или функций определения на R^n приближаемых целыми функциями экспоненциальног типа.

Однако обратная теорема (6) имеет место далеко не для всякого указанного Γ.

Приводятся некоторые факты, расширяющие наши знания относительно многообра зия Γ, для которых верно обратное утверждение (6).

Справедливость (6) связана с возможностью неравенств типа Бернштейна на Γ дл Λ_N.

Но возможен и другой подход: некоторое усиление метрики $L_p(\Gamma)$, т.е. (1), так чт приближении в этой усиленной метрике будут уже верны взаимно обратные утвержде ния (5), (6) для всех указанных Γ.

В. В. Новиков (Саратов)

СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛАГРАНЖА С УЗЛАМИ В НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНА СТИЛТЬЕСА

Пусть $\{P_n\}$-многочлены Лежандра, $\{E_n\}$-многочлены Стилтьеса, определяемые с точностью до постоянного множителя условиями

$$\int_{-1}^{1} E_{n+1}(x)P_n(x)x^k dx = 0,\ k = 0,\cdots,n,\ n \geq 1;$$

$\mathcal{L}_n(f,\cdot)$-многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию в нулях многочлена E_{n+1}.

Далее, f называется функцией ограниченной гармонической вариации (кратко $f \in HBV$), если

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{k} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всевозможным системам неналегающих отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty} \subset [-1,1]$. Известно [1], что константы Лебега интерполяционного процесса $\{\mathcal{L}_n(f,\cdot)\}$ имеют оптимальный порядок $\|\mathcal{L}_n\| \sim \log n$, поэтому представляет интерес изучение условий сходимости такого процесса. Следующее утверждение представляет собой достаточное условие сходимости, аналогичное условию для интерполяции по узлам многочленов Чебышева 1 рода.

Теорема. *Если* $f \in HBV \cap C[-1,1]$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathcal{L}_n(f,\cdot)\|_\infty = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА.

1.Ehrich S.,Mastroianni G.*Stieltjes polinomials and Lagrange interpolation.* //Math.Comp.-1997.-V.66-No217-p.311-331.

И.Я.Новиков (Воронеж)

КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВСПЛЕСКОВ ДОБЕШИ

Модифицированные всплески Добеши определяются следующим образом. Пусть $a \in (0,1)$ и $f_a(t)$ - это некоторая бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция на $[-1,1]$, равная 0 при $t \in [-1,-a]$ и удовлетворяющая тождеству $f_a(t) + f_a(-t) = 1, \quad t \in [-1,1]$. Обозначим через $b_l^N(t) = \binom{N}{l}\left(\frac{1+t}{2}\right)^l\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N-l}, \quad l = 0,1,\ldots,N$, полиномы Бернштейна на $[-1,1]$, и пусть $t_{N,l} := \frac{2l-N}{N}, \quad l = 0,1,\ldots,N$. Пусть тригонометрические полиномы $m_N^a(\xi) = 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{N} h_N^a(l)e^{il\xi}$, $N \in \mathbf{N}$, с действительными коэффициенами $h_N^a(k)$ удовлетворяют следующим условиям $|m_N^a(\xi)|^2 = B_N^a(\cos\xi), \quad m_N^a(0) = 1$, где $B_N^a(t) = \sum_{l=0}^{N} f_a(t_{N,l})b_l^N(t)$. Определим функции $\varphi^{a,N}$ and $\psi^{a,N}$ через их преобразования Фурье

$$\hat\varphi^{a,N}(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} m_N^a(\xi 2^{-l}), \quad \hat\psi^{a,N}(\xi) := e^{-i\xi/2}\overline{m_N^a(\xi/2+\pi)}\prod_{l=2}^{\infty} m_N^a(\xi 2^{-l}), \ \xi \in \mathbf{R}.$$

Теорема 1. *Если* $a < \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 4 + \ln 3}$, *то всплеск* $\psi^{a,N}$ *порождает ортонормированный базис в* $L_2(\mathbf{R})$: $\{2^{j/2}\psi^{a,N}(2^j \cdot -k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$. *Более того,* $supp\,\psi^{a,N} = [-(N-1),N]$ *и существует константа* μ *такая, что* $\varphi^{a,N}, \psi^{a,N} \in C^{\mu N}, \ N \in \mathbf{N}$.

Пусть

$$t_\varphi^* := \int_{\mathbf{R}} t\,|\varphi(t)|^2\,dt / \int_{\mathbf{R}} |\varphi(t)|^2 dt;$$
$$\Delta_\varphi := \{\int_{\mathbf{R}}(t-t^*)^2\,|\varphi(t)|^2 dt / \int_{\mathbf{R}} |\varphi(t)|^2 dt\}^{1/2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\Phi^{a,N} := \varphi^{a,N} * \varphi^{a,N}(-\cdot)$ *- фундаментальная интерполирующая масштабирующая функция, соответствующая модифицированным всплескам Добеши, а* Φ^M *- такая же функция для всплесков Мейера. Тогда*

$$\limsup_{N\to\infty} \Delta_{\hat\Phi^{a,N}}\Delta_{\Phi^{a,N}} \le \Delta_{\hat\Phi^M}\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)\|\Phi^M\|_2} < \infty.$$

Е. Д. Нурсултанов (Караганда)

ТЕОРЕМА ХАРДИ — ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ.

Ортогональную систему $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем регулярной если существует константа B, что верно

1) для любого отрезка e из $[0,1]$ и $k \in \mathbf{N}$ $\left|\int_e \phi_k(x)dx\right| \leq B\min(|e|, 1/k)$

2) для любого отрезка w из $\mathbf{Z}$ и $x \in [0,1]$ $\left|\sum_{k\in w} \phi_k(x)\right| \leq B\min(|w|, 1/x)$

Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}^n}$ назовем обобщенно монотонной если найдется $c > 0$, что для любого $k \in \mathbf{N}^n$ верно $|a_k| \leq \frac{c}{|Q_k|}\left|\sum_{r\in Q_k} a_r\right|$ где $Q_k = \{r \in \mathbf{N}^n : 1 \leq r_j \leq k_j,\ \ j = 1, ..., n\}$.

Комплекснозначную функцию $f(x)$ назовем обобщенно монотонной в $[0,1]^n$, если существует число D, что для любого $x \in [0,1]^n$ верно $|f(x)| < D\frac{1}{|Q_x|}\left|\int\limits_{Q_x} f(x)dx\right|$, где $Q_x = \{y \in [0,1]^n : \quad y_i \leq x_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$.

Пусть $\Psi_1 = \{\psi_k^1(x)\}_{k=1}^{\infty} \ldots \Psi_n = \{\psi_k^n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированные в $L_2[0,1]$, регулярные в $[0,1]$ системы ф-ий. Определим регулярную систему $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbf{N}^n}$ в $[0,1]^n$ следующим образом

$\phi_k(x) = \phi_{k_1\ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{k_1}(x_1)\ldots\psi_{k_n}(x_n)$.

Теорема. *Пусть система* $\Phi = \{\phi_k\}_{k\in\mathbf{N}^n}$ *регулярна в* $[0,1]^n$.

а)Если $1 < p < 2$ *и* f *-обобщенно-монотонна, тогда для того, чтобы* $f \in L_p[0,1]^n$ *необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье сходился ряд*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2}\ldots k_n^{p-2}|a_{k_1\ldots k_n}|^p \tag{1}$$

б) Если $2 < p < \infty$ *и коэффициенты Фурье* $a = \{a_k\}_{k\in\mathbf{N}^n}$ *функции* f *по системе* Φ *обобщенно-монотонны, то для того, чтобы* $f \in L_p[0,1]^n$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд (1) сходился.*

Так как тригонометрические системы, мультипликативные системы с ограниченными образующими регулярны, а условие обобщенной монотонности более слабое чем монотонность и квазимонотонниость то из Теоремы следует соотвстствующие результаты В. М. Кокилашвили, Ф. Морица, М. Ф. Тимана и А. И. Рубенштейна, а так же М.И.Дьяченко при $2 < p < \infty$.

Е. Д. Нурсултанов, К. С. Сайдахметов (Караганда)

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

В данной работе изучается вопрос о нижней оценке нормы оператора свертки $(Af)(x) = K * f(x)$ действующий из L_p в L_q $1 < q < p < +\infty$.

Одним из трактовок неравенства О'Нейла для указанных операторов является следующая оценка:

$$\|A\|_{L_p \to L_q} \leq (p,q) \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right|,$$

где E–множество всевозможных ограниченных, измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbf{R}^n$, $|e|$–мера лебега множества e.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leq q < +\infty$, $K(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbf{R}^n$. *Если оператор* $(Af)(x) = K * f(x)$ *ограниченно действует из* L_p *в* L_q, *то существует константа* $C(p,q,n)$ *такая, что*

$$C \sup_{e \in Q(C)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right| \leq \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Здесь $Q(C)$ – *множество всех измеримых по Лебегу множеств конечной меры, удовлетворяющих условию* $|e + e| \leq C \cdot |e|$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Тогда запись $x \leq y$ будет обозначать, что $x_i \leq y_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Для пары $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^n$ введем операцию $x \circ y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n)$, сопоставляющую вектор, полученный умножением координат с одинаковыми номерами.

Пусть $d \in \mathbf{R}^n_+$. Через $I_d(z)$ обозначим прямоугольный параллелепипед с центром в точке $z \in \mathbf{R}^n$ и со сторонами, параллельными координатным осям, имеющими длины $d_1, \dots, d_n$. То есть $I_d(z) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_i - z_i| < \frac{d_i}{2}\}$.

Определение. *Пусть* $h \in \mathbf{R}^n_+$, $m \in \mathbf{Z}^n_+$; $I_d(x)$ - *некоторый параллелепипед. Множество* $Q_d(x,m,h) = \bigcup_{0 \leq i \leq m} I_d(x + i \circ h)$, *назовем гармоническим отрезком, порожденным параллелепипедом* $I_d(x)$. *Множество всех гармонических отрезков обозначим через* Q.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < +\infty$. *Если оператор* $(Af)(x) = K * f(x)$ *ограниченно действует из* L_p *в* L_q, *то существует константа* $C = C(p,q,n)$ *такая, что*

$$C \sup_{e \in Q} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right| \leq \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Б. П. Осиленкер (Москва)

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СЛЕДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАКСА

Рассмотрим нелинейную изоспектральную цепочку, удовлетворяющую уравнению Лакса

$$J' = JM - MJ \tag{1}$$

$$J = J(t) = \{a_n(t), b_n(t)\}(n = 0, 1, \ldots; t \in [0, T); T < \infty)$$

$M = M(t)$-кососимметрическая матрица. Метод обратной задачи для уравнения (1) имеет вид

$$J(0) = \{a_n(0), b_n(0)\}(n = 0, 1, \ldots) \longrightarrow d\mu(x) \longrightarrow d\mu(x, t) \longrightarrow J(t) = \{a_n(t), b_n(t)\}$$

$(n = 0, 1, \ldots)$ Как известно, если равномерно по $t \in [0, T)$ выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} a_n(t) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n(t) = 0 \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} [|a_n(t) - a_{n+1}(t)| + |b_n(t) - b_{n+1}(t)|] < \infty, \tag{3}$$

то $S_\mu = Supp\ \mu(x, t) = [-1, 1] \bigcup S$, где S - конечное или счетное множество вещественных чисел вне [-1,1] с предельными точками +1 , -1, мера $\mu(x, 0)$ абсолютно непрерывна и положительна на (-1,1). Положим $d\mu(x, t) = \rho(x, t) \cdot d\mu(x, 0) = \rho(x, t) w(x) dx$.

Теорема. Пусть$\{\delta_n(t)\}(n = 0, 1, \ldots)$ - произвольная последовательность ненулевых вещественных чисел, для которых равномерно по $t \in [0, T)$ выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = \delta(t) \neq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n(t) - \delta_{n+1}(t)| < \infty$$

Если элементы якобиевой матрицы $J(t)$ удовлетворяют предположениям (2), (3), то равномерно для всех λ, принадлежащих любому компакту $K \subset (-1, 1)$, и $t \in [0, T)$ имеют место следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(t)[p^2_{n+1}(x, t)] - \frac{\delta_{n+1}(x,t)}{\delta_n(t)} p_n(x, t) p_{n+2}(x, t)] = \frac{2}{\pi} \delta(t) \frac{\sqrt{1-x^2}}{\rho(x,t) w(x)}$;

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [\delta_n(t) a_{n+1}(t) - \delta_{n-1}(t) a_n(t)] p^2_n(x, t) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} [\delta_n(t) a_{n+2}(t) - \delta_{n+1}(t) a_{n+1}(t)] p_n(t, x) p_{n+2}(t, x)$
$+ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n(t) [b_{n+1}(t) - b_n(t)] p_n(t, x) p_{n+1}(t, x) = \frac{1}{\pi} \delta(t) \frac{\sqrt{1-x^2}}{\rho(x,t) w(x)}$ (формула следа)

При $t = 0$ частные случаи теоремы получены А.Матэ, П.Неваи и В. Тотиком (1985, 1986). Условиям теоремы удовлетворяет, например, односолитонное решение цепочки Тоды.

М. А. Осипцев (Саратов)

ОБ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ

Пусть $f(z)$ – сохраняющее ориентацию гармоническое отображение единичного круга $U = \{|z| < 1\}$ в себя. Тогда $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \bar{z}^{-n}. \tag{1}$$

В [1] П.Дюреном и Г.Шобером был развит вариационный метод для решения экстремальных проблем в семействе отображений, имеющих представление (1), и получена точная оценка

$$|c_{-n}| \leq \frac{n+1}{n\pi} \sin\frac{\pi}{n+1}, \quad n = 1, 2, ...$$

Экстремальная функция отображает U на внутренность правильного $(n+1)$ -угольника, вписанного в единичную окружность.

Тем же методом в [2] получен ряд других оценок, в частности

$$|c_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |c_n + c_{-n}| \leq \frac{4}{n\pi}, \quad n = 1, 2, ...$$

Экстремальная функция в обоих случаях отображает круг в себя.

В настоящей работе получен следующий результат:

Теорема *Пусть f – сохраняющее ориентацию гармоническое отображение единичного круга в себя, имеющее представление (1). Тогда справедливы следующие оценки*

$$\mathrm{Re}(c_{n+1} - c_n) \leq \frac{2}{\pi} \sin\frac{2\pi}{2n+1}, \ n = 2k-1, \ k = 1, 2, ...,$$

$$\mathrm{Re}(c_{n+1} - c_n) \leq \frac{4}{\pi} \sin\frac{\pi}{2n+1}, \ n = 2k, \ k = 1, 2, ...$$

Экстремальная функция отображает круг в себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Duren, G. Schober, *A variational method for harmonic mapping onto convex region.*// Complex Variables Theory Appl 9(1987), 153–168.

2. P. Duren, G. Schober, *Linear extremal problems for harmonic mappings of the disk*// Proc.Amer.Math.Soc. 106(1989),967-973.

П.В. Парамонов, К.Ю. Федоровский (Москва)

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯМИ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОМПАКТАХ В $\mathbb{R}^2$

Пусть $Lu = c_{11}u_{x_1x_1} + 2c_{12}u_{x_1x_2} + c_{22}u_{x_2x_2}$ — эллиптический дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^2$ с постоянными комплексными коэффициентами c_{11}, c_{12} и c_{22} (см. [1]) и характеристическими корнями λ_1 и λ_2.

В настоящей заметке рассматриваются условия равномерной приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями (в частности, полиномиальными) уравнения

$$Lu = 0. \tag{1}$$

Известно, что равномерный предел последовательности решений уравнения (1) в некоторой области снова является решением (в той же области), поэтому условие $\{Lf = 0 \text{ на } X^\circ\}$ (X° – внутренность X) является естественным необходимым условием равномерной приближаемости функций решениями уравнения (1).

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $L(E)$ класс функций f, определенных и удовлетворяющих (в классическом смысле) уравнению (1) в некоторой (своей для каждой функции) окрестности множества E. Через P_L мы обозначим совокупность всех L-полиномов (т.е. полиномиальных решений уравнения (1)).

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$, ∂X — его граница, а $C(X)$ — пространство непрерывных на X (комплекснозначных) функций с равномерной нормой. Пусть $\partial_* X = \{z \in \partial X \mid d_X(z) > 0\}$, где $d_X(z) = \liminf\limits_{\delta\to 0}[\delta^{-1}\operatorname{diam}(B(z,\delta) \setminus X)]$, а $B = B(a,r)$ — открытый круг с центром $a \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $r > 0$.

Пусть $P_L(X)$ и $C_L(X)$ – равномерные замыкания в $C(X)$ подпространств $\{p|_X : p \in P_L\}$ и $\{f|_X : f \in L(X)\}$ соответственно. Справедливы следующие достаточные условия равномерной приближаемости функций решениями уравнения (1):

Теорема 1. *Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$.*
(а) Если $\partial X = \partial_* X$, то $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.
(б) Если дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$ компакта X связно, то $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.

Можно доказать, что для каждого из рассматриваемых здесь операторов L найдется такой эллипс или окружность X_L, что $P_L(X_L) = C(X_L)$. Следовательно, условие связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ не является необходимым для совпадения $P_L(X)$ и $C(X) \cap L(X^\circ)$ ни при каком L.

На наш взгляд представляет интерес задача описания компактов $X \subset \mathbb{R}^2$ таких, что $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$ или $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$ соответственно.

Насколько известно авторам, эта задача полностью решена только в случае $L = \Delta$ и в непосредственно вытекающих из него случаях $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ (т.е. для операторов L с вещественными, с точностью до общего комплексного множителя, коэффициентами) (см. [2]). Для случая $L = (\partial/\partial\bar{z})^2$ (и вытекающих из него случаев $\lambda_1 = \lambda_2$) имеются результаты частного характера (см. [3], [4] и [5]), позволяющие сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *(а) при $\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_2$ для любого компакта X в $\mathbb{R}^2$ имеет место равенство $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$;*

(b) при $\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda_2$ равенство $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$ справедливо если и только если граница компакта X совпадает с границей бесконечной компоненты дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus X$ компакта X.

Гипотеза 2(б) не может быть распространена на случай $\lambda_1 = \lambda_2$ (см. [6]). Более того, для случая $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$ не ясно даже, в каких терминах могут быть сформулированы необходимые и достаточные условия полиномиальной приближаемости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. C^1-приближения функций полиномиальными решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbf{R}^2$. М. МГУ. 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ. No.2965–В96 от 8.10.1996.

[2] Парамонов П. В. C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbf{R}^n$. Матем. сборник. 1993, т.184, No.2, с.105–128.

[3] Carmona J.J. Mergelyan approximation theorem for rational modules. J. Approx. Theory. 1985. v.44, pp.113–126.

[4] Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy-Riemann operator. Pasific J. of Math. 1993. v.159, pp.379–396.

[5] Федоровский К.Ю. О равномерных приближениях функций n-аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbf{C}$. Матем. заметки. 1996. т.59. No.4, с.604–610.

[6] Федоровский К.Ю. Некоторые новые достаточные условия равномерной приближаемости функций n-аналитическими полиномами на плоских компактах. Тезисы докладов ЛМШК "Алгебра и анализ". Казань, 1997. с.222–224.

С. С. Платонов (Петрозаводск)

О ЦЕЛЫХ L_p-ВЕКТОРАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Для построения теории приближений функций на многообразиях требуется определить какие-нибудь аналоги целых функций экспоненциального типа. Одно из возможных определений целых L_p-векторов экспоненциального типа дается в настоящей работе.

Пусть M – произвольное полное риманово многообразие, B – многообразие единичных касательных векторов к M. Точки из B имеют вид $a = (x, \xi)$, где $x \in M$, $\xi \in \sigma(x)$, $\sigma(x)$ – множество единичных касательных векторов (единичная сфера) к многообразию M в точке x. Пусть dx – риманова мера на M, $d\omega_x$ – мера Лебега на $\sigma(x)$, $dv = dx\, d\omega_x$ – мера Лиувилля на B. Введем банаховы пространства (БП) $L_p(M) := L_p(M, dx)$, $L_p(B) := L_p(B, dv)$. Естественным образом $L_p(M)$ вкладывается в $L_p(B)$, если для $f(x) \in L_p(M)$ положить $f(x, \xi) := f(x)$.

Пусть S^t, $t \in \mathbf{R}$, — геодезический поток на B [1], тогда диффеоморфизмы S^t сохраняют меру Лиувилля. Семейство операторов $(U(t)F)(a) := F(S^t a)$, $F(a) \in L_p(B)$, образует сильно непрерывную однопараметрическую группу операторов в БП $L_p(B)$. Функцию $f(x) \in L_p(M)$ будем называть *целым L_p-вектором степени ν* (экспоненциального типа), если функция f является целым вектором степени ν относительно группы $U(t)$ в смысле определения [2]. Обозначим множество целых L_p-векторов степени ν через $\mathcal{E}_{\nu p}$.

Пусть M – произвольное компактное симметрическое пространство ранга 1 (КРОСП). Обозначим через Δ оператор Лапласа – Бельтрами на M. Известно, что спектр оператора $(-\Delta)$ дискретный, неотрицательный и конечнократный. Пусть P_λ – собственное подпространство оператора $(-\Delta)$, отвечающее собственному значению λ.

Теорема. *Если M - КРОСП, то $\mathcal{E}_{\nu p} = \sum_{\lambda \leq \nu} P_\lambda$. В частности, если $M = S^n$ — n-мерная сфера, то $\mathcal{E}_{\nu p}$ совпадает с с множеством сферических полиномов степени $\leq \nu$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 95-01-01391.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. *Эргодическая теория.* М.:Наука, 1980.

2. Терехин А. П. // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Вып. 2. Саратов, 1975.

3. Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М.: Мир, 1964.

М.Г. Плешаков (Саратов).

КОМОНОТОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При каждом $r \in \mathbf{N}$ пусть $\mathbf{W}^r$ – класс 2π-периодических функций, имеющих абсолютно непрерывную производную и

$$|f^{(r)}(x)| \leq 1, \ ..\mathbf{R}.$$

Будем рассматривать 2π-периодические функции $f \in \mathbf{W}^r, r \geq 2$.

Обозначим $\mathbf{T}_n, n \in \mathbf{N}$ - пространство тригонометрических полиномов вида

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad x \in \mathbf{R}$$

порядка $\leq n$.

Пусть на промежутке $[-\pi, \pi)$ заданы $2s$ точек y_i

$$-\pi \leq y_{2s-1} < \ldots < y_0 < \pi.$$

Отправляясь от этих точек, при помощи равенства

$$y_i := y_{i+2s} + 2\pi$$

определим точки y_i для всех целых индексов i.

Обозначим $Y := \{y_i\}_{i=0}^{2s-1}$,

$$\Pi(x) := \prod_{i=0}^{2s-1} \sin \frac{1}{2}(x - y_i),$$

и заметим, что $\Pi \in \mathbf{T}_s$, т.е. Π - тригонометрический полином порядка s.

Будем писать $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, если f – непрерывно дифференцируемая функция и

$$f'(x)\Pi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Положим

$$E_n^{(1)}(f;Y) := \inf_{\tau \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbf{T}_n} \|f - \tau\|.$$

Доказывается

Т е о р е м а 1. *Если $f \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbf{W}^r$, $r \geq 2$, то*

$$E_n^{(1)}(f;Y) \leq \frac{c}{n^r}.$$

где $c = c(r, Y)$ - постоянная, не зависит от n и f.

Построен контрпример, а именно, справедлива

Т е о р е м а 2. *Для любых $s \in \mathbf{N}$, $Y \in \mathbf{Y}_{2s}$, $k > 3$, $n \in \mathbf{N}$ существует фу $f(x) := f(x; s, Y, k)$ такая, что*

$$f \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbf{C}^{(1)}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_n^{(1)}(f;Y)}{E_n(f)} = \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Гилевич Я., Шевчук И.А. *Комонотонное приближение*, Фунд. и прикл. математика, 1996, **2**, N 2, 319-363.

2. Шведов А.С. *Комонотонное приближение функций многочленами*, ДАН СССР, 1980, 250, N 1, 39-42.

Ю. В. Покорный, С. А. Шабров (Воронеж)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p\frac{du}{dx}\right)+Q_\sigma' u=F_\sigma', \quad (0\le x\le l) \tag{1}$$

где Q и F - односторонне непрерывные функции ограниченной вариации, может считаться уравнением Эйлера для квадратичного функционала

$$\Phi(u)=\int_0^l \frac{pu_x'}{2}du+\int_0^l \frac{u^2}{2}dQ-\int_0^l udF,$$

типичного для физических задач, где в качестве решений уравнения (1) особенно важно иметь не обобщенные (Соболеву - Шварцу), как это принято математиками, функции, а самые обычные поточечно определенные функции, допускающие анализ перемен знака, экстремумов и пр. Это становится возможным, если уравнение (1) рассматривать в классе непрерывных функций ограниченной вариации, производную по x понимать по Лебегу, а производную по σ определить следующим образом.

Пусть σ – строго монотонная на $[0,l]$ функция и R_σ – пополнение $[0,l]$ по метрике $\varrho(x,y)=\sigma(y+0)-\sigma(x-0)$ (при $x<y$). Множество R_σ оказывается неархимедовым континуумом и отличается от $[0,l]$ расщеплением на пары точек разрыва σ. Для односторонне непрерывной функции ограниченной вариации $z(x)$ производная $\frac{dz}{d\sigma}$ аналогична производной Лебега и оказывается трехзначной в точках разрыва σ, определяется парой обычных односторонних относительных производных $\frac{dz}{dx}(x-0)$, $\frac{dz}{dx}(x+0)$ и промежуточным значением $\frac{z(x+0)-z(x-0)}{\sigma(x+0)-\sigma(x-0)}$. Уравнение (1) в таких точках превращается а три равенства, промежуточное из которых имеет вид

$$\Delta\left(pu_x'\right)(\xi)+u(\xi)\Delta Q(\xi)=\Delta F(\xi)$$

(здесь $\Delta\varphi(\xi)$ обозначает $\varphi(\xi+0)-\varphi(\xi-0)$). При таком подходе для уравнений вида (1) удается построить точную параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до теорем Штурма.

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 96-01-00355) и гранта С.-Петербургского ун-та в области естественных наук (N 95-0-1.8-97)

М. К. Потапов

О КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

Пусть $L_{p,\alpha}$ – множество функций, измеримых при $1 \le p < \infty$ и непрерывных при $p = \infty$ на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p[-1,1]$, $E_n(f)_{p,\alpha}$ – наилучшее приближение $f \in L_{p,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$; $E(p,\alpha,r)$ – класс функций $f \in L_{p,\alpha}$ и таких, что $E_n(f)_{p,\alpha} \le Cn^{-r}$, $r > 0$ при $n = 1,2,\ldots$.

Для каждой $f \in L_{p,\alpha}$ введем оператор обобщенного сдвига

$$T_t(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + 3(1-x^2)\sin^2 t\sin^4\varphi - 2\sin^2 t\sin^2\varphi -$$

$$-\left(x\cos t + \cos\varphi\sin t\sqrt{1-x^2}\right)^2) \times f(x\cos t + \cos\varphi\sin t\sqrt{1-x^2})d\varphi.$$

Для каждой $f \in L_{p,\alpha}$ введем обобщенный модуль гладкости

$$\hat{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{|t|\le\delta} \|f(x) - T_t(f,x)\|_{p,\alpha}.$$

Пусть $H(p,\alpha,r)$ – класс функций $f \in L_{p,\alpha}$ и таких, что $\hat{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha} \le C\delta^r$, $r > 0$.

Теорема. *Пусть числа p, α и r такие, что $1 \le p \le \infty$, $0 < r < 2$, $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ при $p = 1$, $1 - \frac{1}{2p} < \alpha < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$, $1 \le \alpha < \frac{3}{2}$ при $p = \infty$. Тогда классы функций $E(p,\alpha,r)$ и $H(p,\alpha,r)$ совпадают.*

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, (проект N 97-01-00010) и программы поддержки научных школ (грант N 96/97-15-96073).

Л. Н. Полякова (Санкт-Петербург)

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ

Рассматривается задача минимизации функции

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x).$$

$f_i(x)$, $i \in I = \{1, \dots, s\}$ - дважды непрерывно дифференцируемые сильно выпуклые R^n функции, в предположении существования такой положительной константы $M \geq$ то выполнено неравенство

$$\langle f_i''(x)w, w\rangle \leq M||w||^2 \; \forall x \in R^n, \quad \forall w \in R^n, \quad \forall i \in I,$$

$f_i''(x)$ - матрицы вторых производных функций f_i в точке x. Обозначим через $m > 0$ нстанту сильной выпуклости функции f.

Пусть найдена точка x_k. Если точка x_k не является точкой минимума функции f R^n, то положим $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{M}w(x_k)$, где направление спуска $w(x_k)$ находится в ультате решения оптимизационной задачи

$$\min_{w \in R^n} \max_{i \in I} \left\{ (f_i(x_k) - f(x_k))M + \langle f_i'(x_k), w\rangle + \frac{1}{2}||w||^2 \right\}.$$

Теорема 1. *В данном методе при произвольной начальной точке x_0 последова-льность $\{x_k\}$ сходится к точке минимума x^* функции f со скоростью геометри-кой прогрессии:*

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq q(f(x_k) - f(x^*)),$$

$q = 1 - \frac{m}{M}$, *и существует положительное число Q, что справедливо неравенство*

$$||x_k - x^*|| \leq Q(\sqrt{q})^k.$$

Работа поддержана РФФИ, грант N 97-01-00499

ЛИТЕРАТУРА

1.Polak E. *Basics of minimax algorithms.* In Nonsmooth Optimization and Related ›ics / Ed. Clarke F., Demyanov V.F., Giannessi F. N.Y.: Plenum Press, 1989. Pp. 343-
!.

А.К.Рамазанов (Калуга)

О ПОЛИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Через $AL_2(D,\alpha)$, $\alpha > -1$, как обычно, будем обозначать пространство функций f, аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$, с конечной нормой

$$||f||_2 = \left\{ \int \int_D (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^2 \, dxdy \right\}^{1/2}; \qquad (1)$$

$A_m L_2(D,\alpha)$ – пространство m-аналитических в D функций f с конечной нормой, определяемой равенством (1).

Как следует из [1], любую полианалитическую функцию $f \in A_m L_2(D,\alpha)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} \left\{ (1-|z|^2)^k F_k(z) \right\}, \qquad (2)$$

где $F_k \in AL_2(D,\alpha)$.

Для данного мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \ldots, n_{m-1})$, с неотрицательными компонентами, через $r_{(n)}(z;f) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} \left\{ (1-|z|^2)^k r_{n_k}(z;f) \right\}$ будем обозначать m – рациональную функцию наилучшего приближения степени не выше (n) для функции (2) в метрике (1), где $r_{n_k}(z;f)$ – рациональная функция степени не выше n_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Теорема. *Если F_k не является рациональной функцией степени не выше n_k, то $\deg\{r_{n_k}(z;F_k)\} = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Замечание. *При $\alpha = 0$ теорема ранее установлена в [2].*

Теорему можно использовать для доказательства различных свойств полирациональных приближений. В частности, из этой теоремы следует, что наименьшие полирациональные уклонения функции $f \in A_m L_2(D,\alpha)$ в метрике (1) строго монотонно убывают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов А.К.*Представление весовых пространств полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств* // Алгебра и анализ. – Тезисы докл.конференции, посвященной 100-летию Б.М.Гагаева.– Казань, 1997.– С.176-177.

2. Рамазанов А.К. *О свойствах полирациональных функций наилучшего приближения в метрике $L_2(D)$* // Современные проблемы теории функций и их приложения.– Тез. докл. – Саратов, 1996. – С.91.

Д. В. Прохоров (Саратов)

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ТОЖДЕСТВЕННОЙ

Пусть S^M - класс голоморфных и однолистных в единичном круге функций $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, удовлетворяющих там неравенству $|f(z)| < M$. Класс S^M служит замкнутой окрестностью тождественной функции $f(z) = z$. Число $T = \log M$ выражает радиус этой окрестности.

Пусть линейный функционал I в классе S^M задается вектором $\lambda = (\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ с комплексными координатами по формуле $I(f) = \Re \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k$. Экстремальные задачи о максимуме I в классе S^M тесно связаны с характеристиками граничной гиперповерхности ∂V_n^M множества $V_n^M = \{(a_2, \ldots, a_n) : f \in S^M\}$ системы коэффициентов класса S^M.

Дифференциальное уравнение Левнера генерирует управляемую систему для фазовых координат $x(t)$, $0 \le t \le T$, $x(0) = (0, \ldots, 0)$, $x(T) = (a_2, \ldots, a_n)$, а экстремальная задача описания ∂V_n^M индуцирует сопряженную систему относительно вектора $\Psi(t)$ с условиями трансверсальности на правом конце $\Psi(T) = \lambda$ (см. [1]).

Для M, близких к 1, матрица вариаций вектора Ψ близка к единичной матрице. Поэтому условия трансверсальности выполняются для единственной точки из множества начальных данных сопряженной системы, что превращает их наряду с принципом максимума в необходимые и достаточные условия максимизации I.

Теорема. *Для каждого невырожденного линейного функционала I существует $M(I)$ такое, что для всех $M \in (1, M(I))$ максимум I в классе S^M достигается для единственной функции $f \in S^M$.*

Экстремальная функция удовлетворяет необходимым условиям максимума. Радиус $\log M$ допускает оценивание на основании теоремы об обратном отображении.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант по.95-01-00345а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Д. В. *Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций*// Матем. сборник.–Т.181.–No.12.– 1990.–С. 1659–1677.

А.-Р.К.Рамазанов (Махачкала)

О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

Для ограниченных на $\Delta = [a, b]$ функции $f(x)$ и знакочувствительного веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ при $\varepsilon > 0$ пусть Δ_- и Δ_+ – замыкания множеств $\Delta(p_- \geq \varepsilon)$ и $\Delta(p_+ \geq \varepsilon)$; $M(x, \varepsilon)$ и $m(x, \varepsilon)$ – пределы при $\delta \to 0$ соответственно величин

$$\sup\{f(t) : t \in [x - \delta, x + \delta] \wedge p_-(t) \geq \varepsilon\} \ (x \in \Delta_-) \text{ и}$$
$$\inf\{f(t) : t \in [x - \delta, x + \delta] \wedge p_+(t) \geq \varepsilon\} \ (x \in \Delta_+);$$
$$|f|_{p,\Delta} = \sup\{f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x) : x \in \Delta\}.$$

Величину $\omega_\varepsilon(f, p, \delta) = \sup\,[M(x, \varepsilon) - m(x, \varepsilon)]^+$, где супремум берется по всем $x \in \Delta_-$ и $y \in \Delta_+$ с $|x - y| \leq \delta$, положим равной нулю на $[0, d)$, если $d = dist(\Delta_-, \Delta_+) > 0$, и равной нулю при $\delta \geq 0$, если хотя бы одно из множеств Δ_- и Δ_+ пусто. При каждом $\varepsilon > 0$ функция $\omega_\varepsilon(f, p, \delta)$ полунепрерывна сверху и не убывает по $\delta \geq 0$, непрерывна в нуле.

Равенство $\omega_\varepsilon(f, p, 0) = 0$ при всех д.м. $\varepsilon > 0$ эквивалентно существованию полиномов $Q_n(x)$ с $|Q_n - f|_{p,\Delta} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Рассмотрев семейство $\{\omega_\varepsilon(\delta)\}$ функций типа модуля непрерывности и классы ограниченных 2π-периодических функцуий $f(x)$ с $\omega_\varepsilon(f, p, \delta) \leq \omega_\varepsilon(\delta) \quad (\Delta = [0, 2\pi])$, получены аналоги прямых и обратных теорем теории приближения полиномами в p-норме $|\cdot|_{p,\Delta}$.

Для доказательства прямых теорем построены операторы сглаживания в p-норме.

Обратные теоремы получены через введенную Е.П.Долженко и Е.А.Севастьяновым новую характеристику $W(p, \tau)$ – свободу системы "Знакочувствительный вес $p(x)$ – Множество τ тригонометрических полиномов порядка $\leq n$". Для оценки $W(p, \tau)$ применяется следующее неравенство типа С.Б.Стечкина – П.Л.Ульянова для равномерных норм тригонометрического полинома $T(x)$ порядка $n (n = 0, 1, \ldots)$ по отрезку $\Delta = [-\pi, \pi]$ и по подмножеству $E \subset \Delta$ с мерой $|E| = \mu > 0$:

$$||T||_\Delta \leq T_{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(ctg\frac{\mu}{16} - 1\right)\right) ||T||_E$$

$(T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ – полином Чебышева).

К. М. Расулов (Смоленск)

О РЕШЕНИИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Пусть T– односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой Γ.

Рассматривается задача, состоящая в отыскании в области T полианалитической порядка n функции $F(z)$ (т.е. решения уравнения $\partial^n F(z)/\partial \bar{z}^n = 0$, $n > 1$), удовлетворяющей почти всюду па Γ условию

$$F(t) = f(t),\ t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $F(t)$ – угловые граничные значения искомой функции, а $f(t)$- заданная почти всюду на Γ функция.

Ясно, что точный смысл условия (1) каждый раз должен быть уточнён в зависимости от предположения о кривой Γ и о классах функций, которым принадлежат F и f.

Отметим, что в случае $n = 2$ (т.е. в классе бианалитических функций) задача (1) впервые изучалась в работах А. В. Бицадзе [1] и Н. Т. Хопа [2].

Важно также отметить, что многие прикладные задачи комплексного анализа сводятся к задачам типа (1) в классах полианалитических и полигармонических функций.

В данном сообщении приводится метод решения задачи (1) в случае, когда кривая Γ состоит из n попарно неродственных аналитических дуг и $f(t) \in L_1(\Gamma)$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Бицадзе А. В.*Нормально разрешимые эллиптические краевые задачи* //Докл. АН СССР.–1965.–Т. 164, No 6.–С. 1218-1220.

2.Хоп Н. Т. *О нормальной разрешимости задачи Дирихле для одной эллиптической системы*//Дифференциальные уравнения.–1966.–Т. 2, No 2.–С. 214-225.

С. В. Рогозин (Минск)

ЛОКАЛЬНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Рассматривается задача локального продолжения L_p-решений нелинейного интегрального уравнения 1-ого рода (см., например, [1])

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(\lambda,t,u(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = h(x), \quad 0 \le x \le a, \tag{1}$$

в случае дифференцируемой функции $f(\lambda, t, .)$. Предлагаемый подход базируется на новой теореме о неявной функции, установленной в [2].

Теорема 1. *Пусть U, V, U_0, V_0-Банаховы пространства, $U_0 \subseteq U, V_0 \subseteq V$, и единичный шар U_0 замкнут в U. Пусть, далее, $O \subseteq \Lambda \times U_0$ и $(\lambda_0, u_0) \in O$. Предположим, что $\Phi : O \to V$ удовлетворяет условиям:*

a) $\Phi(\lambda_0, u_0) = 0$ и оператор $\Phi : O \to V_0$ непрерывен в точке λ_0 равномерно относительно u из некоторой окрестности u_0.

b) Оператор $\Phi : O \to V_0$ имеет производную Гато Φ'_u , непрерывную в точке (λ_0, u_0) как оператор из $\Lambda \times U_0$ в $L(U, V)$.

c) Оператор $\Phi(\lambda_0, .) : O \to V_0$ имеет производную Фреше $\Phi'_u(\lambda_0, u_0)$ в точке u_0, обратимую как из U_0 в V_0 , так и из U в V.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех λ, $\mid \lambda - \lambda_0 \mid \le \delta$ уравнение

$$\Phi(\lambda, u) = 0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $u = u(\lambda)$, $\|u - u_0\| \le \varepsilon$.

Рассматривается также случай монотонной функции f (см. [2]).

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных Исследований Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorenflo R., Vessella S. *Abel Integral Equations. Analysis and Applications.* - - Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1991. - - 216 p.

2. Appell J., Vignoli A., Zabrejko P. P. *Implicit Functions Theorems and Nonlinear Integral Equations.* //Expo.Math. 14 –1996.–P. 385-424.

В. А. Родин (Воронеж)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРДИ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА И BMO

Для $f \in L_1$, $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ и $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ преобразование Харди $H(f)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_k(a) \cos kx, \qquad \text{где} \qquad H_k(a) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Действие данного преобразования как оператора из $E \to E$ для различных функциональных пространств являлось предметом исследования во многих работах. Отметим случаи: $E = L_p$ — Г. Харди; $E = BMO$ и H_1 — Б. И. Голубов (см. [1]). Опираясь на результаты работы [1] в докладе изучается случай $H : E \to F$, где E и F различные пространства Орлича. В качестве следствия получено утверждение работы [1] о неинвариантности пространства BMO относительно преобразования Харди.

Теорема. *Оператор H непрерывен из пространства Орлича L_M с $M(u) = e^u - 1$ в пространство Орлича L_N с $N(u) = e^{\sqrt{|u|}} - 1$ и неограничен из L_M в любое симметричное пространство E, если $E \subset L_N$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 95-01-00135.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б. И. *О преобразованиях Харди и Беллмана пространств H_1 и BMO*// Тез. докл. 8-й Саратовской зимней матем. школы. - 1996 - С. 36-37.

В. С. Рыхлов (Саратов)

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ квадратичный пучок второго порядка $L(\lambda)$, определяемый дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$\left(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\right) + \left(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\right) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu s}, \beta_{\nu s} \in \mathbb{C}$. Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристического уравнения. Предположим, что эти корни лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать $0 < \omega_1 < \omega_2$. Фундаментальная система решений уравнения $l(y,\lambda) = 0$ есть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Обозначим

$$v_{\nu j}(\lambda) := U_{\nu 0}(y_j,\lambda), \quad w_{\nu j}(\lambda) := e^{-\lambda\omega_j} U_{\nu 1}(y_j,\lambda), \quad \nu, j = 1,2,$$

и $V_j(\lambda) := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j(\lambda) := [w_{1j}, w_{2j}]^T$, $j = 1,2$. Пусть $\tau := \omega_2/\omega_1 > 1$, $a_{sj} := \det[W_s, W_j]$, $a_{\bar{s}j} := \det[V_s, W_j]$, $a_{s\bar{j}} := \det[W_s, V_j]$, $a_{\bar{s}\bar{j}} := \det[V_s, V_j]$, $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ (здесь $\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $b_0 := a_{2\bar{2}}/a_{2\bar{1}}$, $\Lambda = \{\lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_2,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{y(x,\lambda_k) := \exp(\lambda_k\omega_2 x) - b_0 \exp(\lambda_k \omega_1 x),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \backslash \{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$, а множество $Y \backslash \{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым с.з.

Основными предположениями являются

$$a_{12} = 0, \quad a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} \neq 0, \tag{1}$$

$$|b_0|^2 < \frac{1}{\tau}. \tag{2}$$

Предположение (1) обеспечивает вырожденность рассматриваемого пучка.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (1), *то система* Y *однократно полна в* $L_2(0,1)$.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (1), *то для минимальности системы* Y *в* $L_2(0,1)$ *достаточно выполнения условия* (2). *При этом явно строятся функции биортогональной к* Y *системы (из-за недостатка места мы опускаем подробности).*

Теорема 3. *Если выполняются условия* (1), *то для безусловной базисности системы* Y *в* $L_2(0,1)$ *достаточно выполнения условия* (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке *РФФИ, грант №97-01-00566*

А. А. Рябинин (Нижний Новгород)

САМОПОДОБНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МЕРЫ И ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКОМ В СРЕДНЕМ ПРОДОЛЖЕНИИ В КЛАССЕ C

Рассмотрим в классе непрерывных на $[-a,\infty)$ функций уравнение

$$\int_{-a}^{a} y(x+t)\,d\sigma(t)=0, \quad \operatorname{var}\sigma(t)<\infty, \quad x\geq 0. \tag{1}$$

Будем говорить, что мера $d\sigma$ обладает свойством периодического в среднем (п. с.) продолжения направо, если для любой функции $f\in C[-a,a]$, удовлетворяющей соотношению $\int_{-a}^{a} f(t)\,d\sigma(t)=0$, существует непрерывное при $t\geq a$ решение $y(t)$ уравнения (1), совпадающее с $f(t)$ на $[-a,a]$. Аналогично определяется п. с. продолжение налево.

Исчерпывающего описания класса мер с указанным свойством в настоящее время нет. Примеры мер, как обладающих, так и не обладающих свойством п. с. продолжения, можно найти в [1].

Исследование свойств п. с. продолжения тесно связано с изучением свойств системы $E_\sigma=\{t^k e^{i\lambda_n t}, 0\leq k\leq m_n-1\}$, где $\{\lambda_n\}$ — нули (m_n — их кратности) преобразования Фурье меры $d\sigma$. Это вытекает из следующего критерия:

Теорема 1 (Седлецкий А. М., [2]). *Мера $d\sigma$ обладает свойством п. с. продолжения направо в классе C тогда и только тогда, когда*
1) дефект E_σ в $C[-a,a]$ равен 1;
2) E_σ — система распространения сходимости (с. р. с.) направо в C.

Нас интересует класс мер, вводимый в следующем определении:

Определение (см. [3]). *Вероятностная мера μ на $[-a,a]$ называется самоподобной, если для любого борелевского множества $A\in[-a,a]$*

$$\mu(A)=\sum_{j=1}^{m} b_j\mu\circ S_j^{-1}(A), \quad 0\leq b_j<1, \quad \sum_{j=1}^{m} b_j=1$$

$$S_j\colon x\mapsto \xi x+\eta_j, \quad -a(1-\xi)=\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_m=a(1-\xi), \quad 0<\xi<1.$$

Если $0<\xi<\min\limits_j \dfrac{\eta_{j+1}-\eta_j}{2a}$, то носитель $\operatorname{supp}\mu$ меры μ — фрактальное множество и $\dim_H(\operatorname{supp}\mu)\leq \dfrac{\log m}{|\log\xi|}$.

Теорема 2. *1) Для любой самоподобной меры μ с фрактальным носителем дефект E_μ в $C[-a,a]$ равен 1.*
2) Пусть мера μ такова, что числа $\eta_1,\ldots,\eta_m$ соизмеримы, квазиполином $b_1e^{i\eta_1 z}+\ldots+b_me^{i\eta_m z}$ имеет только вещественные нули, и ξ является F-числом (см. [4]). Тогда E_μ не является с. р. с. направо (налево) в классе C.

Следствие. *Если самоподобная мера μ с фрактальным носителем удовлетворяет условиям теоремы 2, то она не обладает свойством п. с. продолжения направо (налево) в классе C.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Седлецкий А. М. *Распространение сходимости квазиполиномов*// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44. – No 5. – С. 1131–1149.

2. Седлецкий А. М. *О разрешимости одного интегрального уравнения с начальным условием*// Дифф.уравнения. Сер. матем. – 1975. – Т. XI. – No 12. – С. 2283–2285.

3. Hutchinson J. E. *Fractals and self-similarity*// Indiana Univ. Math. J. – V. 30 – 1981. – P. 713–747.

4. Рябинин А. А. *О флуктуациях нулей преобразования Фурье меры Кантора-Лебега и задача о периодическом в среднем продолжении*// Комплексный анализ, дифф. уравнения, числ. методы и их приложения. I. Комплексный анализ – Институт математики с ВЦ РАН. – Уфа. – 1996. – С. 108–113.

А. А. Сазанов (Екатеринбург)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{D}^r + \sum_{j=0}^{r-1} a_j(t)\mathcal{D}^j$ линейный дифференциальный оператор, $a_j(t) \in L_{p_1}[0,1], 1 \le p_1 \le \infty$, $0 \le j \le r-1$, $l = \max\{j : a_j(t) \not\equiv 0\}$. $W_p^r = \{x : \|\mathcal{D}^r x\|_p \le 1\}, W_p^{\mathcal{L}} = \{x : \|\mathcal{L}x\|_p \le 1\}$. Через Δ_n и Δ_m обозначим две сетки узлов на $[0,1]$. Δ_n определяет подпространство сплайнов, а Δ_m - узлы интерполяции. Пусть H_n и h_n соответственно максимальный и минимальный шаг сетки Δ_n. Последовательность Δ_n назовем нормальной, если существуют константы $C_1, C_2 > 0$ (не зависящие от n) такие, что суммы длин промежутков разбиения Δ_n больших $C_1 H_n$, не меньше C_2. Пусть $\mu = (r - l - p_1^{-1})/(l + p_1^{-1})$, $\nu = (r - l + (p^{-1} - q^{-1})_+ - (p_1^{-1} - q^{-1})_+ - p^{-1})/(l + k + (p_1^{-1} - q^{-1})_+ + p^{-1})$, где k – некоторое целое число. Рассмотрим следующие последовательности Δ_n

$$H_n h_n^{-1} = \begin{cases} \text{произвольное, если } l = 0, p_1 = \infty \\ o(H_n^{-\mu}), \text{ если } 1 \le l \le r-1, p_1 = \infty \\ O(H_n^{-\mu}), \text{ если } 0 \le l \le r-1, 1 \le p_1 < \infty \end{cases} \qquad (1)$$

$$H_n h_n^{-1} = \begin{cases} \text{произвольное,} & \text{если } k = l = 0,\ p = \infty,\ 1 \le q \le p_1 < \infty \\ O(H_n^{-\nu}), & \text{если } 1 \le p_1 < p \le \infty,\ q \ge p \text{ или} \\ & 1 \le q \le p_1 < p < \infty \text{ или} 1 \le p_1 < q < p \le \infty \\ o(H_n^{-\nu}), & \text{если } k^2 + l^2 \ne 0,\ p = \infty,\ 1 \le q \le p_1 < \infty. \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим полиномиальные интерполяционные сплайны (ПИС) $\sigma(t,x)$ степени $r-1$, дефекта d, удовлетворяющие условию

$$\sup_{x \in W_p^r} \|x(t) - \sigma(t,x)\|_p = O(H_n^r). \qquad (3)$$

Пусть k – фиксированное целое число $(0 \le k \le r-1)$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть ПИС $\sigma(t,x)$ степени $r-1$ дефекта d определяемые сетками Δ_n и Δ_m существуют и единственны, и для них выполнены условия (1) и (3)(при $p = 1$ и $p = \infty$.) Пусть кроме того выполнено одно из следующих условий*

1) $1 \le p \le p_1 \le \infty$, $1 \le q \le \infty$;
2) $1 \le p_1 < p \le \infty$, $q \ge p$ *и сетка Δ_n удовлетворяет условию (2);*
3) $1 \le p_1 < p \le \infty$, $1 \le q < p$, *последовательность Δ_n нормальная и удовлетворяет условию (2).*

Тогда, начиная с некоторого номера $n = n_0$ интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны $S(t,x)$ существуют, единственны и

$$\sup_{x \in W_p^r} \|D^k(x(t) - \sigma(t,x))\|_q \sim \sup_{x \in W_p^{\mathcal{L}}} \|D^k(x(t) - S(t,x))\|_q,$$

$1 \le p, q \le \infty$.

Работа поддержана РФФИ, грант № 96 – 01 – 00118.

А. М. Седлецкий (Москва)

БЛИЗКИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)$ и $M = (\mu_n)$ - две комплексные последовательности. Рассмотрим соответствующие системы экспонент

$$\exp(i\lambda_n t), \exp(i\mu_n t) \qquad (1).$$

Исследованию устойчивости полноты (минимальности) систем экспонент в $L^p = L^p(-a;a)$, 1 $p < \infty$, $a > 0$ посвящено достаточное число работ. В них описываются условия близости последовательностей Λ и M, при которых системы (1) одновременно полны (минимальны) в L^p. Отметим два достаточных условия в предположении $|\mathrm{Im}\lambda_n|, |\mathrm{Im}\mu_n| \leq H < \infty$:

1) $\sum |\lambda_n - \mu_n| < \infty, \ 1 \leq p < \infty$

2) $\mathrm{Re}\,\lambda_n = \mathrm{Re}\,\mu_n, \ p = 2$.

Устойчивость равномерной минимальности систем экспонент в L^p исследована значительно меньше. Именно этому вопросу посвящен данный доклад. Автором, в частности, доказано, что каждое из условий 1), 2) сохраняет равномерную минимальность систем экспонент в L^p. Более того, если выполнено условие 1) и одна из систем (1) полна и равномерно минимальна в L^p, то системы (1) эквивалентны в L^p.

Работа поддержана РФФИ, грант N96-15-96049.

А. И. Седов (Магнитогорск)

ОЦЕНКА РАЗНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ниже L_q — комплексное пространство с нормой $\|f\|_{L_q} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$, $1 \le q < \infty$, $\omega(x) > 0$ — вес, $L_\infty = L_\infty[-1,1]$ — вещественное пространство измеримых, ограниченных в существенном функций, $C_1 = C_1[-1,1]$ — вещественное пространство функций с непрерывной производной.

Рассматривается действующий в L_2 самосопряженный оператор T такой, что его собственным числам $\lambda_n = n^2 + cn$ $(c \ge 0)$ соответствуют ортонормированные в L_2 собственные функции v_n $(n = \overline{1,\infty})$.

$P : L_2 \to L_2$ — оператор умножения на функцию p $(p \in L_\infty)$. μ_n — собственные значения оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности, u_n — соответствующие им ортонормированные собственные функции.

Теорема 1. *Если*

$$\|v_n\|_{L_q} \le O(1), \quad 1 \le q \le s, \qquad |(Pv_j, v_k)| \le \frac{O(1)}{|j-k|} \quad (j \ne k), \tag{1}$$

то

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\overline{u_j(y)} - \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\overline{v_j(y)} \right\|_{L_q} \le O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right).$$

При доказательстве оцениваются члены ряда полученного с использованием тождества Гильберта и разложения ядер резольвент операторов T и $T + P$ по собственным числам и функциям.

Теорема 2. *Если*

$$\|v_n\|_{L_q} \le O(1), \quad 1 \le q \le s, \qquad |(Pv_j, v_k)| \le \frac{O(1)}{|j-k|} \quad (j \ne k), \quad \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \infty, \tag{2}$$

то

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} [\mu_j - \lambda_j - (Pv_j, v_j)] \le O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right).$$

Например, для оператора $Ty = -(1-x^2)y'' + xy'$ с собственными числами $\lambda_n = n^2$ и ортонормированными с весом $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ в L_2 собственными функциями $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)$, где $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ [1, с. 186] условия (1) и (2) выполняются при $s < \infty$ и $p \in C_1$.

Для оператора $Ty = -(1-x^2)y'' + (2\lambda+1)xy'$, $0 < \lambda < 1$ [1, с.176] условия (1) и (2) выполняются при $s = 2$ и $p \in C_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. — 2-е изд. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

О.В.Селезнев (Москва)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ВЫБОР ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВ

Исследуется точность приближения сплайнами непрерывных (непрерывно дифференцируемых) случайных процессов. Предполагается, что процесс имеет конечный второй момент его значения (его производных) заданы в n узлах интерполяции. Точность приближения задается средними ошибками в смешанной норме, $1 \leq p \leq \infty$, $||X||_p = (\int_0^1 ||X(t)||^p\,dt)^{1/p}$, где $||X(t)|| = (E|X(t)|^2)^{1/2}$. Показано, что для гельдеровского класса случайных процессов, $m \geq 0$, $1 \geq \beta > 0$,

$$||X^{(m)}(t+s) - X^{(m)}(s)|| \leq K|s|^\beta, \quad t, t+s \in [0,1], K > 0,$$

и интерполяционного сплайна Эрмита $H_k(X)$, $k = 2l+1, l \geq 0, l \leq m \leq 2l+1$, имеет место оценка

$$\sup_{[0,1]} ||X(t) - H_k(X)(t)|| \leq Cn^{-(m+\beta)},$$

на сетках $|t_i - t_{i-1}| \leq c/n$, $C, c > 0$. Для локально стационарных случайных процессов,

$$\lim_{s\to 0} ||X^{(m)}(t+s) - X^{(m)}(s)||/|s|^\beta = c(t)^{1/2} \text{ равномерно по } t \in [0,1],$$

найдена асимпточески оптимальная плотность распределения узлов интерполяции

$h(t) = Ac(t)^{\gamma/2}$, где $\gamma = 1/(m+\beta+1/p), A > 0$. Эта плотность порождает последовательность сеток $T = T(n)$, $\int_{t_{i-1}}^{t_i} h(t) = 1/n$, $\int_0^1 h(t) = 1$. Класс локально стационарных процессов включает, в частности, m-раз интегрированное дробное броуновское движение и близкие процессы.

А. М. Сидоров (Казань)

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть H - гильбертово пространство, $S \subset H$ - банахова алгебра и существует такое a, что $\|v\|_1 \leq a\|v\|_2$, $v \in S$, где $\| \bullet \|_1$ - норма в H, $\| \bullet \|_2$ - норма в S. Зададим оператор $A(\epsilon)\ :\ D(A(\epsilon)) \to H$ формулой $A(\epsilon)v = Bv - \epsilon \sum\limits_{n=1}^{M_1} \sum\limits_{|\alpha|=1}^{M_2} B(n,\alpha)(C(n)v)^{\alpha}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ - мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $(C(n)v)^{\alpha} = \prod\limits_{j=1}^{m} (C(n,j)v)^{\alpha_j}$ для $\alpha_j \geq 1$ и выполнены условия:

1) $B\ :\ D(A(\epsilon)) \to H$ - линейный оператор, замкнутый относительно $\| \bullet \|_1$, μ_ν, $\nu \in N$, - все его различные изолированные и имеющие конечную кратность собственные значения, причём соответствующие им собственные элементы образуют базис Рисса в H;

2) $B(n,\alpha)\ :\ D(B(n,\alpha)) \to H$ и $C(n,j)\ :\ D(C) \to H$ - линейные операторы, замкнутые относительно $\| \bullet \|_1$, $D(A(\epsilon)) \subset D(C)$, $(C(n,j)v)^{\alpha_j} \in D(B(n,\alpha)) \cap S$, при некоторых $b(n.\alpha)$ и $c(n,j)$ $\|B(n,\alpha)v\|_1 \leq b(n,\alpha)\|v\|_2$, $\|C(n,j)v\|_2 \leq c(n.j)(\|Bv\|_1 + \|v\|_1)$, $v \in D(A(\epsilon))$.

В данной работе, продолжающей работы [1] и [2], получены достаточные условия существования аналитически зависящих от ϵ собственных значений оператора $A(\epsilon)$, являющихся возмущениями μ_ν. Даны примеры применения полученных результатов к конкретным нелинейным краевым задачам для дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокейчев В.С. *Спектральные пары нелинейных операторов*//Изв.вузов. Математ.-1986.-N 3.-С.72-75.

2. Sidorov A.M. *On the Analyticity of Spectral Pairs of Nonself - Adjoint Operators* //Journal of Mathematical Sciences.-1995.-V.74.-N 5.-P.1283-1289.

С. П. Сидоров (Саратов)

ОДНО ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРРАТОРОВ

Обозначим B[0,1] пространство ограниченных на [0,1] действительных функций с нормой равномерной сходимости

$$\|f\|_{B[0,1]} = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Имеет место следующее точное неравенство для линейных положительных операторов конечного ранга, являющееся обобщением неравенств П. П. Коровкина [1], В. С. Виденского [2].

Теорема *Пусть* $S_{0,n}$ *есть множество линейных положительных операторов конечного ранга* $n+1$, *действующих из* $C[0;1]$ *в* $B[0;1]$, *таких, что* $L_n(1;x) = 1,\ x \in [0;1]$. *Справедливо неравенство*

$$\left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^{m+2} \le \inf_{L_n\in S_{0,n}} \|L_n(|t-x|^{m+2};x)\|_{B[0;1]} \le \left[\frac{1}{2n}\right]^{m+2},$$

$$m \in N \cup \{0\}.$$

При m=0 получается неравенство В.С. Виденского [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Коровкин П. П. *О порядке приближения функций линейными положительными операторами*//ДАН СССР.–1957.–Т. 114,No 6.–С. 1158–1161.

2. Виденский В. С. *Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга*//ДАН ТаджССР.–1981.–Т. 24,- No 12.–С. 715–717.

Солодов А. П. (Москва) [‡]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ БАНАХОВО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе рассматриваются абсолютно непрерывные функции, определенные на отрезке прямой и принимающие значения в банаховом пространстве.

Определение. Пусть X — банахово пространство. Назовем функцию $F:[a,b]\longrightarrow X$ *абсолютно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любого набора неперекрывающихся отрезков $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n}\|F(b_i)-F(a_i)\|<\varepsilon$.

Хорошо известно, что в случае действительного пространства значений класс неопределенных интегралов Лебега совпадает с классом абсолютно непрерывных функций. Этот факт является следствием теоремы Лебега о дифференцируемости п. в. абсолютно непрерывной функции.

В случае произвольного банахова пространства значений утверждение, аналогичное теореме Лебега, перестает быть справедливым. В книге К. Иосида (см. [1]) приведен пример абсолютно непрерывной банахово-значной функции, которая не является дифференцируемой п. в. При этом в качестве пространства значений выбрано $B[a,b]$ (пространство ограниченных функций с нормой $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$). Пример показывает также, что теорема Лебега не верна и для пространств $C[a,b]$, c, c_0, l_∞.

Тем не менее, для некоторых простанств теорема Лебега остается справедливой. В этой работе доказывается, что абсолютно непрерывная функция со значениями в одном из пространств $l_p, 1\le p<\infty$, или $L_p[a,b], 1<p<\infty$, дифференцируема п. в. Таким образом, для этих пространств класс неопределенных интегралов Бохнера (обобщение интеграла Лебега для абстрактных пространств) совпадает с классом абсолютно непрерывных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.

[‡]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-00332 и грант 96/97-15-96073)

С. А. Степин (Москва)

О числе обусловленности систем корневых функций краевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной

Исследование возмущений плоскопараллельного течения вязкой жидкости в полосе с профилем скорости $u(x)$ приводит к краевой задаче

$$\frac{1}{i\alpha R}(\psi^{(4)} - 2\alpha^2\psi'' + \alpha^4\psi) = (u-c)(\psi'' - \alpha^2\psi) - u''\psi, \tag{1}$$

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0, \tag{2}$$

где c — спектральный параметр, $\alpha > 0$, величина R обратно пропорциональна вязкости жидкости. Известно, что собственные и присоединенные функции задачи (1)-(2) образуют базис Рисса в пространстве $W_2^1[-1,1]$ с условиями $\psi(\pm 1) = 0$. Степень неортогональности базиса Рисса измеряется числом обусловленности $\Upsilon = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$, где S — ортогонализатор базиса.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x)$ аналитична в окрестности $[-1,1]$ и достаточно близка к линейной относительно равномерной метрики. Тогда число обусловленности $\Upsilon(R)$ базиса, составленного из корневых функций задачи (1)-(2), неограничено, когда $R \to \infty$; существует $R_\alpha > 0$ такое, что $\Upsilon(R) \geq const(\alpha)R^{1/5}$ для почти всех $R > R_\alpha$.*

При изучении колебательных движений слоя плазмы, находящейся в магнитном поле, возникает нелинейная спектральная задача

$$i\varepsilon\lambda(y'' - k^2y) + (q(x) - \lambda^2)y = 0, \tag{3}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0, \tag{4}$$

где λ — спектральный параметр, $k > 0$, функция $q > 0$ непрерывна.

Теорема 2. *Корневые функции задачи (3)-(4) образуют два базиса Рисса в $W_2^1[a,b]$. Если q аналитична в комплексной окрестности $[a,b]$ и достаточно близка к линейной в равномерной метрике, то числа обусловленности каждого из двух базисов неограничены при $\varepsilon \downarrow 0$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-15-96049).

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных (Екатеринбург)

БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В докладе развиваются идеи работ [1], [2] для построения ортонормированных базисов в пространствах гармонических в кольце $\mathcal{R}_\rho = \{z = re^{ix} : \rho < r < 1, x \in \mathbf{R}\}$ функций.

Через $h_p(\mathcal{R}_\rho)(1 < p < \infty)$ обозначим множество однозначных гармонических в $\mathcal{R}_\rho$ функций $u(z)$ с $\|u\|_p(\mathcal{R}_\rho) = \sup\limits_{\rho<r<1} (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{ix})|^p dx)^{1/p} < \infty$. При $p = \infty$ будем дополнительно предполагать, что $u(z)$ непрерывны в замкнутом круге, а при $p = 1$ потребуем, чтобы $\int_0^{2\pi}|u(re^{ix}) - u(e^{ix})|dx \to 0(r \to 1)$, $\int_0^{2\pi}|u(re^{ix}) - u(\rho e^{ix})|dx \to 0(r \to \rho)$. Определим гармонические полиномы $\alpha_n(z), \widetilde{\alpha}_n(z)$ условиями $\alpha_0(z) + i\widetilde{\alpha}_0(z) = z$, $\alpha_n(z) + i\widetilde{\alpha}_n(z) = 2^{-j/2+1}\sum_{\nu\in\mathbf{Z}}\widehat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\cos\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j}z^\nu$ $(n \in \mathbf{N},\ n = 2^{j-1}+k,\ j \ge 1,\ 0 \le k < 2^{j-1})$, где $\widehat{\theta}(t)$ — функция типа Мейера [1] с носителем $(1-\varepsilon)/2 < |t| < (1+\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$; $\|u\|_{h_p(\mathcal{R}_\rho^r)} = \sup\{(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{ix})|^p dx)^{1/p} : \rho/r < y < r\}$.

Теорема 1. *Система* $\{\ln|z|, 1, \alpha_n(z), \widetilde{\alpha}_n(z), \alpha_n(\rho/z), \widetilde{\alpha}_n(\rho/z) : n \in \mathbf{Z}_+\}$ *является базисом всех пространств* $h_p(\mathcal{R}_\rho)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $0 \le \nu \le m$, $\sqrt{\rho} \le r \le 1$. *В предположении, что* $u(z)$, $\frac{\partial^m u(z)}{\partial x^m} \in h_p(\mathcal{R}_\rho)$, *справедливы неравенства*

$$\left\|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}(u - S_n(u))\right\|_{h_p(\mathcal{R}_\rho^r)} \le C_m\frac{r^N}{N^{m-\nu}}\left[E_N\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{1,p} + E_N\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{\rho,p}\right],$$

где $S_n(u)$ *— частная сумма порядка* n *разложения* u *по элементам базиса,* $N = \left[(1-\varepsilon)2^{[\log_2 n]}\right]$, *константа* C_m *не зависит от* n, $E_N(u)_{1,p}$ $(E_N(u)_{\rho,p})$ *— величина наилучшего приближения в* L_p *функций* u *на окружности* $|z| = 1$ $(|z| = \rho)$ *тригонометрическими полиномами порядка* N.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS, Грант 94-40-70.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer Y. *Ondeletts. Actualites Mathematiques.* Paris: Herman, 1990.
2. Субботин Ю. Н.,Черных Н. И. *Базисы всплесков в пространствах аналитических в единичном круге функций* // Конф. "Современные проблемы теории функций и смежные проблемы": Тез. докл., Воронеж, февр. 1997.

Ю.Н. Субботин(Екатеринбург),С.А. Теляковский (Москва)

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

Для $r = 1, 2, \ldots$ класс 2π-периодических функций f, удовлетворяющих условию $|f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$, обозначим MW^r, если $M = 1$, то пишем W^r.

Рассматриваются относительные поперечники

$$K_m(W^r, MW^r, C) = \inf_{L_m} \sup_{f \in W^r} \inf_{g \in L_m \cap MW^r} \|f - g\|_C, \tag{1}$$

введенные В.Н. Коноваловым [1]. Здесь L_m - подпространство $C[0, 2\pi]$ размерности m и в отличие от колмогоровских поперечников, которые будем обозначать $d_m(W^r, C)$, требуется, чтобы приближающие функции g из L_m принадлежали классу MW^r.

В [1] доказано, что для $r = 1$ и $r = 2$ поперечники $K_m(W^r, W^r, C)$ и $d_m(W^r, C)$ имеют при $m \to \infty$ одинаковый порядок, а для $r \geq 3$ точный порядок величин $K_m(W^r, W^r, C)$ равен m^{-2}.

Понятно, что для достаточно больших M относительные поперечники (1) равны колмогоровским. Мы исследуем, начиная с каких M можно гарантировать равенство этих величин.

Теорема. *Существует такая абсолютная постоянная A, что если*

$$M \geq \frac{4}{\pi^2} \log \min(m, r) + A, \tag{2}$$

то справедливо равенство

$$K_m(W^r, MW^r, C) = d_m(W^r, C).$$

Наше доказательство, основанное на использовании сумм Фавара, не позволяет снизить оценку (2) для числа M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коновалов В.Н.*Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций* // Матем. заметки. 1984. Т.35. С.369-380.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-ГФЕН Китая (проект 96-01-00036С).

Д. С. Теляковский (Москва)

О функциях, удовлетворяющих ослабленному условию асимптотической моногенности

Будем говорить, что функция $f(z)$ асимпотически моногенна в точке ξ, если $f(z)$ определена в некоторой окрестности ξ и имеет конечный предел

$$\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} \qquad z \to \xi, \quad z \in E(\xi),$$

где множество (ξ) имеет ξ своей точкой плотности (относительно плоской меры Лебега).

Д. Е. Меньшов [1] доказал следующую теорему об асимптотически моногенных функциях:

Теорема Меньшова. *Функция, непрерывная в области D и асимптотически моногенная в каждой ее точке, за возможным исключением не более чем счетного множества точек $e \subset D$, является голоморфной в D.*

Автором [2] было доказано, что в этой теореме условие непрерывности функции $f(z)$ в области D можно заменить предположением о локальной суммируемости $\log^+|f(z)| = \max\{0, \log|f(z)|\}$ внутри D (здесь и далее исключительное множество e предполагается пустым). Затем было показано [3], что если для каждой точки $\xi \in D$ нижняя плотность в ξ соответствующего множества $E(\xi)$ больше $1/2$ и $(\log^+|f(z)|)^p$ локально суммируем в D при каждом $p \geq 1$, то функция $f(z)$ голоморфна в D.

Сейчас нами получена оценка через плотности множеств $E(\xi)$, соответствующих точкам $\xi \in D$, значения p, для которого суммируемость $(\log^+|f(z)|)^p$ достаточна для голоморфности $f(z)$ в D.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ моногенна в каждой точке ξ области D относительно некоторого множества $G(\xi)$, нижняя плотность которого в точке ξ больше $1/2+\sigma$, $0 < \sigma < 1/2$. Тогда найдется такое значение $p_\sigma \geq 1$, что если функция $(\log^+|f(z)|)^{p_\sigma}$ локально суммируема в D, то функция $f(z)$ голоморфна в D, причем при $\sigma \to +0$ выполнена оценка $p_\sigma = O(|\log\sigma|\sigma^{-3/2})$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Меньшов Д. Е. *Об асимптотической моногенности*// Матем. сборник. – 1936. – Т. 1(43). – С. 189–210.

2. Теляковский Д. С. *Об асимптотически моногенных функциях*// Труды МИРАН. – 1992. – Т. 198. – С. 186–193.

3. Теляковский Д. С. *Об ослаблении условия асимптотической моногенности*// Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – С. 902–911.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01366).

П. А. Терехин (Саратов)

СИСТЕМА СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Функция $\varphi \in L_p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, *имеет носитель на отрезке [0,1],*

$$\varphi_{k,j}(t) = 2^{k/p}\varphi(2^k t - j), \quad k = 0,1,..., \quad j = 0,...,2^k - 1.$$

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_q(0,1), p^{-1} + q^{-1} = 1$, *и любого бесконечного множества* $K \subset \{0\} \cup \mathbf{N}$, *имеем*

$$A\|f\|_q \le \sup_{k\in K}(\sum_{j=0}^{2^k-1} |(f,\varphi_{k,j})|^q)^{1/q} \le B\|f\|_q,$$

где

$$A = |\int_0^1 \varphi(t)\,dt|, B = (\int_0^1 |\varphi(t)|^p\,dt)^{1/p}.$$

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, *имеет отличный от нуля интеграл (т.е.* $A > 0$*),* $V_k(\varphi)$ *- линейная оболочка функций* $\varphi_{k,j}$, $0 \le j < 2^k$.

Тогда для любого бесконечного множества $K \subset \{0\} \cup \mathbf{N}$ *система подпространств* $(V_k(\varphi))$, $k \in K$, *является системой представления в пространстве* $L_p(0,1)$ *нормально сходящимися рядами.*

Кроме того, при $p = 1$, *система функций* $(\varphi_{k,j})$ *является системой представления в пространстве* $L(0,1)$ *нормально сходящимися рядами.*

Теорема 2 дополняет результаты статьи [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Filippov V. I.,Oswald P. *Representation in* L_p *by Series of Translates and Dilates of One Function*//J.Approxim.Theory.1995.V.82.P.15-29.

А. П. Терехин (Саратов)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИМИ АНАЛОГАМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ФУРЬЕ

Пусть σ - единичная сфера пространства размерности больше двух; f - действительная функция на σ.

Теорема 1. *Пространство четномерно. Если $S_n(Sf(\mu),0) \to f(\mu)$, то $D_n(f,\mu) \to f(\mu)$; сходимость поточечная или по норме, относительно которой сильно непрерывна операторная функция $S(t)$. Имеет место аналог неравенства Лебега:*

$$\|f - D_n(f)\| \leq C_r E_{\bar{n}}(f) ln(n+2)$$

с $\bar{n}$, определяемым по r и n и имеющим порядок роста n.

Здесь $S_n(\varphi, t)$ - частичные суммы классического тригонометрического ряда Фурье функции φ действительного переменного t; $Sf(\mu)$ - функция от t, определяемая равенством

$$Sf(\mu)(t) = S(t)f(\mu) := \frac{1}{|\sigma'|} \int\limits_{(\nu,\mu)=0} f(\mu\cos(t) + \nu\sin(t))\, d\nu,$$

$$D_n(f;\mu) = \frac{\kappa}{|\sigma'|} \int\limits_{\sigma} f(\xi) D_n(\tilde{\mu\xi})(\sin(m\tilde{\mu\xi})/\sin(\tilde{\mu\xi}))^r\, d\xi,$$

κ - нормирующая зависящая от r константа, D - ядро Дирихле, $r+2$ - размерность пространства, m выбирается из условия $(r-2)m \leq n < rm$.

Теорема 2. *Пространство нечетномерно. Если существует производная $S^{(r)}(t)f$, определяемая по норме, то*

$$c\|f - D_n(f)\| \leq \omega(\frac{\pi}{n+1}, S^{(r)}f) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{(r-1)/2} (\|S^{(2i)}(0)f\| + \|S^{(2i)}(\pi)f\|).$$

Здесь D_n определяется как и в (1), но с $m = 1$ (т.е. степень отсутствует), а κ имеет порядок n^r.

Н. Ю. Трошина (Саратов)

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ И СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В работе обобщаются результаты [1] на случай нелинейной дискретной системы

$$x(t+1) = \varphi(x(t), u(t)), \quad (t = 0, ..., T-1), \tag{1}$$

$$x(t) \in E^n, \quad u(t) \in E^m, \quad \varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$$

с суммарным критерием качества

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} [q(x(t)) + h(u(t))]. \tag{2}$$

Выводятся необходимые условия оптимальности для задачи минимизации функционала (2) на траекториях системы (1) при ограничениях:

$$x(0) = c, \quad x(T) \in D, \quad u(t) \in U(t), \tag{3}$$

$$g(x(t), u(t)) = g_1(x(t)) + g_2(u(t)) \le 0. \tag{4}$$

Функции $\varphi_i(\xi, \eta)$ $(\xi \in E^n, \quad \eta \in E^m, \quad i = 1, ..., n)$ предполагаются дифференцируемыми, функции $q(\xi), h(\eta), g_1(\xi), g_2(\eta)$ предполагаются выпуклыми, множества $D, U(t)$ - выпуклыми, замкнутыми. При условии, что функция g удовлетворяет условию Слейтера, а один из субдифференциалов $\partial q(\hat{x}(t))$, или $\partial h(\hat{u}(t))$ при некотором $t = 0, ..., T-1$ не содержит нуля (здесь $(\hat{x}, \hat{u})$ - оптимальная пара), доказана

Теорема. *Пусть $(\hat{x}, \hat{u})$ - решение задачи (1)-(4). Тогда существуют числа $\lambda_0, \hat{\lambda}(t)$, не равные одновременно нулю, и векторы $\gamma, \psi(t) \in E^n$ $(t = 0, ..., T-1)$ такие, что*

$$1)\psi(t+1) = \varphi_\xi^T(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\psi(t+1) - \lambda_0 \xi^*(t) - \hat{\lambda}(t)\theta^*(t),$$

$$\psi(T) = \gamma \quad \textit{где} \quad \xi^*(t) \in \partial q(\hat{x}(t)), \theta^*(t) \in \partial g_1(\hat{x}(t));$$

$$2)\langle \gamma, y - \hat{x}(T) \rangle \ge 0, \quad y \in D;$$

$$3)\hat{\lambda}(t) g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0, \quad t = 0, ..., T-1;$$

$$4)\textit{при всех} \quad t = 0, ..., T-1$$

$$\min_{v \in U(t)} [-\langle \psi(t+1), \varphi_\eta(\hat{x}(t), \hat{u}(t))v \rangle + \lambda_0 h(v) + \hat{\lambda}(t) g_2(v)]$$

достигается на $v = \hat{u}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трошина Н. Ю. *Необходимые и достаточные условия оптимальности в негладкой дискретной задаче оптимального управления.* //Деп. в ВИНИТИ, 1990г., No 3587-B90.

А. Ю. Трынин(Саратов)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.

Рассмотрим функционал $y(x,q,\lambda)$,ставящий в соответствие элементу множества $\Omega = [0,\pi] \times L[0,\pi] \times \mathbf{R}$ значение в точке $x \in [0,\pi]$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - q(x)]y = 0, \\ y(0,q,\lambda) = 1, \\ y'(0,q,\lambda) = h. \end{cases}$$

Подчеркнем , что это решение $y(x,q,\lambda)$ есть n-ая собственная функция задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - q(x)]y &= 0, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0, \end{cases} \qquad (1)$$

при $\lambda = \lambda_n[q]$, где $\lambda_n[q]$ -функционал, который ставит в соответствие потенциалу q n-ое собственое значение (1). Зафиксируем некоторые $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{N}, 1 \le k \le n$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие q k-ый нуль n-ой собственной функции $y(x,q,\lambda_n)$. Пусть $D\phi[q,w] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi(q+tw)-\phi(q)}{t}$ есть дифференциал Гато функционала $\phi : L[0,\pi] \to \mathbf{R}$ при приращении $w \in L[0,\pi]$.

Теорема. *Пусть $w \in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ при приращении w $(n \in \mathbf{N}, 1 \le k \le n)$ удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\{\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau -$$

$$-\frac{\int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau}{\|y(\cdot,q,\lambda_n)\|^2_{L^2}}\int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\}.$$

Замечание 1. *Из теоремы о связи между слабой и сильной дифференцируемостью (см.,например,[1],стр.484) следует, что дифференциал Гато на самом деле является производной Фреше функционала $x_{k,n}[q]$.*

Следствие. *Какой бы суммируемый потенциал q ни взять, для всех $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le n$, производная Фреше $x_{k,n}[q]$ при приращении*

$$W = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,\frac{\pi}{2}) \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

будет положителен.

Замечание 2. *При переходе к пределу при $h = H = \infty$ получаем результат работы [2], в которой посчитан $Dx_{k,n}[q,w]$ при краевых условиях первого рода $y(0) = y(\pi) = 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1.Колмогоров А. Н. Фомин С. В.*Элементы теории функций и функционального анализа.* //М. "Наука" 1981.

2.McLaughlin J. R.*Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result.*//J.Diff.Eq.–1988–V.73–No2–p. 354–362.

Г.М.Устинов(Екатеринбург)

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ГРОТЕНДИКА.

Пусть Q – компакт, подпространство $L \subset C(Q)$ называется подпространством Гротендика, если $L = \{f \in C(Q) : f(q'_\alpha) = \lambda_\alpha \cdot f(q''_\alpha), q'_\alpha, q''_\alpha \in Q, \lambda_\alpha \in R, \alpha \in A\}$. В дальнейшем для простоты формулировок считаем $\lambda_\alpha > 0$. Полагаем $Z_L = \{q \in Q : f(q) = 0 \forall f \in L\}$ и определим (следуя [1]) для каждой точки $q \in Q \backslash Z_L$ множество $W_q = \{q' \in Q : \exists \lambda' = \lambda(q') \neq 0, f(q') = \lambda' f(q) \forall f \in L\}$.Пусть $W' = \{q \in Q : W_q - \}$, $W'' = \{q \in Q : W_q - \ \}$. Можно показать, что если $q \notin Z_L$, то в множестве W_q, $q \in W''$ найдется такая "отмеченная" точка q^*, что $\lambda(q) \leq 1$ для любого $q \in W_{q^*} : \delta_q\Big|_L = \lambda(q) \cdot \delta_{q^*}\Big|_L$. Считаем, что L удовлетворяет условию (Δ) : каждое множество W_q содержит лишь одну отмеченную точку и множество D отмеченных точек замкнуто. Пусть $D_1 = D \cup Z_L$, $D_2 = (\cup_{q \in W''} \ W_q) \cup Z_L$. Если $\delta_q\Big|_L = \lambda(q) \cdot \delta_{q^*}\Big|_L$, то пусть $\mu_{q,q^*} = \frac{1}{1+\lambda(q)}(\delta_q - \lambda(q) \cdot \delta_{q^*})$. Возьмем $g \in C(Q), \rho(g, L) = d$ и для $q \in W_{q^*}$ пусть $A_q = \left[\frac{-d-(1+\lambda(q)) \cdot g(\mu_{q,q^*})}{\lambda(q)}; \frac{d-(1+\lambda(q)) \cdot g(\mu_{q,q^*})}{\lambda(q)}\right]$. Определим многозначное отображение $\tau_g : D_1 \to 2^R$

$$\tau_g(q) = \begin{cases} g(q), & q \in Z_L, \\ (\cap_{t \in W_q} A_t) \cap [-d; d], & q \in D. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть подпространство Гротендика $L \subset C(Q)$ удовлетворяет условию (Δ). Для того, чтобы L было подпространством существования, необходимо и достаточно, чтобы:*
1) $\forall \quad g \in C(Q)$ *нашлась непрерывная селекция h отображения τ_g,* 2) *если $q_n \in \bar{D}_2$, $\delta_{q_n}\Big|_L = \lambda_n \delta_{q_n^*}\Big|_L$, $\quad n = 0, 1, 2, \cdots, q_n \to q_0 \notin Z_L$, то $q_n^* \to q_0^*, \lambda_n \to \lambda_0$.*

Используя полученные результаты, можно установить, что в $C([0;1])$ не верен аналог теоремы 3.23 ([1]), т.е. дать отрицательный ответ на вопрос, сформулированный в замечании 3.24 [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blatter J.** *Grothendieck spaces in approximation theory* // Met. Amer.Math.Soc., 1972, N 120, R.J. P.121.

А. Ю. Федукин, С. М. Востриков (Саратов)

Использование сетей Петри для моделирования систем документооборота

В настоящее время достаточно актуальной является проблема моделирования и анализа управленческих структур и механизмов человеческой деятельности. Кроме того, решая эту проблему и построив модель управления какого-либо предприятия, можно получить хорошую основу для создания автоматизированной системы документооборота. Параллельно с этим решается задача оптимизации организации управления.

Подходящим инструментом для решения указанных проблем можно считать теорию сетей Петри. Впервые эта теория была рассмотрена в диссертации д-ра Петри в 1962 г. В настоящее время теория сетей Петри успешно развивается по нескольким направлениям, таким, например, как: разработка методологии моделирования процессов и систем, а также анализ построенных сетей.

Сети Петри представляют собой удобный инструмент для исследования систем. Большинство систем (вычислительные, экономические, юридические и другие) состоят из множества отдельных компонент, взаимодействующих между собой сложным образом. Каждая компонента имеет свое состояние. Состояние - это абстракция, необходимая для описания дальнейших действий (состояний) компоненты. При моделировании реальной системы простое представление о сети Петри основано на двух основополагающих понятиях: событиях и условиях. События - это действия, имеющие место в системе. Возникновением событий управляет состояние системы. Состояние описывается множеством условий. Одна из особенностей, свойственных сетям Петри, - это параллелизм и одновременность. Таким образом, сети Петри представляются идеальными для моделирования систем с распределенным управлением, в которых несколько процессов выполняются одновременно.

Однако, если моделировать достаточно сложные системы, связанные, в частности, с документооборотом, то использование сетей Петри "напрямую" будет излишне затруднять процесс моделирования, поскольку модель сразу получается излишне детализированной для восприятия человеком на осмысленном уровне. Поэтому, поднимается вопрос о построении промежуточной модели системы. Эта модель должна быть описана средствами некоторого формального языка, достаточно универсального для описания предметных особенностей модели. На следующем этапе эта модель переводится в термины сетей Петри, и полученная сеть подвергается анализу на предмет нахождения двусмысленных и тупиковых состояний. При обнаружении таковых требуется внести модификации в систему и повторить процесс. Эта стандартная схема использования сетей Петри. Можно предположить возможность автоматической модификации сети, исправляющей тупиковые ситуации, однако возможность возврата после таких модификаций к терминам промежуточной модели остается под вопросом.

В качестве языка описания промежуточной модели предполагается использовать язык SA (Structured Analysis), как достаточно близкий по идеологии построения моделей к терминам и понятиям сетей Петри. Несомненным достоинством языка SA является принцип рекурсивного описания сущностей, что означает, при необходимости, возможность очень детального описания модели.

Е. Н. Хайлов (Москва)

О МНОЖЕСТВАХ ДОСТИЖИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, УПРАВЛЯЕМОЙ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ОРТАНТЕ

Рассматриваем в пространстве R^n следующую билинейную систему :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + u(t)bc^T)x(t) + bu(t) + d, \\ x(0) = x^0, \ |u(t)| \le 1, \ t \in [0, T], \ T > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где A - матрица порядка $n \times n$ и $b, c, d \in R^n$ - ненулевые векторы. Символ ^{T} означает транспонирование.

Обозначим через $X(T)$ множество достижимости системы (1) из точки x^0, т.е. совокупность значений $x(T)$ решений (1), отвечающих всевозможным управлениям $u(t)$. Сформулируем

Условие 1. Матрица A, векторы b, c, d и x^0 таковы, что справедливы неравенства : $a^i_j \ge |b_i|c_j, \ i \ne j; \ d_i \ge |b_i|; \ c_i \ge 0; \ x^0_i \ge 0; \ i, j = \overline{1, n}$, где через a^i_j обозначены элементы матрицы A, а через b_i, c_i, d_i, x^0_i - компоненты векторов b, c, d, x^0 соответственно.

Условие 2. Векторы $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ линейно независимы в R^n.

При этих предположениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для всех $t \in [0, T]$ и произвольного управления $u(t)$ компоненты $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, решения $x(t)$ системы (1) неотрицательны.*

Теорема 2. *При любом $T > 0$ множество достижимости $X(T)$ является строго выпуклым компактом в R^n.*

Теорема 3. *Каждой точке x границы множества $X(T)$ отвечает единственное управление $u(t)$. При этом, эта функция $u(t)$ кусочно-постоянна, принимает лишь значения -1 и +1 и имеет на интервале $(0, T)$ конечное число переключений.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ согласно проектам 97-01-00461 и 96-01-00846.

Н. Н. Холщевникова (Москва)

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УОЛША

Теорема Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом говорит о том, что если тригонометрический ряд сходится всюду за исключением счетного множества E к конечной суммируемой функции f, то он есть ряд Фурье функции f. В 1923г. И. И. Привалов доказал, что в качестве исключительного множества E в этой теореме можно взять замкнутое U-множество. В [1] получено обобщение этих результатов, показывающее, что в качестве исключительного множества E в теореме Валле-Пуссена можно взять объединение замкнутого U-множества и счетного числа $H^{(n)}$-множеств.

Обобщающий аналог теорем Валле-Пуссена и Привалова для рядов по системе Уолша получен В. А. Скворцовым [2]. В. Вейд [3] определил для системы Уолша (а также для p-систем) понятие $2H^{(n)}$-множества, являющееся аналогом $H(n)$-множеств для тригонометрического случая. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если ряд по системе Уолша сходится всюду на $[0,1]\setminus E$ к конечной суммируемой функции f, где $E=\{E_i : i=0,1,...\}$, E_0-замкнутое U-множество, а $E_i, i=1,2,...-2H^{(n)}$-множества, то этот ряд есть ряд Фурье функции f.*

ЛИТЕРАТУРА

1.Холщевникова Н. Н.*К теореме Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом*// Матем.сборник. –1996.–Т. 187. No 5.–С. 143–160.

2.Скворцов В. А.*Некоторое обобщение теоремы единственности для рядов по системе Уолша*//Матем.заметки–1973.–Т. 13.–No 3. –С. 367–372.

3.Wade W. R.*Sets of uniqueness for the group of integers of a p-series field*// Can.J.Math.–1979.–V. 31.–No 4. –p. 858 866.

Настоящие исследования поддержаны РФФИ 96-01-00332.

В. Т. Худалов (Владикавказ)

О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 1 *Конус E_+ в упорядоченном банаховом пространстве (E, E_+) называется регулярным (пишем $(E, E_+) \in (\Re)$), если*

1) $\pm x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$;

2) $\forall x \in E \ \exists y \in E_+ : y \geq \pm x, \ \|x\| = \|y\|$. **Определение 2***Если X - банахово пространство, то линейный оператор $T : E \to X$ называется суммирующим, если конечна норма:*

$$\|T\|_l = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\| : e_k \in E_+, \ 1 \leq k \leq n, \ \Big\|\sum_{k=1}^{n} e_k\Big\| \leq 1, \ n = 1, 2, \dots\Big\}.$$

Пространство всех суммирующих операторов из E в X обозначим $L_l(E, X)$.

Пусть $E, F \in (\Re)$. Проективный конус K_p на $E \otimes F$ определяется следующим образом:

$$K_p = \Big\{\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k, \ x_k \in E_+, \ y_k \in F_+, \ k = 1, \dots, n; \ n = 1, 2, \dots\Big\}.$$

Теорема *Пусть $E, F \in (\Re)$, $X, Y -$ произвольные банаховы пространства, $S \in L(E, X)$, $S \neq 0$, $T \in L(F, Y)$, $T \neq 0$. Тогда для любых кросснорм α и β оператор*

$$S \otimes T : (E \otimes_\alpha F, K_p) \to X \otimes_\beta Y$$

является суммирующим оператором тогда и только тогда, когда S и T - суммирующие операторы. При этом

$$\sqrt{\|S\|_l \|T\|_l} \sqrt{\|S\| \ \|T\|} \leq \|S \otimes T\|_l \leq \|S\|_l \|T\|_l.$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Schatten R. A theory of cross-spaces. Princeton. 1950. 152 p.

А. П. Хромов (Саратов)

ОБ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ

Рассмотрим оператор

$$A_0 f = \int_0^1 A_0(x,t) f(t)\,dt,$$

действующий в $L_2[0,1]$. Предположим, что ядро $A(x,t)$ имеет вид:

$$A(x,t) = \alpha_1 A_1(x,t)\varepsilon(x,t) + \alpha_2 A_2(x,t)\varepsilon(t,x) +$$

$$+\alpha_3 A_3(1-x,t)\varepsilon(1-x,t) + \alpha_4 A_4(1-x,t)\varepsilon(t,1-x)$$

где $\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $t \le x$ и $\varepsilon(x,t) \equiv 0$ при $t > x$, $A_i(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x и $A_i(x,t) = 1 + o(1)$, $x - t \to 0$

Теорема 1. $\delta = (\alpha_1 - \alpha_3)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \ne 0$ *и* A_0^{-1} *существует. Тогда найдется такое комплексное число* β, A_0^{-1} *определяется по формуле*

$$A_0^{-1} y = (E + S_\beta)^{-1} P(y'(x) + \beta y(x))$$

с краевым условием

$$y(0) = \int_0^1 A(0,t)(E + S_\beta)^{-1} P(y'(t) + \beta y(t))\,dt.$$

Здесь E – *единичный оператор:*

$$S_\beta = P\left(\frac{d}{dx} A + \beta A\right) - E,$$

$$Pf(x) = \frac{1}{\delta}\left\{(\alpha_1 - \alpha_2) f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4) f(1-x)\right\}.$$

Рассмотрим теперь оператор:

$$Af = A_0 f + \sum_{k=1}^{m} g_k(x) \int_0^1 f(t) v_k(t)\,dt,$$

где $v_k(x) \in L_2[0,1]$, $g_k(x) \in W_2^1[0,1]$ ($W_2^1[0,1]$ – пространство Соболева). Предположим, что системы $\{g_k(x)\}, \{v_k(x)\}, \{g_k'(x)\}$ линейно независимы.

Теорема 2. *Для того, чтобы* A^{-1} *существовал, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{rang}\,\Gamma = m$$

где $\Gamma = (\Gamma_{i,j})$ $(i = 1,\dots,m+1; j = 1,\dots,m)$, $\Gamma_{1,j} = U(g_j)$ $(j = 1,\dots,m)$, $\Gamma_{i,j} = \delta_{i-1,j} + \int_0^1 L g_j(t) v_{j-1}(t)\,dt$ $(i = 2,\dots,m+1; j = 1,\dots,m)$, $\delta_{i,j}$ – *символ Кронекера.*

Работа выполнена при финансовой поддерке РФФИ, грант №97-01-00566

Г. В. Хромова (Саратов)

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ К РЕШЕНИЯМ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При исследовании обратных задач математической физики возникает задача построения приближений к функциям и их производным в случае, когда эти функции берутся из области определения некоторого дифференциального оператора (см.[1]).

В данном сообщении предлагается подход к решению указанной задачи, основывающейся на приближающих свойствах резольвент линейных обыкновенных дифференциальных операторов.

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned}
&L: \quad ly = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + p_n(x)y(x), \quad U_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n;\\
&L_0: \quad l_0 y = y^{(n)}(x), \quad U_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n;\\
&\hat{L}: \quad \hat{l}y = -y''(x), \quad y'(0)) = y'(1) = 0;
\end{aligned}$$

где $x \in [0,1]$, $p_i(x) \in C[0,1]$ - вещественны, $U_i(y)$ - линейно независимые формы с вещественными коэффициентами относительно $y^{(k)}(0)$, $y^{(k)}(1)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Обозначим: D_L - область определения оператора L; $R_{\lambda,p}$, $p = 0, 1, \dots, n$ - интегральные операторы с ядрами $\Gamma_x^{(p)}(x,\xi,\lambda)$, где $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ - ядро резольвенты оператора $L_0^* \hat{L} L_0$; $\Gamma(x,\xi,-1) = G(x,\xi)$; $\rho = \sqrt[n]{\lambda}$, $-\frac{\pi}{2n+2} < arg\ \rho \le \frac{\pi}{2n+2}$, ω_i, $i = 1, \dots, 2n+2$ -различные корни степени $2n+2$ из 1; $W_2^{n+1}[0,1]$ - пространство Соболева с нормой: $\|y\|^2_{W_2^{n+1}} = \|y\|^2_{L_2} + \|y^{(n+1)}\|^2_{L_2}$.

Справедливы следующие лемма и теорема.

Лемма. *Для любой функции $y(x) \in D_l \cap W_2^{n+1}[0,1]$ имеют место представления:*

$$y^{(p)}(x) = \int_0^1 [G_x^{(p)}(\xi, x) y(\xi) + (G_x^{(p)})_\xi^{(n+1)} y^{(n+1)}(\xi)] d\xi, \ p = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема. *При $\lambda \to \infty$ по лучу, такому, что $Re\ \rho\omega_i \ne 0$, $i = 1, \dots, 2n+2$, имеют место оценки, асимптотические по λ при $\lambda \to \infty$:*

$$\|y^{(p)} + \lambda R_{\lambda,p} y\|_C = O(|\lambda|^{-[2(n-p)+1](4n+4)^{-1}}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.*// М., 1994.

П. Л. Шабалин (Казань)

МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ВНЕШНЕЙ СФЕРЫ В R^m

Будем рассматривать ограниченные области $G \subset R^m$ класса K_R, до каждой граничной точки которых можно прикоснуться извне m-мерным шаром S_R фиксированного радиуса $R > 0$. Обозначим через $\omega_1(\delta) = \omega_1(\delta, u, \partial G)$ модуль непрерывности граничных значений гармонической в G и непрерывной в $\overline{G}$ функции $u(x)$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, u, \overline{G})$ — модуль непрерывности функции $u(x)$. Рассмотрим задачу об оценке $\omega(\delta)$ в терминах $\omega_1(\delta)$, которая для гармонических в R^m функций впервые изучалась в работе [1] для более широкого класса областей чем K_R.

Доказанная здесь методом отличным от примененного в [1] оценка точнее для некоторых типов $\omega(\delta)$, получаемой из [1] в случае $G \in K_R$ и совпадает с последней, если $\omega_1(\delta) = \delta^\alpha$. Именно, справедлива

Теорема. *Если $G \in K_R$, то*

$$\omega(\delta) \leq M\omega_1(\delta) + N\delta \int_\delta^{2R} \frac{\omega_1(t)dt}{t^2} + C\delta \frac{\omega_1(2R)}{R},$$

где постоянные M, N, C зависят только от m.

Метод доказательства основан на оценке гармонического продолжения $\omega_1(|x_0 - x|)$, $x_0, x \in \partial G$ с границы области внутрь и применении принципа максимума модуля.

Работа поддержана РФФИ, грант N 96-01-00110.

1. Hinkkanen A. *Modulus of continuity of harmonic functions* // J. Analyse Math. –1988. N 51. –C. 1–29.

Ф. А. Шамоян, И. С. Курсина (Брянск)

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций. Обозначим через S множество всех положительных на $(0,1]$ функций $\omega \in L^1(0,1)$, для которых существуют положительные числа $m_\omega, M_\omega, q_\omega$, причем $q_\omega \in (0,1]$, такие, что $m_\omega \leq \omega(\lambda r)/\omega(r) \leq M_\omega$, $\lambda \in [q_\omega, 1]$, $r \in (0,1)$. Для функции $f \in H(D)$ введем характеристику Неванлины (см.[1]):

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \quad r \in (0,1). \tag{1}$$

Пусть далее

$$N_\omega^p = \{f \in H(D) : \left(\int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)\,dr\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}. \tag{2}$$

Очевидно, что N_1^∞ совпадает с классом функций ограниченного вида (см.[1]). Как было установлено в работах О. Фростмана [2] и К. Хеймана [3], класс N_1^∞ неинвариантен относительно операторов дифференцирования и интегрирования. Естественно возникает вопрос: при каких p и ω класс функций N_ω^p инвариантен относительно операторов указанного типа.

Теорема. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\omega \in S$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. Класс N_ω^p *инвариантен относительно оператора диффференцирования (интегрирования);*

2. $\int_0^1 \omega(t)\log^p\frac{1}{t}\,dt < +\infty$.

В докладе предполагается также привести результаты, касающиеся инвариантных подпространств оператора сдвига в пространствах N_ω^p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции.*// М., ГИТЛ. - 1941.

2. Frostman O. *Sur les prodoits de Blaschke. Kungl. Fysiogr.*- Sällsk. Lund Förh, - 1939. - 12. — № 15. - С. 1-14.

3. Hayman W. K. *On the charachtereistic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals.* Acta math. - 1964. - 112. - No 3-4. - С. 181-214.

И.И.Шарапудинов(Махачкала)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ И МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ДИСКРЕТНЫХ СЕТКАХ

При рассмотрении вопросов сжатия, хранения и/или передачи дискретной информации возникает задача о приближении функций, заданных на дискретных сетках действительной прямой. В качестве аппарата приближения таких функций часто используют многочлены, ортогональные на соответствующих сетках. В частности, рассмотрим следующую задачу: пусть $\Omega_h = \{0, h, 2h, \ldots\}$ - бесконечная равномерная сетка с шагом $h > 0$, $f : \Omega_h \to \mathbf{R}$ - дискретная функция. Далее, пусть $\alpha > -1$,

$$\rho(x) = \rho(x, \alpha, h) = \left(1 - e^{-h}\right)^{\alpha+1} \frac{\Gamma(x/h + \alpha + 1)}{\Gamma(x/h + 1)} e^{-x}.$$

Через $m_k^\alpha(x, h)$ $(k = 0, 1 \ldots)$ обозначим многогчлены, образующие ортонормированную систему на сетке Ω_h с весом $\rho(x)$. Тогда функции

$$\mu_k^\alpha(x) = e^{-x/2} m_k^\alpha(x, h) \quad (k = 0, 1 \ldots)$$

образуют ортонормированную систему на сетке Ω_h с весом $e^x \rho(x)$. Пусть $S_n^\alpha(f) = S_n^\alpha(f, x)$ - частная сумма Фурье порядка n функции f по системе $\mu_k^\alpha(x)$ $(k = 0, 1 \ldots)$, $\lambda_n^\alpha(x, h)$ - соответствующая функция Лебега для сумм $S_n^\alpha(f, x)$. В случае $\alpha = -1/2$, $n \le a/h$ нами получена следующая оценка

$$\lambda_n^{-1/2}(x, h) \le c(\alpha, a) \left\{ \ln(n + 1) + n^{1/4} e^{-x/2} \left| m_k^{-1/2}(x, h) \right| \right\},$$

где $x \in \Omega_h$. Эта оценка не улучшаема по порядку при $n \to \infty$, $n \le a/h$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 95-01-01526.

А. В. Шаталина (Саратов)

О ПРОЦЕССЕ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

Пусть $D=\{z:|z|<1\}$ – единичный круг; AC – множество функций, аналитичных в D и непрерывных в $\overline{D}$ с равномерной нормой и обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$; $M=\{z_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n-1,\infty}$ – треугольная матрица, в которой $z_{k,n}\in\Gamma$, при всех $n\in N$, $k=\overline{0,n-1}$ и $z_{t,n}\neq z_{k,n}$, если $k\neq t$; $\{H_{np-1}(M,f,z)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность многочленов Эрмита-Фейера степени $\leq np-1$, которые интерполируют функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,n}$ n-ой строки матрицы M и их s-ая $(s=\overline{1,p})$ производная в этих узлах обращается в ноль.

Обозначим Ω – множество функций типа модуля непрерывности, т.е. непрерывных полуаддитивных, неубывающих на полуоси $[0,\infty)$ функций таких, что $\omega(0)=0$. Тогда $AC(\omega)$, $\omega\in\Omega$ – множество функций $f\in AC$, у которых $\omega(f,\delta)=\underline{O}(\omega(\delta))$, $\delta\to 0$. Рассмотрим правильные матрицы M, т.е. такие, что $z_{k,n}=\exp\left\{i\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha_n\right)\right\}$, α_n – последовательность действительных чисел.

Ранее было доказано, что если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=0, \qquad (1)$$

то для каждой функции $f\in AC(\omega)$ интерполяционный процесс Эрмита-Фейера равномерно сходится к f на $\overline{D}$.

Если же условие (1) не выполняется, т.е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n>0 \qquad (2)$$

то найдется функция $f\in AC(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера, построенный на правильной матрице M с некоторым ограничением на распределение узлов, расходится почти всюду на Γ.

Теорема. Если M – матрица корней n-ой степени из "-1", то при выполнении условия (2) существует функция для которой процесс Эрмита-Фейера расходится всюду на $\Gamma=\{z:|z|=1\}$.

Данные результаты обобщаются на случай произвольной области D с гладкой границей, удовлетворяющей условию Келлога-Альпера.

Определение. Область G с гладкой границей Γ удовлетворяет условию Келлога-Альпера, если угол $\theta(S)$, образованный касательной к границе Γ области G с вещественной осью, как функция длины дуги S на Γ, имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий условию: $\int_0^c\frac{\omega(\theta,h)}{h}|\ln h|dh<\infty$.

Кроме того подобные результаты имеют места для функций из класса $AC^*(\omega)$, т.е. $f\in AC^*(\omega)$ если $f\in AC$ и модуль непрерывности $\omega(f,\delta)=\overline{o}(\omega(\delta))$, $\delta\to 0$, $\omega\in\Omega$.

В. Р. Шебалдин(Саратов)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$dx(t)/dt = f(x(t), u(t))$, $x(t_0) = x_0$,$t \in [t_0, T]$,

$u(t) \in U$ для п.в. t,

$|x_i(t_j) - x_i(t_l)| \le c, i = \overline{1,n}, j = \overline{1, q-1}$,

$l = \overline{2,q}$; $t_j < t_l; t_j, t_l \in [t_0, T]$;c=const;

$J(x, u) = g(x(T)) \longrightarrow min$,

где $f(.)$ - дифференцируемая функция своих аргументов,$g(.)$ - дифференцируемая, скалярная функция; U - ограниченное множество.

В [1] был изложен алгоритм построения последовательности управлений $u^k(t)$, обеспечивающий понижение значения критерия качества на каждом шаге итерации, для задачи с ограничениями $x(t_j) \le 0$: $J(x^{k+1}, u^{k+1}) \le J(x^k, u^k)$. Данная последовательность строилась на основе уравнений принципа максимума, полученных в [1], в виде максиминной задачи. Для настоящей задачи также получены необходимые условия экстремума в аналогичной форме, которые используются для построения алгоритма:

$\mu^k = \max\limits_{u(t)} \min\limits_{i,j,l} \int_{t_0}^{T} \psi_{i,j,l}^{kT}(t)[f(x^k, u) - f(x^k, u^k)]\, dt.$

Решение данной задачи - функция $v^k(t)$- используется для построения итерационной последовательности $u^k(t)$. Доказывается теорема.

Теорема. *Имеет место сходимость:* $\lim \mu^k = 0$.

Данный результат означает сходимость уравнений принципа максимума по невязке.

ЛИТЕРАТУРА

1.Шебалдин В. Р. *Численное решение терминальной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.*// Саратов, Сарат.гос.ун-т,1989г., -37с.,-деп. в ВИНИТИ 23 мая 1989г.,N2999-B89.

П. А. Шулиманов (Екатеринбург)

ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ДЛЯ EXP(-X) ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕРВАЛА $[0,\infty)$

Пусть через Π_n обозначено множество всех действительных полиномов $P_n(x)$ степени не выше n, а через $\Pi_{\nu,n}$ — множество всех действительных рациональных функций $R_{\nu,n}(x) = Q_\nu(x)/P_n(x)$, где $Q_\nu \in \Pi_\nu$, $P_n \in \Pi_n$ и $P_n(0) = 1$. Для целых ν, n, k $(0 \le \nu \le n,\ 0 \le k \le n+\nu+1)$ определим подмножество $\Pi_{\nu,n}^{(k)}$ из $\Pi_{\nu,n}$ таких $R_{\nu,n}$, для которого $e^{-x} - R_{\nu,n}(x) = O(|x|^k)$, $|x| \to 0$. Положим $\lambda_{\nu,n}^{(k)} = \inf\{\sup\limits_{0\le x<\infty} |e^{-x} - R_{\nu,n}(x)| :\ R_{\nu,n}(x) \in \Pi_{\nu,n}^{(k)}\}$. Величины $\lambda_{\nu,n}^{(k)}$ называют связанными чебышевскими постоянными для $exp(-x)$ относительно интервала $[0,\infty)$ (см. [1], [2]). Двусторонние оценки величин $\lambda_{\nu,n}^{(k)}$ ранее изучались в [2]. Справедливо

Утверждение. *Для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех целых ν, n, k таких, что $0 \le \nu \le n$, $0 \le k \le n+\nu+1$, выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(9.28\ldots+\varepsilon)^n} \le \lambda_{n,n}^{(0)} \le \lambda_{\nu,n}^{(k)} \le \lambda_{\nu,n}^{(n+\nu+1)} \le \frac{\gamma(\nu,n)}{2^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\sqrt{n-\nu}},$$

где

$$\gamma(\nu,n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2n}{\pi(n-\nu)}} & 0 \le \nu \le [n - \sqrt{\frac{2n}{\pi}}] \\ \sqrt{n-\nu}, & [n - \sqrt{\frac{2n}{\pi}}] \le \nu \le n, \end{cases}$$

где $[t]$ – целая часть t.

Отметим, что оценка снизу $\lambda_{n,n}^{(0)}$ для $\lambda_{\nu,n}^{(k)}$ является величиной наилучшего рационального приближения степени не выше n для функции $exp(-x)$ на $[0,\infty)$ и следует из работы [3], а оценка сверху $\lambda_{\nu,n}^{(n+\nu+1)}$ — величина аппроксимации Паде для $exp(-x)$ на $[0,\infty)$, получена в работе [4], где также обсуждается точность этой оценки.

Исследования поддерживаются РФФИ, грант N 96-01-00118.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варга Р. *Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе.* – М.: Мир, 1974. – 126 с.

2. Saff E. B., Varga R. S. *Convergence of Padé approximants to e^{-z} on unbounded sets* // J. Approxim. Theory. – 1975. – vol.13, No 4. – P. 470–488.

3. Гончар А. А., Рахманов Е. А. *Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций* // Матем. сб. – 1987. – т.134, No 3. – С. 306–352.

4. Shulimanov P. A. *Convergence of the Padé approximants of e^{-x} on the nonnegative real axis* $[0,\infty)$ // East J. Approxim. – 1995. – vol.1, No 4. – P. 451–462.

В. Я. Эйдерман (Москва)

СРАВНЕНИЕ ЕМКОСТЕЙ С МЕРОЙ ХАУСДОРФА

Хорошо известно, что если измеряющая функция h (т.е. неубывающая функция $h(t)$, $t \geq 0$, с $h(0) = 0$) и ядро потенциала K удовлетворяют соотношению

$$\int_0 K(t)\,dh(t) < \infty, \tag{1}$$

то для любого ограниченного аналитического множества $E \subset \mathbf{R}^m$, $m \geq 1$, справедлива импликация $(C_K(E) = 0 \Rightarrow \Lambda_h(E) = 0)$, где $C_K(E)$—"классическая" емкость и $\Lambda_h(E)$—мера Хаусдорфа. Мы замечаем, что условие (1) в этом утверждении, вообще говоря, не является необходимым, и находим точные дополнительные условия регулярности на h, при которых расходимость интеграла в (1) влечет существование такого канторова множества E, что $C_K(E) = 0$, но $\Lambda_h(E) > 0$.

В случае $m = 2$ мы рассматриваем также емкость

$$\gamma^+(E) = \sup_\mu \int_E d\mu, \text{ где } \mu : \left| \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \right| < 1 \; \forall z \in \mathbf{C} \setminus E, \; \operatorname{supp} \mu \subseteq E, \; d\mu \geq 0.$$

Емкость γ^+, по-видимому, тесно связана с аналитической емкостью γ. Неизвестно, существует ли компакт E, для которого $\gamma^+(E) = 0$, но $\gamma(E) > 0$. Для канторовых множеств E естественно сравнить $\gamma^+(E)$ и с $C_K(E)$ при $K(t) = 1/t$. Выясняется, что при сравнении γ^+ и меры Хаусдорфа критическую роль играет уже не интеграл из (1) (сходимость которого при $K(t) = 1/t$ равносильна сходимости $\int_0 t^{-2}h(t)\,dt$). Из результатов М. С. Мельникова и П. Маттилы следует, что для широкого класса "регулярных" множеств E (в частности, для плоских канторовых множеств), и для неубывающей функции h, для которой $\int_0 t^{-3}h^2(t)\,dt < \infty$, неравенство $\Lambda_h(E) > 0$ влечет, что и $\gamma(E) > 0$, а при некоторых дополнительных условиях даже $\gamma^+(E) > 0$. Мы показываем, что если $\int_0 t^{-3}h^2(t)\,dt = \infty$ и h удовлетворяет дополнительному условию регулярности, то найдется плоское канторово множество E, для которого $\Lambda_h(E) > 0$, но $\gamma^+(E) = 0$. Доказательство основывается на оценке сверху величины $\gamma^+(E_n)$, где E_n—множество, возникающее на n-ом шаге построения плоского канторова множества. Получена также оценка снизу емкости $\gamma(E_n)$ и двусторонние точные оценки величины $C_K(E_n)$.

Полные доказательства результатов, изложенных в докладе, будут опубликованы в статьях [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйдерман В. Я. *Оценки потенциалов и δ-субгармонических функций вне исключительных множеств* // Изв. РАН. Математика.–1997.–No 6.

2. Эйдерман В. Я. *Мера Хаусдорфа и емкость, ассоциированная с потенциалами Коши* // Матем. заметки (в печати).

В. И. Щербаков (г.Жуковский Московской обл.)

ПОВЕДЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ-ПРАЙСА НЕ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ - целочисленная последовательность с $p_n \geq 2, m_n = \Pi_{k=0}^{n} p_k \quad (n = 0, 1, 2, ...)$. Пусть также $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n = 0, 1, ..., p_n - 1\}$ - группа последовательностей с операцией $+ : \{x_n\} + \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \bmod p_n\}$, сопоставимая с отрезком $[0, 1]$ по формуле

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} \quad (x \in [0, 1], \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G), \tag{1}$$

а $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - определенная на группе G мультипликативная система Прайса. Обозначим за $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G \mid x_1 = x_2 = ... = x_n = 0\}$ (по формуле (1) подгруппа G_n отображается на отрезок $[0; 1/m_n]$). Пусть $f(t)$ - ограниченная (при некотором n) на множестве $x + G_n$ и суммируемая на G функция. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если предела* $\lim_{n\to\infty} m_n \int\limits_{x+G_n} |f(t) - f(x)|\, dt$ *не существует, то ряд Фурье-Прайса функции* $f(t)$ *расходится в точке* x *(для точек Лебега* $\lim_{n\to\infty} m_n \int\limits_{x+G_n} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$*).*

В случае $\sup_n p_n < \infty$, а также для точек $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$ таких, что x_n/p_n не стремится к 0 при $n \to \infty$ или $(p_n - 1 - x_n)/p_n$ не стремится к 0 при $n \to \infty$ (для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$) данная теорема является обобщением результата о равносходимости рядов Фурье-Прайса в точках неустранимого разрыва первого рода, сообщенного мной в 1996 году во время работы Саратовской зимней математической школы.

В.А.Юрко(Саратов)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Рассмотрим краевую задачу $L = L(p(x), h_0, h_1)$:

$$\ell y \equiv -y'' + p(x)y = \lambda y, \;\; p(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{(x-\gamma_j)^2} + q(x), \;\; 0 < x < T, \qquad (1)$$

$$U_0(y) \equiv y'(0) + h_0 y(0) = 0, \; U_1(y) \equiv y'(T) + h_1 y(T) = 0, \qquad (2)$$

$$0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_N < T.$$

Пусть $\lambda = \rho^2$, $a_j = \nu_j^2 - 1/4$, $Re\,\nu_j > 0$, $\nu_j \notin \mathbf{N}$, и предположим, что

$$q(x) \prod_{j=1}^{N} |x-\gamma_j|^{1-2Re\,\nu_j} \in \mathcal{L}(0,T).$$

Пусть функции $S_{kj}(x,\lambda)$, $k = 1,2$, $j = \overline{1,N}$, $x \in (\gamma_{j-1},\gamma_j) \bigcup (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ - решения уравнения (1) при условии

$$S_{kj}(x,\lambda) \sim (x-\gamma_j)^{\mu_{kj}}, \; x \to \gamma_j, \; \mu_{kj} = (-1)^k \nu_j + 1/2.$$

Обозначим

$$\varphi_k(x,\lambda) = (-1)^{k-1} (S_{2j}^{(2-k)}(0,\lambda) S_{1j}(x,\lambda) - S_{1j}^{(2-k)}(0,\lambda) S_{2j}(x,\lambda)), \;\; k = 1,2,$$

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda) - h_0 \varphi_2(x,\lambda), \;\; \Delta(\lambda) = U_1(\varphi),$$

$$\Phi(x,\lambda) = -(\Delta(\lambda))^{-1} (U_1(S_{2j}) S_{1j}(x,\lambda) - U_1(S_{1j}) S_{2j}(x,\lambda)), \;\; M(\lambda) = \Phi(0,\lambda).$$

Функцию $M(\lambda)$ будем называть функцией Вейля задачи L. Собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи L совпадают с нулями функции $\Delta(\lambda)$ и с полюсами функции $M(\lambda)$, причем все собственные значения лежат в полосе $|Re\,\rho| < h$, и число нулей N_a функции $\Delta(\lambda)$ в прямоугольнике $R_a = \{\rho : |\tau| \le h, \; \sigma \in [a, a+1]\}$ ограничено по a. В случае простого спектра обозначим $\alpha_k = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda)$. Совокупность чисел $\{\lambda_k, \alpha_k\}$ называется спектральными данными задачи L.

Исследуется обратная задача восстановления дифференциального уравнения и форм (1)-(2) по функции Вейля $M(\lambda)$ и по спектральным данным. Изучаются свойства специальных фундаментальных систем решений, множителей Стокса и спектральных характеристик задачи L. Доказаны теоремы единственности решения обратной задачи, получены необходимые и достаточные условия разрешимости и алгоритм решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 97-01-00566 и гранта Минобразования (КЦФЕ) N 96-1.7-4.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы
26 января - 1 февраля 1998 года

Отв. за выпуск А.Л.Лукашов
Технический редактор Л.В.Агальцова

Н/К

Подписано к печати 13.01.98. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,46(11,25).
Уч. изд. л. 9,8. Тираж 250.
Заказ С7.

Издательство Саратовского госуниверситета. 410601, Саратов, Университетская, 42.
Минитипография «ОРИЕНТ», 410026, Саратов, ул. Б. Садовая, 158.