СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов 8-й Саратовской зимней школы
30 января – 6 февраля 1996 года

Издательство Саратовского университета
1996

УДК 517.5;517.94;518;533.7
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:
С56 Тезисы докладов 8-й Саратовской зимней школы. - Саратов:
Изд-во Сарат. ун-та, 1996. - 132 с.
ISBN 5-292-01981-х

Сборник содержит тезисы докладов и научных сообщений участников 8-й Саратовской зимней школы, посвященные различным вопросам теории функций, таким, как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по теории функций.

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту 95-01-88284

Текст сборника печатается в авторской редакции.

С $\frac{1702050000 - 191}{176(02) - 96}$ 37 - 96

ISBN 5-292-01981-х

В.А. Абилов

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Пусть $L_2^N = L_2(\mathbb{R}^N, \exp(-|x|^2))$ – пространство суммируемых с квадратом функций в $\mathbb{R}^N$ с весом $\exp(-|x|^2)$ и нормой

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} f^2(x)\exp(-|x|^2)\,dx} \quad ;$$

$$E_n(f) = \inf_{P_n} \|f - P_n\| -$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_2^N$ алгебраическими многочленами вида

$$P_n(x) = \sum_{0 \le i_1 + i_2 + \dots + i_N \le n} a_i x^i ,$$

$$d_n(M) = \inf_{F_n \subset L_2^N} \left\{ \sup_{f \in M} \left\{ \inf_{g \in F_n} \|f - g\| \right\} \right\} -$$

– n – поперечник Колмогорова множества $M \subset L_2^N$.

Пусть, далее,

$$f_h(x) = \pi^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x\sqrt{1-h^2} + ht)\exp(-|t|^2)\,dt -$$

– оператор усреднения в пространстве L_2^N.

$$\overset{\circ}{\omega}_k(f;\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{h^j}(x) \right\| .$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Рассмотрим следующие классы функций :

$$W^{r}(D)=\left\{f\in L_2^N:\ \|\overset{-4}{D}{}^{r}f\|\le 1\ (r=1,2,\ldots)\right\},$$

$$W_{\varphi}^{r,k}(D)=\left\{f\in L_2^N:\ \omega_k(\overset{-}{D}{}^{r}f,\delta)=O[\varphi(\delta^k)]\ (r=0,1,\ldots;\ k=1,2,\ldots)\right\},$$

где $\varphi(\delta)$ — заданная монотонно возрастающая непрерывная функция на $[0,+\infty)$, причем $\varphi(0)=0$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА I.
$$d_{\ell+k}\left(W^{r}(D)\right)=(2n)^{-r}$$

$$\left(\ell=\frac{(n-1+N)!}{(n-1)!\,N!};\ k=0,1,\ldots,\frac{(n-1+N)!}{n!\,(N-1)!}-1;\ r=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots\right).$$

СЛЕДСТВИЕ.
$$d_n\left(W^{r}(D)\right)\asymp n^{-\frac{r}{N}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого модуля непрерывности $\omega(t)$
$$d_n\left(W_{\omega}^{r,k}(D)\right)\asymp n^{-\frac{r}{N}}\,\omega\left(n^{-\frac{k}{2N}}\right)$$
$$(r=0,1,\ldots;\ k=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots).$$

ТЕОРЕМА 3.
$$E_n(f)=O\left(n^{-r-\frac{\nu}{2}}\right)\Longleftrightarrow f\in W_{t^{\nu}}^{r,k}$$
$$(r=0,1,\ldots;\ k=1,2,\ldots;\ 0<\nu<2k)$$

Аналогичные утверждения можно доказать и в пространствах L_2^N с весами Лагерра и Якоби.

К.Х. Абдуллаев

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ГИББСА ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЫ КРЕСТЕНСОНА-ЛЕВИ

В работе изучается функция Гиббса для рядов Фурье по мультипликативной системе Крестенсона-Леви:

$$\chi_n(x) = exp\frac{2\pi i}{p}\sum_{k=1}^{r(n)} x_k n_{-k} \qquad (1)$$

где $x \in [0;1)$, $x_k \equiv [xp^k](mod p)$, $n_{-k} \equiv [np^{1-k}](mod p)$, n – целое ≥ 0 и $0 \leq$ $\leq x_k$; $n_{-k} \leq p-1$, $[a]$ – целая часть числа a.

Как и в случае тригонометрической системы, общий случай изучения явлений Гиббса сводится к рассмотрению функции с единственным разрывом первого рода [1].

В качестве такой простейшей функции удобно взять функцию

$$f_a(x) = sign(x-a) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ -1 & x < a \end{cases}.$$

Частичные суммы мультипликативного ряда Фурье функции представимо в виде

$$S_k(f_a, x) = \int_0^1 D_k(t) f_a(x+t)\, dt\ ,$$

где $D_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1}\chi_j(t)$ ядро Дирихле по мультипликативной системе (1).

Теорема. Частичные суммы мультипликативного ряда Фурье по системе Крестенсона-Леви функции $f_a(x) = sign(x-a)$ для бесконечно многих p-иррациональных точек $a \in (0;1)$ удовлетворяет неравенству

$$|S_k(f_a, x)| \leq \begin{cases} 1+\frac{8}{p^2}\cos^2\frac{\pi}{p} & \text{если, } p - \text{нечетное}, \\ 1+\frac{4}{p^2}\cos^2\frac{\pi}{2p} & \text{если, } p - \text{четное}. \end{cases} \qquad (2)$$

Отметим некоторые частные случаи неравенства (2). Если p=2, $|S_k(f_a,x)| \leq \frac{3}{2}$ – результат, полученный Л.А. Балашовым и В.А. Скворцовым [2].

Если p=3 и p=5, то из (2) получим

$$|S_k(f_a, x)| \leq \frac{11}{9}\ ; \quad |S_k(f_a, x)| \leq 1+\frac{8}{25}\cos^2\frac{\pi}{p}$$

результат, полученный автором в работах [3,4].

Библиографический список

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.,1965. Т.1.

2. Балашов Л.А., Скворцов В.А. Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их $(c,1)$ - средних // Тр. мат. ин-та им. Стеклова. Т.164. С.37-48.

3. Абдуллаев К.Х. Точная оценка сверху функции Гиббса для системы Крестенсона-Леви при $p=5$ // Теория функций и приближений. Межвузов. научн. сб. Саратов, 1990. Ч.2.

4. Абдуллаев К.Х. . Явление Гиббса для ортогональных систем Крестенсона-Леви// Сб. научн. тр. ТГТУ. Ташкент, 1995.

Е.В. Ананьина

О ПОРЯДКЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА СУММ ФЕЙЕРА-ЯКОБИ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Пусть $\alpha,\ \beta > -1$; $A, B \in R$; $1 \le r \le \infty$; $Q(t) = (1-t)^A(1+t)^B$, $(C,\delta)_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ - чезаровские (C,δ) средние ряда Фурье-Якоби функции f. Рассмотрим вопрос о порядке по n константы Лебега:

$$sup\{\|(C,\delta)_n^{\alpha,\beta}(f,\cdot)Q(\cdot)\|_{L^r[-1,1]} : f \in (QL)^r,\ \|fQ\|_{L^r[-1,1]} \le 1\}. \qquad (1)$$

При $\delta = 0$ (т.е. в случае сумм Фурье-Якоби) и $r = \infty$ этот вопрос исследовался Т. Гроуноллом, Л. Лорчем, С.А. Агахановым и Г.И. Натансоном (см., например, в [1]). Последние два автора также исследовали асимптотическое поведение функции Лебега сумм Фурье-Якоби в зависимости от x и n. При $\delta = 0$, $\alpha = \beta = A = B = 0$ и $r \in [1,\infty)$ порядки величины (1) найдены В.П.Моторным [2] (оценки сверху) и В.М.Бадковым [1] (оценки снизу), Н.М. Казакова [3] нашла порядки констант (1) при $\delta = 0$ для всех значений $r \in [1,\infty]$; $\alpha,\ \beta > -1$; $A, B \in R$, для которых задача о порядке величины (1) имеет смысл и не была решена ранее.

Р.Аскей и Р.Хиршман [4] выяснили вопрос об ограниченности констант Лебега (1) при $\delta > 0$, $\alpha = \beta \ge -\frac{1}{2}$, $A = \frac{\alpha}{r}$, $B = \frac{\beta}{r}$, $r \in [1,\infty]$. Затем Р.Аскей, С.Вейнгер [5], а также Г.Гаспер [6] получили аналогичные результаты для общих α , $\beta \ge -\frac{1}{2}$. С.Г.Кальней исследовал при $r = \infty$ поведение констант Лебега общих треугольных линейных методов суммирования рядов Фурье-Якоби.

При $\delta = 1$ (т.е. для сумм Фейера-Якоби), $A = \frac{\alpha}{r}$, $B = \frac{\beta}{r}$ константу Лебега (1) обозначим через $L_{n,r}^{\alpha,\beta}$. В этом частном случае результаты Р.Аскея, Р.Хиршмана, С.Вейнгера и Э.Герлиха - К.Маркета [7] имеют следующий вид.

Пусть $\alpha \ge \beta \ge -\frac{1}{2}$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда

$$C_1(\alpha,\ \beta,\ r) \cdot n^{\frac{2(\alpha+1)}{r} - \alpha - \frac{1}{2}} \le L_{n,r}^{\alpha,\beta} \le C_2(\alpha,\ \beta,\ r) \cdot n^{\frac{2(\alpha+1)}{r} - \alpha - \frac{1}{2}} \cdot B(n)\ ,\ r \in [1; \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+5}];$$

$$C_3(\alpha,\ \beta,\ r) \le L_{n,r}^{\alpha,\beta} \le C_4(\alpha,\ \beta,\ r)\ ,\ r \in (\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+5}, \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha-1}); \qquad (2)$$

$$C_5(\alpha,\ \beta,\ r) \cdot n^{\alpha - \frac{1}{2} - \frac{2(\alpha+1)}{r}} \le L_{n,r}^{\alpha,\beta} \le C_6(\alpha,\ \beta,\ r) \cdot n^{\alpha - \frac{1}{2} - \frac{2(\alpha+1)}{r}} \cdot B(n)\ ;\ r \in [\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha-1}; \infty],$$

где $B(n) = B(\alpha,\ \beta,\ r\ ,\ n) = O(n^{\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$.

Н.М.Казакова [8] показала, что при $r \in (1; \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+5}) \cup (\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha-1}; \infty)$ $B(n) = O(1)$ и

$$B(n) = \begin{cases} O(ln^{\frac{1}{r}} n) \text{ при } r = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+5}, \\ O(ln^{\frac{1}{r'}} n) \text{ при } r = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha-1}, \end{cases}$$

где $r' = \frac{r}{r-1}$.

Основным результатом сообщения являются оценки снизу величины $L_{n,r}^{\alpha,\beta}$, из которых и из (2) вытекает следующая

Теорема. Пусть $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда

$$L_{n,r}^{\alpha;\beta} \asymp \begin{cases} ln^{\frac{1}{r}}(n+1) \text{ при } r = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+5}, \\ ln^{\frac{1}{r'}}(n+1) \text{ при } r = \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha-1}, \end{cases}$$

где $r' = \frac{r}{r-1}$.

Библиографический список

1. Бадков В.М. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // УМН. 1978. Т.33, вып.4. С.51-106.
2. Моторный В.П. Приближение функций суммами Фурье-Лежандра в среднем // Докл. АН СССР. 1981 Т.259, №1. С.39-42.
3. Казакова Н.М. О порядках констант Лебега сумм Фурье-Якоби в пространствах $(QL)^r$ / Свердловск, 1984. 65с. Деп. в ВИНИТИ 09.04.84. №2123-84.
4. Askey R., Hirschman J.J. Mean summability for ultraspherical polynomials // Math. Scand. 1963. Vol.12. P.167-177.
5. Askey R., Wainger S. A convolution structure for Jacobi series // Amer.J.Math. 1969. Vol.91. P.463-485.
6. Gasper G. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. of Math. 1972. Vol.95, №2. P.261-280.
7. Gorlich E., Markett C. On a relation between the norm of Cesaro means of Jacobi expansions // Linear Spaces and Approximation. Basel: Birkhauser Verl. 1978. P.251-262.
8. Казакова Н.М. О порядках констант Лебега сумм Фейера-Якоби в пространствах L_p^r / Свердловск, 1984. 37с. Деп. в ВИНИТИ 31.07.84. №5536-84.

Н.Л.Андреева

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ВЫПУКЛЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

интегральным критерием качества

$$I(x, u) = \int F(x,u,t)\, dt \to \inf \tag{3}$$

и ограничениями на управляющую функцию

$$|u(t)| \le 1 \tag{4}$$

Здесь A - матрица размерности $n \times n$; b, x_0 - n- векторы, $F(x,u,t)$ гладкая, ограниченная снизу, сильно выпуклая по (x,u) функция.

Для решения (1)-(4), как задачи на условный экстремум, добавим к функционалу (3) штрафы $\Phi_k(x,u)$ и рассмотрим задачи на безусловный экстремум

$$I_k(x,u) = I(x,u) + \Phi_k(x,u) \to \inf \tag{5}$$

$k=1,2,3,\ldots$

Штрафные функционалы выбираем в виде

$$\Phi_k(x,u) = \frac{1}{\varepsilon_k} \Big[\| x(t) - e^{At} x_0 - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} bu(\xi)\, d\xi \|^2_{L_2^n[t_0,t_1]} +$$

$$+ \| (u(t)-1)_+ \|^2_{L_2[t_0,t_1]} + \| (-u(t)-1)_+ \|^2_{L_2[t_0,t_1]} \Big] \tag{6}$$

где e^{At} - матричная экспонента, функциональная система решений для $\frac{dx}{dt} = Ax$; $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ - числовая последовательность, $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$ имеет смысл малого параметра; функция $y_+ = \max(y, 0)$ есть срезка.

Для каждого $k=1,2,3,\ldots$ функционал $\Phi(x,u)$ из (6) является выпуклым по (x,u), поэтому функционал $I(x,u)$ из

(5) – сильно выпуклый. Следовательно, задача (5) имеет единственное решение, обозначим его $(x_k(t),\ u_k(t))$, $k = 1,2,3\ldots$ Необходимыми и достаточными условиями для нахождения $(x_k(t),\ u_k(t))$ являются уравнения $\operatorname{grad} I_k(x,u)=0$. Преобразуя эти уравнения с малым параметром ε_k, получим:

$$x(t) - e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)}bu(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{2}\varepsilon_k F'_x(x,u,t) \quad (7)$$

$$F'_u(x,u,t) + \int_{t_0}^{t_1} (e^{A(\xi-t)}b,\ F'_x(x(\xi),\ u(\xi),\ \xi))_{R_n}\,d\xi =$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon_n}\left[(u(t)-1)_+ - (-u(t)-1)_+\right] \quad (8)$$

Эти уравнения для $(x_k(t),\ u_k(t))$ дают возможность доказать необходимые и достаточные условия оптимальности.

ТЕОРЕМА 1. Функция $u^*(t)$ есть оптимальное управление задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим уравнениям и неравенствам:

$$F(x,u,t) = 0,\quad t \in \Omega$$
$$F(x,u,t) \le 0,\quad t \in \Omega^+$$
$$F(x,u,t) \ge 0,\quad t \in \Omega^-$$
$$\Omega \cup \Omega^+ \cup \Omega^- = [t_0,t_1],\quad \Omega^{\pm} = \{t : u(t) = \pm 1\}$$

где

$$F(x,u,t) = F'_u(x,u,t) + \int_{t}^{t_1} (e^{A(\xi-t)}b,\ F'_x)_{R_n}\,d\xi$$

ТЕОРЕМА 2. Имеет место сходимость

$$\|x_k - x^*\|_{C[t_0,t_1]} \to 0,\quad \|u_k - u^*\|_{C[t_0,t_1]} \to 0,\quad k \to \infty$$

Доказательство получается путем исследования уравнений (7), (8) для $x_k(t)$, $u_k(t)$.

В.В.Арестов

Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченных операторов ограниченными*

Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства была опубликована С.Б.Стечкиным в 1967 году [1]. Его работа [1] содержала постановку задачи, общие принципиальные результаты и ее решение для операторов дифференцирования малого порядка. Ранее в работе 1965 года [2] С.Б.Стечкин выписал и использовал решение такой задачи в конкретном случае, однако, эта работа не содержала постановки соответствующей задачи.

Точная постановка задачи такова. Пусть X, Y – банаховы пространства; $A : X \to Y$ – некоторый линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$; Q – класс элементов из $D(A)$; $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ – множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y, норма которых $\|T\| = \|T\|_{X \to Y}$ не превосходит фиксированного числа $N \geq 0$. Величина $U(T) = \sup\{\|Ax - Tx\|_Y : x \in Q\}$ является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\}$$

есть наилучшее приближение на классе Q оператора A множеством операторов $\mathcal{L}(N)$. Задача состоит в вычислении (исследовании) величины $E(N)$, нахождении (исследовании вопроса существования, единственности, характеризации) экстремального оператора, на котором достигается нижняя грань.

За прошедшие 30 лет в этой задаче получены существенные результаты. Была выяснена ее взаимосвязь с другими экстремальными задачами теории функций и теории некорректных задач, в частности, с задачей о вычислении модуля непрерывности линейного неограниченного оператора на классе элементов пространства, с некорректной задачей оптимального равномерного восстановления значений неограниченного оператора на элементах класса, заданных с ошибкой, с задачей наилучшего и линейного приближения одного класса элементов другим. Доказан ряд общих теорем существования экстремального приближающего оператора. Получены существенные результаты в задаче наилучшего приближения функционалов. Подробно изучено приближение операторов, инвариантных относительно некоторых полугрупп (групп) преобразований. Довольно полно и результативно изучено наилучшее приближение операторов, инвариантных относительно сдвига, в пространствах $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq \gamma \leq \infty$. Наиболее обстоятельно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \leq k < n)$ в пространствах $L_\gamma = L_\gamma(S)$ на числовой оси $S = (-\infty, \infty)$ и полуоси $S = [0, \infty)$. На этом пути найдены наилучшие константы в неравенствах Колмогорова в ряде новых случаев. Обзор этих результатов можно найти в совместной работе автора и В.Н.Габушина [3] (см. также работы [4]–[8] и приведенную там библиографию).

В сообщении основное внимание было уделено задаче о наилучшем приближении операторов дифференцирования на оси и полуоси. Важной и хорошо изученной является

---

* Работа выполнена при поддержке Фонда INTAS (International Association for the Promotion of Cooperation with Scientists from the Independent States of the Former Soviet Union), грант INTAS 94-4070.

задача о наилучшем приближении оператора дифференцирования порядка k на классе $Q = Q^n = \{x \in C,\ x^{(n)} \in L_\infty,\ \|x^{(n)}\|_{L_\infty} \le 1\}$ n раз дифференцируемых функций $(0 \le k < n)$ в пространствах $C = C(\mathbb{R})$ на числовой оси:

$$E(N) = E_{n,k}(N) = \inf\{U(T):\ \|T\|_{C \to C} \le N\}, U(T) = \sup\{\|x^{(k)} - Tx\|_C:\ x \in Q^n \le 1\}.$$

К настоящему времени последняя задача полностью решена в работах С.Б.Стечкина [1] ($n = 2, 3$), В.В.Арестова [9] ($n = 4, 5$) и А.П.Буслаева [10] ($n \ge 6$); в работе А.П.Буслаева [10] и в более ранней работе автора [11], посвященной этой задаче (при $n \ge 6$), существенно использовался результат Домара [12]. Для функций двух и более переменных задача Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования мало изучена. Для пространств $C = C(\mathbb{R}^2)$ имеются лишь интересные результаты А.П.Буслаева [10] В.Г.Тимофеева [13] и О.А.Тимошина [14], [15], относящиеся к операторам дифференцирования малого порядка.

Библиографический список

1. Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т.1, N 2. С.137–148.
2. Стечкин С.Б. Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta sci. math. 1965. Т.26. N 3–4. P.225–230.
3. Арестов В.В., Габушин В.Н. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Известия ВУЗов. Математика. 1995. N 11. С.44–66.
4. Габушин В.Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т.8. N 5. С.551–562.
5. Арестов В.В. О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. МИАН СССР. 1975. Т.138. С.3–28.
6. Габушин В.Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1980. Т.145. С.63–78.
7. Арестов В.В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. 1989. Т.189. С.3–20.
8. Арестов В.В. Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН СССР. 1992. Т.198. С.3–20.
9. Арестов В.В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования // Матем. заметки. 1967. Т.1, N 2. С.149–154.
10. Буслаев А.П. О приближении оператора дифференцирования // Матем. заметки. 1981. Т.25, N 5. С.731–742.
11. Арестов В.В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования в равномерной метрике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердл., 1969. 89 л.
12. Domar Y. An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions // Arkiv för Mat. 1968.
13. Тимофеев В.Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Матем. заметки. 1985. Т.37, вып.5. С.676–689.
14. Тимошин О.А. Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Матем. заметки. 1984. Т.36, вып.3. С.369–375.
15. Тимошин О.А. Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка // Докл. АН СССР. 1995. Т.344, N 1. С.20–22.

В.В.Арестов, В.Ю.Раевская

Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов на отрезке

Пусть $\pi_n^0(h)$ есть множество алгебраических многочленов порядка n с действительными коэффициентами, имеющих нулевое среднее с весом h значение на отрезке $[-1,1]$, а точнее обладающих свойством

$$\int_{-1}^{1} h(x)p_n(x)dx = 0;$$

здесь h – функция суммируемая, неотрицательная, отличная от нуля на множестве положительной меры из $[-1,1]$. Изучается задача о наименьшем возможном значении

$$i_n(h) = \inf\{\mu(p_n) : p_n \in \pi_n^0\}$$

меры $\mu(p_n) = \mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : p_n(x) \geq 0\}$ множества точек отрезка, в которых многочлен $p_n \in \pi_n^0$ является неотрицательным. В сообщении изложено решение задачи при определенных ограничениях на вес h. Этим ограничениям удовлетворяет, в частности, вес Якоби $h^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ при условии $-1 < \alpha, \beta \leq 0$. Для величины $i_n(\alpha,\beta) = i_n(h^{(\alpha,\beta)})$ в предположении $-1 < \alpha \leq \beta \leq 0$ получен следующий результат. Если число n нечетное, $n = 2k-1$, $k \geq 1$, то $i_n(\alpha,\beta) = 1 - x_k(\alpha,\beta)$, где $x_k(\alpha,\beta)$ – наибольший нуль многочлена Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}$; если число n четное, $n = 2k$, $k \geq 1$, то $i_n(\alpha,\beta) = 1 - x_k(\alpha,\beta+1)$. При этом экстремальными являются соответственно многочлены

$$\frac{(P_k^{(\alpha,\beta)}(x))^2}{x - x_k(\alpha,\beta)}, \quad \frac{(1+x)(P_k^{(\alpha,\beta+1)}(x))^2}{x - x_k(\alpha,\beta+1)}.$$

Для фиксированных α,β величина $i_n(\alpha,\beta)$ имеет следующе асимптотическое поведение $i_n(\alpha,\beta) = 2\rho_\alpha^2 n^{-2} + O(n^{-3})$, $n \to \infty$, где ρ_α – первый положительный нуль функции Бесселя J_α порядка α.

Задачи такого типа возникают в теории приближения функций, при исследовании упаковок множеств и т. д. Для тригонометрических полиномов подобная задача (с единичным весом) была поставлена Л.В.Тайковым и решена А.Г.Бабенко [2]. При $h \equiv 1$ обсуждаемую здесь задачу для алгебраических многочленов изучал впервые также А.Г.Бабенко [2] и получил для $i_n(1) = i_n(0,0)$ близкие двусторонние оценки. Для любого веса h величина, аналогичная $i_n(h)$, но на более узком множестве многочленов $p_n \in \pi_n^0$ с одной переменой знака на $[-1,1]$ была вычислена (для любого веса h) в [3] и [4].

Библиографический список

1. Бабенко А.Г. Об одной экстремальной задаче для полиномов // Матем. заметки. 1984. Т.35, N 3. С.349–356.
2. Бабенко А.Г. Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 127 с.
3. Fazekas G., Levinstein V.I. On upper bounds for code distance and covering radius of designs in polinomial metric spaces // Journal of Combin. Theory. Ser. A. 1995. V.70, N 2. P.267–288.
4. Юдин В.А. Покрытия сферы и экстремальные свойства ортогональных многочленов // Дискретная математика. 1995. Т.7, N 3. С.81–88.

С.В. Асташкин

Дизъюнктная строгая сингулярность вложений симметричных пространств

Линейный оператор T, ограниченный из банаховой решетки X в банахово пространство Y, называется дизъюнктно строго сингулярным (или: имеет DSS-свойство), если не существует последовательности ненулевых дизъюнктных векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X, для которых сужение T на замкнутую линейную оболочку $[x_n]$ является изоморфизмом. Это понятие было введено в 1989 году в связи с изучением геометрических свойств пространств Орлича (F.L.Hernandez;B.Rodrigues-Salinas).

В докладе изучается DSS-свойство оператора I тождественного вложения одного симметричного пространства (СП) функций, измеримых на $[0,1]$, в другое (определения см. в монографии Крейна С.Г., Петунина Ю.И., Семенова Е.М. "Интерполяция линейных операторов"). Приведем некоторые результаты.

Теорема 1. Пусть E и F – СП с фундаментальными функциями ϕ и ψ соответственно, для которых выполнено:

$$\gamma_{\psi/\phi} > 0 \qquad (1)$$

(γ_f – нижний показатель растяжения функции f).

Тогда $E \subset F$ и оператор $I : E \to F$ имеет DSS-свойство.

В определенном смысле точность условия (1) показывает

Теорема 2. Существуют два СП на $[0,1]$ E и F, $E \subset F$, с фундаментальными функциями ϕ и ψ соответственно, удовлетворяющими условию

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0. \qquad (2)$$

такие, что оператор $I : E \to F$ не обладает DSS-свойством.

В то же время для СП Лоренца $\Lambda(\theta)$ и Марцинкевича $M(\theta)$ справедлива

Теорема 3. Пусть ϕ и ψ – неотрицательные возрастающие вогнутые функции, $\psi(t) \le C\phi(t) (t \in (0,1])$. Следующие условия эквивалентны:

1) выполнено условие (2);

2) оператор $I : \Lambda(\phi) \to \Lambda(\psi)$ обладает DSS-свойством;

3) оператор $I : M(\tilde{\phi}) \to M(\tilde{\psi}) (\tilde{f}(t) = t/f(t))$ обладает DSS-свойством.

Г.С. Балашова

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В теории вложения пространств Соболева бесконечного порядка, рассматриваемых на многомерных областях, например, на n-мерном торе, существенными являются оценки нормы смешанных производных через нормы производных по каждой переменной в отдельности.

Лемма. Если $u(x) \in C^{\infty}(T^n)$, то верны следующие неравенства

$$\| D^{\alpha} u(x) \|_2 \le \Big(\prod_{i=1}^{n} \| D_{x_i}^{n\alpha_i} u(x) \|_2 \Big)^{\frac{1}{n}},$$

$$\| D^{\alpha} u(x) \|_{r} \le A_r \Big(\prod_{i=1}^{n} \| D_{x_i}^{n(\alpha_i+1)} u(x) \|_r \Big)^{\frac{1}{n}}, \quad 1 < r < \infty,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, A_r – постоянная, зависящая только от r, $\| \cdot \|_r$ – норма в пространстве Лебега $L_r(T^n)$. В доказательстве леммы используется известная теорема Харди–Литтлвуда [1], неравенство Коши и равенство Парсеваля.

С помощью этой леммы удается регуляризовать последовательность $\{a_\alpha \ge 0\}$, которая определяет пространство Соболева бесконечного порядка $W^{\infty}\{a_\alpha, p, r\}(T^n) \equiv$

$$\equiv \Big\{ u(x) \in C^{\infty}(T^n) : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \| D^{\alpha} u(x) \|_r^p < \infty \Big\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

так, что вновь полученная последовательность $\{a_\alpha^{(1)} > 0\}$ определяет пространство $W^{\infty}\{a_\alpha^{(1)}, p, r\}(T^n)$, поэлементно совпадающее с исходным. Это позволяет использовать легко проверяемые достаточные условия для вложения и компактности вложения пространств $W^{\infty}\{a_\alpha, p, r\}(T^n) \subset W^{\infty}\{b_\alpha, p, r\}(T^n)$. Эти условия имеют соответственно вид (см. [2]):

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} b_\alpha (a_\alpha^{(1)})^{-1} = K < \infty, \quad \lim_{|\alpha| \to \infty} b_\alpha (a_\alpha^{(1)})^{-1} = 0.$$

Библиографический список

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
2. Балашова Г.С. // Матем.заметки. Т.47, Вып.6. С.3-14.

А.С. Белов

О СВОЙСТВАХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В некоторых экстремальных задачах экстремальным является четный тригонометрический (тр.) полином вида

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx), \quad \text{где } n\in N, \qquad (1)$$

у которого коэффициенты монотонны, т.е. удовлетворяют условию $2a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Например, пусть $\mathbb{T}_n^+$ – множество всех неотрицательных тр. полиномов вида (1). В известном результате Л. Фейера $2\cos(\pi/(n+2)) = \max\{a_1 : T_n \in \mathbb{T}_n^+,\ a_0=1\}$, где $n\in N$, соответствующий экстремальный полином имеет монотонные коэффициенты. Можно привести и другие примеры, где экстремальным является полином вида (1) с монотонными коэффициентами. Этим отчасти объясняется интерес к изучению свойств тр. полиномов с монотонными коэффициентами.

Приведем один из полученных автором результатов.

Если тр. полином (1) неотрицателен, т.е. $T_n(x) \geqslant 0$ при всех x, и натуральное m является делителем числа n, то, как хорошо известно, $\sum_{k=0}^{m} a_{kn/m} \cos(kx) \geqslant 0$ при всех x. Оказывается, верна такая

Теорема. Пусть тригонометрический полином (1) неотрицателен и $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Тогда для каждого $m = 1,\ldots, n$ тригонометрические полиномы

$$(1+1/\sin(1/2))\, a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_{[kn/m]} \cos(kx),$$

$$(1+1/\sin 1)\, a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_{[kn/m+1/2]} \cos(kx), \qquad (2)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть, неотрицательны. В частности, если все частные суммы полинома (1) неотрицательны, то и все частные суммы полиномов (2) также неотрицательны.

Следствие. Для каждого натурального n пусть $M_Z^{\downarrow}(n) = \min a_0$, где минимум берется по всем неотрицательным полиномам вида (1) с натуральными $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Тогда $M_Z^{\downarrow}(m) \leqslant (1+1/\sin 1)\, M_Z^{\downarrow}(n)$ при всех $m = 1,\ldots, n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00094).

М.С. Беспалов

ЯДРА ДИРИХЛЕ И КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ СИСТЕМ КРЕСТЕНСОНА-ЛЕВИ

Систему Крестенсона-Леви, обобщающую систему Уолша-Пэли, рассмотрим для простых p на модифицированном отрезке $[0, 1]$, элементы которого есть p-ичные представления: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{p^k}$, где $x_k = 0, 1, 2$. Любое натуральное n в p-ичной записи имеет вид $n = \sum_{k=1}^{k(n)} n_k p^{k-1}$, где $n_k = 0, 1, 2$. Тогда /см. [1], но там суммы начинаются с 0 / функции системы: $\chi_0(x) \equiv 1$, $\chi_n(x) = \sum_{k=1}^{k(n)} \exp\left(\frac{2\pi i x_k n_k}{p}\right)$.

Определим ядро Дирихле $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$ и константы Лебега $L_n = \int_0^1 |D_n(t)|\, dt$.

Для любого n имеем
$$D_{pn}(t) = \begin{cases} p D_n(pt), & t \in (0; \frac{1}{p}) \\ 0, & t \in (\frac{1}{p}, 1) \end{cases}$$
и, следовательно, $L_{pn} = L_n$. Если $n_0 > p^s$, $n_1 > p^s$, $n_2 < p^s$, то $\int_{1/p^s}^1 |D_{n_0+n_2}(t)|\, dt = \int_{1/p^s}^1 |D_{n_1+n_2}(t)|\, dt$.

Для случая $p = 3$ применили геометрический метод, в основе которого вычисление интегралов от модуля ядра на интервалах $(\frac{1}{3^{k+1}}, \frac{1}{3^k})$. Например,
$$\int_{1/3}^1 |D_n(t)|\, dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 3m \\ 2/3, & \text{если } n \neq 3m, \end{cases}$$
$$\int_{1/9}^{1/3} |D_n(t)|\, dt = \begin{cases} 2/9 \cdot k, & \text{если } n = 9m \pm k,\ k = 0, 1, 2, 3 \\ \sqrt{7} \cdot 2/9, & \text{если } n = 9m \pm 4 \end{cases}$$
и т.д.

Этот метод позволяет для $p = 3$ указать алгоритм вычисления констант Лебега. Приведем отдельные результаты для $p = 3$, аналогичные оценкам Файна /см. [2] / для системы Уолша:

1. Если $n = 3^k + 3^{k-1} + \dots + 3 + 1$, то $L_n = \frac{n}{3^{k+1}} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\sqrt{3^{2s-1}+4}}{3^s}$.
2. Если $0 < \ell < 3^k$, то $0 < L_{3^{k+1}-\ell} - L_{3^k+\ell} < \frac{\ell}{3} \cdot (2-\sqrt{3})$.
3. $L_{3^k+1} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{27^k+1}{27^k+9^k}}$, что определяет максимальный скачок констант Лебега в пачке / $L_{3^k} = 1$ /.

4. Если $3^{\ell-1} < n_2 < 3^{\ell} \le 3^{s} < n_1 < 3^{k+1}$, где $n_1 = n_0 \cdot 3^{\text{[illegible]}}$, $n_0 = 3m+1$, то

$$L_{n_1+n_2} = L_{n_2} + L_{n_0} - \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{1+\Theta^3}{1+\Theta}}\right) - \varepsilon$$

где $\Theta = n_2 \cdot 3^{-s}$,

$$2 \cdot n_2 \cdot 3^{-s-1} < \varepsilon < 2 \cdot n_2 \cdot (2 \cdot 3^{-s-1} - 3^{-k-1})$$

~~5.~~ $\cancel{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_3 n} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

Библиографический список

I. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку, 1981.

2. Балашов Л.А., Рубинштейн А.И. Ряды по системе Уолша и их обобщения// Итоги науки. Матем.анализ. 1970. М.,1971. С.147-202.

Л.В.Борисова

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЭРМИТА В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Пусть $\{H_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ – последовательность многочленов Эрмита, ортонормированных на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом e^{-x^2}. Для любой функции $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty; e^{x^2}]$ через

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k H_k(x), \tag{1}$$

где

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} f(x) H_k(x)\, dx, \tag{2}$$

обозначим n-ую частную сумму ряда Фурье-Эрмита функции f.

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty; e^{x^2}]$ удовлетворяет условию S_0, если при любом $a > 0$ интеграл $\int_{-a}^{a} |f(x)|\, dx$ существует и справедливо равенство

$$\int_{n}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\frac{1}{3}} \{|f(x)| + |f(-x)|\}\, dx = o(n^{-1}),\ n \to \infty.$$

Справедлива теорема:

Пусть x – точка Лебега функции $f \in S_0$. Тогда для того, чтобы ряд Фурье-Эрмита этой функции сходился в точке x к значению $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{K_n} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 [\varphi(x, \frac{t+2k}{\sqrt{2n}}\pi) - \varphi(x, \frac{t+2k+1}{\sqrt{2n}}\pi)] \sin \pi t\, dt = 0, \tag{3}$$

где $K_n = [\sqrt{\frac{n}{2}\frac{\sigma}{\pi}}] - 1$ для фиксированного положительного σ и $\varphi(x, t) = f(x + t) + f(x - t)$.

Условие (3) позволяет легко получить как ранее известные признаки сходимости рядов Фурье-Эрмита, так и новые: аналоги признака Р.Салема и признака П.Вертеня.

А.В.Боровских

О ВЫДЕЛЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ

В качестве одного из преимуществ всплесковых преобразований по сравнению с преобразованиями (рядами) Фурье называют обычно отсутствие у последних возможности определить местоположение особенностей у функции.

Не умаляя достоинств всплесковых преобразований, представим, все-таки, способ, позволяющий по коэффициентам Фурье функции определить местоположение ее особенности (разрыва).

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ – кусочно-полиномиальная функция, имеющая на $[0,1]$ точно один разрыв; a_k и b_k – ее коэффициенты Фурье ($a_k = 2\int_0^1 \cos 2\pi x f(x)\,dx, b_k = 2\int_0^1 \sin 2\pi x f(x)\,dx$). Тогда точка разрыва $\xi \in [0,1]$ определяется по формуле*

$$e^{2\pi\xi i} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k},$$

где $c_k = -b_k + ia_k$, величина скачка $h = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi k c_k}{e^{2\pi\xi k i}}$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ – кусочно-полиномиальная функция, имеющая на $[0,1]$ точно $N+1$ разрывов; a_k и b_k – ее коэффициенты Фурье ($a_k = 2\int_0^1 \cos 2\pi x f(x)\,dx, b_k = 2\int_0^1 \sin 2\pi x f(x)\,dx$). Тогда точки разрыва $\xi_j \in [0,1]$, $(j = 0,1,\ldots,N)$ определяются из соотношений $e^{2\pi\xi_j i} = z_i$, где z_i – корни уравнения*

$$z^{N+1} = \alpha_N z^N + \cdots + \alpha_0,$$

а коэффициенты α_i определяются как пределы отношений определителей, содержащих c_k (точные формулы этих определителей опускаем за недостатком места). Величины h_k соответствующих скачков определяются из системы линейных алгебраических уравнений

П.А. Бородин

О чебышевских подпространствах в L_1

Замкнутое линейное подпространство Y банахова пространства X называется *чебышевским*, если для всякого вектора $x\in X$ множество $P_Y(x)$ ближайших к x векторов в подпространстве Y состоит ровно из одного элемента. Возникающее при этом отображение $x \to P_Y(x)$ называется метрической проекцией на подпространство Y.

Пусть $X=L_1(M)=L_1(M,\Sigma,\mu)$ – пространство вещественных функций, суммируемых на множестве M по σ-конечной мере μ, определенной на σ-алгебре Σ подмножеств M, Y – его линейное подпространство, $Y^{\perp}=\{f\in(L_1(M))^*=L_\infty(M): \langle f,y\rangle=0 \ \forall y\in Y\}$. Для $f\in L_\infty(M)$ положим

$$m(f):=\{t\in M: |f(t)|=\|f\|= \operatorname{ess\,sup}\{|f(u)|: u\in M\}\}.$$

Множество тех $x\in L_1(M)$, для которых $P_Y(x)\ni 0$, можно определить так: $Q(Y)=\{x\in L_1(M): \exists f\in Y^{\perp}: \operatorname{supp}x\subseteq m(f) \ \& \ \operatorname{sign}(x(t))=\operatorname{sign}(f(t)) \ \forall t\in \operatorname{supp}x\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Подпространство $Y\subseteq L_1(M)$ является чебышевским тогда и только тогда, когда (1) $Q(Y)+Y=L_1(M)$ и (2) для всяких $f\in Y^{\perp}$ и $y\in Y$, $y\neq 0$, выполняется неравенство $\mu(\operatorname{supp}y\setminus m(f))>0$.*

Из этого критерия легко получить известные утверждения о том, что в случае, когда Σ не содержит атомов, в $L_1(M)$ нет чебышевских подпространств конечной размерности и конечной коразмерности (см. Phelps R.R., Trans. Amer. Math. Soc., V.95 (1960), N2, P.238-255). Кроме того, теорема 1 дает возможность выделить следующий большой класс чебышевских подпространств в $L_1(M)$:

ТЕОРЕМА 2. *Метрическая проекция P_Y на чебышевское подпространство $Y\subset L_1(M)$ линейна тогда и только тогда, когда существует такое разбиение множества M на два непересекающихся μ-измеримых множества M_1 и M_2 и такой линейный оператор $A: L_1(M_1)\to L_1(M_2)$, что $\|Ay\|<\|y\| \ \forall y\in L_1(M_1)$ и $Y=\{y(t)\in L_1(M): y|_{M_1}=A(y|_{M_2})\}$, где $y|_N$ – сужение функции $y(t)$ на множество $N\subseteq M$.*

Отметим, что семейство всех чебышевских подпространств в $L_1(M)$ не исчерпывается указанными в теореме 2: именно, можно показать, что в $L_1[0,3]$ все функции f, для которых $f(x)=f(x+1)=f(x+2)$ $\forall x\in[0,1]$, образуют чебышевское подпространство, не относящееся к подпространствам теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

А.В. Братищев

О ПРОСТРАНСТВАХ МОМЕНТНОГО ТИПА

Пусть E_P – отделимое локально выпуклое пространство (ОЛВП) с топологией ν_P, задаваемой семейством преднорм P. E_P назовем пространством моментного типа, если для каждого плотного в нем подпространства F любое $\sigma(E_P',F)$-компактное множество в топологическом сопряженном E_P' будет относительно $\sigma(E_P',E_P)$-компактным. Таким будет, например, пространство Фреше.

ЛЕММА. Пусть K есть линейное взаимно однозначное отображение с плотной областью определения $\mathcal{D}$ в данном ОЛВП E_P с плотной областью значений в каком-либо ОЛВП F, и пусть существует сопряженное $K':F'\to E_P'$. Для того чтобы каждый такой оператор был непрерывным из $\mathcal{D}$ в F необходимо и достаточно, чтобы E_P было относительно сильным пространством моментного типа. При этом в случае полного F оператор K всегда расширяется до непрерывного из E в F.

Доказательство опирается на свойство поляры множества.

ТЕОРЕМА. Пусть (e_n,t_n) есть биортогональная система в E_P. Сформулируем утверждения: I) (e_n) есть Q-Кете базис в замыкании своей линейной оболочки W: $\forall\ x\in W\ \ x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x,t_n\rangle e_n$ в топологии ν_Q и $\forall\ q\in Q\ \exists\ p\in P\ \forall\ x\in W\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\langle x,t_n\rangle|q(e_n)\leqslant p(x)$,

2) $\forall\ q\in Q\ \exists\ p\in P\ \forall\ x:=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n e_n\in \operatorname{span} e_n\ \ \sum\limits_{n=1}^{N}|a_n|q(e_n)\leqslant p(x)$,

3) $\lambda'(Q)$-свободная проблема моментов разрешима в E_P': $\forall\ b\in \lambda'(Q):=\{b:\ \exists\ q\in Q\ \sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{|b_n|}{q(e_n)}<\infty\}\ \exists\ t\in E_P'\ \ \forall\ n\ \langle e_n,t\rangle=b_n$.

Тогда имеют место импликации I) $\Leftrightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). Если дополнительно известно, что W является относительно сильным пространством моментного типа, то 3) $\Rightarrow$ I).

А.П. Буланов

О СХОДИМОСТИ СТЕПЕНЕЙ БЕСКОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ

Элементарную функцию

$$f_s(x)=a_0x^{a_1x^{a_2x^{\cdots a_{s-1}x^{a_s}}}}, \qquad x>0,$$

где $a_k\neq 0$, $k=0,1,2,\dots,s$, будем называть степенью кратности s.

Формальное выражение

$$a_0x^{a_1x^{a_2x^{\cdots}}}, \qquad x>0,$$

соответствующее бесконечной последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $a_k\neq 0$, $k=0,1,2,\dots$, понимаемое как предел конечной кратной степени при $s\to\infty$, будем называть бесконечной кратной степенью.

Пусть $D=\{z:|\arg z|<\pi\}$. Главное значение $\ln z$ от многозначного логарифма $\operatorname{Ln} z$ будем брать из условия $\ln 1=0$. Числа a_k в последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ могут быть комплексными. Главное значение (z^{a_s}) функции $z^{a_s}=e^{a_s\operatorname{Ln} z}$, отвечающее главному значению логарифма $\ln z$, есть регулярная функция в области D. По индукции функция

$$f_s(z)=\left(z^{a_1(z^{a_2(\cdots(z^{a_{s-1}(z^{a_s})})\cdots)})}\right)$$

– главное значение многозначной функции $z^{a_1z^{\cdots a_{s-1}z^{a_s}}}$ будет также регулярной в области D. В дальнейшем скобки будем опускать.

Если, в связи с последовательностью $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, рассмотреть последовательность регулярных в D функций $f_n(z)=a_0z^{a_1z^{\cdots a_{n-1}z^{a_n}}}$, то встаёт вопрос о сходимости последовательности $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Если эта последовательность равномерно сходится в некоторой области $U\subset D$, то в этой области предельная функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z) \tag{1}$$

будет регулярной.

Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что $a_k\neq 0$, $k=0,1,2,\dots$, $\bar a\overset{def}{=}\overline{\lim}|a_n|<0$, и пусть E^* – образ круга $K=\{w:|w|<\frac{1}{e\bar a}\}$ при отображении $z = e^{w}$.

Т е о р е м а . Предельная функция (I) является регулярной в некоторой области $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$, причём $\mathcal{D} \cap e^{K} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{D}$.

Ещё в 1778 году Эйлер доказал, что функция $h(z) = z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$, являющаяся степенью бесконечной кратности, сходится на отрезке $[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$ и расходится вне этого отрезка на положительной полуоси. Из примера Эйлера следует, что функция

$$h_{\lambda}(z) = \lambda z^{\lambda z^{\lambda z^{\cdots}}} , \qquad \lambda > 0 ,$$

у которой $\overline{a} = \lambda$, расходится при $z > e^{\frac{1}{e\overline{a}}}$. Функция $z = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{h}}, h \neq 0$, являющаяся обратной функцией относительно $h_{\lambda}(z)$, является элементарной и в точке $h = \lambda e$ имеет нулевую производную. Таким образом, на вещественной оси границы области $\mathcal{U}$ и области $\mathcal{D} \cap e^{K}$ справа от точки $z = 1$ совпадают.

Библиографический список

1. Euler L. De formulis exponentialibus replicatis // Acta Academie Scientiarum Petropolitanae 1. 1778. p. 38-60.
2. Barrow D.F. Infinite exponentials // The American Mathematical Monthly. 1936. Vol. VXLIII. P. 150-160.
3. Буланов А.П. О сходимости кратных степеней// Теория функций и приближений: Тр.3-й Сарат. зимней школы. Саратов, 1987. С.3-II.

А.П. Буслаев

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАГРАНЖА-КОНДРАТЬЕВА

1. Следующая экстремальная задача

$$\frac{\int_0^1 [y'']^2(t)\,dt}{\int_0^1 [y']^4(t)\,dt} \to \min \tag{1}$$

по всем y,

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 \tag{2}$$

дает точные оценки для собственных значений дифференциальных операторов в задаче Лагранжа об устойчивости колонны и в виде (1)-(2) поставлена В.А.Кондратьевым. Необходимые условия экстремума в (1)-(2) приводят к нелинейному дифференциальному уравнению

$$y^{(4)} + \lambda^4 \left((y')^3\right)' = 0, t \in [0,1]. \tag{3}$$

Пусть $y'(t) = x(t)$, $y''(t) = x'(t)$. Тогда уравнения (3) вместе с условиями (2) приводят к $x''(t) + \lambda^4 x^3 = c_1$. С помощью замены переменной t можно добиться, чтобы последнее уравнение было эквивалентно

$$x''(t) + x^3(t) = C, \tag{4}$$

$$\int_0^T x(t)\,dt = 0, x(0) = x(T) = 0, \tag{5}$$

Теорема 1. (1) Решение задачи (4)-(5) существует $\iff C = 0$.;

(2) При $C = 0$ решение x единственно с точностью до преобразований вида $ax(bt)$. При этом решение периодически продолжается на R с учетом гладкости, симметрично относительно прямых $t = Const$, проходящих через нули производных и относительно нулей $t = nT/2, n \in Z$.

(3) На отрезке $[0, T/4]$ решение x монотонно и доставляет максимум следующей экстремальной задаче

$$\|x\|_{L_4[0,T/4]} / \|x'\|_{L_2[0,T/4]} \to \sup, \tag{6}$$

$$x(0) = 0. \tag{7}$$

Следствие 1. Решение y экстремальной задачи (1)-(2) достигается на функции $x, x' = y$ из (6)-(7), у которой одна перемена знака на отрезке $[0, T]$.

Ж.Е.Васильева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ТОЖДЕСТВЕННОЙ

Пусть S^M, $M > 1$, класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$.

Известна гипотеза Хажинского-Тамми о том, что в классе S^M для каждого n и M близких к 1 справедлива оценка

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right) , \; n = 2, 3, \ldots$$

Эта гипотеза была доказана различными методами Шиффером-Тамми и Северским.

Пусть S_R^M – класс функций из S^M с вещественными коэффициентами a_n. В настоящей работе находятся асимптотические оценки линейного функционала $I(\alpha, f) = a_4 + \alpha a_3 + (\frac{\alpha^2}{4} + \alpha)a_2$, $\alpha \in (-2, 6)$ в S_R^M для M близких к единице.

Метод получения оценок основан на том, что задача описания множества значений функционала в классе однолистных голоморфных в круге функций формализуется как задача построения множества достижимости управляемой системы, порожденной уравнением Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1 - w^2}{1 - 2\cos uw + w^2} , \; w(z, 0) = z, \; 0 \le t \le \log M, \; |z| < 1.$$

В исследованиях применяется тот факт, что в окрестности тождественной функции возможно разложение по малому параметру $T = \log M$, которое приводит к асимптотическим оценкам. Экстремальная функция отображает единичный круг E на круг $E_M = \{z : |z| < M\}$ с разрезом по вещественной оси и с двумя симметричными разрезами.

В.В. Власов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучаются свойства сильных решений уравнения

$$\mathcal{O}\!\ell u \equiv \sum_{j=0}^{n} \left(B_j(t) S_{g_j}(Au)(t) + D_j(t) S_{g_j}\left(\frac{du}{dt}\right)(t)\right) = f(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad (\mathrm{I})$$

Здесь A - самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий ограниченный обратный. Операторы S_{g_j} действуют по правилу: $(S_{g_j} v)(t) = v(g_j(t))$, $g_j(t) \geq 0$, $(S_{g_j} v)(t) = 0$, $g_j(t) < 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $B_0(t) \equiv D_0(t) \equiv I$ (I - единичный оператор), $g_j(t)$ $(t \geq 0)$ - непрерывно дифференцируемые функции такие, что $g_j'(t) > 0$, $t > 0$; $g_j(t) \leq t - \alpha$; $\alpha = const > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $g_0(t) \equiv t$, $t \in [0, +\infty)$

Пусть $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ и $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ - пространства вектор-функций со значениями в $\mathfrak{H}$, снабженные нормами

$$\|u\|_{2,\gamma} \equiv \left(\int_0^{+\infty} \exp(-2\gamma t)\|u(t)\|^2 dt\right)^{1/2},\quad \|u\|_{W_{2,\gamma}^1} = \left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|Au\|^2_{L_{2,\gamma}}\right)^{1/2},\ \gamma \geq 0.$$

Теорема I. Пусть оператор-функции $B_j(t)$, $D_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ принимают значения в кольце ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, сильно непрерывны и

$$\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \left[\varlimsup_{t \to +\infty} \left(\|B_j(g_j^{-1}(t))\|^2 \left|\frac{d}{dt} g_j^{-1}(t)\right|\right)^{1/2} + \varlimsup_{t \to +\infty} \left(\|D_j(g_j^{-1}(t))\|^2 \left|\frac{d}{dt} g_j^{-1}(t)\right|\right)^{1/2}\right] < +\infty,$$

где $g_j^{-1}(t)$ - функции, обратные к $g_j(t)$.

Тогда найдется такое $\gamma_0 \geq 0$, что оператор $\mathbb{V}_\gamma$, действующий по правилу $\mathbb{V}_\gamma u \equiv (\mathcal{O}\!\ell u,\ u(+0))$, отображает пространство $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$ на пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_{1/2}$ и имеет ограниченный обратный при любом $\gamma \geq \gamma_0$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы I и $\Delta < 1$. Тогда справедливо утверждение теоремы I с постоянной $\gamma_0 = 0$.

Наряду с рассмотрением уравнений в гильбертовом пространстве в докладе изучается асимптотическое поведение сильных решений скалярных дифференциально-разностных уравнений в критическом и сверхкритическом случаях.

Рассмотрим начальную задачу

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}\, u^{(j)}(t-h_k) + \int_0^h K(s)u(t-s)\,ds = 0, \quad t\in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

$$u(t)=y(t),\quad t\in[-h,0],\quad u^{(j)}(+0)=y^{(j)}(-0),\ j=0,1,\dots,m-1. \tag{3}$$

Здесь a_{kj} – постоянные комплексные коэффициенты, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\dots<h_n=h$, функция $y(t)\in W_2^m((-h,0),\mathbb{C})$.

Обозначим через $\ell(\lambda)$ характеристический квазимногочлен уравнения (2):

$$\ell(\lambda)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda^j\exp(-\lambda h_k)a_{kj}+\int_0^h\exp(-\lambda s)K(s)\,ds,$$

через λ_q – нули $\ell(\lambda)$, через ν_q кратности нулей λ_q.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $a_{0m}\neq 0$, $a_{nm}\neq 0$, а множество нулей квазимногочлена $\ell(\lambda)$ отделимо, т.е. $\inf\limits_{\lambda_p\neq\lambda_q}(dist(\lambda_p,\lambda_q))>0$, и конечна величина $\sup\nu_q \overset{def}{=} N$.

Тогда для любого сильного решения $u(t)$ задачи (2), (3) выполнено неравенство

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^m(-h,0)}\le d\,(t^{N-1}+1)\exp(\varkappa t)\|y\|_{W_2^m(-h,0)},\quad t>0, \tag{4}$$

где $\varkappa=\sup(\operatorname{Re}\lambda_q)$ с постоянной d, не зависящей от функции $y(t)$.

Кроме того, в докладе приводятся утверждения о свойствах сильных решений уравнения (I), близкие соответствующим результатам из [I – 5] (см. также указанную там литературу).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект96-0I-00333).

Библиографический список

I. Власов В.В. // ДАН. I992. Т.327, № 4-6. С.428-432.
2. Власов В.В. // Изв.вузов. Сер.матем. I993.№ 5. С.24-25
3. Власов В.В.// УМН. I994. Т.49,вып.3. С.175-176.
4. Власов В.В.// Изв.вузов. Сер.матем. I994.№ 6. С.28-38.
5. Власов В.В.// Матем.сб. I995. Т.I86,№ 8. С.67-92.

А.М. Водолазов

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ СУММАМИ ФУРЬЕ – УОЛША.

Пусть $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система функций Уолша, заданная на $[0,1]$ (см. [1], с. 9-10), а $S_n(f,x)$ частичная сумма Фурье-Уолша. Через $\Delta_m^{(k)}$ обозначим полуинтервал $[m/2^k, m+1/2^k)$, а через

$$\Omega(f,\Delta_m^{(k)}) := \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in\Delta_m^{(k)}\}.$$

Введём p-флуктуацию ограниченной функции $f(x)$ на $\Delta_m^{(k)}$. :

$$\mathcal{Fl}_p(f,\Delta_m^{(k)}) = \sup_{n\geq k}\Big(\sum_{i=m2^{n-k}}^{(m+1)2^{n-k}-1}|\Omega(f,\Delta_i^{(n)})|^p\Big)^{1/p},\quad 1\leq p<\infty.$$

Пусть $\xi=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1\}$ – разбиение отрезка $[0,1]$,

$$|\xi| = \max\{x_i-x_{i-1};\ 1\leq i\leq n\}.$$

По определению

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup_{|\xi|\leq\delta}\Big(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^p\Big)^{1/p};\quad 1<p<\infty.$$

Теорема. Пусть $1\leq p<\infty$, $1/p+1/q=1$, $n=2^{k_1}+\ldots+2^{k_s}$, $k_i\in N_+$ $k_1>k_2>\ldots>k_s$, $f(x)$ – ограниченная функция и $g_x(t):=f(x\oplus t)-f(x)$. (Где $\oplus$ – двоичное сложение, см. [1], стр. 13). Тогда для любого $x\in[0,1]$ имеет место неравенство:

$$|f(x)-S_n(f,x)|\leq\mathcal{Fl}_p(g_x,\Delta_0^{(k_1)})+(1/2)^{1/q}\sum_{i=2}^{s}(2^{k_i-k_1-1})^{1/p}\mathcal{Fl}_p(g_x,\Delta_0^{(k_i)})$$

При $p=1$ этот результат был получен Ф. Морицем [2].

Следствие. При $1<p<2$ для ограниченной функции $f(x)$ на $[0,1]$ имеет место неравенство: $\|f(x)-S_n(f,x)\|_\infty\leq A\,\omega_{1-1/p}(f,\frac{1}{n})$, где A не зависит от n.

Библиографический список

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Moricz F. A quantitative Dirichlet-Jordan test for Walch-Fourier series // Proc. AMS. 1993. Vol.118, N1. P. 143-149.

С.С.Волосивец

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ p-АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА-ШАУДЕРА

Пусть $1<p<\infty$, $f(x)$ ограничена на $[0,1]$, $\xi=\{0=x_0<\ldots<x_n=1\}$ – разбиение $[0,1]$, $|\xi|=\max\{x_i-x_{i-1}: 1\le i\le n\}$ – диаметр ξ. Положим по определению $\omega_{1-1/p}(f,\delta)=\sup\{(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^p)^{1/p}: |\xi|\le\delta\}$, $\omega_{2-1/p}(f,\delta)=\sup\{\omega_{1-1/p}(f(x+h)-f(x),h): 0\le h\le\delta\}$. Вводится пространство C_p функций $f(x)$, для которых $\omega_{1-1/p}(f,\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, с нормой $\|.\|_p=\max(\|.\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f,1))$. Для системы Фабера-Шаудера $\{\varphi_n\}_0^\infty$ /см. [I, с. [illegible]]/ рассматриваются наилучшие приближения $f\in C_p$: $E_n(f)_p := \inf\{\|f(x)-\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i\|_p : c_i\in\mathbb{R}\}$. Имеет место

Теорема I. Если $f\in C_p$, $1<p<\infty$, то $E_n(f)_p\le 16\,\omega_{1-1/p}(f,1/n)$. Если же $\int_0^\delta \omega_{2-1/p}(f,t)/t\,dt=O(\omega(\delta))$, то

$$E_n(f)_p \le C(f)\,\omega_{2-1/p}(f,1/n) .$$

Теорема 2. Для $f\in C_p$, $1<p<\infty$, верно неравенство

$$\omega_{1-1/p}(f,1/n)\le 2^4(2^{1/p}+1)\,n^{1/p-1}\sum_{j=1}^{n} j^{-1/p}E_{j-1}(f)_p$$

При $p=\infty$ аналогичные результаты принадлежат Чисельскому [2] и В.А.Матвееву /см. [I, с.217-218]/. Задача об оценке $\omega_{2-1/p}(f,1/n)$ через $E_i(f)_p$ не решена и при $p=\infty$.

Библиографический список.

I. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

2. Ciesielski Z. Some properties of Schauder basis of the space C(0,1) // Bull. Acad. Polon. Sci. 1960. Vol.8. P.141-144.

Н.П. Воронова

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

Анализ современных исследований по проблеме математического моделирования процессов нагрева металла позволяет сделать вывод о том, что отсутствует комплексное решение подобных задач, которое включало бы в себя построение математической модели сопряженного теплообмена, постановку задачи оптимального управления нагревом, разработку метода ее расчета.

Модель лучистого теплообмена сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений теплового баланса

$$\sum_{k=1}^{N_1}(a_{ki}T_k^4 + b_{ki}T_k) + Q_i = 0, \quad i = \overline{1, N_2}, \qquad (1)$$

где a_{ki}, b_{ki} - коэффициенты радиационного и конвективного теплообмена соответственно; T_k - температуры поверхностей металла; Q_i - тепловые потоки на поверхности металла; N_1, N_2 - количества зон с различными теплофизическими характеристиками.

Система (1) образует внешнюю задачу теплообмена. Внутренняя задача сводится к задаче нестационарной теплопроводности для бесконечной полосы:

$$c\rho\frac{\partial T_i}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T_i}{\partial x}\right), \quad t' = \frac{t}{u}, \quad 0 \le t \le L_i,$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \lambda\left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_{x=\delta} = \frac{Q_i}{F_i}, \quad i = \overline{1, N_1}, \qquad (2)$$

$$T_i\Big|_{t'=0} = T_{i-1}\Big|_{t'=\frac{L_{i-1}}{u}}, \quad T_1\Big|_{t'=0} = T_0,$$

где u - скорость движения металла; T_0 - начальная температура металла; F_i - площадь поверхности i-ой зоны; δ - полутолщина заготовки.

В качестве критерия равномерности нагрева рассматривается среднеквадратичное уклонение от технологически заданного распределения $T^*(x)$:

$$I = \int_0^\delta [T(x,t) - T^*(x)]^2 dx. \qquad (3)$$

Численными методами решается задача о выборе функции $T(x,t)$, чтобы за минимальное время t_{min} функционал (3) удовлетворял неравенству $I \le \varepsilon$, где ε - фиксированное число.

Т.М.Вуколова

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА

Рассмотрим тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad /1/ \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad /2/$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям: $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k a_n \geqslant 0$ для некоторого $k \geqslant 1$ и любых n, где $\Delta_1 a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta_k a_n = \Delta_1(\Delta_{k-1} a_n)$ для $k \geqslant 2$.

Известно, что для любого $\delta \in (0,\pi)$ эти ряды сходятся равномерно на отрезке $[\delta, 2\pi-\delta]$, то есть существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ – соответственно суммы рядов /1/ и /2/.

Известна теорема Харди –Литтлвуда:

пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geqslant 0$ для всех n, тогда

1/ для $p \in (0,\infty)$:

$$\|f(x)\|_p \asymp \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}\right)^{1/p}, \quad /3/$$

2/ для $p \in [1,\infty)$:

$$\|g(x)\|_p \asymp \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{1/p}. \quad /4/$$

Приведем некоторые утверждения /см.[1]/, дополняющие эту теорему.

а/ Если $\Delta_1 a_n \geqslant 0$ для любого n и $p \in (0,1]$, то в неравенстве /3/ оценка сверху верна; в то же время не существует единой положительной постоянной C, зависящей, быть может, только от p, чтобы в неравенстве /3/ была справедлива оценка снизу.

б/ Пусть $\Delta_k a_n \geqslant 0$ для любого n и $k \geqslant 1$. Тогда неравенство /4/ справедливо при $p \in (0,\infty)$.

в/ Пусть $\Delta_k a_n \geqslant 0$ для любого n и $k \geqslant 2$. Тогда для $p \in (0,\infty)$

$$\|f(x)\|_p \asymp \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^p (n+1)^{2p-2}\right)^{1/p}.$$

Библиография

1. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. //Вестн. Моск.ун-та. Сер.Матем., механ. 1995. № 3. С.22-32.

Э.М. Галеев

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

При вычислении порядков поперечников функциональных классов оценки сверху и снизу часто сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. Так, например, в работе В. Е. Майорова [1] для поперечников по Колмогорову класса периодических функций одной переменной выводится, что

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll \sum_{s \in N} 2^{s\left(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} d_{N_s}(B_p^{2^s}, l_q^{2^s}), \qquad (1)$$

$\sum_s N_s = N$. Б. С. Кашиным [2] были найдены оценки для $d_n(B_p^m, l_q^m)$, выбрав величины N_s и после подстановки в формулу (1) получен правильный порядок $d_N(W_p^r, L_q)$ при $p \leq q, 2 < q$.

В докладе приводится доказательство другого неравенства:

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll \sup_{s \in N} 2^{s\left(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} d_{N_s}(B_p^{2^s}, l_q^{2^s}), \qquad (2)$$

$\sum_s N_s = N$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Формула (2) является более точной по сравнению с формулой Майорова. Неравенство (2) доказывается с помощью теоремы Литтльвуда–Пэли, некоторых неравенств и теорем Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации. Соотношение (2) остается справедливым и для других поперечников, например, тригонометрических, линейных, ортопроекционных и т. д., а также для классов периодических функций многих переменных. Использование этой формулы дает более точные по сравнению с известными оценки сверху поперечников классов периодических функций одной переменной $d_N(W_p^r, L_q)$ при $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $r = 1/p$, классов функций многих переменных с доминирующей смешанной производной $W_p^r(T^d)$ при малых гладкостях.

Аналогично выводятся формулы для оценок поперечников классов Соболева, Гельдера–Никольского, Бесова и для случая $2 \leq p < q < \infty$.

Библиографический список

1. Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках // УМН. 1975. Т.30, в.6. С. 179–180.

2. Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т.41, №2. С. 334–351.

В.Ф. Гапошкин

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ СРЕДНИХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $(U(t), t\in R^k)$ – группа унитарных операторов в $L^2(X, d\mu)$, $U(t+\tau)=U(t)\,U(\tau)$ и $f(x)\in L^2(X)$. Рассматриваются общие весовые средние

$$\sigma_T = B^{-1}(T)\int_{V_T} b(|t|)U(t)f(x)\,dt,$$

где $V_t=\{|t|\le T\}$ – шар радиуса T в R^k,

$$B(T)=\int_{V_T}(b(|t|)dt, \quad \lim_{T\to\infty} B(T)=\infty.$$

Предполагается, что $b(u)u^{k-1}$ монотонно не возрастает при $u\to\infty$. Доказаны следующие теоремы представления для средних σ_T, обобщающие результаты автора, относящиеся к случаю средних арифметических $/\, b(t)\equiv 1\,/$.

Теорема I. Пусть $B(T_n)=2^n$, $\lambda_n=T_n^{-1}$, $n\ge 1$,

$Z(d\lambda)$ – спектральная мера группы $U(t)$, $Z_f(d\lambda)=Z(d\lambda)f$.
Тогда при $T_n\le T<T_{n+1}$

$$\sigma_T=\int_{|\lambda|\le\lambda_n} Z_f(d\lambda)+\eta_T, \quad \lim_{T\to\infty}\eta_T=0 \text{ п.в.}$$

Теорема 2. Если $F(d\lambda)=\|Z_f(d\lambda)\|^2$, и

$$\int_{0<|\lambda|<\lambda_0}\log\log^2 B\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)F(d\lambda)<\infty,$$

то средние σ_T сходятся п.в. при $T\to\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке внебюджетного фонда НИР МПС России, РФФИ (проект 96-01-01129).

В.Э. Гейт

О ФУНКЦИЯХ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМИ АППРОКСИМАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В докладе излагаются результаты исследований автора, относящиеся к следующим вопросам теории приближений:

I) характеризация и применение последовательностей различных классических приближений,

2) признаки вторых модулей непрерывности,

3) экстремальные функции теорем вложения и порядковых соотношений в периодическом случае.

Б.И. Голубов

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ХАРДИ И БЕЛЛМАНА ПРОСТРАНСТВ H^1 И ВМО

В 1928г. Г.Харди [I] доказал следующую теорему:

Теорема А. Пусть $1 \leq p < \infty$ и функция $f \in L^p(0,\pi)$ имеет косинус-ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (a_0 = 0). \qquad /\ I\ /$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} H_n(a) \cos nx$, где $H_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$, является косинус-рядом Фурье некоторой функции $H(f) \in L^p(0,\pi)$.

В 1944г. Р.Беллман [2] доказал двойственный результат:

Теорема В. Пусть $1 < p \leq \infty$ и функция $f \in L^p(0,\pi)$ имеет косинус-ряд Фурье вида /I/. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a) \cos nx$, где $B_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}$, является косинус-рядом Фурье некоторой функции $B(f) \in L^p(0,\pi)$.

Аналоги теорем А и В справедливы и для синус-рядов Фурье.

Если функцию f в теоремах А и В продолжить чётным образом и с периодом 2π, то её преобразование Харди $H(f)$ на $(0,\pi)$ имеет вид

$$H(f)(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \ln |2 \sin \tfrac{t}{2}|\, dt, \qquad /\ 2\ /$$

а преобразование Беллмана $B(f)$ имеет вид

$$B(f)(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \int_0^x f(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \ln |2 \sin \tfrac{t}{2}|\, dt. \qquad /\ 3\ /$$

Первое слагаемое в правой части /2/ выписано в работе Харди [I], а второе слагаемое явно выписано в работе К.Андерсена [3]. Явное выражение /3/ для преобразования Беллмана $B(f)$ найдено автором в статье [4].

Напомним, что функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди H^1, если она регулярна в единичном круге $|z| < 1$ комплексной плоскости и удовлетворяет условию

$$\|f\|_{H^1} \equiv \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty.$$

Сопряжённым к банахову пространству H^1 является пространство BMO(T).

Последнее состоит из функций $f \in L(T)$, $T = [-\pi, \pi]$, имеющих период 2π и удовлетворяющих условию

$$\|f\| \equiv \sup_{|I| \leq 2\pi} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|\,dx < \infty, \qquad /4/$$

где $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\,dt$, $I = (a, b)$, $|I| = b - a > 0$.

Теорема 1. Преобразование Беллмана /3/ является линейным ограниченным оператором в пространстве $BMO^+(T)_0$ четных 2π-периодических функций f с нормой /4/, удовлетворяющих условию $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_T f(t)\,dt = 0$.

Теорема 2. Пространство $BMO^+(T)_0$ не инвариантно относительно преобразования Харди /2/ /напомним, что $H(f)(-x) = H(f)(x)$ /.

Теорема 3. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – ряд Тейлора функции $f \in H^1$, причем $a_0 = 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} H_n(a) z^n$, где $H_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$, также является рядом Тейлора некоторой функции $\mathcal{H}(f) \in H^1$.

Теорема 4. Пространство H^1 не инвариантно относительно преобразования Беллмана, т.е. существует такая функция $f \in H^1$, имеющая ряд Тейлора $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a) z^n$, где $B_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}$, не является рядом Тейлора никакой функции из пространства H^1.

Библиографический список

1. Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus // Messenger of Math. 1928. Vol. 58. P. 50–52.

2. Bellman R. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50. P. 741–744.

3. Andersen K.F. On the transformation of Fourier coefficients of certain classes of functions // Pacific J. Math. 1982. Vol. 100, № 2. P. 243–248.

4. Голубов Б.И. Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Мат.сб. 1994. Т.185, № 11. С.31–40.

Е.В. Гудошникова

Об оценке сходимости одной последовательности линейных положительных операторов

Пусть последовательности $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что

1. $\rho_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n^2 n = \infty$ и $\rho_n \le \ln(n\varepsilon)$.

2. $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu_n}{n} = 0$ и $\mu_n \le \dfrac{n\varepsilon}{\ln(n\varepsilon)}$.

Пусть матрица $R = (r_{n,k})_{n=1,k=0}^{\infty\ \ \infty}$, где $r_{n,k} \ge 0$, такова, что существует последовательность $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

3. $\nu_n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\rho_n^2 n}{\nu_n^2} = \infty$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}_n = 1$, где $\mathrm{M}_n = \sup\limits_k\left(\dfrac{1}{\nu_n}\sum\limits_{i=0}^{\nu_n} r_{n,k+i}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}_n = 1$, где $\mathrm{m}_n = \inf\limits_k\left(\dfrac{1}{\nu_n}\sum\limits_{i=0}^{\nu_n-1} r_{n,k+i}\right)$

Пусть υ - непрерывная, невозрастающая на $[0;\infty)$ функция такая, что $0 < \upsilon(x) \le 1$ и для всех $t \ge x \ge 0$ $\upsilon(x)/\upsilon(t) \le a\exp\left(\dfrac{bt}{1+x}\right)$, где a и b некоторые константы. Пусть f - непрерывная на $[0;\infty)$ функция такая, что υf ограничена. Положим

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{R},f,x)_{\rho_n,\mu_n} = \frac{e^{-nx}}{\rho_n}\sum_{k\ge\max(0;(1-\mu_n)\rho_n)} r_{n,k} f\left(\frac{1}{n}\left(\frac{k}{\rho_n}+\mu_n-1\right)\right)\frac{(nx)^{\frac{k}{\rho_n}+\mu_n-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho_n}+\mu_n\right)}.$$

(Отметим, что если $\rho_n = \mu_n = r_{n,k} = 1$ для всех n и k, то H_n - оператор Саса-Миракьяна).

Если $h_n = \max\left\{|\mathrm{M}_n - 1|; |\mathrm{m}_n - 1|; \dfrac{\nu_n}{\rho_n\sqrt{n}}; \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, то найдется номер n_0 такой, что для всех $n \ge n_0$, для всех $x \ge \varepsilon$ будет выполняться

$$\upsilon(x)\left|\mathrm{H}_n(R,f,x)_{\rho_n,\mu_n} - f(x)\right| \le (c_1 + c_2\sqrt{x})\omega_\upsilon(f;h_n) + c_3\|f\|_\upsilon h_n,$$

где c_1, c_2, c_3 - некоторые положительные константы, зависящие только от ε, a, b; $\|f\|_\upsilon = \sup\limits_{x\ge0}|\upsilon(x)f(x)|$ и $\omega_\upsilon(f;h) = \sup\limits_{0\le\delta\le h}\ \sup\limits_{x\ge0}\upsilon(x)|f(x+\delta) - f(x)|$.

Библиография

Миракьян Г.М. Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx}\sum\limits_{k=0}^{n} C_{k,n}x^k$ // Докл. АН СССР. Т. 31, №3. С.203-205.

В.И.Данченко, Д.И.Данченко

ОБ ОЦЕНКЕ КОМПОНЕНТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ГРИНОВУ ЕМКОСТЬ

Пусть G – ограниченная жорданова область на $\mathbb{C}$. С областью G связано семейство функций $\{\varphi(z,\zeta)\}$, $z\in G$, $\zeta\in G$ таких, что $w=w(z)=w(z,\zeta)$ при каждом фиксированном ζ является регулярным однолистным отображением (Римана) области G на единичный круг $|w|<1$ с $w(\zeta)=0$, $w'(\zeta)>0$. При фиксированных ζ и $\Delta\in(0,1)$ положим $g_G(\zeta,\Delta)=\{z:|\varphi(z,\zeta)|<(1-\Delta)/(1+\Delta)\}$. Области такого типа используются нами в теоремах покрытия (см. также [2]).

Пусть E – компакт, лежащий в G и θ – неотрицательная борелевская мера с $\operatorname{supp}\theta\subset E$. Определим гармоническое преобразование меры θ : $\hat\theta(z)=\hat\theta_{E,G}(z)=-\int\limits_E \ln|\varphi(z,\zeta)|\,d\theta(\zeta)$, $z\in G\setminus E$.

Ясно, что $\hat\theta$ – неотрицательная гармоническая в $G\setminus E$ функция и $\hat\theta(z)=0$ на ∂G.

Следующие теоремы о покрытии носителя θ являются модификацией соответствующих теорем о покрытии n – точечных множеств, установленных в [2].

Теорема А. Пусть G – жорданова область с гладкой границей θ – борелевская неотрицательная мера с $\operatorname{supp}\theta\subset G$, $q>0$. Тогда существует покрытие V множества E или его части конечной или счетной системой областей $g_G(z_k,\Delta_k)$ со свойствами

$$(\text{i})\quad \hat\theta(z)\le C q^{-1},\ z\in G\setminus(V\cup E);$$

$$(\text{ii})\quad \int\limits_{\partial V}|t-z|^{-1}|dt|\le C(\Gamma)\cdot q\cdot\theta(E),\ z\notin G.$$

Аналогичный результат без каких-либо ограничений на границу доказывается значительно сложнее. Здесь получается

Теорема В. Если из условия теоремы А исключить требование гладкости границы, то при любом $\varepsilon>0$ существует открытое покрытие V с кусочно гладкой границей со свойствами :

(i) при $z\in G\setminus(V\cup E)$ и $\Delta>0$ имеем

$$q\Delta\mu(\Delta)\ln^{1+\varepsilon}(e+\mu(\Delta))<1,\quad \text{где } \mu(\Delta)=\theta(E\cap g_G(z,\Delta));$$

$$(\text{ii})\quad \int\limits_{\partial V}|t-z|^{-1}|dt|\le C_\varepsilon q\theta(E),\ \text{где } C_\varepsilon \text{ зависит лишь от } \varepsilon.$$

На этих теоремах основаны дальнейшие результаты.

Пусть f – регулярная в $G\setminus E$ функция. С помощью контурных интегралов представим f в виде суммы $f_E+f_{\partial G}$, где первая компонента регулярна в $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ и $f_E(\infty)=0$, а вторая регулярна в G.

Используя гармонические мажоранты типа $\hat{\theta}_{E,G}$ (в частности, гармонические меры) для субгармонических в $G\setminus E$ функций $\ln|f(z)|$ и теоремы А,В, получаем следующие оценки f_E.

Теорема 1. Пусть область G имеет гладкую границу Γ и $0<C_0(E,\Gamma)$ — гринова ёмкость конденсатора (E,Γ) (см., напр., [1]). Пусть, далее, f -регулярная в $G\setminus E$ функция и конечны величины $M=\|f\|_E=\limsup_{G\ni z\to E}|f(z)|$, $m=\|f\|_\Gamma$. Тогда

$$\|f_E\|_\Gamma\le C(\Gamma)\, m\ln(1+M/m)\, C_0(E,\Gamma). \qquad (1)$$

Если E -объединение конечного числа континуумов, то справедливо и более общее неравенство

$$\|f_E\|_\Gamma\le C(\Gamma)\, m\int_E \ln(1+|f(x)|/m)\,d\mu_0(x),$$

где μ_0 - равновесное распределение единичного заряда на E (при необходимости f доопределяется на E до B -измеримой функции). Неравенство (1) уточняет аналогичное неравенство, принадлежащее А.А.Гончару и Л.Д.Григоряну [1] (в [1] вместо $m\ln(1+M/m)$ был множитель $\max\{M,m\}$, однако оценка установлена для произвольных областей).

Теорема 1 распространяется на случай функций f, регулярных в $G\setminus E$ и допускающих оценки вида

$$|f(z)|\le M\prod_k|\varphi(z,a_k)|^{-p_k},\ a_k\in E \quad \text{при } G\ni z\to E \qquad (2)$$

с некоторыми $M>0$, $p_k>0$; $\sum_k p_k<\infty$ (в частности, на случай рациональных функций с полюсами, лежащими вне $G\setminus E$). Именно, справедлива

Теорема 2. Если в теореме 1 заменить условие конечности $\|f\|_E$ на условие (2), то

$$\|f_E\|_\Gamma\le C(\Gamma)\, m\left(\ln(1+M/m)\, C_0(E,\Gamma)+\sum_k p_k\right).$$

Библиографический список

1. Гончар А.А., Григорян Л.Д. Об оценке компонент ограниченных аналитических функций // Матем.сб. 1987.Т.132.С.299-303.
2. Данченко В.И. О разделении особенностей мероморфных функций // Матем.сб. 1984.Т.125.С.181-198.

О.Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА N-ГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

На отрезке $[0;1]$ рассмотрим краевую задачу:

$$y^{(n)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$u_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{i-1}(1) = 0 \quad i = \overline{1,n}\ , \tag{2}$$

где a_i - константы; λ - спектральный параметр.

Положим $\lambda = -\rho^n$ $(arg\,\rho \in [-\frac{\pi}{n};\frac{\pi}{n}])$. Тогда $y_j(x) = y_j(x,\rho) = exp(\rho w_j x)$, $w_j = exp\frac{2j-1}{n}\pi i$, $j = \overline{1,n}$ образуют фундаментальную систему решения уравнения (1). Обозначим

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i(-w_j)^{i-1} \tag{3}$$

$$\Delta_{1\ldots k\ \overline{k+1\ldots 3k}\ 3k+1\ldots 4k+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & a_1 & \ldots & a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & \ldots & w_k & a_2 w_{k+1} & \ldots & a_2 w_{3k} & w_{3k+1} & \ldots & w_{4k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{n-1} & \ldots & w_k^{n-1} & a_n w_{k+1}^{n-1} & \ldots & a_n w_{3k}^{n-1} & w_{3k+1}^{n-1} & \ldots & w_{4k+1}^{n-1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\Delta_{1\ldots k\ \overline{k+1\ldots 3k}\ 3k+1\ldots 4k+1} = 0 \tag{5}$$

$$\Delta_{1\ldots k\ \overline{k+1\ldots 3k+1}\ 3k+2\ldots 4k+1} \neq 0 \tag{6}$$

$$\Delta_{1\ldots k+1\ \overline{k+2\ldots 3k}\ 3k+1\ldots 4k+1} \neq 0 \tag{7}$$

Краевые условия (2) при выполнении (5)-(7) не являются регулярными по Биркгофу [1]. В этом случае функция Грина $G(x,t,\lambda)$ имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$.

Для собственных чисел λ_l справедлива асимптотика $\lambda'_l = -\rho'^n_l$, $\lambda''_l = -\rho''^n_l$

$$\rho'_l = \rho'^0_{l+h} + o(\frac{1}{l})\ ,\ \rho'^0_l = \frac{(2l+1)\pi}{2\sin\frac{2k}{n}\pi} e^{\frac{\pi}{n}i}\ ,\ \rho''_l = \rho''^0_{l+h} + o(\frac{1}{l})\ ,\ \rho''^0_l = \frac{(2l+1)\pi}{2\sin\frac{2k}{n}\pi} e^{-\frac{\pi}{n}i} \tag{8}$$

Обозначим

$$\varphi(x,\rho) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 \rho^{i-1}\varphi_i(x,\rho)\ ,\ \alpha_i^0 = a_i w_k^{i-1}\ ,\ \varphi_i(x,\rho) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & \ldots & u_1(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n(y_1) & \ldots & u_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Лемма 1. Для того, чтобы $\Delta_{1\ldots k\,\overline{k+1\ldots 3k}\,3k+1\ldots 4k+1} = 0$ необходимо и достаточно, чтобы система $\sum_{i=1}^{2k}\sigma_i b_{l+i-k}$, $l=\overline{k+1,3k}$ имела нетривиальное решение $\{\sigma_i\}_1^{2k}$.

Теорема 1. Если ряд $\sum a_l\varphi(x,\rho_l)$ сходится равномерно на $[0;1]$, $f(x)$ – его сумма и μ не является собственным значением, то функция $g(x)=R_\mu f = \int_0^1 G(x,t,\mu)f(t)dt$ аналитически продолжима в

$$T_1 = \left(0; m\exp\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{n}i\right); 1; m\exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\pi}{n}i\right)\right),\quad m=\cos\frac{2k}{n}\pi : \cos\frac{2k-\frac{3}{2}}{n}\pi .$$

Теорема 2. Пусть $f\in L[0;1]$ и при некотором натуральном $æ$ функция $g(x)=R_\mu^{æ} f$ удовлетворяет следующим условиям:

а) аналитически продолжима в шестиугольник

$$\tilde{T}_1 = (0; m_1\varepsilon_k; 1-m_1\varepsilon_{3k+2}; 1; 1-m_1\varepsilon_k; m_1\varepsilon_{3k+1}),\quad m_1=\operatorname{Re}\varepsilon_k,\quad \varepsilon_j=\exp\frac{2j}{n}\pi i ;$$

б) непрерывна на интервалах

$$(0; m_1\varepsilon_k),\ (0; m_1\varepsilon_{3k+1}),\ (1; 1-m_1\varepsilon_{3k+2}),\ (1; 1-m_1\varepsilon_k) ;$$

в) ограничена в углах : $|\arg z|\le \frac{2k}{n}\pi$, $|z|\le|z_0|$

$$\frac{2k+2}{n}\pi\le\arg(z-1)\le\frac{6k}{n}\pi,\quad |z-1|\le|z_0| ;$$

г) при $t\in(0;m_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(y,t)=\sum_{j=\overline{1,k},\overline{3k+1,4k+1}}\bar{b}_j y(\varepsilon_j t)+\sum_{j=\overline{k+1,3k}} n\sigma_{3k+1-j}\,y(1-\varepsilon_{2k+1-j}t)=0 ,$$

где $\bar{b}_j=\sum_{i=1}^{2k}\sigma_i b_{j+i-k}$, $j=\overline{1,n}$, а σ_i из Леммы 1.

Тогда $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $(0;1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)-(2).

Библиографический список

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения. Саратов, 1991.
3. Дмитриев О.Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора N-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения. Саратов, 1991.

A.V.Dmitruk

Quadratic Order Conditions of a Weak, Pontryagin, and Strong Minimum for Singular Boundary Extremals

Central Economic-Mathematical Institute,
Russian Acad. Sci., Moscow 117418, ul. Krasikova, 32
Tel: (095) 332-42-11, e-mail: dmitruk@cemi.rssi.ru

We consider the following optimal control problem (Problem A):

$$J = \varphi_0(p) \to \min, \qquad \varphi_i(p) \le 0, \quad i = 1, \ldots, \nu, \qquad g(p) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x,t) + F(x)u = f(x,t), \qquad u(t) \in U. \tag{2}$$

Here $p = (x_0, x_T)$, $x_0 = x(t_0)$, $x_T = x(T)$, the time interval $[t_0, T]$ is fixed; the variables u, x, g are multidimensional. The set U is convex, closed and solid.

We examine a totally singular trajectory $w^0(t) = (x^0(t), u^0(t))$, assuming that $u^0(t)$ is continuous, and for all t lies in the relative interior of one and the same face U_0 of U. (The case $U_0 = U$ is not forbidden.) A difficulty in case $U_0 \ne U$ is that one cannot take two-side variations of the control, which are of crucial importance in obtaining higher-order optimality conditions for an interior control.

We consider three types of minimum – the classical weak, strong, and an intermediate Pontryagin minimum (Π-minimum), which is an L_1-minimum with respect to control on any uniformly bounded control set. Note that Π-minimum allows one to take so-called needle-type variations of the control.

We choose the following quadratic functional (order) of estimation:

$$\gamma(\bar{w}) = |\bar{x}(t_0)|^2 + |\bar{y}(t_1)|^2 + \int |\bar{y}(t)|^2\, dt, \qquad \text{where} \qquad \dot{\bar{y}} = \bar{u}, \qquad \bar{y}(t_0) = 0,$$

and give necessary and close to them sufficient conditions (adjoint pairs of conditions) of the order γ for a weak minimum and, separately, for a Π-minimum. The latter pair differs from the former pair only in an additional pointwise condition, including coefficients of the third variation of Lagrange function and taking into account the admissible control set U (a new condition of Legendre type).

In particular case when U_0 consists of a single point (e.g. any boundary point of a strictly convex U), the following theorem holds: the γ-sufficient condition for a weak minimum at w^0 guarantees actually a strong minimum at w^0. This theorem proved to be helpful in the problem of minimality of abnormal sub-Riemannian geodesics.

Е. П. Долженко

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МОНОГЕННОСТИ

В работе [1] (теоремы 2.1 и 3.1) задача получения теорем типа Лумана–Меньшова и теорем об асимптотической моногенности сведена к задаче описания устранимых множеств E особых точек для классов функций f, определенных в некоторой области $G \subset \mathbf{C}$, голоморфных на $G \backslash E$, имеющих в каждой точке $z \in G$ определенное поведение на некотором множестве $E(z)$ заданного вида (для теорем типа Лумана–Меньшова $E(z)$ — это пара прямых, пересекающихся в точке z, для теорем об асимптотической моногенности — некоторое множество с лебеговой плотностью 1 в точке z). Этим теория моногенности ставит задачу описания устранимых множеств не только для "классических" классов H, но и классов H голоморфных функций с обусловленным поведением на некоторых множествах $E(z)$ заданного вида. При этом особый интерес представляют монотонные подклассы класса $\log^+ L_{loc}$, состоящего из всех функций f с локально суммируемым $\log^+ | f(z) |$.

Отметим некоторые теоремы об устранимости. (1) Множества $E \subset G$ нулевой длины (по Хаусдорфу) устранимо для функций, ограниченных и голоморфных на $G \backslash E$, а множества E σ-конечной длины — для функций, непрерывных в G и голоморфных на $G \backslash E$ (П. Пенлеве). (2) При $0 < \alpha < 1$ равенство нулю $(\alpha + 1)$-мерной меры Хаусдорфа множества $E \subset \mathbf{C}$ необходимо и достаточно для устранимости его в классе функций из $\mathrm{Lip}\,\alpha$ в G, голоморфных в $G \backslash E$ [2]. (3) Пусть (a) f голоморфна на $G \backslash E$, где G — область, а E имеет σ-конечную длину, (b) $f \in \log^+ L_{loc}$, и $f(x+iy)$ непрерывна по x и по y в каждой точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Тогда f голоморфна в G (К. Смирнов). (4) Если при условии (a) каждая точка z замкнутого множества E есть точка Лебега для локально суммируемой в G функции f, то f голоморфна в G (К. Бесов).

Работа поддержана фондом РФФИ (грант 96-01-01366).

Библиографический список

1. Долженко Е. П. // УМН. 1992 . Т. 47, N 5(287). С. 67-96.

2. Долженко Е. П. // УМН. 1963 . Т. XVIII, N 4(112). С. 135-142.

3. Долженко Е. П. // Analysis Mathematica. 1976 . V. 2. P. 191-201.

С.И. Дудов

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА И СУПЕРДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

Дифференциальные свойства функции расстояния (ФР) от точки до множества: $\rho(x)=\inf\limits_{y\in\Omega} n(x-y)$, где $\Omega\subset R^p$ и $n(\cdot)$ - норма, играют важную роль в определении и исследовании объектов негладкого анализа. Тема доклада - необходимые и достаточные условия субдифференцируемости и супердифференцируемости (см. [1]) ФР в заданной точке, геометрические особенности некоторых дифференциальных характеристик ФР и вопрос о восстановлении ФР по этим характеристикам.

Т е о р е м а 1. Пусть A - выпуклый компакт из R^p. Для того, чтобы существовала субдифференцируемая в заданной точке ФР для которой A являлся бы субдифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы существовал выпуклый телесный симметричный относительно нулевого элемента (в.т.с.) компакт $M\subset R^p$ такой, что либо $A\subseteq\partial M$ (- граница M) либо $A=M\cap\Gamma$, где Γ - некоторый выпуклый замкнутый конус.

Т е о р е м а 2. Пусть M - в.т.с. компакт из R^p, $\varphi_{M^*}(\cdot)$ функция Минковского для поляры M, Γ - выпуклый замкнутый конус, $K^+(A)=\{w\in R^p/(w,v)\geq 0,\ \forall v\in A\}$. Если A - выпуклый компакт такой, что $A\subset\partial M$ или $A=M\cap\Gamma$, то ФР с нормой $n(\cdot)=\varphi_{M^*}(\cdot)$, множеством $\Omega=\{y\in R^p/\max\limits_{v\in A}(v,y-x)+\rho\leq 0\}$,

где $\rho>0$, или соответственно $\Omega=x-K^+(A)$, является субдифференцируемой в точке x и субдифференциалом равным A.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00156).

Библиография

1. В.Ф.Демьянов, А.М.Рубинов. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

В.А. Дурденко, В.А.Родин

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ РАБОТЫ ПЦО

Работа носит прикладной характер. Для моделирования многоканального пункта централизованной охраны, обслуживающего крупный район, проведена статистическая проверка гипотезы о виде распределения случайного временного промежутка между двумя соседними сигналами. Зная закон распределения, далее ПЦО рассматривается как элемент теории систем массового обслуживания. Алгоритмическая модель, имитирующая работу ПЦО, строится с помощью специальной модификации метода Монте-Карло. ([illegible]). Моделирование имеет некоторую сложность, связанную с тем фактом, что суммарное проявление нескольких экспоненциальных законов (именно этот закон подтвердился в качестве нулевой гипотезы на каждой линии) не является, вообще говоря, экспоненциальным законом.

Пусть распределения независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ заданы дифференциальными функциями:

$$f_i(x_i) = a_i e^{-a_i x_i}, \quad (x_i > 0,\ i = 1, \dots, n) \qquad (1)$$

Предположим, что все числа a_i различны. Через $П(j)$ обозначим произведение

$$П(j) = (a_1 - a_j)\dots(a_{j-1} - a_j)(a_{j+1} - a_j)\dots(a_n - a_j).$$

Данное произведение содержит разности a_j со всеми остальными числами. Плотность композиции всех законов (1) имеет вид

$$g_n(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{-a_k x} / П(k), \qquad (2)$$

Формула (2) получается последовательным применением n-раз преобразования свертки.

Заметим, что даже при одинаково распределенных ($a_1 = a_2 = a$) двух случайных величинах композиция имеет плотность

$$f_2(x) = a^2 x e^{-ax} \quad (x > 0). \qquad (3)$$

Формулы (2) – (3) показывают невозможность точного [illegible] [illegible] по методу Монте-Карло. Поэтому конструктивная размерность метода в данной задаче равна числу независимых телефонных линий по которым информация поступает на ПЦО.

На основе алгоритмической модели получаем опытный вариант программы ЭВМ позволяющей оптимизировать число независимых линий, а также прогнозировать количество ложных выездов по тревоге групп задержания, вызванных не достаточной укомплектованностью ПЦО.

Библиография

I. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. М., 1985.

А.М. Дьячков

СХОДИМОСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ТОЧКЕ ЛЕБЕГА-ОРЛИЧА

Рассмотрим симметричное пространство X функций на R^N (то есть такое, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$, как только $y \in X$ и $\forall h > 0$ $mes\{t : |x(t)| > h\} \leq mes\{t : |y(t)| > h\}$) и его сепарабельную часть X_s – замыкание в X линейной оболочки индикаторов χ_E борелевских множеств $E \subset R^N$. Будем предполагать, что его фундаментальная функция $\phi(t^N) = \|\chi_{tB}\|_X, t > 0$, где B – единичный шар с центром в начале координат 0, удовлетворяет условиям: $\phi(+0) = 0$, $\phi(t)$ не убывает, $\phi(t)$ вогнута.

С помощью нормы пространства X вводится понятие точки Лебега-Орлича [1] в 0: $\|f\chi_{hB}\|_X = o(\|\chi_{hB}\|_X)$ $(h \to +0)$. Уточним это понятие. Для $\nu \in R$ положим $X_S^\nu = \{f : \forall h > 0$ $f\chi_{2hB\setminus hB} \in X_S$, $\|f\chi_{2hB\setminus hB}\|_X = \Theta(h)h^\nu\|\chi_{2hB\setminus hB}\|_X$, $\Theta(h) = O(1)$, $\Theta(+0) = 0\}$. Возможно, что X_S^ν пусто при малых ν: например, $(L^p)^\nu_S$ пусто при $\nu \le -N/p$.

Д.В. Салехов [2] нашел условие сходимости последовательности функционалов Φ_n типа сингулярного интеграла от функции f из X_S^0 с носителем на $[-1,1]$. А именно, $\Phi_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$ тогда и только тогда, когда 1) $\forall h > 0$ $\Phi_n(\chi_{hB}) \to 1$ $(n \to \infty)$; 2) $\overline{lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi(h_k)\|\Phi_n R_{h_k B\setminus h_{k+1} B}\|_X^* < \infty$, где $\Phi_n R_E(f) \equiv \Phi_n(f\chi_E)$, $\|\cdot\|_X^*$ – функциональная норма над X, $h_0 = 1$, $h_{k+1} = \phi^{-1}(q\phi(h_k))$, $0 < q < 1$.

Аналогичный в некотором смысле результат имеет место для пространства X_S^ν функций $f : R^N \to R$.

Теорема 1. Пусть $\nu \in R$. Функционалы Φ_n определены для всех $f \in X_S^\nu$ и $\Phi_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$ тогда и только тогда, когда

1) $\Phi_n(\chi_E) \to 0$ $(n \to \infty)$ для любого борелевского $E \subset 2hB\setminus hB$, $h > 0$;

2)

$$\sum_{m\in Z} A_{m,n} \equiv \sum_{m\in Z} 2^{m\nu}\phi(2^{mN})\|\Phi_n R_{2^m B\setminus 2^{m-1} B}\|_X^* = O(1) \ (n \to \infty);$$

3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{m>M} A_{n,m} = o(1) \ (M \to \infty).$$

Условия 1)-3) формально независимы. Если условие 3) усилить жертвуя необходимостью

4)

$$\forall M \in Z \ \sum_{m>M} A_{n,m} \to 0 \ (n \to \infty),$$

то из 4) вытекает 3) и 1). Условие 3) излишне, если в определении X_S^ν потребовать $\Theta(h) = o(1)$ $(h \to \infty)$ - как, например, для финитных f и $\nu \geq 0$

или для ограниченных или периодических по всем аргументам t_i функций $f(t)$ и $\nu > 0$.

Говорят, что функционалы Φ_n от функции f ε - устойчиво сходятся к нулю в 0, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n : \varepsilon \to +0 \ (n \to \infty)\}$, если $\Phi_n T_\xi(f) \equiv \Phi_n(f(t+\xi)) \to 0$ ($\xi \in R^N$, $|\xi| = O(\varepsilon_n)$, $n \to \infty$). Чтобы рассматривать устойчивую сходимость, нужно сузить класс функций X_S^ν. Пусть $\nu \geq 0$. Скажем, что $f \in X_T^\nu$, если $f \in X_S^\nu$ и $\|f\chi_{hB}\|_X = o(h^\nu)\|\chi_{hB}\|_X$ $(h \to +0)$. Классы X_S^ν и X_T^ν совпадают при $\nu > 0$, а также при $\nu = 0$ и $\varphi^{-1} \in (\Delta_2)$. Однако, например, для пространства $X = exp(L)$ класс X_S^0 строго шире, чем X_T^0.

Для формулировки аналога теоремы 1 потребуется последовательность h_k, $k \in Z$. Положим $h_k = 2^k$ при $k \geq 0$, а также при $k < 0$, если $\nu > 0$. Для $\nu = 0$, $k < 0$ положим $h_k^N = \varphi^{-1}(\varphi(h_{k+1}^N)/2)$.

Теорема 2. Пусть $\nu \geq 0$, $\varepsilon_n \to +0$ $(n \to \infty)$. Функционалы Φ_n определены для всех $f \in X_T^\nu$ и $\Phi_n T_\xi(f) \to 0$ ($\xi \in R^N$, $|\xi| = O(\varepsilon_n)$, $n \to \infty$) тогда и только тогда, когда

1) $\Phi_n T_\xi(\chi_E) \to 0$ $(n \to \infty)$ для любого борелевского $E \subset 2hB \backslash hB$, $h > 0$;

2)

$$A_n^T + \sum_{h_m > \varepsilon_n} A_{n,m}^T \equiv h_{m(n)}^\nu \|\chi_{h_{m(n)}B}\|_X \, \|\Phi_n R_{h_{m(n)}B}\|_X^* +$$

$$+ \sum_{h_m > \varepsilon_n} h_m^\nu \|\chi_{K_m}\|_X \|\Phi_n R_{K_m}\|_X^* = O(1) \ (n \to \infty),$$

где $K_m = h_m B \backslash h_{m-1} B$, $m(n) = min\{m : h_m > \varepsilon_n\}$;

3)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{m > M} A_{n,m}^T = o(1) \ (M \to \infty).$$

Аналоги замечаний относительно усиленного условия 4) и возможности убрать условие 3) для некоторых функций f справедливы и для теоремы 2.

Контроль за скоростью сходимости сингулярных интегралов $\Phi_n(f)$ и $\Phi_n T_\xi(f)$ через параметр ν позволяет получать их асимптотические разложения в точках, где существует обобщенный дифференциал функции f в метрике X порядка $[\nu]$.

Следствие 1. Пусть $\nu = 1, 2, \ldots$ Если функция f имеет в точке 0 X - дифференциал порядка ν, то есть $f - P_\nu$ входит в X_S^ν или в X_T^ν для некоторого полинома

$$P_\nu(x) = \sum_{|\alpha| \leq \nu} f_X^{(\alpha)}(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

а функционалы $r_n \Phi_n$ удовлетворяют, соответственно, условиям теоремы 1 ($и$ определены на x^α, $|\alpha| \leq \nu$) или условиям теоремы 2 для некоторой последовательности чисел $r^n > 0$. Тогда

$$\Phi_n(f) = \sum_{|\alpha|\le\nu} f_X^{(\alpha)}(0)\frac{\Phi_n(x^\alpha)}{\alpha!} + o(r_n^{-1}) \ (n \to \infty).$$

или, соответственно,

$$\Phi_n T_\xi(f) = \sum_{|\alpha|\le\nu} \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_\nu=0}^{\alpha_N} \frac{f_X^{(\alpha)}(0)}{\beta!(\alpha-\beta)!}\xi^{\alpha-\beta}\Phi_n(x^\beta) + o(r_n^{-1}) \ (|\xi| = O(\varepsilon_n), n \to \infty).$$

Утверждения теорем 1 и 2 сохраняют силу для более широкого класса пространств X, чем указано в начале заметки. Так, в теореме 1 достаточно лишь считать X - норму такой, что $\|f\chi_{2rB\setminus rB}\|_X = O(\|f\|_X)$; $\|\chi_{4rB\setminus 2rB}\|_X \asymp \|\chi_{2rB\setminus rB}\|_X$, $r > 0$. А в теореме 2 – такой, что $\|f\chi_{rB}\|_X = O(\|f\|_X)$; $\|\chi_{2rB}\|_X = O(\|\chi_{rB}\|_X)$; $\|T_\xi f\|_X = O(\|f\|_X)$. Таким условиям удовлетворяют нормы типа L^∞ - или *sup* - нормы. Кроме того, можно брать неинвариантные относительно сдвигов нормы – например, нормы с весом.

Библиографический список

1. Салехов Д.В. О точках Лебега-Орлича // Докл. АН. 1957. Т.116. №3.

2. Салехов Д.В. О сходимости сингулярных интегралов в точках Лебега-Орлича функций симметричных пространств // Докл. АН. 1967. Т.175, №5. С.1018-1021.

А.И. Ермаков

РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И АСИМПТОТИКА ИХ НАИЛУЧШИХ ХАУСДОРФОВЫХ УКЛОНЕНИЙ ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Пусть $H_\alpha E_n(f,J)$ /$H_\alpha E_n(f)$/ – наименьшее хаусдорфово уклонение заданной на J /2π-периодической/ функции f от алгебраических /тригонометрических/ полиномов степени /порядка/ не выше n; $J=[-1,1]$. $C_\alpha(f,J)=\underline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f,J)$, $C_\alpha(f)=\underline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f)$. Зависимость свойств 2π-периодических функций от величины $C_\alpha(f)$ неожиданно была обнаружена Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым при установлении обратных теорем теории хаусдорфовых приближений полиномами. Они показали /1978 г./, что если $C_\alpha(f)<\pi/\alpha$, то 2π-периодическая функция f непрерывна почти всюду /и при этом имеется всюду разрывная функция φ с $C_\alpha(\varphi)=\pi/\alpha$/; если $C_\alpha(f)<\pi/2\alpha$, то функция f непрерывна всюду. Л. Петрушевым и Бл. Сендовым построена разрывная в точках $x=2k\pi$ /$k\in\mathbb{Z}$/ 2π-периодическая функция ψ, для которой $C_\alpha(\psi)=\pi/2\alpha$ /1978 г./. А.П. Петухов указал /1989 г./ на функцию, которая имеет континуум разрывов.
В случае хаусдорфова приближения функций алгебраическими полиномами показано /1980 г./, что если $C_\alpha(f,J)=\pi\sqrt{1-(a')^2}/\alpha$, $0<a'\le 1$, то f однозначна и непрерывна почти всюду на отрезке $[-a',a']$; если $C_\alpha(f,J)=\pi\sqrt{1-a^2}/2\alpha$, $0<a\le 1$, то f непрерывна на интервале $(-a,a)$. С другой стороны, для любого положительного $a'<1$ найдётся заданная на J функция f_1, непрерывная почти всюду /и даже всюду/ на $[-a',a']$ и разрывная в остальных точках отрезка J, такая, что $C_\alpha(f_1,J)=\pi\sqrt{1-(a')^2}/\alpha$; для любого положительного $a<1$ на отрезке J существует функция f_2 с разрывами второго рода в точках $\pm a$, для которой $C_\alpha(f_2,J)=\pi\sqrt{1-a^2}/2\alpha$.
Оказывается, что при условии $C_\alpha(f,J)=\pi\sqrt{1-a^2}/2\alpha$ нельзя гарантировать непрерывность произвольной функции f ни в одной точке множества $J\setminus(-a,a)$. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть $0<a<z_i\le 1$ /$i\in\mathbb{N}$/, $P=\{\pm z_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ – счётное, всюду плотное подмножество множества $J\setminus(-a,a)$. Существует заданная на отрезке J функция g, разрывная в точках множества P и в точках $\pm a$, для которой $C_\alpha(g,J)=\pi\sqrt{1-a^2}/2\alpha$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

О.К. Иванова, Т.Ю. Рослова

ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $L(\ln^+ L)^2$

1. Рассмотрим N - мерное евклидово пространство R^N. Введем множество $Z^N \subset R^N$ всех векторов с целочисленными координатами и множество $Z^N_+ \subset Z^N$ всех векторов с неотрицательными целочисленными координатами.

Пусть 2π - периодическая по каждому аргументу функция $f \in L_p(T^N)$, $N \ge 1$, $p \ge 1$, где $T^N = \{x \in R^N, -\pi < x_j \le \pi, j=1,\dots,N\}$ разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \sum_{k \in Z^N} c_k e^{i(k,x)}$.

Для любого вектора $n = (n_1,\dots,n_N) \in Z^N_+$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму

$$S_n(x,f) = \sum_{|k_1| \le n_1} \dots \sum_{|k_N| \le n_N} c_k e^{i(k,x)},$$

частным случаем которой является квадратная частичная сумма - $S_{n_0}(x,f)$ когда $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n_0$.

2. В работах [1] и [2] И.Л. Блошанским было введено следующее понятие обобщенной локализации почти всюду.

Определение. Пусть $E \subset T^N$ - произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса L_p справедлива на множестве E обобщенная локализация почти всюду (ОЛ), если из условия $f \in L_p(T^N)$, $f(x)=0$ на E следует, что почти всюду на E существует предел $\lim_{n \to \infty} S_n(x,f) = 0$.

В работе [1] И.Л. Блошанским было установлено, что ОЛ справедлива при $N=2$, $p>1$ на открытых почти всюду множествах. В этой же работе была выяснена существенность условий $N=2$, $p>1$: были построены открытые множества

$E_1 \subset T^2$ и функция $f_1 \in L_1(T^2)$ такие, что $f_1(x) = 0$ на E_1, но $\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(x;f_1)| = +\infty$ всюду на T^2, а также открытое множество $E_2 \subset T^N$, N>2 и функция $f_2 \in C(T^N)$ такие, что $f_2(x) = 0$ на E_2, но $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x;f_2) = +\infty$ всюду внутри T^N.

3. Таким образом представляет интерес вопрос о справедливости ОЛ при N=2 в "промежуточном" между L_1 и L_p, p>1, классе. Эта задача решена нами в классе $L(\ln^+ L)^2$, где $\ln^+|f| = \ln(\max(1, |f|))$.

<u>Теорема.</u> Пусть $f \in L(\ln^+ L)^2(T^2)$, и пусть $\delta = (\delta_1;\delta_2)$, $0 < \delta_1, \delta_2 \le \pi$, тогда справедливо равенство

$$S_{n,m}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2} f(x+u, y+v)\frac{\sin nu}{u}\frac{\sin mv}{v}\,du\,dv + \alpha_{m,n}(\delta, x, y, f),$$

где $\alpha_{m,n}(\delta,x,y,f) \to 0$ при $n, m \to \infty$ п.в. на T^2; более того,

$$\left\|\sup_{n,m>0}|\alpha_{n,m}(\delta,x,y,f)|\right\|_{L_1(T^2)} \le C\iint_{T^2}|f(x,y)|(\ln^+|f(x,y)|)^2\,dx\,dy + C,$$

где $C = C(\delta)$ - константа.

Полученный результат интересно сравнить с фактом сходимости двойных рядов Фурье в классе $L(\ln^+ L)^2 \ln^+\ln^+ L$ (при суммировании по квадратам), доказанным П. Шелиным [3] в 1971г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00332).

Библиографический список

1. *Блошанский И.Л.* Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т.18, № 2. С.153-168.

2. *Блошанский И.Л.* Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье // ДАН СССР. 1978. Т.242, № 1. С.11-13.

3. *Sjolin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv Matem. 1971. V.9, № 1. P. 65-90.

М.Ю. Игнатьев

ПОДОБИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через A(D) пространство функций, аналитических в звездной относительно 0 области D, с топологией равномерной сходимости на компактах. Будем говорить, что D - область класса L, если вместе с каждой точкой z она содержит $\Pi(z)$ - m-угольник с вершинами в точках $z\omega^j$, $j=0,m-1$, $\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, $m\in N, m>3$. Рассмотрим в A(D) для областей класса L операторы вида:

$$Mf(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} M(z,\zeta)f(\zeta)d\zeta \qquad (1)$$

где $\Gamma\subset D$ - любой простой замкнутый контур, охватывающий $\Pi(z)$, функция $M(z,\zeta)$ голоморфна в области $\{(z,\zeta): z\in D, \zeta\notin\Pi(z)\}$, $M(z,\infty)=0$, удовлетворяющие условию: для некоторого $\alpha\in(-1,0]$ и любого компакта $K\subset D$ найдется $C=C(K)$, такое что $\forall z\in K, \zeta\notin\Pi(z)$

$$|M(z,\zeta)|\le C\sum_{j=0}^{m-1}\left|\frac{\zeta-\omega^j z}{z}\right|^{\alpha}. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что операторы (1), (2) образуют замкнутый относительно композиции класс вольтерровых операторов, содержащий все операторы вида

$$Wf(z)=\int_0^z W(z,t)f(t)dt, \qquad (3)$$

где W аналитична по совокупности переменных в $D\times D$.

Рассмотрим теперь вопрос о подобии операторов (1),(2).

Теорема 1. Пусть D- область класса L, $M=J^m+N$, N-оператор вида (1),(2), где

$$Jf(z)=\int_0^z f(t)dt, \text{ и } N(z,\zeta)\big|_{\zeta=0}=\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial z}\bigg|_{\zeta=0}=\ldots=\frac{\partial^m N(z,\zeta)}{\partial z^m}\bigg|_{\zeta=0}=0$$

и функция $N_1(z,\zeta)=\dfrac{\partial^{m+1}N(z,\zeta)}{\partial z^{m+1}}$ удовлетворяет оценке (2).

Тогда оператор M подобен в A(D) оператору J^m.

С помощью теоремы 1 нетрудно установить следующий факт, являющийся обобщением результатов [1, 2].

Теорема 2. Пусть D-область класса L, оператор W имеет вид (3), и

$$W(z,z)=\frac{\partial W(z,t)}{\partial z}\bigg|_{t=z}=\ldots=\frac{\partial^{m-2}W(z,t)}{\partial z^{m-2}}\bigg|_{t=z}=0, \frac{\partial^{m-1}W(z,t)}{\partial z^{m-1}}\bigg|_{t=z}=1.$$

Тогда оператор W подобен в A(D) оператору J^m.

Библиографический список

1. Леонтьев А. Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций // Сиб. мат. журнал. 1960. Т.1, №3. С.456 - 487.
2. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1987.

Б. Ж. [illegible]

ОБ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D – открытое множество в $R^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\}$ $(n \geq 1)$. Для векторов $m = (m_1, ..., m_n)$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с натуральными и соответственно с неотрицательными целыми координатами положим $|\alpha : m| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k/m_k$, $\gamma = 1/m_1 + ... + 1/m_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ и $\partial^\alpha = (\partial_1)^{\alpha_1} ... (\partial_n)^{\alpha_n}$, где ∂_k $(k = 1, ..., n)$ обозначает оператор дифференцирования по k-ой переменной.

$$L = \sum_{|\alpha : m| \leq 1} a_\alpha(x) \partial^\alpha \quad - \qquad *)$$

дифференциальный оператор с коэффициентами a_α ($\partial^\alpha a_\alpha$ непрерывны в D для всех α с $|\alpha : m| = 1$). Оператор L^*, сопряженный к L в D, определяется обычным образом

$$L^* f(x) = \sum_{|\alpha : m| \leq} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha [a_\alpha(x) f(x)] \quad \forall f \in C^\infty(D).$$

Пусть функции f и g локально суммируемы в D; f будем называть (L, D, g)-функцией, если

$$\int_D f(x) L[u(x)] dx = \int_D g(x) u(x) dx \ \forall u \in C_0^\infty(D).$$

При $r > 0$ и $x \in R^n$ назовем m-параллелепипедом размера r с центром x параллелепипед $\Pi = \Pi(x, r) = \Pi(x, r, m) = \times_{k=1}^{n} (x_k - r^{1/m_k}/2, x_k + r^{1/m_k}/2)$. Будем говорить, что функция f имеет в точке x дифференциал порядка m в метрике L_1, если существуют $\partial^\alpha f(x)$ для всех α с $|\alpha : m| \leq 1$ и

$$\int_{\Pi(x,r)} |f(y) - \sum_{|\alpha : m| \leq 1} (\alpha!)^{-1} \partial^\alpha f(x) (y - x)^\alpha| dy = o(r^{\gamma+1}).$$

При $\beta > 0$ внешней анизотропной хаусдорфовой (m, β)-мерой множества $E \subset R^n$ называется величина

$$mes_m^\beta(E) = \lim_{\epsilon \to 0} mes_m^\beta(\epsilon, E), \quad mes_m^\beta(\epsilon, E) = inf[\sum_k (r_k)^\beta],$$

где r_k – размеры m-параллелепипедов Π_k, образующих конечное или счетное покрытие множества E, а инфимум берется по всем таким покрытиям, что $r_k \leq \epsilon$.

Теорема. *Пусть L - оператор вида (*) в открытом множестве $D \subset R^n$ $(n \geq 1)$, $E \subset D$, $mes_m^{\gamma+\beta-1}(E) = 0$ $(\gamma + \beta - 1 > 0, \beta > 0)$; f локально суммируема в D и имеет в каждой точке из $D \setminus E$ дифференциал порядка m в метрике L_1, g непрерывна в D. Тогда если $|f(x) - f(y)| \leq A(f) \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^{\beta m_k}$ $\forall x \in D, \forall y \in E$, $Lf = g$ в $D \setminus E$ и $\int_E |g(x)| dx = 0$, то f является (L^*, D, g)-функцией.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

Г.Н. Казимиров

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ К-ГО ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

В данной работе доказаны прямая и обратная теоремы теории приближений для к-го обобщенного модуля гладкости, определяемого оператором обобщенного сдвига типа Якоби.

Будем говорить, что $f\in\mathbb{L}_p$, если для $1\leq p<\infty$ функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}<\infty$, а для $p=\infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_\infty=\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|$. Будем также говорить, что $f\in\mathbb{L}_{p,\alpha,\beta}$, $1\leq p\leq\infty$, если $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\in\mathbb{L}_p$, причем $\|f\|_{p,\alpha,\beta}=\|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$. Для $\nu>\mu>(-1/2)$ определим оператор обобщенного сдвига Якоби: $T_t(f,x,\nu,\mu)=[1/\gamma(\nu,\mu)]\times$

$$\times\int_0^1\int_{-1}^1 f\left[x\cos t+yz\sqrt{1-x^2}\sin t-(1-y^2)(1-x)\sin^2(t/2)\right](1-y^2)^{\nu-\mu-1}y^{2\mu+1}\times$$

$$\times(1-z^2)^{\mu-(1/2)}dzdy,\quad\text{где}\quad \gamma(\nu,\mu)=\int_0^1\int_{-1}^1(1-y^2)^{\nu-\mu-1}y^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-(1/2)}dzdy.$$

Введем обозначения ($k=2,3,\ldots$): $\Delta_t^1(f,x,\nu,\mu)=T_t(f,x,\nu,\mu)-f(x)$,

$$\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\nu,\mu)=\Delta^1_{t_k}(\Delta^{k-1}_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)$$

$$\tilde{\Omega}_k(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{|t_i|\leq\delta,\,i=1,\ldots,k}\|\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}$$

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta}=\inf_{P_n\in\mathbb{P}}\|P_n(x)-f(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где $\mathbb{P}$ – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$.

Теорема. Пусть даны числа p,ν,μ,k такие, что $1\leq p\leq\infty$, $\nu>\mu>(-1/2)$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть числа α и β выбраны так, что $\nu-\mu>\alpha-\beta\geq 0$ и $(-1/2)<\beta<\mu$ при $p=1$, $\nu-\mu>\alpha-\beta\geq 0$ и $(-1/2p)<\beta<\mu+(1/2)-(1/2p)$ при $1<p<\infty$, $\nu-\mu>\alpha-\beta\geq 0$ и $0\leq\beta<\mu+(1/2)$ при $p=\infty$. Тогда для $f\in\mathbb{L}_{p,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства:

$$C_1E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\leq\tilde{\Omega}_k(f,1/n,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq C_2/(n^{2k})\sum_{m=1}^{n}m^{2k-1}E_m(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n ($n=1,2,\ldots$).

Г.Н.Камышова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МОКАНУ ДЛЯ ТОЧЕК НАХОДЯЩИХСЯ НА ДИАМЕТРЕ

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$.

Одной из трудных задач конформного отображения является так называемая интерполяционная проблема Пика - Неванлинны, состоящая в возможности построения однолистной функции, принимающей заданные значения функции и ее производной в более чем одной точке единичного круга. В 1966г. румынским математиком П.Мокану [6] была поставлена экстремальная задача, сводящаяся к задаче об оценке функционала $I(f)$, $f \in S$, где

$$I(f) = \left|\frac{f'(z_1)}{f(z_2)}\right|,$$

что также лежит в рамках исследования проблемы Пика - Неванлинны и являющаяся необходимым условием ее разрешимости.

В 1975г. П.Мокану, М.Риц, Е.Злоткевич [7] оценили $I(f)$ для f - типично - вещественных, и вещественных z_1, z_2. Позднее эти результаты были обобщены Д.Ришеану для комплексных z_1, z_2 из специальных областей в E. Так как экстремальные функции в [7] однолистны, то тем самым ими решена одновременно задача о максимуме $I(f)$ при вещественных z_1, z_2 в классе $S_R \subset S$ однолистных функций с вещественными коэффициентами. Для более общей задачи об экстремуме $f'(r_1)$ при фиксированных значениях $f(r_1), f(r_2)$ были построены [2] точные мажоранты с помощью метода модулей семейств кривых.

Начиная со статьи И.А.Александрова и В.И.Попова [1] в теории однолистных функций успешно применяются методы оптимального управления. Глубокие результаты в этом направлении были получены Д.В.Прохоровым, который предложил рассматривать множества значений систем функционалов в качестве областей достижимости для управляемых динамических систем индуцированных уравнением Левнера - Куфарева. Полученные результаты наиболее полно отражены в монографии [5]. Однако задачи об оценках функционалов, сводящиеся к построению проекций множеств достижимости на различные гиперплоскости, приводят к краевым задачам для управляемых систем. Этих трудностей позволяет избежать применение наряду с методом оптимального управления метода вариаций Г.М.Голузина [3].

В докладе приводятся оценки $I(f)$ для вещественных $-1 < z_2 < 0 < z_1 < 1$ для всего класса S.

Для таких z_1, z_2, найдено решение экстремальной задачи, которое представляет собой решение задачи Коши для системы десяти обыкновенных дифференциальных уравнений. Экстремальная функция отображает единичный круг на плоскость с разрезами имеющими две концевые конечные точки. Решение данной экстремальной задачи для $0 < z_1, z_2 < 1$ было найдено ранее [4], и экстремальная функция отображала E на плоскость с разрезом, имеющим единственную концевую конечную точку. В частности, для $0 < z_1 < z_2 < 1$ нетрудно видеть, что это функция Кебе. В случае $0 < z_2 < z_1 < 1$ экстремальная функция имеет более сложную природу.

Библиографический список

1. Александров И.А., Попов Б.И. Оптимальные управления и однолистные функции // Ann. Univ. Mariae - Curie-Sklodowska. Ser. A. 1968-1970. Vol. 22-24. P. 13-20.
2. Васильев А.Ю., Камышова Г.Н. Модули полосообразных областей в решении изопериметрической задачи конформного отображения // Сиб. мат. журнал. 1996. Т.37, вып.1. С.60-69.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
4. Камышова Г.Н. Вариационный метод и оптимальное управление в решении задачи Мокану // Изв. вузов. Сер. Матем. (в печати).
5. Prokhorov D.V. Reachable Set Metods in Extremal Problems for Univalent Functions. Saratov, 1993.
6. Mocanu P.T. An extremal problems for univalent functions associated with the Darboux formula // Ann. Univ. Mariae-Curie-Sklodowska. Ser. A. 1968-1970. Vol. 22-24. P. 131-135.
7. Mocanu P.T., Read M., Złotkiewicz E. On the functional $[f'(z_1)/f(z_2)]$, for typically-real functions // Revue D'analyse numerique et de la teorie de L'approximation. 1974. Vol. 2. P. 209-214.

Л.В. Карташева, Т.Н. Радченко

Задача о скачке в пространстве обобщенных функций $\widetilde{\Phi}'_+$ на полуоси

Пространство основных функций $\widetilde{\Phi}_+$ состоит из функций $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{x\to 0,\infty} x^l \varphi^{(m)}(x) = 0$, $\forall l \in \mathbb{R}$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$.

Кроме того,

$$\int\limits_0^\infty x^k \ln^p x \varphi(x)\, dx = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \; p = 0, 1, 2, \dots)$$

Топология в $\widetilde{\Phi}_+$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi; \widetilde{\Phi}_+\|_k = \sup_{m\leqslant k} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (1+x)^k |\varphi^{(m)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Аналитическим представлением Коши обобщенной функции f назовем функционал:

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f_z, \frac{1}{t-z}\right) \qquad \left(f(t) \in \widetilde{\Phi}'_+\right).$$

Положим $s\varphi = F.P\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$.

Теорема. Если $f \in \widetilde{\Phi}'_+$, $\varphi \in \widetilde{\Phi}_+$, то существует $\lim\limits_{h\to+0} \widehat{f}(x \pm ih) = f^{\pm}(x)$ и выполняются соотношения: $f^+(x) + f^-(x) = sf$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Из всего изложенного следует решение следующей задачи о скачке.

Найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в плоскости z, за исключением полуоси $(0, \infty)$, предельные значения которой принадлежат пространству $\widetilde{\Phi}'_+$ и удовлетворяют краевому условию:

$$(\Phi^+(t) - \Phi^-(t), \varphi(t)) = (g(t), \varphi(t)); \qquad \varphi \in \widetilde{\Phi}_+, \; g \in \widetilde{\Phi}'_+$$

Решением этой задачи является функционал:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(g(x), \frac{1}{x-z}\right), \qquad z = t \pm ih, \; h > 0.$$

А.А. Кельзон

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ m-ГАРМОНИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Пусть f – 2π – периодическая функция, m-натуральное число. Положим

$$V_{m,H}(f;\,0,2\pi) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta^m f(I_n)|}{n},$$

где

$$\Delta^m f(I_n) \equiv \Delta^m f(a_n,b_n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(a_n + k(b_n-a_n)/m),$$

а верхняя грань берется по всевозможным последовательностям $\{I_n\}$ непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset [0,2\pi]$.

Если $V_{m,H}(f;0,2\pi)<\infty$, то говорят, что f имеет m-гармоническую ограниченную вариацию на $[0,2\pi]$ и, если, кроме того, f всюду непрерывна, то будем писать $f \in CHBV_m$.

Исходя из того, что указанные классы функций расширяются с ростом m, введем обозначение

$$CHBV_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} CHBV_m .$$

Пусть далее ξ –произвольное вещественное число. Через $L_{n,\xi}(f;x)$, $n=1,2,\ldots$, обозначим тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа для функции f по узлам $\xi+2j\pi/(2n+1)$, $j=0,\pm1,\ldots$

ТЕОРЕМА. При любом $\xi \in \mathbb{R}$ и $f \in CHBV_\infty$ равномерно на всей вещественной оси справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_{n,\xi}(f;x) = f(x). \qquad (1)$$

Отметим, что эта теорема в сочетании с ранее полученным результатом показывает, что класс $CHBV_\infty$ является классом равносходимости ряда Фурье и тригонометрического интерполяционного полинома Лагранжа по равноотстоящим узлам.

Сформулированная теорема обобщает результат В.В.Новикова, рассматривавшего класс $CHBV_1$.

Замечание. Если в условии теоремы отказаться от требования непрерывности функции f всюду, то соотношение (1) будет выполняться в тех точках x, где f непрерывна.

В.М. Климкин, М.Г. Свистула

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДАРБУ ДЛЯ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

В классической теореме Дарбу утверждается, что множество значений конечной неатомической меры φ, заданной на σ-алгебре Σ подмножеств T есть отрезок $[0, \varphi(T)]$.

В докладе приведены аналоги теоремы Дарбу для широкого класса неаддитивных функций множества без атомов и с конечным числом атомов.

Предполагаем, что Σ - некоторая σ - алгебра подмножеств T, функция множества $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(\emptyset) = 0$, φ - монотонна, $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + f(\varphi(B))$, если $A, B \in \Sigma, A \cap B = \emptyset$. Здесь $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(o) = 0$, f- непрерывна в нуле, $f(x) \geq x$, f возрастает.

Будем говорить, что φ обладает свойством Сакса на множестве $E \in \Sigma$, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует такое конечное разложение множества E, что $E = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$, $E_k \in \Sigma, E_k \cap E_m = \emptyset, \varphi(E_k) < \epsilon, k \in \overline{1,n}$.

Будем говорить, что φ обладает свойством Дарбу на множестве $E \in \Sigma$, если для любого числа $0 \leq \alpha \leq \varphi(E)$ существует такое множество $F \in E \cap \Sigma$, что $\varphi(F) = \alpha$.

Множество $E \in \Sigma$ называется атомом, если $\varphi(E) > 0$ и для любого $F \in E \cap \Sigma$ либо $\varphi(F) = 0$, либо $\varphi(F) = \varphi(E)$.

Теорема 1. Пусть $E \in \Sigma$. Если φ обладает свойством Сакса на E, то φ обладает свойством Дарбу на E.

Теорема 2. Пусть φ имеет конечное число попарно непересекающихся атомов $E_1, ... E_n$ и φ обладает свойством Сакса на множестве E, где $E = T \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Для того, чтобы φ обладала свойством Дарбу на T необходимо и достаточно выполнение условия

$$[0, \varphi(T)] = \bigcup_{I} [\varphi(\bigcup_{k \in I} E_k), \; \varphi(E \cup \cup_{k \in I} E_k)],$$

где объединение в правой части берется по всевозможным конечным подмножествам $I \subset \{1, ..., n\}$.

Отсюда следует

Теорема 3. Пусть φ имеет конечное число попарно непересекающихся атомов $\{E_i^k\}$, $i \in \overline{1,n}$, $k \in \overline{1,S_i}$, где $\varphi(E_i^1) = ... = \varphi(E_i^{s_i})$.

Пусть числа $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ таковы, что $f(\varphi(E_i^k)) = \alpha_i \varphi(T)$.

Обозначим $\beta_p = \sum_{i=p}^{n} s_i \alpha_i$, $\gamma_p = \varphi(T \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{k=1}^{s_i} E_i^k)$.

Если φ обладает свойством Сакса на множестве $T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{s_i} E_i^k$ и для любого $p \in \overline{1,n}$ $\beta_p \cdot \varphi(T) \leq \gamma_p$, то φ обладает свойством Дарбу на T.

Ю.Н. Киселев

ЗАДАЧА АКОР ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу аналитического конструирования регуляторов (АКОР)

(1) $L(u) = \int_0^{+\infty} [x^T Q(x)x + u^T R(x)u]\, dt \to min_{u\in K}$,

(2) $\dot{x} = f(x) + B(x)u,\ x \in R^n,\ u \in R^r,\ f(0) = 0, f(x) = A(x)x$

(3) $x|_{t=0} = x_0,\ x_0 \in R^n$.

Матрицы $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ гладко зависят от x, матрицы $Q(x)$, $R(x)$ являются положительно определенными. Класс K допустимых управлений, состоит из гладких функций $u(x) : R^n \to R^r$, $u(0) = 0$ (стационарная обратная связь), которые обеспечивают существование решения $x(t; x_0, u)$ задачи Коши (2),(3) при всех $t \geq 0$, стремление его к нулю при $t \to +\infty$ и сходимость несобственного интеграла (1) для любого начального состояния x_0.

Предположение 1. При любом $x \in R^n$ существует положительно определенное, гладко зависящее от x, решение $\Pi(x)$ матричного алгебраического уравнения Риккати (МАУР).

(5) $Q(x) + \Pi A(x) + A^T(x)\Pi - \Pi D(x)\Pi = 0,\ D(x) \equiv B^T(x)R^{-1}(x)B(x)$.

Привлекая матрицу $\Pi(x)$, введем функцию $V : R^n \to R^1$:

(6) $V(x) = x^T P(x)x,\ P(x) \equiv \int_0^1 2\alpha\Pi(\alpha x)\, d\alpha \in R^{n\times n}$.

Предположение 2. $lim_{\varrho\to+\infty} min_{\|x\|=\varrho} V(x) = +\infty$.

Теорема. В задаче АКОР (1)-(3) при выполнении Предположений 1,2 оптимальная обратная связь существует, единственна и определяется равенством

$$u_0(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)\Pi(x)x,$$

где $\Pi(x)$ – положительно определенное решение МАУР (5). Замкнутая оптимальная система

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0(x) \equiv \tilde{A}(x)x,$$
$$\tilde{A}(x) \equiv A(x) - D(x)\Pi(x),\ D(x) \equiv B(x)R^{-1}(x)B^T(x).$$

имеет единственное положение равновесия $x = 0$, оно асимптотически устойчиво, областью его притяжения служит все фазовое пространство. При начальном условии (3) оптимальное значение $L(u_0)$ функционала (1) определяется с помощью "квазиквадратичной" формы (6) равенством $L(u_0) = V(x_0)$.

Библиографический список

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.,1969.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы. М., 1977.
3. Banks S.P., Mhana K.J. IMA // Journal of Math. Control and Information, 9, 1992, P.179-196.
4. Rehnbock V., Teo K.L., Jennings L.S. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol.1, №2, April 1995, P.223-236.

С.В. Колесников

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ГРАНИЧНЫХ ОСОБЫХ МНОЖЕСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $D : |z| < 1$ – единичный круг; $\Gamma : |z| = 1$ – единичная окружность; $f(z)$ – функция, определенная в D. Точка $\zeta \in \Gamma$ называется точкой Фату функции f, если f имеет в ζ предел по любому углу с вершиной в ζ, образованному хордами круга D. Точка ζ называется точкой Плеснера функции f, если ее предельное множество в точке ζ по любому углу, образованному хордами круга D, является расширенной комплексной плоскостью. Обозначим через $F(f)$ множество всех точек Фату функции f, а через $I(f)$ множество всех ее точек Плеснера.

И.И. Плеснером ([2]) было показано, что для любой мероморфной в D функции f почти каждая точка окружности Γ является или точкой Фату, или точкой Плеснера. Таким образом, окружность Γ представляется в виде объединения трех непересекающихся множеств: $I(f)$, $F(f)$ и некоторого исключительного множества $E(f)$, имеющего линейную лебегову меру нуль.

Рядом авторов рассматривался вопрос о совместной характеристике всех трех множеств. В частности, А.Н.Канатниковым ([3]) было получено условие, достаточное для того, чтобы три множества E_1, E_2, и E_3 являлись, соответственно, множествами $F(f)$, $I(f)$ и $E(f)$ для некоторой мероморфной функции f.

Используя полученную автором (см. [4]) полную характеристику множеств $E(f)$ для функций f, аналитических и ограниченных в круге, методом, аналогичным используемому в [3], легко дать полную совместную характеристику множеств $I(f)$, $F(f)$ и $E(f)$ для голоморфных в D функций. Как следствие отсюда получается полная характеристика множеств всех точек, в которых голоморфные в круге D функции не имеют конечных угловых пределов:

ТЕОРЕМА 1. **Для того, чтобы три попарно непересекающихся множества E_1, E_2 и E_3, $\bigcup_{i=1}^{3} E_i = \Gamma$, были, соответственно, множе-**

ствами $I(f)$, $F(f)$ и $E(f)$ для некоторой голоморфной в D функции f, необходимо и достаточно, чтобы E_1 имело тип G_δ, а E_1 имело тип $G_{\delta\sigma}$ и линейную меру нуль.

СЛЕДСТВИЕ. Для того, чтобы множество $E \subset \Gamma$ являлось множеством всех точек, в которых нет конечных угловых пределов у некоторой голоморфной в D функции, необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде объединения двух множеств: множества типа G_δ и множества типа $G_{\delta\sigma}$, имеющего линейную меру нуль.

А.Берлингом ([1]) было доказано, что если функция $f(z)$ однолистна в круге D, то она имеет конечные угловые пределы во всех точках окружности Γ, за исключением множества точек логарифмической емкости нуль. Таким образом, для однолистной в D функции f множество $E(f)$ необходимо имеет тип $G_{\delta\sigma}$ и нулевую логарифмическую емкость.

В следующей теореме дается достаточное условия для того, чтобы множество было множеством $E(f)$ для некоторой однолистной функции f.

ТЕОРЕМА 2. Для любого множества $E \subset \Gamma$, имеющего нулевую логарифмическую емкость и тип G_δ на окружности Γ, существует такая ограниченная однолистная в круге D функция $f(z)$, что $E = E(f)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

Библиографический список

1. Beurling A. Ensembles exceptionnes// Acta Math. 1940. 72. 1-13.
2. Плеснер А.И. Über das Verhalten analytischer Functionen Rande ihres Definitionsbereichs// J. Reine Angew. Math. 1927. 219-227.
3. Канатников А.Н., Обращение теоремы Мейера для мероморфных функций//ДАН СССР, 1978. Т. 238, 5. 1043-1046.
4. Колесников С.В., О множествах несуществования радиальных пределов, ограниченных аналитических функций//Матем. сб. 1994. Т. 185, 4. 91-100.

В.В.Корнев

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ КВАТЕРНИОННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ПРОСТЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Для кватернионного дифференциального уравнения

$$\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + qy(t) = 0,$$

встречающегося в задачах управления [1],
где p, q – известные кватернионы,
$y(t) = y_0(t) + iy_1(t) + jy_2(t) + ky_3(t)$ – неизвестная функция, дается полное описание построения его решений и приводятся условия их устойчивости, которые проще форм критерия Рауса-Гурвица.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00156).

Библиография

1. П.К.Плотников, А.Н.Сергеев, Ю.Н.Челноков. Кинетическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв.АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С.9-18.

К.В.Кравченко

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ОТРЕЗКЕ

Рассматриваются дифференциальное уравнение и линейные формы вида

$$ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y \; ; \; 0 \le x \le T < \infty \, , \tag{1}$$

$$u_j(y) \equiv \int_0^T y'(t)\, d\sigma_j(t) \; ; \; j = 1,2 \, , \tag{2}$$

где $q(x) \in L(0,T)$ - комплекснозначная функция, а $\sigma_j(t)$ имеют ограниченную вариацию, причем $u_1 \not\equiv u_2$, а $\sigma_1(t)$ имеет ненулевой скачок в точке $t = 0$.

Пусть функция $\Phi(x,\lambda)$ является решением уравнения (1) при условиях $u_1(\Phi) = 1$, $\Phi(T,\lambda) = 0$. Обозначим $m(\lambda) = u_2(\Phi)$. Функцию $\Phi(x,\lambda)$ будем называть решением Вейля, а функцию $m(\lambda)$ - функцией Вейля для (1)–(2).

Пусть, далее, $\chi_k(x,\lambda)$ - фундаментальная система решений (1) при условиях $\chi_k^{(j-1)}(0,\lambda) = \delta_{k,j}$; $k,j = 1,2$, где $\delta_{k,j}$ - символ Кронекера. Обозначим

$$\omega(\lambda) = det \begin{bmatrix} u_2(\chi_k) \\ u_1(\chi_k) \end{bmatrix}_{k=1,2} .$$

Предположим, что краевые задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $u_1(y) = u_2(y) = 0$ и $u_1(y) = y(T) = 0$ соответственно не имеют общих собственных значений.

Постановка обратной задачи (ОЗ): по заданным функциям $m(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ требуется определить потенциал $q(x)$.

Справедлива следующая теорема единственности решения ОЗ.

Теорема. Задание функций $m(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ однозначно определяет потенциал $q(x)$.

Далее приводятся контрпримеры, показывающие существенность введения дополнительных, по сравнению с классическим случаем, данных и ограничений.

С подробным доказательством теоремы, построением контрпримеров, важным следствием теоремы единственности, а также литературой по данной проблеме можно ознакомиться в [1].

Библиография.

1. Кравченко К.В. Обратная задача для дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями. Деп. ВИНИТИ N2131 В-95.

В.Г.Кротов

ТЕОРЕМЫ О СЛЕДАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ-СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ШАРЕ

Пусть $H^p(B^n)$ - пространства Харди-Соболева в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ [1], $H^p_\alpha(B^n) = I_\alpha(H^p(B^n))$- пространства Харди-Соболева, где

$$I_\alpha f(z) = 1/(\Gamma(\alpha)) \int_0^1 (\ln 1/s)^{\alpha-1} f(sz)ds$$

дробный интеграл порядка $\alpha > 0$. Пусть еще

$$N_\varepsilon f(\zeta) = \sup\{|f(z)| : |1 - \langle\zeta, z\rangle| < (1 - |z|)^\varepsilon\}.$$

Наш основной результат - следующая теорема, из которой можно извлечь много информации о существовании предельных значений у функций из классов Харди-Соболева и о размерах исключительных множеств.

ТЕОРЕМА. Пусть $0<\varepsilon\leq 1$, $p>0$, $\alpha p<n$, ν - внешняя мера на ∂B^n. Тогда неравенство

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{N_\varepsilon f > \lambda\} d\lambda \leq c \|f: H^p_\alpha(B^n)\|^p$$

(с не зависит от f) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\nu(B(\zeta, t)) \leq ct^\beta \quad (\beta = (n-\alpha p)/\varepsilon),$$

где постоянная с не зависит от ζ и t, а $B(\zeta, t) = \{\eta : |1 - \langle\zeta, \eta\rangle| < t\}$ - неизотропные шары на ∂B^n.

Ряд частных случаев этого утверждения был известен ранее (см., например[2 - 4]).

Библиографический список

1. У.Рудин, Теория функций в единичном шаре. М.Мир,1984.
2. A.Nagel, W.Rudin, J.Shapiro, Ann.Math. 1982. V.116, N 2,P.331-360.
3. В.Г.Кротов, Труды МИАН. 1989. Т.190, С.117-138.
4. J.Sueiro. Math.Ann. 1990. V.286. N 4. P.661-678.

П.М. Кудишин

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)}, \quad 0 < x < T, \quad n = 2m.$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ - корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \sum_{j=0}^{n} \nu_j \prod_{k=0}^{j-1} (\mu - k), \quad \nu_n = 1, \quad \nu_{n-1} = 0.$$

Пусть для определенности $\mu_k - \mu_j \neq sn$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $Re\mu_1 < \ldots < Re\mu_n$. Обозначим $\theta_{nj} := 0$, $j = \overline{0, n-2}$, если $\nu_k = 0$, $k = \overline{0, n-2}$, иначе $\theta_{nj} := n - 1 - j - \max(1, Re(\mu_n - \mu_1))$, и предположим, что $q_j(x)x^{\theta_{nj}} \in L(0,T)$.

Рассмотрим несамосопряженную краевую задачу L следующего вида

$$ly = \lambda y, \quad 0 < x < T, \quad y(x) = O(x^{\mu_{m+1}}), \quad x \to 0,$$

$$V_j(y) \equiv y^{(r_j)}(T) + \sum_{k=0}^{r_j - 1} v_{jk} y^{(k)}(T) = 0, \ j = \overline{1, m}, \ 0 \le r_j \le n - 1, \ r_j \neq r_s \ (j \neq s).$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Для всякой функции $f(t)$ такой, что $f(t)t^{\max(0, n-1-Re\mu_m)} \in L(0,T)$

$$\lim_{k\to\infty} \| S_{2k}(f) - \sigma_{k+s}(f) \|_{C[\delta, T-\delta]} = 0,$$

где $0 < \delta \le T - \delta$, $\sigma_k(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{k} \left(\cos\frac{2\pi jx}{T} \int_0^T f(t) \cos\frac{2\pi jt}{T}\,dt + \sin\frac{2\pi jx}{T} \int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi jt}{T}\,dt \right)$, $S_k(f)$ - частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям задачи L (k - число членов), s - произвольная целая константа.

Подробное доказательство теоремы и литературу по данной проблеме см. в [1].

Библиография

1. Кудишин П.М. О дифференциальных операторах высших порядков с особенностью. Деп. в ВИНИТИ. N2057-В95. Саратов, 1995. 36с.

Т.А. Кузнецова

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим операторное уравнение вида

$$\ddot{w} = A(t)w + f(t) \quad , t \in [0,T], \tag{1}$$

где функция w удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{cases} w(0,\cdot) = w_0 \\ \dot{w}(0,\cdot) = w_1 \end{cases} . \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищется в пространстве

$$H_2^0(\Omega) = \{w \in L_2(\Omega) \ , \ w_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Gamma = 0\} \ ,$$

Γ - граница области Ω. $A(t)$ - линейный оператор, с областью определения D, не зависящей от t и плотной в $H_2^0(\Omega)$. Предполагается, что он непрерывно дифференцируемый на D. При этом для каждого $t \in [0,T]$: $A(t) = B^2(t)$, где $B(t)$ порождает ограниченную группу операторов (см. по этому поводу [1]). Как показано в [2] при этих предположениях задача (1), (2) имеет единственное решение.

Предположим так же, что при каждом t оператор $B(t)$ эквивалентен оператору B, имеющему полную систему собственных функций $\{f_n\}$ с собственными значениями $\{i\lambda_n\}$. Эквивалентность операторов понимается в смысле [1]. А именно, два оператора A_1 и A_2 называются эквивалентными, если существует такой ограниченный линейный взаимнооднозначный оператор Q, для которого выполняется соотношение

$$A_2 = QA_1Q^{-1}.$$

В данной работе изучаются вопросы сходимости решения задачи (1), (2) по собственным подпространствам оператора B.

Обозначим через $E_n(w)$ величину вида

$$E_n(w) = \sup_{0 \le t \le T} \inf_{\substack{T_k(t,\cdot) \\ k \le n}} \|W(t,\cdot) - T_k(t,\cdot)\|_{H_2^0(\Omega)} \ ,$$

где

$$T_k(t,\cdot) = \sum_{|i| \le k} \alpha_i(t) f_i \ .$$

При данных обозначениях доказана

Теорема 1. Пусть $w_0, w_1 \in D(B^{2r})$ и $f(t) \in D(B^{4r})$. Тогда решение $W(t,\cdot)$ задачи (1), (2) при любом $t \in [0,T]$ принадлежит области определения оператора B^{2r}. При этом имеют место следующие оценки

$$E_n(w) = O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right), \; n \in \mathcal{N}. \tag{3}$$

Относительно скорости сходимости решения задачи (1), (2) по иным полным системам в пространстве $H_2^0(\Omega)$ доказана

Теорема 2. Пусть Q – линейный ограниченный взаимнооднозначный оператор, отображающий пространство $H_2^0(\Omega)$ на $H_2^0(\Omega)$ и $\{\mu_n\}$ последовательность чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 1 .$$

Тогда утверждение теоремы (1) имеет место для системы функций $\{g_n = Qf_n\}$ и системы чисел $\{\mu_n\}$.

Библиографический список

1. Кузнецова Т.А. Отыскание полугруппы операторов, целой, экспоненциального типа на заданных подпространствах / Кандидатская диссертация. Саратов, 1980.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М. : Наука, 1967.

В.И. Курдюмов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Постановка задачи

$$\frac{du}{d\tau} = Lu, \quad u(0) = \varphi; \; \tau \in [0,T] \tag{1}$$

$$\varphi \in K, \quad J(\varphi) = \|u(\tau) - u_0\|^2 + \|\varphi\|^2 \to \min \tag{2}$$

Здесь $\varphi \in L_2[0,1]$ - управление, K - выпуклое замкнутое множество, $u(\tau)$ при каждом τ - элемент $L_2[0,1]$, $u_0 = u_0(x) \in L_2[0,1]$ задается, оператор L имеет вид

$$L: y^{(n)} + \psi(x)\int_0^1 y^{(n-1)} d_t u(t) + N_0 y^{(n-1)}; \quad U_j(y) + (y, \varphi_j) = 0, \; j = \overline{1,n}$$

$u(t)$ - функция ограниченой вариации; N_0 - интегральный оператор Гильберта-Шмидта; $U_j(y)$ - усиленно регулярные линейно независимые формы от $y^{(s)}(0), y^{(s)}(1), s = \overline{0,n-1}$; $\psi(x), \varphi_j(x) (j = \overline{1,n}) \in L_2[0,1]$ задаются; (y, φ_j) - скалярное произведение в $L_2[0,1]$; $n = 4q+2$, q - целое неотрицательное.

В работе устанавливается базисность по Риссу корневых векторов оператора L, существование и единственность решения задач (1) и (1)-(2), утверждение для задачи (1)-(2) типа принципа максимума и выводятся для некоторых частных случаев уравнения для оптимального элемента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00156).

С.В.Левизов

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МАЛЫМИ ЛАКУНАМИ

Пусть $\{n_k\}$ – некоторая бесконечная последовательность номеров ($n_k \neq \neq n_j$ при $k \neq j$). Известно, что многие важные свойства независимых случайных величин переносятся на широкие классы подпоследовательностей различных ортонормированных систем. Мы будем рассматривать статистические свойства подсистем, подчиненных условию так называемой слабой лакунарности, т.е. $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1$ при $k \to \infty$. В этом аспекте для тригонометрической системы справедлив следующий результат.

Теорема (**закон повторного логарифма**). Пусть $\{\omega(K)\}$ – неотрицательная, монотонно убывающая последовательность, удовлетворяющая для некоторого α, $0 < \alpha < 1$, условию: $K^{\alpha}\omega(K) \uparrow \infty$, $\varphi(x)$ - неотрицательная, монотонно возрастающая функция, определенная на $[1, +\infty]$ и такая, что

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\varphi(x)} < \infty$$

Тогда, если $\{n_k\}$ - последовательность номеров, такая, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 1 + \omega(K) \qquad \text{при } k \geq k_0 \ ,$$

и $\{a_k\}$ – последовательность коэффициентов, для которой

$$A_N^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \to \infty \ , \ a_N = O\Big(\frac{A_N\omega(N)}{\sqrt{\varphi(A_N)}}\Big) \qquad \text{при } N \to \infty \ .$$

то для подсистемы $\{\cos 2\pi n_k t$, $0 \leq t \leq 1$, выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} (2A_N^2 \log\log A_N)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{N} a_k \cos 2\pi n_k t \leq 1 \qquad \text{почти всюду.}$$

Данная теорема является усилением результата, полученного в работе [1], где рассмотрен случай $\omega(K) = K^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ и $\varphi(x) = (\log A_N)^{1+\epsilon}$.

Отметим также, что для системы Уолша-Пэли аналогичный результат был получен в [2].

Библиографический список

1. Takahashi S. On the law of iterated logarithm for lacunary trigonometric series // Tohoku Math. Journ. 1972, v.24, 319-329.

2. Левизов С.В. Закон повторного логарифма для лакунарных рядов по системе Уолша // Сиб.мат.журн. 1992, Т.33, №1, С.69-77.

Д.С. Лукомский

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Обозначим через

$$L = L(p_{11},\ p_{00}, p_{12},\ p_{01},\ p_{02}, \beta_0, \beta_1)$$

совокупность дифференциального уравнения

$$y'' + [\rho p_{11} + p_{12}(x)]y' + [p_{00}\rho^2 + p_{01}(x)\rho + p_{02}(x)]y = 0 \qquad (1)$$

и линейных форм следующего вида

$$U_1(y) = y'(0) + (\beta_1\rho + \beta_0)y(0) \qquad (2)$$

$$U_2(y) = y(0), \qquad (3)$$

где $x \in (0,\infty)$, $p_{11}, p_{00}, \beta_1, \beta_0$ – const, $p_{12}(x) \in C^1(0,\infty)$, $p_{01}(x), p_{02}(x), p_{12}(x) \in L(0,\infty)$.

Пусть $\Phi(x,\rho)$ решение уравнения (1) *при условиях* $U_1(\Phi) = 1$, $\Phi(x,\rho) = O(e^{\rho R_1 x})$ $x \to \infty$, *где R_1 – корень характеристического уравнения, такой что* $\mathrm{Re}(\rho R_1) \le \mathrm{Re}(\rho R_2)$. *Функция* $\mathfrak{M}(\rho) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(0,\rho)$ *называется функцией Вейля задачи* L_0.

Наряду с L будем рассматривать дифференциальное уравнение и линейные формы $\tilde{L} = L(\tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{00}, \tilde{p}_{12}, \tilde{p}_{01}, \tilde{p}_{02}, \tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)$.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Краевые задачи L и $\tilde{L}$ совпадают*, *если* $\mathfrak{M}(\rho) = \tilde{\mathfrak{M}}(\rho)$, $p_{12}(x) = \tilde{p}_{12}(x)$ *и* $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$.

Теорема 2. *Краевые задачи L и $\tilde{L}$ совпадают*, *если* $\mathfrak{M}(\rho) = \tilde{\mathfrak{M}}(\rho)$, $p_{01}(x) = \tilde{p}_{01}(x)$, $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$ *при* $p_{11} \ne 0$.

Теорема 3. *Краевые задачи L и $\tilde{L}$ совпадают*, *если* $\mathfrak{M}(\rho) = \tilde{\mathfrak{M}}(\rho)$, $p_{02}(x) = \tilde{p}_{02}(x)$, $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$.

С.Ф. Луконокин

Сходимость кратных рядов Уолша в L

Пусть $w_n(t)$ функции Уолша в нумерации Пэли, определенные на двоичной группе D, и L_n константы Лебега по системе Уолша. При $m \in N, m > 1$ для

$$\mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, ..., t^{(m)}) \in D^m \quad \text{и} \quad \mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, ..., n^{(m)}) \in Z_0^m$$

обозначим

$$w_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = w_{n^{(1)}}(t^{(1)}) w_{n^{(2)}}(t^{(2)}) ... w_{n^{(m)}}(t^{(m)}).$$

Определение 1 *Пусть* $n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k 2^k$ $(\epsilon_k = 0$ *или* $1)$ *двоичное разложение числа* n. *Число* $v(n) = \epsilon_0 + \sum_{k=0}^{\infty} | \epsilon_k - \epsilon_{k+1} |$ *будем называть вариацией числа* n.

Вариация связана с константами Лебега L_n неравенством $\frac{1}{4} v(n) \le L_n \le v(n)$.

Если $\mathbf{n} = (n^{(1)}, ..., n^{(m)})$, то вместо $\min(n^{(1)}, ..., n^{(m)}) \to \infty$ будем для краткости писать $\mathbf{n} \to \infty$. Сходимость частичных сумм $S_{\mathbf{n}}(f)$ в пестранстве $\mathbf{L}(D^m)$ будем рассматривать при $\mathbf{n} \to \infty$.

Теорема 1 *Пусть* $\Lambda_m = \{\mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, ..., n^{(m)})\} \subset N^m$ - *произвольное семейство векторов,* $m \in N, m > 1, 1 \le r \le m$.

1)Если

$$\limsup_{\mathbf{n} \to \infty} \left(\min_{(i_1, i_2, ... i_r)} \frac{v(n^{(1)}) v(n^{(2)}) ... v(n^{(m)})}{v(n^{(i_1)}) v(n^{(i_2)}) ... v(n^{(i_r)})} \right) < \infty,$$

где $\min$ *берется по всем подмножествам* $\{i_1, i_2, ... i_r\} \subset \{1, 2, ..., m\}$, *то для любой* $f \in L\log^r(L)(D^m)$ *частичные суммы* $S_{\mathbf{n}}(f)$ *сходятся в* $\mathbf{L}$ *при* $\mathbf{n} \to \infty$.

2)Если

$$\limsup_{\mathbf{n} \to \infty} \left(\min_{(i_1, i_2, ... i_r)} \frac{v(n^{(1)}) v(n^{(2)}) ... v(n^{(m)})}{v(n^{(i_1)}) v(n^{(i_2)}) ... v(n^{(i_r)})} \right) = \infty,$$

то для любой $\varphi(x) = o(\log^{r+1}(x))$ $(x \to +\infty)$ *существует* $f \in L\varphi(L)(D^m)$, *для которой частичные суммы* $S_{\mathbf{n}}(f)$ *не сходятся по мере при* $\mathbf{n} \to \infty$.

Приведенная теорема полностью решает вопрос о сходимости в $\mathbf{L}$ m-кратного ряда Фурье-Уолша-Пэли по семейству прямоугольников. В качестве следствия можно получить теоремы о сходимости как по Принсгейму, так и по кубам.

Е.Р. Матвеев

ВСПЛЕСКИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Методом ортогонализации Грамма-Шмидта из линейных В-сплайнов построена кусочно-линейная функция $\Psi(x)$ со следующими свойствами: ее удвоенные сжатия и сдвиги $\{\Psi(2^n x-k)\}$, $k,n \in Z$, попарно ортогональны. Вычислены коэффициенты разложения $\Psi(x)$ по базису из линейных В-сплайнов. В качестве приложения показана связь построенной функции с кубическими интерполяционными сплайнами.

Основной является следующая

Лемма. Целочисленные сдвиги $\{\Phi(x-k)\}$, $k\in Z$, функции

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(2-\sqrt{3}\,)^k\,B(x+k)$$

где $B(x+k)$-линейные В-сплайны, попарно ортогональны.

Для доказательства мы определим функции $\Phi_0,\dots\Phi_n$ из условия

$$\Phi_j(x)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}B\,(x+k),\ \text{где } 0\le j\le n,\ \text{а } a_{j,j}=1,$$

и вычислим коэффициенты $\{a_{j,k}\}$, $0\le j\le n$, $0\le k\le j-1$ методом ортогонализации Грамма-Шмидта. Тогда

$$\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x+n);$$

Искомую функцию $\Psi(x)$ будем искать в виде

$$\Psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\gamma_{1-k}\,\Phi(2x-k);$$

здесь $\{\gamma_k\}$, $k\in Z$, коэффициенты равенства удвоения

$$\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\Phi(2x-k)$$

Известно (см.например [1]), что функции $\{\Psi(2^n x-k)\}$, $k,n\in Z$, попарно ортогональны. Положим $\lambda=(2-\sqrt{3})$ и

$$b_\lambda=\left(\dots 0,0,\frac{1}{2},1,\frac{1+\lambda}{2},-\lambda,-\lambda\left\{\frac{1+\lambda}{2}\right\},\lambda^2,\lambda^2\left\{\frac{1+\lambda}{2}\right\},\dots\right)$$

Определяя коэффициенты $\{\gamma_k\}$, $k\in Z$, из системы

$$\begin{bmatrix} & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots \\ 0 & & 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots \\ & 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \ldots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^5 & \ldots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \\ \gamma_{-1} \\ \cdots \end{bmatrix} = b_\lambda,$$

показываем, что справедлива

Теорема. Функции $\{ \Psi(2^n x-k) \}$, $k,n \in Z$, где

$$\Psi(x)=\frac{\Psi(2x)-\Psi(2x-1)}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(2-\sqrt{3})^{i-1}\,[\Phi(2x-i)-\Phi(2x-i-1)]$$

попарно ортогональны.

Открытым остается вопрос о том, является ли семейство $\{ \Psi(2^n x-k) \}$, $k,n \in Z$, всплесками в $L_2(R)$.

Далее, обозначим через $L_3(x)$ кубический фундаментальный сплайн, определяемый равенством $L_3(j) = \delta_{0,j}$, $j \in Z$. Система уравнений $A\,c = e$, где A бесконечная трехдиагональная матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & & & \ldots & & 0 & a & 1 & a \end{bmatrix}$$

$e = (1,0,0,0,\ldots.)$, а

$$a = (B(*)\ ,B(*+1)) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,B(x+1)dx$$

служила при построении функции $\Phi(x)$ для вычисления коэффициентов $\{ c_{j,k} \}$. Так как $B*B=B_3$, то система уравнений для вычисления коэффициентов разложения интерполяционного сплайна по базису из кубических B-сплайнов $\{B_3(x+k)\}$, $k\in Z$, совпадает с системой для определения коэффициентов $\{ c_{j,k} \}$. Тогда

$$L_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-2+\sqrt{3})^{|k-2|}B_3(x+k)$$

Библиография

1. G.Strang. Waveletes and Dilation Equations:a Brief Introduction//SIAM Reviev.1989.V.31,N 4.P.614-627.

А.М. Минкин

О ВЕСАХ, СВЯЗАННЫХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Пусть E конечномерное пространство и $[E \to E]$ обозначает множество линейных операторов в E, $\Theta(z)$ — целая операторно-значная функция ($\Theta(z) \in [E \to E]$.) конечного экспоненциального типа , внутренняя в верхней полуплоскости $C_+ = \{Imz > 0\}$ и нормированная в нуле: $\Theta(0) = I_E$, где I_E единичный оператор в E. Зафиксируем некоторый вектор $\xi \in E$ и положим $y(z,\lambda) = \frac{\Theta(z)-\Theta(\lambda)}{z-\lambda}\xi$. Для любого фиксированного $\lambda \in C_+$ $y(\cdot,\lambda)$ принадлежит $H_+^2(E)$ — пространству E-значных вектор-функций в C_+. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ счетное множество в полуплоскости $Imz \geq h > 0$ с единственной предельной точкой на ∞. Рассмотрим вес

$$w^2(t) \stackrel{df}{=} \|y(\cdot,t)\|^2, t \in \mathcal{R}.$$

Теорема 1. *Если система $Y = \{y(\cdot,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ образует безусловный базис в модельном подпространстве $H(\Theta) = H_+^2(E) \ominus \Theta H_+^2(E)$ (кратко: $Y \in (B)$), тогда*

$$w^2(t) \in (A_2), \text{ т.е. удовлетворяет условию Макенхаупта } (A_2) \qquad (1)$$

2. В недавней работе Г.М.Губреева [1] предполагалось, что условие (1) *априори* выполняется. Теорема 1 дает возможность улучшить его основной результат.

Пусть A^* максимальный неограниченный диссипативный оператор с характеристической функцией $\Theta(z)$, A — его сопряженный. Положим $V = A^{-1}$. Тогда $Vf(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ ограниченный диссипативный вольтерровский оператор в $H(\Theta)$ с конечномерной мнимой частью. Обозначим ее след через a, положим $y = y(z,0)$; и пусть J_a будет оператором интегрирования в $L^2(0,a)$, $J_a g(x) = i\int_0^x g(s)ds$. Вес w^2 порождает функцию $y_w \in L^2(0,a)$.

Теорема 2. *$Y \in (B)$ тогда и только тогда, когда*
i) существует изоморфизм S : $L^2(0,a)$ на $H(\Theta)$, такой что $VS = SJ_a$, $Sy_w = y$;
ii) система $\{(I-\lambda_k J_a)^{-1}y_w\}_{k=1}^{\infty}$ образует безусловный базис в $L^2(0,a)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00014).

Библиография

1. Губреев Г.М. Об одном классе безусловных базисов гильбертовых пространств // Матем.сб. 1993.Т.183,№ 9.С.105-146.

С.Р.Миронова

О РЕШЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ

Пусть контур Γ состоит из конечного числа попарно непересекающихся замкнутых, вообще говоря, неспрямляемых кривых, делящих комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области: внутреннюю область $\mathcal{D}^+$ / ($m+1$) -связную / и внешнюю $\mathcal{D}^- = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}}^+$.

Определим сингулярный интегральный оператор S_Γ формулой

$$S_\Gamma \varphi_j(t) = \Phi_j^+(t) + \Phi_j^-(t), \quad t \in \Gamma, \quad j = \overline{1,n},$$

где $\Phi_j^\pm(t)$, $j = \overline{1,n}$, - кусочно-голоморфные функции в $\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j^+(t) - \Phi_j^-(t) = \varphi_j(t), \quad t \in \Gamma, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\Phi_j^-(\infty) = 0.$$

Рассматривается характеристическая система сингулярных интегральных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\varphi_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\,S_\Gamma \varphi_j(t) = f_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{I}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, - заданные на Γ функции, принадлежащие классу $H_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \le 1$; искомые функции $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, ищутся в классе $H_\lambda(\Gamma)$, $0 < \lambda \le 1$.

В работе получены условия, при которых система (I) имеет классическую картину разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00674).

Н.П. Мясникова

Об одном решении задачи сглаживания

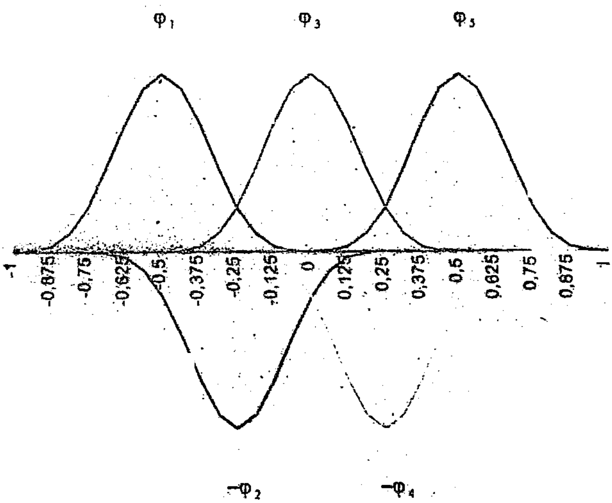
Рассмотрим задачу сглаживания (осреднения) экспериментальных данных $f_1, f_2, \dots, f_N$, измеренных в равномерных узлах $x_1, x_2, \dots, x_N$. Для ее решения воспользуемся оператором осреднения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y-x) f(y) dy = f(x) \qquad (1)$$

с непрерывным ядром

$$K(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) \qquad (2)$$

из [1], сохраняющим $1, \sin\eta_k t, \cos\eta_k t \ (k = 1, \dots, n)$. Функции $\varphi_i(t)$ в (2) представляют собой B-сплайны третьего порядка с равномерными узлами. При $n = 2$ получают непрерывное ядро $K(t)$, отличное от нуля внутри отрезка $[-1;1]$. На рис., например, изображены составляющие ядра (2) при $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_4 = -1$.



Пусть требуется осреднить значение функции f_k в узле x_k. Не нарушая общности, будем считать, что узел x_k соответствует середине отрезка $[-1;1]$. Вычисляя интеграл по формуле прямоугольников с шагом $h = 1/16$, получим осредненное (сглаженное) значение

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{16}\sum_{l=1}^{5}\alpha_l\sum_{j=1}^{15}B_j f_i \quad (3),$$

где $i = k - 16 + 4(l-1) + j$. Коэффициенты α_l $(l = 1,\ldots,2n+1)$ при заданных значениях η_1 и η_2 являются решением соответствующей системы из [1]. Значения B_j приведены в [2], где представлены результаты применения полученной формулы (3) для осреднения эмпирических данных нормального распределения. В работе [3] проведено осреднение с шагом $h = 1/8$ при переходе в равенство (1) к численному интегрированию.

Библиографический список

1. Молоденкова И. Д. Построение ядра осредняющего оператора в виде сплайна // Математика и ее приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. 28-30 с.

2. Мясникова Н. П. Расчет теоретической кривой нормального распределения с применением оператора осреднения/ Саратовский экономический институт. Саратов, 1993. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 27.05.93, № 1398-В93.

3. Мясникова Н. П., Молоденкова И. Д. Применение оператора осреднения к решению задачи краткосрочного прогнозирования // Вычислительные методы и программирование, вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. 42-47 с.

М.А. Назаренко

О КОНСТРУКТИВНОМ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ БРАЕССА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_2(\mathcal{D})$

Основным результатом этого доклада, относящегося к исследованиям характеристик множеств рациональных функций наилучшего приближения, базирующимся на классическом результате Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [1], является следующая

Теорема. *Для любого целого неотрицательного k существует $f \in \mathcal{H}_2(\mathcal{D})$, имеющая четыре различные рациональные функции наилучшего приближения степени* $(k, 1)$.

Это утверждение является решением одной проблемы теории рациональных $\mathcal{L}_2$–аппроксимаций, поставленной в 1976 году Браессом (D. Braess) [2, Problém 3.2], которая звучит следующим образом: возможно ли построить такую функцию, что бы она имела по крайней мере 3 различные рациональные функции наилучшего приближения какой–нибудь степени (но не локально наилучшего)?

Решение проблемы Браесса было предложено Дизнером (I. Diener) в работе [3, Theorem 3.3] в случае пространства $\mathcal{L}_2[-1, 1]$, однако им не были предъявлены конструкции функции и ее рациональных аппроксимантов. Браессом [4] было доказано существование $f \in \mathcal{L}_p[-1, 1]$, $1 < p < \infty$, имеющих четыре различных рациональных аппроксиманта степени $(0, 2)$. В пространстве Харди $\mathcal{H}_2(\mathcal{D})$ оказалось возможным указать явные конструкции как самой функции, так и ее различных рациональных аппроксимантов.

Библиографический список

1. Ефимов Н. В. и Стечкин С. Б., Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140(3). С. 522–524.

2. Braess D., On rational $\mathcal{L}_2$-approximation // J. Approxim. Theory. 1976. V. 18(2). P. 136–151.

3. Diener I., On nonuniqueness in nonlinear $\mathcal{L}_p$-approximation // J. Approxim. Theory. 1987. V. 51(1). P. 54–67.

4. Braess D., On nonuniqueness in rational $\mathcal{L}_p$-approximation // J. Approxim. Theory. 1987. V. 51(1). P. 68–70.

А. Ю. Напеденина

ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПОСРЕДСТВОМ ОБОБЩЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

Будем рассматривать алгебраические полиномы $P_n(x)$ степени не выше n на отрезке $[-1;1]$ и тригонометрические полиномы $T_n(t)$ степени не выше n на отрезке $[-\pi;\pi]$. Условимся под нормами понимать соответственно нормы в пространствах $C[-1;1]$ и $C[-\pi;\pi]$ в зависимости от того, рассматривается алгебраический или тригонометрический случай. Для производных полиномов хорошо известны такие классические оценки, как неравенство Маркова: $|P_n'(x)| \leqslant n^2 \cdot ||P_n(x)||$ (1)
и неравенство Бернштейна: $|T_n'(t)| \leqslant n \cdot ||T_n(t)||$ (2)

Если объединить эти результаты, то для алгебраических полиномов получится следующее соотношение:

$$|P_n'(x)| \leqslant n \cdot \min(\, 1/\sqrt{1-x^2}\ ;\ n\,) \cdot ||P_n(x)|| \qquad (3)$$

Неравенства (1), (2), (3) обобщались в различных направлениях. Мы остановимся лишь на одной оценке, вытекающей из работ [1], [2]:

$$|T_n'(t)| \leqslant (n/2) \cdot ||\, T_n(t + \pi/n) - T_n(t)\,|| \qquad (4)$$

Отметим, что в формуле (4) производная полинома мажорируется не нормой самого полинома, а нормой соответствующей разности.

Цель данной работы, которая будет достигнута в приводимой ниже теореме и замечании к ней, состоит в том, чтобы получить оценку производной алгебраического полинома через обобщенные ультрасферические разности.

Определим
$$\tau_h^- P_n(x) = \frac{2}{\mu(\lambda)} \int_{-1}^{0} P_n\left(xh + u\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-h^2}\right)(1-u^2)^{\lambda-1}\,du,$$
$$\tau_h^+ P_n(x) = \frac{2}{\mu(\lambda)} \int_{0}^{1} P_n\left(xh + u\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-h^2}\right)(1-u^2)^{\lambda-1}\,du,$$
где
$$\mu(\lambda) = \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\lambda-1}\,du, \qquad 0 < \lambda < 1/2$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть λ – фиксированное число, $0 < \lambda < 1/2$; x_n – наибольший нуль n-ого ультрасферического многочлена порядка λ. Тогда существуют константы C_1 и C_2, зависящие только от λ такие, что для любого алгебраического полинома $P_n(x)$ верна оценка:

$$C_1 \cdot \left\{ ||\tau_{x_n}^- P_n - P_n|| + ||\tau_{x_n}^+ P_n - P_n|| \right\} \leqslant \left|\left| \frac{P_n'(x)}{n \min\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, n\right)} \right|\right| \leqslant C_2 \left\{ ||\tau_{x_n}^- P_n - P_n|| + ||\tau_{x_n}^+ P_n - P_n|| \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Верхнюю оценку в теореме по примеру формулы (3) можно записать в поточечном виде.

$$|P_n'(x)| \leqslant C \cdot n \cdot \min\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, n\right) \cdot \left\{ ||\tau_{x_n}^- P_n(x) - P_n(x)|| + ||\tau_{x_n}^+ P_n(x) - P_n(x)|| \right\}.$$

Библиографический список

1. Никольский С.М. Обобщение одного неравенства С.Н.Бернштейна // ДАН СССР, 1948, Т.60, №9, С.1507-1510.
2. Стечкин С.Б. Обобщение некоторых неравенств С.Н.Бернштейна // ДАН СССР, 1948, Т.60, №9, С.1511-1514.

С.Я. Новиков

Об особенностях оператора вложения квазибанаховых симметричных функциональных пространств на [0,1]

Основной объект, который мы рассматриваем в данном сообщении, – это оператор тождественного вложения $I(X_1, X_2)$, действующий между симметричными функциональными пространствами X_1 и X_2 в ситуации, когда $X_1 \subset X_2$. Последние годы наметилась тенденция включать в класс симметричных пространств и квазибанаховы пространства. Обозначим через L_0 пространство всех вещественных измеримых функций на $[0,1]$; κ_A-характеристическую функцию измеримого по Лебегу множества A; $measA$ или $|A|$ - меру Лебега множества A; f^*-убывающую перестановку функции $|f|$. *Квазибанахово симметричное пространство* (сокращенно *КБСП*) - это полное квазинормированное векторное пространство $(X, ||\cdot||)$, такое, что $X \subset L_0$, $||\kappa_A|| = 1$, если $measA =$ и справедлива импликация: $g \in X, f \in L_0, f^* \leq g^* \Longrightarrow f \in X$ и $||f|| \leq ||g||$. Квазинорма $||\cdot||$ является функционалом, который удовлетворяет всем аксиомам нормы, кроме неравенства треугольника, которое заменяется более слабым неравенством

$$||x + y|| \leq K(||x|| + ||y||); x, y \in X$$

с некоторым $K > 1$.

Если между двумя СП X_1 и X_2 имеет место включение $X_1 \subset X_2$, то возникает оператор $I : f \in X_1 \to f \in X_2$, который мы ниже обозначаем $I(X_1, X_2)$.

Пусть X и Y - банаховы или квазибанаховы пространства. Оператор $T : X \to Y$ называется *строго сингулярным*, если сужение T на произвольное бесконечномерное подпространство пространства X не является изоморфизмом. В предыдущих работах автора были доказаны:

Теорема 1. *Если X - банахово СП и $X \neq L^\infty$, то $I(L^\infty, X)$ строго сингулярен. Это означает, что в X не существует бесконечномерного подпространства, состоящего только из ограниченных функций.*

Теорема 2. *Если X - банахово СП и $X \neq L^1$, то $I(X, L^1)$ является дизъюнктно строго сингулярным. Это означает, что не существует* *последовательности ненулевых дизъюнктных векторов (x_n) в X такой, что подпространство $span(x_n)$ замкнуто в L^1.*

Здесь мы покажем, как можно распространить эти теоремы на квазибанаховы пространства. Каждое КБСП X можно считать γ-банаховым для некоторого $\gamma \in (0,1)$, т.е. в дополнение к аксиомам квазинормы можно добавить неравенство

$$\|f+g\|^\gamma \le \|f\|^\gamma + \|g\|^\gamma, \ f, g \in X.$$

Для γ-банахова пространства X справедливы непрерывные включения:

$$L^\infty \subset X \subset L^{\gamma,\infty},$$

где

$$L^{\gamma,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{\gamma,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/\gamma} f^*(t) < \infty \right\}.$$

Если дополнительно предположить, что γ-нормированное пространство является γ-выпуклым, т.е. для произвольных $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset X$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

то включения уточняются следующим образом:

$$L^\infty \subset X \subset L^\gamma,$$

т.е. наибольшим γ-выпуклым γ-БСП оказывается пространство L^γ, более узкое, чем $L^{\gamma,\infty}$.

Теорема 3. *Пусть X — γ-банахово и γ-выпуклое СП на $[0,1]$. Тогда $I(L^\infty, X)$ строго сингулярен и $I(X, L^\gamma)$ дизъюнктно строго сингулярен.*

Е.В. Новикова

О ВЕТВЛЕНИИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в банаховом пространстве U k раз ($k \leqslant 3$) непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор $N_\delta : U \to U$, зависящий от вещественного параметра δ, считая отображение $\delta \to N_\delta x$ непрерывно дифференцируемым по δ для любого $x \in U$.

Пусть K — гладкое класса C_1, инвариантное многообразие оператора N_δ (для любого $\delta \in R_1$). При этом касательное пространство T_x многообразия K переходит под действием производной Фреше $N'_\delta(x)$ оператора N_δ в точке x в касательное пространство $TN_\delta x$ многообразия K в точке $N_\delta x$.

Предположим, что существует трансверсальное слоение $R_\delta x$ ($x \in K$) к касательному слоению T_x ($x \in K$), ($Tx \oplus R_\delta x = U$), инвариантное относительно действия производной Фреше $N'_\delta(x)$ оператора $N_\delta : U \to U$, так что $N'_\delta(x) R_\delta x \subseteq R_{N_\delta x}$).

Известно, что если

$$\left\| N'_\delta(x) \Big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta x}} \right\| < 1 \tag{1}$$

(т. е. в направлении инвариантного многообразия K оператора N_δ действует сжимающим образом), и

$$\left\| N'_\delta(x) \Big|_{T_x \to R_{N_\delta x}} \right\| < \left\| N'_\delta(x) \Big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta x}} \right\| < 1, \tag{2}$$

т. е., если скорость разбегания траекторий оператора N_δ на инвариантном многообразии K меньше, чем скорость сжатия оператора N_δ в направлении трансверсального слоения $R_\delta x$ ($x \in K$), то, в случае компактности инвариантного многообразия K оператора N_δ, оно обладает свойством асимптотической устойчивости).

Рассматривается случай потери устойчивости инвариантного многообразия K оператора N_δ через критическое значение $\delta = \delta_0$, когда неравенства (1) и (2) заменяются при $\delta = \delta_0$ равенствами. Указаны дополнительные условия, при которых для малых $\delta > 0$ инвариантное многообразие K — неустойчиво и от него ответвляется инвариантное, асимптотически устойчивое многообразие K_δ, гомеоморфное K.

Б.П. Осиленкер

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СЛЕДА ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ С АСИМПТОТИЧЕСКИ 2-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕКУРРЕНТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть заданы две ограниченные последовательности $\{a_{n+1} > 0\}$, $\{b_n \in \in \mathcal{R}^1\}$ и $\{p_n\}$ $(n \in \mathcal{Z}_+)$ – последовательность ортонормированных по мере μ полиномов, определяемых трехчленным рекуррентным соотношением

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) \quad (n \in \mathcal{Z}_+)$$

$$p_{-1}(x) = 0, \; p_0(x) = 1, \; a_0 = 0.$$

Для полиномов класса Неваи в том случае, когда $\{a_{n+1}\}$ и $\{b_n\}$ $(n \in \mathcal{Z}_+)$ являются последовательностями ограниченной вариации, установлена (Ж. Домбровская, А. Матэ, П. Неваи) следующая формула следа (Trace formula)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(a_{n+1}^2 - a_n^2)p_n^2(x) + a_n(b_n - b_{n-1})p_{n-1}(x)p_n(x)\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu'(x)}$$

для всех x, принадлежащих любому компакту из $(-1,1)$.

Рассмотрим более общий класс ортонормированных полиномов с асимптотически 2-периодическими рекуррентными коэффициентами (класс AP_2). Пусть существуют две 2-периодические последовательности $\{a_{n+1}^0 > 0\}$ и $\{b_n^0\}$ $(n \in \mathcal{Z}_+)$ такие, что

$$a_{n+2}^0 = a_n^0 \; (n = 1, 2, \ldots), \; b_{n+2}^0 = b_n^0 \; (n \in \mathcal{Z}_+)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left[|a_n - a_n^0| + |b_n - b_n^0|\right] = 0.$$

В этом случае $supp(\mu) = E \bigcup S$, где E состоит из двух промежутков числовой оси, которые могут иметь общие точки, а S – конечное или счетное множество точек вне E ,которые могут накапливаться к концам E.

Введем обозначения: $\alpha_n = a_{n-1}a_n$, $\beta_n = a_n\varepsilon_n$, $\varepsilon_n = b_{n-1} + b_n - b_0^0 - b_1^0$

$$\gamma_n = a_n^2 + a_{n+1}^2 - \left(a_1^0\right)^2 - \left(a_2^0\right)^2 + (b_n - b_0^0)(b_n - b_1^0).$$

Справедлив следующий аналог формулы следа (решение задачи Неваи при $N = 2$).

Теорема. Пусть система $\{p_n\}$ $(n \in Z_+)$ принадлежит классу AP_2 и для рекуррентных коэффициентов справедлива оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+2}| + |b_n - b_{n+2}| + (|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|)(|\varepsilon_n| + |\varepsilon_{n+1}|) < \infty.$$

Тогда следующее соотношение

$$2\sum_{n=0}^{\infty} [(\alpha_{n+2}^2 - \alpha_n^2) + (\beta_{n+1}^2 - \beta_n^2)] p_n^2(x) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+2}(\gamma_{n+2} - \gamma_n) p_n(x) p_{n+2}(x) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_{n+1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + 3(\alpha_{n+2}\beta_{n+2} - \alpha_{n+1}\beta_n)] p_n(x) p_{n+1}(x) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n+2}\beta_{n+3} - \alpha_{n+3}\beta_{n+1}) p_n(x) p_{n+3}(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{|2x - b_0^0 - b_1^0|}{\mu'(x)} \sqrt{[(\beta_1^0 + a_2^0)^2 - (x - b_0^0)(x - b_1^0)]\,[(x - b_0^0)(x - b_1^0) - (a_1^0 - a_2^0)^2]}$$

имеет место равномерно на каждом компакте из открытого множества E_0, получающегося из E выбрасыванием концов промежутков.

Следствие. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+2}| < \infty, \quad b_n \equiv 0 \ (n \in Z_+).$$

Тогда равномерно на любом компакте из E_0 справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 - a_{n-1}^2 a_n^2) p_n^2(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} a_{n+2} (a_{n+2}^2 + a_{n+3}^2 - a_n^2 - a_{n+1}^2) p_n(x) p_{n+2}(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{x^2\sqrt{1 - x^2}}{\mu'(x)}.$$

С помощью данных формул можно находить весовую функцию, зная рекуррентные соотношения.

Условиям теоремы удовлетворяют решетчатые ультрасферические и Поллачека полиномы, и полиномы, введенные В.Бржечка и Г.Барковым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию РФ (проект 2-16-4-24) и МНФ - фонда Сороса (грант МБ 6300).

С.С.Платонов

О ПРОСТРАНСТВАХ H_p^r НА ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В работах С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [1-2] введены функциональные пространства H_p^r на n-мерной сфере S^n и получено описание этих пространств в терминах наилучших приближений сферическими полиномами. Сфера S^n является частным случаем компактных римановых симметрических пространств ранга 1 (КРОСП-ов), на которых в настоящее время изучаются многие задачи гармонического анализа и теории функций (см., например, [3-4]). В настоящей работе дается некоторое определение пространств $H_p^r(M)$ на произвольном КРОСП-е M (более общее, чем в [5]) и получено описание этих пространств через наилучшие приближения функций линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на M.

Пусть M - произвольный КРОСП, dx - элемент римановой меры на M. При $1 \leq p < \infty$ обычным образом определяются функциональные банаховы пространства $L_p(M) = L_p(M, dx)$, а при $p = \infty$ пусть $L_\infty(M) = C(M)$ - пространство непрерывных функций на M; $\|\cdot\|_p$ - норма в $L_p(M)$.

Пусть D - оператор Лапласа-Бельтрами на M. Спектр оператора D дискретный, действительный и расположен на неположительной полуоси. Упорядочим его по убыванию ($0 = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$) и обозначим через $\mathcal{H}_k$ собственное подпространство оператора Δ, отвечающее собственному значению λ_k. Пусть $\mathcal{P}_m(M) = \mathcal{H}_0 + \dots + \mathcal{H}_m$. Функции из $\mathcal{P}_m(M)$ будем называть сферическими полиномами на M степени m (при $M = S^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами).

Для $f \in L_p(M)$ наилучшее приближение сферическими полиномами степени m определяется как

$$E_m(f)_p = \min_{\Phi \in \mathcal{P}_m} \|f - \Phi\|_p.$$

Для $x \in M$ через $T_x M$ обозначим касательное пространство к M в точке x. Пусть

$$S(x) = \{\xi \in T_x M : |\xi| = 1\}$$

единичная сфера в $T_x M$. Обозначим через $d\mu(\xi)$ элемент объема $S(x)$, через σ полный объем сферы $S(x)$. Пусть $\gamma(x, \xi; s)$ - геодезическая, такая что $\gamma(x, \xi; 0) = x$ и $\frac{d}{ds}\gamma(x, \xi; s)\big|_{s=0} = \xi$.

Полагаем по определению

$$_\xi\Delta_t^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(\gamma(x, \xi; jt))$$

$$^*\Delta_t^k f(x) = \frac{1}{\sigma} \int_{S(x)} {_\xi\Delta_t^k} f(x)\, d\mu(\xi).$$

$^*\Delta_t^k f(x)$ называется усредненной разностью k-го порядка.

Пусть r — положительное действительное число, k — натуральное число, l — неотрицательное целое число такие, что $k > r - 2l > 0$, $1 \le p \le \infty$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $H_p^r(M)$, если функции $f, \mathcal{D}f, \ldots, \mathcal{D}^l f \in L_p(M)$ (действие оператора $\mathcal{D}$ понимается в смысле теории обобщенных функций) и для некоторой постоянной $A_f > 0$ выполняется неравенство

$$\|{}^*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f(x)\|_p \le A_f\, t^{r-2l} \qquad \forall t > 0. \tag{1}$$

$H_p^r(M)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{H_p^r(M)} = \|f\|_p + h_p^r(f), \tag{2}$$

где

$$h_p^r(f) = \sup_{t>0} \frac{\|{}^*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f(x)\|_p}{t^{r-2l}}.$$

Теорема 1. *а) Если $f \in H_p^r(M)$ то*

$$E_m(f)_p \le C_1 \frac{h_p^r(M)}{(m+1)^r}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где C_1 не зависит от f и m.

б) Обратно, если $f \in L_p(M)$ и выполняется неравенство

$$E_m(f)_p \le \frac{B_f}{(m+1)^r}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

с некоторой постоянной B_f, то $f \in H_p^r(M)$ и

$$\|f\|_{H_p^r(M)} \le C_2 \left(\|f\|_p + B_f\right),$$

где C_2 не зависит от f и m.

Следствие. *Пространство $H_p^r(M)$ не зависит от чисел k и l и выражение*

$$\|f\|_p + \sup_{m=0,1,\ldots} (m+1)^r\, E_m(f)_p$$

задает в $H_p^r(M)$ норму, эквивалентную исходной норме (2).

Теорема 1 для случая $l = 0$ доказана в [5], а для сферы S^n при любом l в [2].

Работа поддержана РФФИ (проект 95-01-01391).

Библиографический список

1. Никольский С.М., Лизоркин П.И.// Изв. АН СССР. Сер.матем. 1987. Т.51.N3. С.635–651.

2. Никольский С.М., Лизоркин П.И.// Исследования по теории функций. Уфа, 1989.

3. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.:Мир, 1964.

4. Тихомиров В.М. Теория приближений // Соврем. пробл. матем. Фунд. направл. 1987. Т.14.

5. Платонов С.С.// Доклады РАН. 1995. Т.342, N4. С.455–457.

М.Г.Плешаков

КОМОНОТОНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА

Пусть даны $2s$ точек $y_i : -\pi \le y_{2s} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, определим значение y_i для всех целых индексов i равенством $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$. Будем писать $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, если f – 2π-периодическая непрерывная функция и f не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное ; f не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное. Положим

$$E_n^{(1)}(f;Y) := \inf_{\tau \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbb{T}_n} ||f - \tau||.$$

$\mathbb{T}_n$ – пространство тригонометрических полиномов порядка $\le n$. Следующие теоремы являются комонотонными аналогами неравенства Джексона.

Теорема 1. Если $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то при каждом натуральном n найдется тригонометрический полином $\tau_n(x)$ порядка не больше n такой, что $\tau_n \in \Delta^{(1)}(Y)$ и

$$||f - \tau_n|| \le c(s)\omega(f; \frac{1}{n}),$$

где $\omega(f;t)$ – модуль непрерывности $f(x)$, $c = c(s) = const$, зависит только от s .

Теорема 2. Если $f \in W^r \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$, где $r \ge 2$, тогда для всякого натурального n

$$E_n^{(1)}(f;Y) \le \frac{c}{n^r},$$

$c = c(r, Y) = const$, не зависит от n и f.

Библиографический список

1. Шевчук И.А. Приближение монотонных функций монотонными полиномами//Мат.сб.1992.Т.183.С.63-78.
2. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев,1992.

А.К. Рамазанов

О СВОЙСТВАХ ПОЛИРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ $L_2(\mathcal{D})$

Функция $f(z)$, которая имеет в области G непрерывные частные производные по x и y до порядка $m \geq 1$, называется полианалитической функцией порядка m (m -аналитической) в G, если в этой области она удовлетворяет уравнению Коши-Римана $\partial^m f / \partial \bar{z}^m = 0$. Известно, что любую m -аналитическую функцию f в области G можно единственным образом представить в виде (см.[1])

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \ldots + \bar{z}^{m-1}\varphi_{m-1}(z), \qquad (1)$$

где φ_k голоморфны в G. В случае, когда $G = \mathcal{D} := \{z : |z| < 1\}$, равенство (1) можно преобразовать к виду

$$f(z) = P(z,\bar{z}) + g_0(z) + (1-|z|^2)g_1(z) + \ldots + (1-|z|^2)^{m-1}g_{m-1}(z), \qquad (2)$$

где $P(z,\bar{z})$ - некоторый полином от z и $\bar{z}$ степени не выше $m-1$. В работе [2], используя равенство (2), исследованы различные вопросы граничного поведения компонент m -аналитической функции. Следующая теорема также может быть использована для исследования таких задач.

ТЕОРЕМА 1. Если m -аналитическая в $\mathcal{D}$ функция f принадлежит пространству суммируемых с квадратом по площади функций $L_2(\mathcal{D})$, то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k}\left\{(1-|z|^2)^k F_k(z)\right\}, \qquad (3)$$

где F_k - голоморфные в $\mathcal{D}$ функции из $L_2(\mathcal{D})$.

Для данного мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \ldots, n_{m-1})$, с неотрицательными компонентами, через

$$\overset{0}{\mathcal{Z}}_{(n)}(z;f) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k}\left\{(1-|z|^2)^k \mathcal{Z}_{n_k}(z;f)\right\},$$

будем обозначать m -рациональную функцию наилучшего приближения степени не выше (n) для функции (3) в метрике $L_2(\mathcal{D})$, где $\mathcal{Z}_{n_k}(z;f)$ - рациональная функция степени не выше n_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

ТЕОРЕМА 2. Если F_k не является рациональной функцией степени не выше n_k, то $\deg\{\mathcal{Z}_{n_k}(\cdot, f)\} = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

Библиографический список

1. Balk M.B. Polyanalytic Functions. B.: Akad. Verlag, 1991.
2. Долженко Е.П. О граничном поведении компонент полианалитической функции// Доклады РАН. 1994. Т. 5. С.585-588.

Е.А.Ровба

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Пусть $\{\alpha_k\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, $\alpha_0=0$, $|\alpha_k|<1$, $k\in N$.

$$\varphi_0(z)\equiv 1,\ \varphi_n(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\bar\alpha_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar\alpha_k z},\ n\in N.$$

Полагаем

$$Q_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_n}\frac{\varphi_n(t)}{t^2-2tx+1}\,\frac{1+t}{t}\,dt\ ,\ x\in[-1;1],\ n=0,1,\dots,$$

где число ρ_n, $\rho_n>1$, выбрано так, что точки α_k^{-1}, $k=\overline{1,n}$, находятся вне контура интегрирования. Тогда нетрудно заметить, что подынтегральная функция будет иметь в круге $|t|<\rho_n$ два простых полюса в точках $x\pm\sqrt{x^2-1}$, и, следовательно,

$$Q_n(x)=\frac{1}{2i\sin\theta}\left(\left(1+e^{-i\theta}\right)\varphi_n(e^{i\theta})-\left(1-e^{i\theta}\right)\varphi_n(e^{-i\theta}\right),\ x=\cos\theta$$

Теорема 1. Система рациональных функций $Q_n(x)$, $n=0,1,\dots$, является ортогональной на отрезке $[-1;1]$ по весу $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$.

Если положить $\alpha_k=0$, $k=\overline{1,n}$, то очевидно,

$$Q_n(x)=\frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)},\ x=\cos\theta,$$

т.е. $Q_n(x)$ есть известный многочлен Якоби.

Теорема 2. Если числа α_k, $k=\overline{1,n-1}$, являются вещественными, либо попарно комплексно-сопряженными, $\alpha_0=0$, $\alpha_n\in(-1;1)$, то функция $Q_n(x)$ имеет n простых нулей на интервале $(-1;1)$ и справедливо представление

$$Q_n(x)=\sqrt{2\frac{\sqrt{1-a_n^2}}{1+a_n x}}\sin\mu_{n+1/2}(x)/\sqrt{1-x},$$

где

$$\mu_{n+1/2}(x)=\frac{1}{2}\arccos x+\arccos\frac{x-\alpha_0}{\sqrt{1-2\alpha_k x+\alpha_k^2}}+\sum_{k=1}^{n-1}\arccos\frac{x+a_k}{1+a_k x},$$

$$a_k=\frac{2\alpha_k}{1+\alpha_k^2},\ k=\overline{1,n-1}.$$

Т.Ю. Рослова

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В ДВОЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА $L(\ln^+ L)^2$

I. Пусть 2π – периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_p(T^N)$, $p \geq 1$, где $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N: -\pi < x_j \leq \pi,\ j = 1,\ldots N\}$ разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \sum c_k e^{ikx}$, и пусть $S_{[\alpha]}(x;f)$ – прямоугольная ($[\alpha] = ([\alpha_1],\ldots,[\alpha_N]) \in Z^N_+$, $[\alpha_j]$ – целая часть $\alpha_j \in \mathbb{R}^1_+$), а $S_{[\alpha_0]}(x;f)$ – квадратная ($\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = \alpha_0 \in \mathbb{R}^1_+$) частичные суммы данного ряда.

Пусть $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$ разложена в кратный интеграл Фурье:

$$g(x) \sim \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$ рассмотрим собственный интеграл Фурье:

$$J_\alpha(x;g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \ldots \int_{-\alpha_N}^{\alpha_N} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi_1 \ldots d\xi_N. \tag{1}$$

Частным случаем "прямоугольной частичной суммы" (1) является "квадратная частичная сумма" $J_{\alpha_0}(x;g)$, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = \alpha_0$.

Пусть $g(x) = f(x)$ при $x \in T^N$. Обозначим через $R_\alpha(x;f)$ следующую разность

$$R_\alpha(x;f) = S_{[\alpha]}(x;f) - J_\alpha(x;g). \tag{2}$$

Будем предполагать при этом, что

$$g(x) = 0 \text{ вне } T^N. \tag{3}$$

В работе исследуется поведение разности (2) при $\alpha \to \infty$ (т.е. $\min\limits_{1\leq j\leq N} \alpha_j \to \infty$) в зависимости от условий, накладываемых на функции f и g.

2. В [I] И.Л.Блошанским были получены следующие результаты: если $N = 2$ и $p > 1$, то разность $R_\alpha(x;f) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для п.в.

$x \in T^2$ (условие (3) при этом оказалось несущественным). В этой же работе была выяснена существенность условий $N = 2$ и $p > 1$: были построены непрерывная функция $f_1 \in C(T^N)$, $N \geq 3$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(x;f_1)| = +\infty$ всюду внутри T^N и функция $f_2 \in L_1(T^N)$ такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(x;f_2)| = +\infty$ в каждой точке T^N. Более того, в [2] были построены функции $f_3 \in L_1(T^N)$ и $g_3 \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, $f_3(x) = g_3(x)$ при $x \in T^N$ и последовательности $\{\alpha_0(k,x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_0(k,x) \in \mathbb{R}^1$, $k = 1,2,\ldots$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty}|S_{[\alpha_0(k,x)]}(x;f_3)| = +\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} J_{[\alpha_0(k,x)]}(\cdot;g_3) = g_3(x)$ для п.в. $x \in T^N$.

Таким образом, встал вопрос о нахождении "промежуточного" между L_1 и L_p, $p > 1$ класса, в котором бы имела место равносходимость разложений в двойной ряд и интеграл Фурье. Эта задача решена нами в классе $L(\ln^+L)^2$, где $\ln^+|f| = \ln(\max(1,|f|))$.

Теорема. *Если $f \in L(\ln^+L)^2(T^2)$, $g \in L(\ln^+L)^2(\mathbb{R}^2)$, такие что $g(x) = f(x)$ при $x \in T^2$ и $g(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2\backslash T^2$, то $R_\alpha(x;f) \longrightarrow 0$ при $\alpha \to \infty$ п.в. на T^2. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C = C_\varepsilon$, такая, что*

$$\Big\| \sup_{\alpha_1,\alpha_2 > 0} |R_\alpha(x;f)| \Big\|_{L_1(T^2_\varepsilon)} \leq C \int_{T^2} |f(x)|(\ln^+|f(x)|)^2 dx + C,$$

где $T^2_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^2\colon -\pi + \varepsilon < x_j < \pi - \varepsilon,\ j = 1, 2 \}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00332)

Библиографический список

1. Блошанский И.Л. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Мат. заметки. 1975. Т.18, № 2. С. 153-168.
2. Блошанский И.Л. Кратный интеграл и кратный ряд Фурье при суммировании по квадратам //Сиб.матем.ж. 1990. Т.31, № 1. С.39-52.

А.А.Рябинин

О ФЛУКТУАЦИЯХ НУЛЕЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МЕРЫ КАНТОРА-ЛЕБЕГА

Преобразования Фурье финитных мер

$$F(z) = \int e^{izt}\, d\mu \ , \ supp\, d\mu \subset [-a, a]$$

образуют важный подкласс целых функций экспоненциального типа ввиду их многочисленных приложений в негармоническом анализе Фурье [1]. Большой интерес вызывает вопрос о распределении ну лей таких функций.

Определение 1 [2]. Меру dL назовем мерой Кантора-Лебега, если

1) $supp\, dL$ - совершенное нигде не плотное множество отрезка $[-a, a]$ канторовского типа с постоянным отношением разбиения $\xi \in (0, \frac{1}{2})$;

2) функция распределения dL есть функция Лебега $\mathcal{L}(t)$ ("канторовская лестница").

Используя для преобразования Фурье $L(z)$ меры Кантора-Лебега dL представление в виде [2] :

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos a(1-\xi)\xi^{k-1} z \ , \ \forall z \in C^1 \ ,$$

мы в состоянии сразу найти множество нулей Λ. Имеем

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_m^{(k)} = C \cdot \Theta^k \cdot (2m+1) \ , \ C = \frac{\pi\xi}{2a(1-\xi)} \ , \ \Theta = \frac{1}{\xi} \ , \ |m| = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

Таким образом, Λ является объединением двухсторонних арифметических прогрессий. Ограничимся положительными точками в Λ. Нас интересует эффект образования в интервалах фиксированной длины скоплений из n $(n = 2, 3, \dots)$ точек последовательности Λ. Пусть $N(t)$ – считающая функция последовательности Λ. Обозначим

$$\Delta N(t) = N(t+1) - N(t-1)$$

Определение 2. Последовательность Λ назовем флуктуирующей (обладающей $\mathcal{F}$ - свойством), если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \Delta N(t) = \infty \ .$$

Наша задача заключается в том, чтобы охарактеризовать те значения параметра ξ, для которых Λ обладает $\mathcal{F}$ - свойством. При обсуждении этой проблемы будем полагать, что $\xi \in (0,1)$. Нижеследующие теоремы дают полное описание $\mathcal{F}$ - свойства последовательности Λ в терминах алгебраической структуры параметра ξ.

Определение 3 [3]. Пусть ξ – алгебраическое число степени $n \geq 1$. Определяющим многочленом для ξ назовем единственный неприводимый над полем рациональных чисел многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является ξ.

Теорема 1. Пусть $\xi \in (0,1)$ – алгебраическое число степени $n \geq 2$, определяющий многочлен которого имеет вид :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \ , \ \exists a_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n-1) .$$

Тогда эквивалентно :

1) Λ обладает $\mathcal{F}$ - свойством;
2) a_0 - нечетное, $\exists a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ - нечетное.

Теорема 2. Пусть $\xi \in (0,1)$ – алгебраическое число степени $n \geq 1$, определяющий многочлен которого имеет вид :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_n \ .$$

Тогда эквивалентно :

1) Λ обладает $\mathcal{F}$ - свойством;
2) $\frac{a_0}{a_n}$ не является четным числом.

Теорема 3. Пусть $\xi \in (0,1)$ – трансцендентное число. Тогда Λ обладает $\mathcal{F}$ - свойством.

Библиографический список

1. Седлецкий А.М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси// УМН, 1982, Т.37, вып.5(277), С.51-95.

2. Kahane J.-P., Salem R. Ensembles parfaits et sèries trigonometriques. Paris: Hermann, 1963.

3. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.-Л. : ГИТТЛ, 1940.

А.И.Савотин

О РЯДАХ ПО СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Будем рассматривать системы функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, (I)
определённых на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и ряды по таким системам с монотонными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (a_k \geq a_{k+1} > 0). \tag{2}$$

Пусть $\sigma_n(\varphi_k; x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность ядер системы (I). В силу известной теоремы Абеля, если в некоторой точке x выполняется условие

$$\sigma_n(\varphi_k; x) = O(1), \; n \to \infty, \tag{A}$$

то ряд (2) с коэффициентами $a_k \downarrow 0$ сходится в точке x.

Теорема I. Если система функций (I) не удовлетворяет условию (A) в некоторой точке x, то существует такая последовательность коэффициентов $a_k \downarrow 0$, что ряд (2) неограниченно расходится в точке x.

Теорема 2. Если система функций (I) в некоторой точке x удовлетворяет условию

$$\sigma_n(\varphi_k; x) = O(\psi(n)), \; n \to \infty, \tag{B}$$

где $\psi(t)$ – функция, определённая в интервале $(0, +\infty)$, неотрицательная при $t \in [1, +\infty)$, стремящаяся к $+\infty$ при $t \to +\infty$ и имеющая в интервале $(0, +\infty)$ положительную монотонную производную $\psi'(t)$, то тогда ряд (2) сходится в точке x к значению $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \sigma_k(\varphi_k; x)$, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, если его коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi'(k) < +\infty, \tag{3}$$

$$a_k \psi(k) = o(1), \; k \to \infty. \tag{4}$$

Отметим, что если функция $\psi(t)$ такова, что её производная $\psi'(t)$ монотонно не возрастает в $(0, +\infty)$ и $\frac{\psi(t)}{\psi'(t)} = \nu(t)$, $t \to +\infty$, то условие (4) выполняется в случае выполнимости условия (3).

Теорема 3. Если все функции системы (I) неотрицательны и в некоторой точке x выполняется условие (B), то ряд (2) сходится в точке x при условии (3).

В частных случаях систем косекансов и систем вида $\{f(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ получаем результаты работ [1] и [2].

Библиографический список

1. Муромский А.А. О рядах по косекансам с монотонными коэффициентами//Вестник МГУ.Сер.матем.-мех.1969.Т.24,№4.С.52-60.
2. Панников Б.В. О сходимости рядов по системе $f(nx)$ с монотонными коэффициентами//Матем.заметки.1980.Т.27,№3.С.373-380.

С.П. Сидоров

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ КОНЕЧНОГО РАНГА КЛАССА S_m

Пусть $L_n(f;x)$ - линейный оператор ранга $n+1$ класса S_m (см. [1], [2]), определенный на $\mathbb{C} := \mathbb{C}[0,1]$ и пусть $L_n(t^k;x) = x^k$, $k = 0,\dots,m+1$. Тогда

$$\|L_n((t-x)^{m+2};x\|_{\mathbb{C}} \geq c(n+1)^{-m-2},$$

где $c := ((m+1)!!)^2 2^{-m-2}$. Кроме того,

$$\inf_{L_n^* \in S_{m,n}} \|L_n(t-x)^{m+2};x)\| \leq cn^{-m-2},$$

где $S_{m,n}$ - класс линейных операторов конечного ранга $n+1$ класса S_m, отображающих $\mathbb{C}$ в себя и удовлетворяющих условиям

$$L_n(t^k;x) = x^k;\quad k = 0,\dots,m+1.$$

Библиографический список

1. Коровкин П.П. Сходящиеся последовательности линейных операторов // УМН.1962. Т.17,вып.4. С.147-152.
2. Виденский В.С. Об одном точном неравенстве для положительных операторов конечного ранга//Докл.АН Тадж.ССР. 1981. Т.24, №12. С.715-717.

С.П. Сидоров

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОСНОВНОГО ИНТЕРВАЛА

Канторович Л.В [1] установил, что если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином Бернштейна $B_n(f;x)$ сходится к ней на всей оси. Покажем, что аналогичный результат имеет место и для последовательностей операторов Баскакова [2]:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!} x^k f(\frac{k}{n}),$$

где $x \in [0,1]$ и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (1+px)^{-\frac{n}{p}}, & p \neq 0,\ p \geq -1, \\ e^{-nx}, & p = 0. \end{cases}$$

Лемма 1. Если $f(x)$ есть полином степени m, то при $n \geq m$ $L_n(f;x)$ есть полином степени m(а не n).

Лемма 2. Для всех вещественных x будет

$$\lim_{n \to \infty} L_{n,m}(x) = x^m,$$

где $L_{n,m}(x)$ есть полином $L_n(f;x)$, построенный для функции $f(x) = x^m$.

Теорема. Если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином $L_n(f;x)$ сходится к ней на всей оси.

Библиографический список

I. Канторович Л.В. О сходимости последовательности полиномов С.Н.Берштейна за пределами основного интервала// ИАН.Сер. физ.-матем. I93I.С.II03-III5.

2. Баскаков В.А. Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций//Докл.АН СССР.1957.Т.II3, № 2. С.249-25I.

И.Э. Симонова, Б.В. Симонов

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Пусть φ – неотрицательная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, $0 < \alpha < \infty$. Пространством Лоренца $\Lambda(\varphi, \alpha)$ назовем множество 2π-периодических измеримых функций f, для каждой из которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} = \left\{ \int_0^{2\pi} (\varphi(t) f^*(t))^\alpha \frac{dt}{t} \right\}^{1/\alpha}$$

где f^* – невозрастающая на $[0, 2\pi]$ функция, равноизмеримая с $|f|$.

Пусть также

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx ,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx ,$$

где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k a_n \geq 0$ для некоторого $k \geq 1$ и любых n ($\Delta_1 a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta_k a_n = \Delta_1(\Delta_{k-1} a_n)$ для $k \geq 2$).

Утверждение 1. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ – неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, равная нулю в точке $t = 0$ и удовлетворяющая условию: для любого $\delta \in (0, 2\pi)$

$$\left\{ \int_0^{\delta} \varphi^\alpha(t) \frac{dt}{t} \right\}^{1/\alpha} \leq C\varphi(\delta/2),$$

где положительная постоянная C не зависит от δ.

а. Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_2 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда

$$\|f(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^\alpha (n+1)^{2\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}^{1/\alpha}$$

б. Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда

$$\|f(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha (n+1)^{\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}^{1/\alpha},$$

$$\|g(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_3 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha n^{\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^{1/\alpha},$$

где положительные постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Утверждение 2. Пусть $0 < \alpha < \infty$; $\varphi(t)$ – неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, равная нулю при $t = 0$. Пусть также функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi^\alpha(t)/t$ не возрастает или удовлетворяет условию: для любого $\delta \in (0, \pi)$

$$\left(\int_\delta^{2\pi} (\varphi(t)/t)^\alpha \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha} \leq C_4 \varphi(\delta)/\delta, \tag{1}$$

где положительная постоянная C_4 не зависит от δ.

а. Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_2 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда

$$\|f(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geqslant C_5 \left\{\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^\alpha (n+1)^{2\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}^{1/\alpha}.$$

б. Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда

$$\|g(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geqslant C_6 \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha n^{\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{1/\alpha}.$$

Если же функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (1), то

$$\|f(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geqslant C_7 \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha (n+1)^{\alpha-1} \varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}^{1/\alpha},$$

где положительные постоянные C_5, C_6, C_7 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Т.А.Срибная

О некоторых классических теоремах теории меры на не-сигма-полных классах множеств

Среди многочисленных обобщений теорем Брукса-Джеветта, Никодима, Витали-Хана-Сакса и критерия равномерной исчерпываемости Кафьеро можно выделить два направления: ослабление условия сигма-полноты области определения функций множества ([1],[2]) и распространение этих теорем на классы неаддитивных функций множества ([3]). При этом наиболее общим не-сигма-полным классом множеств, встречающимся в литературе, являлось кольцо множеств с f_1 -свойством ([1],с.256).

В предлагаемой работе вышеназванные теоремы обобщены на случай, когда функции множества заданы на не-сигма-полном классе множеств, не являющимся кольцом, неаддитивны и принимают значения в топологическом пространстве.

Пусть Σ - мультипликативный класс множеств (сокращенно, m -класс), т.е. непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности; пусть X - хаусдорфово топологическое пространство, Θ - некоторая фиксированная точка пространства X, H - фильтр окрестностей точки Θ. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}, \varphi : \Sigma \to X$, - равномерно квазитреугольные, если $\varphi(\emptyset) = \Theta$ и для любой окрестности $U \in H$ существует окрестность $V \in H$, такая что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma, A \cup B \in \Sigma$, справедливо: если $\varphi(A) \in V, \varphi(B) \in V$, то $\varphi(A \cup B) \in U$; если $\varphi(A) \in V, \varphi(A \cup B) \in V$, то $\varphi(B) \in U$.

Ниже, в теоремах 1-4, предполагается, что Σ - m-класс с f_1 -свойством, X - хаусдорфово топологическое пространство, $\varphi_n : \Sigma \to X, n \in N$ - последовательность равномерно квазитреугольных, исчерпывающих функций множества (сокращенно, ф.м.).

Теорема 1(BJ). Если для любого множества $E \in \Sigma$ существует $lim\varphi_n(E)$ $\varphi_0(E)$ и ф.м. φ_0 является исчерпывающей, то ф.м. последовательности $\{\varphi_n\}$ являются равномерно исчерпывающими.

Теорема 2(N). Если каждая ф.м. $\varphi_n, n \in N$, непрерывна сверху в нуле и для любого множества $E \in \Sigma$ существует $lim\varphi_n(E) = \varphi_0(E)$, причем ф.м. φ_0 является исчерпывающей, то ф.м. последовательности $\{\varphi_n\}$ являются равностепенно слабо непрерывными.

Теорема 3(VHS). Пусть Y - хаусдорфово топологическое пространство, $\mu : \Sigma \to Y$ - некоторая ф.м. Если каждая ф.м. $\varphi_n, n \in N$, абсолютно непрерывна относительно ф.м.μ и для любого множества $E \in \Sigma$ сущесвует $lim\varphi_n(E) = \varphi_0(E)$, причем ф.м. φ_0 является исчерпывающей, то ф.м. последовательности $\{\varphi_n\}$ являются равностепенно абсолютно непрерывными относительно ф.м. μ .

Теорема 4(Cafiero). Для того чтобы ф.м. последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно исчерпывающими, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности $U \in H$ и для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{\mathcal{E}_n\} \subset \Sigma$ существовали такой номер n_0 и такое множество $E_{k_0} \in E_n$, что $\varphi_n(E_{k_0}) \in U$, $n \geq n_0$.

Библиографический список

1. Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza// Rend. Accad.Naz. Sci.XL. 1985. V 9. fasc.11. P.249-260.

2. Lucia P.,Morales P. Equivalence of Brooks-Jewett, Viitali-Hahn-Saks and Nikodym convergence theorems for uniform semigroup-valued additive functions on a Boolean ring// Ricerche di Matem. 1986. V.35, N1. P.75-81.

3. Pap E. The Brooks-Jewett theorem for non additive set functions// Зб. рад. прир.-мат.фак.Сер.мат.Унив.Новом Саду. 1991.T21.N1.C.75-81.

А.П. Старовойтов. Н.А. Старовойтова

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУММЫ ЭКСПОНЕНТ

Изучению поведения различных элементов таблиц Паде $(\pi_{n,m})_1^{\infty}$ и Чебышева $(r^*_{n,m})_1^{\infty}$ экспоненты посвящено большое количество работ. В связи с этим Е.М.Никишиным (см. [I]) была поставлена аналогичная задача для функций вида

$$f(z)=\sum_{j=1}^{K} e^{\lambda_j z} \qquad (1)$$

где λ_j – различные комплексные числа и $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\ldots\geq|\lambda_K|$. В [I-2] была установлена сходимость и найдена асимптотика поведения строк указанных таблиц для суммы экспонент (I) в круге $D=\{z:|z|\leq 1\}$ (случай фиксированного m).

Следующая теорема является обобщением этих результатов.

ТЕОРЕМА. Пусть $m=O(\ln^{\rho} n)$ и ρ –фиксированное положительное число. Тогда для любого $z\in D$ имеют место следующие асимптотические равенства

$$f(z)-\pi_{n,m}(z)=\frac{(-1)^m\cdot m!\,(\lambda_1 z)^{n+m+1}}{n^{2m}\cdot(n+1)!}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\max_{z\in D}|f(z)-r^*_{n,m}(z)|=\frac{m!\,|\lambda_1|^{n+m+1}}{n^{2m}\cdot(n+1)!}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Библиографический список

I. Аптекарев А.И.// Матем. сб. I980.Т.II3/I55/, №4/I2/. С. 520-537.

2. Старовойтов А.П., Старовойтова Н.А.// Докл. АН Беларуси.I992. Т.36,№3-4.С.202-204.

С. А. Степанянц

О НАИЛУЧШЕМ В СМЫСЛЕ ПОРЯДКА ТАУБЕРОВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

Пусть для последовательностей действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ введено некоторое условие R. Будем говорить, что R является $T_Q(P)$-условием, если любой ряд Σa_n, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R, будет суммируем и методом Q. В качестве Q и P будем рассматривать регулярные методы суммирования Чезаро целого порядка (C,m). Вообще, везде в дальнейшем, k и m – целые числа, $k > 0$, $m \geq 0$.

Классический результат о том, что $a_n = O(1/n)$ является $T_{(C,0)}((C,k))$-условием для любого $k > 0$, впервые был получен Харди в работе [1]. Ему же, по-видимому, принадлежит предположение о неулучшаемости этого условия в смысле порядка для методов Чезаро.

Гипотеза H. Пусть k - фиксированное целое положительное число; $\omega(n)$ – функция натурального аргумента такая, что $\omega(n)\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда $a_n = O(\omega(n)/n)$ не является $T_{(C,0)}((C,k))$-условием.

Справедливость гипотезы H была доказана в работе [2]. Кроме того, в этой работе было найдено некоторое условие (будем обозначать его (D)) на последовательность неотрицательных чисел $\{c_n\}$ которое для каждого $k > 0$ оказалось необходимым и достаточным для того, чтобы $a_n = O(c_n)$ являлось $T_{(C,0)}((C,k))$-условием.

Однако ни при каких k и m ($k > m > 0$) это условие уже не будет необходимым для того, чтобы $a_n = O(c_n)$ было $T_{(C,m)}((C,k))$-условием (см. [3], где были найдены условия менее ограничительные, нежели (D)).

Таким образом, необходимость в условии (D) не допускает переноса на $T_{(C,m)}((C,k))$-условия при $m > 0$, но, тем не менее, гипотеза H остается справедливой и в этом случае.

ТЕОРЕМА. Пусть $\omega(n)$ – функция натурального аргумента такая, что $\omega(n)\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда $a_n = O(\omega(n)/n)$ не является $T_{(C,m)}((C,k))$-условием ни при каких k и m – целых, $k > m > 0$.

Библиографический список

1. Hardy G.H. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series // Proc. London Math. Soc. (2). 8 (1910). 301-320.
2. Lorentz G.G. Tauberian theorems and tauberian conditions // Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948). N2. 226-234.
3. Степанянц С.А. Теоремы тауберова типа для методов суммирования Чезаро // Вестн. Моск. универ. Мат. Мех. 1993. N2. 40-44.

А.В.Терешина

ВОПРОСЫ ПОДОБИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОСОБОГО ВИДА

Рассмотрим конечномерное возмущение n-ой степени оператора интегрирования :

$$Af = J^n f + \sum_{k=1}^{m} C_k(f) g_k \text{ , где} \tag{1}$$

$$J^n f = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt\,,\ C_k(f) = \int_0^1 V_k(t) f(t)\,dt\,.$$

Исследуется случай, когда $\sigma(A) = 0$, то есть оператор A является вольтерровым.

Изучается вопрос подобия оператора A степени оператора интегрирования.

Выбор данного класса операторов определяется тем, что операторы вида (1) являются модельными для широкого класса интегральных операторов с ядрами типа функции Грина [1],[2].

Доказана следующая

Теорема. Рассмотрим вольтерров оператор A вида (1). Если функции $V_k(t) \in C[0,1]$, $k = \overline{1,m}$, а функции $g_k(x)$ являются целыми и их производные удовлетворяют условию симметрии

$$w_1 g_k'(w_1 x) = g_k'(x), \text{ где } w_1 = e^{\frac{2\pi}{n}}, \tag{2}$$

то оператор A вида (1) подобен оператору J^n : $A = V^{-1} J^n V$ и оператор преобразования имеет вид $V = E + K$, где

$$Kf = \int_0^x K(x,t) f(t)\,dt \text{ - вполне непрерывный оператор.}$$

Наиболее подробно изучен модельный оператор для $n = 3$, $m = 2$:

$$A_3 f = J^3 f + C_1(f) g_1 + C_2(f) g_2$$

В данном случае в условиях теоремы достаточно, чтобы функции $g_k(x)$ были аналитичны в шестиугольнике D вершинами w_0, $w_0 + w_1$, w_1, $w_1 + w_2$, w_2, $w_2 + w_0$, где w_0, w_1, w_2 – корни третьей степени из единицы.

Построен контрпример, показывающий существенность условия аналитичности функций $g_k(x)$. Более точно, доказано, что если, например, функция $g_2(x)$ будет непрерывна в $\overline{D}$, аналитична и не равна тождественно нулю в пятиугольнике $\overline{D_\delta}$ с вершинами δ, $\delta + w_1$, w_1, w_2, $\delta + w_2$, $(0 < \delta < 1)$, и тождественно равна нулю в $D \backslash D_\delta$, то оператор A_3 не подобен оператору J^3.

Библиографический список

1. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. //Дис. ...докт. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1973.

2. Седин О.В. О разложении по собственным функциям интегральных операторов с разрывным ядром типа функци Грина // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов, 1983.

М.Ф.Тиман

СВОЙСТВА ЯДЕР ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПОВЕДЕНИЕ ИХ S-ЧИСЕЛ

Пусть

$$A = \int_a^B F(u,v)X(v)dv \qquad (1)$$

вполне непрерывный интегральный оператор с ядром $F(u,v)\in L_{p,q}$, т.е.

$$\|F(u,v)\|_{p,q} = \{\int_a^B\{\int_a^B |F(u,v)|^p dv\}^{q/p} du\}^{1/q} \ ,1\le p,q\le\infty$$

и $\{S_n(A)\}$ - последовательность его сингулярных чисел (S-чисел) (см.[1]);

$$E_{n,\infty}(F;\phi_n)_{p,q} = \inf \|F(u,v) - \sum_{k=1}^n c_k(u)\phi_k(v)\|_{p,q} ,$$

где $\{\phi_n(v)\}$ - ортонормированная на $[a,в]$ система функций, а $\{c_k(u)\}$ - набор коэффициентов, по которым рассматривается нижняя грань.

Большое количество известных исследований посвящены выяснению вопроса о том, какими свойствами должно обладать ядро $F(u,v)$ для принадлежности оператора (1) к тем или иным симметрично - нормированным идеалам кольца линейных ограниченных операторов.

Одно из общих утверждений, отвечающих на этот вопрос , содержащий в себе многие частные результаты такого рода, является (см.[2]):

<u>Теорема I</u>. Если $1<p\le 2$, $0<r<2$ и

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-r(p-1)/p} E^r_{n,\infty}(F;\phi_n)_{p,2} < \infty ,$$

то оператор A принадлежит σ_r - идеалу, т.е. $\sum S_n^r(A) < \infty$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть A_1 и A_2 интегральные операторы, определенные равенством (1) с ядрами соответственно $F_1(u,v)$ и $F_2(u,v)$, где $F_2(u,v)\in L_{p,2}$ $(1<p\le 2)$. Если выполняются условия:

$$\sum_{n=1}^\infty S_n^r(A_1)\, n^{-\gamma\alpha} < \infty \qquad (0\le\gamma\le\alpha^{-1})$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{(\gamma p-p+1)/p} E^\beta_{n,\infty}(F_2;\phi_n)_{p,2} < \alpha$$

$(r^{-1}= \alpha^{-1}+\beta^{-1})$, то

$$\sum_{n=1}^\infty S_n^r(A_1A_2) = \sum_{n=1}^\infty S_n^r(A_2A_1) < \infty .$$

В теоремах I и 2 $\{\phi_n\}$ - произвольные N - системы (см.[3]).

Важную роль в теории несамосопряженных вполне непрерывных операторов играют симметрично-нормированные σ_π-идеалы, для которых (см.[1])

$$\sum_{n=1}^\infty \pi_n S_n(A) < \infty ,$$

где $\{\pi_n\}$ - убывающая к нулю последовательность чисел и $\sum_{n=1}^\infty \pi_n = \infty$.

Для таких операторов вида (1) справедливо утверждение:

Теорема 3. Если для любой ограниченной в совокупности ортонормированной системы $\{\Phi_n\}$ ядро $\overset{\circ}{F}(u,v)$ оператора (I) удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n E_{n,\infty}(F;\Phi_n)_{1,2} < \infty \text{, то } A \in \sigma_\pi .$$

Библиографический список

I. Гохберг И.Ц.,Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

2. Тиман М.Ф., Семиренко Т.Н. Конструктивные характеристики свойств ядер интегральных операторов и поведение их S-чисел // Теория функций и смежные вопросы анализа: Тр. конф. по теории функций, посвящ. 80-летию акад. С.М.Никольского. Днепропетровск,29 мая- I июня 1985 г. М.: Наука, 1987. С.217- 219.

3. Timan M.F. Orthonormal systems satisfying an inequality of S.M.Nikol'skii // Analysis mathematica. 1978. Vol.4. P. 75-82.

С.А.Тихомиров

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Пусть M вольтерров оператор в

$$Mf(x)=\int_0^x M(x,t)f(t)\,dt \tag{1}$$

где $M(x,t)$ – непрерывное ядро вида

$$M(x,t)=B\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{h}M_k(x,t)+o((x-t)^{n+h-1}) \tag{2}$$

B – матрица, приведенная к нормальной форме Жордана, с клетками B_ℓ размерности $(h_\ell\times h_\ell)$, $\ell=\overline{1,p}$;

h – размерность наибольшей Жордановой клетки; $M_k(x,t)$ клеточно диагональные матрицы, с клетками $M_{k\ell}(x,t)$ размерности $(h_\ell\times h_\ell)$, вида

$$[M_{k\ell}(x,t)]_{ij}=\begin{cases}o((x-t)^{n+k-1}), & j-i<k\\ 0 & , j-i\geq k\end{cases}$$

Дополнительно будем предполагать, что в некоторой полосе $0<x-t<\delta$ существуют и непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial t^j}M(x,t)\quad (0\leq i\leq p',\ 0\leq j\leq q',\ p'+q'=n) \tag{3}$$

Пусть A – оператор, являющийся конечномерным возмущением оператора M, вида

$$Af(x)=Mf(x)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^1(f(t),v_i(t))\,dt\,g_i(x) \tag{4}$$

где $v_i(x)$, $g_i(x)$ – непрерывные вектор-функции вида

$$g_i(x)=\hat{h}_i\frac{x^{\varkappa_i}}{\varkappa_i!}+o(x^{\varkappa_i}),\quad v_i(x)=\hat{\imath}_i\frac{(1-x)^{\ae_i}}{\ae_i!}+o((1-x)^{\ae_i})$$

Вопрос о полноте собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) таких операторов в пространстве обычных функций рассмотрен в [1] в пространстве вектор-функций, но без слагаемых $M_k(x,t)$ в [2].

Для заданного $\varphi\in[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]$ назовем разбиением числа m числа $\{m_\ell\}_{\ell=1}^{p}$ такие, что $m=\sum_{\ell=1}^{p}h_\ell m_\ell$

$$Re(e^{i\varphi}\theta_{im_i})\geq Re(e^{i\varphi}\theta_{jm_j+1})\quad j=\overline{1,p}$$

где $\{\theta_{\ell j}\}_{\ell=1, j=1}^{n \ \ n}$ – корни n -й степени из $-\beta_\ell$ (β_ℓ – собственные числа матрицы B), занумерованные так, что

$$Re(e^{i\varphi}\theta_{\ell 1}) \geq \ldots \geq Re(e^{i\varphi}\theta_{\ell n})$$

Через m_i^0 $(i=\overline{1,p})$ обозначим числа такие, что

$$Re(e^{i\varphi}\theta_{\ell m_\ell^0}) \geq \min_{Re(e^{i\varphi}\theta_{ij})} Re(e^{i\varphi}\theta_{ij}) > Re(e^{i\varphi}\theta_{\ell m_\ell^0+1})$$

через $\{\hat{e}_{\ell i}\}_{\ell=1, i=1}^{p \ \ h_\ell}$ – вектора единичного базиса такие, что $[\hat{e}_{\ell i}]_j = \delta_{kj}$; $k=\sum_{s=1}^{\ell-1} h_s + i$

Теорема. Пусть A – оператор определенный выше и такой, что выполнены условия:

а) при некотором $\varphi \in [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$ для разбиения числа m

имеют место неравенства $1 \leq m_\ell \leq m_\ell^0$ $(\ell=\overline{1,p})$;

б) в m – мерных пространствах

существуют базисы, состоящие из вектор-функций вида

$$g_{ij}^\ell(x) = \hat{e}_{\ell i}\frac{x^{\chi_{ij}^\ell}}{\chi_{ij}^\ell!} + o(x^{\chi_{ij}^\ell+h-1}) \qquad 0 \leq \chi_{ij}^\ell \leq n-1$$

$$v_{ij}^\ell(x) = \hat{e}_{\ell i}\frac{(1-x)^{\varkappa_{ij}^\ell}}{\varkappa_{ij}^\ell!} + o((1-x)^{\varkappa_{ij}^\ell+h-1}) \ , \ 0 \leq \varkappa_{ij}^\ell \leq n-1$$

где $\ell=\overline{1,p}$, $i=\overline{1,h_\ell}$, $j=\overline{1,m_\ell}$, $\chi_{ij_1}^\ell \neq \chi_{ij_2}^\ell$, $\varkappa_{ij_1}^\ell \neq \varkappa_{ij_2}^\ell$

Тогда система с.п.ф. оператора A полна в $L_2^2[0,1]$.

Библиографический список

1. Мацнев Л.Б., Хромов А.П. О порождающих функциях интегральных вольтерровых операторов//Матем. заметки. 1983. Т.33, №2. С.423–434.

2. Тихомиров С.А. О конечномерном возмущении интегрального вольтеррова оператора в пространстве вектор-функций//Теория функций и приближений. Тр. 3-й Сарат. зимн. школы. Саратов, 1988. С.68–70.

Н.Ю. Трошина

СИНТЕЗИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Рассматривается задача синтеза для линейной управляемой дискретной системы

$$x(t+1)=Ax(t)+bu(t), \qquad t=0,\dots,T-1 \tag{1}$$

с квадратичным функционалом

$$I(x,u)=\sum_{t=0}^{T-1}[\langle Mx(t),x(t)\rangle+u^2(t)], \tag{2}$$

где A – $n{\times}n$-постоянная матрица (неособая), b – постоянный n-вектор, $x(t)$ – n-вектор состояния, $u(t)$-скалярное управление $(t=0,\dots,T-1)$, M – $n{\times}n$-положительно определенная матрица.

Предварительно исследуются уравнения принципа максимума для системы (1)-(2) с краевыми условиями вида: $Px(0)+Qx(T)=c$.

Доказывается несколько свойств экстремалей. Найден вид синтезирующих функций, порождающих оптимальные траектории, которые, как решения уравнений принципа максимума, определяются постоянными вида $c=Dp+d$.

Теорема. Функция $u(t,x)$, определенная формулой:

$$u(t,x)=\langle(\Lambda(t+1)\Lambda^{-1}(t)-A)x,b\rangle-$$
$$-\langle(\Lambda(t+1)\Lambda^{-1}(t)\Phi_1(t)-\Phi_1(t+1))d,b\rangle, \qquad t=0,\dots,T-1$$

является синтезирующей для системы (1),(2), причем, она синтезирует семейство оптимальных траекторий вида: $x(t)=\Phi_1(t)(Dp+d)$, где p-параметр.

Здесь через $\Lambda(t)$ обозначена матрица $\Phi_1(t)D$, где $\Phi_1(t)$-блок фундаментальной матрицы системы уравнений принципа максимума.

Данная теорема доказана в предположении, что $\det\Lambda(t)\neq0$ при всех t. Исследовался также случай, когда $\det\Lambda(t)$ обращается в ноль в некоторых точках.

А.Ю. Трынин

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРИЗНАКАХ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Обозначим через U_n n-ую собственную функцию регулярной задачи Штурма - Лиувилля вида:

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q(x)]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) - HU(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где q - непрерывная функция ограниченной вариации, $h, H \in \mathbf{R}$. Известно, что U_n имеет ровно n простых нулей $0 < x_{1,n} < \ldots < x_{n,n}$.

Оператор

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) \tag{2}$$

действует из $C[0,\pi]$ в $C^1[0,\pi]$ и обладает интерполяционным свойством Лагранжа

$L_n^{SL}(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}),\ k = \overline{1,n},\ n \in N.$

В [1] была доказана равномерная сходимость внутри интерполяционного процесса (2) для функций класса Дини - Липшица. В [2] был получен критерий и ряд признаков равномерной, внутри $(0,\pi)$, сходимости процессов (2) для непрерывных функций.

Интерполяционные аналоги интегральных признаков сходимости рядов Фурье в точке для непрерывных функций Дини, Валле - Пуссена, Лебега и Лебега - Гергена в случае процессов (2) не имеют места.

Теорема 1

Если - функция типа модуля непрерывности такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \infty \quad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n > 0\right)$$

то существует плотное в $[0,\pi]$ множество $E, E \subset [0,\pi]$, такое, что для любого $x_0 \in E$ найдется функция

$$f: \omega(f, \delta) = O(\omega(\delta)),$$

$$(\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta)), \delta \to 0,$$

удовлетворяющая условию Дини

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| dx < \infty,$$

а

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |L_n^{\alpha}(f, x_0)| = \infty \quad \left(\overline{\lim_{n \to \infty}} |L_n^{\alpha}(f, x_0) - f(x_0)| > 0 \right).$$

Тем не менее, можно указать некоторые модификации признака Дини, гарантирующие сходимость в точке $x_0 \in (0, \pi)$ процесса (2). С подробным доказательством можно ознакомиться в [3].

Библиографический список

1. Натаксон Т.И. Об одном интерполяционном процессе// Уч. зап.Ленинград.пед.ин-та. Л.,1958. Т.166. С.215-219.
2. Трынин А.Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля// Сарат.ун-т. Саратов,1991. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 26.04.91. № 1763-В91.
3. Трынин А.Ю. Об одном признаке сходимости интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля // Сарат.ун-т. Саратов. 1991. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 27.05.91 № 2201-В91

Ю.А. Фарков

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВЫХ БАЗИСАХ

Пусть G – локально компактная абелева группа, μ – мера Хаара на G и $L^2(G)=L^2(G,\mu)$. Предположим, что H – дискретная подгруппа G такая, что фактор-группа G/H компактна и что существует $A\in Aut\,G$ такой, что $A(H)$ – собственная подгруппа H. Пару (G,A) назовем допустимой, если 1) группа G имеет счетную базу и метризуема и 2) автоморфизм A непрерывен и его обращение A^{-1} является сжатием. Для таких пар (G,A) полуортогональные всплесковые базисы типа Чуи – Ванга (*Chui-Wang*, 1990) изучались в [1]. Пусть $s:=card(H/A(H))$. Общая схема построения ортогональных всплесковых базисов в $L^2(G)$ вида

$$\{\psi_i(A^j\cdot-h): 1\le i\le s-1, j\in \mathbb{Z}, h\in H\} \qquad (1)$$

приведена в [2]. В докладе показано, как эта схема реализуется в ряде ситуаций, связанных с недавними обобщениями (см. [3]) интерполяционной теоремы Шенберга и классической теоремы Уиттекера – Котельникова – Шеннона. Один из результатов формулируется следующим образом. Пусть пара (G,A) допустима и F – фундаментальная область для H в G, самоподобная относительно A. Соответствующие обобщенные нормализованные B-сплайны $\{N_m\}$ определяются равенствами $N_1=\chi_F$, $N_m=N_{m-1}*N_1$ $(m\ge 2)$ (см. [1, 3]). Если $\varphi\in L^2(G)$ имеет преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\cdot)=(|G/H|)^{1/2}\Big(\sum_{\gamma\in H^\perp}|\hat{N}_m(\cdot+\gamma)|^2\Big)^{-1/2}\hat{N}_m(\cdot)$$

и $\psi_1,\dots,\psi_{s-1}$ построены по φ в соответствии со схемой из [2], то система (1) является ортогональным базисом в $L^2(G)$. В случае $G=\mathbb{R}$, $H=\mathbb{Z}$, $A=2I$ этим способом получается всплесковый базис Лемарье – Баттла (*Lemarié - Battle*, 1987) в $L^2(\mathbb{R})$.

Библиографический список

1. Dahlke S.// Wavelets, Images and Surface Fitting (Eds. P.J. Laurent, A.Le Méhauté and L.L. Schumaker). Massachusetts. 1994. P.141-156.
2. Фарков Ю.А.//Материалы междунар.51-й научно-техн.конф. профессоров,преподавателей,научных работников,аспирантов и студентов Белорусской государственной политехнической академии. Минск,1995.Ч.7.С.141-142.
3. Тихомиров В.М.//УМН. 1995. Т.50,№ 2.С.125-174.

V.I. Filippov

ON REPRESENTATION SYSTEMS IN L_1

Consider the function systems $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N} \in L_1(a,b), -\infty \le a < b \le \infty$ such that

(1) $$sup_n \sigma_n = \sigma < 1$$

where $\sigma_n = min\{\lambda \in, Q \subset (a,b) : \frac{1}{|Q|}\|\chi_Q(t) - \lambda \cdot \varphi_n(t)\|_1\}$. It is obviuos for that case $\int_a^b \varphi_n(t)dt \neq 0$. If $\varepsilon = \frac{1-\sigma}{2}$ then there exist $\lambda_n \in R, Q_n = \cup_{i=1}^{k_n}[a_i^n, b_i^n]$ such that

(2) $$\sigma'_n = \frac{1}{|Q_n|}\|\chi_{Q_n}(t) - \lambda_n \cdot \varphi_n(t)\|_1 \le \sigma + \varepsilon = \sigma' < 1$$

and all the more $sup_n \sigma'_n \le \sigma' < 1$. Let the system $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N}$ satisfies the following condition

(3) $$\forall N \in \mathbf{N} \ , \ mes\{(a,b) \setminus \cup_{k=N}^{\infty} Q_k\} = 0$$

Let $x_n = min_i a_i^n, y_n = max_i b_i^n$, denote $d(\varphi_n) = y_n - x_n$. Denote $supp\,\varphi_n = \{t : \varphi_n(t) \neq 0\}$.

(4) $$d(\varphi_n) \to 0 \ , \quad n \to \infty \ , \quad d(\varphi_n) \neq 0.$$

Definition(A.A.Talalyan) *A system of $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p$, $0 < p < \infty$ is called a representation system in the space L_p if for any $f \in L_p$ there exists a series $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ such that*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\|_{L_p} = 0.$$

The result below is more general one than in [FO].

Theorem 1. *Let for a subsystem $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ of the system $\{\varphi_n\}_{n\in N} \in L_1(a,b), -\infty \le a < b \le \infty$ the properties (2), (3), (4) are fulfilled and for each $N \in \mathbf{N}$ the set (a,b) has been covered in Vitali's sense by the family $\{Q_{n_k}\}_{k=N}^{\infty}$. Then this subsystem $\{\varphi_{n_k}\}_{k=N}^{\infty}$, where $N \in \mathbf{N}$ is any number, is a representation system in $L_1(a,b)$.*

Consequence 1. [FO]. *Let $\varphi \in L_1(R)$, . If $\int_R \varphi(t)\,dt \neq 0$ then $\{\varphi_{k,n}(t)\} = \{\varphi(2^k t - n)\}, n, k \in Z$, is a representation system in $L_p(R)$.*

References

[FO] V.Filippov , P.Oswald , Representation in L^p by series of translates and dilates of one function. J.appr. theory . Volume 82 . 1995 .

А.П.Хромов, А.П.Гуревич

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе [1] рассмотрен вопрос о равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af(x)=\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x\in[0,1]$$

и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Помимо необходимых требований гладкости ядра $A(x,t)$ была выяснена роль скачка его $(n-1)$-ой производной по x на прямой $t=x$. Самостоятельный интерес представляет случай, когда указанный скачок имеется на линии $t=1-x$. Более точно, рассмотрим оператор следующего вида:

$$Af(x)=\int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt$$

Т е о р е м а. Предположим, что

а) при $0\le t\le x\le 1$ производные $\dfrac{\partial^k A(x,t)}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^{n+k+j}A(x,t)}{\partial x^{n+k}\partial t^j}$ $(k,j=0,1,\dots,n)$ непрерывны;

б) $\dfrac{\partial^k A(x,t)}{\partial x^k}\Big|_{t=x}=\delta_{n-1,k}$ $\quad (k=0,1,\dots,n)$,

где $n\ge 1$, δ_{nk} – символ Кронекера;

в) $\dfrac{\partial^n A(1-x,1-x)}{\partial x^n}=\dfrac{\partial^n A(x,x)}{\partial x}$, $\quad x\in[0,1]$,

тогда существует такая последовательность номеров $\{K_e\}$, что для всякой $f(x)\in L[0,1]$ и любого $\delta\in(0,1/2)$

$$\lim_{e\to\infty}\|S_{K_e}(f)-\sigma_e(f)\|_{C[\delta,1-\delta]}=0,$$

где $S_k(f)$ и $\sigma_k(f)$ – частные суммы рядов Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A и обычной тригонометрической системе (K – число членов).

Этот случай замечателен тем, что не требует проверки существования A^{-1} и регулярности естественных краевых условий ([1] стр.386). Доказательство теоремы равносходимости для рассмотренного класса сводится к проверке выполнимости условий теоремы 4 из [1] для оператора A^2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00014).

Библиография

1. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов. Матем.сб.1981.№3.С.378-405

А.П.Хромов

ОБ ОБРАЩЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $Af = \int_0^1 A(x,t)$ интегральный оператор в $L_2[0,1]$ с ядром:

$$A(x,t)=\alpha_1 A_1(x,t)\varepsilon(x,t)+\alpha_2 A_2(x,t)\varepsilon(x,t)+$$
$$+\alpha_3 A_3(1-x,t)\varepsilon(1-x,t)+\alpha_4 A_4(1-x,t)\varepsilon(t,1-x),$$

$\varepsilon(x,t)\equiv 1$ при $t\le x$, $\varepsilon(x,t)\equiv 0$ при $t>x$.

Предполагаем, что $A_i(x,.)$ $(i=1,3)$ непрерывно дифференцируема при $t\le x$; $A_i(x,t)$ $(i=2,4)$ непрерывно дифференцируема при $t\ge x$ и $A_i(x,t)=1+o(1)$ при $x-t\to 0$ $(i=1,2,3,4)$.

Теорема 1. *Пусть* $\delta=(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\alpha_3-\alpha_4)^2\ne 0$ и A^{-1} существует. Тогда существует комплексное число α такое, что для $y=Af$ имеет место:

$$A^{-1}y=(E+N_\alpha)^{-1}P(y'(x)+\alpha y(x)),$$

$$y(0)=\int_0^1 A(0,t)(E+N_\alpha)^{-1}P(y'(t)+\alpha y(t))dt$$

и обратно. Здесь $N_\alpha = PN_{1,\alpha}$, $N_{1,\alpha}f=\int_0^1 (A'_x(x,t)+\alpha A(x,t))f(t)dt$, E- единичный оператор,

$$Pf(x)=\frac{1}{\delta}\{(\alpha_1-\alpha_2)f(x)+(\alpha_3-\alpha_4)f(1-x)\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_2=\alpha_4=0$, $A_1(x,t)\equiv A_3(x,t)$ и $\delta\ne 0$. Тогда A^{-1} существует и для $y=Af$ справедливы:

$$A^{-1}y=\frac{1}{\delta}(E+N)^{-1}[\alpha_1 y'(x)+\alpha_3 y'(1-x)],\quad \alpha_1 y(0)-\alpha_3 y(1)=0$$

и обратно. Здесь $Nf=\int_0^x A'_{1,x}(x,t)f(t)dt$.

Укажем на одно применение дифференциально-разностного оператора: $l[y]=\alpha_1 y'(x)+\alpha_3 y'(1-x)$.
Пусть L оператор: $Ly=l[y]$, $U_1(y)=c_1 y(0)-d_1 y(1)=0$. Оказывается, что $l^2[y]=\delta y''(x)$, где $\delta=\alpha_1^2-\alpha_3^2$. Обозначим через D область определения оператора:

$$y''(x),\ U_i(y)=c_i y^{(i-1)}(0)-d_i y^{(i-1)}(1)=0\ (i=1,2).$$

Теорема 3. *Для того, чтобы* $D=D_{L^2}$ (-область определения оператора L^2) при некоторых α_1 и α_3, причем $\delta\ne 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех: а) $c_i^2=d_i^2$ $(i=1,2)$, б) $c_i=d_i$ $(i=1,2)$, в) $c_i=-d_i$ $(i=1,2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00156)

Г.В.Хромова

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

В данном сообщении продолжается начатое в [1] исследование приближающих свойств резольвенты R_λ обыкновенного линейного дифференциального оператора n - го порядка с регулярными краевыми условиями и обобщаются исследования, проведенные в [2], [3] для частного случая такого оператора, соответствующего методу регуляризации Тихонова.

В дальнейшем считаем, что функция $z(x)$ и параметр λ удовлетворяют условиям теоремы из [1], то-есть таковы, что

$$\|-\lambda R_\lambda z - z\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad \text{при } \lambda \to \infty .$$

1. Наложим на $z(x)$ дополнительные условия гладкости и рассмотрим величину:

$$\Delta_1(\lambda, r) = \sup\{\|-\lambda R_\lambda z - z\|_{C[a,b]} : z \in W_2^r[a,b];\ \|z\|_{W_2^r} \le 1,$$
$$r \ge 1 \ \text{ - целое}\} .$$

Теорема 1. Для того чтобы $\Delta_1(\lambda, r) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для дифференциального оператора выполнялос[ь] $2n$ соотношений:

$$\sum_{i\in\gamma_1} \mathring{\rho}_{k1}^{(i)} = 0, \ k \in \gamma_1; \quad \sum_{i\in\gamma_1} \mathring{\rho}_{k1}^{(i)} + \mathring{\Delta} = 0, \ k \in \gamma_2;$$

$$\sum_{i\in\gamma_2} \mathring{\rho}_{k4}^{(i)} - \mathring{\Delta} = 0, \ k \in \gamma_1; \quad \sum_{i\in\gamma_2} \mathring{\rho}_{k4}^{(i)} = 0, \ k \in \gamma_2 .$$

Объяснения обозначений см. в [2].

Заметим, что для $n \ge 2r$ указанные соотношения эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G_0(x, a, \lambda) = 0; \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G_0(x, b, \lambda) = 0,$$

где $G_0(x, t, \lambda)$ - функция Грина дифференциального оператора, отличающегося от исходного тем, что в дифференциальном выражении присутствует лишь старшая производная.

2. Выясним, какие условия нужно наложить на параметр λ, чтобы было можно получить приближение к непрерывной функции $z(x)$, если она задана её среднеквадратичным приближением $z_\delta(x)$.

Рассмотрим величину:

$$\tilde{\Delta}(\delta, \lambda) = \sup\{\|-\lambda R_\lambda z_\delta - z\|_{C[a,b]} : \|z_\delta - z\|_{L_2[a,b]} \le \delta\} .$$

Теорема 2. Для того чтобы $\tilde{\Delta}(\delta, \lambda) \to 0$ при $\delta \to 0$, необходимо и достаточно выбрать $\lambda = \lambda(\delta)$ так, чтобы при $\delta \to 0$
а) $\lambda(\delta) \to \infty$, б) $\delta(\lambda(\delta))^{1/2m} \to 0$

Библиографический список

1. Хромова Г.В. О приближающих свойствах резольвент линейных дифференциальных операторов //Теория функций и приближений. Тр. 7-й Сарат.зим.школы. Саратов, 1995. Ч.2. С.68-71.
2. Хромова Г.В. О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода //Вестн. Моск. ун-та. 1994. Сер. 15, № 4. С. 3-10.
3. Хромова Г.В. О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. Моск.ун-та. 1993. Сер. 15, № 1. С.13-16.

Б.Т. Худалов

МЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧАСТЕЙ ЭЛЕМЕНТА В УПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E – строго выпуклое банахово пространство над полем $\mathbb{R}$, упорядоченное при помощи замкнутого конуса E_+ [1]. Пишем $E \in (\mathcal{R})$, если выполнены следующие условия:

1) $\forall x, y \in E \quad \pm x \le y \Longrightarrow \|x\| \le \|y\|$;

2) для $\forall x \in E$ найдётся $y \in E_+$, такой что $\pm x \le y$ и $\|x\| = \|y\|$.

Для $x \in E$ определим положительную и отрицательную части x_+ и x_- следующим образом: $x_+ = \frac{1}{2}(y + x)$, $x_- = \frac{1}{2}(y - x)$, где y – единственный элемент, удовлетворяющий условию 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H \in (\mathcal{R})$ – произвольное упорядоченное гильбертово пространство с замкнутым конусом H_+. Тогда

1) для $\forall x \in H \quad Px = x_+$, $d(x, H_+) = \|x_-\|$;

2) для $\forall x \in H$, $x \notin \pm H_+$ x_+ и x_- принадлежат границе конуса H_+.

Результат остаётся справедливым, если вместо H взять строго выпуклое рефлексивное пространство E, являющееся банаховой решёткой.

Библиография

1. Вулих Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин, 1977.

Г.Н. Черноусов

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ СОХРАНЯЮЩИЕ КОМФОРМНЫЕ МОДУЛИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

П.П.Белинским было высказано предположение: любое 1-квазиконформное вложение континуума в $\overline{\mathbb{R}^n}$ является мебиусовым.

Здесь мы рассматриваем вложения сохраняющие конформные модули на гиперболической плоскости.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ – мебиусов круг и $\Sigma \subset \overline{B}$ – компактное множество.

Обозначим через $\mathrm{mod}(E, F; B)$ конформный модуль семейства всех кривых соединяющих континуумы E и F в B.

Для тетрады $T = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ (упорядоченной четверки различных точек a_1, a_2, a_3, a_4) в B через $\Theta(T)$ обозначим величину

$$\frac{|a_1 - a_2||a_3 - a_4||a_1 - a_2^*||a_3^* - a_4|}{|a_1 - a_3||a_2 - a_4||a_1 - a_3^*||a_2^* - a_4|},$$

где $*$ обозначает отражение относительно ∂B.

Определение 1. Топологическое вложение $f : \Sigma \to B$ при котором, для любых непересекающихся континуумов A, B из Σ, $\mathrm{mod}(A, B; B) = \mathrm{mod}(f(A), f(B); B)$, будем называть $\mathcal{M}(\Sigma, B)$ – вложением.

Определение 2. Топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{B}$ при котором, для любой тетрады T из Σ, $\Theta(T) = \Theta(f(T))$, будем называть $T(\Sigma, B)$ – вложением.

Теорема 1. Пусть Σ – компактное множество, имеющее положительную топологическую размерность в каждой своей точке, тогда классы вложений $\mathcal{M}(\Sigma, B)$ и $T(\Sigma, B)$ совпадают.

Теорема 2. Пусть Σ – континуум такой, что для некоторой геодезической Γ (в гиперболической метрике) с концами $\alpha, \beta \in \partial B$ множество $\Sigma \cap \Gamma$ содержит по крайней мере три различные точки α, β, η. Тогда любое $\mathcal{M}(\Sigma, B)$ – вложение f при котором $f(\alpha), f(\beta), f(\eta)$ содержатся в $f(\Sigma) \cap \Gamma'$, где Γ' – геодезическая с концами $f(\alpha), f(\beta) \in \partial B$, является мебиусовым вложением.

Теорема 3. Пусть Σ – континуум такой, что для некоторой геодезической Γ (в гиперболической метрике) с концами $\alpha, \beta \in \partial B$ множество $\Sigma \cap \Gamma$ содержит по крайней мере четыре различные точки $\alpha, \vartheta, \xi, \zeta$. Тогда любое $\mathcal{M}(\Sigma, B)$ – вложение f при котором $f(\alpha), f(\beta)$ содержатся в $f(\Sigma) \cap \partial B$, является мебиусовым вложением.

Е.Б. Чуркин

ГРАФИЧЕСКИЙ ПАКЕТ "СИНТЕЗ-2.0"

Программа *"СИНТЕЗ-2.0"* предназначена для численного решения задачи синтеза для двумерной задачи быстродействия

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \ x(T) \in M \subset E^2; \quad x \in E^2, \ u \in U \subset E^2; \quad T \to \min_{u(\cdot)}.$$

Область управления U и терминальное множество M-выпуклые компакты (в программе это эллипсы или многоугольники). В предыдущей версии пакета *"СИНТЕЗ-1.0"* матрица B предполагалась постоянной [2]. Алгоритм заключается в численном интегрировании в обратном времени полученной на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] задачи Коши для четырех уравнений. Для ее решения предусмотрены два численных метода: метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности и метод Рунге-Кутта-Фельберга с автоматическим выбором шага. Основными идеями алгоритма являются: представление экстремального управления в форме градиента опорной функции области управления, нормировка сопряженной переменной и гладкая аппроксимация негладких выпуклых множеств M и U, использование которой гарантирует единственность экстремальной траектории по любому направлению вектора сопряженной переменной, определяющему экстремальное управление. В процессе расчета находятся траектории и управления, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности (принципу максимума), и строится картина синтеза. Результаты расчета представляются в удобных для пользователя графической и численной формах. Можно строить "множества управляемости", графики управлений и траекторий как функций времени.

Технические требования:

- программа предназначена для работы на персональных компьютерах IBM PC/XT/AT и совместимых с ними;
- операционная система DOS 3.0 и выше;
- минимальный размер оперативной памяти - 512 K;
- тип графического адаптера - Hercules, CGA, EGA, VGA.

Библиографический список

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.,1983.
2. Киселев Ю.Н., Орлов М.В.// Вестник МГУ. 1994.Сер.15.№ 3. С.35-43.

А.В. Шаталина

О ПРОЦЕССАХ БЕРНШТЕЙНА В ОБЛАСТЯХ КЕЛЛОГА-АЛЬПЕРА

Пусть D – ограниченная односвязная область с гладкой границей, удовлетворяющей условию Келлога-Альпера, т.е. угол $\theta(s)$, образованный касательной к границе Γ области D с вещественной осью, как функция длины дуги s на Γ имеет модуль непрерывности $\omega(\theta,h)$, удовлетворяющий условию $\int_0^c |\ln h|\ \omega(\theta,h)/h\ dh < \infty$.

Λ – множество функций ω типа модуля непрерывности, Λ_0 – множество функций $\omega \in \Lambda$ таких, что $\lim_{\delta\to 0+} \delta/\omega(\delta) = 0$.

$AC(\overline{D})$ – множество функций f аналитических внутри D и непрерывных в $\overline{D}$ с равномерной нормой и обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$. Тогда $AC(\omega,\overline{D})=\{f \in AC(\overline{D});\ \omega(f,\delta)=O(\omega(\delta))\}$, $AC^*(\omega,\overline{D})=\{f \in AC(\overline{D});\ \omega(f,\delta)=o(\omega(\delta))\}$, где $\omega(\delta)$ – заданная функция. $\mathfrak{M} = \{z_{k,n}\}$, $k=0,n$ – матрица узлов интерполирования $z_{k,n}$, принадлежащих Γ, причем такая, что при отображении $w_{k,n} = \varphi^{-1}(z_{k,n})$, где $\varphi(z)$ – однолистное и конформное отображение внешности единичного круга на дополнение к D, узлы $z_{k,n}$ каждой n-ой строки переходят в корни n-ой степени из "-1".

$\{B_n^i(\mathfrak{M},f,z)\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,2)$ – последовательность полиномов Бернштейна ($i=1$ – полиномы третьего, $i=2$ – полиномы усредненного процесса Бернштейна), которые интерполируют функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,n}$ – n-ой строки матрицы $\mathfrak{M}$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА: Если для $\omega(\delta) \in \Lambda_0$ выполняется условие:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n > 0 \qquad (1)$$

тогда существует $f(z) \in AC(\omega,\overline{D})$ для которой $\{B_n^i(\mathfrak{M},f,z)\}_{n=1}^{\infty}$, $(i=1,2)$ расходится всюду на Γ: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |B_n^i(\mathfrak{M},f,z)-f(z)|>0$.

Если же

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=\infty \qquad (2)$$

то существует функция $f(z) \in AC^*(\omega,\overline{D})$ для которой $\{B_n^i(\mathfrak{M},f,z)\}_{n=1}^{\infty}$, $(i=1,2)$ неограниченно расходится всюду на Γ:
$\overline{\lim_{n\to\infty}} |B_n^i(\mathfrak{M},f,z)-f(z)|=\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Как известно, если (1) или (2) не выполняется, то для любых $f(z) \in AC(\omega,\overline{D})$ или $f(z) \in AC^*(\omega,\overline{D})$ соответственно имеет место равномерная сходимость на $\overline{D}$.

В.Я. Эйдерман

ОЦЕНКИ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ ВНЕ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Н. В. Говоровым получен следующий результат:

Теорема А [1, теоремы 1 и 5]. *Пусть функция $u(z)$ субгармонична в круге $B_1 = \{z : |z| < 1\}$, причем $\sup\limits_{|z|<1} u(z) = M$, $0 < M < \infty$, и $u(0) \geq 0$. Пусть, далее, $0 < r \leq 1$ и $1 < P < \infty$. Тогда найдется не более чем счетное множество кругов $B^k(z_k, r_k) = \{z : |z - z_k| < r_k\}$ таких, что*

$$\sum_k r_k \leq \begin{cases} r^P(1-r), & 0 < r < 1 - \frac{1}{P}, \\ \frac{1}{P}, & 1 - \frac{1}{P} \leq r \leq 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$u(z) \geq -APM, \qquad z \in B_r \setminus \bigcup_k B^k, \tag{2}$$

где A – некоторая абсолютная положительная постоянная.

При $r = 1$ аналогичный результат был независимо получен А. Ф. Гришиным [2]. Теорема А является развитием теоремы Валирона-Бернштейна (см., например, [1, с.142]) об оценке модуля ограниченной аналитической функции.

Далее через A мы будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от размерности пространства. В [1] показано, что в теореме А можно положить $A = 5$ при $0 < r < 1 - 1/P$ и $A = 9$ при $r = 1$. В дальнейшем мы не ставим перед собой задачу об отыскании наименьших значений констант A, входящих в наши утверждения.

В случае $r = 1$ Л. С. Кудина распространила теорему А на δ-субгармонические функции (т.е. функции, представимые в виде разности двух субгармонических) в единичном шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Обозначим через $T_u(r)$ неванлинновскую характеристику δ-субгармонической функции u (определение приводится, например, в [3]). Хорошо известно, что функция $T_u(r)$ не убывает. Функции $u(x)$ с ограниченной характеристикой называются функциями ограниченного вида. В дальнейшем мы рассматриваем функции из этого класса. Положим $T_u(1) = \lim\limits_{r\to 1-} T_u(r)$.

Теорема В [3]. *Пусть $u(x)$ – δ-субгармоническая функция ограниченного вида в шаре B_1. Для любого $P > 1$ можно указать систему шаров $B^k(x_k, r_k)$ такую, что $\sum_k r_k^{m-1} < 1/P$ и*

$$u(x) < APT_u(1), \qquad x \in B_1 \setminus \bigcup_k B^k, \tag{3}$$

где положительная постоянная A зависит только от m.

Нетрудно показать, что оценка (3) улучшает неравенство (2) при $r = 1$. В то же время остается открытым вопрос о размерах исключительного множества в оценке функции $u(x)$ при $x \in B_r \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, $0 < r < 1$.

Мы рассматриваем более общую постановку задачи, оценивая вместо величины $\sum_k r_k^{m-1}$ сумму $\sum_k h(r_k/(1-|x_k|))$, где $h(t)$ – некоторая непрерывная и возрастающая при $t > 0$ функция, для которой $h(0) = 0$ и $\int_0 t^{1-m} dh(t) < \infty$. Чтобы избежать дополнительных определений, мы приведем частные случаи доказанных теорем.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$– δ-субгармоническая функция ограниченного вида в шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и пусть задано $\varepsilon \in (0,1]$. Тогда для каждого $P > P_0(\varepsilon, m)$ найдется система шаров $B^k(x_k, r_k)$, вне которых имеет место оценка (3) и при $r_P = 1 - (\varepsilon P)^{-1/(m-1)}$ справедливы неравенства*

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1-|x_k|}{r_k} < \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{r^\varepsilon P}, \quad 0 < r \leq r_P,\ m = 2, \tag{4}$$

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \left(\frac{r_k}{|x_k|}\right)^{m-2+\varepsilon} < \left(\frac{1}{\varepsilon P(1-r)}\right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-1}}, \quad 0 < r \leq r_P,\ m > 2, \tag{5}$$

$$\sum_{B^k \cap B_{r_P} = \emptyset} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad m \geq 2. \tag{6}$$

Можно показать, что из теоремы 1 выводится теорема A (за исключением оценок для A), причем оценка (4) является более точной, чем (1) при $0 < r < 1 - 1/P$. Если зафиксировать $r < 1$ и положить $\varepsilon = 1$, то с ростом P правая часть в (5) будет убывать как $P^{-\frac{m-1}{m-2}}$, т.е. быстрее, чем P^{-1}. Поэтому теорема 1 улучшает теорему B. С другой стороны, мы покажем, что во всем шаре B_1 оценка исключительного множества, полученная в теореме B, является точной.

Теорема 2. *Пусть задано $\varepsilon \in (0,1]$. Для каждого $P > P_0(m, \varepsilon)$ найдутся множество E и супергармоническая функция u такие, что $u(x) > aPT_u(1)$, $\forall x \notin E$, где $a = a(m) > 0$, и для любого покрытия множества E шарами $B^k(x_k, r_k)$ с $r_k < 1/10$ справедливы неравенства, обратные неравенствам (4) – (6).*

Таким образом, вне исключительного множества, размеры которого ограничены неравенствами (4) – (6), оценка (3) функции u является наилучшей. (Речь может идти лишь об уточнении постоянной A).

Библиографический список

1. *Говоров Н.В.* Об оценке снизу функции, субгармонической в круге // Теория функций, функц. анализ и их прил. (Харьков). 1968. Вып. 6. С. 130–150.
2. *Гришин А.Ф.* О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функц. анализ и их прил. (Харьков). 1968. Вып. 6. С. 3–29; 1968. Вып. 7. С. 59–84; 1969. Вып. 8. С. 126–135.
3. *Кудина Л.С.* Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре // Теория функций, функц. анализ и их прил. (Харьков). 1971. Вып. 14. С. 59–67.

Б.А. Юрко

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$Ly(x) \equiv \frac{1}{\rho} y'(x) - G(x,\rho) y(x) = 0, \quad 0 < x < T \le \infty \tag{1}$$

на конечном интервале ($T < \infty$) или на полуоси ($T = \infty$). Здесь $y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}$, матрица $G(x,\rho) = [g_{\gamma k}(x,\rho)]_{\gamma,k=\overline{1,n}}$ определена при $x \in (0,T)$, $|\rho| \ge \rho_0$ и при $|\rho| \to \infty$, $\arg\rho = const$ имеет асимптотику

$$G(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} G_j(x), \qquad G_j(x) = [g_{j\gamma k}(x)]_{\gamma,k=\overline{1,n}}$$

в следующем смысле

$$\lim_{\rho} \| (G(x,\rho) - \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{\rho^j} G_j(x)) \rho^s \|_{L(0,T)} = 0$$

при каждом фиксированном $s \ge 0$. Для простоты считаем, что G_0 – постоянная матрица и её собственные значения различны между собой и не равны нулю. При этом $G(x,\rho) - G_0 \in L(0,T)$, $G_j(x) \in L(0,T)$, $j \ge 1$.

Исследуется обратная задача восстановления коэффициентов дифференциальной системы (1) по так называемым функциям Вейля. К обратной задаче в такой постановке редуцируются многие важные задачи спектральной теории и её приложений. Выделяются классы функций Вейля обладающие свойством информативности при решении обратной задачи. Доказана теорема единственности решения обратной задачи, приводится алгоритм решения. При этом используется метод эталонных моделей, разработанный в [1].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Госкомвуза, Конкурсный центр фундаментального естествознания (проект 96-I.7-4).

Библиография

1. Юрко В.А. Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Диф. уравнения. 1989. Т.25. № 9. С.1540-1550.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов 8-й Саратовской зимней школы
30 января – 6 февраля 1996 года

Технический редактор Л.В.Агальцова
Корректоры Л.И.Зильбер, Е.Б.Крылова

Н/К

Подписано к печати 17.06.96. Формат 60х84 1/16.
Бумага типографская № 2. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 7,67 (8,25). Уч.-изд.л. 6,9. Тираж 300.
Заказ 85 С265

Издательство Саратовского университета. 410601, Саратов, Университетская, 42.
Типография издательства Саратовского университета. 410071, Саратов, Астраханская, 83.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА