

**Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации**

Российский фонд фундаментальных исследований

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Первая международная научно-практическая конференция

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ

Программа

3-5 декабря 1996

Санкт-Петербург

Russian Federation Ministry of General and Professional Education

Russian Foundation of Fundamental Investigation

Saint-Petersburg State Technical University

**The First International Scientific and Practical
Conference**

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

Program

3-5 December 1996

ST. PETERSBURG

В сборнике помещены тезисы докладов Первой Международной научно-практической конференции "Дифференциальные уравнения и их применения", проведенной Санкт-Петербургским государственным техническим университетом при поддержке министерства общего и профессионального образования Российской Федерации и Российского фонда фундаментальных исследований 3-5 декабря 1996 г.

В приведенных тезисах докладов отражены результаты работ ученых Российской Федерации, стран СНГ а также ряда зарубежных ученых в области качественной теории дифференциальных уравнений. Тезисы докладов охватывают широкий круг проблем теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Особое внимание уделено рассмотрению вопросов изучения динамических систем со сложным (хаотическим) поведением и разработке конструктивных компьютерно-ориентированных методов их анализа.

Считаем, что сборник будет полезен широкому кругу специалистов (в области механики, физики, радиотехники и т.д.) а также математикам, занимающимся теорией дифференциальных уравнений.

Тезисы публикуются в авторской редакции.

Редакционная коллегия: д.ф.м.н., профессор Г.С.Осиенко (ответственный редактор), к.ф.м.н А.А.Моисеев (ответственный секретарь), к.ф.м.н Е.К.Ершов.

**О спектре одного класса операторов
Штурма-Лиувилля с обобщенным потенциалом**

Махачкала, Дагестанский университет

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата.

Пусть ε - произвольное вещественное число, определим функцию

$$Q(x) = \begin{cases} p(x), & x \leq 0 \\ q(x), & x > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Предполагается, что $p(x)$ - непрерывная функция, обращающаяся в тождественный нуль при $x \leq x_1$ ($x_1 < 0$), а $q(x)$ - непрерывная на полуоси функция, периодическая с периодом, равным единице.

Рассмотрим в $L_2(-\infty; \infty)$ множество функций

$$\mathcal{D}(H) = \{g(x); g(x) \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cap W_2^1(\mathbb{R}); g'(n+0) - g'(n-0) = \varepsilon g(n)\} \quad (1.2)$$

и на этом множестве определим оператор

$$Hf \equiv -f''(x) + Q(x)f, \quad f(x) \in \mathcal{D}(H)$$

Известно [1], что оператор H самосопряжен в $L_2(-\infty; \infty)$.

В физических работах [2] на эвристическом уровне строгости принято оператор H записывать формулой

$$Hf = -f''(x) + Q(x)f + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n)f(x) \quad (1.3)$$

В формуле (1.3) $\delta(x)$ - функция Дирака.

Цель настоящей работы - изучение природы спектра оператора H .

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение задачи Коши

$$-\varphi''(x, \lambda) + Q(x)\varphi(x) = \lambda \varphi(x, \lambda) \quad (|x| < \infty) \quad (1.4)$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1,$$

а через $\theta(x, \lambda)$ - решение задачи Коши

$$-\theta''(x, \lambda) + Q(x)\theta(x, \lambda) = \lambda \theta(x, \lambda) \quad (1.5)$$

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0.$$

$$\text{Введем функцию } F(\lambda) = \theta(1, \lambda) + \varphi'(1, \lambda) + \varepsilon \varphi(1, \lambda) \quad (1.6)$$

Обозначим через λ_j ($j = 0, 1, \dots$) нули функции $F(\lambda)$ -2, а через μ_j ($j = 0, 1, \dots$) - нули

функции $F(\lambda) + 2$. Тогда [1] числа λ_j и μ_j удовлетворяют неравенствам

$$-\infty < \lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots \mu_{2j} \leq \mu_{2j+1} < \lambda_{2j+1} \leq \lambda_{2j+2} < \dots$$

Числа λ_j и μ_j разбивают вещественную ось на отрезки (интервалы) A_j и T_j ,

($j = 0, 1, 2, \dots$)

Введем обозначения $A = \bigcup_j A_j$, $T = \bigcup_j T_j$ (1.7)

Определим функцию $m_2(\lambda, \lambda \in \Lambda, \lambda \in \sigma_1)$

$$m_2(\lambda) = \frac{\varepsilon \varphi(\varepsilon, \lambda) + \varphi'(\varepsilon, \lambda) - \Theta(\varepsilon, \lambda) - \sqrt{\varepsilon^2 \lambda} - 4}{2 \varphi(\varepsilon, \lambda)} \quad (1.8)$$

σ_1 - нули целой аналитической функции $\varphi(1, \lambda)$

Положим $\varphi(x, \lambda) = A_1 \quad \Theta(x, \lambda) = B_1$
 $\varphi'(x, \lambda) = A_2 \quad \Theta'(x, \lambda) = B_2$

и введем обозначения

$$V(\lambda) = A_2 \cos \sqrt{\lambda} x_1 + A_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_1, \quad \mu(\lambda) = A_1 \cos \sqrt{\lambda} x_1 - A_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.9)$$

$$V_1(\lambda) = B_2 \cos \sqrt{\lambda} x_1 + B_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_1, \quad \mu_1(\lambda) = B_1 \cos \sqrt{\lambda} x_1 - B_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda}}$$

Определим функцию $m_1(\lambda)$ равенством

$$m_1(\lambda) = - \frac{V_1(\lambda) + i \sqrt{\lambda} \mu_1(\lambda)}{V(\lambda) + i \sqrt{\lambda} \mu(\lambda)} \quad (1.10)$$

Сформулируем основные результаты работы

Теорема 1.1 Собственные числа оператора H совпадают с нулями функции $W(\lambda) = m_1(\lambda) - m_2(\lambda)$, принадлежащими множеству $(-\infty, 0) \cup T$. Функции $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ определены формулами (1.8) и (1.10), а множество T - равенством (1.7).

Теорема 1.2 Непрерывная часть спектра оператора H состоит из абсолютно непрерывной компоненты, совпадающей с множеством $S_\lambda = (-\infty, 0) \cup \Lambda \cup [0, \infty)$, причем на множестве $(0, \infty) \cup \Lambda$ (множество Λ определено равенством (1.9)) кратность спектра равна двум, а на множествах $(0, \infty) \cup T$ и $(-\infty, 0) \cup \Lambda$ - единице.

Литература

1. Гестемн М.М., Сташкевич П.В. Спектральная теория некоторых неклассических дифференциальных операторов. Учебное пособие. Дагестанский университет, г. Махачкала, 1985 г.
2. Альбверно С., Гестемн Ф. и др. Решаемые модели в квантовой механике. М., изд-во "Мир", 1991 г.

СИММЕТРИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АБСОЛЮТНО НЕУСТОЙЧИВЫХ СРЕД

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Рассмотрим систему уравнений, описывающую эволюцию возмущений в абсолютно неустойчивых средах [1]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - \lambda(\rho^{1/\lambda})_x &= 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1). \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) описывает в приближении длинных волн обширный класс абсолютно неустойчивых сред (опрокинутая мелкая вода, перетяжки на плазменном пинче и др.). Уравнения (1) получены из конкретных моделей абсолютно неустойчивых сред при использовании длинноволнового приближения.

Преобразованием гоода рафа система уравнений (1) сводится к виду

$$\begin{aligned} x_t &= 2\lambda z t_x + r t_x, \\ x_t &= -r t_x + 2\lambda z t_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r = \rho^{1/(2\lambda)}$, $z = u/(2\lambda)$.

Условие совместности системы (2) является уравнение

$$t_{xx} + (2\lambda + 1)r^{-1}t_x + t_{zz} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой комплексный аналог уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Можно показать, используя алгоритм нахождения симметрий [2], что система уравнений (2) допускает следующий базис операторов симметрий (здесь и в дальнейшем рассматривается конечномерная часть базиса операторов симметрий)

$$\begin{aligned} X_1 &= r \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial z} + 2\lambda z \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 &= 2r z \frac{\partial}{\partial t} + (z^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} + [x - 2(2\lambda + 1)t] \frac{\partial}{\partial t} - (2\lambda + 1)(2\lambda z^2 + r^2)t \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выпишем симметрии уравнения (3)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= 2rz \frac{\partial}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda + 1)z t \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение

$$t_{rr} + (2\lambda + 1)r^{-1}t_r + t_{zz} = \delta(r-1)\delta(z). \quad (6)$$

Можно показать, что периодические (с периодом равным 1) по пространственной переменной решения системы (2) удовлетворяют уравнению (6).

Используя алгоритм нахождения симметрий уравнений с δ -функцией в правой части, предложенный в [3, 4], можно по симметриям (5) уравнения (3) найти симметрии уравнения (6). Уравнение (6) допускает только один оператор симметрии

$$Y = 2rz \frac{\partial}{\partial r} + (z^2 - r^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda + 1)z t \frac{\partial}{\partial t}. \quad (7)$$

Можно построить фундаментальные инвариантные решения, соответствующие оператору симметрии (7). Они имеют следующий вид

$$t = r^\sigma \left[c \cdot P_\sigma(\xi) - \frac{1}{2\pi} Q_\sigma(\xi) \right],$$

где $\xi = (r^2 + z^2 + 1)/(2r)$; $\sigma = -(2\lambda + 1)/2$; $P_\sigma(\xi)$, $Q_\sigma(\xi)$ – функции Лежандра первого и второго рода [5]; c – произвольная постоянная.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01742) и Миннауки РФ.

Литература

1. Жданов В.К., Трубинов Б.А. Квазигазовые среды. М.: Наука, 1991. 250 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Аксенов А.В. // Усики математических наук. 1991. Т. 49, вып. 4. С. 143-144.
4. Аксенов А.В. // Доклады АН. 1995. Т. 342, N. 2. С. 151-153.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

О СИММЕТРИЯХ И ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕКОТОРЫМ АПРИОРНЫМ УСЛОВИЯМ

Санкт-Петербург, Российский гос.педагогический университет

В настоящее время уже известно, что для обыкновенных дифференциальных уравнений максимальная алгебра симметрий задается операторами Ли-Беклунда, коэффициенты которых выражаются через произвольные функции от n независимых первых интегралов заданного дифференциального уравнения. Однако достаточно трудно вычленить те симметрии и первые интегралы, которые необходимы для решения конкретной задачи, и тем более "угадать", каким образом исключить возникающую иногда нелокальную переменную из соответствующего оператора.

На примере уравнения

$$y^{(n)} = A$$

рассматривается процедура поиска специальных первых интегралов, обладающих заданными свойствами или удовлетворяющих некоторым априорным условиям, которая позволяет

- 1) заблаговременно избавляться от нелокальных переменных в операторах при понижении порядка уравнения;
- 2) приводить базис первых интегралов (симметрий) к более простому виду;
- 3) доказывать максимальность систем первых интегралов и операторов с априорными свойствами.

БИФУРКАЦИЯ ХОПФА В ОКРЕСТНОСТИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОДНОГО ЭНДОМОРФИЗМА ПЛОСКОСТИ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается отображение $T_{\lambda, \mu}$ расширенной плоскости $\tilde{R}^2 = R^2 \cup \infty$ на себя, определяемое равенствами

$$T : \begin{cases} x_1 = (1 - \lambda)x + \lambda f_\mu(y), \\ y_1 = (1 - \lambda)y + \lambda f_\mu(x), \end{cases} \quad (1)$$

где λ, μ — вещественные параметры, а скалярное отображение f_μ — так называемая логистическая функция — имеет вид

$$f(t) = f_\mu(t) = \mu t(1 - t). \quad (2)$$

Топология на \tilde{R}^2 предполагается индуцированной топологией сферы Римана, то есть окрестностями точки ∞ служат дополнения ко всевозможным компактам. При этом точка ∞ считается неподвижной, что, как нетрудно проверить, обеспечивает непрерывность T .

Отображение $T_{\lambda, \mu}$ в наиболее характерной ситуации, при $\mu = 4$, то есть когда динамика логистического отображения является полной, изучалась в работе [1], где было получено качественное описание предельного поведения траекторий в зависимости от параметра λ из $[0, 1]$.

При этом в качестве фазового пространства рассматривался квадрат $D = I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$, являющийся при этих предположениях инвариантным множеством ($T(D) \subset D$).

В работе [2] были описаны простейшие свойства и исследованы особые точки обобщенного отображения Гардини $T_{\lambda, \mu}$, а также построены диаграммы локальных бифуркаций коразмерности 1 на плоскости параметров λ, μ .

В продолжение изучения отображения $T_{\lambda,\mu}$ подробно исследуется поведение системы в окрестности внедиагональных неподвижных точек. При значениях параметров, когда эти точки являются фокусами, с помощью численных методов определены интервалы параметра λ , в которых существует предельный цикл, соответствующий бифуркации Хопфа. Построены подробные диаграммы. С увеличением значения μ величина интервала по λ уменьшается.

Исследовано поведение системы на диагонали. При условии $x = y$ отображение может быть записано в виде

$$x_1 = xM(1 - x), \quad (3)$$

где $M = 1 - \lambda + \lambda\mu$. Известно [3], что значения параметра M , при которых возникает хаотический режим, лежат в интервале $[3.537, 3.7]$. Это позволяет оценить интервалы значений параметров μ, λ , при которых в окрестности диагонали отображения $T_{\lambda,\mu}$ возникают хаотические режимы.

Литература

1. *L. Gardini, R. Abraham, R. J. Record, D. Fournier-Prunaret.* A double logistic map // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, p. 145–176.
2. *Ампилова Н. Б., Осипов А. В.* Локальные бифуркации для полного отображения Гардини // *Деп. ВИНТИ,* 1996. 14.06.96, N 1969–В96.
3. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. — Киев. Наукова думка, 1989. 216 с.

**LYAPUNOV DIRECT METHOD AND CONTROL
PROBLEM
FOR MECHANICAL SYSTEM**

Moscow, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

We consider a controlled nonlinear mechanical system governed by Lagrange equations and subject to bounded uncertain disturbances. Denote by $q \in \mathbb{R}^n$ the vector of generalized coordinates, by $p = \dot{q}$ the vector of generalized velocities, and by $T = \frac{1}{2} \langle A(q)p, p \rangle$ the kinetic energy. Here $A(q) \in C^1$ is a positive definite symmetric matrix, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ means scalar product. The Lagrange equations for the system under consideration have the form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial T}{\partial q} = S + u. \quad (1)$$

Suppose that the matrix $A(q)$ is unknown, its eigenvalues belong to $[m, M]$, and the partial derivatives of the matrix $A(q)$ are bounded uniformly in q , that is

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : m z^2 \leq \langle A(q)z, z \rangle \leq M z^2, \quad 0 < m < M,$$

$$\left| \frac{\partial A(q)}{\partial q_i} \right| \leq D, \quad D > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

The external forces S are unknown and bounded. We impose the following constraints on the n -vector of control forces u

$$|u| \leq U, \quad U > 0. \quad (2)$$

P r o b l e m . Given constants M, m, D, U , and an initial state (q_*, p_*) drive system (1) to the prescribed terminal position $(\bar{q}, 0)$ in a finite time.

Without loss of generality we can assume $\bar{q} = 0$. We find the desired control in the form of linear feedback with piecewise constant gains

$$u = -a_k p - b_k q, \quad a_k, b_k > 0. \quad (3)$$

It is well known that if the feedback factors a and b are positive constants and $S \equiv 0$, then the trivial solution of system (1) is asymptotically stable, i.e. the system attains the terminal state $(0, 0)$ in infinite time.

We suggest the algorithm for varying the gains so as to bring the system to the state $(0, 0)$ in a finite time if the disturbances S satisfy the conditions $|S| \leq \frac{\sqrt{m} U}{32} \sqrt{5M}$. The numbers a_k and b_k tend to infinity as $k \rightarrow \infty$, nevertheless, the control (3) satisfies the imposed constraint (2). The control algorithm is justified with the Lyapunov direct method.

This research is supported by the Russian State Committee on High Education (Grant N 95-0-1.8-62) and RFBR (Grant N 93-01-01137).

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ КВАЗИКВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

С-Петербургский государственный университет,
С-Петербургский государственный технический университет

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + by + ax^2 + y^2 - cy, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ – параметры, $c \geq 0$, возникающая в проблеме принудительной синхронизации периодических движений. Изучается вопрос о существовании предельных циклов.

1. Система (1_0) : $b = c = 0$. Ее особые точки: $O = (0, 0)$ – центр и, если $a \neq 0$,

$A = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$ – седло с сепаратрисами

$$y^2 = \frac{a+1}{2} e^{2\left(x+\frac{1}{a}\right)} - \left[ax^2 + (a-1)x + \frac{a-1}{2} \right]. \quad (2)$$

Область центра $O \in \Omega_a^0$ ограничена при $a < -1$ ($a > 0$) петлей s_a^0 правых (левых) сепаратрис (2) седла A , при $a = -1$ – полупрямыми $y = \pm(x+1)$, $x \geq -1$, при $-1 < a < 0$ – правой ветвью гиперболы $ax^2 + y^2 - (1-a)x - \frac{1-a}{2} = 0$, при $a = 0$ – параболой $y^2 = x + \frac{1}{2}$.

Пусть $r_a^0 = \max_{x^2} r$, $\forall a \leq a_0 \approx -1,68$ и $\forall a > 0$ $r_a^0 = \frac{1}{|a|}$, $\forall a \in (a_0, -1)$ $r_a^0 = |OB| > \frac{1}{|a|}$,

$B = (x_B, \sqrt{-ax_B}) \in s_a^0$; $r_a^0 \rightarrow +\infty$ при $a \rightarrow -1$. Система (1_0) не имеет предельных циклов.

2. Система (1): $|b| + c > 0$. Для системы (1) O – устойчивый (неустойчивый)

фокус или узел при $b < 0$ ($b > 0$), устойчивый фокус с фокусными величинами $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$ при $b = 0$, A – седло. Контактной кривой [1] систем (1) и (1₀) является окружность $\Gamma: r = \frac{b}{c}$. При $b < 0$ Γ – мнимая, при $b = 0$ – вырожденная, при $b > 0, c = 0$ – бесконечно удаленная. Из п.1 следует, что $\forall \forall a, b, c \in \partial\Omega_2^0$. Справедливы следующие утверждения.

А. Если $\Gamma \cap \Omega_a^0 = \emptyset$ или $\Gamma = \{O\}$, то система (1) не имеет предельных циклов. В частности, это имеет место 1) при $c = 0, b \neq 0$, 2) при $c > 0, b \leq 0$.

Б. Если $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, $b \geq r_a^0 c$, то условия утверждения А выполняются и, следовательно, система (1) не имеет предельных циклов.

В. Если $b > 0, c > 0$ и $\Gamma \in \overline{\Omega_a^0}$, то система (1) имеет устойчивый предельный цикл, и любой ее предельный цикл лежит в кольце, ограниченном вписанной в Γ и описанной вокруг Γ замкнутыми траекториями системы (1₀) (роль последней траектории может играть петля s_a^0).

Г. $\forall a \in \mathbb{R}$ и $\forall c > 0 \exists b_0 \in (0, +\infty] : \forall b \in (0, b_0)$ система (1) имеет устойчивый предельный цикл. При $a = 0 \forall c \geq 1 b_0 = +\infty$.

Д. Если $b > 0, c > 0$ и $\Gamma \cap \Omega_a^0 \neq \emptyset$, то любой предельный цикл системы (1) имеет точки как внутри, так и вне Γ .

Е. Предельный цикл системы (1) может окружать особую точку типа узел. Это имеет место, например, при $a = 0, b \geq 2, c \geq 1$. (Как известно, для квадратичной системы это невозможно).

Некоторые признаки наличия и отсутствия у системы (1) предельных циклов формулируются (не без ошибок) в [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем. М., 1966.
2. Ясавиев Ф.З. Волжский мат. сб., 1969, вып. 7, стр. 225 - 229.
3. Ясавиев Ф.З. Волжский мат. сб., 1971, вып. 12, стр. 145 - 151.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД И КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ В
ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Воронеж, Воронежский государственный университет

В работе [1] впервые была предложена математически строго разработанная вариационная версия локальной редуцирующей процедуры Ляпунова-Шмидта. Позже появились глобальные варианты этой версии и впоследствии, в рамках общей теории конечномерных редукций для гладких экстремальных задачах на банаховых многообразиях [2], произошло их соединение с глобальной редуцирующей схемой Морса-Ботта из вариационной теории геодезических. Историческим предшественником конечномерно редуцирующих схем была локальная схема понижения размерности в конечномерных экстремальных задачах, созданная А.Пуанкаре [3]. Конечномерные редукции позволяют, с одной стороны, осуществлять построение и развитие теории фредгольмовых особенностей гладких функционалов, а с другой стороны они дают эффективное средство для изучения конкретных систем с бесконечным числом степеней свободы (через анализ конечномерных систем). Такое сведение позволяет, в частности, разрабатывать алгоритмы визуализации, посредством которых можно выводить на принтер или экран монитора графические образы, дающие наглядную информацию о существовании и бифуркации экстремалей, об индексах Морса бифурцирующих экстремалей и о метаморфозах поверхностей уровней.

Доклад посвящен описанию результатов, полученных при изучении существования и сравнения нелокальных конечномерных редукций в некоторых периодических краевых задачах из теории нелинейных колебаний (в пределах действия вариационного метода [4]). В частности, предполагается обсуждение теорем нелокальной продолжимости и гладкого сравнения ключевых функций, полученных по редуцирующим схемам Ляпунова-Шмидта и Морса-Ботта для уравнения Дуффинга и его обобщений [4]. Суть применяемого подхода состоит в функционально-операторной трактовке уравнения теории колебаний $f(x) = 0$ с нелинейным фредгольмовым оператором нулевого индекса (в банаховых

пространствах периодических функций) и последующих переходах – сначала к эквивалентной вариационной задаче $V(x) \rightarrow \inf$, а затем к анализу ключевой функции $W(\xi) = \inf_{x: p(x)=\xi} V(x)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))$ – ключевые параметры. Анализ ключевой функции дает точную информацию о количестве периодических колебаний, об их регулярности или кратности и о допустимых бифуркациях (при наличии дополнительных параметров). Ранее одним из авторов были изучены локальные бифуркации периодических решений уравнения Дуффинга на основе вычисления тейлоровских аппроксимаций ключевых функций [5].

Предусматривается также демонстрация бифуркационных явлений через соответствующие этим редукциям графические образы, полученные авторами (при малом количестве ключевых параметров) на основе пакета программ, изготовленного доцентом Воронежского университета С.М.Семеновым.

Литература

- [1] Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной задаче исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. 1978. Т. 240. N 3. С. 530-533.
- [2] Садронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 101-132.
- [3] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука. 1972. 1000 с.
- [4] Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: изд. ВГУ, 1961. 196 с.
- [5] Ашисимова И.П. Конечномерные редукции и визуализации в теории бифуркаций нелинейных колебаний. // Понградские чтения-VII. Тезисы докладов школы. Воронеж, ВГУ, 1996. С. 15.

Хаос и порядок в системах управления с ИШИМ

(Сыктывкар, СГУ)

Для систем управления с интегральным широтно-импульсным модулятором (ИШИМ) и постоянным внешним возмущением известны [1,2] достаточные условия существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний, которые слабо зависят от свойств модулятора ИШИМ, практически неэффективны для систем первого порядка и далеки от необходимых. Вызывает интерес и задача локальной неустойчивости периодических решений, т.е. исследование детерминированного хаоса.

Описание системы. Одномерная система управления с ИШИМ определяется уравнением вида

$$\frac{T}{\alpha} \frac{dU}{dt} + U = \varphi, \quad \sigma = \psi - U, \quad (1)$$

где $U(t)$ описывает состояние системы в момент t , $\alpha > 0$, $T > 0$, σ — сигнал на входе модулятора, ψ — постоянное внешнее воздействие на систему. Выход модулятора φ определяется как кусочно-постоянная функция вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & nT < t \leq nT + \nu_n, \\ \lambda_n, & nT + \nu_n < t \leq (n+1)T, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ν_n — первый положительный корень уравнения

$$\lambda_n y_n(\nu_n) = \Delta, \quad (\Delta > 0), \quad \text{где } \lambda_n = \text{sign } y_n(\nu_n), y_n(\tau) = \int_0^\tau \sigma(nT + t) dt, \quad (3)$$

если таковой имеется на $(0, T]$, и $\nu_n = T$ в противном случае.

Формулировка результата. Пусть m — заданное натуральное число. Исследуем mT — периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t + mT) = \sigma(t), \quad \varphi(t + mT) = \varphi(t) \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(t) \neq 0, \quad t \in [\nu, T]; \quad \varphi(t) = 0, \quad t \in [0, \nu] \cup [T, mT]; \quad (5)$$

Введем обозначения: $\tilde{\Delta} = \frac{\alpha \Delta}{T|\psi|}$, Π_Δ — решение уравнения $\Pi - \ln \Pi - 1 = \tilde{\Delta}$, причем $\Pi > 1$, $\xi(\kappa)$ — решение уравнения $\ln \xi - \kappa(1 - \frac{1}{\xi}) = \tilde{\Delta}$, причем $\xi > 1$, при фиксированном $\kappa > 0$. Последние два уравнения в указанных областях значений Π либо ξ имеют единственное решение, зависящее от $\tilde{\Delta}$.

Теорема 1 ($m = 1$). Для существования нетривиального T — периодического колебания необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$|\psi|T > \Delta, \quad (6)$$

$$|\psi| > \frac{e^\alpha - \xi(\Pi_\Delta)}{(e^\alpha - 1)\Pi_\Delta}.$$

Теорема 2 ($m \geq 2$). Для существования mT -периодического колебания необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6) и неравенства:

$$|\psi| < \frac{e^\alpha - \xi\left(\frac{\alpha - \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1}\right)}{(e^{m\alpha} - 1)\left(\frac{\alpha - \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1}\right)},$$

если $|\psi| > A$, то $|\psi| > \frac{e^\alpha - \xi(\Pi_\Delta e^{(1-m)\alpha})}{(e^{m\alpha} - 1)\Pi_\Delta e^{(1-m)\alpha}}$, иначе $|\psi| > \frac{e^\alpha - \xi\left(\frac{\alpha + \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1} e^{(2-m)\alpha}\right)}{(e^{m\alpha} - 1)\left(\frac{\alpha + \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1} e^{(2-m)\alpha}\right)}$.

где

$$A = \frac{e^\alpha - \xi\left(\frac{\alpha + \tilde{\Delta}}{e^\alpha - 1} e^{(2-m)\alpha}\right)}{(e^{m\alpha} - 1) e^{(2-m)\alpha}}.$$

Теперь выведем условия неустойчивости периодических колебаний. Введем обозначения:

$$a = 1 + \frac{1}{e^{m\alpha} - 1} + \frac{1}{2}|\psi|(e^{m\alpha} + 1), \quad b = \frac{e^{m\alpha} + 1}{e^{m\alpha} - 1} e^\alpha,$$

$$\Psi_0 = \frac{2}{e^{m\alpha} + 1} \left(\sqrt{b} - 1 - \frac{1}{e^{m\alpha} - 1} \right), \quad y_1 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad y_2 = a + \sqrt{a^2 - b},$$

$$G(y) = \ln y - \frac{e^\alpha - y}{|\psi|(e^{m\alpha} - 1)} \left(1 - \frac{1}{y} \right).$$

Теорема 3. Периодическое колебание вида (4)-(5) будет неустойчивым, если выполняется одно из соотношений:

$$|\psi| < \Psi_0, \quad \text{или} \quad G(y_1) > \tilde{\Delta}, \quad \text{или} \quad G(y_2) < \tilde{\Delta},$$

и будет устойчивым, если справедливы неравенства

$$|\psi| > \Psi_0, \quad G(y_1) < \tilde{\Delta} < G(y_2).$$

Литература

1. Гелиг А. Х., Чурилов А. Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — Санкт-Петербург, изд-во С.-ПбУ, 1993. 268с.
2. Ерихов М. М., Островский М. Я. Достаточные условия существования T -периодических режимов в системах с "линейной" интегральной широко-импульсной модуляцией. // Автоматика в телемеханика. — 1987. №9. С.26-30.

ФОРМАЛЬНАЯ И КОНСТРУКТИВНАЯ РЕДУЦИРУЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Башкирский государственный университет, Уфа

Многие прикладные задачи (прежде всего процессы химической и биологической кинетики) приводят к необходимости исследования обратной задачи в следующей постановке: по части решений $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, p}$ динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, k) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $z_1 = z_1(t)$, $z \in R^n$, $1 \leq p < n$ — распределить вектор коэффициентов k , $k \in R^m$. Правые части (1) представляют собой в нашем случае полиномы по z_1 .

Известно [1], что отсутствие информации по части динамических переменных в системе (1) часто приводит к неединственности решения обратной задачи.

Рассматриваемые в работе подходы анализа числа решений обратной задачи, заключаются в исключении неизмеряемых переменных из системы (1) и выделении подсистемы относительно только измеряемых переменных и их производных. Для этого в работе исследуется принципиальная возможность исключения (редукции к системе меньшей размерности) для широкого класса систем ОДУ и строятся конструктивные алгоритмы исключения, существенно использующие полиномиальность правых частей. Показана эквивалентность исходной и редуцированной систем. Преобразованные системы содержат искомые коэффициенты k_1 в виде некоторых функциональных комбинаций, число и вид которых определяют число решений обратной задачи. Параллельно решается проблема нахождения всех решений прямой задачи (т.е. наблюдаемость системы). Предлагается алгоритм численного решения обратной задачи в случае множественности решений.

Алгоритмы анализа легко реализуются в системах аналитических вычислений типа REDUCE.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивак С.И., Горский Б.Г. // Учен. физика. 1982. Т.1. № 2. С.287.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Москва, Московский национальный технологический университет им. К.Э.Циолковского

Рассматриваются дифференциальные уравнения

$$y^{(n)} + p(x)|y|^{k-1}y = f(x) \quad (1)$$

и

$$z^{(n)} + p(x)|z|^{k-1}z = 0, \quad (2)$$

где $n \geq 2$, $k > 1$, $p(x)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|p(x)| \leq M \quad (3)$$

для некоторого $M > 0$, $f(x)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| \leq Cx^{-\sigma}, \quad \sigma > n.$$

Теорема. Для любого стремящегося при $x \rightarrow \infty$ к нулю решения $u(x)$ уравнения (1) существует единственное решение $z(x)$ уравнения (2), для которого

$$|y(x) - z(x)| = O(x^{n-\sigma}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Аналогичные результаты были получены ранее [2],[3] для уравнений (1) и (2) в случае, когда $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| \leq Ce^{-\alpha x}, \quad C > 0, \quad \alpha > 0,$$

а $p(x)$ - непрерывная положительная функция, либо удовлетворяющая условию (3), либо имеющая вид (при четном n):

$$p(x) = (-1)^{n/2}x^\sigma, \quad \sigma > 3.$$

Литература

- [1] И.Т.Киярадзе, Т.А.Чавтурия. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений - М., Наука, 1990.
- [2] И.В.Астахова. Об асимптотическом поведении решений нелинейного неоднородного дифференциального уравнения. В сб. Тезисы докладов международного семинара "Дифференциальные уравнения и их приложения". - Самара, СГУ, 1995.
- [3] И.В.Астахова. Об асимптотической эквивалентности уравнений типа Эмдена - Фаулера с редуцированным коэффициентом. В сб. Тезисы докладов международного семинара "Дифференциальные уравнения и их приложения", Ч.1. - Самара, 1996, С.6.

КОНСТРУКТИВНЫЙ КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ И ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫМИ СИСТЕМАМИ

г.Уфа, Уфимский государственный авиационный технический университет

Работа посвящена прямым и обратным начально-краевым задачам для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (Фурье-Максвелла-Дюамель-Неймана), которые возникают при проектировании и оптимальном управлении в электротепловых, в частности, индукционных нагревательных системах. Разработан простой и эффективный в вычислительном отношении конструктивный АППРОКСИМАТИВНЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИОННОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ (АМИЛ), проблемно ориентированный на применение в задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами при наличии фазовых ограничений. АМИЛ преследует две цели: 1) получить аналитическую форму приближенного решения нелинейного уравнения (теплопроводности, термонапряжений), удобную для параметризации задачи оптимального управления; 2) ослабить трудности обеспечения сходимости известных итерационных методов, например метода Ньютона. АМИЛ практически не критичен к виду нелинейностей в модели (в коэффициентах уравнений, граничных условиях, фазовых ограничениях). Ограничения метода ясны из его идеи.

Пусть требуется решить операторное уравнение $Au = 0$ со сложным оператором A ; тогда оператор A представляется как возмущение простого оператора B (например линейного параболического): $A = B + R$, и решение исходного уравнения строится как предел решения уравнений $Bu^{(n)} = -Ru^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Основной особенностью такого итерационного метода является аппроксимация решения нелинейного уравнения собственными функциями простого линейного оператора B , а также аппроксимация нелинейных функций системой априорно выбираемых гладких функций. Оператор обращения B^{-1} должен обладать сглаживающими (интегральными по А.Н.Тихонову) свойствами по отношению к ошибкам приближения нелинейностей. Решение уравнения теплопроводности при измеримых управлениях рассматривается как обобщенное.

На базе АМИЛ построены декомпозиционные алгоритмы оптимального управления. Исследованы существование и единственность решения по АМИЛ, оценена скорость сходимости. Метод апробирован на широком круге прикладных задач с проверкой адекватности моделей на физических и вычислительных экспериментах.

СЛОЖНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЕ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

194021 Санкт-Петербург, ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН

Уравнения, описывающие динамику электронно-ядерной спиновой системы (ЭЯСС) при условиях оптической ориентации в полупроводниках, имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{h} - \mathbf{N} + \hat{a}\mathbf{s}, \quad (1)$$

где \mathbf{s} - средний спин ориентированных электронов, \mathbf{N} - полное поле, действующее на электронные спины, \mathbf{h} - внешнее магнитное поле, $\hat{a} = \{a_{ij}\}$ - 3×3 матрица, описывающая поляризацию ядер ориентированными электронами. Средний спин \mathbf{s} связан с полным магнитным полем \mathbf{N} соотношением $\mathbf{s} - \mathbf{k} = \mathbf{N} \times \mathbf{s}$, где \mathbf{k} - единичный вектор начальной ориентации спина.

Найдены значения параметров, при которых в системе (1) наблюдается устойчивая траектория $\mathbf{N}(t)$, не стремящаяся к стационарному состоянию, зависимость которой от времени носит ярко выраженный колебательный характер. Значения элементов матрицы при этом соответствуют случаю, когда решетка полупроводника имеет кубическую структуру. Анализ спектра мощности, автокорреляционной функции и корреляционной размерности указывает на то, что найденный аттрактор топологически эквивалентен тору.

Наряду с двухчастотным режимом в системе (1) был обнаружен странный аттрактор. Хаотический характер движения подтверждается Фурье-анализом полученного решения, исследованием корреляционной размерности, которая в этом случае оказалась дробной, а также анализом отображения Пуанкаре.

Хотелось бы подчеркнуть, что в предыдущих работах, посвященных исследованию динамики ЭЯСС, были обнаружены только аттракторы простой структуры (стационарные состояния и циклы). Обнаруженные динамические режимы, реализующиеся в системе, обладают теми же особенностями поведения, что и экспериментально исследованные особенности поведения поляризации ЭЯСС полупроводника. Это позволяет сделать заключение о возможности использования системы (1) для моделирования динамики ЭЯСС.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований по проекту 96-02-15941.

Расчет температурного поля потока жидкости,
обогреваемого с одной стороны

Красноярск, Красноярский государственный технический университет

Рассматривается задача о нахождении температурного поля в ламинарном потоке жидкости, движущейся в плоском канале. Обогрев производится конвективным теплом с одной стороны, а противоположная поверхность считается теплоизолированной. Подобные условия, например, имеет место, если в симметрично обогреваемой плоской трубе поставить по оси движения потока разделительную термически тонкую стенку. Постановка такой стенки вызывает изменение профиля скорости по сечению канала и это отражается на гидравлическом сопротивлении и внутреннем теплообмене. Теоретический и практический интерес представляет изучение влияния на тепловую сторону процесса размещение в канале такой диафрагмы. В более общей постановке может быть изучена задача исследования влияния диафрагмы в произвольном продольном сечении канала.

Математическая модель тепловой задачи в безразмерном виде формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = 4(X - X^2) \frac{\partial \theta}{\partial Y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad X = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -Bi \theta, \quad X = 1; \quad (3)$$

$$\theta = 1, \quad X = 0. \quad (4)$$

Решение системы (1-4) представляется в виде

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(X) \exp - K_n^2 \cdot Y.$$

Для отыскания ψ_n и K_n вводится новая переменная $z = 2X - 1$ и задача Рунге-Дуффинга записывается так

$$\psi'' + \varepsilon^2(1 - z^2) \psi = 0; \quad (5)$$

$$\psi = 0, \quad z = -1; \quad (6)$$

$$\psi' = -\frac{Bi}{2} \psi, \quad z = +1. \quad (7)$$

Частное решение дифференциального уравнения (5) представляется в виде

$$\Psi_1 = \exp\left(-\varepsilon \frac{z^2}{2}\right) \cdot F(\alpha, \gamma, \varepsilon z^2).$$

Для плоского канала $\alpha = \frac{1-\varepsilon}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$.

Зная одно нетривиальное частное решение Ψ_1 , уравнения (5), подстановкой

$$\Psi = \Psi_1 \int u dz$$

понижается порядок уравнения при сохранении его линейности и однородности. В результате этих преобразований общее решение (5) будет иметь вид

$$\Psi = C_1 \Psi_1 \left(\int \frac{dz}{\Psi_1^2} + C_2 \right) \quad (8)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из граничного условия (6) и равенства $\Psi = 1$ при $z = -1$. Окончательный вид зависимости (8) следующий

$$\Psi = -\Psi_1' \Big|_{z=-1} \cdot \Psi_1 \left(\int_{-1}^z \frac{dz}{\Psi_1^2} - \frac{1}{\Psi_1 \Psi_1'} \Big|_{z=-1} \right) \quad (9)$$

Для определения корней ε необходимо соотношение (9) подставить в граничные условия (7). После преобразования уравнение для определения Ψ_1 запишется так

$$(2\Psi_1' + B\varepsilon\Psi_1) \int_0^1 \frac{dz}{\Psi_1^2} + \frac{2}{\Psi_1} + \frac{B\varepsilon}{2\Psi_1'} = 0.$$

Более простое выражение получается при граничных условиях первого рода

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Psi_1^2} = -\frac{1}{2\Psi_1 \Psi_1'}.$$

$$\Psi_1 = \exp\left(-\varepsilon \frac{z^2}{2}\right) \left[1 + \frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{2} z^2 + \frac{(1-\varepsilon)(5-\varepsilon)\varepsilon^2}{12} \frac{z^4}{2!} + \frac{(1-\varepsilon)(5-\varepsilon)(9-\varepsilon)\dots(4m-3-\varepsilon)\varepsilon^m}{2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \cdot \frac{z^{2m}}{m!} + \dots \right].$$

Решение уравнений производится численным методом.

SOLUTIONS FOR THE CLOSURE PROBLEM IN TURBULENCE FROM EXTENDED LOCAL BALANCE APPROXIMATION

A.M.Balonishnikov

State Academy for Economy and Engineering, St.-Petersburg, Russia

The problem of description of fully-developed turbulent flow is one among the difficult problems in mathematical sciences. The starting point of investigations is usually Navier-Stokes equations.

The turbulent fields of velocity and pressure are expressed as sums of large-scale or averaged fields and small-scale fluctuations. Equation for these fields derived from Navier-Stokes equations are well-known. To obtain solutions for fluctuations as functions of large-scale fields is probably impossible in general case but it can be made after some simplified assumptions.

1. Gradients of large-scale velocity are assumed to be constants for the small-scale field dynamics.

2. Spectrum of energy dissipation $\epsilon(k)$ is supposed to be quasistationary, changing only over large-scale time.

Then it can be shown, that there are quasistationary solutions for small-scale components of velocity $u_i(k)$, $i = 1, 2, 3$. These solutions can be write down as following asymptotic series:

$$u_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni} \epsilon^{n/2}(k), i = 1, 2, 3,$$

where a_{ni} are dependent on wave-vector k and gradients of large-scale velocity fields, a_{ni} have explicit expressions; a_{ni} , $n > 1$, can be found recurrently. Previous our attempt to build up large-scale equation was pure phenomenological one [1]. But new approach gives us more systematic way in that direction.

References

- [1] A.M.Balonishnikov, V.E.Khartsiev *Dissipation model and nonlinear ill-posed problems in the theory of fully-developed turbulence*, in "Nonlinear world. Proc. of the IV International workshop on nonlinear and turbulent processes in physics". Ed. A.G.Sitenko, V.E.Zakharov, V.M.Che-rnousenko, Kiev, 1989, vol.2, pp. 346-349.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СПИНОВЫХ И ФОТОННЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Стохастические методы возбуждения используются в спектроскопии ядерного магнитного резонанса и в оптической спектроскопии, а также в работе спиновых и фотонных процессоров, предназначенных для обработки радио- и оптических сигналов [1].

Удобной моделью шума, позволяющей анализировать нелинейные эффекты в объектах таких исследований, является белый гауссовский шум. В данной работе анализируются нелинейные свойства неоднородно уширенных спиновых и фотонных систем, возбуждаемых финитными выборками полосового белого гауссовского шума.

Уравнение движения вектора состояния неоднородно уширенной двухуровневой системы в собственной системе координат изохроматы с расстройкой частоты Ω относительно центра линии поглощения может быть записано в виде [2]

$$dY / dt = s(t) Q_1 Y + s^*(t) Q_2 Y, \quad (1)$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$s(t) = i R(t) \exp [-i \Omega (t-t_0)],$$

$R(t)$ - комплексный полосовой белый гауссовский шум длительностью τ , $t_0 = -\tau/2$ - начальный момент времени, для которого задан вектор начальных условий $Y(t_0)$. Вектор состояния Y может представлять собой магнитный либо псевдоэлектрический дипольный момент изохроматы.

Среднее значение шума $\langle R(t) \rangle = 0$, а его корреляционная функция аппроксимирована выражением $\langle R(t_1)R^*(t_2) \rangle = N_0 \delta(t_1 - t_2)$, где N_0 - спектральная плотность мощности шума.

Анализ нелинейных свойств спиновых и фотонных систем проводится путем исследования кросс-корреляционной функции отклика и стохастического возбуждения $\langle s^*(u)Y(t) \rangle$ при $|u| < \tau/2$ и $t > \tau/2$. Для нахождения этой функции решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$Y(t) = \exp \left[Q_1 \int_{t_0}^t s(t') dt' \right] Y(t_0) + \int_{t_0}^t \exp \left[Q_1 \int_{t_0}^t s(t') dt' \right] s^*(\xi) Q_2 Y(\xi) d\xi. \quad (2)$$

В результате дальнейших преобразований, связанных с умножением уравнения (2) на $s^*(u)$ и усреднением результата, оказывается, что нелинейные свойства системы описываются функцией

$$K(N_0, \alpha) = N_0 \exp(-N_0 \alpha / 4), \quad \alpha = u + 3\tau/2.$$

Эта зависимость при $N_0 \alpha \ll 4$ носит линейный характер. По мере роста N_0 она достигает максимума $K_{\max} = 4(\alpha)^{-1}$ при $N_0 = 4/\alpha$, после чего уменьшается, стремясь к нулю. Кроме того, поведение функции зависит от длительности импульса τ и от положения отсчета $s^*(u)$ шума на оси времени.

Разработанный метод исследований нелинейных свойств спиновых и фотонных двухуровневых систем позволяет определять кросс-корреляционные функции более высокого порядка, что дает возможность анализировать эффекты типа спинового и фотонного эха.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (конкурс грантов 1995 г. по исследованиям в области электроники и радиотехники, проект 5-32).

Литература

1. Эртел, Ф., Боденхаузен Дж., Бокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М.: Мир. 1990
2. Барудин С.А. // ФТТ. 1995. Т. 37. № 11. С. 3497-3504.

БИФУРКАЦИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА КОРАЗМЕРНОСТИ ЕДИНИЦА

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Производятся конструктивное построение классов систем дифференциальных уравнений, в том числе полиномиальных, в которых при всех всех достаточно малых положительных значениях параметра происходит бифуркация инвариантного тора максимальной размерности. Для формулировки результатов введем следующие обозначения.

Пусть ε — малый положительный параметр, d — натуральное число, $0 \leq n \leq d$; $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)})$, $x^{(n)} \cdot y^{(n)} = (x_1^{(n)} y_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)} y_{2^n}^{(n)})$.

Кроме того, $\tilde{y}^{(n)} = (y^{(n)}, \bar{y}^{(n)})$, а черта — знак комплексного сопряжения. Запись аргумента функции в виде, например, $\sqrt{\varepsilon}_{\{m\}}^{(k)}$ означает, что функция имеет по $\sqrt{\varepsilon}$ порядок не ниже, чем $m + 1$, и не выше, чем k .

Для $n = 0, \dots, d$ введем три числовые последовательности: $k_n = 3^n$, $m_n = (3^n - 1)/2$, $\theta_n = 3^{n+1}(3^{d-n} - 1)/2$ и выберем два набора векторов: $c^{(0)}, \dots, c^{(d)}$ с положительными компонентами и $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(d)}$ с ненулевыми вещественными компонентами, причем $\lambda^{(n)}$ удовлетворяют конечному числу условий несоизмеримости: $(\lambda^{(n)}, p^{(n)}) \neq 0$ при $0 < |p^{(n)}| \leq k_{n+1} \cdot n$, где $p^{(1)}, \dots, p^{(d)}$ — произвольные целочисленные векторы.

Рассмотрим 2^{d+1} -мерную вещественную систему с малым положительным параметром ε

$$\dot{y}^{(d)} = y^{(d)} \cdot (i\lambda^{(d)} + S^{(d)}(y^{(d)} \cdot \bar{y}^{(d)}, \varepsilon)) + Y^{(d)}(\tilde{y}^{(d)}, \sqrt{\varepsilon}), \quad (1)$$

в которой остались не выписанными еще 2^d уравнений, являющихся комплексно сопряженными к (1); $S^{(d)} = \sum_{\nu=0}^{m_d} Q^{k_{d,\nu}}(y^{(d)} \cdot \bar{y}^{(d)}, \varepsilon) \varepsilon^\nu$, причем $Q^{k_{d,\nu}}$ — однородные вещественные полиномы степени k_d своих аргументов; $Y^{(d)} = Y^{(d,1)}(\tilde{y}_{\{k_{d+1}\}}^{(d)}; \sqrt{\varepsilon}_{\{k_{d+1}\}}) + Y^{(d,2)}(\tilde{y}^{(d)}, \sqrt{\varepsilon}_{\{k_{d+1}\}})$ — произвольные аналитические в окрестности нуля функции указанного вида.

Т е о р е м а. Предлагается конструктивный процесс построения однородных полиномов $Q^{k_{d,\nu}}$ как функций от векторов $c^{(0)}, \dots, c^{(d)}$ и $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(d)}$, при которых в произвольной 2^{d+1} -мерной вещественной системе (1) при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε происходит бифуркация рождения инвариантного тора коразмерности единица с $2^{d+1} - 1$ частотами $\varepsilon^{\theta_0} \lambda^{(0)}, \dots, \varepsilon^{\theta_{d-1}} \lambda^{(d-1)}, \lambda^{(d)}$.

С л е д с т в и е. При каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ полиномиальная 2^{d+1} -мерная система $\dot{y}^{(d)} = y^{(d)} \cdot (i\lambda^{(d)} + S^{(d)}(y^{(d)} \cdot \bar{y}^{(d)}, \varepsilon))$ имеет инвариантный тор максимальной размерности $2^{d+1} - 1$.

Конструктивный метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных в систему через условия сопряжения

САРАТОВ. СГТУ.

Анализ термоупругого поведения геометрически нерегулярных оболочек (ГНО), обширный класс которых образуют композиции из оболочек, пластин и стержней, методом суперпозиции одинарных тригонометрических рядов и многочленов сводится к интегрированию обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений

$$L_i^k [\varphi_i(x)] = f_i(x) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$$

связанных в систему (ДС) через условия

$$\varphi_i^{(j-1)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(j-1)}(x_i) + a_i^{j-1} \quad (j=1, 2, \dots, k),$$

где x_i — внутренние точки замкнутого интервала $[x_0, x_{n+1}]$ на границах которого заданы:

$$\varphi_1^{(\eta-1)}(x_0) = b_1^{\eta-1}, \quad \varphi_{n+1}^{(\eta-1)}(x_{n+1}) = b_{n+1}^{\eta-1} \quad (\eta=1, 2, \dots, \frac{k}{2} + 1).$$

Здесь L_i^k — дифференциальные операторы порядка k ; a_i^{j-1} , $b_1^{\eta-1}$, $b_{n+1}^{\eta-1}$ — известные постоянные; $f_i(x)$ — известные функции класса $C^\infty[x_0, x_{n+1}]$. Определение постоянных интегрирования таких ДС связано с решением линейной неоднородной алгебраической системы (АС), число уравнений которой $k(n+1)$ зависит от числа элементов образующих ГНО. Это обстоятельство существенно влияет на точность количественных результатов и проблема разработки подходящих аналитических методов, устраняющих зависимость числа уравнений АС от количества элементов составляющих ГНО возникла в начале 50-х годов в связи с расчетами лопаток паровых турбин и ребристых оболочек [1, 2].

Последующее развитие вычислительной техники приостановило исследование в этом направлении. Проведенный нами анализ, численного материала накопленного по результатам решений таких ДС в теории ребристых оболочек, выявил закономерность – количественный результат не зависит от искусственно вводимых при формировании решений произволов d_l^k ($l = \frac{k}{2}, \frac{k}{2}+1, \dots, k-1$; $l = 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$), позволяющих АС из k ($n+1$)-го уравнения заменить $(n+1)$ -й системой из k уравнений.

Обнаруженная закономерность явилась причиной дальнейшего анализа этой проблемы и её окончательного решения. Аналитически доказано, что d_l^k являются промежуточными и в интегралах ДС не присутствуют. Это позволило в компактной форме, удобной для инженерной практики, записать замкнутый интеграл рассмотренной двухточечной задачи в виде

$$\Phi_i^j(x) = A_1^j(x) + \sum_{j=2}^{\frac{k}{2}+1} \left(b_{n+1}^{j-2} - A_{n+1}^{(j-2)}(x_{n+1}) \right) \frac{\mathcal{D}_{n+1}^{j-2}(x)}{\mathcal{D}(x_{n+1})} .$$

позволяющем стандартным образом строить решения многочисленных краевых задач несвязанной термоупругости ГНО на базе дискретной модели. Алгоритмизация таких решений, с целью реализации на ЭВМ, не представляет трудностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин А.В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. Л.-М.: Госэнергоиздат, 1953. 624 с.
2. Рассудов В.М. Деформации полых оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. // Ученые записки СВУ. Саратов: 1956. Т.5. С.51-91 .

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КУБИЧЕСКОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Изучаются многочастотные колебания, определяемые малыми квазипериодическими возмущениями осциллятора $\ddot{x} + x^3 = 0$. Малость возмущений определяется как малым параметром, так и малостью рассматриваемой окрестности положения равновесия $x = 0$. Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + x^3 = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\varepsilon \geq 0$ – малый параметр, X – достаточно гладкая при малых x , \dot{x} , ε квазипериодическая функция t с базисными частотами, удовлетворяющими обычным для проблемы "малых знаменателей" условиям диофантового типа. Возмущение X представим в виде

$$X = a_1(t)x^4 + a_2(t)x^2\dot{x} + a_3(t)\dot{x}^2 + \varepsilon b_1(t)x^2 + \varepsilon b_2(t)\dot{x} + X^*,$$

где X^* имеет порядок малости не менее пятого, если переменной x приписывать первый порядок, а переменным \dot{x} , ε – второй. Существуют переменные "действие-угол" ρ , φ , в которых уравнение $\ddot{x} + x^3 = 0$ имеет вид системы $\dot{\rho} = 0$, $\dot{\varphi} = \rho$. Таким образом, характерной особенностью данной задачи является то, что частоты невозмущенных колебаний являются бесконечно малой величиной.

Т е о р е м а 1. Если средние значения a , b функций $a_2(t)$, $b_2(t)$ имеют разные знаки, то уравнение (1) имеет при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ инвариантную поверхность

$$\rho = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + H(\varphi, t, \sqrt{\varepsilon})), \quad (2)$$

где $\alpha^2 = -ab^{-1}$, H – квазипериодическая функция t , стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Механизм полустойчивой бифуркации тот же, что и в известной бифуркации Андронова-Хопфа. Условия Теоремы 1 не выполняются для консервативных и обратных уравнений (1). Для них справедлива

Т е о р е м а 2. Если X аналитична в рассматриваемой области и либо не зависит от \dot{x} , либо удовлетворяет условию $X(t, x, \dot{x}, \varepsilon) = X(-t, x, -\dot{x}, \varepsilon)$, то уравнение (1) имеет при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ инвариантную поверхность (2), где числа α образуют подмножество интервала $(1/2, 3/2)$, мера которого стремится к единице при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Настоящее исследование поддержано грантом РФФИ 96-01-00404.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА КРИСТОФФЕЛЯ-ШВАРЦА

Казань, Казанский государственный университет

Доказано, что критерием однозначности обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца

$$\int_{z_0}^z f'(\zeta) \cdot \frac{\{\zeta-c\} \{1-\bar{c}\zeta\}}{\{[\zeta-b]\} \{1-B\bar{c}\zeta\}} d\zeta, \quad f'(\zeta) = \prod_{j=1}^n \left(e^{i\varphi_j} \zeta - \zeta \right)^{-\beta_j} \quad (1)$$

($b, c \in E = \{z: |z| < 1\}$), $b \neq c$, $\varphi_j < \varphi_{j+1} < \dots < \varphi_j + 2\pi$, $\beta_j \in (-1, 1)$, $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$) является аналог уравнения Гахова ([1], с.326) для внешней обратной краевой

задачи в форме
$$\frac{f''(b)}{f'(b)} = -\frac{2B}{1-|b|^2} - \frac{1-2b\bar{c}+|c|^2}{[b-c][1-b\bar{c}]} \quad \text{или}$$

$$S(b) = \frac{1+|T(c;b)|^2}{T(c;b)}, \quad (2)$$

где $S(z) \equiv S\{z; \{\beta_j\}, \{\varphi_j\}\} = \{z - |z|^2\} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{e^{i\varphi_j} z - z}$ и $T(c;b) = \frac{c-b}{1-b\bar{c}}$.

Характеризованы геометрические эффекты, дополняющие результаты из [2] (с.167) по обратной задаче для интегралов Кристоффеля-Шварца в регулярном случае.

Анализ уравнения (2) приводит к достаточным условиям существования однозначного интеграла (1). В частности, справедлива **ТЕОРЕМА**. При заданных $\{\beta_j\}$ и b параметры $\{\varphi_j\}$ и c , для которых выполнено (2), существуют тогда и только тогда, когда

$$M = \kappa\{\beta_j\} = \max_{s, t} \sum_{j=s}^t \beta_j > 1.$$

При заданных $\{\beta_j\}$, $\{\varphi_j\}$ допустимые значения $b \in E$ определяются неравенством $|S(b)| > 2$. Для изучения качественного характера поверности $M = \left\{ z: |S(z)| \in E \times \mathbb{R}_+ \right\}$ достаточно построить ее с помощью ЭВМ.

Приводятся обобщения полученных результатов на случай интеграла Чистоты ([2], с.212).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Д.Гахов Краевые задачи. - 3-е изд. - М.:Наука, 1977. - 640с.
2. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат Методы теории функций комплексного переменного. - 5-е изд. - М.:Наука, 1987. - 688с.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ
ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЕТА

Казань, Казанский государственный технический университет

В докладе рассматриваются две задачи математического моделирования оптимальной неразрушающейся тепловой защиты поверхностей в гиперзвуковом вязком потоке воздуха, представляющие собой двумерные вариационные задачи типа Майера, к которым принадлежит широкий круг оптимальных задач аэрогазодинамики. Оптимально управляемые процессы описываются с помощью нелинейных систем уравнений в частных производных параболического типа, описывающих процессы теплообмена на проницаемых несущих поверхностях в гиперзвуковом потоке:

- 1) электропроводящего газа,
- 2) неравновесно диссоциирующего газа.

В качестве минимизируемого функционала рассматривается интегральный тепловой поток, поступающий от пограничного слоя к поверхности обтекаемого тела; удельный расход охладителя, подаваемого через пористый или перфорированный участок обтекаемого тела, выступает в качестве управления; мощность системы охлаждения, определяемая с помощью фильтрационного закона Дарси, принимается в качестве ограничения.

С помощью теоретико-группового подхода, основанного на совместном использовании инфинитезимального аппарата Ли-Овсянникова и теории инвариантных вариационных задач Нетер-Ибрагимова, найдены группы симметрии, допускаемые уравнениями пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа и электропроводящего газа при наличии магнитного поля, и построены законы сохранения на операторах этих групп. Показано, что на экстремальных вариационной задачи закон сохранения, построенный на бесконечномерной подгруппе, превращается в первый интеграл для сопряженной системы, позволяющий существенно упростить проблему поиска оптимального управления.

Приводятся результаты проведенных вычислительных экспериментов.

НОВЫЙ КАЧЕСТВЕННЫЙ ЭФФЕКТ В ТЕОРИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ
Санкт-Петербург, СПбГТУ

В докладе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение 1 порядка, уравнение Риккати, с почти периодическими "мерцающими" коэффициентами. Для такого уравнения можно построить явное решение в виде цепной дроби, неполные частные которой выражаются явно через интегралы от коэффициентов уравнения. Как известно, существуют почти периодические функции, которые не имеют точного среднего значения для числа своих нулей (А.Блинов 1990 г.). Используя положительную и отрицательную части такой почти периодической функции в качестве коэффициентов соответствующего мерцающего уравнения, показано, что соответствующее "мерцающее уравнение" с почти периодическими коэффициентами имеет равномерно ограниченные на всей оси решения, но среди этих решений нет ни одного почти периодического решения. Тем самым установлен новый качественный эффект - существуют нелинейные уравнения с почти периодическими коэффициентами, которые имеют ограниченные решения, но не имеют при этом почти периодических решений. Для линейных уравнений этот эффект не имеет места.

ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ФЕРМА

Полтава, кооперативный институт

Вначале докажем теорему: для наличия равенства

1/1) $X^n + Y^n = Z^n$, где $X, Y, Z, n \in \mathbb{N}$ и, очевидно,

$X < Z$, $Y < Z$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

1/2) $Z^{n+2} > X^{n+2} + Y^{n+2}$, где X, Y, Z, n те же натуральные

числа, что и в 1/1/.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место равенство 1/1/.

Умножая это равенство на натуральное число $Z^2 > \max(X^2, Y^2)$, получаем

$$Z^n \cdot Z^2 = X^n \cdot Z^2 + Y^n \cdot Z^2, \text{ т.е., } Z^{n+2} > X^{n+2} + Y^{n+2}$$

и неравенство 1/2/ имеет место.

Достаточность. Пусть выполняется неравенство 1/2/, которое влечет за собой неравенство

$$Z^n > X^n \cdot \left(\frac{X}{Z}\right)^2 + Y^n \cdot \left(\frac{Y}{Z}\right)^2,$$

что не противоречит равенству $Z^n = X^n + Y^n$ для всех $X, Y, Z, n \in \mathbb{N}$,

что и в 1/1/, 1/2/. Если же предположить, что неравенство 1/2/ не выполняется, а имеет место неравенство

$Z^{n+2} \leq X^{n+2} + Y^{n+2}$, откуда, разделяя его на натуральное число

$Z^2 > \max(X^2, Y^2)$ получаем неравенство

$$Z^n \leq X^n \left(\frac{X}{Z}\right)^2 + Y^n \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 < X^n + Y^n$$

и, следовательно $Z^n \neq X^n + Y^n$, т.е., равенство 1/1/ не имеет места. Теорема доказана.

Примечание 1. Равенство 1/1/ выполняется, очевидно, для специально по-

добранных натуральных чисел X, Y, Z и n , например, для $Z = 10$; $Y = 8$; $X = 6$ и $n = 2$. Подобно этому, выполнение достаточного условия /2/ лишь гарантирует возможность - наличие таких натуральных чисел X, Y, Z и n , при которых имеет место равенство /1/. Так, например, при $Z = 5$; $X = 3$; $Y = 4$ и $n \in \mathbb{N}$ неравенство /2/ имеет место и для $n = 2$ выполняется равенство /1/:

$5^2 = 4^2 + 3^2$; если же неравенство /2/ не выполняется, то не найдется ни одного набора таких натуральных чисел X, Y, Z и n , при котором имело бы место равенство /1/.

Доказанная теорема свидетельствует о том, что внешним дополнением наличия равенства /1/ является соотношение

$$/3/ \quad X^{n+2} + Y^{n+2} \neq Z^{n+2}, \text{ где } X, Y, Z \in \mathbb{N}$$

такие же числа, что и в /1/; $n \in \mathbb{N}$. В /3/ показатель $n+2 \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$; в /3/ не входят натуральные числа X, Y, Z ; X^2, Y^2, Z^2 , - для любого $n \in \mathbb{N}$, $a \neq a^{n+2}$; $a^2 \neq a^{n+2}$, где $a = X; Y; Z$. Гипотеза Ферма подтверждается: равенство /1/ не имеет места, если $X, Y, Z \in \mathbb{N}$ и $n > 2$ - целое число.

Примечание 2. Математическое доказательство гипотезы Ферма основано на том факте, что система уравнений-равенств

$$/4/ \quad \begin{cases} X^n + Y^n = Z^n, \\ X^{n+2} + Y^{n+2} = Z^{n+2}, \text{ где } X, Y, Z, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

является неразрешимой. Действительно, в /4/, очевидно, $X < Z$ и

$Y < Z$ и если имеет место равенство $X^n + Y^n = Z^n$, то

$Z^{n+2} > X^{n+2} + Y^{n+2}$; если же имеет место равенство

$X^{n+2} + Y^{n+2} = Z^{n+2}$, то легко видеть, что $Z^n < X^n + Y^n$.

THE STABILITY OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.V. Boikov

Penza State Technical University, Krasnaya Str., 40, Penza, 440017, Russia

(E-mail: cmit@diamond.stup.ac.ru)

Let B be a Banach space. Let $\Lambda(A) = \lim_{\lambda \rightarrow 10} \frac{\|I + \lambda A\| - 1}{\lambda}$ be a logarithmic norm of the linear operator $A \in [B, B]$; moreover, $\text{Re} A = A_R = (A + A^*)/2$. Let $R(\alpha, r) = \{z \in B : \|z - \alpha\| \leq r\}$ and $S(\alpha, r) = \{z \in B : \|z - \alpha\| = r\}$.

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LATENESS. Let us consider the system of equations

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(x_i(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Let $t_0 = 0$. We assume that functions $h_{ij}(t)$ are continuous for $t \geq t_0$. Also we assume that $0 \leq \max_{ij} |h_{ij}(t)| \leq H$ for $t_0 \leq t < \infty$. For $t \in [t_0 - H, t_0]$ functions $x_i(t)$ are equal to continuous functions $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Let $r_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in [t_0 - H, t_0]} |\phi_i(t)|$.

Starting point we write as

$$x^0(t_0 + 0) = (x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (2)$$

We will investigate the Cauchy task in the space R_n . We assume that:

- 1) $A_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, and 2) functions $A_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ are continuous for $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Let $x(t)$ be a decision of Cauchy task (1)-(2). Let $(s_1(r), \dots, s_n(r))$ be a point that lay on sphere $S(0, r)$. Let us fix an arbitrary matrix $C = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, $c_{ij} = \text{const}$ with vector (c_{i1}, \dots, c_{in}) , $i = 1, 2, \dots, n$ that lay into sphere $S(0, r)$. Let $B(C, r) = [b_{ij}(C, r)]_{i,j=1,\dots,n}$, where

$$b_{ij}(C, r) = (s_j(r))^{-1} (A_i(0, \dots, 0, c_{ij}, c_{i,j+1}, \dots, c_{in}) - A_i(0, \dots, 0, c_{i,j+1}, \dots, c_{in})) \text{ for } s_j(r) \neq 0;$$

$$b_{ij}(C, r) = 0 \text{ for } s_j(r) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Theorem 1. Let $C = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ be an arbitrary nonzero matrix with vectors $(c_{i1}, \dots, c_{in}) \in R(0, r)$. Assume that for any $r > r_0$ the inequality $\Lambda(B(C, r)) \leq 0$ ($\Lambda(B(C, r)) \leq -\alpha < 0$) occur. Then the solution of the equation (1) is stable (asymptotically stable).

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER ATTACHED TO DERIVATIVE. Let us consider a system of differential equations with a small parameter attached to derivative

$$\frac{dx}{dt} = Q(x, y, \mu), \quad \mu \frac{dy}{dt} = H(x, y, u, \mu), \quad (3)$$

where $x = (x_1, \dots, x_n)$; $y = (y_1, \dots, y_m)$; $u = (u_1, \dots, u_m)$; $u \in G$, μ ($\mu > 0$) — is a small parameter. Vector u is a vector of freedom parameters.

Let $Q(0, y, u, \mu) = 0$, $H(x, 0, u, \mu) = 0$. Let $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_m)$, $b_i, c_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, be vectors with arbitrary components.

Let $A(B) = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, where

$$a_{jj}(B) = (b_j)^{-1} (Q_j(0, \dots, 0, b_j, \dots, b_n, y, u, \mu) -$$

$$Q_j(0, \dots, 0, b_{j+1}, \dots, b_n, y, u, \mu)) \text{ for } b_j \neq 0;$$

$$a_{ij}(B) = 0 \text{ for } b_j = 0; i, j = 1, \dots, n.$$

Let $D(C) = [d_{ki}(C)]_{k,i=1,\dots,m}$, where

$$d_{ki}(C) = (c_i)^{-1} (H_k(x, 0, \dots, 0, c_i, \dots, c_m, u, \mu) -$$

$$H_k(x, 0, \dots, 0, c_{i+1}, \dots, c_m, u, \mu)) \text{ for } c_i \neq 0,$$

$$d_{ki}(C) = 0 \text{ for } c_i = 0; k, i = 1, \dots, m.$$

Assume that occur the following conditions:

A1. There have place the inequality $\Lambda(A(B)) < 0$ for any nonzero vector $B = (b_1, \dots, b_n)$ that belong to the sphere $R(0, r) \in R_n$ with a small radius r , for any vector $y = (y_1, \dots, y_m)$ from the sphere $R(0, r) \in R_m$, for any $u \in G$ and for $0 < \mu \leq \mu_0$.

A2. There have place the inequality $\Lambda(A(B)) < -\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$ with conditions that was formulated in A1.

A3. There have place the inequality $\Lambda(D(C)) < 0$ for any nonzero vector $C = (c_1, \dots, c_m)$, that belong to the sphere $R(0, r) \in R_m$ with a small radius r , for any vector $x \in R_n$, for any $u \in G$ and for $0 < \mu \leq \mu_0$.

A4. There have place the inequality $\Lambda(D(C)) < -\beta$, $\beta = \text{const} > 0$ with conditions that was formulated in A3.

Theorem 2. Let the conditions A1 and A2 occur. Then the domain G is the domain of stability of solutions of the system of equation (3).

Theorem 3. Let the conditions A3 and A4 occur. Then the solution of the system of equations (3) is asymptotically stability uniformly by μ , $0 < \mu \leq \mu_0$ and for any $u \in G$.

К проблеме построения осреднений для уравнения Рейнольдса

Ю. Я. Болдырев, С. В. Лупуляк, Ю. К. Шиндер

Санкт-Петербургский Государственный Технический университет

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных вопросам осреднения на периодических структурах в математической теории сплошных сред. Это, например, вопросы описания слоистых сред, композитных материалов и другие. По своей математической природе такого рода проблемы являются, по сути дела, разделом теории дифференциальных уравнений, в котором изучаются те или иные их свойства на периодических коэффициентах. Здесь особый интерес представляют уравнения с коэффициентами в главной части дифференциального оператора, описывающие многие важные случаи поведения сплошных сред. Систематическое изучение таких задач восходит к работам итальянских математиков Спаньола [1,2] и Де-Джорджэ [2,3], которые ввели понятие G -сходимости для дифференциальных операторов. Подходы, основанные на методах асимптотических разложений в России развивались в работах Н.Бахвалова [4].

Уравнение Рейнольдса теории газовой смазки, описывающее поле давлений p в газовом слое толщиной h , имеет вид

$$\operatorname{div}(h^3 p \nabla p - \Lambda h p \mathbf{y}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

с граничными условиями $p = 1$ на $\partial\Omega$. (2)

Здесь \mathbf{y} - скорость движения одной из поверхностей относительно другой; Λ - физический параметр - число сжимаемости; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - открытая ограниченная односвязная область с гладкой или кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ (смазываемая поверхность); ∇ и div - дифференциальные операторы градиента и дивергенции соответственно.

В докладе представлены результаты построения асимптотик для уравнения (1) на гладких периодических профилях, а также исследованы некоторые свойства усреднённых асимптотических аналогов уравнения Рейнольдса [5,6].

Литература.

1. Spagnolo S. *Sul limite dell soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore* // Annl Scuola Norml et Sup. Pisa. - 1967. - V. 21 - P. 637-699.
2. De Giorgi E., Spagnolo S. *Sulla convergenza dell integrali dell energia per operatori elliptici del secondo ordine* // Boll. Unione Mat. Ital. - 1973. - V.8 - P. 391-411
3. De Giorgi E., *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell aria* // Rend. Acc. Math. Roma. - 1975. - V. 12 - P. 277-294
4. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // ДАН СССР. - 1975. - т. 221, № 3 - С. 516-519.
5. Болдырев Ю.Я., Лупуляк С.В., Шиндер Ю.К. *Усреднение уравнения Рейнольдса теории газовой смазки* // Сборник трудов СПбГТУ (в печати).
6. Lupuleac S.V., Shinder J.K., Solovieva O.I., *Calculation of microperiodic gas bearings using asymptotic methods* // 9-th Conf. of the European Consortium for Mathematics in Industry, Copenhagen, June 25-29, 1996, Book of abstracts. P.320-321.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КАСКАДНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО УПРАВЛЕНИЮ¹

Санкт-Петербургский Государственный университет

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt &= x_{i+1} + b_i u(t) + f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), t), \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \quad x_{n+1}(t) \equiv 0, \quad y(t) = x_1(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с фиксированными произвольным образом начальными данными $x_i(0)$. Здесь t — непрерывное время, $t \in [0, \infty)$, значения $x_i(i)$ скалярны, непрерывные функции $f_i(\cdot)$ равномерно по t липшицевы по первым i аргументам.

Системы такого рода используются [1] для описания объектов управления, линейных по управлению. В этом случае функция $y(\cdot)$ имеет смысл наблюдаемого выхода, а $u(\cdot)$ — управляющего воздействия. Здесь эти функции для простоты предполагаются скалярными, но на самом деле это не существенно.

К виду (1) сводятся, в частности, уравнения в форме "вход-выход":

$$a(d/dt)y(t) = b(d/dt)u(t) + c(d/dt)f(y(t), t), \quad (2)$$

где $f(\cdot)$ — липшицева функция, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — многочлены, степень $a(\cdot)$ в точности равна n , а степени $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ строго меньше n .

Фиксируем период дискретизации h — достаточно малое положительное число. Обозначим $y_k = y(kh)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Предположим, что управление кусочно-постоянно (например, в связи с тем, что оно формируется дискретным по времени вычислительным устройством):

$$u(kh + \epsilon) = u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \epsilon \in [0, h). \quad (3)$$

¹Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований, грант 95-01-00445а, и ИИ ГАУ, грант 94-96.

Теорема 1. Пусть h достаточно мало. Тогда существует такая функция $F(\cdot)$, что равноотстоящие значения любого решения уравнения (1) удовлетворяют уравнению

$$y_k = F(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n}, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Если в уравнениях (1) функции $f_i(\cdot)$ не зависят от t , то функция $F(\cdot)$ в правой части (4) не зависит от k .

Будем говорить, что разностное уравнение (4) -- результат дискретизации исходного дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим теперь частный случай уравнений (2).

Определение. Разностное уравнение (4) устойчиво по управлению, если для любого его решения из неравенства $\sup_k |y_k| < \infty$ следует неравенство $\sup_k |u_k| < \infty$.

Теорема 2. Пусть уравнение (4) -- результат дискретизации исходного дифференциального уравнения (2), в котором многочлен $b(\cdot)$ гурвицев и степень его в точности равна $n-1$. Тогда при достаточно малом периоде дискретизации уравнение (4) устойчиво по управлению.

Доказательство теоремы 1 основано на принципе сжимающих отображений. Доказательство теоремы 2 использует квадратичную функцию Ляпунова, доставляемую частотной теоремой [2].

Литература

- [1] Kokotović P.V., Karaliakopoulos, Morse A.S. Adaptive feedback linearization of nonlinear systems, in: Kokotović P.V, Ed., *Foundations of Adaptive Control* (Springer-Verlag, Berlin, 1991) 455-493.
- [2] Лихарников А.Л., Пономаренко В.И., Якубович В.А. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вестник ЛГУ, сер. матем., механ., астр. 1976. Вып. 6.

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Санкт-Петербург

Санкт-Петербургской государственной электротехнической университет,

Санкт-Петербургской государственной технической университет

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} (D(E)(n' + nE))' = 0, & 0 < x < 1, \\ E' = f - n \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями $E(0) = E(1) = E_0$, $(D(E(0))(n'(0) + n(0)E'(0))) = j_0$, где $E(x)$, $n(x)$ — электрическое поле и плотность электронов, постоянная $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(E)$ — коэффициент диффузии, j_0 — плотность тока электронов при $x = 0$. Из физических соображений предполагается, что $j_0 = f D(E_0) E_0$.

Задача (1) эквивалентна следующей краевой задаче

$$\begin{cases} E'' + E'E = f h(E), & 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0, & \text{где } h(E) = E - \frac{E_0 D(E_0)}{D(E)}. \end{cases} \quad (2)$$

При любом f задача (1) имеет решение $E(x) \equiv E_0$, $n(x) \equiv f$, которое назовем тривиальным.

Утверждение 1. Пусть $g(E) = \left(\frac{D(E_0)}{D(E)} - 1\right)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < g_1 = \sup_E |g'(E)| < +\infty$, тогда при $f < \frac{\pi^2}{E_0 g_1}$ задача (2) имеет единственное (тривиальное) решение.

Рассмотрим задачу (2) как нелинейную задачу на собственные значения, запишем ее в виде, обозначив $u(x) = E(x) - E_0$:

$$\begin{cases} Lu - \lambda u + N(\lambda, u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $Lu = -u'' - E_0 u'$ — линейный оператор из $C^2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$,

$N(\lambda, u) = -u'u + \frac{\lambda E_0}{K(E_0)} \left(\frac{D(E_0)}{D(E_0 + u)} + \frac{D'(E_0)u}{D(E_0)} - 1\right)$ — нелинейный

оператор из $C^2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\lambda = -fK(E_0)$ — спектральный параметр,

$$K(E_0) = 1 + \frac{D'(E_0)E_0}{D(E_0)}.$$

Пусть $S_k \subset R \times C^2([0, 1])$ — максимальное связное множество нетривиальных решений (f, u) задачи (3), содержащее точку $(f_k, 0)$, где $f_k = -K(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, \dots$. Как показано в [1], если $K(E_0) < 0$, то множество S_k неограничено в $R \times C^2([0, 1])$ и в окрестности точки $(f_k, 0)$, наряду с тривиальным имеется решение $f_k(s) = f_k + o(s)$, $u_k(x, s) = s \exp\{-E_0 x/2\} \sin(\pi k x) + o(s^2)$.

Утверждение 2. Каждое бифуркационное решение $u_k(x)$ задачи (3) должно по параметру λ при любом $\lambda \geq \lambda_k$, где $\lambda_k = E_0^2/4 + \pi^2 k^2$, $k \in N$.

Для физических приложений представляет интерес случай больших концентраций примеси, что соответствует асимптотике собственных функций при больших значениях параметра f . Перепишем задачу (2) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon E'' + \varepsilon E' E = h(E), \text{ где } \varepsilon = f^{-1}, \\ E(0) = E(1) = E_0. \end{cases} \quad (4)$$

При условии $K(E_0) < 0$ уравнение $h(E) = 0$ имеет ровно три положительных решения $E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$.

Пусть выполнены следующие предположения:

1) существует положительное α такое, что $h'(E_i(E_0)) \geq \alpha$, $i = 1, 2$;

2)
$$\int_{E_1(\varepsilon_0)}^{\varepsilon} h(s) ds = \begin{cases} > 0, & \text{при } E \in]E_1(E_0), E_2(E_0)[, \\ 0, & \text{при } E = E_2(E_0). \end{cases}$$

Теорема. В предположениях 1) — 2) крайняя задача (4) имеет при семейства решений $E_i(x, \varepsilon)$ ($i = 1, 2, 3$), определенных для достаточно малых положительных ε и таких, что

$$(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_1(x, \varepsilon) = E_1(E_0) \text{ равномерно на каждом компакте из }]0, 1[,$$

$$(2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_2(x, \varepsilon) = E_2(E_0) \text{ равномерно на каждом компакте из }]0, 1[,$$

$$(3) \text{ для любого } x \in]0, 1[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_3(x, \varepsilon) \text{ не существует, т. е. каждая}$$

точка $x \in]0, 1[$ является транзитивной [2].

Литература

1. Recke L. An Example for Bifurcation of Solutions of the basic Equations for Carrier Distributions in Semi Conductors // Z. angew. Math. Mech. 1967. V. 67, N 6. Pp. 269-271.
2. Fife P. Transition Layers in singular perturbation Problems // J. Diff. Eq. 1974. V. 15. Pp. 77-105.

S¹-СИММЕТРИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Воронеж. Воронежский государственный университет

Рассматривается динамическая система с управляющей вектор-функцией $u(t)$:

$$g(x(t), \dot{x}(t)) = f(t, u_t, x_t, \dot{x}_t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

и векторной функциональной связью

$$H(u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = 0. \quad (2)$$

Обозначение $u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot)$ указывает на зависимость отображения I не только от значений фазовых переменных и управления в момент t , но и достаточно общую зависимость от этих переменных на всей области изменения $t \in I = [0, 1]$, — т.е. I представляет собой вектор-функционал на пространстве функций со значениями в \mathbf{R}^k .

Слева в (1) — непрерывная функция $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, справа — векторный функционал $\hat{f} : \mathbf{R}^1 \times L^\infty([-h, 0], \mathbf{R}^m) \times AC([-h, 0], \mathbf{R}^n) \times L^1([-h, 0], \mathbf{R}^n)$, вычисленный на функциях $u_t = \hat{u}(t+s)$, $x_t = \hat{x}(t+s)$, $y_t = \hat{y}(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$, где \hat{u} , \hat{x} , \hat{y} — функции на промежутке $[0, 1]$, продолженные на $[-h, 1]$ функциями $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$, $s \in [-h, 0]$.

Решение $(u(t), x(t))$ системы (1)-(2) трактуется как совпадение $\Lambda(u, x) = G(u, x)$ на области Ω пространства $E_1 = (L^\infty)^m \times (AC)^n$ пар $(u(t), x(t))$ следующих операторов, действующих в $E_2 = (L^1)^n \times \mathbf{R}^k$:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(u, x) &= (g(x(t), \dot{x}(t)), 0), \\ G(u, x) &= (\hat{f}(t, u_t, x_t, \dot{x}_t), H(u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot))). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Накладываются следующие условия:

1. $|\hat{f}(t, u_t, x_t, 0)| \leq \gamma_p^1(t) \quad \forall (\|u_t\| + \|x_t\|) < \rho, \quad |g(q, 0)| \leq \gamma_p^2 \quad \forall |q| < \rho$.
2. $\|\hat{f}(t, u_t, x_t, \dot{y}_t) - \hat{f}(t, u_t, x_t, \dot{y}_t)\|_{L^1} \leq C \|g(x(t), \dot{y}(t)) - g(x(t), \dot{y}(t))\|_{L^1}$,
 $c < \frac{1}{2}$;
3. $|g(q, r_1) - g(q, r_2)| \leq \kappa |r_1 - r_2|$;

4. $I: (L^\infty)^m \times (AC)^n \times (L^1)^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k > n$, $(-h \leq t \leq 1)$ — непрерывно в компактно.

Отображения (3) рассматриваются на ограниченной области $\bar{\Omega} \subset E_1$. Пусть выполнено условие

5. для произвольного $x_* \in \bar{\Omega}$ отображение $\Phi_*: \bar{\Omega} \rightarrow (L^1)^n$, задаваемое формулой $\Phi_*(u, x) = \hat{f}(t, u_t, x_t, \dot{x}_t)$, непрерывно и компактно

Теорема. [2] При выполнении условий, приведенных выше, отображения $\Lambda, G: \bar{\Omega} \rightarrow E_2$ непрерывны, а отображение G является Λ -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского.

При сужении на $E_1^d = U^d \times (AC)^n$, $U^d \subset (L^\infty)^n$ — конечномерное подпространство, $d \geq k - n$, $\Omega \subset E_1^d$, устанавливается фредгольмовость оператора Λ индекса $q = d + n - k$ и собственность. При условии $\Lambda(u, x) \neq G(u, x)$, $(u, x) \in \partial\Omega$, определены топологические характеристики [2] $\text{Deg } H$, $\overline{\text{Deg}} \hat{H}$ (оператора $H = \Lambda - G$) со значениями в группах бордизмов $F_q(\Omega)$, $\bar{F}_q(\Omega)$ Элиэрт-Тромба, отличие которых от тривиального элемента гарантирует существование решения $(u(t), x(t))$ системы (1)-(2).

Заметим, что в трансверсальной ситуации множество решений образует компактное многообразие размерности $q \geq 0$.

При наличии S^1 -симметрии области $\bar{\Omega}$, S^1 -эquivариантности вектор-функционала l и функции $g_0(w) = g(0, w)$, вычислена $\overline{\text{Deg}} H$ при $q = 0$.

References

- [1] Ю.Г.Борисович. К проблеме разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих управление // Глобальный и стохастический анализ. Новое в глобальном анализе. - Воронеж, изд-во ВГУ. - 1995. - С.21-28.
- [2] Yu.G.Borisovich. Topological Characteristics in Non-linear Problems of Geometry, Optimization and Mathematical Physics // Applied Aspects of Global Analysis. - Voronezh University Press. - 1994. - P.11-30.

АСИМПТОТИКА O -КРИВЫХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В R^3

Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= Y_1(x, z) + yY_2(x, z) = Y(x, y, z), \\ z &= Z(x, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где Y_1, Y_2, Z — аналитические в точке $(0, 0)$ функции x, z , разложения по степеням x, z функций Y_1, Z не содержат свободных и линейных членов, $Y_2(0, 0) = 0$, точка $O = (0, 0, 0)$ — изолированная особая точка системы (1).

Под O -кривой системы (1), как обычно, будем понимать полутраекторию системы (1), прямикающую к точке $O = (0, 0, 0)$ при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Под O_i -кривой, $i = 1, \dots, 8$, понимается O -кривая, лежащая в достаточной близости от точки O в i -м координатном октанте.

Любая O_i -кривая системы (1) в достаточной близости от O может быть представлена в виде:

$$\{(x, y(x), z(x)), x \in I_\Delta^{(+/-)}\},$$

где

$$I_\Delta^+ = (0, \Delta], \quad I_\Delta^- = [-\Delta, 0), \quad \Delta > 0, \quad (y(x), z(x)), x \in I_\Delta^{(+/-)},$$

— решение системы

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Y(x,y,z)}{y}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{Z(x,z)}{y}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 0, \quad y(x) \neq 0, \quad z(x) \neq 0 \quad (2')$$

при $x \in I_{\Delta}^{(+)}$, и, наоборот, такому решению системы (2) соответствует некоторая O_1 -кривая системы (1).

Решения $(y(x), z(x))$, $x \in I_{\Delta}^{(+)}$, системы (2), обладающие свойствами (2') и такие, что при $x \in I_{\Delta}^{(+)}$ $(x, y(x), z(x))$ лежит в i -м октанте, будем называть O_1 -решениями (O_1 -кривыми) системы (2). Для изучения O_1 -кривых системы (1) будем изучать O_1 -кривые системы (2).

Определение. Любая O_1 -кривая системы (2) для любых $\gamma, \delta \in (0, \infty)$ может быть представлена в виде

$$y(x) = u(x)x^{\gamma}, \quad z(x) = v(x)x^{\delta}, \quad x \in I_{\Delta}^{(+)}.$$

Если при $\gamma = \gamma_*$, $\delta = \delta_*$ существуют

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = u_*, \quad \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = v_*, \quad (u_*, v_*) \in \mathbb{R}^1 \setminus (0, 0),$$

то будем называть пару чисел (γ_*, δ_*) конечным векторным порядком, а пару (u_*, v_*) — конечной векторной мерой кривизны данной O_1 -кривой в точке C .

В докладе излагается метод нахождения всех возможных конечных векторных порядков O_1 -кривых системы (1) и соответствующих возможных конечных векторных мер. Для нахождения указанных векторных порядков используется метод ломаных Фроммера, применяемый к функциям $Y_1(x, z)$, $Y_2(x, z)$, $Z(x, z)$.

МЕТОД АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

С.-Петербург, Северо-Западный заочный политехнический институт

Исследуется математическая корректность краевой задачи теории пластичности в перемещениях для малых деформаций в слабой форме абстрактной задачи Коши по параметру внешнего нагружения.

В силу гипотез математической теории пластичности изотропный материал описывается определяющим соотношением в скоростях [1]

$$\dot{\sigma}_{ij}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{km} - \dot{P}_{km}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})), \quad C_{ijkl} = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jm} + \left(k_0 - \frac{2}{3}\mu\right) \delta_{ij} \delta_{km},$$

где σ и ε — тензоры напряжений и деформаций Коши соответственно, P — пластическая составляющая тензора деформаций, $\mu > 0$ и $k_0 > 0$ — модули сдвиговой и объемной деформаций соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, точка сверху обозначает d/dt , $t \in [0, 1]$ — параметр внешнего нагружения. Поле перемещений u связано с тензором деформаций линейно-дифференциальным соотношением $\varepsilon = \varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$.

При постановке краевой задачи пластичности для тела $\Omega \subset R^3$ с границей Γ все величины рассматриваются как абстрактные функции, действующие из промежутка $[0, 1]$ в соответствующие банаховы пространства [2]. При квазистационарном деформировании внешние воздействия полагаются липшиц-непрерывными по параметру нагружения и равными нулю при $t = 0$, причем часть границы Γ^1 , на которой задано перемещение u^1 , не зависит от t .

Краевая задача теории пластичности ставится в слабой форме абстрактной задачи Коши [3]. Искомое поле перемещений ищется в виде представления $u^*(t) = u(t) + u^0(t)$, где $u^0(t)$ — продолжение функции $u^1(t)$ с Γ^1 в Ω , функция $u : [0, 1] \rightarrow V^0$ удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$ и дифференциальному уравнению для любой $v \in V^0$ и почти всех $t \in (0, 1)$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(\varepsilon(u(t) + u^0(t)), \varepsilon(\dot{u}(t) + \dot{u}^0(t))) \varepsilon_{ij}(v) dx = L(t, v), \quad (1)$$

$$L(t, v) = \int_{\Omega} \dot{f}_i(t)v_i dx + \int_{\Gamma^2} \dot{F}_i(t)v_i d\gamma.$$

Здесь $V^0 = \{v : \Omega \rightarrow R^3; v(x) = 0, x \in \Gamma^1\}$ — множество кинематически допустимых вариаций перемещения, f и F — плотности объемной и поверхностной сил соответственно, $\Gamma^2 = \Gamma \setminus \Gamma^1$, $\text{area}(\Gamma^1) > 0$. Для существующих моделей

пластичности V^0 — подпространство гильбертова пространства $W^{1,2}(\Omega, R^3)$, а уравнение (2) неразрешимо в явном виде относительно y .

Формулируется общая теорема существования и единственности для задачи (1), доказательство которой приводится в [1] и опирается на классические результаты теории монотонных операторов [2] и теории абстрактной задачи Коши в рефлексивном банаховом пространстве [3]. Основное необходимое и достаточное условие имеет простую алгебраическую форму: матриц-функция $\dot{P}(A, B)$ является сильно антимонотонной по B , т.е. для любых симметричных матриц A, B^1, B^2 верна оценка

$$C_{ijkl} (\dot{P}_{km}(A, B^1) - \dot{P}_{km}(A, B^2)) (B_{ij}^1 - B_{ij}^2) < 2\mu |B^1 - B^2|^2. \quad (2)$$

На примере модели линейного изотропно-трансляционного упрочнения с дилатансией, внутренним трением и идеальным эффектом Баушингера показывается, что условие (2) не сводится ни к классическому постулату Друккера, ни к термодинамическим постулатам и, поэтому, должно независимо проверяться при построении моделей и решении конкретных краевых задач математической теории пластичности.

Summary -- The questions of mathematical correctness of the plasticity boundary value problem (BVP) are examined. The plasticity BVP is formulated as the weak Cauchy problem in the Hilbert space over the parameter of loading. The main necessary and sufficient condition of the existence and oneness theorem has a simple algebraic form. It is shown that this condition is independent and does not coincide with the classic Drucker's and thermodynamical postulates.

Литература

- [1] Бригаднов И.А. Математическая корректность и численные методы решения начально-краевых задач пластичности // Изв. АН. МТГ. 1996. N 4. С.62-74.
- [2] Галевский Х., Грегер К., Захарнас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336с.
- [3] SZEP A. Existence theorem for weak solution of ordinary differential equations in reflexive Banach spaces // Studia Sci. Math Hungar. 1971. V.6. N 1-2. P.197-203.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований по грантам N 95-01-00992 и N 96-01-00054.

ПОСТРОЕНИЕ С ЗАДАНЫМ УРОВНЕМ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ
ПОГРЕШНОСТИ ОБЛАСТЕЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧКИ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

г. Санкт-Петербург, С.-Петербургский

государственный электротехнический университет

Развитие теории нелинейных явлений, широкое использование вычислительной техники и интенсивное применение численных методов для решения широкого круга задач естественного происхождения привело к умножению процессов конструирования и исследования численных методов решения систем обыкновенных нелинейных интегродифференциальных уравнений. При решении прикладных задач технического характера данные системы уравнений описывают динамику моделей физических систем при условии детерминированности воздействий и сосредоточенности параметров.

Как известно, решения нелинейных интегродифференциальных уравнений, в общем случае, характеризуются неоднозначностью, жесткостью, наличием разрывов первого и второго рода, а также содержанием участков неустойчивого состояния. Если дополнительно отметить потенциальную склонность нелинейной динамической модели к бифуркационным явлениям, то становится очевидным, что вычислительная процедура метода, используемого для решения этих систем уравнений, должна обладать оценкой полной погрешности расчета.

Для решения уравнений указанного класса разработан аналитически численный метод, основывающийся на аппарате обобщенных функций, обобщенного преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов. Вычисление регулярных составляющих решений в заданном интервале исследования осуществляется пошаговым образом, на основе замены на каждом шаге расчета ряда Тейлора, аппроксимируемого решением, полиномом Тейлора. Для каждой оценки модуля остаточного члена формулы Тейлора сформированы четыре оценки, что позволяет вычислять регулярные составляющие решений с любым наперед заданным уровнем предельной локальной погрешности. На основе этих оценок и с учетом зависимости полной погрешности расчета от погрешности в предположенных условиях, имеющей место, начиная со второго шага расчета, разработана процедура локальной оценки модуля полной погрешности качества построения областей, охватывающих точные решения систем нелинейных интегродифференциальных уравнений.

СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЦИФРОВОГО ИМИТАТОРА

КАНАЛА СВЯЗИ

г. Санкт-Петербург, Военная академия связи

Совершенствование методов передачи и приема информации в системах радиосвязи осуществляется в направлении проектирования цифровых модемов.

При испытании и проверке алгоритмов функционирования таких модемов возникает необходимость в разработке цифровых имитаторов каналов связи (ЦИКС), основу которых составляют математические модели параметров сигналов и помех с заданными вероятностными характеристиками. Одним из перспективных методов описания случайных параметров сигналов и помех является способ основанный на их марковской аппроксимации и применении стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Разработка математической модели случайных процессов требует решения задачи синтеза СДУ. В литературе описано несколько методов синтеза одномерных марковских процессов в форме СДУ, однако все они обладают некоторыми погрешностями

Предложено два метода синтеза одномерных марковских процессов в форме СДУ в предположении, что известен одномерный закон распределения случайного процесса и его корреляционная функция приблизительно имеет экспоненциальный характер. Первый метод основан на разложении функции сноса в ряд Тейлора, второй на решении уравнения Абеля и могут применяться для решения СДУ большинства стационарных процессов с заданными законами распределения и корреляционной функцией.

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
 ПО РЕШЕНИЮ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕМУ ФИЗИЧЕСКИМ ТРЕБОВАНИЯМ

Санкт-Петербург, СПбГУ

При разработке некоторых автогенераторов с сосредоточенными параметрами задаются ограничения на параметры колебаний (длительность установления стационарного режима, интенсивность и др.) и сложность устройства. При таких условиях целесообразно сначала построить простое уравнение с предельным циклом, а затем, при необходимости, усложнить их.

В работе построены модели автоколебаний по заданной длительности переходного процесса и стационарному решению, содержащему один или несколько членов ряда Фурье. В этом случае формулы перехода к полярным координатам содержат явную зависимость радиуса-вектора фазовой плоскости от времени, а переходной процесс описывается уравнением Бернулли. Модели имеют "мягкое" самовозбуждение и неизохронны - в них введены различные зависимости частоты от радиуса-вектора.

В двух других способах построения моделей используются таблицы неопределенных интегралов. В первом задан вид стационарного периодического решения. Тогда, к примеру, при гармоническом решении простое преобразование табличного интеграла от степеней решения позволяют получить уравнение неконсервативного гармонического осциллятора с нелинейностью, зависящей от решения и его производной. Во втором способе, как и в работе Зайцева В.Ф. и Полянина А.Д. (Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1993), нелинейность отыскивается с помощью уравнения Абеля, к которому приводится уравнение нелинейных колебаний. Поиск осуществляется подбором по таблицам интегралов выражения, аналогичного получаемому после интегрирования уравнения Абеля. Из найденных зависимостей, в том числе и имеющих разрыв, отбираются те, которые могут удовлетворять физическим условиям возникновения и ограничения автоколебаний. Их целесообразно использовать для аппроксимации характеристик реальных нелинейных элементов.

Повышение порядка моделей автогенераторов наиболее просто осуществляется посредством усложнения функциональных блок-схем, известных в программировании АБМ. Способ заключается в дополнении блок-схемы простейшего консервативного осциллятора блоками (элементами), включая и нелинейные, в соответствии с физическими особенностями работы автогенераторов. В примерах отмечается простота контроля одночастотности решения.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ АВТОСОЛИТОНОВ В БИСТАБИЛЬНОМ ЛАЗЕРЕ

С.Петербург

Научно-исследовательский Институт лазерной физики,

Всероссийский Научный центр "Государственный оптический институт им.С.И.Вавилова"

Формирование пространственно-временных структур в исходно однородных открытых нелинейных системах отличается особым разнообразием в оптических бистабильных системах с дифракционным или дисперсионным (в отличие от диффузионного для химических, биологических и других: "классических" систем) механизмом взаимодействия пространственно-разнесенных элементов системы. К числу таких систем принадлежат бистабильные лазеры и сплошные среды с достаточно большими размерами области усиления.

В данном сообщении исследованы одномерные, двумерные и трехмерные устойчивые локализованные структуры излучения ("лазерные автосолитоны"), возникающие в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением или же в сплошной среде с частотной дисперсией и нелинейными усилением и поглощением. Эти системы описываются обобщенным комплексным уравнением Гинзбурга-Ландау для медленно меняющейся амплитуды поля. Для одномерных структур с использованием методов теории бифуркаций определена область существования одиночных автосолитонов различных типов и их связанных состояний. Показано, что с увеличением коэффициента усиления активной среды стационарный автосолитон теряет устойчивость и возникает пульсирующая локализованная структура. При дальнейшем увеличении усиления в численных расчетах наблюдается периодическое деление исходной структуры и более сложные режимы вплоть до хаотических.

В двумерной геометрии продемонстрированы стационарные лазерные автосолитоны с осесимметричным распределением интенсивности и винтовыми дислокациями волнового фронта с различными значениями топологического заряда $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а также автосолитоны с несимметричным распределением интенсивности, вращающимися с постоянной угловой скоростью.

На приближенном подходе на основе метода моментов определены условия существования трехмерных локализованных структур лазерного излучения.

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1:2 И 1:3

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, μ — вектор параметров, $F(x, \mu)$ — гладкая функция. Предположим, что при $\mu = 0$ система (1) имеет изолированное состояние равновесия $x = 0$ и матрица $A = F'_x(0, 0)$ имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, и частоты ω_1 и ω_2 связаны соотношениями $\omega_2 = 2\omega_1$, либо $\omega_2 = 3\omega_1$ (резонанс 1:2 или 1:3).

Изучаются бифуркации системы (1) в малой окрестности $x = 0$. Анализ системы (1) проводится с помощью метода нормальных форм.¹ Четырехмерная система (1), нормализованная до членов второго порядка при $\omega_2 = 2\omega_1$ и до членов третьего порядка при $\omega_2 = 3\omega_1$, преобразуется к трехмерной автономной системе. Стационарным (периодическим, 2-торам) решениям полученной системы соответствуют периодические (2-торы, 3-торы) исходной системы (1). Дается подробный анализ указанной выше трехмерной автономной системы, найдены различные варианты бифуркаций в системе (1).

Установлено, что при резонансе 1:2 система (1) имеет стохастические решения.

¹ Ранее для системы (1) изучался только вопрос о бифуркации периодических решений (Шмидт, 1979 г.; Де Вланк, Лангфорд, 1995 г.).

УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ИТО, ОПИСЫВАЮЩИХ ДИНАМИКУ
АСИНХРОННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург, НИИ математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение Ито

$$dx = (Ax + \sum_{i=1}^k b_i f_i)dt + \sum_{i=1}^k b_i x^* R_i dw, \quad \sigma_i = c_i^* x, \quad (1)$$

$$\sigma_i \overset{M_i}{=} f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где A, R_i — постоянные матрицы размерности соответственно $m \times m$ и $m \times l$, b_i, c_i — постоянные m -мерные столбцы, $w(t)$ — l -мерный винеровский процесс, x — m -мерный вектор состояния системы. Оператор M_i каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $\sigma_i(t)$ ставит в соответствие функцию $f_i(t)$ и последовательность моментов времени $\{t_{in}\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), обладающих следующими свойствами:

$$\delta T \leq t_{i,n+1} - t_{in} \leq T \quad (t_{i0} = 0, 0 < \delta < 1, T > 0).$$

Моменты t_{in} зависят только от значений $\sigma_i(t)$ при $t \leq t_{in}$, величина $f_i(t)$ зависит только от значений $\sigma_i(\tau)$ для $\tau \leq t$, функция $f_i(t)$ кусочно-непрерывна на каждом промежутке $[t_{in}, t_{i,n+1}]$ и сохраняет знак при $t_{in} < t < t_{i,n+1}$. Основное свойство операторов M_i заключается в наличии при каждом n такого $\bar{t}_{in} \in [t_{in}, t_{i,n+1}]$, что среднее значение импульса

$$v_{in} = \frac{1}{t_{i,n+1} - t_{in}} \int_{t_{in}}^{t_{i,n+1}} f_i(t) dt$$

удовлетворяет квадратичной связи

$$(\sigma_i(\bar{t}_{in}) - \sigma_{ie} v_{in}) v_{in} \geq 0,$$

где σ_{ie} — положительный параметр. Указанным условиям удовлетворяет большинство из известных видов импульсной модуляции (амплитудная, широтная, частотная, комбинированная и др.) [1].

Уравнения (1), (2) описывают динамику асинхронных импульсных систем при белом шумных возмущениях параметров.

Ставится задача исследования устойчивости в среднем квадратическом решения $x(t) \equiv 0$ при любых начальных возмущениях.

В [2,3] изучался случай $m = 1$. В докладе исследуется случай $m > 1$. Получены частотные условия устойчивости в среднем квадратическом при любых $x(0)$, выраженные в виде свойств передаточной матрицы линейной части системы. Изучен как случай гурвицевой матрицы A , так и критический случай наличия у матрицы A нулевого собственного значения. Рассуждения основаны на методе усреднения [4] и анализе дифференциала Ито функции Ляпунова вида

$$V = x^* H x,$$

где H — положительно определенная матрица, выбираемая с помощью частотной теоремы В.А. Якубовича [5].

Работа выполнена при финансово-поддержке гранта Госкомвуза 1996 "Исследование устойчивости нелинейных импульсных систем при стохастических возмущениях параметров".

Литература

1. Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Техника, 1970.
2. Гелиг А.Х., Елхимова Ю.В., Чурилов А.Н. Устойчивость одного класса функционально-дифференциального уравнения Ито // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1994, вып. 2 (N 8), с. 3-9.
3. Гелиг А.Х., Елхимова Ю.В. Устойчивость нелинейных импульсных систем при случайных возмущениях параметров // Автоматика и телемеханика, 1995, N 11, с. 140-147.
4. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб: СПбГУ, 1993.
5. Гелиг А.Х., Леонцов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

г. Санкт-Петербург, Военная академия связи

Изучение случайных процессов и их моделирование с помощью ЭВМ играют важную роль при решении широкого круга прикладных задач. Многие процессы, протекающие в реальных стохастических системах, обладают такими дополнительными специфическими свойствами, как высокая скорость протекания и быстрое изменение во времени. Это вносит дополнительные требования к алгоритму моделирования случайного процесса. Для разработки моделей стохастических систем необходимо использовать максимально эффективные алгоритмы формирования случайных процессов, обеспечивающие при этом заданную точность моделирования. Кроме того, при решении таких задач большую роль играет простота алгоритма, его приспособленность к реализации на языке программирования. В частности, благодаря достижениям современной микроэлектроники стала возможна реализация алгоритмов на цифровых процессорах обработки сигналов и создание на их основе устройств, функционирующих в реальном масштабе времени.

В прикладных задачах широко используются марковские случайные процессы, которыми с некоторой погрешностью аппроксимируется большинство реальных процессов, протекающих в стохастических системах. Для описания марковских процессов наибольшее применение нашли стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). Этот метод является конструктивным заданием марковского процесса, так как приращения винеровского процесса, являющиеся нормально распределенными случайными величинами, могут

Быть получены на основе конечной совокупности равномерно распределенных независимых величин. Для цифровых методов решения СДУ, рассматриваемых в форме Ито, используются различные аналоги разностных схем типа Эйлера или Рунге-Кутты, относящиеся к явным схемам. Используя методы математической статистики, проведена оценка вероятностных характеристик временного ряда - значений марковского процесса в дискретные моменты времени. При численном анализе рассматривались СДУ для следующих, наиболее распространенных в радиотехнике законов распределений: нормального, Накагами (m - распределений) и гамма-распределения. Для оценки функций распределений использовался критерий Колмогорова-Смирнова. Корреляционные функции оценивались по методу, основанному на преобразовании Фишера для эмпирических и теоретических значений этой функции. Анализ проведенных исследований показал, что при численном решении СДУ необходимо учитывать не только аппроксимацию, но и устойчивость разностных стохастических схем. Исходя из этого, предложены к применению неявные схемы, область устойчивости которых больше чем у явных схем типа Эйлера или Рунге-Кутты. Корректность их применения вытекает из определения стохастического интеграла Ито. Таким образом, выбор разностной стохастической схемы требует некоторого компромисса между точностью получаемых решений, устойчивостью и общим временем вычислений. Последний факт особенно важен, например, при разработке цифровых устройств, функционирующих в реальном масштабе времени.

Другой важной задачей, возникающей при использовании СДУ, является задача синтеза, т.е. определение коэффициентов уравнения по какой-либо априорной информации о вероятностных характеристиках имитируемого процесса. Для случая, когда стационарный процесс задан одномерным законом распределения и корреляционная функция имеет экспоненциальный вид, предложены методы, позволяющие найти коэффициенты СДУ.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

(Ульяновск, Ульяновский государственный университет)

Рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями общего вида:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(t, x, u), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad u \in U; \\ j_j(t_0, x(t_0), T, z(T)) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m_1; \\ g_j(t_0, x(t_0), T, z(T)) &= 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m; \\ h_k(t, x(t), u(t)) &\leq u, \quad k = 1, \dots, l_1; \\ h_k(t, x(t), u(t)) &= 0, \quad k = l_1 + 1, \dots, l; \\ J &= g_0(t_0, x(t_0), T, z(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min \end{aligned}$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ - фазовый вектор, $u = (u_1, \dots, u_r)$ - параметры управления, функции $f_i(t, x, u)$, $0 \leq i \leq n$, $y_j(t, x, T, z)$, $0 \leq j \leq m$, $h_k(t, x, u)$, $1 \leq k \leq l$, непрерывны по всем аргументам в окрестности оптимального процесса. Кроме того, функции f_i и h_k непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным, а функция g_j - по всем аргументам.

Предлагается метод анализа поставленной задачи и ее численного решения, основанный на снятии фазовых ограничений с помощью интегральных функций

$$\begin{aligned} p_j(t, x, u) &= [h_j^+(t, x, u)]^2, \quad 1 \leq j \leq l_1; \\ p_j(t, x, u) &= h_j^2(t, x, u), \quad l_1 + 1 \leq j \leq l \end{aligned}$$

и введением новых фазовых переменных

$$\dot{x}_{n+j}/\dot{t} = p_j(t, x, u), \quad x_{n+j}(t_0) = 0 = x_{n+j}(T), \quad 1 \leq j \leq l.$$

Принцип максимума Понтрягина для преобразованной таким образом задачи имеет в общем случае вырожденный характер и для ее исследований необходима теория особых управлений [1], в частности, условия экстремума второго порядка. В докладе исследуется специфика основных подходов к вырожденным задачам для рассматриваемой редуцированной задачи. В качестве метода численного решения исследована схема метода параметризации второго порядка, разработанного автором ранее [2].

Литература.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
2. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и мех. физ. 1979. Т.19. N2. С.292-303.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (96-01-00509)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ СМАЗКИ С НАДУВОМ

С.-Петербург, СПбГТУ

В ряде технических приложений возникают задачи с источниками (тепла, массы и т. п.). Размеры источников обычно значительно меньше размеров области, в которой ищется решение. Это вызывает трудности при использовании конечно-разностных методов для решения таких задач. С другой стороны, часто применяемый переход к точечным источникам возможен не всегда. Проблемы такого рода возникают и в задачах газовой смазки с наддувом.

Распределение давления p в смазочном слое толщиной h определяется из уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

На границах подшипника давление равно давлению окружающей среды. Газ в смазочный слой подается через ряд источников, на контурах которых p_1 давление постоянно и выполнены условия баланса расходов газа

$$\oint_{\Gamma} h^3 p (\nabla p)_n ds = m e(p_1)$$

Здесь m — параметр, характеризующий критический (максимально возможный) расход газа через устройство наддува, а $e(p)$ — функция, выражающая отношение действительного расхода к критическому ($e: [p, p_H] \rightarrow [0, 1]$ — невозрастающая функция, p_H — давление наддува).

Анализ возникающих здесь проблем проводится на примере модельной задачи, в качестве которой выбирается упорный круговой подпятник с расположенным в центре источником. Исследуется обычно применяемая для решения таких задач конечно-разностная схема, в которой источник заменяется точечным. Проведенные расчеты показали, что ошибка приближенного решения по мере сгущения сетки сначала уменьшается, а затем возрастает и остается конечной, но расход газа через "источник" источник при этом убывает до нуля.

Для исправления ситуации предлагается внести поправку в аппроксимацию источника, компенсирующую потери расхода. При этом погрешность приближенного решения убывает при сгущении сетки до крайней мере до тех пор пока размеры ее ячейки не будут сравнимы с радиусом источника.

**КАЧЕСТВЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ТОЧНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассматривается сформулированная В.И. Зубовым проблема "построения процедуры для оценки области асимптотической устойчивости и внутри так, чтобы подходить хоть в одной точке к границе" с целью выяснения возможности решения этой задачи на основе применения современной цифровой вычислительной техники. Сначала предлагается исследовать возможности с помощью качественных или аналитических методов заменить поставленную проблему на эквивалентную ей задачу оценивания глобально асимптотически устойчивого или гравитального множества некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z),$$

где $t \in R^1$, $z \in R^n$, $f(t, z) \in K^n$.

Здесь следует заметить, что характеристики выпроксимации искомого множества на ЭЦВМ полностью зависят от достижимой точности нахождения дискретизированного решения задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0,$$

где $t_0 \in R^1$, $z_0 \in R^n$, с помощью применяемого численного метода на используемой ЭЦВМ.

Иногда совместно накопление ошибок метода и погрешностей округления чисел может оказывать трудно преодолимое препятствие. Например, система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x^3 - y^3 + x^2y + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y - x^3 - xy^2 - x^2y - y^3, \quad (1)$$

имеет условно асимптотически устойчивое нулевое решение и два асимптотически устойчивых решения $x(t) \equiv -1, y(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv 1, y(t) \equiv 0$,

области притяжения которых ограничены траекториями решений системы уравнений (1), стремящихся к нулевому решению при возрастании аргумента t до бесконечности. Искомые границы параметрически определяются следующими равенствами

$$x(t) + iy(t) = -\sqrt{1 - \exp((1+i)t)}, \quad t > 0,$$

$$x(t) + iy(t) = \sqrt{1 - \exp((1+i)t)}, \quad t > 0,$$

Остальные траектории системы уравнений (1) параметрически определяются равенствами

$$x(t) + iy(t) = -\sqrt{1 - \exp(-(1+i)t)}, \quad t > 0,$$

$$x(t) + iy(t) = \sqrt{1 - \exp(-(1+i)t)}, \quad t > 0,$$

$$x(t) + iy(t) = -\sqrt{1 + (x_0^2 - y_0^2 - 1 + i2x_0y_0)\exp(-(1+i)t)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0,$$

$$x(t) + iy(t) = \sqrt{1 + (x_0^2 - y_0^2 - 1 + i2x_0y_0)\exp(-(1+i)t)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0,$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Здесь даже точные численные методы решения рассматриваемой системы уравнений (1) с начальными условиями $x(0) = -\sqrt{1 + \exp \pi}$, $y(0) = 0$, и с начальными условиями $x(0) = \sqrt{1 + \exp \pi}$, $y(0) = 0$, из-за незначительного округления представления чисел в ЭЦВМ следует применять вместе с целенаправленным рядом траекций округляем с недостатком для с избытком вычисляемых на компьютере вещественных чисел.

METHOD OF MOMENT RESTRICTIONS IN ROBUST CONTROL.

St. Petersburg State University, Russia

The optimal (with respect to quadratic cost function) control problem for a linear plant with stochastic disturbance is considered. Two main formulations of this problem are widely known. In the classical linear-quadratic approach it is assumed that the spectral density of the disturbance is known. The other trend is known as H-infinity optimization. In this approach a restriction on the variance of disturbances only is assumed to be imposed and it is necessary to construct a linear feedback that minimizes the maximum value of the cost function for all admissible disturbances. These two approaches are based on two extreme assumptions on the disturbances. In the first case we need 'too much' information (spectral density of disturbance); in the second we use 'too little' information (dispersion).

Both assumptions may lead to difficulties in applications. In the first case we have to use the spectral density of disturbances, which is usually unknown to us. In the second case we construct the optimal regulator for the worst-case disturbance. However, using some additional information on disturbances, we can improve this 'optimal' regulator.

Our purpose is to formulate the optimization problem so that all available information on the disturbance spectrum be utilized directly. To this end the restrictions on the disturbance are specified in terms of the moments of the disturbance spectral measure. The aim of control is to minimize the maximal value of the performance index over the given class of disturbances. The suggested approach covers a wide range of control problems. In particular, it includes both H-2 and H-infinity optimal control as extreme special cases.

The algorithm for the solution of formulated problem is proposed which involves the solution of some auxiliary convex optimization problem and the solution of the standard model-matching problem. For the SISO discrete-time plant the obtained criterion of optimality is the generalization of the well-known Karateodory-Fejer and Nevanlinna-Pick matrix criteria. The results obtained are illustrated by the numerical examples.

The key mathematical result is the new duality theorem that expresses in the frequency terms the functional to be minimized. This theorem can have numerous applications not only in the disturbance attenuation problem but in the minimax filtering and in robust analysis as well. The approach is based on the theory of generalized Chebyshev-type inequalities.

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА СЛЕДА

Санкт-Петербург. Российский гос.педагогический университет

Как ни парадоксально, метод следа является наиболее доступным методом дискретно-группового анализа и вместе с тем наименее разработанным. В [1] приводится лишь общая схема метода и примеры, которые при всей своей содержательности иллюстрируют поиск лишь точечных дискретных групп.

Привлекательность метода следа очевидна – он базируется на классическом алгоритме Ли и значительно менее трудоемок в реализации на ПЭВМ, чем остальные методы дискретно-группового анализа (достаточно модифицировать ряд имеющихся REDUCE-программ).

Применение метода следа для поиска касательных образующих, а также образующих, заданных преобразованиями Беклунда и нелокальными преобразованиями, требует доказательства ряда вспомогательных утверждений. В работе рассматривается действие различных преобразований на касательные операторы и операторы Ли-Беклунда, доказываются необходимые и достаточные условия их приводимости к заданному виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обобщенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АВТОМОРФНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Казань, Архитектурно-строительная академия

Для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = X = (\exp X) A \exp(-X), \quad (1)$$

где A — переменная матрица, принадлежащая некоторому представлению в \mathbb{R}^n алгебры Ли L_N со структурными константами C_N^k утверждаются:

Теорема 1. Если a^i — непрерывные по t проекции A на базис L_N , то существует единственный элемент этой алгебры, являющийся решением уравнения (1), проекции которого на базис L_N удовлетворяют системе

$$x^i = a^i \exp(x^k C_{ij}^k), \quad (2)$$

интегрируемой в квадратурах для разрешимых L_N .

Теорема 2. Решениями системы (2) для неабелевых двумерных и трехмерных разрешимых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем являются

$$x^i = w^i \int w^j z^j (w^i)^{-1} dt,$$

где $w^i = \exp \left[\int a^N (x^N)^{-1} (1 - z^i) dt \right]$, $z^i = \exp(-v^i)$, $x^N = \int a^N dt$, w^i и v^i даются таблицей 1 (см. на следующей странице), а для I_3 (VII)

$$x^1 = k(\cos By^1 + \sin By^2),$$

$$x^2 = k \left[\left(c \sin B - \frac{q}{2} \cos B \right) y^1 - \left(\frac{q}{2} \sin B + c \cos B \right) y^2 \right],$$

где $q^2 < 4$, $q = 0$, $B = cT$, $c^2 = 1 - \frac{1}{4}q^2$, $k = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} (q_{n-1} - q_{n+1}) \right]$,

$$T = -\sum \frac{q_n}{n!} (-x^3)^n, \quad q_n = q q_{n-1} - q_n^2$$

$$y^1 = -\int \frac{1}{kc} \left[\left(\frac{1}{2} q \sin B + c \cos B \right) b^1 + \sin B b^2 \right] dt,$$

$$y^2 = -\int \frac{1}{kc} \left[\left(c \sin B - \frac{1}{2} q \cos B \right) b^1 - \cos B b^2 \right] dt,$$

$$b^1 = a^1 + x^3(\omega c^1 + b a^2), \quad b^2 = a^2 - x^3\{b a^1 + (q b - a) a^2\},$$

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{n-1}}{n!} (-x^3)^{n-1}, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n!} (-x^3)^{n-1}.$$

Таблица 1.

L_N	i	t^i	y^i
L_2 (II)	1	a^1	x^2
L_3 (II)	1	$a^1 + a^3 x^2 - a^2 x^3$	0
	2	a^2	0
L_3 (III)	1	a^1	x^3
	2	a^2	0
L_3 (IV)	1	$a^1 + a^3 x^2 - a^2 x^3$	x^3
	2	a^2	x^3
L_3 (V)	i	a^i	x^3
L_3 (VI)	i	a^i	$q^{i-1} x^3,$ $0 \neq q \neq 1,$ $q = 0$

LOCAL TIME FOR DIFFUSION AND ORDINARY EQUATIONS AND CONTROL PROBLEMS

St. Petersburg, Institute of Mathematics and Mechanics,
St. Petersburg State University, 198904, Russia

Some problems for local time of vector processes are studied. Analog of Tanaka formula is obtained. Control problems for local time are discussed. Some convergence of local time for process with disappearing diffusion is established. An analog of local time in point for vector process is proposed.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space. Consider an Ito equation

$$dy(t) = f(y(t), t)dt + \beta(y(t), t)dw(t),$$

$$y(0) = a.$$

Here $y(t)$ is n -dimensional process, $w(t)$ is n -dimensional Wiener process. The random vector a is independent of $w(t)$. We suppose that vector a has probability density function ρ , $E|a|^2 < +\infty$.

The functions $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ are bounded and measurable by Eorel. We suppose that the derivative $\partial\beta(x, t)/\partial x$ is bounded, $b(x, t) = \frac{1}{2}\beta(x, t)\beta(x, t)^T \geq \delta I > 0$ for any $\delta > 0$ for every x, t .

Let $\Gamma \subset D$ be a bounded hypersurface of dimension N . (We consider only $N = n - 1$ and $N = 0$, when $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ is a point). Introduce sets

$$\Gamma(\varepsilon) = \{x \in D : \inf_{y \in \Gamma} |x - y| < \varepsilon/2\}.$$

We study local time of $y(t)$ in Γ ; by other words, we study a limit by $\varepsilon \rightarrow +0$ of values

$$l_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^{n-N}} \int_0^t \text{Ind}\{y(s) \in \Gamma(\varepsilon)\} ds.$$

Let $T > 0$ be a number. Denote $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Denote by β_j columns of the matrix β , $j = \bar{1}, \dots, n$. Denote by $\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_w$ corresponding σ -algebras being generated by u or $\{u(t) - w(s), s, t \in [0, T]\}$.

Let $N = n - 1$, Γ is piecewise C^2 -smooth surface of dimension $n - 1$, $\rho \in L_\infty(D)$ and function $\beta(x, t)$ is continuous. Then $\mathbb{E}|l_\varepsilon(T) - \hat{t}(T)|^2 \rightarrow 0$ by $\varepsilon \rightarrow 0$, where

$$\hat{t}(T) = V(a, 0) + \sum_{j=1}^n \int_0^T \frac{\partial V}{\partial x_j}(y(t), t) \beta_j(y(t), t) dw_j(t).$$

It is an analog of Tanaka formula for local time; here V is a measurable by Borel representative of the a solution of some analog of backward parabolic Kolmogorov equation; V and $\partial V / \partial x$ belong $L_2(Q)$. We derive the equations for V and for a characteristic function $\phi(z) = \mathbb{E}e^{-\hat{t}(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

Stochastic control problem $\mathbb{E}\hat{t}(T) \rightarrow \min$ is investigated for f being depended of control. An analog of Bellman equation is derived and a solvability was proved (see relative result in [2]).

We investigate below a convergence of local time for process $y(t)$ with disappearing diffusion tending to ordinary equation. Let $N = n - 1$, $\rho \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Consider a set of diffusion coefficients $\beta = \beta_\delta$, $\beta_\delta(x, t) \equiv \sqrt{\delta} B(x, t)$, $\delta \geq 0$. Denote by $\hat{t}_\delta(T)$ corresponding limits of $l_\varepsilon(T)$. Then $\mathbb{E}\hat{t}_\delta(T) \rightarrow \mathbb{E}\hat{t}_0(T)$ for every $\rho \in W_2^1(D)$. Let $\rho \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$, then $\hat{t}_\delta(T) = \mathbb{E}\{\hat{t}_\delta(T) | \mathcal{F}_a\} + \mathbb{E}\{\hat{t}_\delta(T) | \mathcal{F}_\omega\}$, and $\mathbb{E}|\mathbb{E}\{\hat{t}_\delta(T) | \mathcal{F}_\omega\}|^2 \leq \delta \cdot \text{const}$.

Some existence result is obtained for local time in point for vector diffusion process. Let $N = 0$, $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$; it is well-known fact that local is absent for deterministic initial vector a in this case. Let $\kappa > n/2 + 1$, $\rho \in W_2^\kappa(\mathbb{R}^n)$, and derivatives $\partial^m f(x, t) / \partial^m x$, $\partial^m \beta(x, t) / \partial^m x$ are bounded, $m = 1, \dots, \kappa + 2$. Then there exists a limit of $\mathbb{E}\{l_\varepsilon(T) | \mathcal{F}_\omega\}$ in $L^2(\Omega)$; equations for this limit are derived.

References

1. Dokuchaev, N.G.: Distribution of Ito processes: estimates for density functions and for conditional expectations of integral functionals. *The Probab. Appl.* 36, N4 825-833 (1994) (translated from Russian).
2. Dokuchaev, N.G.: Parabolic equations without Cauchy conditions and control problems for diffusion processes. Part 2. *Differential Equations*. 31 N8 (1995) 1409-1418 (in Russian).

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИНАМИКИ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОСНОВАНИЯХ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Национальный агроуниверситет (НАУ) Украины, Киев

Одним из важнейших условий обеспечения надежности, массо-, энерго- ресурсосбережения при создании современных приборов, машин, аппаратов является их тщательный расчет на колебания.

Из опыта эксплуатации, экспериментальных исследований систем на подвижных деформируемых основаниях (СПДО) известны некоторые существенные особенности колебаний их звеньев. В частности:

1) Неустойчивость форм колебаний (скачкообразные переходы колебаний одной (k -й) формы в колебания смежной ($k \pm 1$)-й формы) в широких интервалах пяти линейных безразмерных параметров системы при несущественных вариациях критической частоты $\omega_{кр}$;

2) Неустойчивость частот (возникновение колебаний одной и той же собственной формы на двух и более существенно различных частотах);

3) Широкое развитие в этих системах колебаний неполных (дробных) форм и некоторые другие особенности.

Результаты теоретических исследований подтверждают обоснованность указанных явлений, позволяют оценить параметры колебательных процессов с учетом указанных особенностей и вместе с тем, побуждают к проведению исследований с учетом нелинейных характеристик оснований (опор) этих систем.

В основу выполняемых в этой области работ положено приближенное решение соответствующих краевых задач с нелинейными граничными условиями традиционными методами математической физики с привлечением графоаналитических методов теории устойчивости.

Для случаев упругого опирания и упругого заземления звеньев в безинерционных опорах, получены зависимости собственных значений от сложных безразмерных параметров (критериев подобия), учитывающих: как конструктивные характеристики системы, так и режимные параметры ее движения.

Для систем на инерционных (упруго-массивных) опорах с нелинейными упругими характеристиками решения, приводя к характеристическим уравнениям вида

$$a_0 \bar{t}^4 + a_1(\lambda) \bar{t}^3 + a_2(\lambda) \bar{t}^2 + a_3(\lambda) \bar{t} + a_4(\lambda) = 0,$$

где коэффициенты $a_j(\lambda)$ - сложные функции собственных значений λ_k , \bar{t} - усредненное за период (по правилу среднего интегрально) безразмерное значение функции времени в решении уравнения движения.

Разработана методика исследования этого уравнения графоаналитическими методами теории устойчивости.

IDEALS IN MONOIDAL RINGS AND LIMIT CYCLES BIFURCATIONS

University of Pristina, Yugoslavia

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Belarus

Two problems, closely related to the second part of the 16-th Hilbert problem, namely, the centre-focus problem and the problem of bifurcation of small-amplitude limit cycles from a singular point $w = 0$ of the polynomial system of differential equations

$$i \frac{dw}{dt} = w - i\lambda w - \sum_{\substack{l+l=2 \\ l, j \geq 0}}^n a_{l-1, j} w^l \bar{w}^j. \quad (1)$$

where $\lambda \in R, a_{l-1, j} \in C$ are considered. We show, that these problems can be considered as purely algebraic problems; we give a recurrent formula to compute polynomials (called *focus quantity*) which generate an ideal J , and then it is necessary to find a basis of the ideal. Thus investigating the cyclicity or centre-focus problem it is useful to be able to solve the ideal membership problem and it is also necessary to know how to obtain the simplest description of the variety (the set of common zeros of all polynomials of J) $V(J)$ of the ideal J .

We consider focus quantities as elements of special monoidal rings, associated with the monoid, formed by solutions of the diophantine equation

$$L(\nu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu_2 + \dots + \begin{bmatrix} -1 \\ n \end{bmatrix} \nu_l + \begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix} \nu_{l+1} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu_{2l} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix},$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2l}), \nu_i \geq 0, m = 0, 1, 2, \dots$ and the vector $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ corresponds to the coefficient a_{ij} of (1). We investigate properties of this ring, which are useful for solving of considered problems.

We apply these ideas to solve the problem of small-amplitude limit cycles bifurcations for some cubic systems.

In particular, for the system

$$i \frac{dw}{dt} = w(1 - i\lambda - a_{10}w - a_{20}w^2 - a_{11}w\bar{w}). \quad (2)$$

the following proposition takes place.

Theorem 1. *The cyclicity of system (2) with respect to its spaces of coefficients is $l \leq 1$ or equal 2.*

МНОГЗНАЧНЫЙ ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Нижегородский государственный университет

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (1)$$

с однозначными аналитическими в области B правыми частями.

Теорема 1. Пусть: 1) замкнутая траектория ℓ из B для интегрирующего множителя $M(x, y)$ является полярным множеством порядка m ; 2) ветвь $M_1(x, y)$, получающаяся из M при одном полном обороте по кривой L индекса $+1$, где $L \cap \ell = \emptyset$ и L лежит в окрестности траектории ℓ , такова, что $M_1(x, y) \equiv KM(x, y)$, $K \equiv \text{const} \neq 1$. Тогда $m \neq 1$ и

$$h \equiv \int_0^T (P_x + Q_y) \Big|_{\ell} dt \neq 0.$$

Здесь T — период решения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, определяющего ℓ .

Теорема 2. Пусть система (1) с полиномиальными правыми частями имеет предельный цикл ℓ и интегрирующий множитель

$$\mu = \Phi_1^{\beta_1} \dots \Phi_k^{\beta_k}, \quad (2)$$

где Φ_1, \dots, Φ_k — взаимно простые неприводимые над полем комплексных чисел полиномы, коэффициенты которых как и величины β_1, \dots, β_k в общем случае комплексные, такие, что выполнены условия теоремы 1. Тогда в (2) число $k \geq 3$.

Множество полиномиальных систем (1) с интегрирующим множителем (2) при $k = 2$ обозначим M_n^2 .

Теорема 3. Пусть (1) из M_n^2 имеет предельный цикл ℓ и функция (2) сингулярна на ℓ . Тогда: 1) с точностью до обозначений $\Phi_1|_{\ell} \equiv 0$ и $\text{Im} \Phi_1 \equiv 0$; 2) либо $\text{Im} \Phi_2 \equiv 0$, $\text{Im} \beta_1 = \text{Im} \beta_2 = 0$, $\text{Re} \beta_1 = -m$, где m — порядок критичности цикла ℓ , либо $\mu/\bar{\mu} \neq \text{const}$ и тогда $h \neq 0$, $\text{Im} \beta_1 \neq 0$ и (1) допускает интеграл Дарбу.

Теорема 4. Пусть (1) из M_n^2 имеет предельный цикл ℓ и $\mu/\bar{\mu} \neq \text{const}$. Тогда $h \neq 0$ и с точностью до обозначений $\Phi_1|_{\ell} \equiv 0$, $\text{Im} \Phi_1 \equiv 0$, $\text{Im} \beta_1 \neq 0$, при этом $(\mu/\bar{\mu})^{1/2i \text{Im} \beta_1}$ будет каноническим интегралом, соответствующим ℓ .

Указаны достаточные условия, когда (1) принадлежит M_n^2 .

Основные результаты иллюстрируются примерами.

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ НА СЕБЯ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

В теории двумерных динамических систем особое место занимают полиномиальные отображения, то есть отображения вида :

$$T : \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются полиномами. Случай, когда $T(x, y)$ линейно, не представляет особой сложности и условие взаимной однозначности равносильно тому, что якобиан этого отображения не равен нулю.

Следующий за линейным преобразованием естественный шаг, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — квадратичные функции, т. е. $T(x, y)$ имеет вид:

$$T : \begin{cases} x' = P(x, y) \equiv a_{23}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} \\ y' = Q(x, y) \equiv b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00} \end{cases} \quad (2)$$

где $a_{ij}, b_{ij}, i, j = 0, 1, 2$, произвольные действительные числа. В этом случае получается аналогичный результат.

Л е м м а. Отображение T взаимно однозначно тогда и только тогда, когда его якобиан отличен от нуля в любой точке плоскости.

Кроме того оказывается, что взаимно однозначное отображение топологически сопряжено отображению Хенона

$$H_{a,b} : \begin{cases} x' = a + by - x^2 \\ y' = x \end{cases} \quad (3)$$

то есть существует такой гомеоморфизм $h(x, y)$, что $h \circ T = H_{a,b} \circ h$. Если при отображении $T(x, y)$ вида (2) для произвольной точки существует ее окрестность, которая имеет взаимно однозначный образ, тогда $T(x, y)$ всю плоскость отображает на всю плоскость взаимно однозначно.

Л и т е р а т у р а

1. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor
// *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69-77.
2. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical system
// Addison-Wesley comp. New York 1989.

СИЛЬНО НЕРАЗРУШИМЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧНЫ

Санкт-Петербург, Архитектурно-строительный университет
Kumoh National University of Technology, Korea
Санкт-Петербург, Технический университет

Пусть $X_0 \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$ — гладкое векторное поле, а $X_0^i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответствующий поток. Предположим, что X_0 имеет гладкое замкнутое (с компактными, без края) инвариантное многообразие M_0 , $X_0^i(M_0) = M_0$, $t \in \mathbb{R}$. Многие авторы занимались нахождением условий (как достаточных, так и необходимых) сохранения многообразия M_0 при C^1 возмущениях поля X_0 , т.е. условий, гарантирующих существование у всякого поля X , C^1 близкого к X_0 , инвариантного многообразия M_X , C^1 близкого к M_0 . В случае, когда многообразие M_0 локально единственно (локальная единственность M_0 означает, что M_0 является локально максимальным инвариантным множеством и это свойство локальной максимальности сохраняется при C^1 возмущениях поля X_0), такие условия были получены Р. Салкером, Ю.И. Неймарком и Р. Мане. Им было показано, что локально единственное инвариантное многообразие при C^1 возмущениях поля (является персистентным по терминологии Р. Мане) тогда и только тогда оно является формально гиперболическим. Однако, векторные поля с локально единственными инвариантными многообразиями не образуют плотного множества в пространстве $\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$ уже в случае $n > 1$, так, что представляет интерес задача нахождения условий (как достаточных, так и необходимых) сохранения инвариантных многообразий, которые не являются локально единственными. В этом направлении, Г.С. Осипенко было введено понятие сильной неразрушимости многообразия, обобщающее понятие его персистентности, и найдены достаточные условия его сильной неразрушимости.

Теорема 1 [1]. Если условие трансверсальности выполнено на компактном инвариантном многообразии за исключением, возможно, невырожденных сильных источников и невырожденных сильных стоков, то оно сильно неразруσιμο.

В случае, когда многообразие является локально инвариантным и проходит через состояние равновесия (периодическую траекторию) векторного поля, как показано в [2], эти условия являются и необходимыми для его сильной неразрушимости.

В направлении обращения Теоремы 1 авторами получен следующий результат.

Теорема 2 [3]. Если компактное инвариантное многообразие сильно неразруσιμο, то 1) условие трансверсальности выполнено в каждом состоянии равновесия (на каждой периодической траектории), за исключением, возможно, невырожденных сильных источников и невырожденных сильных стоков; 2) условие сильной относительной гиперболическости выполнено на каждой неблуждающей траектории, лежащей на многообразии.

1. Осипенко Г.С. Возмущение инвариантных многообразий I, II, III, IV. Дифференц. уравн., т. 21 (1985), 406-412; т. 21 (1985), 908-914; т. 23 (1987), 556-561; т. 24 (1988), 647-652.

2. Osipenko G.S., Ershov E.K. The Necessary conditions of the preservation of an invariant manifold of an autonomous system near an equilibrium point, J. of Applied Math. and Physics (ZAMP) v.11 (1993), 151-168.

3. Osipenko G.S., Ershov E.K., Kim J.H. Lectures on Invariant Manifolds of Perturbed Differential Equations and Linearization, State Tech. Univ., St. Petersburg, 1996, 1-2 p.

СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО ЭХОКОМПЕНСИРУЮЩЕГО
ФИЛЬТРА РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Санкт-Петербург. Военная академия связи.

В настоящее время для передачи речевых сигналов по цифровым каналам связи применяется 4-проводный режим. Использование 2-проводного режима влечет собой возникновение эхо-сигнала в канале. Практическое использование экономичного 2-проводного режима возможно лишь при создании эхокомпенсатора, снижающего мощность эхо-сигналов не менее чем на 60дБ. Классическим примером адаптивной фильтрации сигналов является фильтр Калмана.

Проведена оценка эффективности функционирования фильтра Калмана в эхокомпенсаторе речевого сигнала. Для этой оценки разработана модель речевого сигнала. Показателем эффективности являлось соотношение сигналов входа к выходу эхокомпенсатора в обратном канале.

Для решения задачи оптимального выбора коэффициентов фильтра предложена система разностных уравнений, описывающая их взаимосвязь. Решение данной системы уравнений позволило синтезировать структуру цифрового фильтра эхокомпенсации речевого сигнала. Исследована устойчивость функционирования и эффективность предложенного фильтра.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АДАПТИВНОГО ЭХОКОМПЕНСАТОРА ДЛЯ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Санкт-Петербург, Военная академия связи.

Рассмотрены три структуры эхокомпенсаторов: на трансверсальном, обычном рекурсивном фильтрах и фильтра Калмана. Проведена оценка эффективности функционирования адаптивных эхокомпенсаторов (АЭК) для речевых сигналов в одинаковых условиях функционирования. Показателем эффективности является отношение энергии сигналов на входе и выходе эхокомпенсатора в обратном канале. Алгоритм оптимального выбора коэффициентов основан на решении системы разностных уравнений.

Полученные результаты позволяют в зависимости от допустимого времени реакции фильтра АЭК выработать рекомендации по выбору его структуры. Время реакции определялось количеством шагов адаптации.

На 50 шаге адаптации наиболее эффективно работает АЭК-1 (на трансверсальном фильтре), где отношение сигнал / помеха, шум (ОСПШ) составило 16 дБ. ОСПШ АЭК-2 (на обычном рекурсивном фильтре) и АЭК-3 (на фильтре Калмана) составили соответственно 8 и 10 дБ. На 250 шаге АЭК-3 по ОСПШ на 6дБ выше чем у остальных исследуемых АЭК и составило 22 дБ. На 500 шаге ОСПШ АЭК-3 составило 32дБ, АЭК-2 и 1 соответственно 25 дБ и 18 дБ. На 1000 шаге ОСПШ АЭК-3 - 51 дБ, АЭК-2 -37дБ, АЭК-1 -22дБ. На 2000 шаге ОСПШ АЭК-3 превысило остальные на 20 дБ и составило 60дБ.

Исследована устойчивость функционирования предлагаемых АЭК.

**BASES OF OBSERVABLE FUNCTIONS
IN NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS**

Petrozavodsk State University

Consider the following nonlinear inverse problem. Real analytical observed system in a region $U \subseteq R^n$ is given by

$$\dot{x} = f(x), \quad y = g(x), \quad f \in C^\omega(U, R^n), \quad g \in C^\omega(U, R^m).$$

The model consists of moving law and measurement information. An observation segment $[0, T]$ and a region of possible final phase states $U_T = \{x(T)\} \subseteq U$ are given too. The observable problem is to determine a phase vector $x = x(T)$ by known measurement vector-function $y(\cdot) = y(\cdot; x, T) = g(x(\cdot; x, T)) : [0, T] \rightarrow R^m$. In applications it is often enough to reconstruct the values $\varphi(x(T))$ of some functions $\varphi : U_T \rightarrow R^1$.

Definition 1. The function $\varphi : U_T \rightarrow R^1$ is said to be observable in $M \subseteq U_T$ if there exists a functional Λ such that $\varphi(x) = \Lambda(y(\cdot; x, T))$, $x \in M$.

Observability of the pair (f, g) in M ($y(\cdot; x, T) \leftrightarrow x = x(T) \in M$) is equivalent to observability of all coordinate functions $\varphi_i(x) = x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Let's denote $\Phi(M)$ the set of all functions φ , observable in M .

Definition 2. The set of functions $\varphi_i \in \Phi(M)$, $i = \overline{1, p}$, is called to be a finite basis of $\Phi(M)$ if $\Phi(M)$ is nonlinear (functional) hull of basic observable functions $\varphi_i : \varphi(x) = F_\varphi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \forall x \in M, \forall \varphi \in \Phi(M)$.

Instead of using vector-functions $y(\cdot; x, T)$ one may operate with p -dimensional vectors $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) = (\Lambda_1(y(\cdot)), \dots, \Lambda_p(y(\cdot))) \leftrightarrow y(\cdot; x, T)$, $x \in M$. This is important for calculations.

To process measure data let's consider only a class of correct linear integral operators $\Lambda(y(\cdot)) = \langle k, y \rangle_{L_2}$, $L_2 = L_2([0, T], R^m)$. Admissible weight functions $k(\cdot)$ may be continuous, piecewise continuous, ...

Theorem. In any complete in L_2 system of admissible vector-functions $\{k_i, i \geq 1\} \forall M \subset U_T$ ($clM \subset U_T$) there exist such $k_\nu(\cdot)$ that $\varphi_\nu : U_T \rightarrow R^1$ ($\varphi_\nu(x) = \langle k_\nu, y(\cdot; x, T) \rangle_{L_2}$, $\nu = \overline{1, p}$) form finite basis of $\Phi(M)$. Without a priori restrictions $k(\cdot) \in \{k_i, i \geq 1\}$ the result may be strengthened : $M = U_T$, $p = n + 1$. More precisely, there exists a family of series of $n + 1$

functions $r_i(\cdot) \in C([0, T], R^m)$, $i = \overline{0, n}$, such that $\varphi_i(x) = \langle r_i, y(\cdot; x, T) \rangle$, $i = \overline{0, n}$, generate basis of $\Phi(U_T)$ ($\Rightarrow \Phi(M) \forall M \subseteq U_T$). In $M \subset U_T$ ($M \subset U_T$) some stable property for the bases of $\Phi(M)$ is fulfilled: if $\varphi_i(x) = \langle \tilde{k}_i, y(\cdot; x, T) \rangle$, $i = \overline{1, p}$, (in particular, $p = n + 1$) generate a basis of $\Phi(M)$ then for sufficiently small $\varepsilon > 0$ the functions $\varphi_i(x) = \langle \tilde{k}_i, y(\cdot; x, T) \rangle$ ($\|\tilde{k}_i - k_i\|_{L_2} < \varepsilon$), $i = \overline{1, p}$, generate a basis of $\Phi(M)$ too.

Corollary. If the pair (f, g) is observable in $M \subseteq U_T$ then $x(T) \in M$ may be identically defined by the p ($p = n + 1$) projections $\langle k, y \rangle$ of the output $y(\cdot)$ on basic $k(\cdot)$. Instead of keeping $y(\cdot)$ it is enough only to integrate $k'(t)y(t)$ on $[0, T]$ during the measure process.

The results are generalized in a case of $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$. Only analytical dependence of $\langle k, y \rangle$ from Cauchy data $x(T)$ is necessary.

The reconstruction problem of $\varphi(x(T))$ from $y(\cdot)$ in nonlinear integral operator form $\varphi(x(T)) = \int_0^T k(\tau, y(\tau)) d\tau \forall x(T)$ is also under consideration.

Following the idea of prof. Kirin N.E., such observable φ can be described as the elements of the attainability set for time T of conjugate system

$$v_t(t, x) + v_x(t, x)f(t, x) = k(t, g(t, x)), \quad v(0, x) = 0.$$

The weight function $k(\cdot, \cdot)$ is used as control.

In operator form the conjugate equation can be presented as "standard" linear infinite-dimensional control system

$$\dot{V}(t) = -A(t)V(t) + B(t)K(t), \quad V(0) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Here $V(t) = v(t, \cdot)$, $\dot{V}(t) = v_t(t, \cdot)$, $A(t)V(t) = v_x(t, \cdot)f(t, \cdot)$, $K(t) = k(t, \cdot)$, $B(t)K(t) = k(t, g(t, \cdot))$.

Two-point control problem $(k(\cdot, \cdot) : v(0, \cdot) = 0 \rightarrow v(T, \cdot) = \varphi)$ linearly depends on (k, v) and it is possible to use the results of more developed control theory and numerical methods of solving linear boundary-value problems.

This method generalizes the well-known duality principle in linear theory of controllability and observability.

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург, Российский гос.педагогический университет

Рассматриваются актуальные задачи современного группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Групповой анализ изучает симметрию -- фундаментальное свойство любого явления или процесса. В равной степени это касается и модели -- уравнения, описывающего это явление или процесс. Более того, модель как математическая абстракция, как правило, более идеализирована чем оригинал, и в силу этого обстоятельства обладает симметрией более высокого порядка. Симметричные методы исследования эффективны практически для всех типов уравнений -- от алгебраических до интегро-дифференциальных.

Основа группового анализа дифференциальных уравнений была заложена Софусом Ли в конце XIX века. Им была развита стройная теория непрерывных групп преобразований (групп Ли), допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), и показано, что все методы интегрирования в замкнутом виде, казавшиеся искусственными и специфичными, могут быть описаны с единых позиций на основе симметрий.

Широкое применение группового анализа в середине XX века вызвано в первую очередь насущными потребностями ряда прикладных наук, прежде всего - нелинейной механики и физики. Первоначально рассматривались отдельные уравнения (или узкие классы), обладающие локальными симметриями (чаще всего -- точечными), т.е. решалась прямая задача -- поиск группы, допускаемой конкретным уравнением. Однако при моделировании часто возникают и обратные задачи, так как требуется построить уравнение (модель), обла-

дающее априорной симметрией – группой преобразований или законом сохранения.

На этом пути за последнее время было получено несколько значительных результатов, убедительными примерами которых могут служить следующие утверждения.

Теорема 1. Нелинейное уравнение $y'' = F(x, y)$ допускает произвольную однопараметрическую точечную группу Ли с оператором $X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, если и только если

$$F = r^{-3/2} E\Phi(u) + \frac{2rr'' - r'^2}{4r^2} y + \frac{2r\sigma' - r'\sigma + 2\alpha\sigma}{2r^2} + \alpha^2 r^{-3/2} EV, \quad (1)$$

где $u = r^{-1/2} E^{-1} y$, $V = \int r^{-3/2} \sigma E^{-1} dx$, $E = \exp\left(\alpha \int \frac{dx}{r(x)}\right)$, $r(x)$, $\sigma(x)$, $\Phi(u)$ – произвольные функции своих аргументов, α – произвольный параметр.

Замечание. Если $F(x, y)$ имеет вид (1), то $X = r(x)\partial_x + \left\{\left[\frac{1}{2}r'(x) + \alpha\right]y + \sigma(x)\right\}\partial_y$; при $\alpha = 0$ симметрия становится вариационной, и исходное уравнение интегрируется в квадратурах.

Теорема 2. Уравнение $y'' = F(x, y)$ допускает экспоненциальный нелокальный оператор $X = \exp\left(\int \zeta(x, y) dx\right)\eta(x, y)\partial_y$, если и только если правая часть этого уравнения имеет вид (с точностью до известного точечного преобразования эквивалентности) $F(x, y) = f(x)y + g'(x)y^{-1} - g^2(x)y^{-3}$.

Замечание. Если известна фундаментальная система решений “укороченного” линейного уравнения $z'' = f(x)z$, общее решение исходного уравнения может быть записано в виде $y = z\left(C + 2\int \frac{g(x)dx}{z^2}\right)^{1/2}$. Таким образом, найденное уравнение является прямым обобщением уравнения Ермакова, переходит в него при $g = \text{const}$ и обладает всеми его свойствами. При этом легко показать, что оно в общем случае не допускает никакой точечной группы.

**THE THEOREM UNIQUENESS OF DECISION
OF AN INITIAL-EDGE PROBLEM FOR THE EQUATION
OF MIXED TYPE WITH PARALLEL LINES OF DEGENERATION
AND DELAY ON DIFFERENT VARIABLE.**

Zarubin A.N.

Orel State Pedagogical University, Orel, Russia.

The equation

$$L(u) \equiv u_{xx}(x, y) - \text{sign}(y^2 - R^2) u_{yy}(x, y) - u(x - \tau, y) - [H(y) - H(y - R)]u(x, y - R) = 0, \quad (1)$$

$0 < \tau, R \equiv \text{const}$, is considered in area $D = D_3^* \bigcup_{j=1}^2 D_j^* \bigcup_{j=1}^2 J_j$, where $D_3^* = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, |y| < R\}$ and $D_j^* = \bigcup_{h=0}^{+\infty} D_{jh}$ - elliptical and hyperbolic parts D , and $J_j = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = (-1)^j R\}$, and $D_{jh} = \{(x, y) : k\tau + (-1)^j y - R < x < (k+1)\tau - (-1)^j y + R, R < (-1)^j y < R + \tau/2\}$.

Let $D_3^* = P_1^* \cup P_2^*$, where $P_1^* = \{y < 0\} \cap D_3^*$, $P_2^* = \{y > 0\} \cap D_3^*$ and $P_j^* = \bigcup_{h=0}^{+\infty} P_{jh}$, where $P_{jh} = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, 0 < (-1)^j y < R\}$ ($j = 1, 2$).

As the regular decision of the equation (1) in area D we shall name function $u(x, y)$, continuous in D , have continuous derivatives in D , except, can, points $(k\tau, (-1)^j R)$, $(0, 0)$, in which derivatives $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ can address in infinity of the order less unit.

Problem A. To find regular in area D the decision $u(x, y)$ of the equation (1), satisfying to conditions

$$u(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{i(-1)} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad |y| \leq R; \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{y=(-1)^j y - R - k\tau} = \psi_{jh}(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2, \quad (4)$$

where $f_i(x, y)$, $\psi_{jh}(x)$ - given continuous rather smooth functions.

The problem A will be solved, if to define functions $\omega_j(x) = u(x, (-1)^j R)$ and $\nu_j(x) = u_y(x, (-1)^j R)$ ($j = 1, 2$).

Theorem. If there is the decision of a problem A for equation (1) in area D , then at $\tau \leq \sqrt{2}$, $R \leq \sqrt{2}$ it one.

The proof of the theorem is based on the statements 1-2_h.

Statement 1. Let $u(x, y)$ - the decision of the equation (1) in area D_3^* from a class $O(D_3^*) \cap C(D_3^*)$, satisfying to similar initial and boundary conditions (2) ($i = 3$), (3) and $\tau \leq \sqrt{2}$, $R \leq \sqrt{2}$.

Then

$$\beta = \int_0^{+\infty} \omega_1(x) \nu_1(x) dx - \int_0^{+\infty} \omega_2(x) \nu_2(x) dx \leq 0. \quad (5)$$

and

$$\beta + \iint_{\Sigma_1^+} \left[(1 - r^2/2) u_0^2(x, y) + (1 - H(-y)R^2/2) u_1^2(x, y) + \frac{3}{2} u^2(x, y) \right] dx dy \leq 0. \quad (6)$$

Statement 2_h. If $u_j(x, y) \in C(\overline{D}_{jh}) \cap C^2(D_{jh})$ - the decision of the equation (1) in areas D_{jh} , addressed in zero on the characteristics $y = (-1)^j(x + R - hr)$ and in areas $\overline{D}_{j(-1)}$, then

$$\beta_{jh} = (-1)^{j+1} \int_{hr}^{(h+1)r} \omega_j(x) \nu_j(x) dx \geq 0 \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

From inequalities (5)-(7) statement of the theorem of uniqueness follows.

**ABOUT SOME INTEGRATED TRANSFORMATIONS
OF THE THEORY OF THE EQUATIONS
OF A MIXED TYPE WITH LATE ARGUMENT.**

Zarubin A.N.

Orel State Pedagogical University, Orel, Russia.

The equation is considered

$$\int_0^{+\infty} k_{\nu}(x, t) u(t) dt = f(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

where

$$k_{\nu}(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi} t(x - m\tau)^{m+1/2}}{m! (2t)^{m+1/2}} J_{m+1/2}(t(x - m\tau)) H(x - m\tau), \quad (2)$$

and $0 < \tau \equiv \text{const}$, $J_{\nu}(z)$ - Bessel's function of the first sort, $H(\xi)$ - Hevisides function [1].

The necessity of the reference of integrated transformation (1) arises at the decision of problems taking into account after-action.

As [2] at $\text{Re } \nu > -1/2$

$$\Gamma(\nu + 1/2) J_{\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \varphi) (\cos \varphi)^{2\nu} d\varphi,$$

then

$$J_{m-1/2}(z) = \frac{2(2z)^{1/2-m}}{\sqrt{\pi} \Gamma(m)} \int_0^{\pi/2} (z^2 - t^2)^{m-1} \cos t dt,$$

if $m = 1, 2, \dots$

Then a nucleus, taking into account what $J_{\nu+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \begin{matrix} \cos z \\ \sin z \end{matrix} \right\}$ can be written down in the form

$$k_{\nu}(x, t) = H(x) \left\{ \begin{matrix} \cos xt \\ \sin xt \end{matrix} \right\} + \sum_{m=1}^{+\infty} \gamma_m H(x - m\tau) \int_0^{x-m\tau} ((x - m\tau)^2 - \eta^2)^{m-1} \left\{ \begin{matrix} (x - m\tau) \cos t\eta \\ \eta \sin t\eta \end{matrix} \right\} d\eta, \quad (3)$$

where $\gamma_m = (m! \Gamma(m) 2^{2m-1})^{-1}$.

The same representations for a nucleus (2) will take place, if to take into account, that [3, formula 2. 12. 4. 6]

$$\Gamma(\beta) 2^{\beta-1} a^{\beta+\nu} J_{\beta+\nu}(ac) = c^{\beta} \int_0^a x^{\nu+1} (a^2 - x^2)^{\beta-1} J_{\nu}(cx) dx,$$

at $a, \text{Re } \beta > 0; \text{Re } \nu > -1$.

The expressions (3) enable similarly work [4] to construct algorithm of reference of equation (1) in a class of functions $u(s, y) \in C[0, +\infty)$, $u(+\infty) = 0$ and sufficient conditions on $f'(s)$.

REFERENCE LITERATURE.

1. Маричев О.Н. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск, 1978.
2. Евстигнев Г., Ордович А. Высшие трансцендентные функции. т. 2. М., 1974.
3. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.Н. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
4. Зярубин А.Н. // Дифференц. уравнения. т. 32, № 1, Минск, 1996. с. 126-127.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Казань, Технологический университет

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{s=0}^n a_s(x) \frac{d^{n-s} y}{dx^{n-s}} = f(x), \quad (1)$$

где $a_s(x), f(x) \in C[\alpha, \beta]$. С помощью оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$ уравнение (1) записывается в виде $\sum_{s=0}^n a_s D^{n-s} y = f$. Пусть оператор $1/D^k$ означает k -кратное интегрирование по x . Если уравнение (1) допускает факторизацию $(D - \dot{u}_1)^{\alpha_1} (D - \dot{u}_2)^{\alpha_2} \dots (D - \dot{u}_m)^{\alpha_m} y = f / a_0$, $\left(\dot{u}_i = \frac{du_i}{dx} \right)$, то общее решение имеет представление $y = \bar{y} + y_0$, где $\bar{y} = \prod_{j=1}^m \left[\exp(u_{j-1} - u_j) \frac{1}{D^{\alpha_j}} \right] \frac{f}{a_0}$ - частное решение неоднородного уравнения (1) ($f \neq 0$), $y_0 = \sum_{k=1}^m \prod_{j=1}^k \left[\exp(u_j - u_{j+1}) \frac{1}{D^{\alpha_j}} \right] \cdot 0$ - общее решение однородного уравнения (1) ($f = 0$), $u_0 = u_{m+1} = 0$, $\frac{1}{D^s} \cdot 0 =$

$$= \frac{C_1 x^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{C_2 x^{s-2}}{(s-2)!} + \dots + C_s, \quad \forall C_l = \text{const}, \quad l = 1, \dots, s.$$

Исследование проводится символическим методом [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиацкино Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. - М.-Л.: ГТТИ, 1933.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

г. Липецк. Государственный технический университет

В банаховом пространстве X изучаются свойства обратимости и равномерной инъективности линейных дифференциальных операторов

$$B(t) \frac{d}{dt} - A(t) = \mathcal{L} : C^1 \rightarrow C,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $C = C(\mathbb{R}, X)$, $C^1 = C^1(\mathbb{R}, X)$ - стандартные пространства функций $u : \mathbb{R} \rightarrow X$, $A, B \in C(\mathbb{R}, \text{Hom}(X, X))$.

Предположим, что множество сдвигов $\{A(t+h_j)\}$ и $\{B(t+h_j)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости на каждом компактном интервале $J \subset \mathbb{R}$. Введем предельные операторы $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{B}(t)$.

$\frac{d}{dt} - \tilde{A}(t)$, где

$$\tilde{A}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} A(t+h_j), \quad \tilde{B}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} B(t+h_j)$$

равномерно на любом компактном интервале числовой прямой.

Будем говорить, что оператор $\tilde{\mathcal{L}} : C^1 \rightarrow C$ обладает свойством $\Phi_{\tilde{\mathcal{L}}}$, если каждая ограниченная последовательность функций u_j в C^1 , для которой последовательность $\tilde{\mathcal{L}}u_j$ локально сходится в C , обладает локально сходящейся последовательностью в C^1 .

Теорема. Два нижеследующих условия эквивалентны:

1. Оператор $\mathcal{L} : C^1 \rightarrow C$ равномерно инъективен;
2. Каждый оператор $\tilde{\mathcal{L}} : C^1 \rightarrow C$ обладает свойством $\Phi_{\tilde{\mathcal{L}}}$ и уравнение $\tilde{\mathcal{L}}u = 0$ не имеет ненулевых решений в C^1 .

Равномерная инъективность оператора $\mathcal{L} : C^1 \rightarrow C$ здесь означает, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{C^1} \leq k \|\mathcal{L}u\|_C$$

для всех $u \in C^1$ с некоторой постоянной $k > 0$.

К ТЕОРИИ РАСЧЕТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

СПбГУ, Санкт-Петербург

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^*, \quad F(x, t) = (F_1(x, t), \dots, F_n(x, t))^*. \quad (1)$$

Предполагается, что n -мерная векторная функция $F(x, t)$ задана в множестве $\Omega = \{(x, t): \|x\| < R, t \geq 0\}$, $0 < R < +\infty$. Пусть функция $F(x, t)$ удовлетворяет в Ω известным условиям, гарантирующим существование, единственность и продолжимость по t от $t_0 \geq 0$ до $+\infty$ всех тех решений системы (1), графики которых располагаются в множестве Ω , t_0 — начальный момент.

Определение 1. Движение $x = 0$ системы (1) называется *расчетно устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < R$, существуют такие величины $\delta(\varepsilon)$, $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ и $T(\varepsilon) \geq 0$, что для всех x_0 , $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ и $t_0 \geq T(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при любых $t \geq t_0$. Если кроме того для всех x_0 , $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ и $t_0 \geq T(\varepsilon)$ при данном выборе $\delta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon) \geq 0$ справедливо соотношение $\|x(t, t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение $x = 0$ системы (1) называется *асимптотически расчетно устойчивым*.

Определение 2. Движение $x = 0$ системы (1) называется *расчетно неустойчивым*, если существует такое число $\bar{\varepsilon}$, $0 < \bar{\varepsilon} < R$, что для любых $T \geq 0$ и δ , $0 < \delta < R$, можно указать такие $t_0 \geq T$ и x_0 , $\|x_0\| < \delta$, что для некоторого $t_1 > t_0$ выполняется неравенство $\|x(t_1, t_0, x_0)\| \geq \bar{\varepsilon}$.

Лемма. Пусть вещественное число $\lambda < 0$. Предположим, что заданная и непрерывная при всех $t \geq 0$ скалярная вещественная функция $g(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$g(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

$$\left| \int_0^{+\infty} g(t) dt \right| < +\infty. \quad (3)$$

Тогда справедливо соотношение

$$e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda \tau} g(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3')$$

Замечание 1. Утверждение леммы верно и в том случае, когда λ — комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а функция $g(t)$ принимает комплексные значения. При этом соотношения (2), (3) и (3') выполняются для вещественной и мнимой частей указанных выражений.

Замечание 2. Условия (2) и (3) не являются взаимоисключающими. Например, функция $a(t) = h(t) \exp(-\alpha t)$ удовлетворяет одновременно этим условиям, здесь $\alpha > 0$, функция $h(t)$ определена, непрерывна и ограничена для всех $t \geq 0$.

Приведем примеры функций, подчиняющихся условиям (2) и (3):

1) $g(t) = (1+t)^{-\alpha}$, $\alpha = \operatorname{const} > 0$, эта функция всегда удовлетворяет условию (2), а условию (3) — лишь при $\alpha > 1$.

$$2) g_2(t) = 3 \cos(1+t)^2 - \sin(1+t)^2 / (1+t)^2;$$

$$3) g_3(t) = 4(1+t) \cos(1+t)^4 - \sin(1+t)^4 / (1+t)^2.$$

Функции $g_2(t)$, $g_3(t)$ удовлетворяют условию (3), а условие (2) не удовлетворяют. Заметим, что функции $g_2(t)$, $g_3(t)$ являются сильно колеблющимися в зависимости от t , а функция $g_3(t)$ не ограничена при $t \geq 0$.

Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad (4)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$; A — постоянная вещественная $n \times n$ -матрица, функции $f_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ определены, непрерывны и принимают вещественные значения для всех $t \geq 0$.

Теорема 1. Пусть все собственные числа матрицы A системы (4) имеют отрицательные вещественные части, а функции $f_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, одновременно удовлетворяют условию (2) или условию (3). Тогда движение $x = 0$ системы уравнений (4) асимптотически расчетно устойчиво.

Теорема 2. Предположим, что все собственные числа матрицы A системы (4) имеют отрицательные или нулевые вещественные части, причем нулевым вещественным частям соответствуют простые элементарные делители. Пусть функции $f_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, одновременно удовлетворяют условию

$$\int_0^{+\infty} |f_j(t)| dt < +\infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда движение $x = 0$ системы (4) расчетно устойчиво.

Рассмотрим линейные однородную и неоднородную системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y + f(t), \quad (6)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $y = (y_1, \dots, y_n)^T$; $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, $n \times n$ -матрица $P(t)$ имеет элементы $p_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, которые определены, непрерывны и ограничены при всех $t \geq 0$ и принимают вещественные значения, а функции $f_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, определены, непрерывны при всех $t \geq 0$ и также принимают вещественные значения.

Теорема 3. Пусть вектор-функция $f(t)$ в правой части системы уравнений (6) такова, что эта система имеет решение $\psi(t)$, удовлетворяющее предельному соотношению $\|\psi(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Утверждается следующее:

1) если решение $x = 0$ системы (5) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, причем устойчивость является равномерной, то движение $y = 0$ системы (6) расчетно устойчиво (асимптотически расчетно устойчиво);

2) если решение $x = 0$ системы (5) не является равномерно устойчивым, то движение $y = 0$ системы (6) расчетно неустойчиво.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МАКСИМИЗАЦИИ ПРОЕКЦИИ В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ ВОЗМУЩАЕМЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург, С.-Петербургский госуниверситет

Для объекта, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax + Bw$, $t \in [t_0, t_1]$ и доступной измерению вектор-функцией $y(t) = G^T x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ рассматривается численная реализация метода максимизации проекции [1] для восстановления возмущения $w(t)$ и начального вектора $x_0 = x(t_0)$. Ошибочный подход к решению задачи восстановления указанных элементов порождает сопряженную граничную задачу вида

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -A^T \psi + Gk(t), \\ \psi(t_0) &= -I, \quad \psi(t_1) = 0, \\ B^T \psi(t) &= -g(t),\end{aligned}$$

в предположении, что скалярное произведение искомого элемента $q = (x_0, w(t))$ в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^n \times L^2[t_0, t_1]$ на произвольный элемент $p = (i, g(t))$ того же пространства Ω , т.е. величина $p \cdot q = I^T x_0 + \int_{t_0}^{t_1} g(t)w(t)dt$, ищется в виде интеграла $p \cdot q = \int_{t_0}^{t_1} k(t)y(t)dt$.

Естественным образом возникает задача определения проекций искомого элемента на последовательность вложенных друг в друга линейных многообразий. В свою очередь, поиск указанных проекций сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с неотрицательно определенными матрицами. Обсуждаются методы решения полустойкой, вообще говоря, особой, системы уравнений. Приводятся результаты численного моделирования процесса восстановления искомого элемента.

Литература.

1. Кирилл Н.Е. Методы последовательных итераций в задачах оптимизации управляемых систем. СПб., Изд-во ЦУ, 1975.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧАХ АТМОСФЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Санкт-Петербург. Государственный Технический Университет

Решение большого круга задач метеорологии, включая задачу пограничного слоя атмосферы, основано на решении нелинейной системы дифференциальных уравнений параболического типа.

Как известно, в общем виде такая система не может быть решена аналитическими методами. Для численного ее решения строится консервативная однородная разностная схема с областью интегрирования, представляющей собой прямоугольник с неравномерной сеткой по переменным. Полученная система уравнений разбивается на три подсистемы, для каждой из которых выбирается отдельный метод численной реализации и проверяются условия, обеспечивающие его устойчивость.

На основе этой системы разработано несколько версий многоуровневой модели атмосферного пограничного слоя с высоким разрешением по вертикальной координате, обеспечивающих достаточную точность расчета метеорологических параметров. Модель легко модифицируется в зависимости от требований конкретной практической задачи и позволяет использовать климатологическую информацию для определения входных параметров. Модель обеспечивает достаточно полный учет физических эффектов, определяющих структуру атмосферного пограничного слоя над сложной подстилающей поверхностью, в том числе учет фазовых переходов влаги и рельефа.

Построенная модель используется для описания деформаций локального климата в окрестности прудов-охладителей атомных и гидроэлектростанций, на побережье искусственных водоемов, а также изменений локального климата связанных со строительством приливных электростанций, прокладкой газопроводов в тундре, урбанизацией Сибирских регионов России, орошением пустынных районов, осушением болот, изменением характера растительности и т.п.

On the Stability of Nonautonomous Systems

Donetsk State University, Ukraine

The classical criterion of asymptotic stability of an equilibrium point, which was established by A.M. Lyapunov, supposes existence of positive definite function $V(t, x)$ and negative definite function $\frac{dV}{dt}$. In applications one can sometimes construct positive definite function V and negative semidefinite its derivative $\frac{dV}{dt}$. For these cases E.A. Barbashin and N.N. Krasovskiy obtained the effective criterion of asymptotic stability in assumption, that right-hand parts of differential equations are autonomous. Then N.N. Krasovskiy proved this criterion for system with periodic right-hand part. V.M. Matrosov showed that this criterion is not correct for common case of nonautonomous systems.

This paper is devoted to proving Barbashin-Krasovskiy criterion for the case of almost periodic systems. Moreover in such case the stability is equiasymptotic.

БИФУРКАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург, СПбГУ, СПбГТУ

Предложен метод нахождения предельных циклов квадратичных систем. Этот метод позволяет любую квадратичную систему свести к уравнению Ляпуна простого вида, количество предельных циклов которого, совпадает с количеством предельных циклов исходной системы.

Эффективно этот метод может быть использован для изучения квадратичных систем с малым параметром. В этом случае вопрос о количестве предельных циклов сводится к вопросу о количестве перемен знака определенной функции. Эта функция представляет из себя интеграл, зависящий от параметра. Сложность исследования этой функции обусловлена отчасти тем, что пределы интегрирования зависят от параметра.

Развитие этого метода и использование компьютерного моделирования позволяет проследивать рождение и исчезновение предельных циклов квадратичных систем через полустойчивый цикл.

Проведены компьютерные эксперименты по моделированию квадратичных систем, обладающих четырьмя предельными циклами, окружающих одно положение равновесия. В каждой из этих систем два предельных цикла являются локальными, получаемые из сложного фокуса второго порядка.

УЛУЧШЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Санкт-Петербург. Санкт-Петербургский государственный технический университет

Задача нестационарной теплопроводности в рамках конечно-элементной модели описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$C\dot{x} + K(t)x = F(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t)$ — матрица-столбец узловых значений температуры, C — матрица теплоемкости, $K(t) = K_c + K_h(t)$, K_c — матрица теплопроводности, $K_h(t)$ — матрица конвекции с зависящими от времени коэффициентами, $F(t)$ — матрица-столбец тепловых сил.

Рассматривается применение численных методов Рунге-Кутты к решению задачи нестационарной теплопроводности. Качество работы численного метода может быть проанализировано при решении скалярного "тестового уравнения" $\dot{x} = \lambda x$, где λ — любое собственное число задачи (см. [1], [2], [3]). Отметим, что в задаче теплопроводности (при замороженных коэффициентах матриц) все собственные числа вещественны и отрицательны. Интегрируя тестовое уравнение методами Рунге-Кутты, найдем, что полученные при численном интегрировании приближенные значения x_{k+1} и x_k связаны соотношением $x_{k+1} = \rho(h\lambda)x_k$, где h — шаг интегрирования, $\rho(h\lambda)$ — переходный множитель, определяемый конкретным методом Рунге-Кутты.

Отметим, что конечно-элементная модель хорошо описывает только медленные процессы, в то время как быстрые процессы описываются со значительно меньшей точностью, а очень быстрые процессы и вовсе не описываются. Поэтому алгоритм численного интегрирования должен быть сконструирован так, чтобы обеспечить хорошее воспроизведение только медленно убывающих экспонент. Учитывая сказанное выше, с целью уменьшения времени счета, шаг интегрирования обычно выбирают довольно большим, так что выполняются соотношения $\min |h\lambda_i| \ll 1$ и $\max |h\lambda_i| \gg 1$. При этом естественным требованием к методу численного интегрирования, кроме высокой точности, становится выполнение условий абсолютной устойчивости и L -устойчивости. Последнее условие необходимо для адекватного воспроизведения быстрых процессов.

При решении задач нестационарной теплопроводности традиционно применяются одностадийные методы: неявный метод Эйлера с переходным множителем $\rho(h\lambda) = (1 - h\lambda)^{-1}$; метод Галеркина, $\rho(h\lambda) = (1 + h\lambda/3)(1 - 2h\lambda/3)^{-1}$; метод Кранка-Николсона, $\rho(h\lambda) = (1 + h\lambda/2)(1 - h\lambda/2)^{-1}$. Однако установлено, что традиционные методы не дают достоверных результатов, особенно в случае быстро изменяющегося во времени конвективного теплообмена из поверхности тела, даже при малых шагах интегрирования. В таких задачах традиционные методы либо не работают (метод Кранка-Николсона), либо приводят к появлению неоправдан-

ных осцилляций температуры (неявный метод Эйлера и метод Галеркина).

Мы предлагаем использовать для решения задачи нестационарной теплопроводности абсолютно устойчивый и L -устойчивый метод Рунге-Кутты второй степени точности с периодным множителем, определяемым формулой

$$\rho_i(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 2\alpha_i)h\lambda}{(1 - \alpha_i h\lambda)^2} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

где $\alpha_1 = (2 - \sqrt{2})/2$, $\alpha_2 = (2 + \sqrt{2})/2$.

Численный алгоритм с переходным множителем (2) реализуется с помощью двухстадийной диагонально неявной схемы метода Рунге-Кутты.

$$\begin{aligned} [C + \alpha_i h K(t_k + \frac{h}{2})] \delta_k &= -K(t_k + \frac{h}{2})x_k + F(t_k + \frac{h}{2}) \\ [C + \alpha_i h K(t_k + \frac{h}{2})] \Delta_k &= -K(t_k + \frac{h}{2}) (x_k + h(\frac{1}{2} - \alpha_i)\delta_k) + F(t_k + \frac{h}{2}) \\ x_{k+1} &= x_k + h\Delta_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Три основных качества делают новый алгоритм более эффективным по сравнению с традиционно применяемыми в этой задаче: вторая степень точности, абсолютная устойчивость и L -устойчивость. Анализируя характеристики традиционных методов, нетрудно показать, что ни один из них не имеет всех трех положительных качеств одновременно. В соответствии с (3) численная процедура требует последовательного решения двух систем алгебраических уравнений с одной и той же симметричной матрицей в левой части и различными правыми частями, что практически не приводит к увеличению времени счета по сравнению с традиционно используемыми в этой задаче одностадийными методами. Численные эксперименты подтверждают высокую точность и устойчивость предлагаемого метода по сравнению с традиционными. Создано оригинальное программное обеспечение, ориентированное на использование современных компьютеров. Имеется положительный опыт использования нового метода при исследовании задач теплопроводности элементов энергетического оборудования (см. [4]).

Литература

- [1] Холл Дж., Уайт Дж., ред. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. 312 с.
- [2] Рокитский Ю. Б., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. -- М.: Наука, 1979. 208 с.
- [3] Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. 334 с.
- [4] Исупов Ю. Г., Шабров И. П. Конечноеэлементный анализ нестационарных полей температур в деталях ГТУ. Проблемы прочности. 1989. N 12.

On the definition of eigenvalues and eigenfunctions of

some differential operators of third and fourth order.

TOGLIATTY, PTIS

In the domain $\Omega = \{x, y \mid -1 < x, y < 1\} \subset R^2$ two eigenvalue problems [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta u + \lambda u = 0,$$

(I)

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta v + \lambda v = 0,$$

(II)

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad v'_x(0, y) = 0.$$

are considered. The Fourier method of separation of variables gives the following problems for ordinary differential equations

$$X''' - \mu X' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(-1) = 0, \quad X(1) = 0 \quad (1_1)$$

$$X^{IV} - \mu X'' + \lambda X = 0, \quad X(\pm 1) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 0 \quad (1_2)$$

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad Y(1) = 0, \quad Y(-1) = 0 \quad (2)$$

Since the system of eigenfunctions $\{Y_k(y)\}$ of two-point boundary value problem (2)

is complete [2] in the space $L_2[-1, 1]$ of functions with zero values at $y = \pm 1$ the

Fourier method gave all eigenvalues of the problem (I) and (II). These eigenvalues have

the forms : $\lambda_{kl} = \pm \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}}(k^2 + 16l^2)\sqrt{k^2 + 4l^2}$ the problem (I) and

$\lambda_{kl} = \frac{\pi^4}{64}(k^2 + 16l^2)^2$ for the problem (II); $k, l = 1, 2, \dots$

The corresponding eigenfunctions are

$$u_{kl}(x, y) = e^{ax} \sin \pi l x \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{2} y, & k = 2j \\ \cos \frac{k\pi}{2}, & k = 2j-1 \end{cases};$$

where $a = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + 4l^2}$ and

$$v_{kl}(x, y) = \sin \pi l x \cdot \operatorname{ch} \pi \sqrt{l^2 + \frac{k^2}{8}} \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{2} y, & k = 2j \\ \cos \frac{k\pi}{2} y, & k = 2j-1 \end{cases}$$

References .

1. Dzhrayev T. D. Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types . Tashkent . Fan . 1978 .
2. Lovitt U. B. Linear integral equations . M. GITTL . 1957 .

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургской государственный университет

1. Рассматривается система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Ay + Y(x, y),\end{aligned}$$

где x, X — скаляры, y, Y — n -мерные векторы, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Скаляр X и компоненты вектора Y аналитичны в окрестности начала координат, ряды, их представляющие начинаются с членов не ниже второго измерения и мажорируются прогрессией

$$\sum_{k+k_1+\dots+k_n \geq 2} M \left(\frac{x}{r}\right)^k \left(\frac{y_1}{r}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{y_n}{r}\right)^{k_n}$$

Заменой переменных система приводится к так называемому ляпуновскому виду

$$\dot{\xi} = P(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = A\eta + Q(\xi, \eta).$$

Это значит, что $P(\xi, 0) = g\xi^m + \dots$, и ряды, представляющие вектор $Q(\xi, 0)$, начинаются с членов не ниже $(m+1)$ -го измерения. Указанная замена переменных зависит лишь от A, M, r .

Строится функция $\beta(A, M, g, r) > 0$ такая, что если $g < 0$, а m — нечетно, то шар $\{\xi^2 + \eta^2 < \beta\}$ располагается в области притяжения нулевого решения.

2. Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y, z), \\ \dot{y} &= \lambda x + Y(x, y, z), \\ \dot{z} &= Az + Z(x, y, z), \end{aligned}$$

где x, y, X, Y — скаляры, z, Z — n -мерные вектор-столбцы, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Скаляры X, Y и компоненты вектора Z аналитичны, ряды, их представляющие, начинаются с членов не ниже второго порядка и мажорируются прогрессией

$$\sum_{k+k'+k_1+\dots+k_n \geq 2} M \left(\frac{x}{r}\right)^k \left(\frac{y}{r}\right)^{k'} \left(\frac{z_1}{r}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{z_n}{r}\right)^{k_n}.$$

Предлагается замена переменных, приводящая систему к ляпуновскому виду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= F(\theta, \rho, \eta) \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= A_1 \eta + H(\theta, \rho, \eta). \end{aligned}$$

Ряд, представляющий $F(\theta, \rho, 0)$ начинается с члена $g\rho^m$, а ряды, представляющие $H(\theta, \rho, 0)$, начинаются с членов не ниже $(m+1)$ -го измерения. Так же, как в предыдущем случае, эта замена зависит лишь от λ, M, A и r . Строится функция $\beta(\lambda, A, M, g, r) > 0$ такая, что если $g < 0$, то шар $\{\rho^2 + |\eta|^2 \leq \beta\}$ располагается в области притяжения нулевого решения.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Красноярск, Красноярский ВЦ РАН

Рассматриваются L -определяющие уравнения, предназначенные для нахождения некоторых классов дифференциальных связей. Новые определяющие уравнения обобщают классические определяющие уравнения, составляющие основу теории С.Ли. Указаны достаточные условия, гарантирующие совместность системы, образованной исходными уравнениями с частными производными и найденными дифференциальными связями. Приводятся нетривиальные примеры использования L -определяющих уравнений для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики.

S.I.Senashov

LIE GROUPS AND PROBLEMS OF MECHANICS
OF DEFORMABLE SOLID

Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State University

In this report several aspects of using algebraic methods for investigation and solution of differential equations of mechanics (mechanics of deformable solid) are considered. Some algebraic problems, the solution of which, from the authors point of view, will allow to make progress in investigation of differential equations of mechanics, are formulated. The author will show how to use conservation laws for solving boundary problems of differential equations.

Supported by the Russian Fund for Fundamental Research (grant 01-95-01839).

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ПОРШНЕВЫХ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ МАШИН

г. Санкт-Петербург, Россия

В последнее время как у нас в стране, так и за рубежом возрастает интерес к поршневым регенеративным машинам замкнутого цикла. К данному классу тепломеханических устройств относятся двигатели и холодильные машины, работающие по циклам Стирлинга, Эриксона, Вьельме-Такофиса, Джифферда-Макмагона. Интерес, в первую очередь, обусловлен возможностью создания на их основе экологически чистых и высокоэффективных энергетических устройств различного функционального назначения.

Однако, сложность термодинамических циклов, связанных с нестационарностью тепломассового обмена, затрудняет их точное математическое описание, а следовательно, и проектирование. Без математического моделирования на этапе проектирования доводка создаваемых машин превращается в многолетние изнурительные экспериментальные исследования. Спецификой рабочих циклов является то, что в данных машинах нет цепочки термодинамических процессов, через которые проходила бы каждая частица рабочего тела. Процессы расширения и сжатия в машинах сопровождаются перетеканием рабочего тела из рабочих областей в аппараты теплообмена и из аппаратов в рабочие полости, т.е. в течении цикла происходит перераспределение массы рабочего тела между разными температурными уровнями. Поэтому под термодинамическим циклом данного класса тепломеханических устройств понимают интегральный результат, получаемый при суммировании процессов взаимодействия отдельных частиц с внешней средой. Некоторого упрощения анализа достигают при рассмотрении не каждой частицы, а параметров газа в фиксированной точке рабочего объема, т.е. нестационарных процессов с переменной массой.

Ввиду этого, для создания расчетных моделей, используются идеализированные циклы, которые позволяют приблизительно выявить взаимосвязь конструктивных размеров с энергетическими характеристиками и влияние отдельных факторов на эффективность работы машин. Для адекватности описания физических процессов, происходящих во внутреннем контуре, применяются математические модели, представляющие собой системы дифференциальных уравнений нелинейного характера.

В настоящее время существует несколько подходов к решению данных систем дифференциальных уравнений с использованием численных методов. К ним относятся методы, основывающиеся на использовании вспомогатель-

ных функций, суть которых состоит в получении решения в форме полных рядов Фурье и вспомогательных функций, применяемых при анализе кусочно-линейных систем, а также классические методы Рунге-Кутты различного порядка точности.

Учитывая особенность вычисления индикаторных мощностей машин данного класса, обусловленных полным оборотом вала привода и цикличностью процессов, автором был апробирован и предлагается к использованию при расчете поршневых регенеративных машин метод конечных разностей. Решение данным методом позволяет получить искомые значения с достаточно высокой степенью точности. Для вычисления значения мгновенных параметров газа в рабочих объемах поршневых машин формируется система разностных уравнений. Разностные уравнения составляются из условия деления цикла полного оборота вала привода на множество мелких временных интервалов. В качестве начальных условий задаются ожидаемые значения параметров в момент времени $t=0$, соответствующему верхнему мертвому положению одного из рабочих поршней.

С целью повышения точности получаемого решения при формировании разностных соотношений целесообразно принимать шаг по углу поворота кривошипа равным 1° , что соответствует шагу по времени в 0,0001111 секунду. Кроме этого, начальные условия должны быть дополнены условием цикличности, означающим повторяемость одноименных параметров в одноименных точках. Ввиду некоторой произвольности выбора начальных параметров может оказаться, что в момент времени полного первого оборота значения ряда параметров отличаются от их значений в момент $t = 0$. В этом случае расчет необходимо продолжать до второго оборота, принимая в качестве начальных значения параметров предшествующего оборота. Контроль повторяемости достаточно проводить по одному из параметров, например, по значению давления или температуры, задавая величину максимальной погрешности.

В процессе решения системы дифференциальных уравнений методом конечных разностей, с использованием ПЭВМ, центральным звеном является вычислительный алгоритм, под которым понимается конечная последовательность предписаний, однозначно определяющая процесс преобразования исходных данных в результат решения задачи. Автором разработаны алгоритмы по адиабатным и гидродинамическим моделям для расчета некоторых типов поршневых регенеративных машин.

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ НА РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Санкт-Петербург, С.-Петербургский госуниверситет

Многочисленные задачи прикладной математики могут быть сформулированы как задачи оценивания функционалов на решениях дифференциальных включений. В докладе рассматривается одна общая постановка такой задачи для случая нелинейного векторного включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad g(x) \in Y, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

Здесь $x=x(t)$ - неизвестная дифференцируемая вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^n , $F(x)$ - заданное непрерывное отображение \mathbb{R}^n в множество подмножеств \mathbb{R}^n , g - заданная вектор-функция и $Y=Y(t)$ - известное непрерывное семейство функций в \mathbb{R}^m .

Ставится вопрос об оценке множества значений функции $\varphi(x(\tau))$, $\tau \in (0, T)$ на множестве всех решений $x = x(t)$ включения (1). Исследование вопроса опирается на технику ведения сопряженных экстремальных задач, которое можно решать прямыми методами поиска экстремума. Последние связаны с решением граничных задач вида [1]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x) = \kappa(t, g(x)), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \in F(x) \quad (2)$$

$$V(0, x) = V(T, x) = 0, \quad V(\tau-0, x) - V(\tau+0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Здесь искомыми являются функции $V(t, x)$ и $\kappa(t, y)$. Рассматривается случай управляемых включений (1) и задача управления множеством векторных функционалов $(\psi_1(x(\cdot)), \dots, \psi_s(x(\cdot)))$.

Литература.

1. Кири́н Н.Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. Спб. Изд-во С.-Петербургского государственного университета, 1993.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ДИСКРЕТНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Санкт-Петербург, С.-Петербургский госуниверситет

Для стационарных управляемых систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = G_0 x(t) + \int_{-h}^0 dG(\tau) x(t+\tau) + Nu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

предлагается метод анализа устойчивости и метод оптимальной стабилизации нулевого решения по дискретному приближению, полученному путем перехода к интегральному эквиваленту системы (1) с помощью формулы Коши, с последующим использованием квадратурной формулы. Это дает многомерную систему вида

$$z_{\kappa+1} = P(h)z_{\kappa} + Q(h)u_{\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

где $z_{\kappa} = (x^T(\kappa h), x^T((\kappa-1)h), \dots, x^T((\kappa-j)h), h)$, $u_{\kappa} = u(\kappa h)$, $h > 0$ - шаг дискретности.

Установлена теорема : для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) при $N=0$ необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых $h > 0$ была асимптотически устойчива дискретная система (2) при $Q(h)=0$, при наличии оценки $\bar{\lambda}(h) \leq \exp(-\bar{\mu}h)$, в которой $\bar{\lambda}(h)$ - верхняя оценка модулей собственных чисел матрицы $P(h)$, $\bar{\mu} > 0$. Теорема установлена с помощью второго метода Ляпунова, который дает конструктивный критерий проверки условий теоремы и используется также для формирования последовательных приближений стабилизирующего управления $U(\cdot)$ оптимального по квадратурному критерию [1].

Упомянутым выше выбором квадратурной формулы можно оптимизировать вычислительные процедуры.

Литература.

1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

**THE ENUMERATION OF ALL INVARIANT SOLUTIONS OF EQUATIONS
OF PLASTICITY WITH ON MISES'S CONDITION**

Krasnoyarsk State University

It's known [1], that the system E of differential equations with on Mises's condition in the three-dimensional case assumes Lie algebra L_{14} which is generating by the operators

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_i = \frac{\partial}{\partial u_i}, N = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, M = u_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

$$T_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial u_2}, Z_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_2}, S = \frac{\partial}{\partial p},$$

Z_2, Z_3, T_2, T_3 are obtaining from Z_1, T_1 by means of the cyclic permutations of indexes, x_i - cartesian coordinates, u_i - components of velocity, p - pressure ($i = 1, 2, 3$, the summation is conducting on the repeating indexes).

The optimal systems of subalgebras Θ_s ($s = 1, 2, 3$) were constructed completely in this paper. It makes possible to describe essentially different invariant solutions of range 2,1,0. The form of invariant solutions was found and the factor-systems E/H were constructed, which are used for the determination of the unknown functions u_1, u_2, u_3, p .

The optimal systems Θ_s ($s = 1, \dots, 14$) with nontrivial Levi's factor were constructed for the first time by the algorithm, which is stated in the paper [2]. As a result, there were obtained more then 500 dissimilar subalgebras.

The authors thanks professor Senashov S.I. for the setting of problem.

Supported by Russian Fund for Fundamental Research (grant 01-96-01839).

References

- [1] Anuin B.D., Bytev V.O., Senashov S.I. Group Properties of Differential Equations of Elasticity and Plasticity, Novosibirsk. Nauka, 1985 (in Russian).
- [2] Ovsyannikov L.V. Submodels// Novosibirsk. Institute of Hydrodynamic, 1992.

КОВАЛЕВСКИЙ В.Э., КУЛЕШОВ Ю.В., СОЛДАТЕНКО С.А., СТЕПАНОВ В.Г.,
СУВОРОВ С.С.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРИЛИВНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

г. Санкт-Петербург

Военная инженерно-космическая академия имени А.Ф. Можайского

Термический прилив, генерируемый поглощением коротковолновой солнечной радиации озоном и водяным паром, является одним из доминирующих процессов в мезосфере - нижней термосфере. Показано, что в рамках классической теории атмосферных приливов, в которой не учитываются диффузионные процессы, достичь корректного описания приливных полей невозможно. При учете же процессов молекулярной и турбулентной диффузии тепла и импульса возникает проблема неопределенности параметров этих диффузионных процессов. Нами предпринята попытка разрешения этой проблемы.

В качестве исходной системы уравнений взята линеаризованная система уравнений гидротермодинамики атмосферы. В ней учтены все основные физические эффекты, под действием которых формируется термический прилив. Этими процессами являются: молекулярный обмен теплом и импульсом, радиационное выхолаживание атмосферы в длинноволновой части спектра, торможение за счет взаимодействия с заряженной компонентой в ионосфере, ускорение за счет поперечной проводимости в ионосфере. Линеаризация проводилась относительно фонового состояния, в качестве которого взято среднезональное. Так как в первую очередь нас интересовал суточный прилив, в котором доминирует одна нормальная мода, то используемая нами параметризация диффузионных процессов в терминах релеевского трения представляется вполне разумной. При помощи преобразования Эккарта система уравнений сводится к

одному дифференциальному уравнению второго порядка для комплексной амплитуды вариаций геопотенциала в высотной-широтной плоскости. Это уравнение является модификацией приливного уравнения Лапласа.

В исследованиях различных авторов, основанных на анализе процессов разрушения и диссипации внутренних гравитационных волн, приводятся значительно отличающиеся друг от друга вертикальные профили коэффициента релеевского трения. Однако общепринято, что вклад эффекта турбулизации атмосферы на высотах турбопаузы описывается тремя параметрами: шириной зоны турбулизации, высотой максимума турбулентного добавка и его значением в максимуме. Задача, решаемая нами, ставилась следующим образом: считая указанные параметры равномерно распределенными в интервалах своего изменения, найти такие значения параметров, которые обеспечивали бы наибольшую близость решения приливного уравнения к математическому ожиданию решения. Считается, что пространство функций, которому принадлежит решение, оснащено сферической метрикой.

Для решения этой задачи разработан следующий алгоритм. С помощью имитационного моделирования оценивается математическое ожидание поля приливных вариаций геопотенциала. Для минимизации отклонения решения от оценки математического ожидания используется метод градиентного спуска. В качестве аргументов функционала отличия выступают вышеуказанные параметры вертикального распределения коэффициента релеевского трения. Для нахождения градиента функционала отличия используются методы теории сопряженных дифференциальных уравнений в частных производных.

Проведенные численные эксперименты свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости построенной итерационной процедуры. Полученные значения параметров, минимизирующие отклонение решения приливного уравнения от математического ожидания приливного поля геопотенциала, значительно отличаются от соответствующих математических ожиданий.

**МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ В КАНАЛЕ
МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА**

г. Санкт-Петербург, Восная академия связи

Эффективность функционирования систем множественного доступа (СМД) оценивается, как правило, их пропускной способностью и средним временем передачи сообщений. Для пользователя более важными являются вероятностно-временные характеристики (ВВХ) передачи сообщений, определяющиеся вероятностью доставки сообщений за время, не превышающее допустимое. На практике ВВХ используются редко, поскольку их оценка связана со значительными вычислительными сложностями и имеет высокую погрешность. Причиной является неточное определение вероятности столкновения передаваемых сообщений, необходимой для расчета ВВХ.

Предложен метод расчета ВВХ передаваемых сообщений по вероятности ошибочного приема сообщений, определяющей вероятность столкновения передаваемых в СМД сообщений. Эта вероятность определяется с существенно более высокой точностью. Данный метод позволяет осуществить выбор параметров сигнально-кодовых конструкций и алгоритмов доступа для СМД, обеспечивающий необходимые ВВХ передачи сообщений в канале множественного доступа.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ
СБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ
ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербургский
государственный технический университет
scn@dcn.nord.nw.ru

Современные программные комплексы, предназначенные для проведения вычислительного эксперимента, и, в частности, для моделирования гибридных систем, все чаще используют графические формы входных языков для описания математической модели исследуемого объекта. Например пакет SIMULINK опирается на язык блок-схем, известный специалистам в области теории управления, как "схемы в переменных состояниях". Пакет Model Vision for Windows 2.1 использует привычный для инженера язык функциональных схем для описания структуры объекта. Непрерывное поведение объекта, задаваемое дифференциальными уравнениями, в этом пакете описывается на специальном языке, с сохранением привычной математической нотации. Для описания дискретных процессов используются графические формы, называемые "картами поведения".

Графическое представление иерархически организованных объектов в виде отдельных устройств, соединенных функциональными связями, позволяет пользователю конструировать достаточно сложные объекты, приводящие в конечном итоге к системам алгебро-дифференциальных уравнений большой размерности с зависящей от времени структурой. Автоматическое численное интегрирование таких систем в реальном времени с сохранением, как минимум, качественного соответствия истинного и приближенного решений, либо с диагностикой невозможности обеспечить это соответствие, а еще лучше, интегрирование с заданной точностью, предполагает создание управляющей программы, способной либо априори, по форме уравнений, по анализу их свойств в начальной точке, либо, используя дополнительную информацию, получаемую по ходу решения, выбирать наиболее эффективный численный метод.

В новой версии пакета Model Vision, использующей объектно-ориентированный подход, класс моделируемых систем ограничивается классом гибридных систем. Гибридная система $HybS$ задается короткем $HybS = \{name, X, Y, S, GR_str\}$, где name - имя системы, X - множество входов, Y - множество выходов, S - множество переменных состояния, GR_str - граф структуры или функциональная схема, либо короткем $HybS = \{name, X, Y, S, B_Chart\}$, где B_Chart - карта поведения системы. Граф структуры системы, состоит из множества вершин $Point = \{HybS_1, \dots, HybS_n\}$; каждой из которых поставлена в соответствие одна из гибридных подсистем, входящая в данную систему; и множества $Edge = \{edge_1, \dots, edge_m\}$ направленных дуг, называемых каналами (связи) или функциональными связями, соединяющих входы X_i i -той подсистемы $HybS_i$ с выходами Y_j j -той подсистемы $HybS_j$ или входами из X всей системы и выходы j -той подсистемы $HybS_j$ с входами i -той подсистемы $HybS_i$ или выходами из Y всей системы. Карта поведения (B_CHART) заданной системы, это граф GCH , определяемый множеством узлов-поведений $Bh = \{b_first, b_second, \dots, b_last\}$, множеством узлов-переходов $TR = \{TR_first, \dots, TR_last\}$, и множеством $Arc = \{a_first, \dots, a_last\}$ направленных дуг, пар $\{node_source \in Bh \vee node_source \in TR, node_collector \in Bh \vee node_collector \in TR\}$.

соединяющих вершины между собой и определяющих правила и последовательность смены поведений. Каждый элемент множества B_h , может быть либо гипер-узлом, и тогда ему в соответствие ставится своя карта поведения, либо элементарной картой поведения b -chart с функцией поведения $F(t) \in \text{Behavio}$, определенной на отрезке $[0, \infty]$ и принадлежащей множеству Behavio , множеству функций допустимых поведений. Областью значений функции $F(t)$ является некоторое заданное множество, например множество вещественных чисел \mathbb{R} . В этом случае функции поведения могут быть заданы в форме систем алгебро-дифференциальных уравнений. Каждый элемент множества узлов-переходов TR , представляет собой четверку $TR_{ij} = \{G: P_i, Ev: e_j, D: \tau_j, Ac: Act_{ij}\}$, где $G: P_i$ - множество предикатов, определяющих условия возбуждения перехода из вершины i в вершину j ; $D: \tau_j$ - задержка срабатывания перехода из вершины i в вершину j после его возбуждения в момент $\text{time}_{i,j}$, когда предикаты P_j стали истинными, при условии, что P_i оставались истинными во всех точках промежутка $[\text{time}_{i,j}, \text{time}_{i,j} + \tau_j]$; $Ev: e_j$ - множество дискретных событий, вызывающих возбуждение перехода, $Ac: Act_{ij}$ - множество мгновенных действий, совершаемых в момент перехода из вершины i в вершину j .

Классы функций допустимых поведений, предикаты и классы дискретных событий определяющие условия смены поведений, классы допустимых мгновенных действий - составляют основы языка описания гибридных систем пакета Model Vision, существующего как в графической, так и в традиционной текстовой форме. Расширяя традиционный объектно-ориентированный подход, с гибридной системой связывают графическую форму ее описания, ее представление, в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений, графический способ отображения входных, выходных переменных и переменных состояния, а также ее графическое, анимационное представление.

С точки зрения численного решения, помимо обычных трудностей, связанных с решением систем алгебро-дифференциальных уравнений большой размерности с разреженной матрицей якоби, добавляются трудности, возникающие при определении точки окончания интегрирования системы с конкретной правой частью, так как теперь точка останова не может быть задана заранее и определяется соответствующими предикатами или связана с наступлением некоторого события. Это особенно сказывается на стратегии выбора шага при решении жестких систем и заставляет пересмотреть традиционные критерии выбора численных методов, и в нашем случае, для интегрирования гибридных систем, отдать преимущество одностаповым методам.

На сегодняшний день нельзя сделать окончательного вывода, об управляющей программе в составе блока решения систем алгебро-дифференциальных уравнений новой версии пакета, однако можно проанализировать возникшие трудности и недостатки набора методов, использованных в предыдущей версии 2.1 пакета Model Vision for Windows. На сегодняшний день в пакете использованы а) методы решения жестких систем: метод Рунге-Кутты 4-5 порядка с автоматическим контролем локальной погрешности, базирующийся на формулах Дормана-Принса; метод Рунге-Кутты 7-8 порядка с автоматическим контролем локальной погрешности, базирующийся на формулах Дормана-Принса; б) методы решения жестких систем: метод Гира с автоматическим контролем локальной погрешности; в) специальные методы: метод Рунге-Кутты 2-3 порядка с автоматическим контролем локальной погрешности для совместного решения систем дифференциальных и нелинейных алгебраических уравнений; метод с автоматическим определением степени жесткости решаемой задачи и переключением на соответствующий метод; системный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей и постоянным вектором возмущения.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСТАНОВЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

(Саратов, Саратовский государственный технический университет)

Многие нелинейные стационарные дифференциальные уравнения обладают неединственностью решения, что вызывает серьезные трудности при получении различных решений традиционными итерационными методами. В то же время соответствующая исходной стационарной системе уравнений задача Коши обладает единственным, зависящим от выбора начальных условий решением. Кроме того, к настоящему времени разработано огромное количество универсальных и достаточно эффективных алгоритмов решения задачи Коши. Наконец, при решении однородных систем уравнений для получения нетривиальных решений, приходится каким-либо образом изменять постановку задачи, что естественно сказывается на получающихся решениях. При решении задачи Коши, неоднородность может быть введена в начальные условия, что никак не влияет на получающиеся решения. Все это делает замену исходной стационарной системы уравнений задачей Коши весьма привлекательным.

В работе [1] на примере уравнений Маргера-Власова-Мушгари

$$c(w + \varepsilon w) = -\frac{1}{12(1 - \nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + L(w, F) + \nabla_k^2 F - \nabla_p^2 w - k_x P_x - k_y P_y + q \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w \quad (2)$$

описывающих динамическое поведение пластин и оболочек находящихся под действием комбинированного продольно-поперечного нагружения предложен подход, позволяющий получать неединственные (в том числе и неустойчивые) стационарные решения задач. После аппроксимации производных по пространственным переменным конечно-разностными соотношениями, система уравнений в частных производных (1-2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для прогиба w и системе линейных алгебраических уравнений для функции усилий F . При интегрировании полученной системы уравнений методами Рунге-Кутты на каждом шаге по времени приходится несколько раз решать систему линейных алгебраических уравнений для функции усилий F . Отметим, что матрица этой системы остается неизменной, меняются только правые части. И как показывают проведенные исследования, применение итерационных методов в этом случае оказывается нецелесообразным. Значительная экономия машинного времени достигается при

решении системы линейных уравнений прямыми методами. В этом случае достаточно один раз привести матрицу системы к треугольному виду, а затем выполнять лишь обратную подстановку. Однако, при таком подходе к решению системы (1)-(2) приходится хранить матрицу коэффициентов системы линейных уравнений.

В настоящей работе, уравнение для функции усилий (2) предлагается заменить уравнением:

$$c_1(\ddot{F} + \varepsilon_1 \dot{F}) = -\nabla^2 \nabla^2 F - \frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w \quad (3)$$

Это позволяет заменить процесс решения на каждом шаге по времени системы линейных алгебраических уравнений на решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом не требуется хранения матрицы коэффициентов.

Очевидно, что система (1),(3) не адекватно описывает реальное динамическое поведение пластины и оболочек. Однако, если для некоторой пары функций $w(t, x, y)$, $F(t, x, y)$, являющейся решением системы уравнений (1),(3) существуют пределы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x, y) = w(x, y), \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x, y) = F(x, y), \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial w(t, x, y)}{\partial t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial t} = 0,$$

то пара функций $w(x, y)$, $F(x, y)$ является решением соответствующей статической задачи. Поэтому систему уравнений (1),(3) также как и систему (1)-(2) можно применять для решения статических задач теории пластин и оболочек. Кроме рассмотренных выше динамических систем уравнений, для решения стационарных задач можно применять и другие уравнения содержащие частные производные прогиба и (или) функции усилий по времени. Например, вместо уравнения (2) можно ввести в рассмотрение уравнение параболического типа, содержащее только первую производную функции усилий по времени. Единственное условие накладываемое на динамическую систему уравнений, исползуемую для решения статических задач, состоит в том, чтобы решение такой системы выходило на стационарный режим, т.е. чтобы существовали конечные пределы прогиба и функции усилий при $t \rightarrow \infty$. Однако, проведенные исследования показали, что наибольшая скорость сходимости наблюдается для системы гиперболического типа (1),(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крысько В.А., Комаров С.А. Определение неустойчивых решений при расчете пластин и оболочек. // Труды XVII международной конференции по теории оболочек и пластин., т.2, Казань, 1996, с. 19-24

ПРОБЛЕМА НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В СОСУДЕ, ЗАКРЫТОМ УПРУГОЙ КРЫШКОЙ

Симферополь, Симферопольский госуниверситет

Однородная вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ , имеющая коэффициент динамической вязкости μ , расположена в некотором неподвижном сосуде и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой сосуда S и горизонтальной границей Γ , на которой находится упругая мембрана. Считается, что на границе $\partial\Gamma$ мембрана твердо закреплена. Через ρ_0 обозначена ее поверхностная плотность, а через σ — величина предварительного растяжения.

Операторный подход, примененный к изучению малых движений описанной гидросистемы, приводит к следующей системе дифференциально-операторных уравнений, записанной для поля скорости жидкости $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{a})$ и вертикального отклонения мембраны $\zeta = \zeta(t, \vec{a})$, $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \Gamma$:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu A \vec{u} + \sigma G B_o \zeta + \rho_0 G \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \rho P_{0,S} \vec{f} \\ \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_n \vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь \vec{f} — малое поле внешних сил, действующих на систему. Поясним смысл записанных операторов.

1. Под $P_{0,S}$ понимается ортопроектор на пространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u_n = 0 \text{ (на } S) \}$.
2. Оператор A , возникающий при рассмотрении вспомогательной задачи для поля смещений, является самосопряженным и положительно определенным в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Существует обратный положительный и компактный оператор A^{-1} .
3. Через γ_n обозначен оператор взятия нормального следа на Γ .
4. Для оператора G имеет место тождество

$$(G\psi, \vec{u})_{L_2(\Omega)} = (\psi, \gamma_n \vec{u})_{L_2(\Gamma)} \quad (\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)).$$

5. Оператор $B_o : D(B_o) \subset H \rightarrow H$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром. При этом $H := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, а $D(B_o) := \{ \zeta \in H : \Delta_2 \zeta \in L_2(\Gamma), \quad \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \}$.

При изучении задачи о нормальных колебаниях осуществляется переход от поля скоростей $\vec{u}(t)$ и поле смещений $\zeta(t)$ посредством связи $\vec{u}(t) = d\zeta(t)/dt$.

В дальнейшем рассматривается задача о нахождении решений однородной задачи (1), которые имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{w}(t) &= \bar{w} \exp(-\lambda t), \quad \zeta(t) = \zeta \exp(-\lambda t), \\ \bar{w} &\in \bar{J}_{0,S}(\Omega), \quad \zeta \in L_{2,T}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}\quad (2)$$

Для амплитудных элементов \bar{w} и ζ получена система уравнений

$$\begin{aligned}\lambda^2(\rho \bar{w} + \rho_0 G \zeta) - \lambda \mu A \bar{w} + \sigma G B_\sigma \zeta &= 0, \\ \zeta &= \gamma_n \bar{w}.\end{aligned}\quad (3)$$

Исключая элемент ζ , приходим к спектральной задаче для квадратичного операторного пучка с неотрицательными операторными коэффициентами:

$$\lambda^2(\rho I + \rho_0 G \gamma_n) \bar{w} - \lambda \mu A \bar{w} + \sigma G B_\sigma \gamma_n \bar{w} = \bar{0}. \quad (4)$$

Это уравнение обобщает соответствующее уравнение задачи о нормальных колебаниях капиллярной вязкой жидкости в сосуде [1] и переходит в него при $\rho_0 = 0$, то есть в случае безмассовой мембраны. Оказывается, что наличие положительной плотности мембраны усложняет проблему и видоизменяет состав ее решений.

Доказательство основного результата о структуре и локализации спектра задачи (3) проведено при дополнительном предположении, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, такая, что для оператора A выполнено включение $D(A) \subset \bar{H}^1(\Omega) \cap \bar{J}_{0,S}^1(\Omega)$,

$$\left(\bar{J}_{0,S}^1(\Omega) := \left\{ \bar{u} \in \bar{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \bar{u} = \bar{0} \quad (\text{на } S) \right\} \right).$$

Теорема. Спектр задачи (3) о нормальных колебаниях вязкой жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной, дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично действительной оси и имеет единственную предельную точку $\lambda = \infty$. Если вязкость жидкости настолько велика, что выполнено условие

$$\mu > \sigma^{1/2} \|B_\sigma^{1/2} \gamma_n A^{-3/4}\| \cdot (\rho \|A^{-1/2}\| + \rho_0 \|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^{1/2},$$

то спектр задачи лежит в секторальной области

$$\Lambda(\mu) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \operatorname{Re} \lambda_1(\mu) > 0, \quad \operatorname{ig} |\arg \lambda| \leq \kappa(\mu)\},$$

$$\kappa(\mu) := \frac{\sigma^{1/2} \mu^{-1} \|B_\sigma^{1/2} \gamma_n A^{-3/4}\| (\rho \|A^{-1/2}\| + \rho_0 \|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^{1/2}}{1 - \sigma \mu^{-2} \|B_\sigma^{1/2} \gamma_n A^{-3/4}\|^2 (\rho \|A^{-1/2}\| + \rho_0 \|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^2} > 0,$$

$\lambda_1(\mu)$ — первое в порядке возрастания по $\operatorname{Re} \lambda$ собственное значение.

Следствием этой теоремы является утверждение о том, что при увеличении вязкости μ угол полураствора секторальной области $\Lambda(\mu)$ стремится к нулю, то есть спектр исследуемой задачи прижимается к действительной оси.

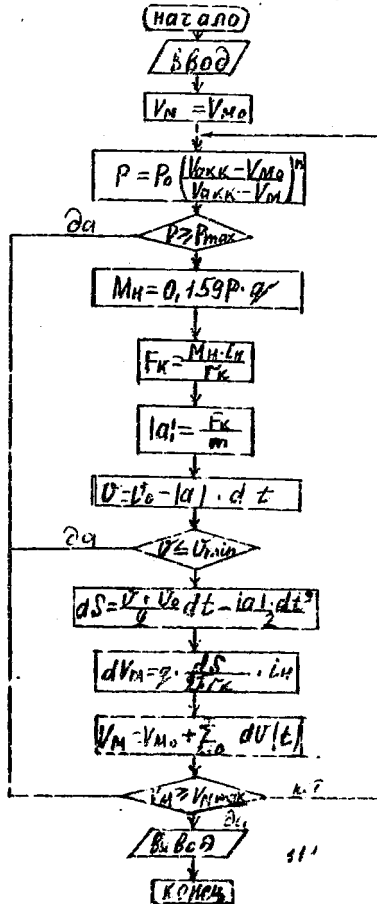
Литература:

1. Копачевский Н.Д., Крейн О.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. — Москва, Наука, 1989, 416 стр.
2. Пашкова Ю.С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем. — Дисс. работа на соискание степени к.ф.-м.н., Симферополь, 1996, 111 стр.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТОРМОЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ
С ГИДРОПНЕВМОАККУМУЛЯТОРОМ ПРИ ПОМОЩИ ЭВМ

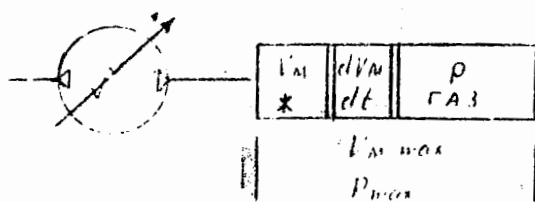
Быстрое развитие автотранспорта напрямую связано с проблемой экономии топлива и загрязнения окружающей среды. Одним из путей решения является использование регенераторов энергии торможения. При расчете основных характеристик гидропневморегенератора и динамических характеристик автомобиля возникают некоторые проблемы. Решить их можно, смоделировав процесс торможения и разгона на ЭВМ.

Предлагается следующий алгоритм расчета.



- V_{Mc} - начальный объем жидкости в гидропневмоаккумуляторе;
- V_M - текущий объем;
- P_0 - начальное давление в гидропневмоаккумуляторе;
- P - текущее давление;
- P_{max} - максимальное давление;
- V_{Mmax} - максимальный объем;
- M_H - момент на валу насоса;
- F_s - тормозная сила на колесах автомобиля;
- v_0 - начальная скорость;
- v - текущая скорость;
- v_{min} - минимальная скорость;
- dS - путь торможения за dt ;
- dV_M - изменение объема за dt ;
- m - масса автомобиля;
- r_k - радиус колеса;
- i_H - передаточное число от колеса к насосу;
- $|a|$ - ускорение замедления за dt ;
- q - объемная постоянная насоса;
- n - показатель политропы.

Предлагается, что за бесконечно малый промежуток времени ускорение $|a|$ - не изменяется.



Расчет динамики разгона автомобиля за счёт регулятора давления осуществляется по такому же алгоритму.

Таким образом, используя ЭВМ, можно быстро и точно находить основные параметры гидропневматического регулятора, а также узнать подлинно динамические характеристики любого автомоби-

АТТРАКТОРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ШАГА

Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский государственный университет

В докладе рассматриваются дисперсные динамические системы, порожденные многозначными отображениями. Изучается пространство Φ таких систем с C^0 -топологией.

Пусть R — метрика Хаусдорфа. Обозначим через $N_a(\varphi)$ окрестность дисперсной динамической системы φ в Φ , $A(\varphi)$ — совокупность аттракторов φ . На Φ задана функция $f : \Phi \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $f(\varphi, 0) = 0$; при $a > 0$

$$f(\varphi, a) = \sup_{I \in A(\varphi)} \sup_{\tilde{\varphi} \in N_a(\varphi)} \inf_{\tilde{I} \in A(\tilde{\varphi})} R(I, \tilde{I}).$$

Назовем эту функцию мерой отклонения аттракторов. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Существует множество Σ второй категории по Бэру в Φ такое, что любая ДДС $F \in \Sigma$ является точкой непрерывности функции отклонения аттракторов.*

Доказано, что аттракторы типичной дисперсной динамической системы непрерывно зависят от порождающего ее многозначного отображения (в смысле метрики Хаусдорфа).

Этот результат применяется для изучения аттракторов дисперсных динамических систем, естественным образом возникающих при использовании численных методов интегрирования автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим выбором шага. Такие методы интегрирования с контролем погрешности на шаге получают в последнее время все более широкое распространение.

**ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ТРЕХМЕРНОЙ
ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ
ОСОБОГО ИНВАРИАНТНОГО КОНУСА
С ЧЕТЫРЬМА ИНВАРИАНТНЫМИ ЛУЧАМИ**

Санкт-Петербург. Санкт-Петербургский государственный университет

Работа посвящена исследованию предельных множеств траекторий трехмерной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad X \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}). \quad (1)$$

В координатах (u, ρ) , где u — координата на единичной сфере, ρ — радиальная координата, система (1) записывается так:

$$\dot{u} = V(u), \quad \dot{\rho} = \rho R(u), \quad \rho > 0. \quad (2)$$

Рассматривается инвариантный конус C системы (2), который в координатах (u, ρ) имеет вид $\Pi \times \{\rho > 0\}$, где Π — инвариантное множество уравнения на сфере. Ранее исследовались случаи, когда Π — особая точка, петля сепаратрис седла, сепаратрисный двуугольник и сепаратрисный треугольник с вершинами в грубых седлах. В этих случаях выяснены ω -предельные множества траекторий, проекции которых на сферу имеют Π своим ω -предельным множеством.

В данной работе рассматривается ситуация, когда Π — сепаратрисный четырехугольник с вершинами в грубых седлах. В этом случае инвариантный конус состоит из четырех лучей (O^+ - и O^- -кривых) и четырех "граней", каждая из которых покрыта гиперболическими, параболическими и эллиптическими траекториями. Показывается, что ω -предельное множество траекторий, приближающейся в u -проекции к циклу, является подмножеством \bar{C} одного из следующих типов:

- 1) пустое множество,
- 2) гиперболическая траектория системы (1),
- 3) два инвариантных луча плюс $\{O\}$,
- 4) параболическая траектория системы (1) плюс инвариантный луч плюс $\{O\}$,
- 5) эллиптическая траектория системы (1) плюс $\{O\}$,
- 6) $\{O\}$.

Для различных точек ω -предельные множества траекторий, начинающихся в них, могут быть разных типов.

Число этих типов для фиксированной системы (1) не превосходит трех и их набор зависит от собственных чисел седла цикла Π и значений функции R в этих седлах.

Литература

1. Ноздрачева В. П. Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15, N 4. С. 619–628.
2. Коз Е. О. Поведение трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: матем., мех., астр., 1996. Вып. 3, N 15. С. 107–109.
3. Коз Е. О. Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса с четырьмя инвариантными лучами / Ред. ж. "Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: матем., мех., астрон." Деп. в ВИНИТИ 05.06.1996. N 695–В96. 12 с.

COMPUTATION OF PERIODIC ORBITS IN CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS

Department of Mathematics
University of Miami
Coral Gables, FL 33124 USA

The subject of shadowing concerns the existence of a true orbit of a dynamical system near a pseudo orbit (a locally well-behaved approximate orbit). Since its birth the theory of shadowing has been successfully used for many purposes, from abstract results in hyperbolic systems to validation of practical numerical simulations. In this talk we will present a new application of shadowing to establish, under suitable conditions, the existence of periodic orbits of maps, and more importantly, periodic orbits of autonomous systems of ordinary differential equations where presently no other method succeeds. This periodic shadowing technique is suitable for establishing the existence of unstable periodic orbits of rather long periods in chaotic dynamical systems.

In applying our periodic shadowing theorem to specific vector fields, there are two major computational considerations. The first task is the generation of a suitable pseudo periodic orbit with relatively small local errors. We will address this important computational issue and present a Newton method particularly suitable for computing long unstable pseudo periodic orbits whose local errors are nearly at the machine precision. The second computational concern is the estimation of the norm of a certain linear operator in a Banach space. This will be handled in a way suitable for chaotic systems.

These numerical techniques and the use of our periodic shadowing theorem will be illustrated by exhibiting a long periodic orbit of the Lorenz equations, which is visually indistinguishable from the familiar chaotic attractor picture of these celebrated equations, as well as several other periodic orbits with prescribed geometries. Also, an unstable periodic orbit of period 100,003 of the Henon map will be displayed.

Finally, we will present a result for rigorously estimating the Lyapunov exponents of periodic orbits from numerical computations. In particular, we will determine the Lyapunov exponents of the specific periodic orbits mentioned above.

A PROBLEM OF STABILISED CONTROL UNDER LACK OF INFORMATION

Institute of Mathematics and Mechanics
Ural Branch of Russian Academy of Sciences
Ekaterinburg 620066, Russia

We consider a problem of controlling a dynamical system under incomplete information on dynamical and informational disturbances. Attention is mostly paid to systems whose evolution is described by ordinary differential equations. Though, we also consider some differential equations of other types: functional, stochastic, etc. The considerations are concerned with a problem of minimization of a given quality index of the process, which is a functional of the realized motion of system, and in some cases also of the realized control actions and disturbances. The problem is formalized in the framework of a differential game. This formalization is based on the concept that has been developed in Ekaterinburg (Sverdlovsk). A constructive solution is proposed in the form of pure and mixed feedback strategies. The solving methods essentially use auxiliary models of the system. These may be abstract models or the ones realized in a feedback circuit in computer. The motions of these auxiliary systems can be treated as the nondisturbed motions in a kind of stability scheme according to Lyapunov.

An important problem here is that of choice of an adequate informational image of the system in the close loop that is sufficient for the existence of a saddle point in the differential game in the corresponding class of strategies. We discuss an effective solution of the problem on the basis of the so-called program stochastic method and the corresponding method of constructing of upper-convex hulls of functions that arise in auxiliary program constructions. The material is illustrated by computer simulation of sample problems.

References

- 1.Krasovskii A.N. and Krasovskii N.N. Control Under Lack of Information. Birkhauser, Boston, USA, 1995.
- 2.Krasovskii N.N. and Krasovskii A.N. A Differential Game for the Minimization of a Positional Functional. In book "Advances in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia", Birkhauser, Boston, USA, 1993.

ВОЗМУЩЕНИЯ СПЕКТРА САКЕРА-СЕЛЛА ДИФФЕОМОРФИЗМА КОМПАКТНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Пусть M — C^1 -гладкое связное компактное многообразие без края, TM — его касательное пространство, $n = \dim M$, $f : M \rightarrow M$ — диффеоморфизм.

Хорошо известно, что каждой точке $x \in M$ можно сопоставить вектор $\lambda_f(x) \in \mathbb{R}^n$, представляющий собой упорядоченный набор показателей Ляпунова в точке x с учетом кратности. Однако, в общем случае функция $\lambda_f(x)$ не непрерывно зависит от x и f . Таким образом, возникает естественное желание изменить определение показателей Ляпунова так, чтобы "появилась надежда" на содержательный результат, касающийся их устойчивости по отношению к диффеоморфизму f . В работе [1] в связи с этим введено понятие спектра (Сакера-Селла) диффеоморфизма. Преимущество этого подхода в том, что спектр Сакера-Селла определяется $2n$ вещественными параметрами, имеющими геометрический смысл — это "ограничители скорости" разбегания траекторий.

Целью настоящей работы было исследование зависимости спектра Сакера-Селла от порождающего его диффеоморфизма.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть f — диффеоморфизм многообразия M . Резольвентным множеством ρ_f диффеоморфизма f называется множество таких чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых существует Df -инвариантное разложение касательного расслоения $TM = L^+ \oplus L^-$ такое, что $\exists \alpha > 0, \exists \delta > 0$:

$$\forall x \in M, \forall k \in \mathbb{N} : \forall v \in L^+(x) : \|D_x f^k(v)\| \leq \alpha e^{(\lambda-\delta)k} \|v\|,$$

$$\forall w \in L^-(x) : \|D_x f^{-k}(w)\| \leq \alpha e^{(-\lambda-\delta)k} \|w\|.$$

О п р е д е л е н и е 2. Спектром Сакера-Селла Σ_f диффеоморфизма f называется множество $\mathbb{R} \setminus \rho_f$.

Т е о р е м а 1. [1] Существует набор чисел $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_m \leq b_m$ такой, что

$$\Sigma_f = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_m, b_m], m \leq n.$$

Таким образом, имеется отображение $\Sigma : f \rightarrow \mathbb{R}^*$, где \mathbb{R}^* — множество всех компактных подмножеств \mathbb{R} с топологией Хаусдорфа.

Пусть \mathcal{D} — множество всех диффеоморфизмов на многообразии M с C^1 -топологией.

Т е о р е м а 2. В множестве \mathcal{D} существует подмножество \mathcal{S} 2-й категории такое, что отображение Σ непрерывно на \mathcal{S} .

Удается также явно указать множество диффеоморфизмов, на котором отображение Σ заведомо непрерывно.

Т е о р е м а 3. Отображение Σ непрерывно на (открытом!) множестве топологически транзитивных диффеоморфизмов Аносова на M .

Кратко идея доказательств теорем 2 и 3 такова. Оказывается, существует тесная связь между спектром Сакера–Селла и так называемым спектром Мезера [2] диффеоморфизма f , в место отображения Σ можно рассматривать отображение $\tau : D \rightarrow \mathbb{R}^*$, сопоставляющее диффеоморфизму его мезеровский спектр. Спектр Мезера определяется как вещественная часть спектра оператора дифференцирования Df в банаховом пространстве всех непрерывных касательных векторных полей на M с равномерной нормой. Поскольку отображение, сопоставляющее оператору его спектр, полунепрерывно сверху, то оно полунепрерывно и снизу на множестве 2-й категории (последнее следует из теоремы Такемса [3]).

При доказательстве теоремы 3 использовано знаменитое свойство отслеживания траекторий для диффеоморфизмов Аносова [4], а также их структурная устойчивость, опираясь на которую удается оценить, как меняется спектр Сакера–Селла при малом возмущении диффеоморфизма Аносова.

Таким образом, спектр Сакера–Селла, во-первых, несет весьма ценную информацию о диффеоморфизме, указывая, как и показатели Ляпунова, на "степень разбегания" траекторий при итерациях диффеоморфизма.

Во-вторых, спектр Сакера–Селла, в отличие от показателей Ляпунова, относится ко всему многообразию в целом, а не к отдельной траектории.

В-третьих, в силу полученных автором теорем 2 и 3 задача вычисления или оценки с помощью ЭВМ спектра Сакера–Селла конкретного диффеоморфизма не представляется столь неприступной, как задача вычисления показателей Ляпунова.

Л и т е р а т у р а

1. *R.J.Sacker, G.R.Seil.* A spectral theory for linear differential systems. // *Journal of Differential Equations.* 1978. 27, pp. 320–358.
2. *З.Иттецки.* Введение в дифференциальную динамику. М., 1975.
3. *S.Yu.Pilyugin.* The Space of Dynamical Systems with C^0 topology. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg-New York. 1994. Lecture Notes in Math. Vol. 1571. 180 pp.
4. *Боуэн Г.* Методы символической динамики. М., 1979.
5. *Крошан Г. В.* Возмущения спектров Мезера и Сакера–Селла // *Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. I: Математика, механика, астрономия.* 1996, вып. 4

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАДАЧ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН

Линейные системы дифференциально-алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, & x(t_0) = x_0, & (1) \\ y = G(t)x + D(t)v, & t \in [t_0, t_1], & (2) \end{cases}$$

$\eta(\cdot) = \{x_0, v(\cdot)\} \in W$, можно рассматривать в качестве модели объектов с непрерывным временем и неопределенными заранее (в том числе и бесконечномерными) параметрами $\eta(\cdot)$. Задачи о построении управления u_* , доставляющего на решениях системы (1-2) оптимальное значение функционалу качества при наилучших реализациях параметров исследованы в рамках теории гарантированного управления и наблюдения [1] и теории H_∞ -оптимального управления [2]. Для некоторых частных случаев показателей качества известно, что справедливо утверждение о структуре оптимального управления u_* , называемое в стохастической теории принципом (теоремой) разделения. Согласно принципу разделения u_* можно строить как комбинацию решений двух частных задач. Первая из них представляет собой задачу синтеза для системы (1). Вторая является задачей оценивания состояния или траектории системы (1) по результатам $y(\cdot)$ наблюдения (2) в предположении, что управление зафиксировано. (Случай, когда вместо оптимального решения второй задачи выбирается некоторый оператор, действующий на $y(\cdot)$, определяется как свойство стохастической эквивалентности (certainty equivalence).

В докладе рассматривается вопрос о справедливости свойства разделения и аналога свойства стохастической эквивалентности в случае, когда показатель качества функционирования системы (1-2) определяется экстремальным значением выпуклого (необязательно квадратичного) функционала. Использован операторный подход к постановке априорных задач [1] гарантированного управления и оценивания. На основании предложенной в [3] формализации свойства разделения и аналога стохастической эквивалентности сформулированы условия на элементы системы (1-2) и экстремальной постановки достаточные для справедливости указанных свойств. Для квадратичного показателя качества проведено сопоставление результатов с соотношениями, полученными в рамках игрового подхода к задачам теории H_∞ -оптимального управления [2] методом динамического программирования.

Приведены результаты численного моделирования.

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, — 1977. — 315с.
2. Basar T., Bernhard P. H. — optimal control and related minmax design problems. A dynamic game approach. Boston etc.: Birkhauser, 1991. — 225p.
3. Кругликов С.В. О свойстве разделения для задач гарантированного управления и оценивания с экстремальным критерием качества. // Воронежская весен. матем. школа "Современ. методы в теории красивых задач" (14-20 апрел. 1996г. — Воронеж.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Саратов, Саратовский государственный технический университет)

Предлагается подход, сводящий сложную нелинейную задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка со сложной правой частью. Алгоритм представляет собой три вложенные друг в друга итерационные процедуры. Первая сводит исходную систему к последовательному решению уравнений типа Пуассона, вторая понижает размерность исходного уравнения и наконец третья - уточняет получаемое решение.

Изложим общие положения предлагаемой методики применительно к решению трехмерных граничных задач нелинейной механики деформированного твердого тела:

$$\begin{aligned} A[\bar{u}] - \bar{F} &= 0, (x, y, z) \in S, \\ I[\bar{u}] - \bar{f} &= 0, (x, y, z) \in P \end{aligned} \quad (1)$$

где A, I - нелинейные дифференциальные операторы, определенные соответственно в криволинейном прямоугольнике: $S = \{x \in (x_0, x_1), y \in (y_0, y_1), z \in (z_0, z_1)\}$ и на его границе: $P = \{x = x_j, y = y_j, z = z_j, j = 0, 1\}$ где $\bar{u} = \{u_r(x, y, z)\}, (r = \overline{1, r})$ - искомая вектор функция размерности r , \bar{F}, \bar{f} - заданные функции.

Применим процедуру выделения из оператора $A[\]$ оператора Лапласа $\Delta[\]$: $A[\] = \Delta[\] - D^*[\]$ и функции \bar{u} из оператора $I[\]$: $I[\bar{u}] = \bar{u} - I^*[\bar{u}]$, это сводит систему (1) к следующей системе:

$$\begin{aligned} \Delta[\bar{u}] - D^*[\bar{u}] - \bar{F} &= 0, (x, y, z) \in S, \\ \bar{u} - I^*[\bar{u}] - \bar{f} &= 0, (x, y, z) \in P \end{aligned} \quad (2)$$

Далее по формуле (2) представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta[\bar{u}^{k-1}] - D^*[\bar{u}^{k-1}] - \bar{F}^{k-1} &\in S \\ \bar{u}^k - I^*[\bar{u}^{k-1}] - \bar{f}^{k-1} &\in P \end{aligned} \quad (3)$$

(индекс в операторах и функциях означает зависимость от решения на предыдущем шаге итерационной процедуры.

Сведение задачи (1) к задаче (3) дает возможность произвести линеаризацию исходной системы и понизить ее порядок, т.е. на каждой итерации фактически решать одно трехмерное или двумерное уравнение типа Пуассона, в зависимости от размерности задачи.

Многомерное уравнение типа Пуассона со сложной правой частью сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению методом вариационных итераций (МВИ) в первом приближении [1]. Возможно увеличить точность получаемого решения не увеличивая членов ряда в разложении искомой функции, для этого используется процедура Аграновского М.Л., Баглая Р.Д. и Смирнова К.К. (МАБС) [2]. После получения решения уравнения (3) строим новое уравнение вида :

$$\Delta \bar{u}_{(t)} = D^* \left[\sum_{l=1}^{n-1} \bar{u}_{(l-1)} \right] + F(x, y) - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta \bar{u}_{(l-1)} \quad (4)$$

и применяем к нему МВИ в первом приближении. Окончательно за исходное решение принимается следующий ряд :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N u_{(i)}(x, y, z) \quad (5)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений методом конечных разностей $O(h^2)$, с последующим решением методом прогонки.

На основе предлагаемой методики создан комплекс программ для решения следующих задач: трехмерной нелинейной теплопроводности, термоупругости и термопластичности, уравнения Маргера-Власова, нелинейных уравнений пологих оболочек типа Тимошенко, контактной задачи для пластинок модели Кирхгофа.

Для некоторых вышеперечисленных задач имеются теоремы с доказательством сходимости предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Кириченко В.Ф., Крысько В.А. Метод вариационных итераций в теории пластин и его обоснование // Приклад. механика. - 1981. - Т.17, №4. - С. 71-76.
2. Крысько А.В. Комбинированные математические модели контактных задач теории пластин и оболочек. Дисс....канд. физ.-мат. наук. - Саратов, 1995. - 265с.

THE FINITE-DIFFERENCE METHODS FOR A STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITO EQUATION

Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State Technical University.

1. The description of a class of the investigated processes.

We shall consider a Ito stochastic differential equation:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0),$$

where $x_t = x(t, \omega) \in R_n$ is a equation (1) solution, the functions $a(x, t) \in R_n$, $\Sigma(x, t) \in R_{n \times m}$ are satisfying an conditions of existence and uniqueness of the equation (1) solution and also they are a finite-times differentiable functions on there arguments; $f_t = f(t, \omega) \in R_m$ is a Wiener random process with independent components.

2. The finite-difference approximation of the Taylor-Ito expansion.

Consider the single realization of the Taylor-Ito expansion (see the Kulchitsky O.Yu and Kuznetsov D.F. report: "The Taylor-Ito expansion of a Ito processes, wich are generated by a solution of a stochastic differential Ito equation"). This realization may be approximated by a finite-difference terms. This approximation give the series of finite-difference methods.

3. The finite-difference method with mean-root-square local error $O(\Delta^{3/2})$.

$$x_{p+1} = x_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta) J_{0p\Delta, (p+1)\Delta}^{*(i_1)} + \Delta a(x_p, p\Delta) + \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m (\Sigma_{i_1}(x_p + \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), J_{0p\Delta, (p+1)\Delta}^{*(i_2 i_1)}, p\Delta) - \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta))$$

where $\Sigma_i(x, t)$ is a i -th column of matrix $\Sigma(x, t)$; $p = 1, 2, \dots$

4. The finite-difference method with mean-root-square local error (Δ^2) .

This method is

$$x_{p+1} = x_p + \Delta a(x_p, p\Delta) + b_{p,p+1}; \quad b_{p,p+1} = \sum_{i_1=1}^m b_{1,p,p+1}^{(i_1)} + \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m b_{2,p,p+1}^{(i_1 i_2)} + \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \sum_{i_3=1}^m b_{3,p,p+1}^{(i_1 i_2 i_3)},$$

where

$$\begin{aligned} b_{1,p,p+1}^{(i_1)} &= \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta) J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} + a(x_p + \Delta J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta) - \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta) + J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} \\ &\quad + a(x_p + J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta) - \Sigma_{i_1}(x_p + J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} a(x, p\Delta), p\Delta) \\ &\quad + (1/2) \text{sign} \left(J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)} \right) \sum_{r=1}^m (2\Sigma_r(x_p, p\Delta) - \Sigma_{i_1}(x_p + |J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)}|^{1/2} \Sigma_r(x_p, p\Delta), p\Delta) \\ &\quad - \Sigma_{i_1}(x_p - |J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_1)}|^{1/2} \Sigma_r(x_p, p\Delta), p\Delta)) + 2(\Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta) - a(x_p, p\Delta)); \\ b_{2,p,p+1}^{(i_1 i_2)} &= (1/2)(\Sigma_{i_1}(x_p + J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_2 i_1)} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta) - \Sigma_{i_1}(x_p - J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{*(i_2 i_1)} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{p,p+1}^{(i_1, i_2, i_3)} &= (1/48) \operatorname{sign} \left(J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)} \right) \times \\
& \left(F(x_p - 3|J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}) \right. \\
& - F(x_p + 3|J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}) \\
& + 27(F(x_p + |J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}) \\
& \left. - 27F(x_p - |J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x_p, p\Delta, J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}) &= (1/48) (\Sigma_{i_3}(x_p - 3|J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta) \\
- \Sigma_{i_3}(x_p + 3|J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta) + 27\Sigma_{i_3}(x_p + |J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta) \\
- 27\Sigma_{i_3}(x_p - |J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3)}|^{1/2} \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta), p\Delta));
\end{aligned}$$

We remark, that $b_{p,p+1}$ is the approximation with mean-root-square error $O(\Delta^3)$ of $O(\Delta^{3/2})$, $O(\Delta)$, $O(\Delta^{3/2})$ order terms in the Taylor-Itô expansion.

5. The finite-difference method with mean-root-square local error $O(\Delta^{3/2})$.

This method is a generalization of Runge-Kutta method of 2.0 order for a class of stochastic differential Itô equations:

$$x_{p+1} = x_p + (\Delta/2)(a(x_p + \Delta a(x_p, p\Delta), (p+1)\Delta) + a(x_p, p\Delta)) + b_{p,p+1} + c_{p,p+1};$$

where $c_{p,p+1}$ is the finite-difference approximation with mean-root-square error $O(\Delta^{3/2})$ of $O(\Delta^2)$ order terms in the Taylor-Itô expansion. For example:

$$G_0^{(i_1)}(G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_4)}\{x_p\})_{0000(p+1)\Delta, p\Delta} = F_0(x_p, p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) + O(\Delta^{3/2});$$

$$\begin{aligned}
F_q(x_p, p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) &= (1/48) (F_{q+1}(x_p - 3|J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_{q+1}}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) \\
& - F_{q+1}(x_p + 3|J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_{q+1}}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) \\
& + 27(F_{q+1}(x_p + |J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_{q+1}}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) \\
& - 27F_{q+1}(x_p - |J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_{q+1}}(x_p, p\Delta), p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)})); \quad q = 0, 1.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
F_2(x_p, p\Delta, J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}) &= (1/48) (\Sigma_{i_4}(x_p - 3|J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_3}(x_p, p\Delta), p\Delta) \\
- \Sigma_{i_4}(x_p + 3|J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_3}(x_p, p\Delta), p\Delta) + 27\Sigma_{i_4}(x_p + |J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_3}(x_p, p\Delta), p\Delta) \\
- 27\Sigma_{i_4}(x_p - |J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1, i_2, i_3, i_4)}|^{1/3} \Sigma_{i_3}(x_p, p\Delta), p\Delta));
\end{aligned}$$

The full representation of $c_{p,p+1}$ we can see in Kuznetsov D.F. dissertation paper: "The numerical methods of stochastic differential Itô equation solution modelling in mechanics problems" (Fundamental Library of the Saint Petersburg State University).

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ К НАИЛУЧШЕМУ АРГУМЕНТУ И ЕГО
ПРИЛОЖЕНИЕ**

Москва, МАИ

С позиции метода продолжения решения по параметру рассматривается численное построение интегральной кривой задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

и для неявной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(y, t) \frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где $y : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $A(y, t) = \|a_{ij}(y, t)\|$ — квадратная матрица порядка n , $(i, j = \overline{1, n})$.

Такой подход позволяет поставить вопрос о выборе наилучшего, в некотором смысле, параметра продолжения решения [1, 2] и о преобразовании задач (1), (2) к наилучшему аргументу.

Определение 1. Система линейных уравнений называется наилучшим образом обусловленной, если малые изменения элементов матрицы системы или правой части приводят к наименьшему изменению ее решения.

Определение 2. Наилучшим аргументом (параметром) системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется аргумент (параметр), доставляющий системе линейных уравнений продолжения решения наилучшую обусловленность.

Теорема. Если задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) или (2) имеет единственную гладкую интегральную кривую, то для того чтобы эту задачу преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такого аргумента длину дуги λ , отсчитываемую от начальной точки вдоль интегральной кривой задачи. При этом задача (1) преобразуется в задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= \pm f / \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}, & \frac{dt}{d\lambda} &= \pm 1 / \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}, \\ y(0) &= y_0, & t(0) &= t_0, \end{aligned} \quad (3)$$

а задача (2) преобразуется в задачу

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \pm \Delta_i / \sqrt{\Delta^2 + \sum_{j=1}^n \Delta_j^2}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \pm 1 / \sqrt{\Delta^2 + \sum_{j=1}^n \Delta_j^2}, \quad (4)$$
$$y_i(0) = y_{i0}, \quad t(0) = t_0, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δ — определитель матрицы A , а Δ_j — определитель, получающийся после замены j -го столбца матрицы A вектор-столбцом правой части системы уравнений (2).

Замечание 1. При доказательстве теоремы о выборе наилучшего параметра продолжения решения системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих параметр, [1, 2] в качестве меры обусловленности системы линейных уравнений продолжения принималась как величина определителя системы, деленная на произведение квадратичных норм его строк [1, 2], так и величина квадратичной ошибки [2].

Замечание 2. Знак плюс или минус в системах уравнений (3), (4) определяет направление отсчета аргумента λ от начальной точки задачи.

Замечание 3. Вновь сформулированные задачи Коши (2), (4) обладают рядом достоинств по сравнению с задачами Коши (1), (2). Так функции, стоящие в правых частях систем уравнений, не превосходят по модулю единицы. Более того, квадратичная норма правой части системы всегда равна единице. Это снимает многие проблемы, связанные с неограниченным ростом правых частей систем (1), (2), что позволяет интегрировать дифференциальные уравнения, интегральные кривые которых содержат предельные точки, производные в которых обращаются в бесконечность. Появляется возможность решать задачи, имеющие замкнутые интегральные кривые. Предложенное преобразование ослабляет также трудности, характерные для жестких систем.

Данное преобразование может с успехом использоваться и в качественной теории дифференциальных уравнений, осуществляя переход из пространства с неограниченными функциями, стоящими в правой части системы уравнений, в пространство с ограниченными функциями.

Достоинство подхода иллюстрируется при интегрировании сингулярно возмущенного уравнения Ван-дер-Поля, являющегося примером жесткого уравнения, и системы кинематических уравнений для самолетных углов при угле тангажа близком к $\pi/2$, при котором матрица системы вырождается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Наилучший параметр продолжения решения // Докл. ГАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 566-568.
2. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Задача Коши как задача продолжения по наилучшему параметру // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 964-971.

О НЕКОТОРЫХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЯВНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

(Тула, Тульский государственный университет)

На заданном отрезке $[a, b]$ рассматривается первая краевая задача для дифференциального уравнения

$$(3y_x^2 - 1)y_{xx} + \lambda yy_x = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (1)$$

Здесь $y = y(x)$ - искомая функция, λ - числовой параметр, $f(x)$ - заданная функция. Коэффициент при старшей производной может менять знак на решении, в частности, он может обратиться в нуль. В этом случае уравнение вырождается, однако, точки вырождения заранее неизвестны. Подобные задачи предложены в монографии [1]. В общем случае задача (1) не имеет классических решений, но допускает бесконечное множество обобщенных. Запишем уравнение в дивергентной форме:

$$\frac{d}{dx}(y_x^3 - y_x) + \frac{1}{2}\lambda \frac{d}{dx}y^2 = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (2)$$

В качестве обобщенных решений предлагаются так называемые слабые решения, то есть абсолютно непрерывные функции, которые для каждой подходящей пробной функции удовлетворяют интегральному тождеству, получаемому из уравнения (2) интегрированием по частям. Используемая в (2) функция $\omega(z) = z^3 - z$ не является монотонной, поэтому для доказательства существования слабого решения и изучения его структуры необходимо привлекать регуляризации уравнения (2), ограничиваясь отдельными монотонными ветвями функции $\omega(z)$. Приведем примеры возможных регуляризаций.

Функция $\omega(z)$ имеет три интервала монотонности: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. На первом и третьем она монотонно возрастает. Сохраним только эти интервалы, установив следующее правило перехода. Если значения функции y_x лежат внутри одного интервала, то решение является классическим. Если же значения $y_x(x)$ достигают конца интервала, то производная переходит на другой интервал таким

способом, что функция $\omega(y_x)$ сохраняет непрерывность. На этом пути установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f_x(x)$ непрерывна и удовлетворяет одному из неравенств: $f_x(x) < \lambda/3$, либо $f_x(x) > \lambda/3$. Тогда задача (2) имеет одно или два слабых решения. Любое такое решение является кусочно-гладким, то есть состоит из конечного числа кривых, каждая из которых есть классическое решение рассматриваемого уравнения. В точках соединения классических решений выполняются определенные условия сопряжения.

Второй метод регуляризации связан с вариационным исчислением [2] и в конечном итоге приводит к замене немонотонной функции $\omega(z)$ в уравнении (2) на монотонную, но существенно вырожденную функцию $\omega_\epsilon(z)$, которая совпадает с функцией $\omega(z)$ для значений $|z| \geq 1$ и равна тождественно нулю на отрезке $|z| \leq 1$. Для этой новой задачи находятся условия разрешимости, свойства решения и случаи совпадения со слабыми решениями задачи (2).

Еще один метод регуляризации основан на введении искусственной вязкости, например, в форме уравнения третьего порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\epsilon y_{xxx} = \frac{d}{dx}(y_x - y_x^3) - \lambda y y_x + f(x); \quad y(a) = y_x(a) = y(b) = 0.$$

Срочится равномерно сходящаяся последовательность $y_\epsilon(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ из решений указанной задачи. Устанавливаются качественные свойства предельной функции и ее связь с решениями исходной краевой задачи (2).

Литература.

1. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.-270 с.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.-400 с.

МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ

г.Киев, НАУ

Исследуются нелинейные колебания пластины и оболочек, описываемые дифференциальным уравнением в обобщенных координатах:

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + K_1^{ijk} y_j y_k + K_2^{ijkl} y_j y_k y_l = \lambda P_{oi}(t), \quad (1)$$

где y_i — неизвестные вектор-функции времени; ω_i — собственная частота изучаемого объекта, соответствующая i -ой изгибной форме колебаний; $2\zeta_i$ — коэффициенты демпфирования; K_1^{ijk} , K_2^{ijkl} — матрицы, характеризующие соответственно квадратичную и кубическую нелинейность расчетов динамической модели; λ — параметр, характеризующий интенсивность внешнего воздействия; $P_{oi}(t)$ — вектор обобщенной нагрузки.

Представляя решение уравнения (1) в виде:

$$y_i = \sum_{n=1}^N C_n \cos n\omega t + \sum_{m=1}^N S_m \sin m\omega t, \quad (2)$$

где C_n , S_n — медленно меняющиеся параметры (неизвестные амплитуды); ωt — быстро меняющийся параметр, и, применяя стандартную процедуру метода Ван-дер-Поля, приходим к упрощенной системе дифференциальных уравнений, с помощью которой можно получить медленно меняющиеся параметры S_i и C_i :

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{2n\omega} (n^2\omega^2 - \omega_i^2) C_i - \Phi_{pi}^s \\ \frac{dC_i}{dt} = -\frac{1}{2n\omega} (n^2\omega^2 - \omega_i^2) S_i - \Phi_{pi}^c \end{cases}$$

Разработанная численная методика может послужить основой создания программного комплекса и применения его для исследования практических прикладных задач в области нелинейных колебаний точечных пространственных конструкций.

КУЗЬМИНА С.И., КУЛЕШОВ Ю.В., СОЛДАТЕНКО С.А., СТЕПАНОВ В.Г.,
СУЗОРОВ С.С.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КВАЗИДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

г. Санкт-Петербург

Военная инженерно-космическая академия имени А.Ф. Можайского

Как известно, в настоящее время невозможно построение трехмерной самосогласованной модели процессов, протекающих в мезосфере - нижней термосфере. Основным способом моделирования верхней атмосферы является декомпозиция всего комплекса процессов, протекающих в ней, на отдельные наиболее существенные, коими являются: среднезональное течение, планетарные волны, приливные движения и внутренние гравитационные волны (ВГВ). Среднезональное течение представляет из себя один из наиболее интересных объектов исследования. Как известно, среднезональные поля параметров атмосферы на высотах мезосферы - нижней термосферы главным образом формируются под воздействием притока тепла за счет поглощения коротковолновой солнечной радиации и притоков тепла и импульса, связанных с процессом диссипации на этих высотах ВГВ. Кроме того, по сложившимся к настоящему времени представлениям взаимодействие с диссипирующими ВГВ является ведущим процессом, определяющим морфологию среднезонального течения на этих высотах. Поэтому задача оценивания чувствительности параметров среднезонального состояния мезо - термосферы представляется нам небезытересной.

Для решения этой задачи с целью получения более наглядных результатов нами разработана квазидвумерная среднезональная модель атмосферы, основанная на членах, восходящих к Е.Н. Блиговой. Используя предположения, выдвинутые ею, получена система уравнений, описывающая среднезональное состояние атмосферы

в терминах обычных термодинамических переменных. Для описания притоков тепла за счет поглощения коротковолновой солнечной радиации был использован радиационный блок, разработанный в ЛГУ. Притоки тепла и импульса за счет взаимодействия с диссипирующими ВГВ описывались с использованием параметризаций Г. Линдзена. Ввиду того, что характеристики среднезонального течения входят в эту параметризацию нелинейным образом, эта модель является нелинейной. Система уравнений сводится к эллиптическому уравнению второго порядка для функции тока. Алгоритм решения выглядит следующим образом. В качестве начального берется радиационно-равновесное состояние. Задача решается на установление. Исследование проводилось для условий зимнего солнцестояния.

Для исследования чувствительности среднезонального состояния к параметрам ВГВ на базе построенной модели получена модель чувствительности полей ветра и температуры к параметрам ВГВ, генерируемых в тропосфере и распространяющихся вверх. Незвестными функциями являются частные производные от параметров термодинамического состояния по частоте, амплитуде и волновым числам генерируемой гармонике ВГВ. Алгоритм решения уравнений этой модели аналогичен алгоритму решения уравнений исходной модели.

Проведенные исследования свидетельствуют о том, что чувствительность среднезонального термодинамического состояния мезосферы - нижней термосферы существенным образом зависит от параметров генерируемой гармонике ВГВ. Так, гармоники, не достигающие насыщения на высотах мезосферы - нижней термосферы, практически не оказывают влияния на среднезональную циркуляцию. Гармоники известного из эмпирики спектра наиболее существенное влияние оказывают на высотах 60-100 км. Это влияние сводится, главным образом, к тормозящему действию на среднезональную циркуляцию (частные производные по амплитуде отрицательные). Все это свидетельствует о правдоподобности суждений о роли ВГВ в формировании среднезональной циркуляции.

ЧАПЛЫГИНСКОЕ РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
МОСКВА, МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рассмотрим векторное автономное дифференциальное уравнение общего вида:

$$\frac{du}{ds} = f(u), \quad (1)$$

для которого вектор-функция $f = (f_1 \dots f_n)^T$ определена при $u = (u_1 \dots u_n)^T \in D$. Пусть для решения уравнения $u = u(s)$ с начальным условием $u(s_0) = u_0$ известен максимальный интервал продолжительности $s_1 \leq s \leq s_2$, на котором будем задавать все рассматриваемые ниже вектор-функции.

Считаем известным нулевое приближение решения (1):

$$u^0 = v_0(s), \quad v_0(s_0) = u_0$$

Построим последовательность $\{v_k(s)\}$ приближенных решений (1) следующим образом. Определим вектор невязки правых частей для известного $(k-1)$ -го приближения $v_{k-1}(s), k = 1, 2, \dots$:

$$w_{k-1} = \frac{dv_{k-1}}{ds} - f(v_{k-1}) \quad (2)$$

Затем найдем вектор-функцию $Z_k(s)$, удовлетворяющую линейному векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{dz_k}{ds} = f'_u(v_{k-1})z_k - w_{k-1} \quad (3)$$

и начальному условию $Z_k(s_0) = 0$ и вектор-функцию $v_k(s) = v_{k-1}(s) + z_k(s)$.

Здесь $f'_u(\cdot)$ - матрица частных производных первого порядка.

Для k -го приближения решения справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_k}{ds} = f(v_{k-1}) + f'_u(v_{k-1})(v_k - v_{k-1}) \quad (4)$$

Излагаемый рекуррентный прием построения решения (1) является обобщением (на случай произвольных n и k) способа нахождения нижнего приближения решения в рамках метода Чаплыгина.

Далее используя (2), (4) и разложение вектор-функции $f(u)$ по формуле Тейлора до члена второго порядка включительно, получим равенство

$$w_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} z_k^{(i)} z_k^{(j)} \quad (5)$$

в котором через f_{ij} обозначается вектор частных производных второго порядка от $f(u)$, вычисленный в некоторой точке u^* , а через $z_k^{(i)}, z_k^{(j)}$ компоненты вектора z_k .

Решение уравнения (3), составленное с помощью матрицы Коши $\Phi_{k-1}(s, p)$ имеет следующий вид

$$z_k(s) = - \int_{s_1}^s \Phi_{k-1}(s, p) w_{k-1}(p) dp \quad (6)$$

Из формулы (5) получаем

$$w_k = -\frac{1}{2} \left(z_k^T A_1^k z_k, \dots, z_k^T A_n^k z_k \right)^T \quad (7)$$

где $A_1^k \dots A_n^k$ - некоторые квадратные матрицы.

На основании (6), (7) имеют место оценки

$$\max_s |z_k| \leq (s_2 - s_1) R_{k-1} y_{k-1} \quad (8)$$

$$y_k \leq \frac{\sqrt{n}}{2} Q_k \left(\max_s |z_k| \right)^2 \quad (9)$$

в которых используются обозначения

$$y_{k-1} = \max_s |w_{k-1}|, \quad Q_k = \max_{i, u^*} \|A_i^k\|, \quad R_{k-1} = \max_{s, p} \|\Phi_{k-1}\|.$$

Если, согласно (8), (9) для последовательности значений

$$a_k = \frac{\sqrt{n}}{2} Q_k (s_2 - s_1)^2 R_{k-1}^2 y_{k-1}$$

выполняется условие $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a < 1$, то в силу (9) $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$.

Следовательно, в этом случае равномерно по S имеем

$$w_k \rightarrow 0, \quad z_k \rightarrow 0, \quad v_k(s) \rightarrow u(s).$$

Оценки сходимости определяются на основании (8), (9).

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Москва, Московский государственный педагогический
университет

Рассматривается система, определяющая в рамках круговой ограниченной задачи трех тел Земля-Луна-частица траекторию движения частицы в окрестности точки либрации [1]:

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= -2n\dot{u}_1 + p_1 u_1 + X_1(t, u_1, u_2), \\ \ddot{u}_2 &= -2n\dot{u}_2 + p_2 u_2 + X_2(t, u_1, u_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь n , p_1 , p_2 — постоянные параметры задачи, $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$ — некоторые функции.

Характеристическое уравнение системы первого приближения, соответствующей (1), имеет следующие корни: два мнимых сопряженных, положительный и $\lambda < 0$ — для каждой эйлеровой точки либрации.

Система (1) приводится к виду

$$\dot{\bar{y}} = B\bar{y} + \bar{Y}(t, \bar{y}, z), \quad \dot{z} = \lambda z + Z(t, \bar{y}, z), \quad (2)$$

в котором \bar{y} , $\bar{y} \in R^3$; z , $Z \in R_1$; $B(3 \times 3)$ — действительная постоянная матрица.

Искомая функция $z = h(t, \bar{y})$, задающая интегральное многообразие системы (2), определяется приближенно в результате решения уравнения [2]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} [B\bar{y} + \bar{Y}(t, \bar{y}, h)] = \lambda h + Z(t, \bar{y}, h)$$

способом неопределенных коэффициентов [2].

1. Дубошин Г. И. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1933, 352 с.
2. Стригин В. В., Соболев А. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1968, 200 с.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный технический университет

1. Описание класса изучаемых случайных процессов.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0), \quad (1)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in R_n$ -решение уравнения (1), $a(x, t) \in R_n$, $\Sigma(x, t) \in R_{n \times m}$ - конечное число раз дифференцируемые по совокупности аргументов неслучайные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения уравнения (1), $f_t = f(t, \omega) \in R_m$ -винеровский случайный процесс с независимыми компонентами.

2. Общая формула численного метода.

Следствием разложения Тейлора-Ито при $R(x, t) = x$ является соотношение:

$$x_s = \sum_{q=0}^r \sum_{k, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}_0} G_{kj_1 \dots j_k, s, t} + D_{r, s}; \quad r = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Расшифровка обозначений, входящих в (2) дана в докладе Кульчицкого О.Ю., Кузнецова Д.Ф. "The Taylor-Itô expansion of Itô processes, which are generated by a solution of a stochastic differential equation". В правую часть (2) входят повторные стохастические интегралы Ито:

$$I_{t_1 \dots t_k, s, s}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_{t_1}^s (s - \tau_1)^{i_1} df_{\tau_1}^{(i_1)} \int_{\tau_1}^s (s - \tau_2)^{i_2} df_{\tau_2}^{(i_2)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{i_k} df_{\tau_k}^{(i_k)} \quad \text{при } k > 0$$

и равно 1 при $k = 0$. Отбросив в (2) $D_{r, s}$, аппроксимировав $I_{t_1 \dots t_k, s, s}^{(i_1 \dots i_k)}$ с погрешностью $\zeta_r = O((s-t)^{\frac{r+1}{2}})$ и положив $t = p\Delta$, $s = (p+1)\Delta$; $p = 0, 1, \dots$; $\Delta \geq 0$ получим общую формулу численного метода с погрешностью ζ_r на шаге интегрирования Δ . Здесь и далее погрешность понимается в среднеквадратичном смысле, а аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито будут далее обозначаться $J_{t_1 \dots t_k, p, p, \Delta}^{(i_1 \dots i_k)}$.

3. Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито.

Теорема 1 Пусть $\{\phi_j(s, t, \tau)\}_{j=0}^{\infty}$; $\tau \in [t, s]$ полный ортонормированный базис в пространстве $L_2([s, t])$ Тогда

$$I_{t_1 \dots t_k, s, s}^{(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{\infty} C_{j_1 \dots j_k}(s, t) \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l, s, s}^{(i_l)}; \quad (3)$$

где $C_{j_1 \dots j_k}(s, t)$ - коэффициенты разложения функции: $(s - \tau_1)^{i_1} \dots (s - \tau_k)^{i_k} 1(\tau_1, \tau_2) \dots 1(\tau_{k-1}, \tau_k)$ где $1(\tau_{j-1}, \tau_j) = 1$ при $\tau_j \geq \tau_{j-1}$ и $1(\tau_j, \tau_j) = 0$ при $\tau_j < \tau_{j-1}$, а ряд по базису $\psi_{j_1 \dots j_k}(s, t, \tau_1, \dots, \tau_k) = \phi_{j_1}(s, t, \tau_1) \dots \phi_{j_k}(s, t, \tau_k)$ в пространстве $L_2([t, \cdot]^k)$, а $\zeta_{j_l, s, s}^{(i_l)} \sim N(0, 1)$ и независимы при различных i_l, j_l .

Аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито ищется как усеченный ряд (3) из условия на точность аппроксимации.

4. Численные методы. Выводом пункта 2, в частности, является:

$$\begin{aligned}
 x_{p+1} = & x_p + G_0^{(i_1)}\{x_p\}J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + \Delta a(x_p, p\Delta) + G_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}\{x_p\}J_{00(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2)} + \\
 & \Delta L(G_0^{(i_1)}\{x_p\}J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + G_1^{(i_1)}\{x_p\}J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}\{x_p\}J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3)} + \\
 & G_0^{(i_1)}G_1^{(i_2)}\{x_p\}J_{01(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2)} + G_1^{(i_1)}G_0^{(i_2)}\{x_p\}J_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2)} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{x_p\} + \Delta LG_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}\{x_p\}J_{00(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2)} + \\
 & G_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_4)}\{x_p\}J_{0000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} + G_2^{(i_1)}\{x_p\}J_{2(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + G_1^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}\{x_p\}J_{100(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3)} + \\
 & \Delta L(G_1^{(i_1)}\{x_p\}J_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_1^{(i_3)}\{x_p\}J_{001(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3)} + \frac{\Delta^2}{2}L^2G_0^{(i_1)}\{x_p\}J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + \\
 & G_0^{(i_1)}G_1^{(i_2)}G_0^{(i_3)}\{x_p\}J_{010(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3)} + \Delta LG_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}\{x_p\}J_{000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3)} + \\
 & G_0^{(i_1)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_5)}\{x_p\}J_{00000(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} \quad (4)
 \end{aligned}$$

С целью облегчения восприятия формулы (4) в ней опущены фигурные скобки отделяющие друг от друга дифференциальные операторы. В (4) суммирование ведется по повторяющимся индексам: $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$; x_p - значение решения уравнения (1) в момент $p\Delta$, полученное с помощью численного метода. Первые 3, 4, 7, 12 слагаемых в правой части (4) и вся правая часть (4) представляют собой численные методы с погрешностями на шаге $O(\Delta)$, $O(\Delta^{3/2})$, $O(\Delta^2)$, $O(\Delta^{5/2})$, $O(\Delta^3)$ соответственно. При этом первые два из приведенных четырех методов носят в литературе название методов Эйлера и Мильштейна соответственно. Пользуясь соотношением (2) можно получать методы все более и более высоких порядков точности. При этом аппроксимация повторных стохастических интегралов, входящих в (2) должна иметь точность порядка отбрасываемого остаточного члена.

5. Конечно-разностные методы. Разложение Тейлора-Ито, рассмотренное на конкретной реализации может быть аппроксимировано конечными разностями. Это позволяет перейти к конечно-разностным методам. Приведем простейший из них со среднеквадратичной погрешностью $O(\Delta^{3/2})$ на шаге интегрирования Δ :

$$\begin{aligned}
 x_{p+1} = & x_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta)J_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1)} + \Delta a(x_p, p\Delta) + \\
 & \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m (\Sigma_{i_1}(x_p + \Sigma_{i_2}(x_p, p\Delta))J_{00(p+1)\Delta, p\Delta}^{(i_1 i_2)} - \Sigma_{i_1}(x_p, p\Delta))
 \end{aligned}$$

где $\Sigma_i(x, t)$ - i -й столбец матрицы $\Sigma(x, t)$.

**THE TAYLOR-ITO EXPANSION OF ITO PROCESSES, WHICH ARE GENERATED
BY A SOLUTION OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITO EQUATION**

Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State Technical University.

1. The description of a class of the investigated processes.

We shall consider a Ito stochastic differential equation:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)d\xi_t, \quad x_0 = x(0), \quad (1)$$

where $x_t = x(t, \omega) \in R_n$ is a equation (1) solution and the non-random functions: $a(x, t) \in R_n$, $\Sigma(x, t) \in R_{n \times m}$ are satisfying an conditions of existence and uniqueness of the equation (1) solution; $f_t = f(t, \omega) \in R_m$ is a Wiener random process with independent components.

2. The integration order change in iterated stochastic integrals.

Lemma 1 Let $\psi(t)$ is a non-random finite function and ϕ_t is a non-look-ahead random process for Wiener process and $M\{\phi_t^2\} < \infty$. Also let exists a constants $C_1 < \infty$, $\gamma_i > 0$, that $M\{(\phi_\tau - \phi_t)^2\} \leq C_1|t - \tau|^{\gamma_i}$ and $((\psi(t) - \psi(\tau))^2 \leq C_2|t - \tau|^{\gamma_2}$; $i = 1, 2$ for each moments $t, \tau \in [a, b]$. Then:

1. the mean-root-square limit:

$$J_{ab} = l.i.m. \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} (W_{\tau_{j+1}}^{(i)} - W_{\tau_j}^{(i)}) \int_{\tau_{j+1}}^b \psi(t_1) dW_{t_1}^{(i)} \quad (\text{as } \max |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0)$$

is exist and by definition:

$$J_{ab} = \int_a^b \phi_t dW_t^{(i)} \int_t^b \psi(t_1) dW_{t_1}^{(i)}, \quad i, l = 0, 1, \dots, m; \quad W_t^{(q)} = f_t^{(q)} \quad (q = 1, \dots, m); \quad W_t^{(0)} = t \quad (q = 0).$$

2. and we have: $\int_a^b \phi_t dW_t^{(i)} \int_t^b \psi(t_1) dW_{t_1}^{(i)} = \int_a^b \psi(t) \int_a^t \phi_{t_1} dW_{t_1}^{(i)} dW_t^{(i)}$

The following theorem is a generalization of the lemma 1 results.

Theorem 1 If $\psi_l(t)$; $l = 1, \dots, k-1$ and ϕ_t are satisfying an conditions of lemma 1 for $\psi_l(t)$ и ϕ_t correspondingly, then

1. the mean-root-square limit:

$$J_{ab} = l.i.m. \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} (W_{\tau_{j+1}}^{(i)} - W_{\tau_j}^{(i)}) \int_{\tau_{j+1}}^b \psi_1(t_2) dW_{t_2}^{(i)} \int_{t_2}^b \psi_2(t_3) dW_{t_3}^{(i)} \dots \int_{t_{k-1}}^b \psi_{k-1}(t_k) dW_{t_k}^{(i-k-1)} \quad (\text{as } \max |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0)$$

is exist and by definition:

$$J_{ab} = \int_a^b \phi_{t_1} dW_{t_1}^{(i)} \int_{t_1}^b \psi_1(t_2) dW_{t_2}^{(i)} \dots \int_{t_{k-1}}^b \psi_{k-1}(t_k) dW_{t_k}^{(i-k-1)}$$

2. and we have: $J_{ab} = \int_a^b \psi_{k-1}(t_k) \int_a^{t_k} \psi_1(t_2) \int_a^{t_2} \phi_{t_1} dW_{t_1}^{(i)} dW_{t_2}^{(i)} \dots dW_{t_k}^{(i-k-1)}$

where $i, l_1, \dots, l_{k-1} = 0, 1, \dots, m, k \in N; W_t^{(q)} = f_t^{(q)} (q = 1, \dots, m)$ и $W_t^{(0)} = t (q = 0)$.

3.A Ito process expansion around a fixed time point.

Theorem 2 If the non-random functions $\eta = R(x, t), a(x, t), \Sigma(x, t)$ are finite times differentiable on x, t , continuously, then

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \sum_{k, j, l_1, \dots, l_k \in \Xi_q} G_{kj l_1 \dots l_k s, t} + D_{r, s, t}; \quad r = 1, 2, \dots \text{ (mean-root-square);} \quad (2)$$

where:

$$D_{r, s, t} = \sum_{k, j, l_1, \dots, l_k \in \Xi_r} H_{kj l_1 \dots l_k s, t}; \quad G_{kj l_1 \dots l_k s, t} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m Q_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \frac{(s-t)^j}{j!};$$

$$H_{kj l_1 \dots l_k s, t} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \left(\int_{\tau_1}^s L \{ Q_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} \} d\tau I_{i_1 \dots i_k s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} + \sum_{q=1}^m \int_{\tau_1}^s G_0^{(q)} \{ Q_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} \} df_{\tau}^{(q)} I_{i_1 \dots i_k s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} \right);$$

$$Q_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} = I^j \{ G_{i_1}^{(i_1)} \{ \dots \{ G_{i_k}^{(i_k)} \{ \eta \} \} \dots \} \};$$

$$\Xi_q = \{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + l_1 + \dots + l_k = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \};$$

$$I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - \tau_1)^{i_1} df_{\tau_1}^{(i_1)} \int_{\tau_1}^s (s - \tau_2)^{i_2} df_{\tau_2}^{(i_2)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{i_k} df_{\tau_k}^{(i_k)} (k > 0); I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} = 1; (k = 0);$$

$$G_q^{(i)} \{ \cdot \} = \frac{1}{q} \left(G_{q-1}^{(i)} \{ L \{ \cdot \} \} - L \{ G_{q-1}^{(i)} \{ \cdot \} \} \right); i = 1, \dots, m; L^0 \{ \cdot \} = 1;$$

$G_0^{(i)} \{ \cdot \}; i = 1, \dots, m; L \{ \cdot \}$ are differential operators of diffusion and drift correspondingly in Ito's formula.

4. The Taylor-Ito expansion of Ito processes

Theorem 3 If the theorem 2 conditions are satisfied, then:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \sum_{k, j, l_1, \dots, l_k \in \Xi_q} G_{kj l_1 \dots l_k s, t} + O \left((s-t)^{\frac{(r+1)}{2}} \right); \quad r = 1, 2, \dots \text{ (mean-root-square);}$$

where:

$$\Xi_q^* = \Xi_q \cap \Xi_r^*; \quad \Xi_r^* = \{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots; k + 2(j + l_1 + \dots + l_k) < r + 1 \};$$

5. The other form of the Taylor-Ito expansion.

Theorem 4 If the theorem 2 conditions are satisfied, then:

$$\sum_{k, j, l_1, \dots, l_k \in \Xi_q} Q_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \frac{(s-t)^j}{j!} = \sum_{k, j, l_1, \dots, l_k \in \Xi_q} F_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \frac{(s-t)^j}{j!}; \quad q = 1, 2, \dots \quad (3)$$

where:

$$F_{j i_1 \dots i_k}^{(i_1 \dots i_k)} = G_{i_1}^{(i_1)} \{ \dots \{ G_{i_k}^{(i_k)} \{ L^j \{ \eta \} \} \dots \} \};$$

$$I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t - s_1)^{i_1} \dots \int_{s_1}^{s_{k-1}} (t - s_k)^{i_k} df_{s_k}^{(i_k)} \dots df_{s_1}^{(i_1)} (k > 0); I_{i_1 \dots i_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} = 1 (k = 0)$$

If we use the equation (3), then we can get the other form of Taylor-Ito expansion.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХ
 КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ С ВНЕШНИМ ПОДАВЛЕНИЕМ.

г. Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский Государственный университет

Рассматривается трехмерная динамическая система, описывающая две конкурирующие популяции бактерий в среде с внешним подавлением, к которому чувствительна лишь одна из них. Фазовым пространством такой системы является множество векторов с неотрицательными компонентами.

Изучение такой системы весьма естественным образом разбивается на два различных случая. В первом из них все стационарные точки расположены на границе фазового пространства. В этом случае любая траектория асимптотически приближается к стационарному множеству, что соответствует вымиранию одной из популяций.

Наиболее интересен и сложен для исследования второй случай, когда существует внутренняя стационарная точка. Здесь разработана методика построения последовательности специальных двумерных систем сравнения, траектории которых локализуют аттрактор исходной системы. Такое построение использует идеи и методы Чаплыгина, Камке, Варбашина и Велх о построении бесконтактных поверхностей с помощью траекторий систем сравнения. Наряду с системами сравнения здесь используется специальное сечение Пуанкаре и для него доказывается теорема о возвращаемости на это сечение траекторий, состоящих из предельных точек. Привлечение численных методов аппроксимации решений уравнений сравнения позволяет получить асимптотические оценки концентрации популяций. Рассматриваются возможные автоколебательные процессы и оцениваются их амплитуды.

Обсуждается гипотеза Су-Колмана об отсутствии предельных циклов при условии существования двух стационарных точек рассматриваемой системы. Применение систем сравнения в случае конкретных численных заданных параметров подтверждает эту гипотезу.

БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА ДИВЕРГЕНЦИИ ПЛАСТИНЫ В АЭРОУПРУГОСТИ

Ульяновск, Ульяновский гос.технический университет

Пластина, занимающая ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ , находится под действием внешнего краевого усилия с составляющими \bar{q}_1 и \bar{q}_2 вдоль осей Ox и Oy , и ее обтекает сверху поток газа в направлении оси Ox . Пусть W – прогиб пластины, а Φ – функция напряжений. Решения уравнения Кармана, отвечающие условиям $W = 0$, $\Phi = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 x^2 + \bar{q}_2 y^2)$ описываются системой в безразмерных переменных [1], [2]

$$\chi^2 \Delta^2 w = [w, F] + k \left[1 - \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M w_x \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \right], \quad \Delta^2 F + \frac{1}{2} [w, w] = 0 \quad ([w, F] = w_{xx} F_{yy} + w_{yy} F_{xx} - 2w_{xy} F_{xy})$$

с граничными условиями $F|_{\Gamma} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$. Пластина жестко закреплена по контуру (шарнирно опирается по краю) $w|_{\Gamma} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$

$$\left(\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \Big|_{\Gamma} = 0 \right).$$

Здесь θ – угол, который нормаль n в соответствующей точке Γ образует с осью абсцисс, $w = \frac{W}{d}$, $F = \frac{\Phi}{Ed^2}$, $x = \frac{x_1}{d}$, $y = \frac{y_1}{d}$.

$\chi^2 = \frac{k^2}{12(1 - \sigma^2)d^2}$, $q_1 = \frac{\bar{q}_1}{Ed}$, $q_2 = \frac{\bar{q}_2}{Ed}$, $k = \frac{E_0 d^3}{Eh}$, M – число Маха, d – характерный диаметр области Ω , E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, ρ – радиус кривизны контура в точке Γ , p_0 – давление и κ – показатель политропы.

В окрестности критических значений q_{10} , q_{20} , M спектральных параметров q_1 , q_2 , M положим $q_1 = q_{10} + \lambda$, $q_2 = q_{20} + \mu$, $M = M_0 + \varepsilon$. Задача

находится на спектре, если $q_{10} < 0$, $q_{20} < 0$, т.е. пластина сжимается внешними усилиями, приложенными к ее краю. Соответствующее уравнение разветвления (УР) представляет собой поверхность в пространстве спектральных параметров, при переходе которой меняется качественная картина решений.

В предположении симметрии области Ω относительно оси Oy вычислены коэффициенты УР и исследована асимптотика малых решений вблизи поверхности разветвления – как для описанного случая обтекания пластины потоком газа сверху, так и для двустороннего обтекания. В частности, рассмотрена круглая пластина и пластина в форме квадрата. Используются методы теории ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии [3]. Предложен приближенный метод [4] решения двухточечных краевых задач об изгибных формах пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа, описываемых нелинейными ОДУ. Он основан на групповых преобразованиях [5] и позволяет свести двухточечную граничную задачу к задаче Коши с последующим использованием метода Рунге-Кутты и применяющегося к аналогу уравнения разветвления метода Ньютона.

Исследования поддержаны грантовым центром НГУ, код 96-15.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Наука, 1963. – 880 с.
2. Срубщик Л.С., Треногин В.А. О выпучивании гибких пластин // ПММ, 32 (1968), вып.4, С.721-724.
3. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: Фан, 1985. – 184 с.
4. Логинов Б.В., Вельмисов П.А. Метод групповых преобразований в некоторых двухточечных граничных задачах, описывающих формы изгиба стержней // Математическое моделирование, 7 (1995), №5, С.37-38.
5. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982 – 294 с.

Некоторые математические вопросы теории газовой смазки

С. В. Лупуляк, Ю. К. Шиндер

Санкт-Петербургский Государственный Технический университет

Проблема разработки математического аппарата, вычислительных алгоритмов для проектирования узлов на газовой смазке является одной из актуальных задач прикладной математики и механики, так как подобные узлы имеют ряд преимуществ, по сравнению с обычными, и уже сегодня нашли широкое применение в различных областях.

В данной работе изучаются вопросы существования, единственности и регулярности решений уравнения Рейнольдса теории газовой смазки в случае как гладких, так и негладких функций профиля.

Поле давления в смазочном слое описывается уравнением Рейнольдса теории газовой смазки, записанным в следующей безразмерной форме:

$$\operatorname{div}(h^3 p \nabla p - \Lambda h p \underline{u}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\text{с граничными условиями} \quad p = 1 \text{ на } \partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь p - давление в смазочном слое; \underline{u} - скорость движения одной из поверхностей относительно другой; h - функция профиля, нормированная по своей минимальной величине; Λ - физический параметр - число сжимаемости; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - открытая ограниченная односвязная область с гладкой или кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ (смазываемая поверхность); ∇ и div - дифференциальные операторы градиента и дивергенции соответственно.

Предполагаем, что функции h и \underline{u} , входящие в уравнение (1), обладают следующими свойствами:

$$h \in \mathcal{F} = \{h \in L^1(\Omega), 1 \leq h(x) \leq h_{\max} \text{ п.в. в } \Omega\}; \quad \underline{u} \in \mathcal{D} = [C^1(\Omega)]^2. \quad (3)$$

Здесь $L^1(\Omega)$ и $C^1(\Omega)$ - пространства соответственно существенно ограниченных и бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

В данных условиях приходится рассматривать обобщенную постановку задачи (1.2) [1,2].

Уравнение (1) является квазилинейным эллиптическим уравнением, допускающим вырождение при $p = 0$. Ввиду этого, исследование его разрешимости связано с некоторыми трудностями.

В работе доказывается, что, при выполнении условий (3), задача (1.2) разрешима в обобщенном смысле, и её решение p неотрицательно. Также её решение будет принадлежать пространству Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$. Если решение p задачи отделено от нуля, то оно - единственно.

Положительность (отделённость от нуля) решения удаётся доказать в случае гладких (непрерывных) функций профиля h [3], а также в случае достаточно малых чисел сжимаемости Λ для произвольных $h \in \mathcal{F}$.

Литература.

1. Д. Гилбарт, Н. Трудинер. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. Москва "Наука" 1989 464 с.
2. О. А. Ладженская, Н. Н. Уралова. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Москва "Наука" 1964 338 с.
3. Cimatti G. *Nonlinear aspects of the theory of lubrication* // *Rendiconti di matematica* 3 - 1983, P. 399 - 412.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ
БИНАРНОЙ СМЕСИ В ТОНКОМ ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕ

г. Махачкала, Дагестанский государственный технический университет

Исследование естественных процессов теплопереноса в пористых средах имеют многочисленные приложения (гидрогеотермия, использование глубинного тепла Земли, разработка нефтяных месторождений, извлечение из термальных вод ценных химических соединений, теплоизоляция и др.).

В этой связи, рассматривается свободная конвекция бинарной смеси в тонком пористом кольце, на границах которого поддерживаются стационарные распределения температуры и концентрации.

Фильтрация бинарной смеси описывается в приближении Дарси - Овербека - Буссинеска. Для этой задачи на основе модели двумерной конвекции выведена система нелинейных интегродифференциальных уравнений в нулевом приближении по малому параметру - относительной толщине пористого слоя. Усреднение по толщине пористого слоя позволило, в дальнейшем, упростить эту систему.

Получены стационарные решения упрощенной нелинейной задачи. Установлено, что существуют ряд характерных областей изменения фильтрационного (R_{at}) и диффузионно-фильтрационного (R_{ac}) числа Рэлея. В первой области изменения R_{at} и R_{ac} нет стационарного решения, отличного от нуля. Во второй области - существуют два нетривиальных стационарных решения, соответствующих движению флюида в двух возможных направлениях. Наконец, в третьей области существуют четыре попарно симметричных нетривиальных решения. Два из них соответствуют движению флюида по часовой стрелке, а другие два - против часовой стрелки.

Проведен линейный анализ устойчивости всех (в том числе и нулевого) решений и реализовано численное решение нелинейной задачи. Показано, что не все стационарные решения устойчивы. Установлено также, что при определенных условиях в кольце устанавливается автоколебательный режим конвекции.

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА-ШРЕДИНГЕРА
В ФОРМЕ ВОЛН РИМАНА**

¹ ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН, С.-Петербург; ²СПбГТУ, С.-Петербург;

³ Высшая пожарно-техническая школа МВД, С.-Петербург.

Самосогласованная система уравнений Максвелла - Шредингера описывает процессы распространения электромагнитного излучения в преломляющей среде со слабым поглощением. Недавно [1] было показано, что в случае среды с эффективной трехуровневой схемой возбуждения данная система уравнений является адиабатически интегрируемой. Полученный класс решений данной нелинейной задачи представляет собой солитоноподобные (т.е. сохраняющие в процессе распространения форму) волны. Отличительной особенностью данного решения является то, что форма этих волн может быть практически произвольной, достаточным является лишь выполнение условия адиабатичности. Потери энергии излучения оказываются при этом крайне малы, ввиду слабого заселения возбужденного состояния в адиабатическом режиме.

Однако в работе [1] была использована идеализированная модель, приводящая к повышенной симметрии исходной системы уравнений. Мы показываем, что учет реальных свойств среды (тепловое движение атомов, неравенства сил осцилляторов смежных оптических переходов) приводит к понижению симметрии системы уравнений. Как следствие, отсутствует адиабатический инвариант системы, сохраняющийся с высокой точностью в процессе распространения волны неограниченно долго. Тем не менее, для ранней стадии эволюции волн, пока неадиабатические эффекты невелики, данная система может быть решена аналитически. Решения имеют вид волн Римана, для которых имеет место искажение формы и, главное, укручение фронта. Данное укручение становится заметно на оптических толщинах среды, которые могут быть достигнуты в современном эксперименте по электромагнитно индуцированной прозрачности оптических материалов. Аналитические расчеты подтверждаются численным интегрированием системы уравнений, выполненными без использования адиабатического приближения.

[1] R. Grobe, F. T. Hioe, J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 3183.

УРАВНЕНИЯ КООПЕРАТИВНОЙ ДИНАМИКИ СОВОКУПНОСТИ ТРЕХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

¹ ФТИ им.А.Ф.Иоффе РАН, С.-Петербург; ²СПбГТУ, С.-Петербург;³ Высшая пожарно-техническая школа МВД, С.-Петербург.

Со времени появления классической работы Дике [1] кооперативное излучение атомных ансамблей является объектом интенсивных исследований. Отличительной чертой системы уравнений, описывающих данный коллективный процесс, является ее нелинейность, в отличие от случая некогерентной спонтанной релаксации отдельного атома.

В данной работе мы выводим систему уравнений, описывающую коллективную эволюцию совокупности трехуровневых атомов под действием когерентного двухмодового электромагнитного поля. Наша модель представляет собой обобщение известной одномодовой модели Бонифачо [2]. Уравнение для атомной матрицы плотности ρ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H_{int}, \rho] + \sum_{j=1}^2 \tau |g_j|^2 \{ [\mathfrak{R}_{j0}, \rho \mathfrak{R}_{0j}] + [\mathfrak{R}_{j0} \rho, \mathfrak{R}_{0j}] \},$$

где H_{int} - гамильтониан взаимодействия с когерентным электромагнитным полем, g_j - константы связи с соответствующими модами, τ - время релаксации поля, \mathfrak{R}_{ij} - коллективные атомные операторы. Квазиклассическая процедура расщепления корреляторов позволяет записать систему из 9 уравнений для средних $R_{ij} = \text{Sp}\{\rho \mathfrak{R}_{ij}\}$. Данная система решена нами численно.

Результаты численного анализа могут быть охарактеризованы следующим образом. В условиях точного двухфотонного резонанса населенность верхнего состояния $|0\rangle$ стремится к нулю с течением времени, т.е. коллективная релаксация, совершенно аналогично обычной некогерентной [3], ведет к когерентному пленению атомной населенности. При отклонении от двухфотонного резонанса в системе наблюдаются установившиеся колебания. Ряд явлений, характерных для нелинейных систем, например, удвоение периода, имеет место.

[1] R. H. Dicke. Phys.Rev. 93 (1954) 99.

[2] R. Bonifacio et al. Phys.Rev.A 4 (1971) 302.

[3] Б.Д.Агапьев и др. УФН 163 № 9 (1993) 1.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЕНАРА С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ

Россия, 189620, С.-Петербург, а. Пушкин, Кадетский бул., д. 1.
Высшее военно-морское инженерное училище.

Рассматривается уравнение Ленара с малым параметром при старшей производной $\varepsilon \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, которое заменой $\dot{x} + F(x) = y$, $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ приводится к системе $\varepsilon \dot{x} = y - F(x)$, $\dot{y} = -g(x)$. Данная система изучается при $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, $F(x)$ имеет допустимый вид [1], $g(x) = -(c-x)p(x)$, где $p(x) = qx^2 + bx + d$, $D[\cdot](x) < 0$, $d > 0$.

В каждом из следующих случаев получены условия наличия определенного числа „l“ предельных циклов:

1. $p(x) \equiv 1$, $a_1 \neq 0$, $a_1a_3 < 0$; $l = 1$ при $c \in (x_2, x_1)$; $l = 0$ при $c \leq x_2$, $c \geq x_1$, где $x_{1,2} = \left(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3} \right) / 3a_3$.
2. $p(x) \equiv 1$, $a_1 = 0$.
 - 1) $a_2a_3 > 0$; $l = 1$ при $c \in (-2a_2/3a_3, 0)$, $l = 0$ при $c \leq -2a_2/3a_3$, $c \geq 0$.
 - 2) $a_2a_3 < 0$; $l = 1$ при $c \in (0, -2a_2/3a_3)$; $l = 0$ при $c \leq 0$, $c \geq -2a_2/3a_3$.
3. $p(x) = qx^2 + bx + d$, $a_1 \neq 0$, $a_1a_3 < 0$. Условия как в случае первом.
 1. $p(x) = qx^2 + bx + d$, $a_1 = 0$.
 - 1) $a_3 > 2a_2b/3d$, $a_2a_3 > 0$. Условия как в 2.1).
 - 2) $a_3 < 2a_2b/3d$, $a_2a_3 > 0$; $l = 1$ при $c \in [-2a_2/3a_3, 0]$; $l = 2$ при $c < -2a_2/3a_3$, $c > 0$.
 - 3) $a_3 > 2a_2b/3d$, $a_2a_3 < 0$. Условия как в 2.2).
 - 4) $a_3 < 2a_2b/3d$, $a_2a_3 < 0$; $l = 1$ при $c \in [0, -2a_2/3a_3]$; $l = 2$ при $c < 0$, $c > -2a_2/3a_3$.

Найденные в 1 - 3, 4. 1), 3) циклы являются устойчивыми. В 4. 2), 4) внешний цикл - устойчивый, внутренний - неустойчивый, причем при определенном значении параметра „с“ циклы сливаются в один полуустойчивый и затем исчезают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайкина А. К., Шубин М. А. // УМВ. 1984. Т. 30. вып. 2 (236). С. 75 - 127.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Оренбургский государственный университет

Рассмотрим задачу минимизации

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in Q \subset E^n, \quad (1)$$

где Q — выпуклое замкнутое множество на евклидова n -мерного пространства E^n , нормированного скалярным произведением, для $\forall x \in E^n$ $\|x\| = (x, x)^{1/2}$; функция $f(x)$ определена и дифференцируема на E^n , ее градиент $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in E^n, \quad L > 0. \quad (2)$$

Предполагаем, что

$$\inf f(x) = f_* > -\infty, \quad x \in Q; \quad Q_* = \{x \in Q: f(x) = f_*\} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Для решения задачи (1) в докладе предлагается и исследуется непрерывный метод второго порядка с проекцией траектории на множество Q ,

$$\begin{aligned} \theta x'' + x' + x &= P_Q [x + \alpha x' + \\ &+ \beta(\chi_1 x' - \chi_2 f'(x + \alpha x'))], \quad t \geq 0, \quad x(0) = x^0, \quad x'(0) = x^1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $P_Q(v)$ — проекция точки v на множество Q ; x^0, x^1 — произвольные начальные точки из Q ; $\alpha, \beta, \chi_1, \chi_2, \theta$ — параметры метода; $x = x(t)$, $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$.

В работе [1] указано, что методы второго порядка имеют преимущества перед методами первого порядка; в частности, более высокую скорость сходимости при минимизации "оврженных" функций.

О сходимости метода (4) имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнены условия:

- 1) множество $Q \subset E^n$ выпукло и замкнуто;
- 2) функция $f(x)$ выпукла, непрерывно дифференцируема на E^n , ее градиент удовлетворяет условию Липшица (2); выполнены условия (3);
- 3) матрица Гессе $f''(x)$ ограничена на Q константой L ;
- 4) параметры метода (4) удовлетворяют условиям: $\chi_1 \in (0, \chi_1^0)$, $\chi_2 \in (0, \chi_2^0)$, $0 < \beta < (1 - \theta) / (\chi_1 + L\theta\chi_2 + L\alpha^2\chi_2/4)$, $\alpha \in (0, 1 - \theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

Тогда множество точек равновесия системы (4) попарно устойчиво в большом, метод (4) сходится к некоторой точке $x^* \in Q_*$, т. е.

$x(t) \rightarrow x^* \in Q_*$ при $t \rightarrow \infty$, при любом выборе точек $x^0, x^1 \in Q$.

Цитированная литература

1. Антипина А. С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы вычислительной математики и ее приложения. М.: АН СССР, 1989. С. 5-43.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ОБЩЕГО ВИДА

Санкт-Петербург, Военно-транспортный институт

Рассматривается система линейных интегральных неравенств

$$x(t) \leq P(t) + G(t) \int_{t_0}^t H(s)x(s) ds, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где $t, s \in \mathbb{R}^1$, $P(t)$, $G(t)$, $H(t)$ – матрицы размера $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times n)$ с непрерывными элементами, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция.

Теорема. Пусть либо $H(t) \geq 0$ и $G(t) \geq 0$, либо $H(t) \leq 0$ и $G(t) \leq 0$, тогда для функции $x(t)$, удовлетворяющей (1), имеет место система неравенств

$$x(t) \leq P(t) + G(t) \sum_{i=0}^m \Gamma_i (\Gamma H(t) P(t)), \quad t \in [t_0, T^*],$$

где $T^* \leq T$, Γ_i – матричный оператор $\Gamma_i = \Gamma H(t) G(t)$ $t \in [t_0, T]$, Γ – скалярный оператор $\Gamma u(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds$, $t \in [t_0, T]$, $u(t)$ – непрерывная функция.

Доказательство теоремы основано на использовании метода операторных преобразований [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев П.Н. Системы интегральных неравенств типа Гронуолла-Беллмана / Ленингр. обл. пед. ин-т. – СПб., 1996. – Рукопись ДЕП. в ВИНТИ 19.03.1996г., № 832-В96.
2. Матвеев П.Н. Нелинейные интегральные неравенства типа Бихари, обладающие свойством рекурсивности // Дифференциальные уравнения. – Т. 32. – № 7. – 1996. – С. 1-3.

**ON A METHOD OF NONCONVEX
GLOBAL CONSTRAINED OPTIMIZATION**

St. Petersburg University, St. Petersburg, Russia

We consider a class of optimization problems, which are of certain interest for control theory. These problems are of global constrained optimization and may be nonconvex in general. We study the applicability of a general approach to solution of the above problems that was proposed in [1]. When being applied to linear-quadratic optimal control problems with quadratic constraints, this approach offers only to combine in a proper way the methods of classic linear quadratic control theory with those of finite dimensional convex programming to obtain the complete solution of the problem. This approach makes no distinctions between convex and nonconvex problems and is applicable in the both cases. This is important because, on the one hand, nonconvex problems naturally arise in applications and, on the other hand, the nonconvexity is well known to involve a series of considerable troubles in solution of a global optimization problem.

The above approach was previously justified only under certain assumptions [1, 2], which, for example, are fulfilled for infinite-horizon linear-quadratic optimal control problems with quadratic constraints and constant or periodic coefficients. Nevertheless, this approach fails to be valid in general. Having a mind to consider finite-horizon problems that are not necessarily linear-quadratic, we supplement the results of [1, 2] to expand the range of applicability of the basic approach. In doing so, we reconsider the mathematical foundation on which the proof of the validity of the approach was previously built up. For instance, in [2], utilized were arguments that may be ultimately boiled down to certain extensions of the classic Toeplitz-Hausdorff theorem on the convexity of the unit sphere image under a quadratic mapping from a complex Hilbert space into the plane \mathbb{R}^2 . In this paper, we proceed from other reasons that lean upon differentiability of the Lagrangian function minimizer with respect to Lagrange multipliers. Reasons that are similar in spirit to these may be found in a number of researches on the Lagrange duality.

A special attention is paid to the case when the objective and constraints functions are quadratic functionals on a Hilbert space. As an example of an application of the general approach, a methodology is presented by which an optimal process can be synthesized for a finite-horizon linear-quadratic optimal control problem with quadratic constraints:

$$\text{minimize } \Phi_0 := \int_0^T \Phi_0[t, x(t), u(t)] dt + x(T)^* Q_0 x(T) \quad (1)$$

subject to

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = a, \quad |x(\cdot)|, |u(\cdot)| \in L_1(0, T), \quad (2)$$

$$\Phi_1 \leq 0, \dots, \Phi_k \leq 0, \Phi_{k+1} = \dots = \Phi_{k+l} = 0 \quad (3)$$

where the asterisk stands for transposition and

$$\Phi_i := \int_0^T \mathcal{G}_i[t, x(t), u(t)] dt + x(T)^* Q_i x(T) - \gamma_i. \quad (4)$$

Here $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control, $\mathcal{G}_i(t, x, u)$ is a quadratic form in x and u

$$\mathcal{G}_i(t, x, u) = \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} G_i(t) & \mathcal{G}_i(t) \\ \mathcal{G}_i(t)^* & \Gamma_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad (5)$$

and $A(t), B(t), Q_i = Q_i^*, G_i(t) = G_i(t)^*, \mathcal{G}_i(t), \Gamma_i(t) = \Gamma_i(t)^*$ are matrices. Their entries are real valued piecewise continuous functions of time t . The reals $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+l}$, the initial state $x \in \mathbb{R}^n$, and the terminal instant $T > 0$ are fixed. Both inequality and equality constraints are considered. The number of constraints is arbitrary. The objective and constraints functionals may be nonconvex and may contain both integral and terminal summands.

It is shown that, under certain assumptions, an optimal process exists, is unique, and can be implemented with a linear state feedback controller:

$$u = r^*(t)x. \quad (6)$$

Furthermore, the coefficient $r(\cdot)$ of this optimal controller can be computed by the methods of classic linear-quadratic control theory coupled with those of finite dimensional convex programming.

References

- [1] Yakubovich, V.A., "Nonconvex optimization problems: the infinite-horizon linear-quadratic problems with quadratic constraints", *Systems & Control Letters*, Vol. 16, pp.13-22, 1992.
- [2] Matveev, A.S., and Yakubovich, V.A., *Nonconvex problems of global optimization*, St. Petersburg Math. J., Vol. 4, No.6, pp.1217-1243, 1993.

**О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматриваются три класса линейных систем дифференциальных уравнений:

- 1) системы, которые можно привести к экспоненциально разделенной системе линейным преобразованием, норма которого (и норма обратного к нему) имеет сколь угодно малый показатель Ляпунова;
- 2) системы, у которых вектор показателей Ляпунова не меняется при возмущении коэффициентов системы, если норма возмущения имеет отрицательный показатель Ляпунова;
- 3) системы, у которых индекс условной экспоненциальной устойчивости нулевого решения сохраняется при возмущениях системы, имеющих в нуле порядок малости выше первого.

Изучаются соотношения между этими тремя классами систем и типичность принадлежности линейной системы, являющейся накрытием заданной траектории потока в его линейном расширении, пересечением этих трех классов.

СИМВОЛИЧЕСКИЙ ОБРАЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И АЛГОРИТМЫ ЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Санкт-Петербург. Санкт-Петербургский государственный университет

Доклад посвящен вопросам исследования динамических систем методами символической динамики. Динамической системе ставится в соответствие символический образ - ориентированный граф, дающий конечное приближение системы, наследующий ее важнейшие свойства.

Рассматриваются приемы численного построения символического образа динамической системы, порожденной гомеоморфизмом или диффеоморфизмом X компакта M евклидова пространства, приводятся оценки погрешности приближения.

При исследовании непрерывной динамической системы в роли диффеоморфизма X используется оператор сдвига вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений.

Для практической реализации построения символического образа компакт M разбивается на простые ячейки, например, кубы, параллелепипеды, симплексы. Образы ячеек локализуются с помощью ε -сетей или путем их аппроксимации элементарными фигурами.

Обозначим через ω и ω_1 модули непрерывности отображения X и его дифференциала. Пользуясь ε -сетью на компакте M , мы можем построить граф, обеспечивающий $\omega(\varepsilon)$ -приближение гомеоморфизма X . Аппроксимация образов ячеек h -покрытия параллелограммами дает приближение с точностью до $\sqrt{2}\omega_1(h)h$.

Описываются алгоритмы поиска замкнутых траекторий, построения фактор-графа, дающего информацию о глобальной структуре динамической системы, построения аттракторов на символическом образе и областей их притяжения. Алгоритмы реализованы в виде компьютерных программ.

Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований, грант 94-01-00294.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Санкт-Петербург, Балтийский Государственный Технический Университет

Пусть z - комплексная переменная, μ - вещественный параметр, $\mu \in (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим на комплексной плоскости Оху дифференциальное уравнение

$$z' = z'(1 + \mu z) \quad (1)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $\mu=0$, то общее решение дифференциального уравнения (1) представляет собой на комплексной плоскости Оху семейство окружностей, проходящих через начало координат, центры которых лежат на оси Оу. Кроме того $x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых t_0, x_0, y_0 , кроме $x_0 > 0, y_0 = 0$.

Характер стремления к нулю следующий:

$$|x(t)| \sim 1/t, \quad |y(t)| \sim 1/t^2$$

2. Пусть $\mu \neq 0$. Возьмем любые начальные данные t_0, x_0, y_0 . Для них определим постоянную C_0 следующим образом:

$$x_0^2 + y_0^2 = C_0 y_0, \quad (y_0 \neq 0).$$

Тогда при $\mu > 0$ решение $x(t, t_0, x_0, y_0)$

$$y(t, t_0, x_0, y_0)$$

будет лежать внутри окружности

$$x^2 + y^2 = C_0 y,$$

а при $\mu < 0$ - вне этой окружности.

3. Если $\mu > 0$, то $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

При $\mu < 0$ справедливо $x(t) \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

**Об одной задаче оптимального управления нагревом
с фазовыми ограничениями**

Мсрозкин Н.Д. , Полупанов Д.В.
(Башкирский Государственный Университет, г. Уфа)

Процесс оптимального нагрева в безразмерных координатах описывается следующими соотношениями :

$$\frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 Q(l, \varphi)}{\partial l^2} + \frac{q}{1} \frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial l}, \quad l \in (0, 1), \varphi > 0, q = 0, 1 \quad (1)$$

$$Q(l, 0) = Q_0, \quad l \in [0, 1], \quad (2)$$

$$l \left. \frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=0} = 0, \quad \varphi > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial l} = B_1(u(\varphi) - Q(l, \varphi)), \quad \varphi > 0 \quad (4)$$

$$a_i Q(l_i, \varphi) - b_i(q+1) \int_0^{l_i} Q(l, \varphi) dl - c_i(Q(l_i, \varphi)) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

$$a_i Q(l_{i+1}, \varphi) - c_i(l_{i+1}, \varphi) \leq 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (6)$$

где $C_i(l, \varphi)$ функция распределения температуры по пространственной координате l и в момент времени φ , $q = 0$ соответствует случаю неограниченной пластины, а $q = 1$ случаю неограниченного цилиндра, B_1 - критерий Био, $u(\varphi)$ - управление, суммируемая с квадратом функции со значениями почти при всех φ из промежутка $[M_1, M_2]$, $a_i, i = \overline{1, m}$, $b_i, i = \overline{1, m}$, некоторые константы, $c_i(Q), i = \overline{1, m}$ выпуклые невозрастающие функции.

Задача : Найти управление , переводящее за минимальное время , систему (1),(3),(4) из начального из начального положения (2) в заданное конечное положение так, чтобы при всех были бы выполнены неравенства (5), (6).

Красная задача (1) - (4) аппроксимируется системой N - обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд Фурье. В результате поставленная задача сводится к конечномерной задаче оптимального управления линейной системой дифференциальных уравнений с нелинейными выпуклыми ограничениями на фазовые переменные. Доказана теорема о слабой сходимости конечномерных приближений по функционалу быстродействия и о слабой сходимости по управлению. Указан и обоснован алгоритм (типа метода корректировки опорной гиперплоскости) решения конечномерной задачи независимо от размерности N . Проведены численные эксперименты.

**Решение двумерной задачи тепломассообмена
при наличии термокапиллярной конвекции.**

Москва

Московский Педагогический Государственный Университет им. Ленина

В работе приводится численный расчет положения и скорости фронта кристаллизации (плавления) и состава бинарного твердого раствора: находящегося в полупрозрачном контейнере.

Рассматривается цилиндрический образец длиной L и радиусом R , находящийся в полупрозрачном для теплового излучения контейнере той же длины и с радиусом R_0 . Вся эта система находится в переменном по длине и во времени температурном поле в условиях слабой зависимости от угловой координаты.

Задача решается в следующей постановке:

- температура фазового перехода (кристаллизации или плавления) зависит от состава;
- теплофизические свойства материалов и коэффициенты теплообмена зависят от температур;
- теплообмен между образцом, контейнером и окружающей средой (корпусом) происходит по закону Ньютона;
- температура корпуса зависит от координаты и времени;
- массоперенос в расплаве осуществляется за счет диффузии;
- стержень (образец) и контейнер считаются тонкими.

Математическая постановка задачи включает:

- 1) Нестационарные уравнения теплообмена для температуры и концентрации примеси.
- 2) Начальные условия - в начальный момент задан твердый кристал. При $t > 0$ начинается плавление с правой стороны границы.
- 3) Граничные условия, включая условие Стефана на границе фазового перехода

Задача решается методом сплайвования, введением дельта-образной функции, отличной от нуля лишь на конечном интервале и удовлетворяющей условию нормировки. Сплайвинание на данном интервале позволяет получить квазилинейную систему уравнений, которая в свою очередь решается методом конечных разностей. Записанная в безразмерном виде система уравнений аппроксимируется неявной разностной схемой первого порядка по времени и второго по пространственной переменной и решается методом прогонки.

Полученные результаты позволили смоделировать распределение неоднородностей в затвердевшем кристалле в условиях невесомости, когда основную роль начинают играть силы термокапиллярной конвекции.

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Санкт-Петербургский государственный технический университет, Россия

Задачи идеальной пластичности связаны с системами неравномерно эллиптических уравнений в частных производных. Вариационная постановка этих задач приводит к функционалам линейного роста определенных на пространствах векторзначных функций. Вопрос существования решения для задач деформационной теории пластичности с условием Мингеса был решен в начале 80-х годов. Выяснилось, что подходящим функциональным классом, в котором можно доказать существование решения является пространство функций ограниченной деформации $BD(\Omega)$. Это пространство состоит из суммируемых вектор-функций, для которых компоненты тензора деформации являются мерами Радона. Оно содержит разрывные функции, что соответствует известным в теории идеальной пластичности результатам касающимся возможности возникновения разрывов полей перемещений (скоростей). В частности известно, что в задачах с условием Мингеса касательная составляющая вектора перемещений может претерпевать разрыв вдоль некоторых линий. Таким образом, необходимость использования математических расширений оказывается связанной и с физической сущностью задачи. Проблема, однако, заключается в том, что расширенная вариационная постановка слишком абстрактна, чтобы служить основой для создания вычислительных алгоритмов. Поэтому для построения конформных вариационно-разностных аппроксимаций с разрывными базисными функциями в задачах теории пластичности и других вариационных проблемах с функционалами линейного роста было предложено использовать некоторые промежуточные варианты расширенных постановок, в которых множество допустимых функций содержит широкий класс разрывных полей [1,2].

В данной работе исследуются вариационно-разностные методы использующие разрывные восполнения для различных моделей деформационной теории пластичности. Соответствующие конечномерные задачи являются задачами негладкой минимизации высокой размерности. Попытки их решения с помощью универсальных алгоритмов недифференцируемой оптимизации (например, субградиентных методов) могут столкнуться с большими трудностями. Для решения этой проблемы предлагается использовать методы двойственности, которые позволяют построить минимизирующую последовательность даже для неравномерных сеток (в отличие от предлагавшихся ранее методов релаксации [2,3,4]), что может быть полезно для задач адаптации сеток.

Список литературы

- [1] Реппи С.И. Вариационно-разностный метод решения задач идеальной пластичности, учитывающей возможность возникновения разрывов. // Ж. вычислительной матема-

тики и мат. физики, 1988, т.28, 3, с.449-453.

- [2] Repin S. Numerical analysis of nonsmooth variational problems in perfect plasticity. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell., 1994, 9, 1
- [3] Репин С.И. Минимизация одного класса недифференцируемых функционалов при помощи метода релаксации. // Ж. вычислительной математики и мат. физики, 1987, т.27, 7, с.976-983.
- [4] Репин С.И., Музалевский А.В. Моделирование разрывных решений в задачах идеальной пластичности. // Математическое Моделирование, 1996, 4.

Динамика неавтономных гистерезисных систем.

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет.

Рассматривается класс динамических систем, которые описываются математической моделью следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BF(\delta) + Kf(t), \\ \delta &= (C, X), \end{aligned} \quad (1)$$

где A - постоянная (или) вещественная матрица; B, K, C - n -мерные векторы; X - n -мерный вектор, $F(\delta)$ - гистерезисная функция: $F(\delta) = m_1$ для $\delta > h$; $F(\delta) = m_2$ для $\delta < -h$, где $m_1, m_2, h, -h$, то есть функция $F(\delta)$ описывает двухпозиционное реле с пороговыми числами $h, -h$ и двумя выходами m_1, m_2 ; $f(t)$ - некоторая непрерывная T -периодическая функция, описывающая внешнее воздействие на систему.

Предлагается метод исследования систем вида (1), который позволяет по коэффициентам этих систем определить существование стационарных колебаний и выделить в пространстве коэффициентов систем вида (1) области существования гармонических и субгармонических режимов, т.е. определить область выбора коэффициентов, исключающую возникновение таких часто нежелательных с точки зрения приложений режимов как биевые и странные аттракторы. Этот метод позволяет определять параметры стационарных колебаний, а также точки переключения соответствующих им периодических решений в фазовом пространстве, строить в пространстве коэффициентов бифуркационные поверхности, при переходе через которых меняется число периодических решений.

Предлагаемый метод является развитием точного аналитического метода сечения пространства параметров для неавтономных систем вида (1). Метод сечения пространства параметров позволяет в данном случае сделать разрешимой систему трансцендентных уравнений относительно моментов переключения и точек переключения, распложенных на гиперплоскостях $\delta = h$ и $\delta = -h$. Указанная система получена из необходимых условий существования nT -периодических режимов системы (1). Таким образом, задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений относительно указанных переменных и выбору среди этих решений тех, которые удовлетворяют исходной системе (1). Условия существования решений системы трансцендентных уравнений, удовлетворяющих системе (1), дают достаточные условия на параметры исходной системы (1), при которых эта система имеет nT -периодические решения. Тем самым, в пространстве исходных параметров системы (1) строятся бифуркационные поверхности, переход через которые приводит к изменению динамического поведения системы (1).

Тем самым, предлагаемый метод даёт аналитический подход к изучению вопросов существования периодических режимов системы (1) и конструктивный метод определения параметров этих периодических режимов и бифуркационных поверхностей.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ СИММЕТРИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Орел, Орловский государственный технический университет

Рассматривается обратная задача группового анализа для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями, не зависящими от производных

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, z), \\ z'' = G(x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Найдем вид функций $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$, при котором система (1) допускает некоторую (заранее не заданную) нелокальную группу с экспоненциальным нелокальным оператором (ЭНО)

$$X = \exp\left(\int \varphi(x, y, z) dx\right) \cdot [\xi(x, y, z)\partial_x + \eta(x, y, z)\partial_y + \zeta(x, y, z)\partial_z]. \quad (2)$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Система (1) допускает ЭНО (2), если и только если правые части системы имеют вид

$$\begin{cases} F(x, y, z) = \varphi\left(\frac{n}{q} - \eta Q^{-1}\right), \\ G(x, y, z) = \varphi\left(-\frac{pn}{q^2} - \zeta Q^{-1}\right), \end{cases}$$

где

$$\xi = Q, \quad \eta = \lambda n R + \frac{ca - qA_0}{p}, \quad \zeta = -\frac{pan}{q} R + A_0, \quad \varphi = ca^2 Q^{-2}, \quad Q = aqR + b,$$

$$R = \frac{p}{q} y + z, \quad p, q, n, c, a, b, A_0 - \text{некоторые постоянные, } p \neq 0, \quad q \neq 0,$$

$c \neq 0, \quad a \neq 0$, т. е. в этом случае система (1) является автономной.

**СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ГИБРИДНЫМ СПОСОБОМ ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ .**

Санкт - Петербург, СПбГУ

Для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy_0}{dx} = f_0(x, y_0, y_1, \dots, y_n),$$

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, l;$$

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_0, \dots, y_{j-1}), \quad j = l+1, \dots, n.$$

$$x \in [X_0, X_{end}] \subset R,$$

$$y_s : [X_0, X_{end}] \rightarrow R^{m_s},$$

$$f_s : [X_0, X_{end}] \times R^m \rightarrow R^{m_s}, \quad s = 0, \dots, n, \quad \sum_{\gamma=0}^n m_\gamma = m.$$

рассматривается явный одношаговый метод второго порядка точности (типа Рунге-Кутты) с гибридным способом оценки локальной погрешности.

Известно [1], что расчетные схемы второго порядка точности гибридного метода, не учитывающие структурные особенности системы, используют на шаге интегрирования по четыре вычисления каждой правой части.

Алгоритмическое использование структурных особенностей интегрируемой системы дифференциальных уравнений позволило в рамках рассматриваемого метода [2] получить трехпараметрическое семейство экономичных расчетных схем. Эти схемы на шаге интегрирования требуют четырехкратного вычисления правой части $f_0(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ и трехкратного $f_s(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$, $s = 1, \dots, n$.

Литература

[1] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж.Холла, Дж.Уатта. - М.: Мир, 1979, 312 с.

[2] Олемской И.В. Численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - В сб.: Математические методы анализа управляемых процессов. Вып. 8, Л.: Изд-во ЛГУ, 1986, с.157-160.

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Государственный Технический Университет
Санкт-Петербург, Россия

Целью настоящего доклада является описание новых способов конструктивного исследования глобальной структуры динамической системы. Основой предельных методов является символическая динамика и теория графов, необходимая информация о параметрах системы получается традиционными численными методами дифференциальных уравнений. Динамическая система ассоциируется с ориентированным графом, который называется *символическим образом* системы. Символический образ может рассматриваться как конечное дискретное приближение динамической системы. Анализ символического образа и динамической системы сдвигов в пространстве последовательностей, которое порождено символическим образом, дает важную информацию об эволюции системы и позволяет локализовать некоторые траектории, которые играют существенную роль в понимании глобальной структуры динамической системы. Специальные последовательности символических образов применяются для получения более точной информации о фазовом портрете. Наша работа осуществляется по следующей схеме: теоретические исследования, построение конструктивных алгоритмов, компьютерная реализация и исследование конкретных динамических систем. *Лаборатория нелинейного анализа и математического моделирования* успешно применяет методы прикладной символической динамики для решения следующих задач:

- 1) локализация цепно рекуррентного множества,
- 2) обнаружение периодических траекторий фиксированного периода и их приближенное построение,
- 3) определение глобальных связей между компонентами цепно рекуррентного множества,
- 4) построение аттракторов и их областей притяжения,
- 5) построение фильтратий,
- 6) оценка показателей Ляпунова и спектра Морса,
- 7) проверка условия гипербolicности на компоненте цепно рекуррентного множества.

Литература

1. Г. С. Оспенко, О символическом образе динамической системы, *Краевые задачи*, Пермь, 1983, 101-105
2. Г. С. Оспенко, Проверка условия трансверсальности методами символической динамики, *Дифференциальные уравнения*, N 9, 1990, 1528-1536.
3. G. S. Ospenko, The periodic Points and Symbolic Dynamics, *Seminar on Dynamical Systems*, 1993, 261-267.
4. G. S. Ospenko and I.A. Komarchev, Applied Symbolic Dynamics: Construction of Periodic trajectories, *RSSIAA*, N 4, 1995, 573-587.

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Задача оптимального управления движением центра масс (ЦМ) летательного аппарата (ЛА) в атмосфере с учетом гравитационного поля Земли является одной из практически важных задач внешней баллистики и теории управления. Как правило, на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина эта задача сводится к трудоемкой краевой задаче, решение которой, найденное каким-либо численным методом, требует дополнительных исследований относительно оптимальности найденной экстремальной траектории (найденного управления).

Трудности решения краевой задачи на ПЭВМ обусловлены как особенностями управляемого объекта (ЛА), так и граничными условиями краевой задачи. Если погрешности вычисления связаны с устойчивостью и методическими ошибками интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), могут быть нивелированы, то сходимость численного метода решения краевой задачи (например, метода Ньютона, метода штрафных функций и т.п.) существенно зависит от граничных условий (от начального приближения искомого решения). Это связано с резким изменением от времени в процессе интегрирования "жесткости" СОДУ.

Отмеченные выше трудности, по-видимому, ограничивают применение принципа максимума в прикладных задачах динамики полета.

Преодоление этих трудностей рассмотрено на примере решения задачи оптимального управления твердотопливной метеорологической ракетой при выводе ее в заданную точку атмосферного пространства за минимальное время при постоянном секундном расходе топлива. Эффективность ее решения складывается из следующих компонентов:

- 1) рационального преобразования СОДУ;
- 2) выбора направления прогонки (решения задачи Коши);
- 3) выбора метода и шага интегрирования СОДУ;
- 4) выбора метода минимизации невязки при реализации алгоритма пристрелки;
- 5) реализации иерархического принципа в конструкции алгоритма решения задачи оптимизации.

Оптимальность найденного управления проверялась путем численного моделирования.

Приведена сравнительная оценка эффективности двух реализованных алгоритмов решения задачи оптимального управления, упомянутой выше.

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ
ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Санкт-Петербург, Российский гос.педагогический университет

Поиск экспоненциальных нелокальных операторов вида

$$X = \exp \left(\int \zeta(x, y) dx \right) [\xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y],$$

допускаемых уравнением $y'' = F(x, y)$ приводит к определяющей системе

$$\begin{cases} \xi_{yy} = 0, \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 2\xi_y \zeta - \xi \zeta_y = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta \zeta)_y - (\xi \zeta)_x + \eta_y \zeta - \xi_x \zeta - \xi \zeta^2 - 3\xi_y F = 0, \\ \eta_{xx} + \eta_x \zeta + \eta \zeta^2 + (\eta \zeta)_x + (\eta_y - 2\xi_x - 2\xi \zeta) F - \xi F_x - \eta F_y = 0. \end{cases}$$

Теорема. Указанная определяющая система инвариантна относительно преобразования

$$x = \sigma(t),$$

$$y = \varphi(t)u + \psi(t), \quad \text{где } \sigma' = \varphi^2,$$

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\varphi},$$

$$\tilde{\eta} = \eta - \frac{1}{\varphi} (\varphi' u + \psi'),$$

$$\tilde{\zeta} = \varphi^2 \zeta - \frac{\varphi'}{\varphi},$$

$$\varphi^2 \tilde{F} = \varphi^5 F - (\varphi \varphi'' - 2\varphi'^2)u - \varphi u'' + 2\varphi' \psi',$$

которое является максимальным в классе точечных преобразований.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ
СИСТЕМ
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КРИТИЧЕСКИХ
СЛУЧАЯХ

Воронеж, Воронежский государственный университет

Изучаются дискретные и непрерывные стационарные системы, описываемые линейными разностными и дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, для которых известны некоторые критические собственные значения (лежащие на единичной окружности для дискретных систем или на мнимой оси для непрерывных систем) и отвечающие им левые (строки) или правые (столбцы) критические собственные векторы.

Ставится задача о выяснении эффективно проверяемых коэффицентных условий (типа кругов Гершгорина или кругов Островского в проблеме локализации собственных значений матриц), носящих достаточно общий характер, при выполнении которых все остальные собственные значения являются некритическими и устойчивыми (то есть лежат внутри единичного круга для дискретных систем или внутри левой полуплоскости для непрерывных систем).

Метод основан на вычислении или оценке спектрального радиуса (матричной нормы) возмущенной матрицы для дискретных систем — они должны быть меньше единицы, — или спектральной абсциссы (логарифмической нормы) возмущенной матрицы для непрерывных систем — они должны быть отрицательными. Возмущения допускаются только специального типа: разрешается из каждой строки матрицы коэффициентов системы вычитать любую линейную комбинацию левых критических собственных векторов (строк) и из каждого столбца — любую линейную комбинацию правых критических собственных векторов (столбцов).

В качестве приложения изучается проблема эргодичности для дискретных цепей Маркова и непрерывных систем Колмогорова.

О ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛИЕНАРА С УПРАВЛЕНИЕМ ОТ ПАРАМЕТРА

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Пусть движение управляемого объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = F(x, u, a) \quad (1)$$

где $x \in R^n$, u — управление, $u \in U = \{u | u \in R^r, \|u\| \leq 1\}$, a — параметр, a принадлежит открытому связному множеству $A \subset R^m$, $F: R^n * U * A \rightarrow R^n$, и $F \in C(R^n, U, A)$.

В качестве допустимых управлений рассматриваются измеримые функции со значениями из U . Множество всех точек пространства R^n , которые можно перевести в начало координат за конечное время назовем *множеством управляемости системы (1)* и обозначим $G(a)$. Рассмотрим точку $x \in G(a_0)$ и множество таких T , что x можно перевести в начало координат за время T при $a = a_0 \in A$. Точную нижнюю границу этого множества будем называть *функцией Беллмана $T(x, a_0)$ для задачи быстрогодействия*. В докладе изучается зависимость функции Беллмана от x и параметра a .

Будем говорить, что система (1) *равномерно N -локально управляема* при $a = a_0 \in A$, если для всякого $\tau > 0$ существуют $\delta > 0$ и окрестность начала координат в R^n такие, что любую точку из этой окрестности можно перевести в начало координат за время, не превосходящее τ при любом a_1 таком, что $\|a_1 - a_0\| < \delta$.

Будем говорить, что система (1) *удовлетворяет условию Филиппова* при $a = a_0 \in A$, если существуют $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $(x, F(x, u, a_1)) \leq C(1 + \|x\|^2)$, для всех $x \in R^n$, $u \in U$, $a_1 \in A$, $\|a_1 - a_0\| < \delta$.

Т е о р е м а 1. Если система (1) удовлетворяет условию Филиппова при $a = a_0 \in A$, то для того чтобы функция $T(x, a)$ была непрерывной в точке (x_0, a_0) , $x_0 \in G(a_0)$ необходимо и достаточно, чтобы система (1) была равномерно N -локально управляемой при $a = a_0 \in A$.

Пользуясь теоремой 1 для частного случая системы (1) — системы, соответствующей уравнению Лиенара с управлением, можно доказать следующую теорему

Т е о р е м а 2. Для любой точки $(a_0, \mu_0) \in R_+^1 * R_+^1$ и любой точки $x_0 \in G(a_0, \mu_0)$ существует окрестность $V(x_0)$ такая, что $T(x, a_0, \mu_0)$ является гельдеровой по x в $V(x_0)$ с показателем $\frac{1}{2}$.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И ПОИСКА НА ГРАФАХ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

В докладе излагаются некоторые результаты, полученные авторами для задач группового преследования (поиска) ненаблюдаемого убегающего на множестве сложной топологической структуры (точная постановка дается в работах [1, 2, 3]). Упомянутое множество представляет собой топологический граф (вложенный в некоторое евклидово пространство). На графе находится группа преследователей, максимальная скорость которых равна единице, и невидимый для них убегающий. Предполагается, что как преследователи, так и убегающий обладают (в соответствующем пространстве) простыми движениями. Ставится задача нахождения наименьшего числа преследователей, необходимого для поимки убегающего. Данное число зависит только от графа Γ , максимальной скорости убегающего μ , "радиуса поимки" ε и обозначается через $S_\mu^\varepsilon(\Gamma)$.

В докладе сформулированы некоторые нерешенные задачи. Например, для графа T , составленного из всех ребер правильного тетраэдра, нами показано, что $S_\mu^0(T) = 4$ тогда и только тогда, когда $\mu \geq 1$. Известно, что если $\mu < 1$, то $S_\mu^0(T) \leq 3$, а если $\mu \leq 1/3$, то $S_\mu^0(T) \leq 2$. Среди прочих обсуждается следующая гипотеза:

$$S_\mu^0(T) = \begin{cases} 4, & \text{если } \mu \geq 1, \\ 3, & \text{если } \mu \in (\frac{1}{3}, 1), \\ 2, & \text{если } \mu \in (0, \frac{1}{3}], \\ 1, & \text{если } \mu = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Головач П. А., Петров Н. И. Некоторое обобщение задачи о поисковом числе графа // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1995. Вып. 3. С. 21-27.
2. Петров Н. И. Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. N 5. С. 821-827.
3. Фомин Ф. В. Задача поиска на графах с ограничением скорости // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1994. Вып. 3. С. 60-66.

ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ В СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМАХ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений на n -мерном гладком замкнутом многообразии, удовлетворяющая аксиоме А и строгому условию трансверсальности. Робинсон (1976) доказал, что такая система структурно устойчива. Недавно Лан Вен обратил это утверждение и показал, что структурно устойчивая система удовлетворяет сформулированным условиям.

Т е о р е м а. *Структурно устойчивая система обладает свойством лишнеевого отслеживания псевдотраекторий.*

Аналог этого утверждения для диффеоморфизмов известен (Робинсон (1977), Савада (1980), см. также книгу [1]).

Основная трудность при доказательстве сформулированной теоремы порождается следующим обстоятельством, характерным для систем дифференциальных уравнений: гиперболические структуры в точках покоя и в точках негравитальных неблуждающих траекторий качественно различны (в первом случае сумма размерностей устойчивых и неустойчивых слоев гиперболической структуры равна n , а во втором она равна $n - 1$).

Доказательство основано на двух конструкциях.

Построены "устойчивые" и "неустойчивые" подрасслоения касательного расслоения со свойством слабой полунепрерывности сверху.

Доказан вариант леммы об отслеживании для последовательности отображений банаховых пространств с расширяющимися устойчивыми и уменьшающимися неустойчивыми подпространствами. При этом не предполагается, что линейные части отображений обратимы.

Л и т е р а т у р а

1. S. Yu. Pilyugin. ... The Space of Dynamical Systems with the C^0 -Topology. Springer-Verlag, 1994. Lect. Notes in Math., 1571.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ
АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Россия, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургской государственный университет;

США, Миннеполис,
Университет штата Миннесота.

Изучается вопрос об устойчивости компактного инвариантного множества автономной системы дифференциальных уравнений по отношению к малым в смысле C^1 возмущениям самой системы.

Дается определение слабой гиперболичности компактного инвариантного множества. Описывается структура такого множества. Доказывается, что если компактное инвариантное множество M данной системы слабо гиперболично, то при достаточно малых возмущениях существует гомоморфизм, сколь угодно близкий к тождественному и переводящий множество M в слабо гиперболическое множество \bar{M} инвариантной системы.

**OUTPUT FEEDBACK ADAPTIVE SUPPRESSION OF FORCED
OSCILLATIONS IN NONLINEAR SYSTEMS**

St. Petersburg, Institute for Problems of Mechanical Engineering of Russian
Academy of Sciences

St. Petersburg Institute of Fine Mechanics and Optics

We propose an adaptive compensator for an external inaccessible disturbance which may be presented as a finite sum of sinusoids of unknown frequencies, magnitudes and initial phases. The disturbance acts in span of control and the plant is assumed to be an exponentially passive nonlinear system. Under these assumptions it is shown how to design the adaptive compensator which does not depend on the parameters of the disturbance signal and on the system parameters, moreover, the compensator requires only output on-line measurements.

Consider the following problem: for the system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u + w), \quad y = h(x)$$

with the state $x \in \mathbb{R}^n$, the input $u \in \mathbb{R}^m$, the output $y \in \mathbb{R}^m$ and the external disturbance $w \in \mathbb{R}^m$, $w = w(t)$, $f, g, h \in C^1$; $f(0) \equiv 0$, $h(0) \equiv 0$, find an output smooth dynamic feedback which asymptotically stabilizes the system at the origin for all initial conditions $x(0)$.

It is assumed that the disturbance signal $w(t)$ is bounded and modelled as an output of the following homogeneous system (exosystem):

$$\dot{\chi} = \Gamma\chi, \quad w = C\chi$$

where $\chi \in \mathbb{R}^d$ is the state vector of the exosystem, a constant $d \times d$ matrix Γ has all its eigenvalues on the imaginary axis and C is a constant matrix. The pair (Γ, C) is assumed to be observable and neither disturbance $w(t)$ nor the state $\chi(t)$ are accessible for measurements. Also it is assumed that the upper bound of the dimension of the exosystem d is known, but parameters of the matrices Γ and C are unknown.

We propose the following adaptive compensator:

$$u = -\hat{\theta}\hat{\zeta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = \gamma R(y, \hat{\zeta}), \quad \gamma > 0, \quad \hat{\theta} \in \mathbb{R}^{m \times d}, \quad \hat{\zeta} \in \mathbb{R}^d$$

$$R(y, \hat{\zeta}) = (\hat{\zeta}_1 y, \hat{\zeta}_2 y, \dots, \hat{\zeta}_d y), \quad \dot{\hat{\zeta}} = G\hat{\zeta} + G\psi(y) - Ku$$

where G is Hurwitz, the pair (G, K) is controllable and $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ is a solution to the following partial differential equation:

$$\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = K$$

Sufficient conditions under which the problem is solvable are discussed.

О ТОЖДЕСТВЕ Л.В.ДАНИЛОВА

Санкт-Петербург, СПбГТУ

В работе получено следующее уточнение теоремы Данилова [1].

ТЕОРЕМА. Для всякого положительного числа ε существует бесконечно много целых чисел x и y , причем $x \neq y$, для которых

$$0 < |x^3 - y^3| < (216\sqrt{2} + \varepsilon)|x|^{3/2}.$$

В доказательстве используется следующее тождество, обобщающее тождество Л.В.Данилова

$$(t^2 + 9t + 19)^2(t^2 + 1) - (t^2 + 6t + 4)^3 = 27(2t + 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Данилов Л.В. «Матем. заметки», т.32, № 3, 1982, с. 273-275

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Санкт-Петербург, государственный университет

Рассматриваются известные задачи о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, возникающие при изучении малых колебаний и упругой устойчивости прямых балок с произвольным переменным поперечным сечением. Относительно них исследуются вопросы, связанные с применением к ним методов промежуточных задач. Эти методы приближают искомые собственные значения снизу и в комбинации с методом Рунца, дающим приближения сверху, позволяют вычислить собственные значения с гарантированной и, в принципе, сколь угодно высокой точностью.

Теория методов промежуточных задач значительно сложнее, чем у метода Рунца, поэтому ее реализация для конкретных классов задач представляет собой самостоятельную непростую задачу. В частности, для тех методов промежуточных задач, которые (в абстрактной формулировке) сводят нахождение приближенных собственных значений к задачам линейной алгебры, нетривиальной является сама возможность их применения к конкретным классам задач.

В докладе показано, что при всех основных (изучаемых в учебной литературе) краевых условиях к рассматриваемым краевым задачам применимы метод "специального выбора" пробных (координатных) элементов Бэзли и Фокса [1] и метод срезки обратного оператора, предложенный автором [2]. В них нахождение приближенных собственных значений сводится к решению алгебраической задачи на собственные значения для пары матриц.

Получены оценки скорости сходимости обоих методов при различном выборе систем координатных функций. Сравнение этих оценок показывает, что в некоторых случаях метод срезки обратного оператора дает существенный выигрыш в скорости сходимости по сравнению с методом "специального выбора".

Литература

1. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: "Мир", 1970, 328с.
2. Позняк Л.Т. Новая процедура срезания в методе Бэзли-Фокса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т.17, №1, с.24-41.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОЙСТВАМИ ШТУРМА

Воронеж, Воронежский госуниверситет

Класс дифференциальных операторов, обладающих качественными свойствами, характерными для классического оператора Штурма-Лиувилля, довольно широк. Однако, как оказалось, ряд задач естественно приводит к новым постановкам, не встречавшимся ранее, в которых указанные свойства так же типичны, как в классическом варианте.

Речь идет о дифференциальных операторах, действующих в пространствах кусочно-гладких функций. Наибольший интерес представляют пространства, определяемые не только локальными (типа $\Delta x'(\xi) = kx(\xi)$, через $\Delta x(t)$ обозначен скачок функции x в точке t), но и нелокальными условиями согласования ("гладкости") функций.

Приведем, для примера, аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей для двух задач.

Теорема 1. Пусть L - дифференциальный оператор

$$Lx = (p(t)x')' - q(t)x,$$

действующий в пространстве E функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, за исключением двух точек ξ_1, ξ_2 ($a < \xi_1 < \xi_2 < b$) и удовлетворяющих в этих точках условиям

$$\begin{aligned} x(\xi_1) &= x(\xi_2), \\ \Delta x'(\xi_1) + \Delta x'(\xi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ - два линейно независимых решения уравнения $Lx = 0$ в пространстве E . Тогда $v(t)$ меняет знак на каждом из промежутков между нулями $u(t)$, не содержащих внутри себя точек ξ_1 и ξ_2 и по крайней мере на одном из двух промежутков между нулями $u(t)$, содержащих внутри точки ξ_1, ξ_2 .

Теорема 2. Пусть L - дифференциальный оператор

$$Lx = (p(t)x')' - q(t)x,$$

действующий в пространстве E функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, за исключением двух точек ξ_1, ξ_2 ($a < \xi_1 < \xi_2 < b$) и удовлетворяющих в этих точках условиям

$$\begin{aligned} \Delta x'(\xi_1) &= \alpha x(\xi_1) - \beta x(\xi_2), \\ \Delta x'(\xi_2) &= \gamma x(\xi_2) - \delta x(\xi_1), \end{aligned}$$

где $\alpha > \beta \geq 0, \gamma > \delta \geq 0$.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ - два линейно независимых решения уравнения $Lx = 0$ в пространстве E . Тогда $v(t)$ меняет знак на каждом из промежутков между нулями $u(t)$, не содержащих внутри себя точек ξ_1 и ξ_2 и

- либо $v(t)$ меняет знак на одном из двух промежутков между нулями $u(t)$, содержащих внутри точки ξ_1, ξ_2 ,
- либо $v(t)$ положительна на одном и отрицательна на другом из этих двух промежутков.

КОНВЕРГЕНЦИЯ В ОДНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ НА ПЛОСКОСТИ

Волгоград, Волгоградский государственный университет

Рассматривается диссипативная система вида

$$\dot{x} = f_1(x) + ay + P(t), \quad \dot{y} = f_2(x) + by + Q(t), \quad (1)$$

где $a, b = \text{const}$, $P(t), Q(t)$ — ω -периодические функции. Система (1) имеет ω -периодическое решение $\varphi(t), \psi(t)$. Предполагается, что при $|x| \leq R$ выполняются неравенства гурвицева типа $f_1'(x) + b < 0$, $bf_1'(x) - af_2'(x) > 0$, где R — постоянная диссипативности системы (1). Положим $v(t) = x(t) - \varphi(t)$, $w(t) = y(t) - \psi(t)$. Тогда качественный критерий конвергенции [1] для системы (1) формулируется в следующей теореме.

Теорема. При сделанных предположениях, если существует кусочно-непрерывная функция $U(t) \leq h(t)$ ($t = w/v$) такая, что интегральные кривые однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dv} + U\left(\frac{w}{v}\right) = 0$$

образуют спирали, закручивающиеся по часовой стрелке, то в системе (1) имеет место конвергенция.

В классе функций, удовлетворяющих условию

$$f_1'(x) > -\alpha + \beta f_1(x), \quad |x| \leq R, \quad \alpha, \beta > 0$$

при помощи построенной функции $U(t)$ найдем количественный критерий конвергенции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поливенко В.К. // Сб. "Дифференциальные уравнения и их приложения". — Якутск: ЯкутГУ, 1981. — С.144-155.

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕДУКЦИИ ЛАНЦОША К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В МЕТАЛЛОРЕЗУЩИХ СТАНКАХ

г. Оренбург, Оренбургский государственный университет

На сегодняшний день по-прежнему остается актуальной задача теплового моделирования металлорежущих станков и отдельных их узлов в нестационарной постановке. Стремление получить наиболее полную модель, приводит к росту размерности решаемой нестационарной задачи теплопроводности. Как известно, решение нестационарной задачи теплопроводности связано с ее интегрированием. По этому различают два подхода: Первый основан на численном решении дифференциальных уравнений, а второй связан с использованием разложения по собственным функциям и нормальным формам на основе решения спектральной задачи. Как показал обзор состояния вопроса, наиболее перспективным для теплового моделирования станков является второй метод. Однако при росте размерности решаемой задачи, решение спектральной задачи становится одной из ключевых задач определяющих возможность получения решения нестационарной задачи теплопроводности. Основной проблемой при решении спектральной задачи является возрастание в геометрической прогрессии времени ее решения в зависимости от роста размерности задачи и как следствие увеличение потребности в оперативной памяти ЭВМ. Это и обусловило необходимость применения метода Ланцоша к решению спектральной задачи.

Метод Ланцоша представляет собой ортогональность некоторых матричных преобразований приводящих к 3-х диагональной матрице. Из теории метода следует, что применение метода Ланцоша приводит к возможности значительного снижения размерности решаемой спектральной задачи при сохранении достаточной точности решения.

Наиболее распространенным является применение метода Ланцоша к задачам динамики станков, а к тепловому моделированию метод применяют в меньшей мере. Поэтому было проведено исследование эффективности применения метода Ланцоша к тепловым задачам станков и на основе полученных

результатов предложена методика его использования.

В данной работе проводились вычислительные эксперименты для различных видов конструкций. Основу моделирования составляли решения осесимметричной и плоской задач теплопроводности.

Для метода Ланцоша существуют две основные проблемы: выбор числа учитываемых векторов Ланцоша и потеря ортогональности векторов.

Одним из достоинств метода Ланцоша является возможность прогнозирования числа учитываемых векторов Ланцоша на основе некоторого критерия. В качестве такого критерия наиболее часто ранее использовались так называемые "нормированные факторы участия" представляющие собой произведение транспонированного вектора Ланцоша на тепловую нагрузку. Но как следует из проведенных машинных экспериментов гораздо эффективней в качестве критерия использовать характер распределения тепловых постоянных времени.

Анализ выполненных машинных экспериментов по оценке потери ортогональности векторов Ланцоша показал, что единственной возможностью получения устойчивого решения является использование полной переортогонализации векторов Ланцоша на каждом шаге получения векторов Ланцоша т.к. при проведении неполной переортогонализации наблюдалась неустойчивость получаемых решений.

Таким образом проведенные исследования показали, что при использовании редукции Ланцоша:

- 1) наибольшая погрешность вычисления температурного поля возникает в первые моменты времени моделирования термодинамической системы, далее погрешность уменьшается;

- 2) число учитываемых векторов полностью определяется структурой термодинамической системы рассматриваемого объекта. Для получения высокой точности решения для большого класса систем можно считать, что число учитываемых векторов Ланцоша должно быть приблизительно равно числу температурных мед с наибольшими тепловыми постоянными времени.

EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow

New exact solutions to nonlinear equations of mathematical physics are obtained. Special attention is paid to equations that depend on arbitrary functions and contain several free parameters. The results obtained may be used in the theory of heat and mass transfer, acoustics, the wave theory, and the combustion theory.

As an illustration, below are given several examples.

1. The equation of heat and mass transfer

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 3D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}$$

admits an exact solution of the form

$$w(x, t) = 3D - \frac{1}{\lambda} \ln[\beta + C \exp(\mu x - at)],$$

where C is an arbitrary number and the parameters β and μ can be determined from the following system of two algebraic equations:

$$a\beta^2 + b\beta + c = 3D0, \quad \beta^2\mu^2 + \lambda c = 3D0.$$

2. The equation of the combustion theory in the anisotropic case

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ac^{\lambda x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(be^{\mu y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 3Df(w),$$

where $f(w)$ is an arbitrary function, has an exact solution of the form

$$w = 3Dw(z), \quad z = 3D(bt\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y})^{1/2}.$$

Here $w(z)$ is a solution to the ordinary differential equation

$$w''_{zz} - \frac{1}{z} w'_z = 3DAf(w), \quad A = 3D \frac{1}{ab\lambda^2\mu^2}.$$

3. Also obtained are exact solutions to the equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 3Da(x+b) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$$

that describes the propagation of nonlinear waves in an inhomogeneous medium. Here $f(w)$ is an arbitrary function.

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ синхронизации гистерезисных систем

Санкт-Петербург, СПбГУ; Майкоп, Адыгейский госуниверситет

Проблемы захватывания частоты автоколебаний внешним гармоническим воздействием являются классическими в нелинейной теории колебаний и теории управления автогенераторами [1-3]. Одним из важнейших свойств вынужденных периодических процессов является их устойчивость в целом, когда явление захватывания наблюдается в любом режиме работы автогенератора.

В работе [4] для класса систем с одним нелинейным элементом вида

$$\frac{dx}{dt} = Px + q[\varphi(\sigma) + \alpha \sin(\omega_0 t)], \quad \sigma = r^* x, \quad (1)$$

где P – постоянная гурвицева $n \times n$ -матрица, q, r – постоянные n -векторы, $\varphi(\sigma)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \leq \varphi'(\sigma) \leq \mu \quad \forall \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \quad |\varphi'(\sigma)| \leq k \quad \forall \sigma \in R^1, \quad |\varphi(\sigma)| \leq l \quad \forall \sigma \in R^1,$$

$\alpha, \omega_0, \mu, k, l, \sigma_1, \sigma_2$ – некоторые положительные числа, получен частотный критерий гармонической стабилизации. Этот результат был затем обобщен в работе [5]. В настоящем докладе представлены результаты по гармонической стабилизации системы вида (1), где функция $\varphi(\sigma)$ является нелинейностью гистерезисного типа. Указанные результаты также носят характер частотных критериев.

Литература

- [1]. Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. // Philos. Mag., 1927, ser.7, v.3, no.13, pp.65-80.
- [2]. Андронов А.А., Витт А.А. К математической теории захватывания. В кн.: Андронов А.А. Собрание трудов. М., Изд-во АН СССР, 1956.
- [3]. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М., Наука, 1964.
- [4]. Леонов Г.А. Частотный критерий стабилизации нелинейных систем гармоническим внешним воздействием. // Автоматика и телемеханика, 1986, №1, с.169-174.
- [5]. Блягот З.У., Тешев В.А. Частотный критерий устойчивости в целом периодических решений нелинейных неавтономных систем. // Дифференциальные уравнения, 1992, т.28, №6, с.925-930.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СООБЩЕНИЙ В КАНАЛАХ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

г. Санкт-Петербург, Военная академия связи

Повышение помехоустойчивости передаваемых в СМД сообщений на 3 дБ приводит к двукратному увеличению пропускной способности системы доступа. Поэтому задача оптимизации сигнально-кодowych конструкций (СКК) и алгоритмов доступа является актуальной. Решение этой задачи требует определения помехоустойчивости сообщений, передаваемых в канале множественного доступа.

Для систем синхронного случайного множественного доступа, использующих для передачи сообщений сигналы со стохастической частотно-временной матрицей, относительно вероятности ошибочного приема определено интегральное уравнение. Рассмотрены варианты воздействия преднамеренных помех с ограниченной энергией и средней мощностью. Оптимизируемые параметры СКК и алгоритма доступа являются параметрами данного уравнения. Это база сигнала и вероятность передачи пакета в следующем окне. Методом Бюрмана-Лагранжа в общем виде найдено аналитическое решение данного интегрального уравнения. Полученные результаты позволяют проводить параметрический синтез СМД, функционирующей в условиях преднамеренных помех.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСФОРМАЦИИ БАКТЕРИЙ В ХЕМОСТАТЕ.

С.-Петербург, ФТИ им. Иоффе, Лаборатория прикладной математики и математической физики.

Проведено исследование иерархии систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений описывающих процесс совместного культивирования популяций умеренных бактериофагов, неиммунных (чувствительных к заражению фагом) и лизогенных (иммунных, содержащих в своём геноме фаговый геном в виде профага) бактерий в биологическом реакторе типа "хемостат".

Описание исходной биологической модели приводится в работе STEWART F. M и LEVIN B. R.: "The Population Biology of Bacterial Viruses: Why Be Temperate". Для более строгого описания и расширения возможности применения аналитических методов теории нелинейных динамических систем, предложена биологически содержательная иерархия рассматриваемых взаимодействий по малому параметру (ε), в качестве которого выбрана возможность фагового генома встраиваться/исключаться в/из бактериальной ДНК. Данный параметр обладает двумя важными свойствами:

- малым численным значением по отношению к другим параметрам системы, что позволяет использовать для анализа модели мощные методы теории возмущений;
- свойством "выключаемости", т. е. ситуация $\varepsilon = 0$ (невозмущенная система) является практически осуществимой, следовательно, биофизически содержательной.

Таким образом, анализ процессов, протекающих в рассматриваемой искусственной экосистеме, сводится к исследованию иерархии систем кинетических систем нелинейных дифференциальных уравнений. Система с малым параметром имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{s} = \delta (s_1 - s) - \frac{s}{1+s} (x + \alpha y) \\ \dot{x} = \left(\frac{s}{1+s} - \delta - \mu \right) x + \varepsilon (a_1 \gamma w y - a_2 x) \\ \dot{y} = \left(\alpha \frac{s}{1+s} - \gamma w - \delta \right) y + \varepsilon a_3 x \\ \dot{w} = \left(\gamma (\beta y - x) - \delta \right) w + \beta \mu x - \varepsilon \beta a_4 \gamma w y \end{cases} \quad (1)$$

где s_1 - количество безразмерного лимитирующего субстрата $[x]$, поступающее в хемостат;
 $\alpha = 1 - \alpha_c$ - коэффициент при ростовой функции чувствительных клеток $[y]$, показывающий

разницу в скоростях роста интактных и лизогенных популяций; γ - вес, с которым умеренный фог $\{w\}$ адсорбируется на чувствительную бактерию. При этом $a_1 \cdot \varepsilon$ клеток становятся лизогенными $\{x\}$ и $(1 - a_1 \cdot \varepsilon)$ - дают литический ответ. Суммарное количество фаговых векторов, возникающее в результате литического ответа бактериальных клеток пропорционально числу успешных (с развитием по литическому каскаду) заражений, β - соответствующий коэффициент пропорциональности; δ - скорость протока, нормированная на максимальную удельную скорость роста лизогенных бактерий, т. е. относительная скорость изъятия вещества из системы. За единицу безразмерного времени у μ лизогенных бактерий происходит индукция профага и у $a_1 \cdot \varepsilon$ профаг теряется в результате вегетативной сегрегации. Оба показателя нормированы на максимальную удельную скорость роста биомассы этих бактерий.

При $\varepsilon = 0$ получаем выражение для невозмущенной системы. Кроме того, благодаря предложенной редукции исходной системы по методу малого параметра можем получить описание системы двух популяций, взаимодействующих по принципу паразит - хозяин, из невозмущенной системы без дополнительных предположений. Для этого необходимо заметить, что $y(t) \equiv 0$, $t > 0$ удовлетворяет задаче Коши для невозмущенной системы при начальном условии на y : $y(0) = 0$, т. е. в системе отсутствовали исиммунные бактерии в начальный момент времени.

Согласно этой иерархии исследование проводится в порядке возрастания количества связей типа паразит - хозяин и хищник - жертва между бактериальными и фаговой популяциями. Для всех рассматриваемых систем определены области диссипативности во всем пространстве параметров. Показано, что появление в культивируемой экосистеме связей типа хищник - жертва разрушает её диссипативность при малых значениях управляющего параметра ($\delta \leq \beta \gamma \varepsilon_1$). Добавление ещё одной связи паразит - хозяин увеличивает стабильность экосистемы, расширяя диапазон значений скорости протока, в котором система поддерживает рост рассматриваемых популяций и остаётся диссипативной. В случае одной бактериальной популяции, культивируемой в хмостате, при добавлении связи паразит - хозяин (популяции умеренных фогов), для некоторых значений управляющего параметра (скорости протока) обнаружены затухающие колебания при приближении к нестривильному состоянию равновесия.

Основные результаты изложены в работе "Математическое моделирование непрерывного культивирования бактерий в условиях инфекции умеренными бактериофагами" (Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе № 1644, - СПб., 1995, - 42с.) и могут найти практическое применение в биотехнологическом производстве, геной инженерии и экологии микробиологических сообществ.

АВТОСОЛИТОНЫ В ОДНОМОДОВЫХ СВЕТОВОДАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСИЛЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

С.Петербург

Научно-исследовательский Институт лазерной физики,
Всероссийский Научный центр "Государственный оптический институт им.С.И.Вавилова"

Одним из интересных и перспективных для приложений в области связи направлений лазерной физики и нелинейной оптики служит использование оптических солитонов в одномодовых световодах с нелинейным показателем преломления. Стабильность формы солитонов отвечает компенсации дисперсионного распыливания импульсов их нелинейной фокусировкой. Основным уравнением, описывающим этот тип солитонов, является т.н. нелинейное уравнение Шредингера, допускающее точное решение методом обратной задачи [1].

В реальных условиях длина распространения солитонов ограничивается, например, поглощением в световоде, для компенсации которого на достаточно длинных трассах необходимо вводить участки с усилением. Тем самым нелинейный световод становится не консервативной, а диссипативной системой, причем характер формирующихся импульсов существенно зависит от баланса усиления и поглощения факторов, отсутствующих в традиционном нелинейном уравнении Шредингера.

В работах [2,3] рассматривались световые импульсы в световоде с усилением и постоянными потерями; нетрудно видеть, однако, что такие импульсы неустойчивы из-за усиления слабых выбросов на крыльях импульса. В [4,5] обращено внимание на то, что, ввиду пространственно-временной аналогии, уравнение для огибающей поля импульсов и излучения в одномодовом световоде с частотной дисперсией, бездисперсионным усилением и нелинейными потерями совпадает с уравнением для амплитуды поля в широкоапертурном бистабильном лазере. Поэтому устойчивые импульсы могут быть получены в световоде с усилением и нелинейными потерями и обладают свойствами, аналогичными "лазерным автосолитонам" — устойчивым локализованным каналам генерации в широкоапертурном лазере [6,7]. В данном сообщении мы рассмотрим особенности таких структур в световодах с учетом нелинейности усиления и поглощения лазерного излучения.

Исходной служит система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для огибающей электромагнитного поля (приближение медленно меняющейся амплитуды) и кинетические уравнения для разности населенностей рабочих уровней в усиливающей и поглощающей средах. В пределе быстрой релаксации кинетические (дифференциальные) уравнения сводятся к алгебраическим. В соответствии с условиями существования "лазерных автосолитонов" параметры системы выбираются таким образом, чтобы имел место аналог бистабильности установления, в зависимости от начальных условий, режима отсутствия излучения или же непрерывного режима с постоянной интенсивностью излучения, определяемой балансом усиления и поглощения.

Анализ и численные расчеты подтверждают наличие устойчивых локализованных структур "лазерных автосолитонов". Возбуждение их — жесткое, тогда как слабое исходное возмущение со временем рассеивается (ввиду этого в режиме лазерных автосолитонов эффективно подавляются шумы). В случае быстрой нелинейности имеется дискретный набор одиночных (с различным временным профилем) и связанных автосолитонов, тогда как для традиционных солитонов спектр сплошной. Автосолитоны имеются как при положительной, так и отрицательной квадратичной частотной дисперсии. Конечность времени релаксации усиления и поглощения вносит асимметрию в профиль автосолитона и существенно влияет на характер их взаимодействия друг с другом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратных задачи. М., 1980.
2. Григорян В.С., Маймистов А.И., Складов Ю.М. ЖЭТФ, 94, 174 (1988).
3. Vanin E.V., Korytin A.I., Sergeev A.M. et al. Phys. Rev. A49, 2806 (1994).
4. Розанов Н.Н. Опт. и спектроск. 74, 621 (1994).
5. Rosanov N.N. Progress in Optics (ed. E. Wolf), 35, 1 (1996).
6. Розанов Н.Н., Федоров С.В. Опт. и спектроск. 72, 1394 (1992).
7. Розанов Н.Н., Федоров А.В., Федоров С.В., Ходова Г.В. ЖЭТФ, 107, 376 (1995).

ФЕНОМЕН БУФЕРНОСТИ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ С ТУННЕЛЬНЫМ ДИОДОМ

Москва, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается ряд новых математических постановок задач, моделирующих процессы в автогенераторах с внешней и внутренней обратной связью. Проведенное исследование позволяет глубже проникнуть в тонкую структуру автоколебательных систем и вскрыть не только качественные особенности их функционирования, но и получить пригодные для практики количественные соотношения, описывающие их работу.

Одним из изученных объектов является дифференциально-разностное уравнение, появляющееся как математическая модель (при достаточно естественных предположениях) автогенератора, составленного из длинной линии с туннельным диодом. Анализ показывает, что в этом уравнении при определенных условиях существует любое наперед заданное (сколь угодно большое) число устойчивых циклов, т. е. наблюдается так называемое явление буферности. Тем самым в автогенераторе в зависимости от начальных условий могут реализовываться различные периодические колебательные режимы. Этот феномен в предложенной постановке ранее не отмечался.

Заметим, что при небольших значениях входящего в уравнение бифуркационного параметра форма возникающих периодических колебаний близка к гармонической. Однако дальнейшее увеличение бифуркационного параметра приводит к изменению форм автоколебаний, которые становятся релаксационными.

Результаты и выводы развитой математической теории нашли подтверждение в экспериментах на специально собранном автогенераторе.

МЕТОД СПУСКА ПО ВАРИАЦИЯМ СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

г. Йошкар-Ола, Марийский ГУ

Известно, что задача поиска оптимального управления, посредством использования необходимых условий оптимальности (принципа максимума Л.С.Понтрягина) может быть сведена к решению следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(0) = x^{(0)}, \\ \dot{\psi} &= -\left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}\right)' \psi, \quad \psi(T) = \frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x}, \\ u &= u(t, x, \psi): \psi'(t) f(x, u(t, x, \psi), t) = \min \psi'(t) f(x, u, t) \end{aligned}$$

Данная система содержит $2n$ уравнений и имеет n начальных условий ($x(0)$) и n конечных условий ($\psi(T)$). Заменяя конечные условия на начальные $\psi(0) = \bar{q}$, где \bar{q} - произвольный вектор, решим эту задачу.

Если выполняется условие $\psi(T, \bar{q}) = \frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x}$, то $x(t) = x(t, \bar{q})$ - экстремаль Понтрягина. В противном случае решаем задачу Коши для сопряженной системы

$$\dot{\eta} = -\left(\frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x}\right)' \eta, \quad \eta(T) = \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x}$$

и положим $q(\mu) = \bar{q} + \mu \eta(0)$, где шаг $\mu = \hat{\mu}$ выберем из условия

$\lambda(q(\hat{\mu})) = \min_{\mu \geq 0} \lambda(q(\mu))$. Тем самым будет выполнено условие: $\lambda(q(\hat{\mu})) < \lambda(\bar{q})$.

При численной реализации данного метода в нелинейной задаче управления нагревом массивного тела, при законах Ньютона и Стефана-Больцмана теплообмена на границе, оказалось, что он дает хорошую сходимость к оптимальному решению.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКАРНЫХ СТАНКОВ ПРИ НЕ ВПОЛНЕ
ОПРЕДЕЛЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ
(Ульяновск, Ульяновский гос. техн. университет)

Метод оценки устойчивости станка при резании обычно осуществляется на основе использования линеаризованных уравнений, при этом предполагается, что в процессе резания образуется сливная стружка [1], то есть существует динамическая характеристика резания. Однако, например, при обработке хрупких материалов, при черновых режимах обработки, с образованием стружки надлома, скола, суставчатой, появлением наростов, динамическая характеристика резания за счет существенной нелинейности и случайно характера процесса формирования стружки оказывается не вполне определенной.

В связи с этим весьма актуальны такие методы оценки устойчивости станка при резании, которые использовали бы минимальную информацию о характере изменения силы резания. К числу таковых относится метод оценки устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования, разработанный в [2].

В работе [2] предложен способ формирования функции Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы, построенной по характеристикам устойчивой линейной части и интеграла нелинейной характеристики $P(\epsilon)$, которая должна удовлетворять условиям

$$P(\epsilon) = 0, \epsilon = 0; \int_0^{\infty} P(\epsilon) d\epsilon > 0; P(\epsilon) \leq M < 0, \quad (1)$$

В данной работе используется частотное решение нелинейной задачи, рассмотренной в [2].

Известно, что нелинейные силы резания имеют запаздывающий характер [3], их величина определяется проекцией относительного перемещения между резцом и заготовкой на нормаль к поверхности резания $u_n(t)$ и параллельной обратной связью, учитывающей наличие следов обработки от предыдущего прохода $u_n(t - \tau)$:

$$F_n [u(t - \tau)] = -k_p [u(t) - u_n(t - \tau)], \quad (2)$$

где χ - коэффициент перекрытия [1]; τ - время, за которое заготовка поворачивается на один оборот; параметр ϵ - толщина срезаемой стружки, которая связана с толщиной снимаемого слоя зависимостью $\epsilon = \xi \delta$; где ξ - усадка стружки; δ - толщина среза; k_p - коэффициент резания; τ_p - время формирования силы резания;

Заменим выражение $F_n [u(t - \tau)]$ некоторой осредненной не-

прерывной за время τ_p зависимостью $I[a(t - \tau_p)]$ и представим её в виде ряда

$$I[a(t - \tau)] = I[a(t)] + I''[a(t)]\tau_p + \dots \quad (3)$$

после чего зависимость (2) переписется так

$$\dot{e} = C_1 [u_n(t) - y_n(t - \tau)] - hP(e); \quad (4)$$

где $C_1 = -k_p / P' \tau_p = -1 / T_p$, $h = 1 / P' \tau_p = 1 / T_p k_p$, $T_p = \tau_p$ - постоянная времени стружкообразования; $I''/k_p \approx 1$; $k_p = k_0 \varepsilon \delta_0^{-1} b$ [6], где k_0 - некоторый коэффициент; ε - показатель степени, определяемый экспериментально; δ_0 - установившаяся толщина снимаемого слоя; b - ширина стружки.

При этом в выражении (4) вся неопределенность процесса резания относится к нелинейной зависимости $P(e)$. Выражение (4) позволяет воспользоваться общей формулой, приведенной в работе [4] для оценки, устойчивости рассматриваемой нелинейной системы:

$$1 - \{ \operatorname{Re} [1 - \gamma^{m_1}] W_{\text{эл}}(i\omega) \} (C_1 + i\omega) / h \geq q, \quad q > 0, \quad (5)$$

где множитель $1 - \gamma^{m_1}$ учитывает тот факт, что на вход процесса резания подается сигнал $u_n(t) - y_n(t - \tau)$; $W_{\text{эл}}(i\omega) = \eta_n^1 W(i\omega) \eta_p - \eta WR$ - передаточная функция эквивалентной упругой системы; ηWR - след матрицы WR ; $R = \eta_n^1 \eta_p$ - матрица коэффициентов направления [4]; η_n - единичный орт нормали к поверхности резания; η_p - единичный орт силы резания, (величина переменная, берётся некоторое среднее значение); постоянная величина q на практике может быть положена равной нулю.

Формула (5) в предлагаемом виде приводит трехмерную систему к одномерной [4] и позволяет учитывать привод подачи [5] при резании проходным резцом, а также встроенные гасители колебаний [6]; позволяет получать достаточно точные результаты.

Список литературы

1. Кудинов И.А. Динамические расчеты станков (основные положения) // СТИН. - 1995. - №8. - С. 3-13.
2. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. - М.: Гостехиздат, 1951. - 216 с.
3. Эльясберг М.Е. Автоколебания в металлорежущих стаках. - С.-Петербург.: Издание ОКВС, 1993. - 180 с.
4. Санкин Ю.Н. Динамика несущих систем металлорежущих станков. - М.: Машиностроение, 1986. - 96 с.
5. Санкин Ю.Н., Жиганов В.И., Козловский А.В. Передаточные функции узлов на направляющих скольжения // СТИН. - 1994. - №4. - С. 15-17.
6. Жиганов В.И., Санкин Ю.И. Токкарный станок // патент РФ №2042475 публ. 27.08.95 Всл. №24.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФУНКЦИЯМ ЭЙРИ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ СВЯЗИ СОСТОЯНИЙ

Санкт-Петербург, государственный технический университет

В задачах низкоэнергетических атомных столкновений применима линейная модель неадиабатической связи двух состояний (Ландау-Зинера), порождающая следующее уравнение Шредингера для двухуровневой системы

$$\hat{H}(R)\Psi(R) = E\Psi(R)$$

с гамильтонианом

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\mu^2 \frac{d^2}{dR^2} + \alpha R & -V \\ -V & -\mu^2 \frac{d^2}{dR^2} - \beta R \end{pmatrix},$$

где $\mu^2 = \hbar^2/2M$, \hbar - постоянная Планка, M - приведенная масса ядер, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ - волновая функция, E - энергия системы, R - расстояние между частицами, V - постоянное взаимодействие, α и β - коэффициенты. В отличие от традиционных способов решения Ψ предлагается искать в виде разложения

$$\Psi(R) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) U_{\varepsilon}(R) d\varepsilon,$$

где $U_{\varepsilon}(R)$ - функция Эйри, убывающая при $R \rightarrow -\infty$, $g(\varepsilon) = (c(\varepsilon), b(\varepsilon))^T$, $c(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ - некоторые вспомогательные неизвестные функции. В результате уравнение Шредингера сводится к системе двух уравнений для коэффициентных функций $c(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ которая эквивалентна следующему дифференциальному уравнению

$$c''(\varepsilon) + \frac{q(\varepsilon)}{\mu^2} c(\varepsilon) = 0,$$

где

$$q(\varepsilon) = \frac{1}{\beta(\alpha + \beta)} \left(\frac{\alpha}{\beta} \varepsilon + E + \frac{V^2}{\varepsilon - E} \right).$$

Данное уравнение решается в рамках квазиклассического приближения Вентцел-Крамера-Бриллиуана, которое применимо вдали от особых точек уравнения - двух корней и полюса потенциала $q(\varepsilon)$

$$c_{\pm}(\varepsilon) = q^{-1/4}(\varepsilon) \exp\left(\pm \frac{i}{\mu} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sqrt{q(\varepsilon)} d\varepsilon\right).$$

Это решение дает ясное физическое описание движения системы на удалении от области взаимодействия при $R \rightarrow \pm\infty$. Вблизи особых точек используются эталонные уравнения, точные решения которых позволяют описать тонкие квантовые эффекты столкновения - проникновение под потенциальный барьер и связанные состояния.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОХРАНЫ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Актуальными являются прикладные задачи, связанные с численным моделированием (ЧМ) процессов движения подземной воды и распространения загрязнений в подземной гидросфере. В качестве математической модели в этом случае обычно выбираются эллиптические уравнения в частных производных типа уравнения теплопроводности, для интегрирования которых используются различные модификации метода конечных разностей или метода конечных элементов [1].

Характерным примером таких задач является прогноз распространения загрязнений через частично насыщенную водой зону между дневной поверхностью и грунтовым водоносным горизонтом (зону аэрации). При использовании в качестве основной функции тензиометрического (всасывающего) давления Ψ , уравнение влагопереноса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} = S \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

где z - вертикальная координата, K - коэффициент влагопроводности, S - коэффициент удельной емкости - первая производная влажности по тензиометрическому давлению, t - время. Величины K и S нелинейно зависят от Ψ .

Нелинейность и нестационарность уравнения (1), и особенно граничные условия, определяемые спецификой исследуемого объекта, осложняют практическое решение приведенного уравнения. Попытки аналитического решения уравнения (1) связаны с серьезными упрощениями реальной зависимости коэффициентов K и S от Ψ , что приводит к заметным ошибкам в гидрогеологических прогнозах. Решение же реальных прогнозных задач, тем более с учетом перемешивания растворов и физико-химических взаимодействий в системе грунт - водный раствор - почвенный воздух, с помощью аналитических формул практически невозможно.

Для вычислительных экспериментов с целью построения эффективных алгоритмов решения названных задач и оперативного геозоологического прогноза разработаны имитационные системы в виде программ для IBM-совместимых компьютеров [3,4].

Анализ большого числа вычислительных экспериментов и сравнение их результатов как с точными решениями, так и с некоторыми натурными наблюдениями, позволил сделать следующие выводы:

- 1 Для решения практических задач рационального природопользования, в силу естественной сложности изучаемых природных систем, безусловно, приоритетным является применение метода численного моделирования.
- 2 При их использовании необходимо пересмотреть некоторые устоявшиеся представления, удобные для аналитических решений, но неприменимые к ЧМ. Среди них известные понятия "граничные условия (ГУ)".

- 1,2,3 рода", и появляющееся иногда в гидрогеологической литературе ГУ 4 рода. При ЧМ можно использовать следующие способы задания ГУ:
- a) непроницаемая граница (частный случай ГУ 2 рода с расходом, равным нулю);
 - b) граница с известным расходом (ГУ 2 рода);
 - c) бесконечно удаленная граница. При аналитических решениях это наиболее простой случай, при ЧМ не применяется, хотя является распространенным, удобным и технически осуществимым;
 - d) ГУ 3 рода - в обычном понимании. Постоянство разности потенциалов в течение расчетного шага по времени требует в этом случае отдельной проверки;
3. ГУ 1 рода вообще не применимы для численного моделирования нестационарных процессов. Появление расчетных ячеек или элементов с неограниченной емкостью (т.е. ГУ 1 рода) приводит к нарушению материального баланса системы; вследствие чего вблизи таких граничных узлов возникают трудно устранимые итерационные ошибки. Это вызывает увеличение числа итераций, и часто именно этим, а не большими размерами сетки, объясняется повышенное время счета. Кроме того, невязка по балансу может сделать расчет просто бессмысленным.
 4. Использование явно- неявных схем и схем с расщеплением типа метода матричной прогонки (ММП) сокращает число необходимых итераций, но так как сами итерации требуют большего времени, общее время счета не всегда уменьшается по сравнению с классическими итерационными методами типа метода Сейдела. ММП удобен для больших сеточных массивов с незначительными вариациями параметров системы, и чувствителен к резким конфигурациям границ и вариациям параметров. Сравнение с точными решениями показывает, что вблизи источника возмущения вычисленное изменение потенциальной функции всегда занижено, а на некотором расстоянии становится завышенным.
 5. Простые итерационные методы (для плановых задач - основанные на 5-ти точечной схеме, например, метод Гаусса-Сейдела), при чисто неявной схеме решения дают результаты, наиболее соответствующие точному решению. Число итераций практически не зависит от конфигурации границ и вариаций параметров. При правильном задании ГУ число итераций, необходимых для достижения решения с заданной точностью, не сильно зависит от размеров сетки. Во всяком случае для двумерной области рост числа итераций отстает от роста числа узловых точек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гидрогеодинамические расчеты на ЭВМ /под ред. Р.С. Штенгелова М., МГУ, 1994
- [2] А.С. Сеннов, А.Н. Сивков, А.А. Шварц, А.В. Юрков "Экология подземной гидросферы" Электронный тренажер М. РосНИИИС 1992-1993. Шифр по каталогу h87e01 //Вестник СПб ун-та Сер 7 1994 Вып 2, с 104-108
- [3] А.С. Сеннов, Т.А. Сеннова, А.В. Юрков Электронный тренажер "Родник" Лабораторные работы по геозеологическому моделированию Учебное пособие СПб, РАО, Центр "Информатизация образования" (РУЦИО), 1996. 65с
- [4] Озябкин В.Н., Сеннов А.С. Конечно-разностный имитатор движения вязкой жидкости через зону азрации //Вестн. СПб ун-та Сер 7 1996. Вып. 1, с 103-106

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

Moscow, Moscow State Aviation Institute

We consider differential-difference equation

$$Lu = -(Ru)''(x) = f(x) \quad (x \in (0, d)). \quad (1)$$

Here $d = N + \theta$, $N > 0$ is an integer, $0 < \theta \leq 1$, $f \in L_2(0, d)$, R is a difference operator given by the formula

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-N}^N b_j u(x + j).$$

The shifts of argument can map the points of interval $(0, d)$ outside this interval. Therefore we put boundary conditions as following

$$u(x) = 0 \quad (x \notin (0, d)). \quad (2)$$

As it is known [1], smoothness of generalized solutions of problem (1), (2) can be broken inside the interval $(0, d)$ and preserves on some subintervals only. We formulate necessary and sufficient conditions for the existence of a generalized solution having a derivative of order $k + 2$ in $L_2(0, d)$, $k \geq 0$. Such solutions arise in the investigation of variational problem for functionals containing differential-difference operators, and, in particular, in Krasovskii's problem on complete damping of a control system with aftereffect [2].

BIBLIOGRAPHY

1. A.L. Skubachevskii, Generalized and classical solutions of boundary value problems for differential-difference equations, Dokl. Acad. Nauk 334 (1993), 433 - 436; English transl. in Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 49 (1994).
2. A.L. Skubachevskii, On the problem of damping a control system with aftereffect, Dokl. Acad. Nauk 335 (1994), 157 - 160; English transl. in Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 49 (1994).

О ПАРИРОВАНИИ ВОЗДЕЙСТВИЙ УПРУГО ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Для системы (например, КА с солнечными батареями), являющейся объектом управления (ОУ) с упруго присоединенными элементами (УПР) указан способ синтеза управлений, стабилизирующих программные движения ОУ в ситуации, когда фазовые переменные, описывающие поведение УПР, не измеряются.

Способ заключается во введении в контур управления объектом системы асимптотической оценки для фазовых переменных УПР и включении в структуру стабилизирующего управления слагаемого, парирующего воздействию УПР на ОУ. Это слагаемое формируется с помощью переменных упомянутой системы асимптотической оценки. Стабилизирующие управления зависят от ряда свободных параметров, которые можно использовать для решения дополнительных задач, например, для обеспечения нужного качества переходных процессов.

Е.Я.Смирнов

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрена задача синтеза кусочно-постоянных управлений, стабилизирующих программное движение системы переменной структуры. Предложен способ построения поверхностей переключения, на которых происходит смена управлений, обеспечивающих программному движению системы свойство орбитальной асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову.

Разработанная методика синтеза управлений применена для нескольких классов объектов техники, в частности для объектов, содержащих тиристорные преобразователи.

Для случая, когда рассматриваемая система при фиксированном управлении является линейной по фазовым переменным, указан способ построения поверхностей переключения управлений, обеспечивающих наличие в замкнутой системе управления автоколебания заданого периода.

**УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛАГРАНЖУ,
УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА**

Санкт-Петербург, СПбГАСУ, Нижний Новгород, НГПУ

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра с разностным ядром и периодической нелинейной функцией. Такое уравнение является бесконечномерным обобщением уравнения движения математического маятника. Изучается возможность существования двух характерных для уравнения математического маятника видов решений: круговых решений (т.е. решений, производная которых, начиная с некоторого момента времени, остается больше некоторого положительного числа) и предельных циклов второго рода. Наличие таких решений исключает устойчивость интегро-дифференциального уравнения по Лагранжу. Основным методом исследования выступает метод априорных интегральных оценок Попова. Для изучения круговых движений этот метод сочетается с методом нелокального сведения. Согласно последнему в функционалы Попова вводятся характерные решения системы дифференциальных уравнений достаточно низкого порядка, но с теми же специфическими особенностями, что и исходное уравнение. Такая система называется системой сведения. В данном случае в качестве системы сведения используется система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющая круговые решения. В результате устанавливается частотный критерий существования у интегрального уравнения кругового решения. Для изучения предельных циклов второго рода привлекается идея Гарбера, опирающаяся на методы гармонического анализа, и процедура Бакаева-Гужа, заменяющая исходную нелинейную функцию периодической функцией с нулевым средним на периоде. Сочетание указанных подходов позволило установить достаточное условие отсутствия у интегро-дифференциального уравнения предельных циклов второго рода определенной частоты. Соответствующая теорема сформулирована в терминах передаточной функции линейной части уравнения, в виде системы условий, состоящей из частотного и алгебраического неравенств.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЖАРА В ПОМЕЩЕНИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА**

Санкт-Петербург

Санкт-Петербургская высшая пожарно-техническая школа МВД РФ

Прогнозирование развития пожара в помещении непосредственно влияет на обеспечение безопасности людей, находящихся в здании, и необходимо для оптимизации систем раннего обнаружения загораний и определения требуемой огнестойкости конструкций.

Выделяют три группы моделей пожаров в ограниченных объемах: среднеобъемные, зонные и дифференциальные. Две первых группы используют аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, выражающих баланс массы горючего, газовых компонентов (кислорода, продуктов сгорания, инертного газа) и энергии в системе. Третья группа моделей опирается на численное решение системы уравнений вязкого сжимаемого газа. Осложняющими факторами является необходимость учета турбулентного характера течения, лучистого теплообмена и химических реакций (как гетерогенных, так и газофазных).

В отечественной литературе принято задавать скорость выгорания пожарной нагрузки в виде заранее известной функции времени. Характер этой зависимости определяется из экспериментов с модельными очагами горения и задается по-разному для пожара, регулируемого вентиляцией и пожара, регулируемого нагрузкой. В рамках такого подхода не учитывается возможность саморегулирования очага в зависимости от условий в зоне горения. Более ценными представляются модели, в которых темп тепло- и газовыделения в помещении не задается заранее, а определяется в ходе расчета пожара.

В данной работе с этой целью формулируется макрокинетическая модель пожара в помещении в виде одной или нескольких брутто-реакций с некоторым эффективным значением энергии активации и аррениусовской зависимостью от температуры. В качестве иллюстрации возможностей такого подхода исследована среднеобъемная модель для помещения с одним проемом.

Численные эксперименты с помощью изложенной модели позволяют наблюдать:

- все стадии пожара (начальная стадия, пожар, полностью охвативший помещение, стадия затухания);

- переход от режима горения, регулируемого вентиляцией (скорость горения определяется газообменом через проем), к режиму горения, регулируемого горючим (скорость горения определяется кинетикой окисления горючих материалов);

- различные виды неустойчивости системы. Эволюция системы может протекать в режиме воспламенения с последующим полным прекращением горения; в режиме воспламенения с погасанием и последующим повторным воспламенением; в пульсирующем режиме, когда температура, концентрация компонентов и скорость реакции испытывают нелинейные релаксирующие колебания. Появление колебательных решений в определенной области значений параметров является следствием бифуркации рождения цикла в системе уравнений модели. Натурные эксперименты с осциллирующими пожарами описаны в литературе.

Среднеобъемные и зонные модели не дают информации о полях температуры, скорости газа и концентрации компонентов внутри помещения. Для получения такой информации построена модель турбулентной конвекции газа в помещении при наличии очага загорания на основе уравнений Навье-Стокса и двухпараметрической $k-\epsilon$ модели турбулентности. Особенностью предлагаемой модели является одновременный учет ряда факторов: турбулентный характер течения, переменная плотность газа (учтена ее зависимость от температуры, резко различающейся для разных точек помещения); теплоотдача вглубь материала перекрытия и стен за счет теплопроводности.

Численные эксперименты были ориентированы на то, чтобы определить область значений параметров системы, в которой допустимо использование зонных моделей пожара. В частности, было рассмотрено развитие теплового факела вокруг очага большой площади, что соответствует горению разлитого жидкого горючего. Расчет показывает, что интенсивная циркуляция газа в течение нескольких секунд охватывает все помещение. Развитый пожар (в отличие от начальной стадии) в этом случае может быть описан среднеобъемными параметрами. Если же очаг горения локализован в малом объеме, то формируется стратифицированное течение, для которого характерно накопление горячего газа под потолком. Нижняя часть помещения оказывается негаснущей циркуляцией горячего газа. В этом случае возможно использование зонной модели.

АДАПТИВНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫМ ОБЪЕКТОМ СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Сыктывкар, Сыктывкарский государственный университет

Рассматривается задача регулирования для линейного дискретного скалярного объекта в условиях структурированных возмущений. Предполагается, что возмущения складываются из ограниченных аддитивных помех и возмущений в каналах выхода объекта и управления. Возмущения выхода и управления описываются линейными ограниченными причинными нестационарными операторами и могут учитывать параметрические возмущения и немоделируемую динамику объекта. Показатель качества в задаче управления равен наилучшему значению верхнего предела модуля выхода объекта в фиксированном классе возмущений. Параметры номинального объекта, т.е. коэффициенты уравнения объекта и нормы возмущений, предполагаются неизвестными.

Для получения условий робастной устойчивости и оценки качества, обеспечиваемого линейным регулятором для скалярного объекта с известными параметрами, использованы результаты работ М. Хаммаша и Дж.Б.Пирсона по робастной устойчивости и робастному качеству дискретных систем в условиях структурированных возмущений (см. библиографию в [1]). Рассмотрены различные классы возмущений, позволяющие решать задачу оценивания неизвестных номинальных параметров в замкнутом контуре.

Для синтеза адаптивного управления используется идентификационный подход, согласно которому задача построения регулятора для известного номинального объекта и задача оценивания неизвестных номинальных параметров (включая нормы возмущений) разделены. Предлагается метод синтеза адаптивного управления, позволяющий обеспечивать не только устойчивость, но и наилучшее асимптотическое качество замкнутой адаптивной системы. Точечные оценки неизвестных параметров строятся на основе множественных оценок параметров, согласованных с текущими наблюдениями и априорной информацией о системе. В качестве идентификационного критерия используется показатель качества в задаче управления. Результаты моделирования предложенного адаптивного робастного управления приводятся в сравнении с результатами для адаптивного управления, основанного на построении оценок неизвестных коэффициентов уравнения объекта по методу наименьших квадратов.

Литература

1. M.Khammash, "Robust Steady-State Tracking", IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 40, no. 11, pp. 1872-1880, 1995.

АДАПТИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА¹

г. Санкт-Петербург
(математико-механический факультет СПбГУ)

Рассматривается класс объектов, описываемых специальной системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих ненаблюдаемую линейную часть, содержащую управление и неизвестные параметры

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Dx + F(x)z + g, \\ \frac{dz}{dt} &= Az + b[c(\theta)u + d(\theta)].\end{aligned}$$

Здесь $u = u(t)$ — скалярное управляющее воздействие, x — вектор стабилизируемых переменных (наблюдаемая составляющая процесса), z — ненаблюдаемая составляющая, D и A — известные гурвицевы матрицы, матричная функция $F(x)$ также известна, b и g — известные постоянные векторы, c и d — скалярные функции неизвестного векторного параметра $\theta_* \in \Theta$.

Задача управления состоит в построении управляющих воздействий $u(t)$ таких, что обеспечивается стабилизирующая цель управления вида

$$|x(t) - x_*| \leq c_x, \quad \sup_t |u(t)| < \infty$$

с заданной постоянной c_x и заданным вектором x_* .

Основным предположением о нелинейности является требование выполнения неравенств

$$|F'(x)| \leq c_x, \quad |(x - x_*)^T [F'(x) - F'(x_*)] z_*| \leq c_F |x - x_*|,$$

где

$$z_* = -[F^T(x_*)F'(x_*)]^{-1} F^T(x_*) [Dx_* + g].$$

Это требование выполнено в изучаемой прикладной задаче.

¹Работа выполнена в лаборатории теоретической кибернетики Научно-исследовательского института математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 95 - 01 - 00230)

Приводятся алгоритмы адаптивной стабилизации объектов указанного класса. Обсуждаются варианты адаптивного управления при наличии запаздывания в измерениях выхода и дрейфа во времени неизвестных параметров. Приводятся схемы формирования обратной связи без измерения производных выхода, а также при наличии ограничений на управление.

Для получения алгоритмов адаптивной стабилизации использовался метод функций Ляпунова и метод рекуррентных целевых неравенств, предложенный В.А. Якубовичем.

Разработанные алгоритмы применялись в задаче стабилизации температуры полимеризации при производстве синтетического каучука СКИ-3. Процесс протекает в батарее, состоящей из последовательно соединенных N аппаратов. Состояние i -го аппарата характеризуется абсолютной температурой реакционной смеси (T_i), концентрацией полимера (ϕ_i), концентрацией активных центров (n_i). Уравнения процесса имеют вид²:

$$\frac{dT_i}{dt} = w(T_{i-1} - T_i) + q_c n_i \mu(T_i, \phi_i),$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = w(\phi_{i-1} - \phi_i) + n_i \mu(T_i, \phi_i),$$

$$\frac{dn_i}{dt} = w(n_{i-1} - n_i), \quad i = 1, 2, \dots, N; t \geq 0,$$

$$\mu(T, \phi) = c_r \sqrt{m_0 - \phi} \exp\left\{-\frac{E}{RT}\right\}.$$

Здесь $n_0(t) = \alpha \cdot S G_k(t) - \beta_*$; $S, w, q_c, c_r, m_0, E, R, T_0, \phi_0$ - известные постоянные; $G_k(t)$ - управляющее воздействие (расход катализатора), α - активность катализатора и β_* - величина микропримесей в шихте - неизвестные параметры, T_i и ϕ_i измеряются; n_i измерить невозможно.

Цель управления - стабилизация температуры T_N в последнем аппарате за счет выбора управляющего воздействия G_k .

Эксперименты на ЭВМ показали работоспособность предложенных схем адаптивной стабилизации. Эксперименты проводились с целью выяснить влияние на качество переходного процесса некоторых параметров таких, например, как отклонение начальной температуры от расчетной, наличия малых возмущений в измерениях и других.

Было проведено сравнение результатов экспериментов для разных алгоритмов адаптивного управления.

²Уравнения получены сотрудниками ВНИИ синтетического каучука им. акад. С.В. Лебедева.

НОВЫЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ПЯТОГО ПОРЯДКА

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Государственный технический университет

Численное решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений является основной проблемой многих инженерных и научных задач. Наибольшую популярность среди методов интегрирования приобрели явные методы Рунге-Кутты, отличающиеся своей простотой и гибкостью (возможностью самостоятельного старта алгоритма и изменения шага интегрирования на любом этапе вычислений). До недавнего времени широкое распространение имела классическая схема метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Однако современные требования к точности решения все в большей степени ограничивают ее применение из-за отсутствия возможности постоянного контроля погрешности дискретизации. Указанный недостаток устранен в так называемых вложенных методах Рунге-Кутты, в которых метод $(p-1)$ -го порядка является составной частью исходного метода p -го порядка. Тогда оценку локальной ошибки на каждом шаге можно произвести на основании двух решений методами порядков p и $p-1$, не прибегая к лишним вычислениям.

В целях улучшения существующих явных схем вложенного метода Рунге-Кутты пятого порядка были получены выражения для определяющих метод интегрирования коэффициентов аналитическим решением производящей системы нелинейных алгебраических уравнений 19-го порядка. Это позволяло найти новые схемы, отличающиеся от известных простотой коэффициентов, меньшим значением локальной ошибки дискретизации (для частного случая уравнения даже более высоким — шестым — порядком точности), а также тем, что вложенный метод четвертого порядка представляет собой привычную классическую схему.

Общая схема явного метода Рунге-Кутты пятого порядка со вложенным в него методом четвертого порядка для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0$$

записывается в виде

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 b_i k_i,$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \sum_{i=1}^4 b_i^* k_i,$$

где

$$k_i = f\left(y_n + \sum_{j=2}^5 u_{ij} k_j, t_n + c_i h\right) h, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Здесь h — шаг интегрирования, y_{n+1} — приближенное решение основного метода с локальной ошибкой $O(h^6)$, y_{n+1}^* — приближенное решение вложенного метода с локальной ошибкой $O(h^5)$.

Ниже приводятся значения коэффициентов одной из схем явного метода пятого порядка со вложенным в него классическим методом четвертого порядка.

$$a_{21} = \frac{1}{2},$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \frac{1}{2},$$

$$a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1,$$

$$a_{51} = \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{50}, \quad a_{52} = \frac{1}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{50}, \quad a_{53} = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{5}}{50}, \quad a_{54} = -\frac{\sqrt{5}}{50},$$

$$a_{61} = \frac{1}{10}, \quad a_{62} = \frac{1}{5}, \quad a_{63} = \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{6}}{10}, \quad a_{64} = \frac{1}{10}, \quad a_{65} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1, \quad c_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{10}, \quad c_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{10},$$

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{12}, \quad b_5 = \frac{5}{12}, \quad b_6 = \frac{5}{12},$$

$$b_1^* = \frac{1}{6}, \quad b_2^* = \frac{1}{3}, \quad b_3^* = \frac{1}{3}, \quad b_4^* = \frac{1}{6}.$$

Точность численного метода интегрирования определяется порядком главного члена разложения локальной ошибки дискретизации

$$r_n = y(t_n) - y_n$$

по степеням h . В общем случае для методов пятого порядка

$$r_n = O(h^6).$$

Отличительной особенностью рассмотренной схемы является ее более высокий (шестой) порядок точности для частного случая, когда

$$f(y, t) = f(t).$$

В этом случае локальная ошибка принимает значение

$$r_n = -\frac{1}{1512000} f^{(6)}(t_n) h^7 + O(h^8).$$

Для модельного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \lambda y$$

локальная ошибка составляет

$$r_n = \frac{1}{288} \lambda^6 y_n h^6.$$

Эффективность разработанных схем вложенного метода Рунге-Кутты пятого порядка подтвердилась при решении жестовых и конкретных прикладных задач оптимального управления и теории упругости.

ОСАЖДЕНИЕ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ МОНОДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ
В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ

г. Воронеж

Воронежская государственная технологическая академия

Образование осадка в проточных элементах различных технологических устройств - часто встречающееся явление, во многих случаях нежелательное. Например, накопление осадка отвержденного кислорода в жидком водороде может вызвать взрывоопасную ситуацию [1]. Контролирование этого процесса измерительными средствами не вполне надежно из-за несовершенства применяемого оборудования и его точности. В связи с этим актуально использование расчетных методов, основывающихся на адекватных математических моделях.

На основе диффузионных представлений об осаждении суспензий [2], рассмотрена задача стационарной седиментации малоцентрированной монодисперсной взвеси, движущейся в плоском горизонтальном канале, в предположении, что продольное перемешивание не оказывает существенного влияния на процесс:

$$B^{-1} \cdot \partial^2 N(X, Y) / \partial Y^2 + \partial N(X, Y) / \partial Y - \beta \cdot \partial N(X, Y) / \partial X = 0; \quad (1)$$

$$N(0, Y) = 1; \quad (2)$$

$$N(X, 0) + B^{-1} \cdot \partial N(X, 0) / \partial Y = K_1 \cdot N(X, 0); \quad (3)$$

$$N(X, 1) + B^{-1} \cdot \partial N(X, 1) / \partial Y = -K_2 \cdot N(X, 1), \quad (4)$$

где $N(X, Y) = n(x, y) / n_n$; $X = x/h$; $Y = y/h$; $B = w \cdot h/D$; $K_1 = k_1/w$; $K_2 = k_2/w$; $\beta = u/w$; $n(x, y), n_n$ - текущая и начальная концентрации взвеси; x, y - продольная и поперечная координаты; h - ширина канала; D - коэффициент конвективного перемешивания по оси y ; k_1, k_2 - кинетические коэффициенты осаждения на границе взвесь-осадок; u - скорость дисперсионной среды; w -

скорость осаждения частиц по Стоксу.

Система (1)-(4) решена аналитически с помощью интегрального преобразования Лапласа. Получены соотношения для расчета полей концентрации и толщины осадка на стенках канала в зависимости от параметров задачи B , β , K_1 , K_2 . При вычислении D использована аналогия с кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости [3]. Коэффициенты k_1 и k_2 найдены в соответствии с [4].

Расчетный анализ показал качественную и количественную адекватность предложенной модели.

Литература

1. Фидин Н.В., Буданов А.В. Жидкостные криогенные системы. - Л.: Машиностроение, 1985. - 247 с.
2. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. - М.: Химия, 1976. - 464 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 840 с.
4. Харин В.М., Ряжских В.И., Завадских Р.М. Осаждение криогенных взвесей в резервуарах. Теор. основы хим. технолог. - 1991. - т.25. - № 5 - с.659 - 689.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
В ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЛАМПАХ НАКАЛИВАНИЯ

г. Саранск, Мордовский госуниверситет им. Н. П. Огарева

В настоящее время ленточные вольфрамовые лампы накаливания получили очень широкое применение в метрологической практике вследствие стабильности теплофизических параметров. Для многих теплофизических экспериментов требуется иметь возможно больший участок рабочей поверхности с заданным распределением температуры. В работе дается постановка и решение задачи получения заданного распределения температуры как задачи оптимального управления процессом теплопереноса. Тело накала температурной лампы представляет собой плоскую ленту. Тогда уравнение нестационарного температурного поля в ленте имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + I^2 \rho. \quad (1)$$

Для однозначного определения температуры задаем начальные и граничные условия, соответствующие креплению тела накала в баллоне. Здесь ΔT — лапласиан; $I=I(t)$ — сила тока; $\rho=\rho(t)$ — удельное сопротивление; a — коэффициент теплопроводности; $T=T(x, y, z, t)$ — распределение температуры по профилю ленты. За класс допустимых управлений $u(t)=I(t)$ возьмем множество непрерывных и ограниченных функций, определенных в интервале $[t_0, t_1]$ со значениями из выпуклой области G . Изучаемый процесс принадлежит к системам с распределенными параметрами, для которых ток питания может рассматриваться как управление, а изменение температуры по поверхности

ленты отождествляется с траекторией системы. Требуется найти функции $T(x, y, z, t)$ и $u(t)$ из рассматриваемых классов, удовлетворяющих уравнению (1), а также начальным и граничным условиям, на которых функционал

$$V(I) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [T(x, y, z, t) - T_3(x, y)]^2 dx dy + \beta \int_{t_0}^{\tau} I^2(t) dt,$$

достигает своего минимального значения. $T_3(x, y)$ - заданное распределение температуры. $\beta > 0$.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОБМЕНА КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ, ИМИТИРУЮЩИХ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОЕ ТЕЛО

г. Саранск, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

При описании реальных теплофизических процессов необходимо учесть перенос тепла излучением в разогреваемых цилиндрических полостях. В математическом плане это приводит к необходимости рассмотрения интегральных уравнений лучистого теплообмена в цилиндрических полостях. В работе выводится интегральное уравнение с кратными и частными интегралами лучистого теплообмена, позволяющее определить эффективную излучательную способность (степень черноты) конечной цилиндрической полости в зависимости от относительной плотности заданного потока излучения, геометрии полости, линейных размеров, коэффициента отражения.

Полученное уравнение имеет вид:

$$Y(x) = f(x) + \rho \int_0^L K(x, t) Y(t) dt + \rho^2 \int_0^1 \int_0^L M(x, z, t) Y(t) dz dt \quad (1)$$

где $f(x)$ – плотность заданного потока излучения;

ρ – коэффициент отражения;

L – относительная длина цилиндрической полости;

$K(x, t)$ и $M(x, z, t)$ – заданные ядра, отражающие геометрию оболочки;

$Y(x)$ – искомая эффективная излучательная способность цилиндрической полости.

Получены приближенные решения интегрального уравнения (1). Исследуются вопросы существования и единственности положительного решения полученного интегрального уравнения. Приводятся достаточные условия сходимости приближенных решений к точному. Разработаны алгоритм и программа по расчету излучательных характеристик цилиндрических полостей для ПЭВ типа ПЭВ.

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ.

Сущность формализации и построения математической модели для производственного процесса состоит в расчленении его на некоторое количество элементарных частей, которыми являются технологические операции. Наиболее существенным является то, что выполнение технологической операции над каким-либо полуфабрикатом или изделием обязательно приводит к изменению его свойств. Поэтому в первую очередь при построении математического описания производственных формализованных операций нужно выбрать совокупность характеристик, описывающих состояния (свойства) заготовок, полуфабрикатов, изделий. В этом случае каждая производственная операция может рассматриваться как преобразователь, определяющий изменение характеристик изделий во времени. Тогда математическая модель производственной операции может быть представлена как динамическая система, а модель производственного процесса, как многоуровневая сложная система.

Для разработки обобщенной модели электрофизических технологических процессов обработки необходима их классификация. Классификация технологических методов обработки может быть проведена по различным признакам в зависимости от целей, которые ставит перед собой исследователь. Любая классификация предполагает выделение приоритетов каких-либо признаков, поэтому единой классификации технологических методов, пригодной для любого анализа, повидимому, создать невозможно.

В наиболее общем случае технологические методы можно классифицировать по виду энергии, непосредственно преобразующей объект производства. К таким используемым видам энергии относятся: механическая, электрическая, химическая, тепловая.

Обобщенная модель любого технологического метода (Рис.1) позволяет утверждать, что выходные параметры метода, характеризующие свойства объекта производства (детали) (Z_i) , можно принять для всех технологических методов едиными; входные параметры (X_i) в части описания объекта производства, также могут быть едины, так как любую деталь и на стадии изготовления (заготовку) можно описать набором пяти свойств, а именно:

свойств материала $(Z_{M,i}, X_{M,i})$

характеристик формы $(Z_{Ф,i}, X_{Ф,i})$

размеров $(Z_{P,i}, X_{P,i})$

параметров точности $(Z_{t,i}, X_{t,i})$

параметров шероховатости $(Z_{ш,i}, X_{ш,i})$

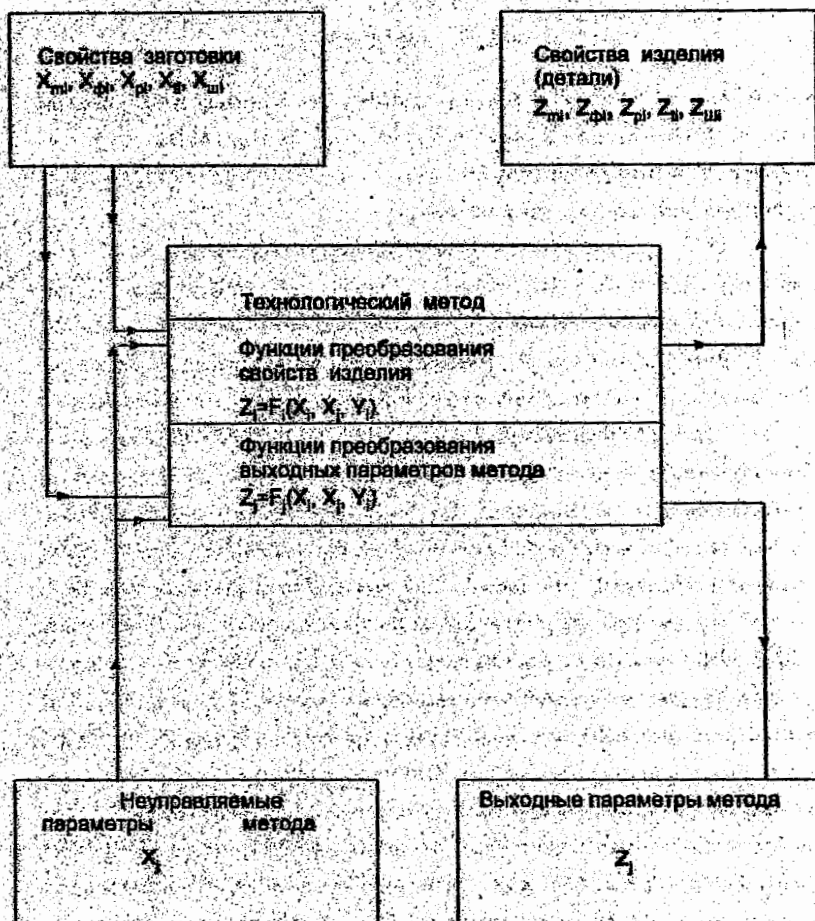


Рис. 1. Структурная схема модели технологического метода.

Представленную модель можно проиллюстрировать на примере такого многопараметрического метода обработки как электроконтактно-дугового абразивного.

WAVELET APPROACH TO NONLINEAR PROBLEMS.

FEDOROVA A.N. ZEITLIN M.G.

Russian Academy of Sciences, Institute of Problems of Mechanical Engineering,
Laboratory of the Mathematical Models of Mechanics, Russia, 199178,
St. Petersburg, V.O., Bolshoj pr., 61, room 24.

e-mail : zeitlin@math.ipme.ru, anton@math.ipme.ru

We give the explicit time description of dynamics and optimal dynamics for the nonlinear (polynomial) differential system of equations by using variational methods. It gives the solution of the problem of energy minimization in electromechanical system with enormous expense of energy – a synchronous drive of the mill. The obtained solutions are given either as generalized series on shifted Legendre polynomials or in wavelet basis. We achieve it by the reduction from initial system of differential equations to the pure algebraical systems of equations. The solutions of reduced algebraical problems are the generalized Fourier coefficients (wavelet coefficients). We consider the description of the pure dynamical processes and also the optimal control dynamics for Lagrangian and Hamiltonian optimization with constraints. According to the orbit method and by using construction from the geometric quantization theory we construct the symplectic and Poisson structures associated with Weyl-Heisenberg wavelets by using metaplectic structure and corresponding polarization. We consider the application to the construction of Melnikov functions in the theory of homoclinic chaos in perturbations of Hamiltonian systems (Galerkin approximation for a beam contacting with ideal compressible liquid in a channel). Also, we consider the problem of constructing in wavelet basis the Arnold-Weinstein curves via Floer variational approach in symplectic topology and wavelet approach to KAM perturbation theory in symplectic Hilbert scales of spaces.

АНИМАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ГРУППОВЫХ СТРУКТУР

Санкт-Петербург, СПИИРАН

Рассматриваются вопросы компьютерной поддержки группового анализа с использованием современных технологий анимационной графики, которая осуществляется как для иллюстрации групповых структур (рис.1 и рис.2), так и для анализа их динамики. Уникальные результаты даст анимационная графика для исследований гипергеометрического уравнения Гаусса (рис.2).

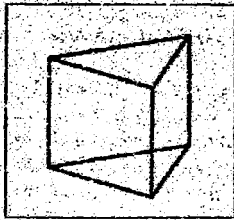


Рис.1

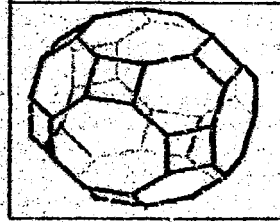


Рис.2

Рассматривается компьютерный банк моделей, позволяющий выделять модель из множества допустимых с учетом априорной информации: законов сохранения, принципа подвижного равновесия, качественных характеристик поведения системы и др. Модельные классы объединяют на групповых принципах уравнения линейной и нелинейной механики и математической физики, а также их новые точные решения. Дополнительная информация по первым интегралам, симметриям, инвариантам, групповым структурам и др. обеспечивает разнообразный поиск и анализ математических моделей в аналитическом виде.

ADAPTIVE CONTROL OF OSCILLATIONS BASED ON
LINEARIZED POINCARÉ MAP

St. Petersburg, Institute for Problems of Mechanical Engineering

The importance of oscillatory processes and models has been recognized in many fields of science and technology [1,2]. In many applications it is necessary to modify the behavior of the system, e.g. to change amplitude or period of oscillations, to transform chaotic motions into periodic ones and vice versa. This problem can be understood as one of control. It was attacked recently by researchers from different scientific communities, focusing mainly on control of chaos [2,3]. However the modern nonlinear control [4] and nonlinear adaptive control [5] theories have not been applied widely. Methods of adaptive control are of special interest for applications because they are intended to achieve the desired behavior of the system without complete knowledge of its mathematical model.

This contribution is devoted to design and application of adaptive control algorithms based on linearization of Poincaré map and on the method of recursive goal inequalities. [5]. The idea of using Poincaré map for control of chaotic oscillations was introduced by Ott et al. [6] and got significant attention of researchers [3]. However it still has not been investigated from control point of view. Particularly, the problem of output feedback adaptive control design remains unsolved. Below the solution to this problem is given based on method of recursive goal inequalities suggested by V. Yakubovich in 1966. General mathematical results concerning approximation of controlled Poincaré map of nonlinear system by means of simplified linear input-output model are formulated. The finite-convergent adaptive control algorithm based on estimation of model parameters is described. Conditions of achieving the goal (tracking) with given accuracy are established. Theoretical results are applied to model-chemical systems: brusselator in periodic self-oscillatory mode, brusselator in chaotic forced oscillatory mode, three-dimensional chaotic Rossler system and a model of chemical reaction in a multicomponent gas with simultaneous nucleation [7].

The efficiency of the proposed approach for the number of periodic and chaotic oscillation control problems has been demonstrated. The convergence rate is sufficiently high, while the value of control level is relatively small. The proposed method can be readily extended to multi-input-multi-output systems and applied to practical control problems, e.g. in chemical engineering [7].

References

- [1] Neimark Yu., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. (Kluwer Academic, Dordrecht, 1992)
- [2] Nicolis G., Prigogine I.R. Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. (Wiley, New York, 1977)
- [3] Chen G. and Dong X., From Chaos to Order. Int. J. Bifurcation and Chaos, v.3 N.6, p.1363, 1993
- [4] Isidori A. Nonlinear Control Systems, 2-nd ed. (Springer-Verlag, 1989)
- [5] Fradkov A.L. Adaptive Control in Complex Systems. (Nauka, Moscow, 1990)
- [6] Ott E., Grebogy C., Yorke J. Controlling Chaos. Phys. Rev. Lett. v.53 N.14 pp. 1196-1199, 1990
- [7] Kukushkin S.A., Osipov A.V. Phys. Rev. E, v.53 N.3 pp.856-860, 1996

**QUASIPASSIVITY BASED CONDITIONS OF L-DISSIPATIVITY OF
NONLINEAR CONTROL SYSTEMS**

St. Petersburg, Institute for Problems of Mechanical Engineering of Russian
Academy of Sciences

We will consider the nonlinear control systems in the form

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (1)$$

$x \in R^n$, $u, y \in R^m$, for which the following condition is valid: there exist the function $V : X \rightarrow R^+$, $V \in C^1$, V is radially unbounded and the following conditions is satisfied

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x). \quad (2)$$

We prove that under some condition on function $k(\cdot)$ the control law $u = k(y)$ provide L-dissipativity, i.e. ultimate boundedness of solutions of closed loop system. If the condition

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq \alpha \quad (3)$$

is valid then the control $u = -\delta y$ where $\delta > 0$ is arbitrary constant provides L-dissipativity of closed loop system. For system (1) the validity of conditions (2) and (3) is equivalent to the so called quasipassivity property of the system [1]. It is proven that under some further conditions the interconnection of quasipassive systems is L-dissipative. As the consequence of the above result and Kalman-Yakubovich lemma the criterion of L-dissipativity of system with linear nominal part and nonlinear feedback is established.

References

- [1] Polushin I.G. Proc. 3rd European Control Conference, 1995, pp.681-686.

ESTIMATION OF EFFECTIVENESS OF ROBOT MANIPULATOR CONTROL

Saint-Petersburg, St. Petersburg State Technical University

Under standard assumptions about mechanical structure the dynamics of robotic manipulators may be described by the equation

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (1)$$

Here q is a vector of generalized coordinates, $A(q)$ is a symmetric positive definite inertia matrix, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ is a vector of centrifugal and Coriolis forces, $g(q) \equiv \frac{\partial U(q)}{\partial q}$ is a vector of gravity and u is a vector of applied control forces.

Most of the industrial robots are controlled by *PID* regulators, i.e. u is defined as follows

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} - K_i \int_0^t (q - q_d) d\tau + \dot{\xi}_0 \quad (2)$$

Here q_d is the desired position of generalized coordinates, K_p , K_v and K_i are positive definite matrices, ξ_0 is a constant vector.

Let us denote: $x = q - q_d$, $y = \dot{q}$, $z = \int_0^t (q - q_d) d\tau + K_i^{-1}(g(q_d) - \xi_0)$.

Theorem 1. If for $\delta_x > 0$, $\varepsilon > 0$: $K_i > 0$, $K_v > \varepsilon \max_{\|x\| \leq \delta_x} A(q)$, $\varepsilon(K_p - \alpha E) > K_i$, then there exist $R > 0$, $\mu > 0$ such that $\forall (x(0), y(0), z(0)) \leq R \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \{\varepsilon \|x\| + \|y\| + \mu \|z\|\} = 0$.

Proof. Let us consider the following function

$$V(x, y, z) = U(x + q_d) - U(q_d) + x^T g(q_d) + V_2(x, y, z)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y^T \\ x^T \\ z^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(q) & \varepsilon A(q) & \mu A(q) \\ \varepsilon A(q) & K_p + \varepsilon K_v - \mu A(q) & K_i + \mu K_v \\ \mu A(q) & K_i + \mu K_v & \varepsilon K_i + \mu K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} \quad (3)$$

This function is reduced to the one presented in [1] in case of $\mu = 0$.

It is not hard to show that $V(x, y, z)$ is a Lyapunov function for the closed-loop system (1), (2). Moreover, for any $\delta_x, \varepsilon > 0$ there exist $R, \delta_y, \delta_z > 0$ such that $V(x, y, z) \leq R \implies \|x\| \leq \delta_x$, $\|y\| \leq \delta_y$, $\|z\| \leq \delta_z$, $K_v - \varepsilon \max_{\|x\| \leq \delta_x} A(x + q_d) > k_c(\varepsilon \delta_x + \mu \delta_z)E$, $\varepsilon(K_p - \alpha E) > K_i + \mu(K_v + \frac{\alpha^2}{4} K_i^{-1} + (k_c \delta_y + \alpha_2 \delta_z)E)$ and if $q(0) = x_0 + q_d$, $\dot{q}(0) = y_0$, $\xi_0 = g(q_d) - K_i x_0$ then $V(x_0, y_0, z_0) \leq R \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \{\varepsilon \|x\| + \|y\| + \mu \|z\|\} = 0$.

Theorem 2. The closed-loop system (1), (2) is globally asymptotically stable if $K_p > \alpha E$, $K_v > 0$ and $\|K_i\|$ is small enough.

Let us note now that the regulator (2) is the simplest robust linear one. This property is a reason of its practical popularity. But sometimes *PID*-controller can not be used for inaccessibility to

measure link velocities. In this case, one can use the regulator with "dirty" derivatives presented in [2] where the gravity compensation is substituted by integral feedback

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v(\dot{q} - \dot{s}) - K_i \int_0^t (q - q_d) d\tau + \dot{s}_0, \quad \dot{s} = \gamma(q - s). \quad (4)$$

Theorem 3. *There exists $k_i > 0$ such that if $K_p > \alpha E$, $\gamma > 0$, $\|K_i\| \leq k_i$ then the desired equilibrium of the closed-loop system (1), (4) is globally asymptotically stable.*

Let us consider now a tracking problem. One can rewrite the closed-loop system as follows

$$\begin{aligned} A(x + q_p)\dot{y} + C(x + q_p, y + \dot{q}_p)y + g(x + q_p) &= -K_p z - K_v y - K_i z + g(q_p) + M_p, \\ \dot{x} = y, \quad \dot{z} = x + G_p, \end{aligned} \quad (5)$$

where $q_p(t)$ is a desired trajectory, $M_p(x, y, q_p, \dot{q}_p) = -A(x + q_p)\dot{q}_p - C(x + q_p, y + \dot{q}_p)\dot{q}_p$ and $G_p(q_p, \dot{q}_p) = K_i^{-1} \frac{\partial g(q_p)}{\partial q_p} \dot{q}_p$.

Theorem 4. *For any $\Delta > 0$ there exist $\delta_\Delta, R, \beta > 0$ such that if $\forall t > 0: \|\dot{q}_p(t)\| + \beta \|\ddot{q}_p\| \leq \delta_\Delta$ and $V(x(0), y(0), z(0)) \leq R$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x\| + \|y\| + \|z\|) \leq \Delta$.*

Proof. Using the Lyapunov function (3) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq - [y^T \quad x^T \quad z^T] \begin{bmatrix} K_v - \epsilon A(q) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon K_p - K_i - \epsilon \alpha E - \mu K_v & \frac{1}{2} \mu \alpha E \\ 0 & \frac{1}{2} \mu \alpha E & \mu K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} + \\ k_0 \|y\| (\epsilon \|x\| \|y\| + \mu \|y\| \|z\| + \mu \|x\|^2) + \mu \alpha_2 \|z\| \|x\|^2 + w \end{aligned}$$

where $w(x, y, z, q_p, \dot{q}_p) = \dot{q}_p^T (x^T \frac{\partial g(q_p)}{\partial q_p} - g(q_p) + g(x + q_p)) + (y + \epsilon x + \mu z)^T M_p + [\mu y^T A(x + q_p) + x^T (K_i + \mu K_v) + z^T (\epsilon K_i + \mu K_p)] G_p$.

Following [4, p. 376-377] and noting that $w(x, y, z, q_p, \dot{q}_p)$ is linear function of x, y, z and that $w(x, y, z, q_0, \dot{q}_0) \equiv 0$ we obtain the desired result.

So, we conclude that *PID* regulator for tracking problem can be used if the desired movement is slow enough.

References

- [1] Kelly R. A tuning procedure for stable *PID* control of robot manipulators. // *Robotica*. 1995. Vol. 13. P. 141-148.
- [2] Burkov I. V. Asymptotic stabilization of nonlinear Lagrangian systems without measuring velocities. // *Active Control in Mechanical Engineering. Proc. Int. Sympos. (Lyon, France, 1993)*. Lyon: Association *MV2*. Vol. 2. 10 p.
- [3] Hoppensteadt F. Asymptotic stability in singular perturbation problems. II // *J. Diff. Equat.* 1974. Vol. 15, No. 3. P. 510-521.
- [4] Pervozvanski A. A. Theory of automatic control. M.: Nauka 1986. 615 p. (In Russian).

О СИММЕТРИИ И РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург, Российский гос.педагогический университет

Рассматривается класс уравнений

$$y' = F_3(x, y)y^3 + F_2(x, y)y^2 + F_1(x, y)y' + F_0(x, y). \quad (1)$$

Известно, что класс уравнений (1) инвариантен относительно произвольного невырожденного точечного преобразования $x = g(t, u)$, $y = f(t, u)$ [1].

При моделировании реальных процессов или явлений на класс (1) часто накладываются различные априорные ограничения. С другой стороны, интерес представляют и неточечные преобразования, например, касательные и преобразования Беклунда. Поэтому необходимо провести полный групповой анализ класса уравнений (1), включающий поиск симметрий (как непрерывных, так и дискретных) на различных подклассах.

В работе проведен анализ определяющих систем, возникающих при поиске допускаемых различными специализациями класса (1) группы преобразований. Для ряда подклассов указаны найденные симметрии и случаи разрешимости (в квадратурах или в специальных функциях), которые могут служить разрешимыми элементами для орбит дискретных групп, допускаемых более широкими классами уравнений второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // УМН, 1992, 47, вып.4 (285). - С.83-144.

Combination of Numerical and Symbolic Computation Techniques for Solving Partial Differential Equations¹

Department of Mathematics & Computer Science Faculty of Science,
United Arab Emirates University

In the last few years a new generation of symbolic processing software, Known as computer algebra systems CAS, has appeared. These software packages seem to have a significant impact on research and education. CAS handle numerical, symbolic, and graphical computations in a unified way.

Recently, Mikhailov has presented a finite difference scheme using Mathematica. The defined Mathematica rules have simplified the use of the finite element technique for problem solving. The work of Mikhailov has motivated us to present an algorithm based on the finite integral transform technique by using computer algebra systems. The generalized finite integral transform technique is useful for solving different kinds of partial differential equations of mathematical physics. The method transforms a given partial differential equation and its boundary and initial conditions into a system of ordinary differential equations of less order. This is achieved by choosing an eigenvalue problem associated with the homogeneous part of the governing system of PDE. From that eigenvalue problem, a set of orthogonal functions are defined and utilized to develop the transformation pair required in the transformation process.

The eigenvalue problem associated with the homogeneous part of the PDE and its boundary conditions of the process involved has a standard form, for which the eigenfunctions and the transcendental equation of the eigenvalues are tabulated for different kind of boundary conditions. A unified procedure using the generalized finite integral transform can, therefore, be presented using Mathematica.

Anticipating a lot of potential for this kind of combination of numerical and symbolic computation techniques to understand better problems in applied mathematics, we present a series of examples in one dimensional heat transfer with symmetry, where the time honored method of the generalized finite integral transform technique is implemented via the computer algebra system Mathematica. Computer algebra is to compute the coefficients of the expansions in eigenfunctions that appear in model problems. The approach is demonstrated on problems of practical interest in rectangular, cylindrical and spherical coordinate systems. The general one dimensional equation of heat diffusion, considered in this work, can be written in non-dimensional form as

$$\frac{1}{\eta^p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^p \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right) + c g(\eta, \xi) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + H_1 \vartheta = f_1 \quad \text{at } \eta = 0, \quad \xi > 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + H_2 \vartheta = f_2 \quad \text{at } \eta = 1, \quad \xi > 0 \quad (3)$$

¹On leave from Engineering Mathematics and Physics Dept., Faculty of Engineering, Al-Mansoura University, Egypt. E-Mail Bishri@nyx.uaeu.ac.ae

and the initial conditions

$$\vartheta = 1, \quad \xi = 0, \quad \text{and } 0 < \eta < 1 \quad (4)$$

where,

$$p = \begin{cases} 0; & \text{for slabs,} \\ 1; & \text{for cylinders,} \\ 2; & \text{for spheres.} \end{cases}$$

with $\vartheta(\eta, \xi)$, $f_1(\eta, \xi)$ and $f_2(\eta, \xi)$ written as ϑ , f_1 and f_2 , respectively. $g(\eta, \xi)$ is a source function, and H_1 and H_2 are the biot numbers at the outer boundaries.

The finite integral transform technique transforms the general heat equation given by equations (1) and (2) into the following system of first order ordinary differential equations in the transform variable

$$\frac{d\Theta_n}{d\xi} + \lambda_n^2 \Theta_n = A_n(\xi) \quad (5)$$

subject to the transformed initial condition

$$\Theta_n(\xi) = \int_0^1 \eta^p \vartheta(\eta, \xi) d\eta, \quad \xi = 0 \quad (6)$$

where

$$A_n(\xi) = cG_n(\xi) + \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \vartheta(\eta, \xi) f_i(\eta, \xi) d\eta \quad (7)$$

The solution for the dimensionless field distribution is given by

$$\vartheta(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\eta) \Theta_n(\xi)}{N(\lambda_n)} \quad (8)$$

where

$$N(\lambda_n) = \int_0^1 \eta^p [\psi_n(\eta)]^2 d\eta \quad (9)$$

$$cG_n(\xi) = \int_0^1 \eta^p \psi_n(\eta) g(\eta, \xi) d\eta \quad (10)$$

and λ_n and $\psi_n(\eta)$ are the eigenvalues and eigenfunctions of the eigenvalue problem associated with the homogeneous part of the general system given by equations (1) and (2).

A few rules are suggested and are used to compute the transient field distribution. Different kinds of boundary conditions can be handled with minor adjustment of respective rules. The procedure is demonstrated by solving several illustrative examples.

НАНОМАСШТАБНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЛАТЕРАЛЬНЫМИ НАГРУЖЕНИЯМИ

С.-Петербург, 194021, Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН

Целью доклада является рассмотрение математической модели для недавно экспериментально обнаруженного явления: формирование периодических наномасштабных структур при малых латеральных нагрузениях. Указанные структуры аналогичны дифракционным решеткам и наблюдаются при приложении нагрузки (растягивающего усилия) в плоскости слоя в качественно различных случаях: поверхности монокристаллов, аморфных сплавов и др.

Мы интерпретируем это явление как процесс самоорганизации наномасштабных диссипативных структур, происходящий при участии следующих механизмов:

1) уменьшение энергии активации для различных переходов, генерация квазисвободных атомов; 2) нелинейный диффузионный транспорт; 3) локализация квазисвободных атомов в новых потенциальных ямах; 4) конвективный перенос атомов. В рамках одномерной модели перечисленным процессам соответствует модельное уравнение для плотности поверхностных атомов: $\partial n = D_0 \partial_x^2 \partial_x F(n) \partial_x n + \partial_x \phi(n) + G(n) - R(n)$. Существенно, чтобы функция $S(n)$ имела нули. Уравнение решается при неймановских граничных условиях. Для нелинейного источника в этом уравнении $S = G - R$ могут быть выбраны различные нелинейные модели: а) $[n^3 - \eta]$ -модель; б) периодические функции: $-\sin n$; $-\sin(n/k)$. Для модели а) при пренебрежении конвективным переносом имеем: $\partial n = D_0 f_1(q) \partial_x^2 n F(n) + G_0 f_2(q) [F(n)]^2 - R_0 f_3(q) \Phi(n)$, где $f_i(q)$ - модельные функции, q - величина латеральной нагрузки, константы D_0, G_0, R_0 учитывают амплитуды учитываемых процессов. В стационарных условиях однородное распределение ($n = const$) неустойчиво и модельное уравнение может быть представлено в безразмерном виде: $\{\Phi(n(x)) \rightarrow \omega(\lambda); x \rightarrow \lambda\}: \partial_x^2 \omega + 2\omega^3 - m(\lambda; f_1(q), D_0, G_0, R_0) = 0$. Решение последнего уравнения является периодической эллиптической функцией Якоби $dn(\lambda; m)$. Таким образом, в рамках модельных предположений нелинейной задачи оказывается возможным получить замкнутые выражения для периодического профиля диссипативной структуры, ее амплитуды и период и зависимости от величины нагрузки и параметров модели.

Работа частично поддержана грантами РФФИ по физике (95-02-04096-) и механике (96-01-01207-а).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ

ФУНКЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ Sin-Gordon, Sin-Laplace

С.-Петербург, 194021, Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН

1) Дается обзор результатов авторов по ДУ, связанным с эллиптическими функциями (ЭФ). Эти результаты можно разбить на следующие пункты. Вводится большой набор новых семейств ДУ, связанных с ЭФ (ДУЭФ). Предлагаются обобщения для многих известных типов ДУ, в том числе указанных в заголовке. Для ряда введенных уравнений предложены замкнутые решения, выражающиеся через ЭФ. Введенные семейства ДУ представляют интерес для нелинейной теории ДУ и ее применений, в особенности в следующих направлениях: диссипативные структуры, солитоны, уединенные волны, теория колебаний, дифференциальная геометрия.

2) Введение новых объектов является одной из наиболее важных задач математической теории. Введенные семейства ДУЭФ можно разбить на 3 типа. (2.1) ДУ и дополнительные условия содержат ЭФ, аргументы которых зависят от искомых функций. (2.2) Указанные аргументы являются функциями лишь независимых переменных. (2.3) Уравнения не содержат ЭФ, но эти функции используются для получения решений в замкнутом виде. Отметим, что нам неизвестны результаты, связанные с типом (2.1). Поэтому мы считаем ОДУ и УЧП, относящиеся к типу (2.1) новыми объектами теории ДУ. Немногочисленные случаи ДУ типа (2.2) известны в литературе (например, уравнения Ламэ). Случаи типа (2.3) являются распространенными в теории солитонов.

3) Вспомогательные определения для ЭФ. (3.1) $J_n(y; k)$ - базисные ЭФ Якоби: $sn; cn; dn$. (3.2) J_p - бинарные комбинации (ЭФ) типа $sd(y; k_1, k_2) = sn(y; k_1)dn(y; k_2)$. (3.3) J_γ - тройные и более сложные комбинации ЭФ. (3.4) J_θ - произвольная ЭФ из перечисленных наборов. (3.5) Введем новую комбинацию ЭФ типа J_γ : $qn(y; k_1, k_2, k_3) = sn(y; k_1)cn(y; k_2)dn(y; k_3)$. Эта "симметризованная" функция обладает полезными свойствами: а) $qn(y; k) \rightarrow (k \rightarrow 0) \rightarrow 1/2 \sin 2y \rightarrow (y \ll 1) \rightarrow y$. б) $qn(y; k) = 1/2 \partial_y [sn(y; k)]^2$. (3.6) Отметим также свойства используемой ниже ЭФ типа J_p : $Siny \leftarrow (k \neq 0) \leftarrow sd(y; k) \rightarrow (k \rightarrow 1) \rightarrow Shy$.

4) Вспомогательные определения для гипервремечных и многомерных пространственных операторов. (4.1) $\tau_A = (t_1, \dots, t_A) ; X_B = (x_1, \dots, x_B)$. Гипервременной оператор вводится соотношением: $\partial_{\tau_A}^p \mu = \sum (1 \leq i \leq A) a_i \partial_{t_i}^p \mu$. Нелинейный многомерный

$\Sigma(1 \leq b \leq B) \partial_b^m f_b(u)$ для набора функций $f_b(u)$. Введем функции: $\varphi_\alpha(u; \tau_A; X_B)$; $\Phi_\beta(\tau_A; X_B)$; $F(\varphi_{\alpha,1}; J_\eta(\varphi_{\alpha,2}; k))$; $G(\Phi_{\beta,1}; J_\eta(\Phi_{\beta,2}; k))$

5) Очевидно, используя указанные операторы и наборы функций типа F и G (в качестве потенциалов, источников и коэффициентов в ДУ), можно вводить ДУЭФ типа (2.1) и (2.2). Введем ДУЭФ с аргументами, зависящими от искомым функций: (5.1) $\partial_{x,A}^2 u = \partial_{x,B}^2 f(u) + F(\varphi_\alpha; J_\eta)$; (5.2) $\partial_{x,A} u = \partial_{x,B}^2 f(u) + F$; (5.3) $i \partial_{x,A} \Psi = -\partial_{x,B}^2 \Psi + \Psi F(J_\eta(|\Psi|^2; k))$; (5.4) $i \partial_{x,A} \Psi = -\partial_{x,B}^2 \Psi + G \Psi$. Указанные уравнения являются соответствующими обобщенными аналогами волнового и диффузионного уравнений, а также нелинейного и линейного уравнений Шредингера (ШШ). В теории ОДУ аналогичным образом введены новые семейства уравнений, в частности, на основе соответствий типа: $(u; \text{Sin}u) \rightarrow (sn; sd; qn)$; $(u^2; \text{Cos}u) \rightarrow (cn; dn; sn^2)$. Таким способом нами введены обобщения для уравнений Матье и др.

6) ДУ Sin-Gordon является (наряду с НУ Шредингера) наиболее известным модельным уравнением математической и теоретической физики. Оно было постулировано на основе уравнений Клейна и Клейна-Гордона при использовании соответствия $u \rightarrow \text{Sin}u$. С уравнением этого типа в литературе связывают семейство 4 ДУ: " $\pm(\text{Sin}; \text{Sh})\text{Gordon}$ ": $\partial_x^2 u = \partial_x^2 u \pm (\text{Sin}u \text{ (или) } \text{Sh}u)$. Известно также аналогичное семейство 4 уравнений " $\pm(\text{Sin} \text{ (или) } \text{Sh})\text{Laplace}$ ". Следуя процедуре обобщения, связанной с получением этих ДУ, мы ввели их простейшие обобщения в виде двух следующих семейств ДУЭФ: (6.1) " $\text{Klein-Gordon Elliptic Equation}$ " $\partial_x^2 u = \partial_x^2 u \pm J_\eta(u; k)$; " $\text{Laplace-Elliptic Equation}$ " $\partial_x^2 w + \partial_x^2 w = \pm J_\eta(w; k)$. В качестве ЭФ в этих уравнениях могут быть выбраны функции $J_{\eta,1} = sd(u; k)$; $J_{\eta,2} = qn(u; k)$. При этом ЭФ $J_{\eta,1}$ в соответствии со свойством, отмеченным в п.3, генетически связывает соответствующие пары указанных уравнений.

Из полученных нами замкнутых решений для набора введенных семейств ДУЭФ наибольший интерес представляют: а) стационарное решение обобщенного нелинейного волнового уравнения Sin-Gordon: $\partial_x^2 u = \mu^2 \partial_x^2 u + qn(u; k)$; б) новые решения для линейного одномерного стационарного ДУ Шредингера с потенциалом типа $[dn(x; k)]^2$.

Работа поддержана грантами РФФИ по физике (95-02-04096-) и механике (96-01-01207-а).

**ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ
НА РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ВКЛЮЧЕНИЙ**

Санкт-Петербург, С.-Петербургский госуниверситет

В докладе рассматривается задача построения квадратурных формул оптимальных по минимуму оценки погрешности на классе функций, являющихся решениями линейных дифференциальных включений. Нормирующим ограничением класса служит оценка в $L_2(0, 1)$ значений заданного дифференциального оператора. В оценку погрешности входит также априорная оценка погрешностей значений функций указанного класса в заданной системе узлов. Строится сопряженная вариационная задача, содержащая в качестве основного ядра граничную задачу с промежуточными условиями разрывов производных сопряженной переменной. Решение сопряженной задачи предлагается проводить прямыми методами поиска экстремума [1].

В частности, для случая дифференциальных включений второго порядка разработан алгоритм последовательных приближений сопряженной переменной в классе кубических сплайнов. Получено следующее представление погрешности

$$R_N(f, k) = - \int_0^1 \psi(t) \xi(t) dt,$$

где функция $\psi(\cdot) = s_\nu(t) + \omega(t)$ — решение граничной задачи

$$L(\psi(t)) = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d\psi}{dt} \right) + q(t)\psi(t) = -\rho(t),$$

$$\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1,$$

$$\psi(t_i - 0) = \psi(t_i + 0),$$

$$\psi'(t_i + 0) - \psi'(t_i - 0) = \frac{k_i}{p(t_i)}, \quad i = \overline{1, N},$$

$s_\nu(\cdot)$ — кубический интерполяционный эрмитов сплайн дефекта 2.

Также получена общая сопряженная задача и оптимальные квадратурные формулы замкнутого типа на классе функций с ограниченной в $L_2(0, 1)$ производной произвольного заданного порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирич Н.Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб. Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1993.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СВОЙСТВОМ ЗАЦЕПЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

С. Петербург, государственный технический университет

Для динамической системы управления общего характера введено понятие спектральной характеристики. Это понятие является аналогом понятия о спектральном разложении множества неблуждающих точек для обычных динамических систем.

В настоящем докладе рассматривается класс динамических систем управления с некоторым свойством для спектральной характеристики, которое обеспечивает управляемость. Это свойство названо зацепляемостью. Свойство зацепляемости означает, что упорядоченные множества, образующие спектральное разложение, пересекаются.

В качестве приложения метода спектральной характеристики может быть исследована управляемость по части переменных (сферическая составляющая вектора состояния) в окрестности точки покоя динамической системы. В этом случае динамическую систему управления можно задать в виде

$$\dot{x} = A(u)x, \quad (1)$$

где $u \in U$ - управление (вектор размерности d), $x \in X$ - состояние (вектор размерности n), U - множество значений допустимых управлений, X - окрестность точки покоя, $A(u)$ - матрица размерности $n \times n$. Управляемость динамической системы (1) определяется свойствами матричного семейства $A = \{A(u) | u \in U\}$.

Свойство зацепляемости для динамической системы (1) может быть переформулировано в терминах свойств семейств собственных проекторов матричного семейства A .

Уравнением вида (1) можно описать также динамическую систему, рассматриваемую вблизи некоторой ее инвариантной периодической траектории. Для исследования ее управляемости также можно применить метод спектральной характеристики.

В эту же схему вкладываются динамические системы управления, имеющие инвариантные множества более общего вида.

Результаты по данной теме опубликованы в работах [1,2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khryashchev S.M. Spectral conditions of spherical controllability linear with respect to the state dynamical systems. Proceedings of the third European Control Conference, Roma, 1995, v.4, part 2, pp. 3454-3455.
- [2] Хряшев С.М. Спектральные условия управляемости динамических систем со свойством зацепляемости. - Дел. ВИНТИ 28.04.96, N. 1021-В96.

ТЕОРЕМА ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уфа, Уфимский государственный авиационный технический университет

Рассматривается кусочно-аналитическая периодическая кривая $y = l(x)$, $l(x + 2\pi) = l(x)$. Пусть при $y > l(x)$ функция u удовлетворяет уравнению

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0 \quad (1)$$

с аналитическими периодическими коэффициентами, зависящими от x, y , и красвому условию $u(x, l(x)) = 0$.

Точки (x, y) вещественной плоскости отождествляются с точками $z = x + iy$ комплексной плоскости и, аналогично, точки (ξ, η) — с точками $w = \xi + i\eta$.

Пусть $\omega_-(y) = \{(x, y_1) : -\pi < x < \pi, y < y_1 < l(x)\}$, где $y < d$,

$d = \max\{l(x)\}$. Естественное голоморфное продолжение вещественной аналитической функции l обозначается той же буквой l . Пусть

$H(w) = w + il(w)$, а w_0 — такое решение уравнения $H'(w) = 0$, что

$z_0 = H(w_0)$ имеет максимальную мнимую часть:

$y_0 = \text{Im} z_0 = \max\{y : y = \text{Im}\{H(w)\}, H'(w) = 0, y < l(x)\}$. Не теряя общности,

можно считать $y_0 \geq 0$. Предположим, что область $\Omega_-(y) = H^{-1}(\omega_-(y))$

содержит вместе с каждой своей точкой вертикальный отрезок, которым можно соединить эту точку с участком оси абсцисс, входящим в границу области $\Omega_-(y)$.

Пусть коэффициенты a, b, c, d, e, f уравнения (1) аналитически продолжаются на множество $\Omega_-(y)$. Тогда справедлива

Теорема. Функция $u(x, y)$ имеет аналитическое продолжение на множество $\omega_-(y_0)$.

Этот результат является обобщением теоремы из работы [1].

Литература

1. Чебанова Н. А. О гипотезе Релея и точной асимптотике решения задачи рассеяния на периодической поверхности. — ДАН, 1987, т. 295, № 2, с. 350-352.

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ И МАССОПЕРЕНОСА КОМПОНЕНТОВ РАСТВОРАКраснодар, Кубанский государственный технологический
университет

Исследования многообразных физико-химических, биологических, технологических процессов, сопровождаемых массообменом, требуют учета нелинейных эффектов регуляторного воздействия на кинетику изменения концентраций компонентов жидких и газовых сред. В настоящем докладе дана постановка и приведено решение задачи о конвективно-диффузионном массопереносе компонентов раствора, разделяемых полупроницаемой поверхностью (мембраны). При испарении летучего компонента, как и при фильтрации раствора через полупроницаемую мембрану, происходит рост концентрации растворенного вещества у ее поверхности (концентрационная поляризация), что приводит к возрастанию осмотического давления, уменьшающего движущую силу процесса. После этого процесс протекает под действием диффузии в обратном направлении, а затем, после сглаживания концентрационного профиля, вновь включается конвекция, усиливающая концентрационную поляризацию, и весь цикл повторяется. Таким образом, формирование концентрационного слоя на границе мембраны носит автоколебательный характер. Математическая модель описанных процессов массообмена основывается на дифференциальном уравнении конвективно-диффузионного переноса, которое дополняется начальным значением концентрации и граничным условием на полупроницаемой поверхности.

Нелинейный характер модельной задачи требует нахождения ее решения посредством итерационной процедуры. Особенности граничного условия линеаризованной задачи, решаемой на каждом временном слое, обусловили применение метода Грина, дающего устойчивые численные результаты. Получено аналитическое выражение для функции Грина указанной краевой задачи. Разработанный алгоритм численного решения краевой задачи реализован в виде комплекса программ для персональных IBM-совместимых компьютеров. Эффективность предложенного метода подтверждается результатами численных экспериментов для определения концентрационного поля и плотности потока проникающего компонента раствора (пермеата), что может быть использовано для расчетов оптимальных режимов фильтрования и решения экологических проблем.

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Санкт-Петербургский Электротехнический Университет
197376 Санкт-Петербург, Россия aa@cher.etu.spb.ru

Интерес к нелинейным полевым моделям инвариантным относительно групп Пуанкаре, в частности, связан с надеждой сопоставления пространственно локализованных решений какой-либо такой модели реально наблюдаемым элементарным частицам. А.Эйнштейн, как известно, потратил много сил на поиск единой теории поля, в которой элементарным частицам должны соответствовать пространственно локализованные решения уравнений поля. Когда в науку вошло понятие уединенной волны или солитона и были исследованы их свойства, то стало ясно, что их поведение похоже на поведение частиц. В настоящее время интерес к поиску нелинейнополевых моделей элементарных частиц не ослабевает.

При таком подходе существенным является нелинейность дифференциальных уравнений модели, поскольку в линейной теории сумма некоторых частицеподобных решений также является решением и, следовательно, отсутствует естественная возможность моделирования взаимодействия между частицами. Если предположить, что существуют решения некоторых нелинейных полевых уравнений, которые можно сопоставить элементарным частицам, то дальнейшее взаимодействие этих решений необходимо должно иметь вид электромагнитного и гравитационного взаимодействия. То есть, при дальнейшем взаимодействии солитонов этих уравнений должны получаться уравнения их траекторий соответствующие электромагнетизму и гравитации.

В работе [1] на примере электродинамики Ми была показана принципиальная возможность моделирования электромагнитного и гравитационного взаимодействий дальним взаимодействием солитонов нелинейной полевой модели в пространстве Минковского. При этом взаимодействия подобные электромагнитному и гравитационному получаются соответственно в первом и втором порядках метода возмущений. В дальнейшем [2-5] была рассмотрена модель нелинейной электродинамики типа Борна и Иффельда, для которой был получен аналогичный результат.

Дальнейшие результаты в этом направлении связаны с исследованием поведения точечных особенностей типа разрыва пространственных производных векторного потенциала в нелинейной электродинамике. Из вариационного принципа получены уравнения поля, имеющего N точечных особенностей:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \partial_0 \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \sum_{a=1}^N j^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) & -\partial_0 \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sum_{a=1}^N \mathbf{j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} j^0 &\equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\hat{\alpha}} \\ \mathbf{j} &\equiv -\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \mathbf{H} \times d\mathbf{\hat{\alpha}} \end{aligned} \right.$$

где σ – малая замкнутая поверхность, заключающая одну n -ую особенность, $d\sigma$ – ориентированный наружу элемент поверхности σ , причем $d\sigma = \eta d\sigma$, где $d\sigma$ – элемент площади поверхности, а η – внешняя единичная нормаль.

Векторы D , H и E , B связаны нелинейными соотношениями.

Получен закон сохранения тензора энергии-импульса поля с N точечными особенностями.

$$\frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = - \sum_{n=1}^N i_{\nu}^n \delta(x - \bar{x}^n),$$

где

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\rho})} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu}, \quad i_{\nu}^n \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\sigma} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\rho})} d\sigma_{\mu}^n.$$

Здесь \mathcal{L} – лагранжиан модели,

греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские – 1, 2, 3.

Из уравнений поля следует сохранение заряда единичной особенности:

$$\frac{dJ^0}{dx^0} = 0.$$

Это означает, что особенности устойчивы. Это обстоятельство делает модели с точечными особенностями перспективными с точки зрения возможности моделирования реальных частиц.

-
- [1] А.А.Черницкий. 1992. Теор. Мат. Физ., 90, 3, 380.
 - [2] А.А.Черницкий. 1993. Известия Гос. Электротехнического Университета. Выпуск 464, 21. С-Петербург, 1993.
 - [3] А.А.Chernitskii. 1995. The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM95). Hamburg, 3-7 July, 1995. Book of Abstracts, 254.
 - [4] А.А.Chernitskii. 1995. The 14th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR14). Florence (Italy), 6-12 August 1995. Abstracts of GR 14, A-96.
 - [5] А.А.Chernitskii. 1995. Основания теории гравитации и космологии. Тезисы докладов международной школы-семинара. Одесса, 4-10 сентября 1995 г., 85.

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ УСТОЙЧИВЫЙ ХАОС

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Имеется много примеров трехмерных автономных систем дифференциальных уравнений, таких что наличие у них достаточно простого инвариантного множества — гетероклинического цикла влечет существование хаотического инвариантного множества в любой окрестности гетероклинического цикла, то есть гетероклинический цикл порождает хаос. При этом хаотическое инвариантное множество сохраняется при C^1 -малых возмущениях исходной системы. Под гетероклиническим циклом будем понимать компактное инвариантное множество, состоящее из конечного числа траекторий системы и их α и ω -предельных множеств, которые являются либо гиперболическими точками покоя, либо гиперболическими замкнутыми траекториями. При этом траектории цикла γ_i , $i \in 1 : m$, можно занумеровать так, что $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1})$, $i \in 1 : m - 1$, и $\omega(\gamma_m) = \alpha(\gamma_1)$. Инвариантное множество назовем хаотическим, если в нем лежит всюду плотная траектория и всюду плотны замкнутые траектории.

В первую очередь к гетероклиническим циклам, порождающим устойчивый хаос, относятся трансверсальные гетероклинические циклы, содержащие среди предельных множеств только замкнутые гиперболические траектории, устойчивые и неустойчивые многообразия которых пересекаются трансверсально [1,2]. Устойчивый хаос порождает также цикл, состоящий из седло-фокуса и гомоклинической к нему траектории [3].

В работе [4] был введен новый тип гетероклинических циклов, порождающих устойчивый хаос. Гетероклинические циклы этого класса содержат среди предельных множеств как точки покоя так и замкнутые траектории,

при этом точки покоя имеют седловой тип, то есть собственные числа матрицы линеаризованного приближения вещественные простые и два из них отрицательны. Пара циклов такого класса присутствует в системе Лоренца при рождении странного аттрактора, поэтому такие циклы были названы циклами типа Лоренца.

Оказывается, что гетероклинические циклы Лоренцева типа будут порождать устойчивый хаос, если допустить наличие среди предельных множеств гетероклинического цикла точек покоя типа седло-фокус. Именно при некоторых условиях справедлива

Т е о р е м а. В любой окрестности гетероклинического цикла Лоренцева типа, содержащего седло-фокусы, лежит гетероклинический цикл Лоренцева типа без седло-фокусов.

Поскольку [4] гетероклинический цикл типа Лоренца без седло-фокусов порождает устойчивый хаос, то и гетероклинический цикл Лоренцева типа с седло-фокусами будет порождать устойчивый хаос.

Л и т е р а т у р а

1. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре-Биргоффа // Мат. сб. 1967. Т. 74. N 3.
2. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., Наука. 1977. 304 с.
3. Шильников Л. П. К вопросу о расширенной окрестности седло-фокуса // Мат. сб. 1970. Т. 81. N 1.
4. Чернышев В. Е. Бифуркации контуров из особых траекторий // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. I. 1992. Вып. 2 (N 8). С. 52-57.

О КАСАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ДОПУСКАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Санкт-Петербург, Российский гос.педагогический университет

Рассматриваются необходимые условия существования канонических касательных операторов вида

$$X = \left[\sum_{k=0}^n f_k(x, y) y'^k \right] \partial_y, \quad n > 0,$$

допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$y'' = \sum_{s=0}^m F_s(x, y) y'^s,$$

в частности, доказано:

- 1). При $m > 3$ $n = m + 1$, f_{m+1} — произвольная функция, и при $k > 3$

$$f_k = \frac{(m+1)f_{m+1}F_{k-1}}{kF_m}.$$

2). Если $m = 3$, то $n = 4$, f_4 — произвольная функция, а f_i , $i < 3$, являются решениями линейных уравнений (причем f_0 — линейного обыкновенного уравнения первого порядка).

3). При $m = 1$ $f_n = a_1(x)y + a_0(x)$, и каждая f_{k-1} содержит на одну произвольную функцию от x больше, чем f_k (f_0 содержит $2n$ -функциональный произвол).

4). Если $m = 0$, то $f_n = a_1(x)y + a_0(x)$, $f_{n-1} = -a_1^2 y^2 + b_1(x)y + b_0(x)$, и аналогично п.3 каждая f_{k-1} содержит на одну произвольную функцию от x больше, чем f_k (f_0 содержит $(2n+1)$ -функциональный произвол).

К ВОПРОСУ ФОРМАЛИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН

ул. Певцова, 13, 644099, Омск, Россия

Телефон: +381 - 2 - 23-65-67

E-mail: chukanov@iitam.omsk.su

В докладе представлен подход математической формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем на основе методов теории возмущений с использованием аппарата лиевых групп. Обсуждены применения этого подхода для анализа управляемости и наблюдаемости взаимодействующих систем.

В классических работах Р.Калмана [1] разработаны ранговые методы исследования линейных динамических систем, а именно исследование управляемости и наблюдаемости этих систем. Системный подход Р.Калмана основан на учете взаимного влияния компонент вектора состояния систем, которое приводит к зависимости эволюции одной из компонент вектора состояния при возмущении другой компоненты вектора состояния.

Учет нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем может привести к изменению размерности пространства управляемости и наблюдаемости гладких нелинейных динамических систем. Для учета нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем в докладе используется аппарат групп Ли [2].

Для векторов состояния гладкой нелинейной динамической системы x и дополнительной динамической системы ξ можно диаграмму морфизмов

$$\begin{array}{ccc}
 & e^{-D_t} & \\
 x_t & \xrightarrow{\quad} & \xi_t \\
 \Phi_t \uparrow & & \uparrow \Phi_t \\
 x_0 & \xrightarrow{\quad} & \xi_0 \\
 & e^{-D_t} &
 \end{array} \quad (1)$$

здесь Φ_t - неизвестная переходная матрица для гладкой нелинейной системы:

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x) \quad (2)$$

Φ_t - переходная матрица:

$$\Phi_t = e^{tA} \quad (3)$$

для линейной системы:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi \quad (4)$$

e^{-D_t} - морфизм $\xi \rightarrow x$ с инфинитезимальным генератором D_t :

$$D_t = \sum_i T_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (5)$$

и компонентами генератора $T_i(\xi)$, определяемыми по компонентам вектора $\psi(x)$ методом Кемела-Хора [3].

Выполнения условий коммутативности диаграммы (1) должно выполняться соотношение:

$$e^{-D_t} \Phi_t = \Phi_t e^{-D_t} \quad (6)$$

или

$$x_t = e^{D_t} \Phi_t e^{-D_t} x_0 \quad (7)$$

Рассмотрим взаимодействие двух гладких линейных динамических систем с векторами состояния:

$$x = \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \quad (8)$$

удовлетворяющими соотношению

$$\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \Big|_t = \begin{pmatrix} e_{I,I}^{t\alpha} & e_{I,II}^{t\alpha} \\ e_{II,I}^{t\alpha} & e_{II,II}^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \quad (9)$$

При изменении в момент времени $t = 0$ вектора состояния системы α на β , вектора состояния системы β изменится на $\beta x_{\alpha\beta}$ в момент времени t ($\alpha, \beta = I$ или II):

$$\beta x_{\alpha\beta} = e_{\alpha,\beta}^{t\alpha} \beta x_{\alpha\beta} \quad (10)$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{t\alpha} = \sum_{i=2,0}^{\infty} \frac{(tA_{\alpha,\beta})^{(i)}}{i!} \quad (11)$$

Для $A_{\alpha,\beta}^{(i)}$ получим рекуррентные соотношения:

$$A_{I,I}^{(i)} = A_{I,I} A_{I,I}^{(i-1)} + A_{I,II} A_{II,I}^{(i-1)}$$

$$A_{I,II}^{(i)} = A_{I,I} A_{I,II}^{(i-1)} + A_{I,II} A_{II,II}^{(i-1)}$$

$$A_{II,I}^{(i)} = A_{II,I} A_{I,I}^{(i-1)} + A_{II,II} A_{II,I}^{(i-1)}$$

$$A_{II,II}^{(i)} = A_{II,I} A_{I,II}^{(i-1)} + A_{II,II} A_{II,II}^{(i-1)}$$

Для случая взаимодействия гладких нелинейных динамических систем:

$$x_t = e^{D_t} \Phi_t e^{-D_t} x_0 = e^{D_t} e^{tA} e^{-D_t} x_0 \quad (12)$$

где

$$e^{D_t} \Phi_t e^{-D_t} = \begin{pmatrix} \Phi_{I,I} & \Phi_{I,II} \\ \Phi_{II,I} & \Phi_{II,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & D_t \\ e_{I,I}^{tD_t} & e_{I,II}^{tD_t} \\ D_t & D_t \\ e_{II,I}^{tD_t} & e_{II,II}^{tD_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{I,I}^{tA} & e_{I,II}^{tA} \\ e_{II,I}^{tA} & e_{II,II}^{tA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_t & -D_t \\ e_{I,I}^{tD_t} & e_{I,II}^{tD_t} \\ -D_t & -D_t \\ e_{II,I}^{tD_t} & e_{II,II}^{tD_t} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$e^{D_1 t} = \sum_{i=2^0}^{\infty} \frac{(D_1 t)^i}{i!} \quad (14)$$

и

$$D_1 = \begin{pmatrix} T_{11} \frac{\partial}{\partial t} & T_{12} \frac{\partial}{\partial t} \\ T_{21} \frac{\partial}{\partial t} & T_{22} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11,1} & D_{11,11} \\ D_{11,11} & D_{11,11} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$D_1^2 = \begin{pmatrix} D_{11,1} D_{11,1} + D_{11,11} D_{11,1} & D_{11,1} D_{11,11} + D_{11,11} D_{11,11} \\ D_{11,11} D_{11,1} + D_{11,11} D_{11,1} & D_{11,11} D_{11,11} + D_{11,11} D_{11,11} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$D_1^i = \begin{pmatrix} D_{11,1} D_{11,1}^{i-1} + D_{11,11} D_{11,1}^{i-1} & D_{11,1} D_{11,11}^{i-1} + D_{11,11} D_{11,11}^{i-1} \\ D_{11,11} D_{11,1}^{i-1} + D_{11,11} D_{11,1}^{i-1} & D_{11,11} D_{11,11}^{i-1} + D_{11,11} D_{11,11}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Исследуя ранги матриц $\mathbb{W}_{\alpha, \beta}$, можно установить структуру взаимодействия динамических систем.

Список литературы

- [1] Д'Анжело Г. (D'Angelo H.). Лине́йные системы с переменными параметрами. - М.: Машиностроение, 1974, 288с.
Kalman R.. On the General Theory of Control Systems, Proceedings First International Congress of the International Federation of Automatic Control, ButterWorth, London, 1961, pp.481-492.
- [2] Постминов М.М.. Лекции по геометрии. Группы в алгебре Ли. - М.: Наука, 1982, 448с.
Уорнер Ф. (Warner F.W.). Основы теории гладких многообразий. - М.: МИР, 1987, 304с.
- [3] Воти Г.. Theory of general perturbations for noncanonical systems. - J. Japan. Astron. Soc., 1971, vol. 23, p. 567-587.
Джакалья Г.Е.О. (Gicaglia G.E.O.). Методы теории возмущений для нелинейных систем. - М.: Наука, 1979, 320с.
Kamel A.A.. Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations. Celest. Mech., 1970, vol. 3, N 1, p. 90-106.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается класс периодических систем

$$\dot{x} = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \quad F(x, t + \omega) = F(x, t), \quad (1)$$

близких к однородной системе

$$\dot{x} = P(x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad P(\lambda x) = \lambda^m P(x) \quad (m > 1) \quad (2)$$

с простыми исключительными множествами.

Последнее означает, что

$$\varphi' = P(\varphi) - \langle \varphi, P(\varphi) \rangle, \quad \varphi \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = 1\} \quad (3)$$

является системой Морса-Смейла на S^{n-1} и для каждой неблуждающей траектории $\xi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ системы (3) число

$$\nu(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \xi(\tau), P(\xi(\tau)) \rangle d\tau \quad (4)$$

отлично от нуля.

Близость системы (1) к (2) определяется неравенством

$$\|F(x, t) - P(x)\| \leq \|x\| M(\|x\|), \quad (5)$$

где $M(\tau)$, $\tau \in [r_0, +\infty)$ — заданная неотрицательная непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$.

В работе [1] было введено понятие *особого периодического решения* (о.п.р.) системы (1) и было показано, что из существования о.п.р. у (1) необходимо следует, что система (3) имеет неблуждающие траектории ξ_1 и ξ_2 , обладающие свойством

$$\nu(\xi_1) > 0, \quad \nu(\xi_2) < 0, \quad W^u(\xi_1) \cap W^s(\xi_2) \neq \emptyset. \quad (6)$$

В некотором смысле это свойство является и достаточным.

Т е о р е м а. Если система (3) имеет неблуждающие траектории ξ_1 и ξ_2 , обладающие свойством (6), то существует система вида (1), обладающая о.п.р. При этом функция M из (5) может быть выбрана произвольной, а период ω системы (1) должен быть достаточно большим.

Л и т е р а т у р а

1. Чуриш Ю. В. Об исчезновении периодических решений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. N 4. С. 678-686.

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Москва

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ломоносова

В задаче высокочастотной дифракции рассматривается параболическая аппроксимация дифференциальных уравнений, предложенная впервые В.А. Фоком.

Дифференциальные уравнения кроме дифракционных задач нашли эффективное применение в теории открытых резонаторов в теории голографии. В предложенной работе проводится исследование собственных функций и разложений по ним в рамках P -адической метрики. Это позволило получить новый класс решений, расширения спектра, избежать трудности, связанные с расходимостью. Решения, полученные в P -адических метриках в некоторых случаях имеют солитонно-образный вид.

Работа имеет своей целью применение в области нестационарной теории голографии. Построение P -адические решения, описывающие имеют физический смысл, устанавливаемый с помощью формулы

$$\exp 2\pi i (k^2 t - kx) = \prod_p \chi_p (k^2 t - kx)$$

Это разложение соответствует тому факту, что простые плоские волны описывающие голографический эффект могут быть разложены в произведение P -адических плоских волн.

Рассмотрена задача для плоских резонаторов, ограниченных 2-мя конечными пластинками. Метод допускает обобщения на искривленные зеркала.

УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет

Моделирование большинства низкотемпературных плазменных процессов (НПП) с распределенными параметрами сводится к решению системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений (СВДУ) в частных производных типа:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho V \varphi) = \text{div}(\Gamma \text{grad} \varphi) + S \quad (1)$$

Где φ - некоторая обобщенная независимая переменная, ρ - плотность, V - вектор скорости движения, Γ - диффузионный коэффициент, t - время. Сугобнелинейность, жесткость и плохо обусловленность задачи делают решение СВДУ (1) крайне неустойчиво. В рамках данной статьи анализируется причина нарушения устойчивости при решении (1) и предлагает способ ее устранения.

В обобщенное дифференциальное уравнение (1) входят четыре члена: - нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый. Известно, что для многомерных систем дифференциальных уравнений типа (1) практически невозможно получить решение прямым, а только итерационным методом, а вычислительный процесс при моделировании построен на последовательном решении каждого уравнения из СВДУ типа (1). Дискретный аналог для решения системы (1) можно получить путем интегрирования (1) по элементарному контрольному объему с использованием концепций сеточного числа Пекле и вычислительной схемы на подобие экспоненциальной схемы.

При моделировании НПП источниковый член (ИЧ) S обычно намного больше, чем конвективный и диффузионный члены и является нелинейной функцией от φ . Так как вид этой функциональной зависимости заранее неизвестен поэтому в ряде случаев при получении дискретного аналога для решения СВДУ (1) ИЧ предполагается постоянной внутри каждой итерации. При сильной зависимости ИЧ от φ , а это характерно для НПП с распределенными параметрами, такое грубо неточное предположение делает изменение решения какого нибудь дифференциального уравнения типа (1) после каждой итерации настолько большим, что решения следующих дифференциальных уравнений, которые используют решение данного дифференциального уравнения как входные параметры, не смогут компенсировать этого изменения и вызывают последовательно резкое изменение

своих решений. В итерационном смысле этот процесс ведет к расходимости и нарушению устойчивости СВДУ (1) в целом. Поэтому общее требование и подход к обеспечению устойчивости решения задачи состоит в том, что решение каждого дифференциального уравнения типа (1) не должно сильно изменяться от итерации к итерации. Этого можно достигнуть если аппроксимировать ИЧ как линейную функцию от φ в виде:

$$S = S_c + S_p \varphi \quad (2)$$

Где коэффициенты S_c и S_p зависят от точки координат и от самой переменной φ и изменяются от итерации к итерации, причем для удовлетворения условия сходимости вычислительной схемы при решении уравнения (1) требуется, чтобы S_p был отрицательным. Это условие является естественным, так как если $S_p > 0$, то любое изменение φ внутри процесса вычисления данной итерации способно вызвать увеличение или уменьшение ИЧ, который в свою очередь вызывает еще большее изменение φ в ту или иную сторону. Так процесс может продолжаться до чрезмерного значения φ , что физически не соответствует действительности (Предполагается, что ИЧ при данных начальных и граничных условиях реально однозначно и устойчиво существуют).

Путем линеаризации ИЧ и через выбор соответствующих коэффициентов S_c и S_p мы сможем управлять изменением решения СВДУ типа (1), замедлить, и даже при желании ускорить скорость изменения последней от итерации к итерации. При возможности регулирования коэффициентов S_c и S_p можно добиться устойчивого решения СВДУ (1) при любой ее нелинейности и жесткости.

Коэффициенты S_p и S_c данной итерации определяются следующим образом: Если φ^* и S^* есть решения, полученные в предыдущей итерации, то:

$$S_p = -\frac{S^*}{\alpha \varphi^*}, \quad S_c = \frac{(1+\alpha)}{\alpha} S^* \quad (3)$$

Где коэффициент α играет роль некоторого глобального коэффициента обратной связи при решении данного дифференциального уравнения (1) и подлежит регулированию в зависимости от конкретного случая. Можно выбрать α так, чтобы изменение в каждой итерации не превышало некоторого предельного значения, полученного на основе предварительного анализа возможных приращений для.

Этот алгоритм линеаризации ИЧ обеспечивает логичного приращения для переменных с большими и малыми абсолютными значениями но имеет некоторый недостаток: В случае, когда абсолютное значение переменных внутри итерационной

процедуры слишком маленькое при достаточно большом ИЧ то изменение переменных может быть чрезвычайно медленным и приводит к медленной сходимости общего решения СВДУ (1). В частности когда $\varphi = 0$ этот алгоритм не работает а при предположении $S_p = 0$ и $S_c = S$ достаточно в ряде случаев приводит к расходимости решения (1). Поэтому можно организовать линейризацию ИЧ (или со сочетанием) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_p &= \left| \frac{S^*}{\Delta\varphi} \right| \\ S_c &= S^* - S_p \Delta\varphi^* \end{aligned} \quad (4)$$

Этот алгоритм линейризации ИЧ не использует абсолютное значение переменных φ а заданное приращение $\Delta\varphi^*$, но нельзя использовать его при решении тех дифференциальных уравнений (например уравнения ионизационного равновесия), где переменная φ может принимать широкий диапазон значений. Кроме того в некоторых случаях ИЧ можно представить в явном виде функцией от φ во виде (2) с некоторым коэффициентом регулирования βS_p , ($\beta > 1$), а при $S = 0$ тоже можно искусственно разложить его в виде (2) с использованием изложенных алгоритмов линейризации ИЧ.

Возможность произвольного выбора коэффициентов α , β , $\Delta\varphi^*$ должна обеспечить медленное изменение решения системы (1) от итерации к итерации и тем самым способно обеспечить ее устойчивого решения а представление ИЧ в виде линейной функции от φ на самом деле определяет способ организации контура глобальной обратной связи вычислительного процесса при решении СВДУ (1).

Отметим, что представление ИЧ в виде (2) является приближенным, ибо в итерационном процессе нет смысла нахождения точной зависимости ИЧ от φ . Организация вычислительного процесса итераций подобным образом не оказывает влияния на конечное решение системы (1) а лишь управляет изменением φ в течение итераций в разумном пределе и избегает быстрых изменений решения и появления физически неправдоподобных значений.

Оптимальное отслеживание гармонических сигналов в линейных системах

математико-механический факультет СПбГУ, Санкт-Петербург

В настоящей работе задача построения отслеживающей системы рассматривается в форме специальной линейно-квадратичной оптимизационной задачи. Предполагается, что объект управления имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) + f^0\phi_1(t), \quad (1)$$

$$y(t) = c_1^*x(t) + g^0\phi_2(t), \quad (2)$$

$$z(t) = c_2^*x(t) + d_2^*u(t), \quad (3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^{k_1}$, $z(t) \in \mathbb{R}^{k_2}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $\phi_1(t) \in \mathbb{R}^{l_1}$, $\phi_2(t) \in \mathbb{R}^{l_2}$; $A, b, f^0, g^0, c_1, c_2, d_2$ – постоянные матрицы подходящих размерностей, при этом пара $(A; b)$ – стабилизируема, а пара (c_1, A) – детектируема. Предполагается, что внешние возмущения $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и отслеживаемый сигнал $z^0(t)$ являются гармоническими функциями

$$z^0(t) = \sum_{j=1}^{N_0} z_j e^{i\omega_j^{(0)}t}, \quad \phi_1(t) = \sum_{j=1}^{N_1} \phi_j^{(1)} e^{i\omega_j^{(1)}t}, \quad \phi_2(t) = \sum_{j=1}^{N_2} \phi_j^{(2)} e^{i\omega_j^{(2)}t} \quad (4)$$

причем комплексные векторные амплитуды $\{z_j\}$, $\{\phi_j^{(1)}\}$, $\{\phi_j^{(2)}\}$ неизвестны, в то время как спектры $\Omega_0 = \{\omega_j^{(0)}\}$, $\Omega_1 = \{\omega_j^{(1)}\}$, $\Omega_2 = \{\omega_j^{(2)}\}$ известны и фиксированы. Опишем множество \mathcal{D} допустимых процессов $(x(\cdot), u(\cdot))$. Произвольный процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть допустимым, если он удовлетворяет (1) и условию 'устойчивости'

$$t^{-1}|x(t)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Произвольный неупреждающий регулятор с входами y, z^0 и выходом u назовем допустимым, если он удовлетворяет условию 'устойчивости' замкнутой системы в форме (5). В частности предполагается, что допустимыми могут быть также и нелинейные регуляторы. Пусть \mathcal{N} – множество допустимых регуляторов. Наряду с множеством \mathcal{N} рассмотрим

множество \mathcal{L} линейных регуляторов вида

$$\alpha(p)u = \beta_1(p)y + \beta_2(p)z^0, \quad (p = \frac{d}{dt}), \quad (6)$$

где $\alpha(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$ — $m \times m$, $m \times k_1$, $m \times k_2$ матричные полиномы (м.п.).

Будем называть допустимый регулятор оптимальным, если при любых $\{\phi_j^{(1)}\}$, $\{\phi_j^{(2)}\}$, $\{z_j\}$ он доставляет минимум функционала качества

$$\Phi(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |z(t) - z^0(t)|^2 dt, \quad (7)$$

где $z(t)$ — выход (3) и минимум берется по множеству \mathcal{D} . Назовем оптимальный регулятор 'универсальным', если он не зависит от $\{\phi_j^{(1)}\}$, $\{\phi_j^{(2)}\}$, $\{z_j\}$ и, тем самым, одновременно решает континуум задач оптимизации с разными $\{\phi_j^{(1)}\}$, $\{\phi_j^{(2)}\}$, $\{z_j\}$.

Задача определения условий существования универсального оптимального регулятора (1)–(7) в важных частных случаях была рассмотрена и решена в [1, 2]. В частности, в [1] было показано, что при некоторых естественных предположениях в задаче (1)–(7) в классе \mathcal{N} всегда существует линейный универсальный оптимальный регулятор по состоянию.

В работе показано, что при тех же предположениях и при условии

$$k_1 \geq l_1 + l_2, \text{ если } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset \text{ или } k_1 \geq \max\{l_1, l_2\}, \text{ если } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (8)$$

в задаче (1)–(7) в классе \mathcal{N} существует оптимальный 'универсальный' регулятор, что этот регулятор линеен и определяется достаточно простыми формулами. Также показано, что при нарушении указанных условий оптимального 'универсального' регулятора в классе \mathcal{L} , как правило, не существует.

Литература

[1] Якубович В.А. // ДАН. 1994. Т.337. №4. С.463-466.

[2] Якубович В.А. // ДАН. 1994. Т.337. №3. С.323-327.

ИМПУЛЬСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрен вопрос построения управляющих, обеспечивающих за ограниченное время требуемую точность выполнения системой иерархической структуры программного (желаемого) движения. Под системой иерархической структуры понимается квазилинейная управляемая динамическая система вида:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)\left\{\sum_{j=1}^l [C_{i,j}(t) + P_{i,j}(t, x)]u_j + [E_i + P_i(t, x)]C_{i,i}(t)x_{i+1} + \Psi_i(t, x, p)\right\}. \quad (1)$$

где x_i - n -мерный подвектор вектора фазовых переменных x , x_{i+1} - n - управление; $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_{i,j}(t)$ - известные ограниченные матрицы размерностей $n_i \times n_i$, $n_i \times n_i$, $n_i \times n_i$; E_i - единичная матрица порядка n_i ; $P_{i,j}(t, x)$, $P_i(t, x)$ - матрицы погрешностей; $\Psi_i(t, x, p)$ - векторы нелинейностей; t - время, p - вектор погрешностей; $\sum_{i=1}^l n_i = n$. Предполагается, что подсистемы

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u_i$$

являются стабилизируемыми, а именно управлениями вида $u_i = M_i(t)x_i$ с вещественной непрерывной и ограниченной матрицей могут быть сделаны экспоненциально устойчивыми за счет надлежащего выбора матриц $M_i(t)$.

Разработанная методика достаточно универсальна и позволяет указывать управления дискретные по уровню и времени, в частности, импульсные стабилизирующие управления, использующие информацию об интегральном отклонении конструируемого управления от другого стабилизирующего, выбранного за базовое.

Синтез стабилизирующих управлений осуществляется с помощью метода функций Ляпунова. Функции Ляпунова строятся по методике, описанной в работе [1]. Ключевым моментом, позволившим решить вопрос об упомянутых импульсных стабилизирующих управлениях, явилось построение удачных мажорант для используемых функций Ляпунова на решениях исследуемых систем. В результате строятся многопараметрические семейства стабилизирующих управлений с практически свободными параметрами, которые решают задачу обеспечения требуемой точности выполнения системой программного движения при наперед заданных - и не обязательно малых - диапазонах во возможных значениях погрешностей.

Аналогичные результаты, но на основе других - специальным образом подобранных - функций Ляпунова, получены (см. [2]) и для также широко используемых линейных по управлению динамических систем (в том числе иерархических): - систем уравнений Эйлера-Пуассона, используемых для описания вращательного движения твердого тела, управляемого приложенным к нему моментом сил и/или маховиками и силовыми гироскопами. - систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, используемых, как и системы (1), для описания электромеханических систем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е.Я.Смирнов. Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981. -200 с.
- [2] Е.Я.Смирнов, В.Ю.Павликов, П.П.Щербаков, А.В.Юрков. Управление движением механических систем. Л., 1985. -316 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ
- СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Г. Долгопрудный, Московский физико-технический институт

Системе обыкновенных дифференциальных уравнений соответствует однопараметрическая группа сдвигов вдоль решений системы и множество преобразований симметрии, которое нельзя вместить ни в какую конечнопараметрическую группу. Для системы с управлением "в общем положении" типична обратная картина: множество сдвигов вдоль решений выходит за рамки любой конечнопараметрической группы, единственное преобразование симметрии по состоянию - тождественное. Вводится класс групповых систем, у которых совокупность сдвигов вдоль решений - конечнопараметрическая группа, но группа симметрий в норме - тривиальна. Показывается, что редукцией - уменьшением размерности - или "антиредукцией" - добавлением уравнений - групповой системе можно адекватно сопоставить систему (L-систему) у которой обе группы - сдвигов и симметрий - конечномерны с совпадающим количеством параметров, и это количество равно размерности пространства состояний, т.е. обе группы просто транзитивны. Уравнения L-систем с точностью до преобразования переменных состояния определяются набором чисел - структурными постоянными двух вышеупомянутых групп. Уравнения групп являют собой конечную связь "вход-выход", эквивалентную дифференциальным уравнениям L-системы, что дает возможность нетрадиционно отнестись к вопросу о фундаментальных системах решений. Совпадающая алгебраическая структура групп сдвигов и симметрий - подгруппы, нормальные делители и т.д. - позволяет целенаправленно строить замены переменных, декомпозирующие L-систему. Управляющие параметры у L-систем приобретают алгебраический характер: каждому конкретному управлению соответствует элемент алгебры Ли, сопутствующей группам сдвигов и симметрий. В этом смысле понимается высказывание: множество значений для допустимых управлений принадлежит подалгебре и т.д. Изучен, в частности, в зависимости от расположения в алгебре Ли множества допустимых управлений вопрос о наличии у L-системы первых интегралов.

НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТУ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТЕЛ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ.

г. Санкт-Петербург, СПГЭТУ

При переходе зависимости между напряжениями и деформациями в нагружаемом теле за предел пропорциональности задача по его расчету становится нелинейной. При этом возможно принятие двух моделей поведения материала. В модели нелинейно-упругого тела соотношения между напряжениями и деформациями предполагают, что деформации в точках тела однозначно определяются напряженным состоянием в этих точках независимо от того, в какой последовательности получено это напряженное состояние. В отличие от этого модель пластического деформирования допускает появление необратимых деформаций, которые существенным образом зависят от истории нагружения. Обе модели представляют интерес для исследования, однако модель пластического деформирования привлекает повышенное внимание, так как отражает свойства важных конструкционных материалов. В теории пластичности получила распространение теория малых упруго-пластических деформаций, позволяющая за счет некоторых допущений создать приемлемые модели. Ограничения на применение этой теории связаны с характером нагружения, которое должно быть простым. Была доказана теорема о простом нагружении для статических задач [1], которая включает следующие условия ее применимости: 1. Все внешние силы должны возрастать пропорционально одному параметру (в качестве которого может быть взято и время); 2. Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций соответствующих тензоров должна подчиняться степенному закону, а материал должен быть принят несжимаемым.

В случае динамического воздействия наряду с задаваемыми внешними силами появляются силы инерции, которые, вообще говоря, не удовлетворяют условиям простого нагружения. Тем не менее имеются исключения. Они относятся к решениям автомодельных задач, представляющих один из классов инвариантных решений дифференциальных уравнений [2]. Решение автомодельных задач весьма эффективно, так как они позволяют свести решение уравнений в частных производных к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Если решение зависит от пространственной координаты x и времени t , то получающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения зависят от одной переменной ξ , являющейся комбинацией координаты и времени

$$\xi = x/bt^{\beta}, \quad (1)$$

где β - некоторый показатель степени; b - постоянная, часто подбираемая из соображений размерности. Автомодельные решения успешно строятся для модели нелинейно-упругого тела. При этом используются условия 2. теоремы о простом нагружении. Однако условие 1., которому должны подчиняться все силы, в том числе и силы инерции, для сил инерции, вообще говоря, не выполняется, т.е. решение нельзя перенести на модель пластического тела. Лишь в частном случае, когда показатель $\beta = 0$, т.е. $\xi = x/b$, условие 1. для сил инерции выполняется.

Обозначим через u_k ($k = 1, 2, 3$) искомые компоненты перемещения частиц тела в направлениях координатных осей, которым присвоим индексы 1,2,3. В автомодельном решении перемещения представляются в виде

$$u_k = t^\alpha u_k^*(\xi) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где α - показатель степени, определяемый в процессе решения задачи; $u_k^*(\xi)$ - функция, зависящая от (1). Если решение зависит от нескольких пространственных координат x_i ($i = 1, 2, 3$), то следует предполагать зависимость $u_k^*(\xi)$ от нескольких переменных ξ в (2). Сила инерции, действующая на элемент тела единичного объема, равна $J_k = -\rho(\partial^2 u_k / \partial t^2)$ ($k = 1, 2, 3$), где ρ - плотность материала. Подставляя сюда (2) с учетом (1) для значения $\beta = 0$ получаем $J_k = -\rho t^{\alpha-2}(\alpha-1)\alpha u_k^*(x/b)$, т.е. силы инерции пропорциональны $t^{\alpha-2}$. Используя условия равновесия элемента тела с учетом массовых сил и сил инерции, а также условия для напряжений на поверхности тела и зависимости между напряжениями и деформациями, можно убедиться, что массовые и поверхностные силы также должны изменяться пропорционально $t^{\alpha-2}$. Таким образом, если внешние воздействия будут нарастать пропорционально этой величине, задача будет удовлетворять всем условиям простого нагружения, и ее результаты могут моделировать процесс пластического деформирования. Подобный подход был использован для исследования динамических деформаций балок, круглых пластин и стержней [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Пластичность.-М.; Л.: Гостехтеориздат. 1948.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука. 1978.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука. 1987.
4. Ястребов В.П. Вырожденные автомодельные решения в динамических задачах о расчете деформаций в нелинейно-упругих телах// ПМТФ. - 1988. - №1. - с.152-155.
5. Ястребов В.П. Автомодельные задачи динамического осесимметричного изгиба нелинейно-упругих пластин// ПМТФ. - 1989. - №5. - с.128-135.

АНАЛИЗ ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ И ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

СПбГТУ, С.-Петербург.

Методы термоактивационной спектроскопии диэлектриков, в особенности, измерения токов термостимулированной поляризации (ТСП) и деполяризации (ТСД) заслуженно пользуются популярностью у исследователей [1]. Для выяснения природы максимумов тока ТСП, ТСД необходимо моделирование этих максимумов на ЭВМ с использованием различных физических предположений о характере релаксации заряда или электретной разности потенциалов U_3 в диэлектриках.

Простейшее предположение об экспоненциальном спаде U_3 со временем при $T = \text{const}$ и экспоненциальной зависимости времени релаксации от температуры приводит к аналитическому выражению вида:

$$\frac{dI_{ТСП}}{dt} = \exp\left[\frac{W}{K}\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T}\right)\right] \exp\left\{-\frac{W}{K T_m^2}\right\} \int_{T_m}^T \exp\left[\frac{W}{K}\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T}\right)\right] dT. \quad (1)$$

Автором разработана программа для сверки на ЭВМ с этим выражением экспериментальных данных. При этом уделялось особое внимание точности вычисления интегралов, находящихся в показателях экспонент. Однако, не все экспериментальные данные удается согласовать с выражением (1). В связи с этим разработана серия программ для расчета максимумов тока ТСД на основе различных предположений о релаксации заряда в диэлектрике, сводящихся к решению систем дифференциальных уравнений с зависящим от температуры (следовательно, и от времени) коэффициентом ν :

$$\nu = \exp\left[\frac{W}{K}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_s}\right)\right]; T_s \geq T_m. \quad (2)$$

Эти системы состоят из уравнения полного тока, уравнения Пуассона, уравнения непрерывности с соответствующими граничными условиями. В частности, разработана методика расчета на ЭВМ максимумов тока ТСД для модели двух симметрично расположенных заряженных областей в диэлектрике, образованных носителями заряда разных знаков с подвижностями $\pm \mu$.

Еще одной интересной проблемой является расчет токов ТСП, ТСД для модели трехслойного (двухкомпонентного) диэлектрика с различными значениями удельной проводимости, т.е. времен релаксации сло-

ев τ_1, τ_2 . Для случая $U = 0$ задача решается аналитически [2]:

$$j_{\text{сд}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 U_3(0)}{h_2 (\epsilon_1 h_2 + \epsilon_2 h_1)} \left(\frac{\epsilon_2 h_1}{\tau_1} - \frac{\epsilon_1 h_2}{\tau_2} \right) \exp\left[-\int_0^t \frac{dt}{\tau_1}\right] \exp\left[-\int_0^t \frac{dt}{\tau_2}\right]. \quad (3)$$

Однако, при $U \neq 0$ аналитического решения не существует, необходимо численно решать дифференциальное уравнение:

$$\frac{dU_3}{dt} = -\frac{U_3 - U}{\tau_1} - \frac{U_3 + \frac{\epsilon_1 h_2}{\epsilon_2 h_1} U}{\tau_2}, \quad (4)$$

подставляя полученную зависимость $U_3(t)$ в соответствующее выражение для плотности тока. Разработанная нами программа позволяет производить такие расчеты численным методом с использованием ЭВМ. На рис. 1 в качестве примера приведено сопоставление экспериментальных результатов для пленки полипропилена, заряженной в сильном электрическом поле, с результатами расчетов по формуле (1) и для модели двух заряженных областей, а на рис. 2 сопоставлены результаты расчета для трехслойной модели диэлектрика при $U = 0$ по формуле (3) и на основе решения уравнения (4) численными методами.

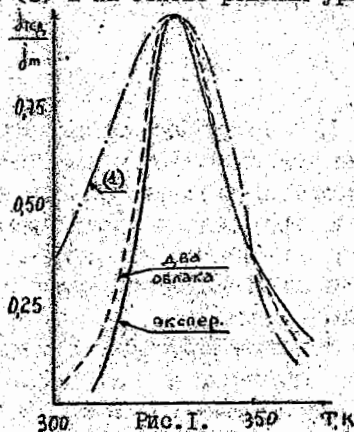


Рис. 1.

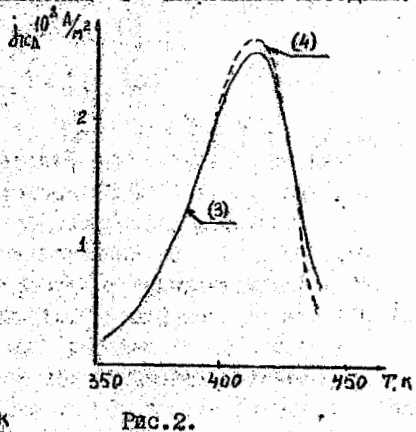


Рис. 2.

Литература.

1. Горюховатский Ю.А., Бордовский Г.А. Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков. Наука, 1991
2. Борисова М.Э., Койков С.Н. Электретный эффект в диэлектриках. - Известия вузов. Физика. - 1979. - № 1. - С. 74-89.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИЭЛЕКТРОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ
СПОТТУ, С.-Петербург

Приэлектродная поляризация в диэлектриках, обусловленная блокирующим характером контакта диэлектрика с электродами, является причиной образования гетерозаряда в электретах, появления динамических вольтамперных характеристик и реверсионных токов с максимумами [1]. Для диэлектрика с одним типом подвижных носителей и с равномерно распределенным фиксированным зарядом противоположного знака исходная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями может быть записана в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} j &= j_{np} + \frac{\partial E}{\partial t}; \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \rho - \rho_0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (j_{np}); \\ \int_0^1 E dx &= -U; \\ j_{np}^0 &= j_{np}^1 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $j_{np} = \rho E - \frac{1}{b} \frac{\partial \rho}{\partial x}$; $b = \frac{e|U_p|}{kT}$; U_p - напряжение поляризации.

Следует отметить, что решение этой проблемы при значении коэффициента $b \approx 100-5000$, соответствующего напряжениям до 100 В и выше, сопряжено с существенными затруднениями в связи с резкой зависимостью ρ , E от координаты x . Эти трудности удалось преодолеть с использованием результатов аналитического решения системы (1) для стационарного состояния, когда $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

На основе этого решения были получены аналитически выражения для распределения напряженности E , потенциала φ электрического поля и плотности заряда ρ по слою диэлектрика, а также значение минимума напряженности поля E_m , положение точки минимума x_m и плотности заряда ρ_0 при выбранных исходных значениях расчетных параметров b , c . В качестве примера на рис.1 приведены распределения $E(x)$, $\varphi(x)$, $\rho(x)$ при $b = 100$, полученные путем расчета на ЭВМ по программе, обеспечивающей удовлетворительную точность. Формулы аналитического решения для стационарного случая приведены в [2].

Численное решение системы уравнений (1) для расчета токов за-

рядки при $U = U_p$, токов разрядки при $U = 0$, реверсионных токов при $U = -U_p$ и динамических вольтамперных характеристик при $U = -\beta \cdot t$ дает удовлетворительные результаты только в случае, если использовать значения ρ_0, α_m , полученные из решения стационарной задачи для выбранных параметров b, c . Далее необходимо сразу же делить толщину диэлектрика на две или даже три части ($0 < x < x_m, x_m < x < 1-x_m, 1-x_m < x < 1$) и уже затем каждую из этих частей разбивать на ns, nm, nk слоев, тщательно согласуя в программе решения на границах этих частей диэлектрика. В таком случае удается, например, добиться достаточно удовлетворительного соответствия распределений напряженности электрического поля по координате $E(x)$, рассчитанных для стационарного случая по аналитическим выражениям и на основе численного решения системы (I), как показано на рис.2. Такое соответствие позволяет надеяться на успешный анализ процессов зарядки и разрядки, динамических вольтамперных характеристик и реверсионных токов на базе предложенного метода расчета.

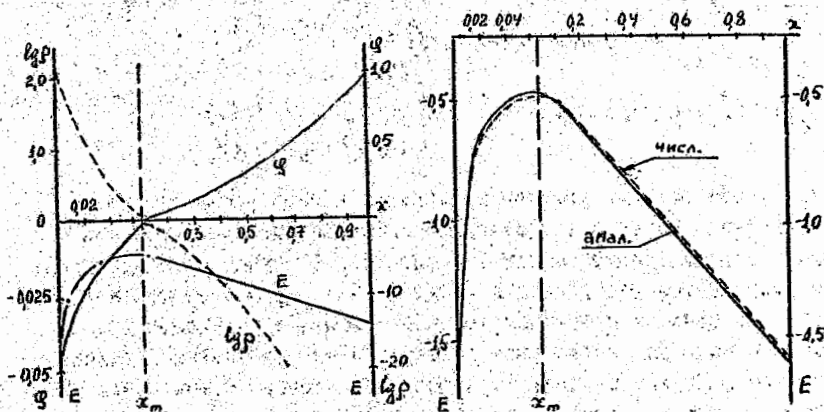


Рис. 1

Рис. 2.

Литература.

1. Борисова М.Э., Галюков О.В., Койков С.Н. Нелинейные эффекты нестационарного электропереноса в диэлектриках. - Электротехника, 1991, 8.
2. Койков С.Н., Ульянова В.Г. Применение ЭВМ для решения задач электроизоляционной техники и электрофизики диэлектриков. СПбГТУ, 1995.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОПОЛЯРНОЙ И БИПОЛЯРНОЙ ИНЖЕКЦИИ
В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

СПОГТУ, С.-Петербург

Зависимость тока монополярной и биполярной (двойной) инжекции от времени, распределение инжектированных носителей заряда по толщине слоя диэлектрика могут быть проанализированы на основе решения следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями (записанных в безразмерном виде, в бездиффузионном приближении для одномерного и, - в случае биполярной инжекции, - симметричного случая) :

$$\begin{aligned}
 & \text{монополярная инжекция} \\
 j &= \rho E + \frac{\partial E}{\partial t}; \\
 \frac{\partial E}{\partial x} &= \rho; \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho E); \quad (1) \\
 \int_0^l E dx &= 1; \\
 j_0 &= a E_0^2 \exp(-\ell/E_0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{биполярная инжекция} \\
 j &= (n + p) E + \frac{\partial E}{\partial t}; \\
 \frac{\partial E}{\partial x} &= p - n; \\
 \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho E) - \frac{p-n}{t_2}; \\
 \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}(nE) - \frac{p-n}{t_2}; \quad (2) \\
 \int_0^l E dx &= 1; \\
 j_0 &= a E_0^2 \exp(-\ell/E_0); \\
 j_1 &= a E_1^2 \exp(-\ell/E_1).
 \end{aligned}$$

Как видно, эти системы уравнений включают в себя уравнение полного тока, уравнение Пуассона, уравнения непрерывности для плотности объемного заряда инжектированных носителей. В случае биполярной инжекции учитывается рекомбинация электронов и дырок с временем рекомбинации t_r . Одно из граничных условий связывает распределение напряженности поля по диэлектрику с безразмерной разностью потенциалов, другое (или другие два) характеризуют плотность тока инжекции у электрода, определяемую в сильных электрических полях формулой Фаулера-Нордгейма.

Численное решение системы уравнений (1) возможно методом характеристик, т.е. методом с подвижными границами слоев, облаков заряда, сохраняющими неизменный заряд q_1 в процессе движения по слою диэлектрика. В этом случае для решения задачи достаточно использовать уравнение Пуассона для расчета значений напряженности поля E_1 на границах слоев и обычное дифференциальное уравнение $\frac{dx_1}{dt} = E_1$, определяющее скорость движения границ слоев.

В программе для расчета характеристик монополярной инжекции учтены, естественно, как образование новых слоев (облаков) заряда за счет инжекции, так и постепенный выход части носителей заряда на противоположный электрод за каждый интервал времени dt .

Численное решение системы уравнений (2) возможно только с использованием стандартного метода - деления всей толщины диэлектрика на N равных слоев с неподвижными границами, т.к. носители заряда, - электроны и дырки, - движутся в противоположных направлениях. Это вносит дополнительную, трудно устранимую погрешность в расчет при вычислении изменений плотности заряда в слоях за счет токов проводимости на границах слоев. Тем не менее, полученные результаты согласуются с общими представлениями о распределении электронно-дырочного заряда по диэлектрику, о зависимости плотности тока от времени, о влиянии на эти характеристики времени рекомбинации. Разработаны также программы для расчета токов разрядки инжектированного в диэлектрик разряда как при $U = 0$, так и при $U \neq 0$. Показано, в частности, что в случае биполярной инжекции при медленной рекомбинации токи разрядки при $U \neq 0$ могут быть весьма значительны, что может быть связано с насыщением диэлектрика электронно-дырочной плазмой. В качестве примера на рис.1 приведена серия расчетных зависимостей $j(t)$ при монополярной инжекции, на рис.2 - распределение плотности электронного и дырочного заряда при биполярной инжекции (кривая при $E_0 = 0$ на рис.1 - по данным [1]).

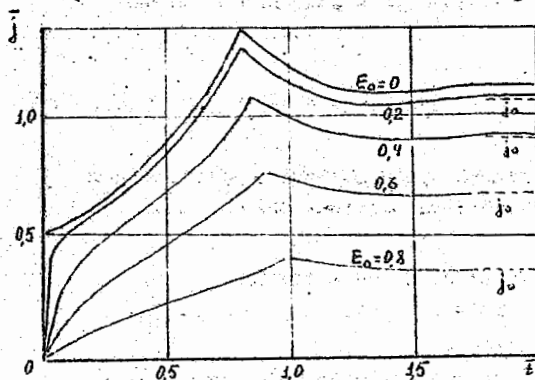


Рис.1.

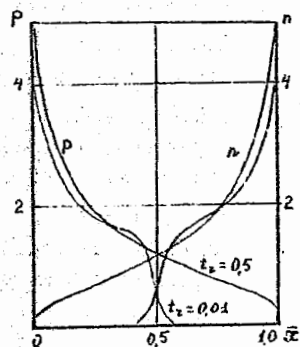


Рис.2.

Литература.

1. Many A., Rakavy C. // Phys. Rev. 1962 - т.126. - P.1980-1983.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Г.А. Айгунов, Л.М. Джебраилова О спектре одного класса операторов Штурма-Луивилля с обобщенным потенциалом	3
А.В. Аксенов Симметрии и фундаментальные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред	5
Т.А. Алексеева О симметриях и первых интегралах, удовлетворяющих некоторым априорным условиям	7
Н.В. Ампилова Бифуркация Хопфа в окрестности неподвижных точек одного эндоморфизма плоскости	8
<i>Igor Ananievski</i> <i>LYAPUNOV DIRECT METHOD AND CONTROL PROBLEM</i> <i>FOR MECHANICAL SYSTEM</i>	10
А.Ф. Андреев, И.А. Андреева О предельных циклах одной квазиквадратичной системы	12
И.П. Анисимова, Ю.И. Сапронов Вариационный метод и конечномерные редукции в теории нелинейных колебаний	14
Н.А. Антонова Хаос и порядок в системах управления с ИШИМ	16
Р.М. Асадуллин Формальная и конструктивная редуцируемость динамических систем как метод исследования обратных задач	18
И.В. Асташова Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений	19
Р.А. Бадамшин, С.А. Горбатков Конструктивный конечномерный итерационный метод решения нелинейных параболических и эллиптических уравнений при моделировании и оптимальном управлении электротепловыми системами	20

Л.А.Бакалейников, Е.В.Галактионов, Ю.А.Половко, Э.А.Тропп Сложные динамические режимы в оптически ориентированной электронно-ядерной спиновой системе в полупроводниках	21
А.И.Балинов Расчет температурного поля потока жидкости, обогреваемого с одной стороны	22
<i>A.M. Balonishnikov</i> <i>SOLUTIONS FOR THE CLOSURE PROBLEM IN TURBULENCE FROM EXTENDED LOCAL BALANCE APPROXIMATION.....</i>	24
С.А.Баруздин Уравнение движения при стохастическом возбуждении спиновых и фотонных систем	25
В.В.Басов Бифуркация инвариантного тора коразмерности единица	27
Г.Н.Белосточный Конструктивный метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных в систему через условия сопряжения	28
Ю.Н.Бибиков Квазипериодические возмущения осциллятора с кубической восстанавливающей силой	30
Г.Г.Бильченко Обратная задача для одного обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца	31
Н.Г.Бильченко, К.Г.Гараев Теоретико-групповые методы в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем при гиперзвуковых режимах полета	32
И.Н.Блинов Новый качественный эффект в теории нелинейных дифферен- циальных уравнений с почти периодическими коэффициентами.	33
А.В.Вобрищев Подтверждение гипотезы Ферма	34

Ю.Я.Болдырев, С.В.Лупуляк, Ю.К.Шиндер К проблеме построения осреднений для уравнения Рейнольдса	38
В.А.Бондарко Дискретизация каскадных систем нелинейных дифференциаль- ных уравнений и устойчивость по управлению	39
Е.Э.Боревич, В.М.Чистяков Асимптотика собственных функций нелинейной краевой задачи, описывающей распределение зарядов в полупро- водниках	41
Ю.Г.Борисович S' -симметрия в нелинейных управляемых системах функцио- нально-дифференциальных уравнений и проблемы существо- вания	43
М.Р.Бортковская Асимптотика 0-кривых для одного класса систем дифферен- циальных уравнений в R^3	45
И.А.Бригаднов Метод абстрактной задачи Коши в математической теории пластичности	47
Ю.А.Бычков, С.В.Щербаков Построение с заданным уровнем предельной локальной погрешности областей существования точных решений системы нелинейных интегродифференциальных уравнений	49
М.А.Вареус, И.Б.Паращук Синтез стохастических дифференциальных уравнений при проектировании цифрового имитатора канала связи	50
Ю.А.Васильев О построении уравнения нелинейных колебаний по решению, удовлетворяющему физическим требованиям	51

А.Г.Владимиров, Н.Н.Розанов, С.В.Федоров, Г.В.Ходова Бифуркационный анализ автосолитонов в бистабильном лазере	52
Д.Ю.Волков Бифуркация Андронова-Хопфа при резонансе 1:2 и 1:3	53
А.Х.Телиг, Н.А.Санкина Устойчивость функционально-дифференциальных уравнений ИТО, описывающих динамику асинхронных импульсных систем	54
Е.И.Глушанков, Н.В.Савищенко Методы цифрового моделирования марковских случайных процессов с использованием стохастических дифферен- циальных уравнений	56
В.К.Горбунов Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления	58
Б.С.Григорьев О численном решении задач газовой смазки с наддувом	59
А.Е.Гурьянов Качественное оценивание с применением точных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений	60
<i>Sergei V. Gusev</i> METHOD OF MOMENT RESTRICTIONS IN ROBUST CONTROL	61
Я.В.Дельцова К обоснованию метода следа	62
В.П.Деревенский Дифференциально-автоморфные матричные уравнения первого порядка	63
<i>M.G. Dolushaev</i> LOCAL TIME FOR DIFFUSION AND ORDINARY EQUATIONS AND CONTROL PROBLEMS	65

Н.М.Долгов О некоторых особенностях динамики систем на подвижных деформируемых основаниях и их математическом обосновании	67
<i>Ā. Doliĉanin, V. Romanovskii</i> IDEALS IN MONOIDEAL RINGS AND LIMIT CYCLES BIFURCATIONS.....	68
М.В.Долов, С.А.Чистякова Многозначный интегрирующий множитель и предельные циклы ..	69
А.В.Егоров Взаимно однозначные квадратичные отображения плоскости на себя	70
Е.К.Ершов, <i>J. H. Kim</i> , Г.С.Осипенко Сильно неразрушимые инвариантные многообразия относительно гиперболичны	71
П.В.Ефимов Синтез адаптивного эхокомпенсирующего фильтра речевых сигналов	72
П.В.Ефимов Эффективность функционирования адаптивного эхокомпенсатора для речевых сигналов	73
<i>Yu. V. Zaika</i> BASES OF OBSERVABLE FUNCTIONS IN NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS.....	74
В.Ф.Зайцев Локальные и нелокальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений	76
<i>A.N. Zarubin</i> THE THEOREM UNIQUENESS OF DECISION OF AN INITIAL-EDGE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED TYPE WITH PARALLEL LINES OF DEGENERATION AND DELAY ON DIFFERENT VARIABLE....	78
<i>A.N. Zarubin</i> ABOUT SOME INTEGRATED TRANSFORMATIONS OF THE THEORY OF THE EQUATIONS OF A MIXED TYPE WITH LATE ARGUMENT....	80

В.П.Захаров, Ю.В.Мальшев Общее решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами	82
Д.И.Зубко, В.М.Турин О некоторых свойствах линейных дифференциальных операторов	83
С.В.Зубов К теории расчетной устойчивости линейных неоднородных систем	84
А.П.Иванов Численная реализация метода максимизации проекции в задаче наблюдения возмущаемых систем	86
Л.А.Иванова Использование дифференциальных уравнений в частных произ- водных в задачах атмосферного пограничного слоя	87
Alexey A. Ignatiev <i>On the Stability of Nonautonomous Systems</i>	88
И.В.Ильин, И.А.Комарчев, Г.А.Леонов Бифуркации квадратичных систем	89
Ю.Г.Исполов, Н.Н.Шабров Улучшенные численные методы конечно-элементного анализа нестационарной теплопроводности	90
I.A. Kaverina <i>On the definition of eigenvalues and eigenfunctions of some differential operators of third and fourth order</i>	92
М.В.Калинина Оценка области притяжения в критических случаях теории устойчивости	94
О.В.Капцов Определяющие уравнения для дифференциальных связей	96

S.I. Senashov

LIE GROUPS AND PROBLEMS OF MECHANICS OF DEFORMABLE SOLID 96

Н.Г.Кириллов

К вопросу расчета поршневых регенеративных машин 97

Н.Е.Кирин

Минимаксное оценивание функционалов на решениях дифференциальных включений 99

А.Н.Кирин

Анализ устойчивости и оптимальное управление по дискретному приближению в системах с запаздывающим аргументом 100

P.P. Kiryaikov, V.N. Lashin, A.N. Yakhno

THE ENUMERATION OF ALL INVARIANT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF PLASTICITY WITH ON MISES'S CONDITION 101

В.Э.Ковалевский, Ю.В.Кулешов, С.А.Солдатенко,

В.Г.Степанов, С.С.Суворов

Идентификация параметров в задаче для приливного уравнения Лапласа 102

В.Г.Козловский, А.Н.Путилин

Метод определения вероятностно-временных характеристик передачи сообщений в канале множественного доступа 104

Ю.Б.Колесов, Ю.Б.Сениченков

Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании гибридных систем 105

С.А.Комаров, В.А.Крысько

Применение метода установления к решению нелинейных стационарных задач математической физики 107

Н.Д.Копачевский, Ю.С.Пашкова

Проблема нормальных движений вязкой жидкости в сосуде, закрытом упругой крышкой 109

С.М.Коровой, *Кощеев В.Д.*

Моделирование процесса торможения автомобиля с гидропневмоаккумулятором при помощи ЭВМ 111

Е.Е.Королева Аттракторы многозначных отображений и методы численного интегрирования с автоматическим выбором шага	113
Е.О.Кож Поведение траекторий трехмерной однородной системы в окрестности особого инвариантного конуса с четырьмя инвариантными лучами	114
<i>Huseyin Kocağ</i> <i>COMPUTATION OF PERIODIC ORBITS IN CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS</i>	116
<i>M.N.Krasovskii, A.N.Krasovskii</i> <i>A PROBLEM OF STABILISED CONTROL UNDER LACK OF INFORMATION</i>	117
Г.В.Кронин Возмущения спектра Сакера-Селла диффеоморфизма компактного многообразия	118
С.В.Кругликов Достаточные условия разделения задач гарантированного управления и оценивания для линейной системы с непре- рывным временем	120
В.А.Крысько, М.В.Жигалов Итерационный алгоритм решения нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных	121
<i>D.F. Kuznetsov</i> <i>THE FINITE-DIFFERENCE METHODS FOR A STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITO EQUATION</i>	123
Е.В.Кузнецов, В.И.Шалашилин Преобразование задачи Коши для обыкновенных дифферен- циальных уравнений к наилучшему аргументу и его прило- жение	125
В.А.Кузнецова, Г.И.Лептев О некоторых регуляризациях дифференциальных уравнений второго порядка с неявным вырождением	127

Н.Г.Кузьма	
Метод Ван-дер-Поля в исследовании нелинейных периодических режимов колебаний	129
С.И.Кузьмина, Ю.В.Кулешов, С.А.Солдатенко, В.Г.Степанов, С.С.Суворов	
Исследование чувствительности решения системы уравнений квазидвумерной модели атмосферы	130
В.А.Кузьминых	
Чаплыгинское решение векторного дифференциального уравнения	132
В.А.Кузьминых	
Об интегральном многообразии траекторий в одной задаче небесной механики	134
О.Ю.Кульчицкий, Д.Ф.Кузнецов	
Численные методы моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений ИТО	135
<i>O.Yu. Kulchitsky, D.F. Kuznetsov</i>	
<i>THE TAYLOR-ITO EXPANSION OF ITO PROCESSES, WHICH ARE GENERATED BY A SOLUTION OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITO EQUATION...</i>	137
В.Г.Леонов	
Локализация аттрактора динамической модели двух конкурирующих популяций с внешним подавлением	139
В.В.Логинов, П.Н.Санкин	
Бифуркационные задачи типа дивергенции пластины в аэроупругости	140
С.В.Лупуляк, Ю.К.Шиндер	
Некоторые математические вопросы теории газовой смазки	142
Х.Г.Магомедбеков, М.В.Вагабов	
Математическое моделирование свободно-конвективного течения бинарной смеси в тонком пористом кольце	143
И.Е.Мазец, Б.Г.Матисов, А.Ю.Снегирев	
Решение системы уравнений Максвелла-Шредингера в форме волн Римана	144

И.Е.Мазец, Б.Г.Матисов, А.Ю.Снегирев Уравнения кооперативной динамики совокупности трех- уровневых атомов и их численное решение	145
М.В.Макарова Релаксационные колебания уравнения Лъенара с квадра- тичным трением	146
В.Г.Малинов Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка	147
П.Н.Матвеев Системы линейных интегральных неравенств общего вида	148
<i>A.S. Matveev, V.A. Yakubovich</i> <i>DN A METHOD OF NONCONVEX GLOBAL CONSTRAINED</i> <i>OPTIMIZATION.....</i>	<i>149</i>
В.М.Миллионщиков О типичных свойствах линейных систем дифференциальных уравнений	151
А.А.Моисеев Символический образ динамической системы и алгоритмы его исследования	152
Т.С.Моисеенко Об одном дифференциальном уравнении на комплексной плоскости	153
Н.Д.Морозкин, Д.В.Полунанов Об одной задаче оптимального управления нагревом с фазовыми ограничениями	154
В.Е.Мосьяков Решение двумерной задачи тепломассообмена при наличии термокапиллярной конвекции	155
А.В.Музалевский, С.И.Репин Вариационно-разностный метод решения краевых задач теории идеальной пластичности	156
Р.А.Нелепин, А.М.Камачкин Динамика неавтономных гистерезисных систем	158

В.В.Ноздрунов О нелокальных симметриях системы двух оду второго порядка	159
И.В.Олемской Структурный метод решения систем обыкновенных дифферен- циальных уравнений с гибридным способом оценки локальной погрешности	160
Г.С.Осипенко Методы прикладной символической динамики	161
Ю.Я.Остов, О.Н.Судаков К задаче оптимального управления движением центра масс летательного аппарата в атмосфере	162
К.В.Павлюков Об инвариантном преобразовании определяющей системы	163
А.И.Перов Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях	164
Н.Н.Петров, П.В.Плисс О зависимости функции Беллмана в задаче быстродействия для уравнения Лиенара с управлением от параметра	165
Н.Н.Петров, Ф.В.Фомин О дифференциальных играх преследования и поиска на графах ..	166 ^h
С.Ю.Пилюгин Отслеживание псевдотраекторий в структурно устойчивых системах	167
В.А.Плисс, G. Sell Об устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств автономных систем	168
А.Yu. Pogromsky, V.D. Nikiiforov OUTPUT FEEDBACK ADAPTIVE SUPPRESSION OF FORCED OSCILLATIONS IN NONLINEAR SYSTEMS	169
Е.В.Подсыпанин О тождестве Л.В.Данилова	170

Л.Т.Поэняк	
Об оценке снизу собственных значений некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка	171
Ю.В.Покорный, А.В.Боровских	
О нелокальных задачах со свойствами штурма	172
В.К.Поливенко	
Конвергенция в одной диссипативной системе на плоскости	173
А.Н.Поляков, И.П.Никитина	
Реализация редукции Ланцоша к решению нестационарного температурного поля в металлорежущих станках	174
<i>A.D. Polyakin, A.I. Zhurov</i>	
<i>EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS</i>	176
Д.В.Пономаренко, В.А.Тешев, А.И.Шепелявый, М.М.Шумафов	
Частотный критерий синхронизации гистерезисных систем	177
А.Н.Путилин, Н.В.Савищенко	
Метод определения помехоустойчивости сообщений в каналах случайного множественного доступа	178
А.О.Решетин	
Исследование нелинейных кинетических уравнений трансформации бактерий в хемостате	179
Н.Н.Розанов, В.Б.Рудович, С.В.Федоров	
Автосолитоны в одномодовых световодах с нелинейным усилением и поглощением	181
Н.Х.Розов	
Феномен буферности в длинной линии с туннельным диодом	183
Н.С.Садовин, С.В.Сивандаев	
Метод спуска по вариациям сопряженной переменной в задаче оптимального управления	184
Ю.Н.Сангин, Н.Ю.Санкин	
Устойчивость токарных станков при не вполне определенной характеристике процесса резания	185

Н.В.Семенова, В.В.Краснощеков Разложение по функциям Эйри в решении уравнения Шредингера для задач с линейной моделью связи состояний	187
А.С.Сеннов, А.В.Дрков Применение математического моделирования для решения задач охраны подземных вод	188
<i>A.I. Skubachevskii</i> <i>BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS</i>	190
Е.Я.Смирнов О парировании воздействий упруго присоединенных элементов при стабилизации программных движений объекта управления ...	191
Е.Я.Смирнов О стабилизации программных движений систем переменной структуры	191
В.Б.Смирнова, Л.С.Сперанская Условия отсутствия устойчивости по Лагранжу, условия отсутствия предельных циклов для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра	192
А.Д.Снегирев Численное моделирование пожара в помещении с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений и системы уравнений Навье-Стокса	193
В.Ф.Соколов Адаптивное робастное управление скалярным объектом со структурированными возмущениями	195
Б.М.Соколов, В.Н.Фомин Адаптивная стабилизация нелинейных объектов специального класса	196
А.А.Суханов Новые схемы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты пятого порядка	198
В.В.Сысоев, В.И.Ряжских, Ю.В.Панфилов Оседление малоконцентрированной монодисперсной взвеси в плоском горизонтальном канале	200

Г.А.Триханов Об одной задаче оптимального управления в температурных ЛЕМПАХ НАКАЛИВАНИЯ	202
Г.А.Триханов, Л.А.Куликов Интегральное уравнение лучистого теплообмена конечных цилиндрических полостей, имитирующих абсолютно черное тело..	204
Л.А.Ушомирская, В.К.Глухих Методика математического моделирования электротехнологи- ческих методов обработки	205
A.N. FEDOROVA, M.G. ZEITLIN WAVELET APPROACH TO NONLINEAR PROBLEMS.....	208
А.В.Флегонтов Анимационная реализация динамики групповых структур	209
Alexander L. Fradkov, Peter Yu. Guzenko ADAPTIVE CONTROL OF OSCILLATIONS BASED ON LINEARIZED POINCARÉ MAP.....	210
A.L. Fradkov, I.G. Polushin QUASIPASSIVITY BASED CONDITIONS OF L-DISSIPATIVITY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS.....	211
L.B. Freidovich, A.A. Pervozvanski ESTIMATION OF EFFECTIVENESS OF ROBOT MANIPULATOR CONTROL	212
Э.Н.Хакимова О симметрии и разрешимости одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений	214
Biskri Abdel-Hamid Combination of Numerical and Symbolic Computation Techni- ques for Solving Partial Differential Equations.....	215
В.Е.Харциев Наномасштабные периодические поверхностные диссипативные структуры, связанные с латеральными нагрузками	217

В.Е.Харциев, И.А.Шельх Дифференциальные уравнения, связанные с эллиптическими функциями. Обобщенные уравнения	...218
И.Н.Хафизова Оптимальные квадратурные формулы на решениях дифференциальных вclusions	220
С.М.Хрящев Об управляемости динамических систем со свойством зацепляемости для спектральной характеристики	221
Н.А.Чебанова, В.И.Чебанов Теорема продолжения для решения эллиптических уравнений	222
В.Г.Чередниченко, В.М.Лекарев Система дифференциальных уравнений, моделирующих нелинейные процессы фазовых превращений и массопереноса компонентов раствора	223
А.А.Черницкий О движении частицеподобных решений в нелинейной электродинамике	224
В.Е.Чернышев Гетероклинические циклы, порождающие устойчивый хаос	226
М.Г.Чубова О касательных операторах, допускаемых дифференциальными уравнениями	228
С.Н.Чуканов К вопросу формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем	229
Ю.В.Чурин Об условиях существования особых периодических решений	232
Г.А.Шадрин Обобщение решения дифференциального уравнения теории открытых резонаторов	233
Нгвен Куок Шин Устойчивое решение системы дифференциальных уравнений при моделировании низкотемпературных плазменных процессов	234

А.С.Ширяев	
Оптимальное отслеживание гармонических сигналов в линейных системах	237
А.В.Юрков	
Импульсная стабилизация программных движений управляемых иерархических систем	239
Г.Н.Яковенко	
Дифференциальные уравнения и системы с управлением - сравнительный групповой анализ	241
В.П.Ястребов	
Некоторые автомоделные решения задач по расчету пласти- ческих деформаций тел при динамическом нагружении	242
С.Н. КОЙКОВ	
Анализ термостимулированной поляризации и деполяризации на основе различных модельных представлений	244
С.Н. Койков	
Моделирование характеристик приэлектродной поляризации диэлектриков	246
С.Н. Койков	
Моделирование характеристик монополярной и биполярной инжекции в сильных электрических полях	248

Флр № 030007 от 19.10.94.

Подписано в печать *13.11.96*. Печать офсетная. Формат бумаги 60×84 1/16.
Объем *6.75* печ. л. Заказ *562*. Тираж *160*.

Отпечатано в Издательстве СПбГТУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.