**Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"
Лаборатория комплексного анализа и дифференциальных
уравнений Сибирского федерального университета
Кафедра прикладной математики и компьютерной
безопасности Сибирского федерального университета
Филиал Северного (Арктического) федерального
университета им. М. В. Ломоносова в г. Коряжме
Архангельской области**

Международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре

г. Коряжма Архангельской области, Филиал С(А)ФУ им. М. В. Ломоносова, 3–9 августа 2016 года

Оргкомитет конференции

А. Н. Паршин, доктор физ.-мат. наук, академик РАН, заведующий отделом алгебры МИАН (председатель оргкомитета);

И. В. Кузнецова, кандидат пед. наук, директор Филиала С(А)ФУ в г. Коряжме Архангельской области (сопредседатель оргкомитета);

Д. В. Осипов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН (учёный секретарь);

Вик. С. Куликов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН;

А. А. Кытманов, доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики и компьютерной безопасности СФУ;

С. А. Тихомиров, кандидат физ.-мат. наук, доцент ЯГПУ;

А. С. Трепалин, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ИППИ РАН и НИУ ВШЭ;

А. В. Щуплев, кандидат физ.-мат. наук, заведующий лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений СФУ

Программный комитет конференции

А. Н. Паршин, доктор физ.-мат. наук, академик РАН, заведующий отделом алгебры МИАН (председатель оргкомитета);

Ф. А. Богомолов, доктор физ.-мат. наук, научный руководитель лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ;

Вик. С. Куликов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН;

С. Ю. Немировский, доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, главный научный сотрудник МИАН;

С. П. Царев, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности СФУ

А. К. Цих, доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории функций СФУ

Конференция проводится при поддержке РФФИ (грант № 16-01-20425 Г), гранта Правительства Российской Федерации государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых 14.Y26.31.0006, гранта Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания 1.1462.2014/K, а также на средства субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Оглавление

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ВЕТВЛЕНИЯ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Абрамов (ВЦ РАН, Москва)
sergeyabramov@mail.ru

Рассматриваются имеющие полный ранг системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с коэффициентами в виде вычислимых (конструктивных) степенных рядов. Показывается, что многие алгоритмические задачи, связанные с показателями ветвления иррегулярных формальных решений заданной системы, являются неразрешимыми, даже если предполагаемое значение r показателя ветвления фиксировано. Это, в частности, позволяет усилить ранее доказанную теорему, утверждающую, что мы не можем вычислить размерность пространства всех формальных решений системы, хотя и способны построить базис подпространства регулярных решений. Фактически же не существует алгоритма, который вычисляет эту размерность даже в том случае, когда кроме самой системы нам заранее известен список всех показателей ветвлений формальных решений этой системы. Однако обнаруживается и разрешимая задача: если заданные система S и неотрицательные целые r, d таковы, что для S гарантировано существование d линейно независимых формальных решений с показателем ветвления r, то мы можем построить d таких решений системы S.

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ

Д. В. Артамонов (Москва)
artamonov.dmitri@gmail.com

В докладе пойдет речь о следующей задаче. На комплексном многообразии X имеется дивизор D. На $X \setminus D$ задано расслоение с неособой связностью. Как их можно продолжить до расслоения со связностью на всем X, при этом продолженная связность может иметь особенности на D?

Решение этой задачи в случае $\dim X = 1$ играет ключевую роль при решении 21-ой проблемы Гильберта (известной также как проблема Римана-Гильберта) о построении линейной системы на сфере Римана с заданными особыми точками $a_1, ..., a_n$ и заданным представлением $M : \pi_1(\bar{\mathbb{C}}) \to GL_p(\mathbb{C})$ монодромии. В данном случае возникает необходимость дать построение *всех* продолжений расслоений со связностью с $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ на всё $\bar{\mathbb{C}}$ (см. [1]). Для описания всех продолжений вводятся некоторые целочисленные параметры - нормирования. Для каждой особой точки вводится p нормирований. Меняя их в некоторых в пределах некоторого множества мы получаем все возможные продолжения.

В многомерном случае имеются следующие результаты. Теорема, принадлежащая Делиню [De], утверждает следующее. Пусть D произвольный дивизор, тогда существует продолжение расслоений со связностью до расслоения с мероморфной связностью на X. Описания же всех возможных продолжений дано в [De] не было. Позже, однако, строились некоторые семейства продолжений (см. [H]), однако они, как будет объяснено в докладе, не перечисляют всех продолжений.

Имеется работа А.А. Болибруха [B1], где даётся определение нормирований и фактически даётся конструкция продолжений расслоения со связностью в случае, когда D — дивизор с нормальными пересечениями, до расслоения с мероморфной связностью на X. При этом в отличие от одномерной ситуации ничего не утверждается о том, что описаны все возможные продолжения

С другой стороны, многомерные расслоения со связностью с логарифмическими особенностями можно рассматривать как интегрируемые деформации связностей на одномерном комплексном пространстве. При таком подходе вопрос о продолжении расслоений с $X \setminus D$ на X есть вопрос об описании поведения при интегрируемых деформациях параметров обобщённых параметров монодромии: собственно монодромии, матриц связи, нормирований.

Если особые точки не сливаются при изомонодромной деформации, то этот ответ на вопрос является фольклорным утверждением в аналитической теории дифференциальных уравнений: монодромия сохраняется [1], нормирования сохраняются, матрицы связи же могут меняться в лишь в так называемом резонансном случае. При этом это их изменения довольно жестко ограничиваются. С помощью этих фактов можно дать описание *всех* продолжений расслоений со связностями с $X \setminus D$ до расслоений с логарифмической связностью на X в случае, когда D *гладкое многообразие*[2] *без самопересечений.*

Случай, когда компоненты имеет особенности или самопересечение на языке изомонодромных деформаций соответствует слиянию фуксовых особых точек. Этот вопрос является не таким изученным. Здесь результаты из теории изомонодромных деформаций не достаточны для описания всех продолжений с $X \setminus D$ на X.

Наконец, в работах французской школы (см., например, [M]) используется геометрическое понятие решетки. Выбор решетки эквивалентен выбору продолжения. Однако, в работах французской школы не даётся ответа на вопрос, чем параметризуется выбор решетки.

В докладе строится многомерный аналог этой конструкции. Именно, пусть теперь на комплексном многообразии X задан дивизор произвольный D (не обязательно с нормальными пересечениями), на $X \setminus D$ задано p-мерное расслоение со связностью. Мы дадим описание всех продолжений до расслоений со особой связностью на X. Все возможные продолжения индексируются целочисленными параметрами, сопоставляемым неприводимым компонентам D и называемыми многомерными нормированиями, а также некоторыми дополнительными параметрами, возникающими только в некотором вырожденном случае, называемым резонансным.

Прогресс в решении задачи оказался возможным благодаря использованию алгебраического языка. В частности, ключевым поня-

[1] то есть интегрируемые деформации являются изомонодромными

[2] возможно, несвязное

тием в докладе будет понятие извращенного пучка.

Список литературы

[B] А. А. Болибрух, Обратные задачи монодромиив аналитической теории дифференциальных уравнений, МЦЦНМО, 2009

[De] P. Deligne, Equations differentielles a points singuliers reguliers, Lecture Notes in Math, 163, 1970

[H] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki $\mathcal{D}$-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory, Birkhauser, 2008

[B1] А. А. Болибрух, Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии, Матем. сб., 103(145):1(5) (1977), 112–123

[M] B. Malgrange, On irregular holonomic $\mathcal{D}$-modules, Seminaire Congres, 8, 2004, 391-410.

АЛГОРИТМЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ В ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Е. А. Благовещенская[3] (Санкт-Петербург), В. В. Гарбарук (Санкт-Петербург)
kblag2002@yahoo.com, vmkaf@pgups.ru

Почти вполне разложимой группой (**acd-группой**) X называется абелева группа без кручения конечного ранга, содержащая вполне разложимую подгруппу A конечного индекса. Если к тому же X/A является циклической группой, то X принято называть **crq-группой** (происходит от английского названия "almost completely decomposable group with cyclic regulator quotient"), см. [Mader].

В следующей теореме мы ограничимся рассмотрением групп из этого класса, называемых "блочно-жесткими crq-группами кольцевого типа" , что означает идемпотентность типов слагаемых ранга 1 группы A и формирование ими "антицепи" в частично упорядоченном множестве всех возможных типов, см. [Blag].

Теорема ((Теорема Бэра-Капланского для crq-групп) E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz, см. [BIS])**.** *Пусть X и Y — блочно-жесткие crq-группы кольцевого типа. Тогда X и Y почти изоморфны в том и только в том случае, когда их кольца эндоморфизмов изоморфны как абелевы группы, $End(X) \cong End(Y)$.*

Используемое здесь понятие "почти изоморфизма" , эквивалентности, более слабой, чем изоморфизм, играет большую роль в решении проблем классификации абелевых групп без кручения, в том числе, связанных с их прямыми разложениями. В ситуации отсутствия изоморфизма между различными прямыми разложениями одной и той же группы, данная теорема, устанавливающая определяемость групп их кольцами эндоморфизмов, по своей сути значительно отличается от других известных результатов в форме Бэра-Капланского, доказательство которых обычно опирается на однозначно определенные (с точностью до изоморфизма) прямые разложения рассматриваемых групп.

О многообразии прямых разложений свидетельствует следующая

Теорема. *Пусть $n > r \geq 3$ — натуральные числа. Существует блочно-жесткая crq-группа кольцевого типа X ранга n, обладающая разложениями в прямую сумму неразложимых групп рангов*

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00660 а).

$r_1, r_2, \ldots, r_s$, удовлетворяющих любым заранее заданным различным разбиениям $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$, $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_s$, при условии, что наибольшие слагаемые r_1 в соответствующих разбиениях числа n совпадают и равны r.

Алгоритмический процесс построения различных разложений таких групп описывается графами ярусно-параллельной формы, которые могут быть использованы в решении некоторых задач распараллеливания алгоритмов, см. [Blag-Zuev].

Список литературы

[Mader] A. Mader. Almost Completely Decomposable Abelian Groups, Gordon and Breach. Algebra, Logic and Applications, V. 13, Amsterdam, 2000.

[Blag] E. Blagoveshchenskaya. Almost Completely Decomposable Abelian Groups and their Endomorphism Rings, Mathematics in Polytechnical University. St. Petersburg, 2009.

[BIS] E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz. The Baer-Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups, Contemporary Mathematics, V. 273, 85 - 93, 2001.

[Blag-Zuev] E. Blagoveshchenskaya, D. Zuev. On convergence of neural network learning methods, Proceedings of the XIX International conference on computational mechanics and modern applied software systems (CMMASS' 2015), p. 130, 2015.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ УРОВНЯ 4

Е. Ю. Бунькова[4] (Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва)
bunkova@mi.ras.ru

Определение. *Эллиптической функцией уровня* n мы называем мероморфную функцию $f_n(x)$ на $\mathbb{C}$ с периодическими свойствами

$$f_n(x+2\omega_1) = f_n(x), \qquad f_n(x+2\omega_2) = \sqrt[n]{1} f_n(x), \qquad \omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R},$$

где $(\sqrt[n]{1})^n = 1$, $(\sqrt[n]{1})^k \neq 1$ для $0 < k < n$, имеющую один простой полюс на параллелограмме с образующими $2\omega_1, 2\omega_2$.

Такие функции задают эллиптический род уровня n (см. [1], [2]). В частности, функция $f_2(x)$ является эллиптическим синусом и задаёт знаменитый эллиптический род Ошанина–Виттена.

В теории родов Хирцебруха важным шагом в изучении рода является построение формальной группы, экспонента которой задаёт данный род. Мы рассматриваем задачу построения универсальной формальной группы, экспонентой которой является эллиптическая функция уровня n для данного n.

В общем случае известно ([3] и [4]), что такие формальные группы являются специализациями *формальной группы Бухштабера*

$$F(u,v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{uB(v) - vB(u)}, \tag{1}$$

где $A(u)$ и $B(u)$ — формальные ряды с $A(0) = B(0) = 1$.

Теорема. *Эллиптическая функция уровня* 4 *является экспонентой универсальной формальной группы вида* (1), *где* $A'(0) = a$, $A''(0) = 0$, $B'(0) = 0$, $B''(0) = b$, *и имеет место соотношение*

$$(2B(u) + 3au)^2 = 4A(u)^3 - (3a^2 - 4b)u^2 A(u)^2.$$

[4]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Список литературы

[1] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, Manifolds and modular forms, Aspects Math., E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[2] F. Hirzebruch, Elliptic genera of level N for complex manifolds, Prep. MPI, 88–24.

[3] В. М. Бухштабер, Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы, УМН, 1990, 45, 3(273), 185–186.

[4] И. М. Кричевер, Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера, Мат. Заметки, т. 47, № 2, 1990, 34–45.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ И КВАЗИ-СИММЕТРИИ ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОТВЕЧАЮЩИХ ГИЛЬБЕРТОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ (СОВМЕСТНО С ЯНШИ ШИУ)

А. И. Буфетов (МИАН, ИППИ, ВШЭ, CNRS, Москва)
bufetov@mi.ras.ru

В докладе будет доказано, что детерминантные точечные процессы, отвечающие классическим пространствам голоморфных функций (пространства Бергмана, пространства Фока) квазиинвариантны относительно группы диффеоморфизмов с компактным носителем. Производные Радона-Никодима явно найдены: например, в случае пространств Бергмана — в виде произведений Бляшке.

Доклад основан на препринте http://arxiv.org/abs/1411.4951

RATIONALITY AND GROWTH CONDITIONS

J. Winkelmann[5] **(Mathematisches Institut Ruhr-Universität, Bochum)**
joerg.winkelmann@rub.de

This is joint work with Frédéric Campana ([4]).

Let X be a kähler compact complex manifold and let $f : \mathbb{C}^n \to X$ be a differentiably non-degenerate meromorphic map. Our goal is to relate algebraic-geometric properties of X to the existence of such maps of small growth. One easily sees that for every unirational projective manifold X there is a rational such map, hence in particular a map of very small growth. We look for a result in the opposite direction. The main result is:

If there exists such a map of order $\rho_f < 2$, then X must be rationally connected. In particular, X is projective.

Here the order ρ_f is a tool to measure the growth of a meromorphic map $f : \mathbb{C}^n \to X$. For an algebraic map we have necessarily $\rho_f = 0$. On the other hand $\rho_\tau = 2$ for the universal covering map $\tau : \mathbb{C}^n \to T$ of a n-dimensional compact complex torus.

The order is defined in the following way: Let ω be a Kähler form on X and let α be the euclidean Kähler form on $\mathbb{C}^n$, i.e., $\alpha = dd^c||z||^2$. Define the characteristic function for $f : \mathbb{C}^n \to X$ as

$$T_f(r) = \int^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B_t} (f^*\omega) \wedge \alpha^{n-1}.$$

Then the order is defined as

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r}.$$

A compact complex manifold is called "rationally connected" (RC) if for any two points there exists a chain of rational curves linking these two points ([1]). RC Kähler manifolds are automatically projective.

Given a projective complex manifold X, there exists an RC-quotient $\phi : X \to Y$ ([1],[6]). This is a meromorphic map such that generic fibers are maximal RC subvarieties of X. The quotient has only few rational curves, more precisely it is not uniruled ([5]).

Not being uniruled is equivalent to the canonical bundle being pseudoeffective ([2]). In this way a projective manifold X which is not

[5]The author was supported by the SFB/TR 12 "Symmetries and Universality in mesoscopic systems"

RC obtains (by pulling back the canonical bundle from Y) an invertible pseudoeffective subsheaf of some Ω_X. For a line bundle pseudoeffectivity is equivalent to admitting a singular hermitian metric with semipositive curvature which in turn implies that $\log ||s||$ is plurisubharmonic for every holomorphic section s. This plurisubharmonicity is then used to deduce a lower bound for $||Df||$ from which one may conclude that $\rho_f \geq 2$ unless X is RC. This is the key line of reasoning in the case where X is projective. To show that the statement for general compact Kähler manifolds, one observes the following: Kodairas argument combined with Hodge theory imply that every non-projective compact Kähler manifold admits non-zero holomorphic 2-forms, which can be used to deduce a lower bound on the growth of f, following the reasoning in [7].

This result improves on earlier work of Campana, Păun ([3]), Noguchi and Winkelmann ([7]).

The result does not hold without the Kähler assumption, in fact there is non-degenerate map $f : \mathbb{C}^2 \to S$ for a Hopf surface S with $\rho_f = 1$ although Hopf surfaces do not contain any rational curves ([7]).

References

[1] Campana, F.: Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup* **25**, 539–545 (1992)

[2] Campana, F.; Demailly, J.P.; Peternell, Th.: Rationally Connected Manifolds and semipositivity of the Ricci Curvature. arxiv:1210.2092

[3] Campana, F.; Păun, M.: Une généralisation du théorème du Kobayashi-Ochiai. Manu. math., **125**, no. 4, 411–426 (2008)

[4] Campana, F.; Winkelmann, J.: Rational connectedness and order of non-degenerate meromorphic maps from $\mathbb{C}^n$. (submitted; arXiv:1412.4381).

[5] Graber, T.; Harris, J.; Starr, J.: Rationally connected varieties. *J. Alg.*, **1**, 429–448 (1992)

[6] Kollár, J.; Miyaoka, Y.; Mori, S.: Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779.

[7] J. Noguchi, J. Winkelmann: Order of Meromorphic Maps and rationality of the Image Space. *J. Math. Soc. Japan* **64**, (4), 1169–1180 (2012)

DIRECT IMAGES OF SEMI-MEROMORPHIC CURRENTS

E. Wulcan (Göteborg)
wulcan@chalmers.se

I will discuss a joint work in progress with Mats Andersson, in which we study and develop a calculus for direct images of semi-meromorphic currents. This class of currents includes e.g. principal value currents and residue currents like the Coleff-Herrera product. In my talk I will focus regularity properties of these and in particular show that the sheaf of such currents is stalkwise injective.

КАТЕГОРНЫЕ МЕРЫ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ С ДЕЙСТВИЕМ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С. О. Горчинский[6] (Москва)
gorchins@mi.ras.ru

Бондал, Ларсен и Лунц построили категорную меру для многообразий над полем характеристики нуль, т.е. гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(Var) \to \Delta$, где $K_0(Var)$ является стандартно определенной группой Гротендика алгебраических многообразий, а Δ обозначает группу Гротендика насыщенных dg-категорий. При этом классу гладкого проективного многообразия X сопоставляется класс производной категории когерентных пучков на нем $D^b(\operatorname{coh} X)$. Аналогично можно определить эквивариантный категорный класс $\mu_G(X) \in \Delta$ для многообразия X с действием конечной группы G.

Хорошо известные результаты Атьи и Сегала об орбифолдных когомологиях мотивируют следующий вопрос: имеется ли равенство между $\mu_G(X)$ и $\mu(X/^{ex}G)$ в кольце Δ? Здесь $X/^{ex}G$ обозначает расширенный фактор, т.е. фактор по группе G многообразия, состоящего из пар (x, g), где $x \in X$ и $g \in G$ такие, что $g(x) = x$.

С. О. Горчинский совместно с Д. Бергом, М. Ларсеном и В. Лунцем доказали, что имеется равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ при выполнении ряда достаточно явно проверяемых условий на G и X. В частности, данные условия выполнены для действия симметрической группы Σ_n на $X^{\times n}$ для любого многообразия X. Как следствие получается доказательство гипотезы совместимости Галкина–Шиндера о сравнении дзета-функции Капранова с категорной дзета-функции.

Кроме того, Горчинским с соавторами был построен контрпример, утверждающий, что в общем случае равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ не выполняется. Для этого была построена схема Севери–Брауэра $X \to B$, для которой геометрические слои изоморфны $\mathbb{P}^n$, но при этом кручение в топологической K-группе $K_1^{top}(X)$ отличается от кручения в группе $K_1^{top}(B)^{\oplus(n+1)}$. Такая схема Севери–Брауэра получается при помощи естественного обобщения на случай многообразий известной конструкции циклических центральных простых алгебр и связанных с ними многообразий Севери–Брауэра.

[6] Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 14-01-00178-а

ПОИСК СЕМЕЙСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ХЕНОНА-ХЕЙЛЕСА

В. Ф. Еднерал (НИИЯФ МГУ, Москва),
О. Д. Тимофеевская (Физический факультет МГУ, Москва)
edneral@theory.sinp.msu.ru, timofod@mail.ru

Метод резонансной нормальной формы может быть использован как конструктивный метод получения приближений для локальных семейств периодических и условно периодических решений систем ОДУ вблизи точек равновесия в форме степенных рядов Фурье с зависящими от времени коэффициентами и частотами. Последние приближаются отрезками степенных рядов по имеющимся параметрам, таким, как параметры системы (для систем с параметрами), или по энергии для гамильтоновых систем и т.п.

Достоинством данного подхода является алгоритмичность построения резонансной нормальной формы. При этом рекуррентная формула вычислений не требует хранения большого числа промежуточных результатов или решения уравнений на промежуточных стадиях, как того требуют другие алгоритмы, а также данный подход не накладывает каких-либо ограничений на случаи резонансов низких порядков.

В работе [1] описаны алгоритмы реализации метода нормальной формы и разработанные авторами программные пакеты. Важно, что с помощью единого алгоритма возможно изучать как системы второго порядка [1], так и более высоких порядков. Гамильтоновы и не гамильтоновы системы.

В настоящей работе проведено построение приближений для локальных периодических семейств в окрестности начала координат системы дифференциальных уравнений Хенона-Хейлеса:

$$\ddot{x} = -x - 2xy, \qquad \ddot{y} = -y - x^2 + y^2$$

С помощью метода нормальной формы посредством пакета компьютерной алгебры, получены приближения для всех семейств периодических решений вблизи стационарной точки 0. Найдены приближенные значения соответствующих частот. Проведено сравнение с численными решениями.

Список литературы

[1] В. Ф. Еднерал, О. Д. Тимофеевская, Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы, Вестник РУДН. Серия Математика, Информатика, Физика. № 3, 2014, 21–36.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ-МУКАИ ДЛЯ ВЕЙЕРШТРАССОВЫХ КУБИК И КОММУТИРУЮЩИЕ ОДО

А. Б. Жеглов[7] (МГУ, Москва)
azheglov@math.msu.su

Доклад основан на одноименной работе с Игорем Бурбаном.

В нашем докладе мы расскажем о решении одной проблемы Превиато-Вилсона о характеризации спектральных пучков алгебр коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов.

Напомним, что всякая нетривиальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{D} = \mathbb{C}[[x]][\partial]$ конечно порождена и имеет размерность Крулля один. Аффинная кривая $X_0 = \mathsf{Spec}(\mathfrak{B})$ допускает одноточечную компактификацию гладкой точкой p до проективной кривой X. Кроме того, алгебра $\mathfrak{B}$ определяет когерентный пучок без кручения $\mathcal{F}$ на кривой X, характеризующийся следующими свойствами:

- Для любой точки $q \in X_0$ (регулярной или особой), соответствующей гомоморфизму алгебр $\mathfrak{B} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$, имеются изоморфизмы векторных пространств

$$\mathcal{F}\big|_q^* \to \big\{ f \in \mathbb{C}[[x]] \,|\, P \circ f = \chi(P) f \text{ for all } P \in \mathfrak{B} \big\}.$$

- Отображение вычисления $H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathsf{ev}_p} \mathcal{F}\big|_p$ — изоморфизм, и $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Кривая X (соответственно, пучок $\mathcal{F}$) называется *спектральной кривой* (соответственно, *спектральным пучком*) алгебры $\mathfrak{B}$. Ранг пучка без кручения $\mathcal{F}$ называется *рангом* $\mathfrak{B}$. Согласно теореме Кричевера [4], всякая нетривиальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{B}$ *ранга один* по существу определяется своими спектральными данными $(X, p, \mathcal{F})$. Классификация коммутативных подалгебр в $\mathfrak{D}$ более высокого ранга гораздо сложнее, хотя основные ингредиенты $(X, p, \mathcal{F})$ также фигурируют среди классифицирующих параметров. Эта классификация появилась в работах Кричевера [2, 3, 4], и затем усовершенствовалась многими авторами: Дринфельдом, Мамфордом, Сигалом и Вилсоном, Вердье, Муласе и другими.

[7]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00178-а, № 16-01-00378-а)

Полное описание алгебр рода 1 и ранга 2 было дано Кричевером и Новиковым [5] для случая гладкой спектральной кривой. Нетрудно показать, что для любой (нормализованной) коммутативной подалгебры рода один и ранга два $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ существуют два оператора $L, M \in \mathfrak{B}$, такие что $\mathfrak{B} = \mathbb{C}[L, M]$ и

$$L = \partial^4 + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0, \quad M = 2L_+^{\frac{3}{2}}, \quad M^2 = 4L^3 + g_2L + g_3 \qquad (1)$$

для некоторых $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$. Здесь оператор $L^{\frac{3}{2}}$ берется в алгебре псевдо-дифференциальных операторов $\mathbb{C}[[x]]((\partial^{-1}))$, и $L_+^{\frac{3}{2}}$ — проекция $L^{\frac{3}{2}}$ на $\mathfrak{D}$. Описание всех возможных операторов L вида (1), удовлетворяющих ограничению $[L, M] = 0$ для $M = 2L_+^{\frac{3}{2}}$ было получено Грюнбаумом в [1]; в частности, им были получены явные формулы компактного вида для коэффициентов a_0, a_1 и a_2. Возникает естественный вопрос:

Проблема. *Как вычислить пучок $\mathcal{F}$ алгебры $\mathfrak{B} = \mathbb{C}[L, P]$ рода один и ранга два в терминах коэффициентов a_0, a_1 и a_2?*

Превиато и Вилсон дали исчерпывающий ответ на этот вопрос в случае гладкой кривой X [6, Theorem 1.2].

Та же проблема для особых кривых оказывается эффективно разрешимой с помощью преобразования Фурье-Мукаи на вейерштрассовых кубиках. Кроме вычисления спектральных пучков, оказывается возможным получить описание прямых образов пучков без кручения на рациональных особых кривых.

Список литературы

[1] F. Grünbaum, *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six*, Phys. D **31** (1988), 424–433.

[2] I. Krichever, *An algebraic–geometric construction of the Zakharov–Shabat equations and their periodic solutions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **227** (1976), no. 2, 291—-294.

[3] I. Krichever, *Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 6 (198), 183–208, 287.

[4] I. Krichever, *Commutative rings of ordinary linear differential operators*, Func. Anal. Appl. **12** no. 3 (1978), 175–185.

[5] I. Krichever, S. Novikov, *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations*, Russian Math. Surveys, **35**:6 (1980), 47–68.

[6] E. Previato, G. Wilson, *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves*, Compositio Math. **81** (1992), 107–119.

КОМПАКТИФИКАЦИЯ И КЛЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Звонилов (Анадырь), С. Ю. Оревков (Москва)
zvonilov@gmail.com, orevkov@mi.ras.ru

Односвязное объединение конечного числа двумерных сфер, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу или букету открытых кругов, назовём *поверхностью рода* 0. Введение комплексной структуры на такой поверхности, даёт *кривую рода* 0.

Осоэдром называется сфера с двумя полюсами и несколькими меридианами, причём, если меридианов больше одного, то на каждом из них отмечено несколько точек. Если отмеченные точки и, возможно, полюсы образуют множество всех критических значений рациональной функции на кривой рода 0, то прообраз осоэдра, рассматриваемого как граф на сфере, называется *осографом* на кривой рода 0.

Известны компактификации пространств рациональных функций, критические значения которых невырождены либо все (см., [1], [NT]), либо все, кроме одного (см. [E]). Мы компактифицируем пространство X_n классов изоморфизма рациональных функций степени n на сфере, у которых кратности критических значений не фиксированы. При этом к X_n добавляются рациональные функции не только на кривых с простыми двойными точками, но и на кривых рода 0. Компактификация $\bar{X}_n$ пространства X_n описывается в терминах осографов и их возмущений. Она является хаусдорфовым пространством со счётной базой, в котором X_n всюду плотно. Эта компактификация является клеточным пространством, произвольной открытой клеткой которого является множество классов рациональных функций с фиксированным осографом.

Тригональная кривая на поверхности Хирцебруха Σ_e задаётся в некоторой аффинной карте уравнением $y^3 + b(x)y + w(x) = 0$, где b и w - многочлены степеней не выше $2e$ и $3e$. Функция $j = \frac{4b^3}{d} = 1 - \frac{27w^2}{d}$, где $d = 4b^3 + 27w^2$ – дискриминант, называется *j-инвариантом* кривой. Мы доказываем, что *компактификация фактор-пространства пространства j-инвариантов тригональных кривых по действию группы $PGL(2, \mathbb{C})$ является клеточным под-*

пространством пространства $\bar{X}_n$.

Список литературы

[K] F. Knudsen, Projectivity of the moduli space of stable curves. II, Math. Scand., 1983, 52, 1225-1265.

[NT] S. Natanzon, V. Turaev, A compactification of the Hurwitz space, Topology, 1999, Vol. 38, No. 4, 889–914.

[E] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves, Invent. math., 2001, 146, 297–327.

ОДНО УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОВАЛЕВСКОЙ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ

А. А. Знаменский[8] (Красноярск)
msznam@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения в частных производных. В традиционной формулировке теоремы Коши-Ковалевской предполагается разрешенность относительно "чистой" (не смешанной) производной старшего порядка, например относительно $\partial^m/\partial x_n^m$, где m — порядок дифференциального уравнения. А именно, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_n^m} = {\sum_{|\alpha|\leqslant m}}' a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha y + f, \tag{1}$$

где

$$a_\alpha(x) = a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n), \mathcal{D}^\alpha y = \frac{\partial^{\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_n} y}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\alpha_n}},$$

а знак $\sum'$ означает суммирование по производным порядка $|\alpha| := \alpha_1+\cdots+\alpha_n \leqslant m$, кроме выделенной производной $\frac{\partial^m y}{\partial x_n^m}$. В этом случае начальные условия обычно ставятся в виде

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k}(x', 0) = y_k(x'), \quad k = 0,\ldots,m-1, \tag{2}$$

где $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Ковалевская доказала [1], что при любых аналитических в окрестности нуля коэффициентах $a_\alpha(x)$, функции $f(x)$ и начальных данных (2) задача (1), (2) имеет аналитическое решение $y(x)$, причем единственное.

В случае постоянных коэффициентов, мы рассмотрим уравнение более общего вида чем в (1). А именно, пусть дан полином

$$P = z_n^m + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha z^\alpha, \tag{3}$$

где $A \subset \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{n-1} \times \{0,1,\ldots,m-1\}$ — фиксированное конечное множество показателей. Тогда P в качестве характеристического полинома определяет дифференциальный оператор $P(\mathcal{D})$ и мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(\mathcal{D})y = f \tag{4}$$

[8]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

с правой частью $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} b_k x^k$, заданной в виде степенного ряда.

Отметим, что старший моном в P относительно переменной z_n имеет вид z_n^m, все другие мономы имеют по z_n степень ниже m, а по другим переменным — произвольные степени. Применительно к дифференциальному уравнению (4) получается, что в уравнение входит производная $\frac{\partial^m}{\partial x_n^m}$ по переменной x_n, которая является старшей производной по переменной x_n, но не обязательно старшей производной в уравнении. Тогда рассматриваемая нами задача Коши для уравнения (4) состоит в нахождении решения $y(x)$ уравнения (4) с начальными данными вида (2).

Отметим, что мы всегда можем привести начальные данные к нулевым, сделав замену $y = \tilde{y} + \phi$, где

$$\phi = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_n^j y_j(x')}{j!}.$$

Тогда при подстановке $\tilde{y} + \phi$ вместо y в k-ое уравнение системы (2), $k = 0, 1, \ldots, m-1$ мы получим равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{y} + \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_n^j y_j(x')}{j!} = y_k(x').$$

При дифференцировании суммы $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{x_n^j y_j(x')}{j!}$ первые $k-1$ слагаемые будут равны нулю, k-ое слагаемое будет равно $y_k(x')$, а остальные слагаемые занулятся, так как в них присутствует множитель x_n, равный нулю. Перенеся $y_k(x')$ в левую часть равенства и приведя подобные слагаемые, мы получим нулевые начальные условия

$$\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{y} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5}$$

Поскольку от этого преобразования вид уравнения не изменяется, далее без ограничения общности будем считать, что нулевые начальные условия даны нам изначально.

Теперь мы можем сформулировать теорему:

Теорема. *Если правая часть f уравнения* (4) *является целой функцией экспоненциального типа, то задача Коши* (4), (2) *имеет аналитическое решение, причем единственное.*

Жесткое ограничение на правую часть f уравнения обусловленно тем, что в доказательстве теоремы применяется преобразование Бореля функции f. Условие о том, что f является целой функцией экспоненциального типа, обеспечивает непустую область сходимости для указанного преобразования.

Отметим, что при произвольном носителе A суммирования в (3), ограничения на правую часть уравнения являются существенными, о чем показывает знаменитый пример Ковалевской в случае уравнения теплопроводности ([1], стр. 22).

Таким образом, обобщение вида уравнения влечет за собой ужесточение условий на правую часть. И наоборот, в случае если уравнение пренадлежит обобщенному классу Ковалевской, в [2] Коробейник показал, что существование решения обеспечивается даже при более общих классах функций, чем аналитические.

Отметим что применительно к уравнению с постоянных коэффициентами вида (1) преобразование Бореля использовалось в работе [3] для получения интегрального представления решения соответствующей задачи Коши.

Список литературы

[1] Sophie von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleiehungen, Journal für Mathematik, 1874, Bd. LXXX. Heft 1.

[2] Ю. Ф. Коробейник, Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Изв. РАН. Сер. матем., 61:3 (1997), 91–132

[3] E. Leinartas, the Cauchy problem in a class of entire functions in several variables, Banach Center Publications 33.1 (1996): 189-192.

[4] Л. И. Ронкин, Введение в теорию целых функций многих переменных, М.:Наука, 1971, 430 с.

[5] А. Г. Хованский, Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функц. анализ и его прил., 11:4 (1977), 56–64

[6] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В четырех томах. т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Перев. с англ. —М.: Мир, 1986. —455 с.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА ОТНОСИТЕЛЬНО СИНГУЛЯРНОЙ МЕРЫ

В. В. Капустин (Санкт-Петербург)
kapustin@pdmi.ras.ru

Преобразование Гильберта функции f относительно сингулярной меры μ на вещественной прямой естественно определить как предел выражений

$$\int \frac{f(x) - f(y)}{x - y + i\epsilon}\, d\mu(y) \tag{1}$$

при $\epsilon \searrow 0$. Естественно возникает вопрос об описании класса функций f (при заданной мере μ), для которых такой предел существует. Цель доклада состоит в построении такого класса функций, причём этот класс оказывается довольно широким, и предел не всегда сводится к регулярному интегралу из формулы (1), в котором $\epsilon = 0$.

Для $f \in L^2(\mu)$ определим в $L^2(\mu)$ оператор K ранга 2 формулой

$$K = (\cdot, \bar{f})1 - (\cdot, 1)f. \tag{2}$$

Обозначим через A оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$, и предположим, что в $L^2(\mu)$ существует ограниченный оператор X такой, что

$$XA - AX = K.$$

Тогда существование предела выражений (1) связано с существованием усреднённого предела операторов

$$\exp(itA)X\exp(-itA).$$

(Отметим связь этого выражения с построением нестационарных волновых операторов в теории рассеяния — в случае, когда спектры рассматриваемых самосопряжённых операторов абсолютно непрерывны относительно меры Лебега.)

В докладе будет показано, что формула (2) выполняется для любых ограниченных функций от одномерных возмущений оператора A скалярными кратными самосопряженного оператора $(\cdot, 1)1$ (взятых в качестве операторов X), и что для функций f, соответствующих непрерывным функциям от возмущённых операторов, имеется требуемая сходимость.

С другой стороны, существуют операторы X, для которых

$$XA - AX = (\cdot, \bar{f})1 - (\cdot, 1)f,$$

однако предел функций (1), рассматриваемых как элементы пространства $L^2(\mu)$, не существует.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

К. А. Кириллов[9] (Красноярск)
kkirillow@yandex.ru

Существенный интерес в теории приближенного интегрирования вызывает задача построения минимальных кубатурных (квадратурных) формул, точных для некоторого заданного набора функций, т. е. таких формул, которые точно интегрируют указанные функции, используя наименьшее возможное число узлов. Многие работы посвящены задаче построения минимальных формул приближенного вычисления интегралов, точных для алгебраических и тригонометрических многочленов (например, [Mys81, Mys85, Nosk91]).

Минимальные кубатурные (квадратурные) формулы, обладающие d–свойством Хаара в одномерном и двумерном случаях, т. е. формулы, точно интегрирующие полиномы Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d (частичные суммы рядов Хаара специального вида), построены и исследованы в [Kir02, Kir04, Kir05]. В частности, в [Kir05] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{N} C^{(i)} f(x^{(i)}, y^{(i)}) \qquad (1)$$

с узлами $(x^{(i)}, y^{(i)}) \in [0,1]^2$ и вещественными коэффициентами $C^{(i)}$ при узлах $(i = 1, 2, \dots, N)$, обладающие d–свойством Хаара (далее — d–свойством), приведены примеры минимальных формул вида (1) для $d = 1, 2, 3, 5, 6, 7$, доказана теорема, позволяющая из минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством для $d = 6$, поэтапно получить минимальные формулы для $d = 8, 10, 12, \dots$, а из минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством для $d = 7$, — минимальные формулы для $d = 9, 11, 13, \dots$

Настоящий доклад посвящен алгоритму, позволяющему для любого целого $d \geqslant 8$ построить минимальные кубатурные формулы вида (1), обладающие d–свойством, без поэтапного построения $(d - d_0 - 2)/2$ кубатурных формул, обладающих $(d_0 + 2)$,

[9] Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ "Алгебраические и аналитические методы создания алгоритмов решения дифференциальных и полиномиальных систем: факторизация, разрешение особенностей и оптимальные решетки"(государственное задание № 1.1462.2014/K)

$(d_0 + 4), \ldots, (d - 2)$–свойством, где $d_0 = 6$ при четном d и $d_0 = 7$ при нечетном d.

Список литературы

[Mys81] Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.

[Mys85] Мысовских И. П. Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности
Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25. № 8. С. 1246 – 1252.

[Nosk91] Носков М. В. О формулах приближенного интегрирования для периодических функций
Методы вычислений. Л.: Изд–во Ленингр. ун–та. 1991. Вып. 16. С. 16 – 23.

[Kir02] Кириллов К. А., Носков М. В. Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара
Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 6. С. 791 – 799.

[Kir04] Кириллов К. А. Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае
Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Спец. выпуск. С. 62 – 71.

[Kir05] Кириллов К. А. Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае
Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. Спец. выпуск. С. 29 – 47.

СТАЦИОНАРНОЕ И НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИФФУЗИОННОЙ КОЛОННЕ

С. В. Козлова[10] (Красноярск)
sonique@icm.krasn.ru

Термодиффузионная колонна — это вертикальный слой между твердыми стенками (плоскими или концентрическими цилиндрами), поддерживаемыми при различных постоянных температурах. Такие установки применяются для разделения газовых и жидких смесей. Для многокомпонентной смеси в плоской колонне теория стационарного разделения была разработана в работах [1, 2], нестационарное разделение приведено в работе [3].

В данной работе рассмотрено разделение многокомпонентной смеси в цилиндрической колонне, для которой внутренний цилиндр нагрет, внешний охлажден. Решение выполнено в цилиндрических координатах с целью учета влияние кривизны цилиндров и отношения их радиусов на процесс разделения. Для стационарного случая определены профили скорости, температуры, плотности и вертикального градиента концентрации в зависимости от управляющих параметров и от отношения радиусов цилиндров. Получены формулы для коэффициентов термодиффузии. При отношении, близком к 1, результаты соответствуют плоской колонне.

Разработана теория нестационарного разделения многокомпонентной смеси в цилиндрической колонне. Проанализирована зависимость характерного времени от отношения радиусов цилиндров. Выполнено сравнение с результатами для плоской колонны в стационарном и нестационарном случаях, а также с результатами численного эксперимента.

При решении поставленных задач применялись программные па-

[10]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16–31–00331

кеты для прикладных расчетов Maple 13 и ANSYS Fluent 14.

Список литературы

[1] Haugen K,B., Firoozabadi F., *The Journal of Chemical Physical*, **122**, 014516, 2004.

[2] Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M., On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column, *Physics of Fluids*, **19**, 027101, 2007.

[3] K. B. Haugen, F. Firoozabadi, The Journal of Chemical Physics, **127**, 154507, 2007.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АНАЛОГА ФОРМУЛЫ ПЛАНА

В. И. Кузоватов[11] **(Красноярск)**
kuzovatov@yandex.ru

Целью данной работы является получение аналога формулы Плана, которая имеет существенное значение в получении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана.

Классическая формула Плана выражает сумму значений в целых точках голоморфной и ограниченной (для всех значений z, для которых $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$, x_1, x_2 – целые числа) функции $\varphi(z)$ через некоторое интегральное представление. А именно,

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1+1) + \varphi(x_1+2) + \ldots + \varphi(x_2-1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2) =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\,dz + \int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(x_2+iy) - \varphi(x_2-iy) + \varphi(x_1-iy) - \varphi(x_1+iy)}{i\left(e^{2\pi y}-1\right)} dy.$$

Пусть $G(w)$ – рациональная функция, представимая степенным рядом

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого f_n принимают значение либо 1, либо 0.

По теореме Сеге функция $G(w)$ представима в виде

$$G(w) = \frac{P(w)}{1-w^N},$$

где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое целое неотрицательное число.

Пусть для показателей q_n мономов степенного ряда (1) выполнено условие

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} > 0,$$

а рациональная функция $G(w)$ удовлетворяет условию

$$1 + G(w) = -G\left(\frac{1}{w}\right). \tag{2}$$

Обозначим через $w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}$ полюса первого порядка функции $G(w)$, то есть $w_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

[11] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-00277, 16-31-00173)

Теорема. *Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная и ограниченная на множестве $\{x_1 \le \operatorname{Re} z \le x_2\}$. Тогда*

$$\frac{P(w_0)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\varphi(x_2)\right)+\frac{P(w_1)}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{1}{N}\big)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\varphi\big(x_2-1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{1}{N}\big)\right)+\frac{P(w_2)}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{2}{N}\big)+\right.$$
$$\left.+\varphi\big(x_1+2-\frac{2}{N}\big)+\ldots+\varphi\big(x_2-1-\frac{2}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{2}{N}\big)\right)+\ldots+$$
$$+\frac{P(w_{N-1})}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{N-1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{N-1}{N}\big)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\varphi\big(x_2-1-\frac{N-1}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{N-1}{N}\big)\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+$$
$$+\frac{1}{i}\int\limits_0^\infty\big[\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)\big]F(y)\,dy.$$

Здесь $F(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-q_n 2\pi y}$.

Заметим, что функции $G(w)$ и $F(y)$ связаны между собой заменой $w=e^{-2\pi y}$.

Примером рациональной функции $G(w)$, удовлетворяющей представлению (1) и условию (2), может служить функция

$$G(w)=\frac{w+w^3+w^4}{1-w^4}.$$

К3 ПОВЕРХНОСТИ С ДЕЙСТВИЯМИ ГРУППЫ $\mathbb{S}_4$ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАРТИКИ

Вик. С. Куликов[12] (Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва)
kulikov@mi.ras.ru

Одним из важнейших и наиболее интенсивно исследуемых классов двумерных алгебраических многообразий является класс, состоящий из К3 поверхностей, и в последнее время наибольший интерес вызывают вопросы, связанные с действиями конечных групп на К3 поверхностях. В докладе будут рассмотрены действия симметрической группы $\mathbb{S}_4$ на $K3$ поверхностях X, удовлетворяющие следующему условию:

(∗) *существует эквивариантное бирациональное стягивание* $\overline{c}: X \to \overline{X}$ *на* $K3$ *поверхность* $\overline{X}$ *с* ADE*-особенностями такое, что фактор-пространство* $\overline{X}/\mathbb{S}_4$ *изоморфно проективной плоскости* $\mathbb{P}^2$.

Чтобы сформулировать основной результат, обозначим через $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^{14}$ многообразие плоских рациональных квартик $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg C = 4$. Полный список возможных типов особых точек плоских рациональных квартик дан в [2]. В обозначениях, предложенных В. И. Арнольдом, этот список (поделенный на два класса мною) состоит из:

$$\begin{array}{ll} I: & 3A_1,\ D_4,\ A_1+A_3,\ A_5,\ 2A_1+A_2,\ D_5,\ A_2+A_3,\ A_1+2A_2,\ 3A_2; \\ II: & A_1+A_4,\ A_2+A_4,\ A_6,\ E_6. \end{array}$$

Скажем, что неприводимый росток (C', z) кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ имеет *особенность типа* F_r, $r \geq 1$, или (что тоже самое) точка z является r*-кратной точкой перегиба* ростка (C', z), если этот росток в точке z неособ и в этой точке имеет с касательной к нему прямой $L \subset \mathbb{P}^2$ индекс пересечения $(C', L)_z = r + 2$. Отметим, что если плоская квартика C имеет неприводимый росток (C', z) с особенностью типа F_r, то $r \leq 2$ и если $r = 2$, то C неособа (в обычном смысле) в точке z.

Многообразие $\mathcal{Q}$ имеет естественную эквисингулярную стратификацию, страты $\mathcal{C}(S)$ которой определяются наборами S возможных типов (в расширенном смысле) особенностей рациональных квартик,

[12]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005)

$\mathcal{Q} = \bigsqcup\limits_{S} \mathcal{C}(S)$. Объединяя некоторые страты эквисингулярной стратификации в один, определим на $\mathcal{Q}$ более грубую стратификацию $\mathcal{Q} = \bigsqcup\limits_{\overline{S}} \mathcal{C}(\overline{S})$, которую будем называть *квази-эквисингулярной стратификацией.* А именно, положим

$$\overline{3A_1 + aF_1 + bF_2} = \overline{D_4 + aF_1 + bF_2},$$

$$\overline{A_1 + A_3 + aF_1 + bF_2} = \overline{A_5 + aF_1 + bF_2},$$

где $a + 2b = 6$, и $\overline{S} = S$ во всех остальных случаях, т.е стратами квази-эквисингулярной стратификации являются страты

$$\mathcal{C}(\overline{3A_1 + aF_1 + bF_2}) = \mathcal{C}(3A_1 + aF_1 + bF_2) \cup \mathcal{C}(D_4 + aF_1 + bF_2),$$

$$\mathcal{C}(\overline{A_1 + A_3 + aF_1 + bF_2}) = \mathcal{C}(A_1 + A_3 + aF_1 + bF_2) \cup \mathcal{C}(A_5 + aF_1 + bF_2)$$

и $\mathcal{C}(\overline{S}) = \mathcal{C}(S)$ для всех остальных типов особенностей.

Теорема. *С точностью до эквивариантных деформаций* $\mathbb{S}_4$-*поверхностей существует ровно* 15 *различных действий симметрической группы* $\mathbb{S}_4$ *на* $K3$ *поверхностях, удовлетворяющих условию* $(*)$, *и эти действия взаимно однозначно соответствуют квази-эквисингулярным стратам многообразия плоских рациональных квартик, имеющих особенности, принадлежащие классу* I *(т.е. не имеющих особенностей типа* A_4, A_6 *и* E_6*).*

Доказательство этой теоремы условно может быть разбито на три части. Во-первых, показывается, что для любого действия группы $\mathbb{S}_4$ на $K3$ поверхности X, удовлетворяющего условию $(*)$, кривая ветвления $\overline{B}$ фактор-накрытия $\overline{X} \to \overline{X}/\mathbb{S}_4 \simeq \mathbb{P}^2$ является, так называемой, обобщенной двойственной кривой к некоторой плоской рациональной квартике C с особенностями из класса I. Во-вторых, для любой обобщенной двойственной кривой $\overline{B}$ строится накрытие Галуа $\overline{X} \to \mathbb{P}^2$ с группой Галуа $\mathbb{S}_4$, разветвленное вдоль $\overline{B}$ и такое, что $\overline{X}$ является $K3$ поверхностью с ADE-особенностями (это накрытие является галуивизацией дуализирующего накрытия плоскости, определенного в [1] и ассоциированного с квартикой C). В-третьих, показывается, что для каждой кривой $\overline{B}$ такое накрытие Галуа единственно и что индуцированные действия группы $\mathbb{S}_4$ на минимальных разрешениях особенностей X_1 и X_2 поверхностей $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ являются эквивариантно деформационно эквивалентными тогда и только тогда, когда кривые ветвлений $\overline{B}_i$ накрытий $\overline{X}_i \to \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, являются обобщенными двойственными кривыми к кривым C_i, принадлежащим к одному и тому же страту квази-эквисингулярной стратификации многообразия плоских рациональных квартик с особенностями из класса I.

Список литературы

[1] Вик.С. Куликов: *Дуализирующие накрытия плоскости,* Известия РАН, Сер. матем. **79:5** (2015), 163-192.

[2] C.T.C. Wall: *Geometry of quartic curves,* Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc., **117:3** (1995), 415-424.

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Р. Куликов[13] (Сибирский федеральный университет, Красноярск)

v.r.kulikov@mail.ru

Г. Меллин в 1921 году привел интеграл Меллина–Барнса, представляющий решение $y(x)$ приведенного алгебраического уравнения вида

$$y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_{n-1} y - 1 = 0.$$

Этот интеграл имеет непустую область сходимости, она определяется условиями на аргументы $\theta_j = \arg x_j$. Полная область сходимости такого интеграла была получена сравнительно недавно в статье И.А. Антиповой [3]

В настоящей статье речь идет об аналогичных исследованиях в многомерной ситуации. Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0, \; j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n$. Также введем обозначение $\Lambda := \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \Lambda^{(j)}$ для дизъюнктной суммы множеств $\Lambda^{(j)}$. Мощность множества Λ обозначим N. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторерк пространство $\mathbb{C}^\lambda \cong \mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$. Группу координат, соответствующую индексам $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ мы, как правило, выделяем записью $x_\lambda^{(i)}$, при этом отождествляя $\mathbb{C}^\Lambda$ с пространством $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$; иногда для элементов из $\mathbb{C}^{\Lambda^{(i)}}$ мы используем обозначение x_λ, $\lambda \in \Lambda^{(i)}$.

Множество Λ также будем трактовать как матрицу

$$\Lambda = \left(\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(n)}\right) = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^N\right),$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ из показателей мономов системы (1). Здесь имеется ввиду, что блок $\Lambda^{(i)}$ матрицы Λ соответсвтует i-му уравнению системы (1), а нумерация столбцов λ^k внутри каждого из блоков $\Lambda^{(i)}$ произвольная, но фиксированная.

[13]Автор поддержан грантом Правительства РФ для исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор № 14.Y26.31.0006

Строки матрицы Λ мы обозначим $\varphi_j,\ j=1,...,n$. Нас будет интересовать ветвь решения $y(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$ системы (1) с условием $y(0)=(1,\ldots,1)$, которую назовем главным решением. Следуя работам [2], [4], моному $y^\mu = y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n}$ главного решения $y=y(x)$ данной системы поставим в соответствие интеграл Меллина-Барнса:

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)}Q(u)x^{-u}du, \quad (2)$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\{u\in\mathbb{R}^N_{>0}:\langle\varphi_j,u\rangle<\mu_j, j=1,...,n\},$$

а $Q(u)$ — многочлен выражаемый определителем

$$Q(u)=\frac{1}{m_1\ldots m_n}\det\left\|\delta_i^j\left(\mu_j-\langle\varphi_j,u\rangle\right)+\langle\varphi_j^{(i)},u^{(i)}\rangle\right\|_{i,j=1}^{n}. \quad (3)$$

Интеграл (2) получается формальным вычислением преобразования Меллина для $y^\mu(x)$ с помощью замены (линеаризации).

Рассмотрим матрицы составленные из показателей мономов, входящих в систему (1) следующего вида:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)}\end{pmatrix}, \quad (4)$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)}=\left(\lambda_1^{(j)}\ldots\lambda_n^{(j)}\right)^T$ пробегает соответствующее множество $\Lambda^{(j)}$.

Будем называть минор матрицы главным, если номера отмеченных строк совпадают с номерами отмеченных столбцов.

Теорема. *Интеграл* (2)*, соответствующий решению системы алгебраических уравнений* (1)*, имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда во всех матрицах вида* (4) *все главные миноры положительны.*

В доказательстве сформулированной теоремы используется результат Л. Нильсон, М. Пассаре и А.К. Циха (см. [1] или [5, раздел

4.4.1]) о множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса. Кроме того важную роль в доказательстве играет теорема о разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [6, с. 134]

Список литературы

[1] Nilsson L., *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions,* Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

[2] И. А. Антипова, *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды*, Сиб. матем. журн., **44**:5 (2003), 972–980

[3] И. А. Антипова, *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений*, Матем. сб., **198**:4 (2007), 3–20

[4] В. А. Степаненко, *О решении системы пп алгебраических уравнений от пп неизвестных с помощью гипергеометрических функций*, Вестн. Красноярск. гос. ун-та, 2003, № 1, 35–48

[5] Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. - М.: Наука, 2014. - 408 с.

[6] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – Новое изд., перераб. – М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.

ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОГОМОЛОГИИ ГИПЕРКЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Н. Н. Курносов[14] **(Москва)**
nikon@mccme.ru

Определение. Риманово многообразие называется **гиперкэлеровым**, если существует тройка комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям и Кэлеровых относительно метрики g.

Согласно теореме Богомолова все компактные гиперкэлеровы многообразия накрываются произведением торов и простых (т.е. односвязных и с $H^{2,0} = \mathbb{C}\Omega$) гиперкэлеровых многообразий. На данный момент известно всего четыре деформационно неэкивалентных примера простых гиперкэлеровых многообразий. Это схемы Гильберта n точек над K3, обобщённые многообразия Куммера и два спорадических примера О'Грэди. Бовилль выдвинул гипотезу, что существует только конечно число деформационно неэквивалентных простых гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности.

В размерности четыре это было доказано Гуаном [G]. В нашей работе мы получили обобщение его результатов в больших размерностях. В частности, используя инварианты Розанского-Виттена, в размерности шесть можно доказать следующую

Теорема ([K1]). *Пусть M компактное неприводимое гиперкэлеровое многообразие размерности шесть, тогда выполнено*

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{1}{2}b_5 + \frac{23}{2}h^{2,2} \leq \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1} \tag{1}$$

Более того, в малых размерностях можно получить ограничения на второе число Бетти b_2, используя действие алгебры Ли $\mathfrak{so}(b_2 + 2)$ на когомологиях гиперкэлерова многообразия. Недавно Сейвон ([S]) показал, что b_2 ограничено 23 в размерности шесть и Курносов ([K2])

[14]Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ. Автор частично поддержан грантом РНФ (соглашение 14-21-00053 от 11.08.14) и конкурсом «Молодая математика России»

доказал, что b_2 не может быть выше, чем 24 в размерностях восемь и десять.

Список литературы

[G] D. Guan, On the Betti numbers of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four, *Math. Res. Lett.*, **8**, 5-6, pp 663-669, 2001.

[K1] Н. Курносов, О неравенстве для чисел Бетти гиперкэлеровых многоообразий размерности шесть, *Матем. заметки*, **99:2** (2016), стр. 309–313.

[K2] N. Kurnosov, Boundness of b2 for hyperkähler manifolds with vanishing odd-Betti numbers, arXiv: 1511.02838.

[S] J. Sawon, A bound on the second Betti number of hyperkähler manifolds of complex dimension six , arXiv: 1511.09105.

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА $\mathbb{P}^3$

А. А. Кытманов[15] (Красноярск), С. А. Тихомиров (Ярославль)
aakytm@gmail.com, satikhomirov@mail.ru

Проблема исследования пространств модулей стабильных расслоений на $\mathbb{P}^3$ и компонент в них является одной из основных проблем современной алгебраической геометрии.

В докладе будет рассказано о задачах, касающихся данной проблемы и успешно решенных при помощи теоретико-числовых алгоритмов с использованием средств компьютерной алгебры. В частности, будут впервые приведены точные формулы, позволяющие элементарным образом вычислять размерности компонент Эйна стабильных расслоений ранга 2 с нулевым первым классом Черна на $\mathbb{P}^3$, а также спектры расслоений, соответствующие данным компонентам.

[15]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15–31–20008–мол а вед (первый и второй авторы), 14–01–00283–а (первый автор), а также грантов Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания 1.1462.2014/K (первый автор) и базовой части государственного задания 1.14.365 (второй автор)

ТРОПИЧЕСКИЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ НАД ПОЛЕМ РЯДОВ ПЬЮИЗО

И. А. Лопатин[16] (Красноярск)
alvamgen@gmail.com

В тропической геометрии изучаются тропические гиперповерхности, являющиеся предельными образами амеб алгебраических гиперповерхностей. Напомним [GKZ94], что *амебой* A_f алгебраической гиперповерхности V_f, определяемой уравнением

$$f(z) = \sum_{\alpha \in A \subset \mathbb{N}^n} {}_{\alpha} z^{\alpha} = 0 \tag{1}$$

где $c_\alpha \in \mathbb{C}$, называется её образ при отображении $\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_{\leqslant 0}$:

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (|z_1|, \ldots, |z_n|)$$

Известно, что дополнение $A_f^c = \mathbb{R}^n \setminus A_f$ до амебы A_f в $\mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа связных компонент (далее — компонент). Для каждой компоненты дополнения определено [FPT00] следующее отображение $\mathbb{R}^n \setminus A_f \to \mathbb{Z}^n$, $x \to \nu$ называемое порядком компоненты:

$$\nu_j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{z_j \partial_j(z)}{f(z)} \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{z_1 \ldots z_n}$$

Тропическим полукольцом [MS15] называется множество $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, снабженное операциями $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и $x \odot y = x + y$. Под тропическим многочленом понимается выражение вида

$$F(x) = \bigoplus_{\alpha \in A \subset \mathbb{N}^n} a_\alpha \odot x^{\odot \alpha} \tag{2}$$

В терминах классических арифметических операций его значение в точке x вычисляется по формуле:

$$F(x) = \max_{\alpha \in A \subset \mathbb{N}^n} \{a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle\} \tag{3}$$

Определение ([MS15])**.** Тропической гиперповерхностью, определенной тропическим многочленом (2) называется множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что максимум в выражении (3) достигается как минимум на двух тропических мономах одновременно.

[16]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006)

В терминах тропической гиперповерхности удобно дать определение *спайна* амебы. Для данной амебы $\mathcal{A}_f$ через A^* обозначим множество таких точек $\nu \in N_f$, что $\mathcal{A}_f^c$ имеет компоненту порядка ν. Для данного $\alpha \in A^*$ обозначим:

$$s_\alpha = \operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Log}^{-1}(x)} \frac{\log(f(z)/z^\alpha) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{z_1 \dots z_n}$$

где x — точка из соответствующей компоненты дополнения.

Определение ([PR04])**.** Спайном S_f амебы $\mathcal{A}_f$ называется тропическая гиперповерхность, определяемая тропическим многочленом

$$\bigoplus_{\alpha \in A^*} s_\alpha \odot x^{\odot \alpha}$$

В докладе будут рассматриваться алгебраические уравнения вида

$$f(z) = \sum_{\alpha \in A \subset \mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha = 0 \tag{4}$$

где c_α принадлежат полю формальных дробностепенных рядов Пьюизо $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Через $\operatorname{val}(c_\alpha)$ обозначим порядок ряда c_α. Тропическим многочленом, ассоциированным с многочленом (4) называется многочлен

$$\bigoplus_{\alpha \in A} \operatorname{val}(c_\alpha) \odot x^{\odot \alpha} \tag{5}$$

Под решением уравнения (4) будем понимать замыкание множества

$$\{(\operatorname{val}(z_1), \dots, \operatorname{val}(z_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(z) = 0\} \tag{6}$$

Ставится задача отыскания таких коэффициентов c_α, что множество (6) совпадает со спайном амебы $\mathcal{A}_f$. Также рассматривается задача оценки сложности нахождения таких c_α. В докладе на ряде примеров будет описана работа алгоритма, решающего данную задачу.

Список литературы

[GKZ94] I. Gelfrand, M. Kapranon, A. Zelevinsky: Discriminants, resultants and multidimenstional determinants, Boston, MA: Birkhäuser Boston, Math. Theory Appl., 1994, 523 p.

[FPT00] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh: Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, Adv. in Math. 151 (2000), 45-70.

[MS15] D. Maclagan, B. Sturmfels: Introduction to tropical geometry, Graduate studies in mathematics, AMS, 161 (2015), 363 p.

[PR04] M. Passare, H. Rullgård: Amoebas, Monge-Ampáre measures, and triangulations of the Newton polytope, Duke Math. J, 121 (2004), 481–507.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ЧИСЛА ПУТЕЙ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

А. П. Ляпин[17] (Красноярск)
LyapinAP@yandex.ru

Обозначим $x = (x_1, ..., x_n)$ точки n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, и $A = \{\alpha\}$ – конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^n$. Пусть $g(x)$ – некоторая заданая на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функция.

Разностным уравнением относительно неизвестной функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, ..., x_n)$ с постоянными коэффициентами c_α называется соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x).$$

Выделим подмножество точек $X_0 \subset X$, которые будем называть начальными и сформулируем задачу Коши: найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую разностному уравнению и совпадающую на множестве X_0 с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0.$$

Производящей функцией решения $f(x)$ данной задачи Коши назовем ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}.$$

Метод производящих функций является одним из самых развитых теоретических методов комбинаторного анализа, а сами производящие функции являются важным инструментом решения задач перечислительного комбинатрного анализа, которые возникают при определении способов перебора элементов конечного множества. Метод производящий функций используется для получения комбинаторных тождеств, введения специальных чисел и полиномов и для исследования их асимптотического поведения ([1, 3, 5]).

Одной из известных и важных задач перечислительной комбинаторики является задача об отыскании числа путей на целочисленной решетке ([1, 4]).

[17] Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00283.

Пусть задано множество $S = \{h^1, \ldots, h^k\}$, где $h^i = (h^i_1, \ldots, h^i_n) \in \mathbb{Z}^n_0$ для всех $i = 1, \ldots, k$ — «шаги» на целочисленной решетке. Обозначим через $f(x)$ число различных путей, которыми можно попасть из начала координат в точку $x \in \mathbb{Z}^n_0$.

На основе методов, полученных в работе [2], разработан вычислительный алгоритм для отыскания производящей функции решения задачи Коши, описывающей число путей на целочисленной решетке.

Список литературы

[1] M. Bousquet-Melou, M. Petkovsek, Linear recurrences with constant coefficient: the multivariate case, Discrete Mathematics, 2000, 225, 51–75.

[2] Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин, О рациональности многомерных возвратных степенных рядов. Журнал Сиб. Федер. Ун-та, 2009, Т.2, Вып. 4, 449–455.

[3] Т. И. Некрасова, Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки, Журнал Сиб. Федер. Ун-та, 2011, Т.5, Вып. 4, 576–580.

[4] Т. И. Некрасова, Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных раностных уравнений, Известия Ирк. Гос. Ун-та, 2013, Т.6, Вып. 3, 88–96.

[5] Р. Стенли, Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990. 440 с.

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ И РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫТИЯ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ГРАФОВ.

А. Д. Медных (Институт математики им. С. Л. Соболева СО АН, Сибирский федеральный университет)
mednykh@math.nsc.ru

Теория групп автоморфизмов римановых поверхностей активно развивается, начиная с работ Гурвица конца 19 века и по настоящее время. Возникающие здесь идеи лежат на пересечении теории функций комплексного переменного, алгебраической геометрии, теории групп, теории графов, криптографии и других разделов современной математики. Гурвиц представлял риманову поверхность как разветвленное накрытие над сферой и, тем самым, заложил основы теории голоморфных отображений комплексных многообразий. В докладе будет проведена историческая параллель между теорией голоморфных отображений римановых поверхностей и теорией разветвленных накрытий графов. Последнее направление возникло в последние 10–15 лет и находит существенные приложения в теории кодирования, финансовой математике и в тропической математике. В докладе будут изложены недавние результаты теории разветвленных накрытий графов и намечены дальнейшие пути ее развития.

ТЕОРЕМА СОКРАЩЕНИЯ ДЛЯ НУЛЬМЕРНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ МОТИВОВ.

А. А. Мингазов (Самара)
mingazov88@gmail.com

Пусть k — совершенное поле. Пусть $DM^-(k)$ — категория мотивов Воеводского, то есть полная триангулированная подкатегория в производной категории пучков Нисневича с трансферами, состоящая из комплексов, когомологии которых являются гомотопически инвариантными пучками. В. Воеводским в статье [V] доказана следующая

Теорема. *Пусть X, Y — гладкие многообразия над полем k. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{DM^-(k)}(M(X)(1), M(Y)(1)) = \mathrm{Hom}_{DM^-(k)}(M(X), M(Y)).$$

Следствие. *Пусть X, Y — гладкие многообразия над совершенным полем k, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{DM^-(k)}(M(X)(n), M(Y)(n)) = \mathrm{Hom}_{DM^-(k)}(M(X), M(Y)).$$

Мы вводим некоторый вариант категории относительных мотивов $D_{\mathcal{M}}(S)$ над гладким аффинным многообразием S и доказываем следующий вариант теоремы сокращения.

Теорема 1. *Пусть X, Y — конечные этальные k-многообразия над гладким аффинным k-многообразием S. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X)(1), M^S(Y)(1)) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X), M^S(Y)).$$

Доказать данное утверждение удается за счет явного вычисления мотива относительной кривой [SV1, теорема 3.1]. Вопрос о возможности обобщения этой теоремы до аналога следствия 3 остается открытым.

Теорема 1 может использоваться для доказательства некоторых свойств гомоморфизма Гизина в категории $DM(k)$, например, в статье [M].

Список литературы

[SV1] Suslin A., Voevodsky V. Singular Homology of Abstract Algebraic Varieties. // Inv. Math. 123, 1996, 61–94.

[SV2] Suslin A., Voevodsky V. Bloch–Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients. // The arithmetics and geometry of algebraic cycles, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 117–189.

[V] Voevodsky V. Cancellation theorem. // Doc. Math. Extra Volume in honor of A. Suslin, 2010, 671–685.

[M] Мингазов А. А. Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера. // Алгебра и Анализ, 27:4, 2015, 59–73.

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Е. Н. Михалкин[18] (Красноярск)
mikhalkin@bk.ru

Уравнение от k неизвестных $y = (y_1, \dots, y_k)$ имеет следующий вид:

$$f(y_1, \dots, y_k) := \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in A} a_\alpha {y_1}^{\alpha_1} \dots {y_k}^{\alpha_k} = 0, \tag{1}$$

где $A \subset \mathbb{Z}^k$ – фиксированное конечное множество показателей, порождающее решетку $\mathbb{Z}^k$ как аддитивную группу, а коэффициенты a_α – переменные. Множество коэффициентов (оно же и множество уравнений (1), и множество полиномов Лорана f с показателями $\alpha \in A$) пробегает пространство $\mathbb{C}^A$, размерность которого равна мощности A.

В этом уравнении можно зафиксировать $k + 1$ коэффициентов, а именно, достаточно рассматривать приведенное уравнение

$$F(y_1, \dots, y_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_k^{\alpha_{ik}} + \sum_{i=1}^{m} x_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \dots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0, \tag{2}$$

где матрица $\delta = (\alpha_{ij}),\ i, j = 1, \dots, k$ невырожденная. Дискриминантное множество ∇_A этого уравнения допускает параметризацию Горна-Капранова по формуле $x = (Bs)^B$. Здесь B – соответствующий приведению (2) правый аннулятор ранга $m = \#A - k - 1$ для матрицы из вектор столбцов $\alpha \in A$, дополненной строкой из единиц.

Пусть $b_0, b_1, \dots, b_k$ – первые $k + 1$ строк матрицы B. В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1. *Вектор-функция $y(s) = (y_1(s), \dots y_k(s))$ с координатами*

$$y_j(s) = \prod_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\langle b_\nu, s\rangle}{\langle b_0, s\rangle} \right)^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{3}$$

где $\chi_{j\nu}$ – (j, ν)-ый элемент матрицы δ^{-1}, удовлетворяет системе

$$F(y) = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0,$$

[18]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006)

т.е. параметризует набор особых точек гиперповерхности $F(y) = 0$.

Для иллюстрации Теоремы рассмотрим приведенное уравнение

$$F(y_1, y_2) = 1 + y_1 + y_2 + x_1 y_1^3 y_2 + x_2 y_1^6 y_2^3 = 0. \qquad (4)$$

Для него матрица A следующая:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В качестве правого аннулятора ранга 2 для A выберем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t,$$

записанную в транспонированном виде. Участвующая в формулировке Теоремы 1 матрица δ – единичная. Поэтому сингулярные точки гиперповерхности $F(y) = 0$ параметризуются вектор-функцией $y(s) = (y_1(s), y_2(s))$:

$$y_1(s) = \frac{-3-6s}{3+8s}, \quad y_2(s) = \frac{-1-3s}{3+8s},$$

где $s = s_2/s_1$ – аффинная координата в $\mathbb{CP}_1$. Особая точка $y\big(-\frac{1}{4}\big)$ – не морсовская (в ней гессиан $\det \partial^2 F/\partial y_i \partial y_j$ равен нулю), остальные особые точки $y(s)$ – морсовские.

Список литературы

[GKZ] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser: Boston, 1994.

[Pass-Tsikh] Passare M., Tsikh A. *Algebraic equations and hypergeometric series.* In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer: Berlin-Heidelberg-New York. 2004. P. 653 – 672.

О ПРОДОЛЖИМОСТИ КРАТНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В СЕКТОРИАЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ ПУТЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. Д. Мкртчян[19] (Красноярск)
Alex0708@bk.ru

Рассмотрим n-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_k f_k z^k. \tag{1}$$

Следуя В. Иванову [1], введем следующее множество

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln|\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\},$$

неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$ при некоторой константе $C_{\nu.\theta}$. Обозначим $T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm\frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, ..., \theta_n)$,

$$\mathcal{M}_\varphi := \{\nu \in [0,\pi]^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \quad \text{для любого } \ \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Пусть G секториальное множество вида

$$G = \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} G_\nu, \text{где} \tag{2}$$

$G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times ... \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n})$ а $\Delta_\sigma -$ сектор $\{z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C} : |\theta| \leq \alpha\}$.

Теорема. *Сумма ряда* (1) *аналитически продолжается в секториальную область* G *вида* (2)*, если найдется интерполирующая коэффициенты* f_k *целая функция* $\varphi(\zeta)$ *экспоненциального типа и вектор-функция* $\nu(\theta)$*, заданная на кубе* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ *и принимающая значения в* $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$*, для которых*

$$\nu_j(\theta) \leq a|\sin\theta_j| + b\cos\theta_j, \ \ j = 1, ..., n,$$

с некоторыми константами $a \in [0,\pi), \ \ b \in [0,\infty)$.

[19]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1. а также при поддержке фонда «Династия»

В доказательстве используется теория многомерных вычетов и принцип разделяющих циклов, позволяющий выразить интеграл мероморфной дифференциальной формы по остову полиэдра через сумму логарифмических вычетов внутри полиэдра [2].

Список литературы

[1] В. К. Иванов, Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов. Мат. сборник, 1959, т.47(89), н.1.

[2] A. K. Tsikh, Multidimensional residues and their applications. AMS. 103, Providence, 1992.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Е. К. Мышкина[20] (Красноярск)
elfifenok@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений вида

$$f_i(z_1,\dots,z_n)=(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}}+Q_i(z_1,\dots,z_n)=0,\quad (1)$$

где m_{ij} — натуральные числа, a_{ij} — комплексные числа, различные при каждом фиксированном j (в статье [1] был рассмотрен случай, когда все $a_{ij}\neq 0$,) $Q_i(z)$ — многочлены вида,

$$Q_i(z)=z_1\cdots z_n\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}C^i_\alpha z^\alpha,\qquad (2)$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$, $\deg_{z_j}Q_i\leqslant m_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$, для тех a_{ij}, для которых $a_{ij}\neq 0$. Если $a_{ij}=0$, то ограничение на степень $\deg_{z_j}Q_i$ отсутствует.

Обозначим через $q_i(z_1,\dots,z_n)$ выражение вида

$$q_i(z_1,\dots,z_n)=(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}}.\quad i=\overline{1,n},$$

Определим функции

$$h_i(z)=\begin{cases} q_i(z), & \text{если } a_{ij}\neq 0,\quad \text{для всех}\quad j;\\ q_i(z)\cdot\frac{1}{z_{j_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{z_{j_k}}, & \text{если } a_{ij_1}=\ldots=a_{ij_k}=0.\end{cases}$$

Система уравнений $h_i(z)=0,\quad i=\overline{1,n}$ имеет $n!$ изолированных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ ($\overline{\mathbb{C}}^n$ пространство теории функций). Пусть $J=(j_1,\dots,j_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1,\dots,n)$, тогда эти корни можно записать в виде

$$\widetilde{a}_J=\begin{cases}(1/a_{1j_1},\dots,1/a_{nj_n}), & \text{если все } a_{kj_k}\neq 0;\\ (1/a_{1j_1},\dots,\infty_{[i_1]},\dots,\infty_{[i_k]},\dots,1/a_{nj_n}), & \text{если } a_{i_1j_{i_1}}=\ldots=\\ & \qquad =a_{i_kj_{i_k}}=0.\end{cases}$$

где $k,j=\overline{1,n}$.

[20] Работа выполнена при поддержке РФФИ: 15-01-00277, 15-31-20008, 16-31-00173

Делая замену в системе (1) $z_i = \dfrac{1}{w_i}$, предполагая, что все $w_j \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, получаем
$$\widetilde{f}_i(w) = \widetilde{q}_i(w) + \widetilde{Q}_i(w),$$
где функции $\widetilde{q}_i(w) = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, многочлены $\widetilde{Q}_i = w^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot w^{m_{in}} \cdot Q_i\left(\dfrac{1}{w_1}, \ldots, \dfrac{1}{w_n}\right)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Обозначим через $z_j = (z_{j1}, \ldots, z_{jn})$, $j = 1, \ldots p$ — корни системы (1) с функциями Q_i вида (2), не лежащие на координатных плоскостях.

Пусть $\widetilde{\Delta}$ — якобиан системы функций $\widetilde{f}_1(w), \ldots, \widetilde{f}_n(w)$.

Теорема. *Для системы (1) с функциями f_j вида (1), Q_j вида (2) справедливы формулы*

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \sum_{K \in \Re} (-1)^{||K||} \sum_{J} (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K,J)!} \times$$
$$\times \frac{\partial^{||\beta(K,J)||}}{\partial w^{\beta(K,J)}} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^K(J)}{\widetilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=a_J},$$

где конечное множество индексов

$$\Re = \{K = (k_1, \ldots, k_n) | \quad \exists i : \gamma_i + 2 > \|K\| = k_1 + \ldots + k_n, \quad i = \overline{1, n}\},$$

$$a_J = (a_{1j_1}, \ldots, a_{nj_n})$$

$(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка,

$$\widetilde{q}^{K+I}(J) = \widetilde{q}_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \ldots \cdot \widetilde{q}_n^{k_n+1}[i_n],$$

а $\widetilde{q}_j[i_j]$ — это произведение всех $(w_1 - a_{j1})^{m_{j1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{jn})^{m_{jn}}$ кроме $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$,

$$\beta(K, J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1, \ldots, m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1),$$

$$\beta(K, J)! = \prod_j (m_{ji_j} \cdot (k_{i_j} + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{||\beta(K,J)||}}{\partial w^{\beta(K,J)}} = \frac{\partial^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1}+1) - 1 + \ldots + m_{ni_n} \cdot (k_{i_n}+1) - 1}}{\partial w_1^{m_{1i_1} \cdot (k_{i1}+1) - 1} \cdot \ldots \cdot \partial w_n^{m_{nin} \cdot (k_{in}+1) - 1}}.$$

Список литературы

[1] А. М. Кытманов, Е. К. Мышкина, О вычислении степенных сумм корней одного класса систем неалгебраических уравнений, Сибирские Электронные Математические Известия, 2015, т. 12, 190–209.

РЕЗУЛЬТАНТ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Я. М. Наприенко[21] (Красноярск)
ya.naprienko@gmail.com

Определение. Для целой функции $g(z)$ и многочлена $f(z)$ с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ обозначим суммы значений функции в корнях многочлена:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} g^k(\alpha_i)$$

Определение. Результантом для целой функции $g(z)$ и многочлена $f(z)$ с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ будем называть выражение

$$R(f, g) = \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$$

Теорема. *Пусть целая функция $g^k(z)$ и многочлен $f(z)$ имеют следующие ряды:*

$$g^k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(k)} z^j = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + \dots + b_n^{(k)} z^n + \dots$$

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

Тогда справедлива формула:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} g^k(\alpha_i) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_n^m} \begin{bmatrix} nb_0^{(k)} & b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & \dots & b_m^{(k)} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ma_{n-m} & a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

Теорема. *Результант для целой функции $g(z)$ и многочлена $f(z)$ выражается с помощью введёных сумм через определитель*

$$R(f, g) = \prod_{k=1}^{n} g(\alpha_k) = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \dots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ S_n & S_{n-1} & S_{n-2} & \dots & S_1 \end{bmatrix},$$

[21] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-00173)

Для подсчёта степенных сумм необходимы коэффициенты степени ряда. Их можно получить при помощи следующей теоремы:

Теорема. *Через коэффициенты степенного ряда*

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

можно выразить коэффициенты ряда, возведённого в степень n

$$g^n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(n)} z^j = b_0^{(n)} + b_1^{(n)} z + \dots + b_k^{(n)} z^k + \dots$$

при помощи формулы:

$$b_k^{(n)} = \frac{a_0^{n-k}}{k!} \begin{bmatrix} na_1 & -1a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2na_2 & (n-1)a_1 & -2a_0 & \dots & 0 \\ 3na_3 & (2n-1)a_2 & (n-2)a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ kna_k & ((k-1)n-1)a_{k-1} & ((k-2)n-2)a_{k-2} & \dots & (n-(k-1))a_1 \end{bmatrix}$$

Целую функцию $f(z)$ конечного порядка роста p с конечным числом нулей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ отличных от нуля, по теореме Адамара о разложении на множители можно представить в виде

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z),$$

где $Q(z)$ — многочлен степени не выше p, а $P(z)$ — многочлен степени n с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Теорема. *Коэффициенты многочлена*

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} d_i z^i = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n$$

можно выразить по формуле

$$d_k = \frac{-\begin{bmatrix} (m+p)\tilde{a}_{m+p} & \dots & (m+p+1)\tilde{a}_{m+p+1} & \dots & (p+1)\tilde{a}_{p+1} \\ (m+p+1)\tilde{a}_{m+p+1} & \dots & (m+p+2)\tilde{a}_{m+p+2} & \dots & (p+2)\tilde{a}_{p+2} \\ \dots & & & & \\ (2m+p-1)\tilde{a}_{2m+p-1} & \dots & (2m+p)\tilde{a}_{2m+p} & \dots & (m+p)\tilde{a}_{m+p} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (m+p)\tilde{a}_{m+p} & \dots & (p+1)\tilde{a}_{p+1} \\ (m+p+1)\tilde{a}_{m+p+1} & \dots & (p+2)\tilde{a}_{p+2} \\ \dots & & \\ (2m+p-1)\tilde{a}_{2m+p-1} & \dots & (m+p)\tilde{a}_{m+p} \end{bmatrix}},$$

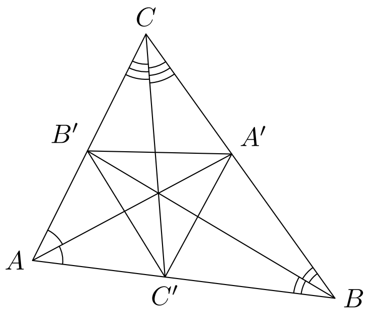
где в числителе k-тый столбец заменен на столбец посередине определителя, а $\tilde{a}_k$ — коэффициенты ряда функции $lnf(z)$.

ТРЕУГОЛЬНИКИ ШАРЫГИНА

И. В. Нетай[22] **(ИППИ РАН, Москва)**
i.v.netay@gmail.com

Я хочу рассказать о сюжете, основанном на совместной работе с А. В. Савватеевым. Своё начало сюжет берёт в 1983г., когда в журнале Квант [Kv83] была опубликована следующая задача.

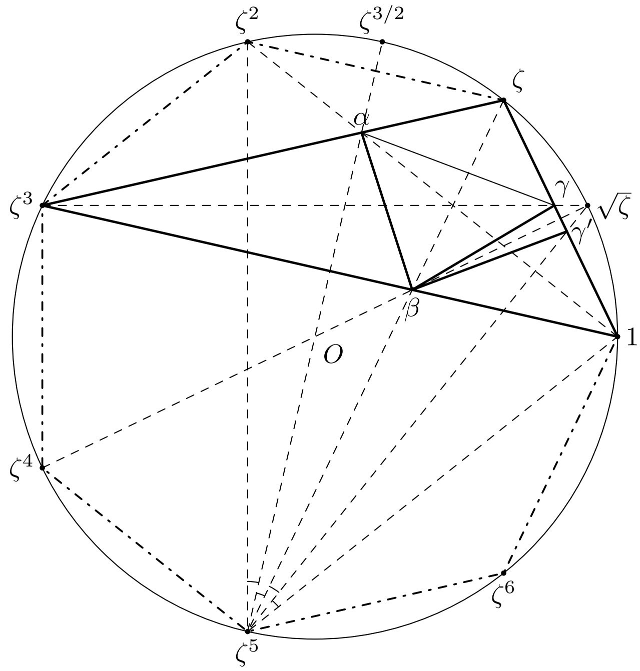
Задача. *Известно, что основания биссектрис некоторого треугольника образуют равнобедренный треугольник. Верно ли, что тогда исходный треугольник обязательно равнобедренный?*



На рисунке: если $A'B' = A'C'$, обязательно ли $AB = AC$?

Разумеется, ответ отрицательный, иначе задача не была бы столь интересна. Назовём *треугольником Шарыгина* неравнобедренный треугольник, основания биссектрис которого образуют равнобеденный треугольник. В известном задачнике Шарыгина по планиметрии [Sh82] приводится доказательство существования таких треугольников, но не приводятся примеры. На рисунке ниже приводится пример, возникающий при рассмотрении треугольника в вершинах правильного семиугольника.

[22]Работа выполнена в ИППИ РАН на средства РНФ (проект 14-50-00150).



Мы ставим задачу поиска и описания множества целых треугольников Шарыгина. Оказывается, таких существует бесконечно много попарно не подобных. Неожиданно, что минимальный из них имеет вид $(18800081, 1481089, 19214131)$.

Все треугольники Шарыгина параметризуются открытым подмножеством эллиптической кривой, а целые соответствуют рациональным точкам кривой, попадающим в это подмножество. Таким образом, задача описания целых треугольников Шарыгина требует описания группы рациональных точек на эллиптической кривой, и с виду простая школьная планиметрическая задача приводит нас к одной из красивых и сложных областей современной математики.

Список литературы

[Kv83] I. F. Sharygin, "Around the bisector", Kvant [in Russian], 1983, No 8, 32–36.

[Sh82] I. F. Sharygin, Problems in Geometry (Planimetry) [in Russian], Nauka, 1982.

НЕПОСТОЯННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕРИОДОВ СЕМЕЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ С $h^{2,0} = 1$ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ НА РАССЛОЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

О. В. Никольская[23] (Владимир)
papichonok@yandex.ru

Поверхностью Тодорова называется любая проективная комплексная поверхность Z с эйлеровой характеристикой структурного пучка $\chi(\mathcal{O}_Z) = 2$, двойными рациональными особыми точками и обильным каноническим классом при условии, что ее биканонический образ является $K3$-поверхностью S с двойными рациональными особыми точками (в частности, $q(S) = 0$, $K_S = 0$) [1, § 2].

Пусть V — гладкая проективная $K3$-поверхность или минимальная поверхность основного типа над полем $\mathbb{C}$ с $h^{2,0}(V) = 1$, принадлежащая одному из следующих типов:

(a) поверхности с $q = 0$ и $K^2 \leq 2$;

(b) поверхности с $q = 0$ и $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова;

(c) поверхности с $q = 0$ и $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(d) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 2$;

(e) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 3$ и общим слоем отображения Альбанезе рода 3;

(f) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 4$ в любой из восьми компонент модулей, описанных в работе Пигнателли [2].

Тогда можно считать, что существует такой гладкий проективный морфизм $f : \mathcal{X} \to S$ над некоторой гладкой связной базой S, что отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2 f_* \mathbb{Q}$, непостоянно, причем многообразие V является слоем морфизма f над некоторой точкой $s \in S$ [3].

Теорема. *Пусть $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – проективное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что множества $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\}$ $(k = 1, 2)$ не пересекаются, причём $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$, $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks} и отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}$, непостоянно (где $\pi'_k : X_k \setminus \pi_k^{-1}(\Delta_k) \to C \setminus \Delta_k$ – гладкая часть морфизма π_k).*

[23]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 16-31-00266)

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

1. $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{1s})$ *является нечётным числом;*

2. $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ — нечётные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит множеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, где $\Delta_{\text{countable}}$ — счётное подмножество, зависящее от семейств π_k; мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Теорема. *Пусть C — гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, $\pi_1 : X_1 \to C$ — гладкое проективное семейство поверхностей с $h^{2,0}(X_{1s}) = 1$, $h^{1,0}(X_{1s}) = 0$ и непостоянным отображением периодов, ассоциированным с вариацией структур Ходжа $R^2\pi_{k*}\mathbb{Q}$, причем для общего геометрического слоя X_{1s} число $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\operatorname{NS}(X_{1s}) = p_1$ является нечётным простым. Тогда для расслоенного квадрата $X = X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.*

Список литературы

[1] D.R. Morrison, "On the moduli of Todorov surfaces", in: *Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Masayoshi Nagata*, Kinokuniya C. Ltd., 1988, 313-356.

[2] R. Pignatelli, "Some (big) irreducible components of the moduli space of minimal surfaces of general type with $p_g = q = 1$ and

$K^2 = 4$", *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, **20**:3 (2009), 207-226.

[3] B. Moonen, "On the Tate and Mumford - Tate conjectures in codimension one for varieties with $h^{2,0} = 1$", arXiv: 1504.05406v1 [math.AG] 21 Apr 2015, 1-45.

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

М. В. Носков (Красноярск), В. С. Тутатчиков[24] (Красноярск)
mvnoskov@yandex.ru, vtutatchikov@mail.ru

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) широко применяется в цифровой обработке сигналов [Dud88].

Представим изображение в виде функции $f(x, y)$ где x, y принимают значения 0, 1, …, $2^s - 1$. При этом величина изменения значения яркости данных на единицу расстояния на любой части изображения называется пространственной частотой. Резкое изменение яркости на участке в несколько пикселей рассматривается как высокая частота, плавное изменение яркости на достаточно большом участке – как низкая. Соответствующие участки называются областями высокой и низкой частоты. Значение пикселей записываются в вещественную часть комплексного числа, мнимаю берется нулевой. Прямое дискретное преобразования Фурье (ДПФ) $F(p, m)$ для сигнала $f(k, t)$ задается формулой (1):

$$F(p, m) = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f(k, t) e^{\frac{-2\pi i(kp+tm)}{2^s}}, \tag{1}$$

обратное ДПФ вычисляется следующим образом: (2):

$$f(k, t) = \frac{1}{2^{2s}} \sum_{p=0}^{2^s-1} \sum_{m=0}^{2^s-1} F(p, m) e^{\frac{2\pi i(kp+tm)}{2^s}}, \tag{2}$$

где p, m принимают значения 0, 1, …, $2^s - 1$ [Ble89]. В [Tut13] описан алгоритм вычисления двумерного быстрого преобразования Фурье по аналогу алгоритма Кули-Тьюки, требующий меньшее количество комплексных операций сложения и умножения, чем стандартный способ [Ble89].

---

[24]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2016 году (Задание №1.1462.2014/К). Название проекта: «Алгебраические и аналитические методы создания алгоритмов решения дифференциальных и полиномиальных систем: факторизация, разрешение особенностей и оптимальные решетки»

При фильтрации в частотной области исходная функция (изображение) умножается на $(-1)^{x+y}$, чтобы её преобразование Фурье $F(p,m)$ сместилось в центр. Затем вычисляем прямое дискретное преобразование Фурье (1) и умножается на функцию фильтра $H(p,m)$. После этого вычислем обратное преобразование Фурье (2), выделяем вещественную часть и результат умножаем на $(-1)^{x+y}$ [Gon05].

В качестве функции фильтра может выступать, например, фильтр высоких частот, который убирает среднее значение яркости на изображении, что приводит к выделению контуров (3):

$$H(p,m) = \begin{cases} 0, (p,m) = (2^{s-1}, 2^{s-1}), \\ 1, (p,m) \neq (2^{s-1}, 2^{s-1}). \end{cases} \tag{3}$$

Аналогичный фильтр низких частот можно представить в виде:

$$H(p,m) = \begin{cases} 1, D(p,m) \leq D_0, \\ 0, D(p,m) > D_0, \end{cases} \tag{4}$$

где D_0 заданная неотрицательная величина, а $D(p,m)$ обозначает расстояние от точки (p,m) до центра частотной области. При этом все высокие частоты внутри круга D_0 проходят без изменений, а низкие снаружи — подавляются, что позволяет сгладить шум на изображении.

Можно взять более гладкие функции фильтры, например, фильтр низких (высоких) частот Баттерворта:

$$H(p,m) = \frac{1}{1 + [D(p,m)/D_0]^{2n}} \tag{5}$$

где n — порядок фильтра с частотой среза на расстоянии D_0 от центра. При этом фильтр низких частот уменьшает значение функции за пределами круга с радиусом D_0, а фильтр высоких частот внутри этого круга.

Список литературы

[Dud88] Даджион Д., Мерсеро Р., Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ.-М.: Мир, 1988. - 488 с., [Ble89] Блейхут Р., Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.-М.: Мир, 1989. - 448 с.,

[Tut13] V. S. Tutatchikov, O. I. Kiselev, M. V. Noskov, Calculating the n-Dimensional Fast Fourier Transform, Pattern Recognition and Image Analysis, 2013, vol. 23, no. 3, pp. 429-433,

[Gon05] Р. Гонсалес, Р. Вудс, Цифровая обработка изображений, Техносфера, 2005.-1072 с.

COMPLEXITY OF ELIMINATION FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

А. И. Овчинников (CUNY Queens College, CUNY Graduate Center, New York)
aovchinnikov@qc.cuny.edu

We will discuss complexity bounds for the effective Nullstellensatz for systems of polynomial PDEs. These are uniform bounds for the number of differentiations to be applied to all equations of a system of PDEs in order to discover algebraically whether it is consistent (i.e., has a solution in a field). The bounds are functions of the degrees and orders of the equations of the system and the numbers of dependent and independent variables in them. Among several bottlenecks in this problem is calculation of a projection of a variety. We will also discuss another approach to simplifying systems of polynomial PDEs, which avoids this bottleneck, as well as the associated complexity bounds.

References

[1] R. Gustavson, M. Kondratieva, and A. Ovchinnikov, New effective differential Nullstellensatz, Advances in Mathematics 290 (2016) 1138–1158.

[2] R. Gustavson, A. Ovchinnikov, and G. Pogudin, Bounds for orders of derivatives in differential elimination algorithms, Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2016, to appear.

NEW FORMULAS FOR THE HIGHER-DIMENSIONAL CONTOU-CARRÈRE SYMBOL

D. V. Osipov (Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow)
d_osipov@mi.ras.ru

I will talk on new results on the higher-dimensional Contou-Carrère symbol which were obtained recently together with S.O. Gorchinskiy.

The classical one-dimensional Contou-Carrère symbol was introduced and studied by C. Contou-Carrère and P. Deligne. It is the universal deformation of the tame symbol, and it is a functorial, anti-symmetric, bi-multiplicative map:

$$R((t))^* \times R((t))^* \longrightarrow R^*,$$

where R is a commutative ring.

The n-dimensional Contou-Carrère symbol (where integer $n \geq 1$) is a functorial, anti-symmetric, $(n+1)$-multiplicative map

$$R((t_1))\dots((t_n))^* \times \dots \times R((t_1))\dots((t_n))^* \longrightarrow R^*,$$

where one takes the term $R((t_1))\dots((t_n))^*$ in the above formula $n+1$ times. When R is a field, the above map coincides with the n-dimensional tame symbol. Taking an Artinian ring $R = k[\epsilon]/\epsilon^{n+2}$ over a field k, one obtains the n-dimensional residue over a field k from the n-dimensional Contou-Carrère symbol. The higher-dimensional Contou-Carrère symbol is important for the study of the higher-dimensional class field theory and arithmetic surfaces. The higher-dimensional Contou-Carrère symbol satisfies the higher reciprocity laws on higher-dimensional algebraic varieties along the flags of algebraic subvarieties.

The two-dimensional Contou-Carrère symbol was introduced and studied by the author and X. Zhu in [OZ13]. The n-dimensional Contou-Carrère symbol (when $n > 2$) was introduced and studied by the author and S.O. Gorchinskiy in [GO15]. Note that when $n \geq 2$, there was not know an elementary definition of the n-dimensional Contou-Carrère symbol for arbitrary commutative rings. Either categorical central extensions (and Nisnevich topology) or higher algebraic K-theory were used for the definition of the n-dimensional Contou-Carrère symbol.

Recently in [GO16-1] it was obtained the criterion of the invertibility of the continuous endomorphism of the R-algebra $R((t_1))\dots((t_n))$. There was obtained also an explicit formula for the inverse automorphism.

In [G016-2] it was proved that the n-dimensional Contou-Carrère symbol is invariant under continuous automorphisms. These results lead to the new "elementary" (without categorical central extensions and higher algebraic K-theory) explicit definition of the n-dimensional Contou-Carrère symbol.

References

[OZ13] Denis Osipov, Xinwen Zhu, The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws, J. Algebraic Geom., electronically published on April 22, 2016, DOI: http://dx.doi.org/10.1090/jag/664 (to appear in print); see also e-print arXiv:1305.6032.

[GO15] S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, A higher-dimensional Contou-Carrère symbol: local theory, (Russian) Mat. Sbornik, 206:9 (2015), 21-98; translation in Sbornik: Mathematics, 206:9 (2015), 1191-1259; see also e-print arXiv:1505.03829.

[GO16-1] S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, Continuous homomorphisms between algebras of iterated Laurent series over a ring, e-print arXiv:1604.07005, to appear in Proc. Steklov Inst. Math., 294 (2016).

[G016-2] S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, Higher-dimensional Contou-Carrère symbol and continuous automorphisms, e-print arXiv:1604.08049, to appear in Functional Analysis and Its Applications (2016).

О МЕХАНИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ ПЛАНИМЕТРИИ

Н. Н. Осипов[25] (Красноярск)
nnosipov@rambler.ru

Механический метод доказательства геометрических теорем хорошо известен (см., например, [1], [2]). В докладе будет рассказано об элементарном подходе к механическому доказательству планиметрических теорем так называемого *рационального типа* [3]. Этот подход эксплуатирует элементарно-геометрический смысл алгебраических операций над комплексными числами и сводится к конечной последовательности вычислений, непосредственно вытекающей из формулировки теоремы рационального типа.

Под вычислениями понимаются алгебраические операции в поле рациональных дробей $F(z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m)$, где F — конечное расширение $\mathbb{Q}$, а $z_k \in \mathbb{C}$, $|z_k| = 1$, $u_l \in \mathbb{R}$ для всех k, l. Предлагается набор стандартных вычислительных процедур и проверочных тестов, оформленный в виде модулей `geom` и `geom_zeta` в системе компьютерной алгебры Maple (см. [4]).

Специальные *рациональные параметризации* различных элементов треугольника позволяют снимать внешние условия и тем самым избегать применения таких затратных процедур, как вычисление *базисов Грёбнера* и *упрощение вложенных радикальных выражений*. При этом используется только возможность эффективной реализации обычных алгебраических операций в кольце многочленов $F[z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m]$ и операции нахождения НОД (или, как вариант, факторизации).

В докладе будут приведены содержательные примеры механического доказательства планиметрических теорем рационального типа (как классических, так и недавно открытых) на основе предложенных рациональных параметризаций. Отметим особенность механического доказательства на основе вычислений с рациональными дробями над *круговыми полями* $\mathbb{Q}(\zeta)$: наличие нетривиальных автоморфизмов приводит к тому, что оказываются доказанными сразу

[25]Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания 1.1462.2014/K

несколько схожих геометрических теорем.

Список литературы

[1] *Chou S.-C.* Mechanical Geometry Theorem Proving. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.

[2] *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000.

[3] *Осипов Н.Н.* О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. 2014. № 2. С. 41–50.

[4] *Осипов Н.Н., Царев С.П.* Программа для механического доказательства планиметрических теорем рационального типа (Механическое доказательство теорем). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016610775 РФ.

К ПРОБЛЕМЕ УПРОЩЕНИЯ ВЛОЖЕННЫХ РАДИКАЛОВ

Н. Н. Осипов[26] (Красноярск)
nnosipov@rambler.ru

Проблема упрощения вложенных радикальных выражений над произвольным полем $F \subset \mathbb{C}$ исследовалась многими авторами (см. библиографию в [1]). Под упрощением понимается понижение уровня вложенности выражения с радикалами. Алгоритм упрощения для вложенных квадратных радикалов из [2] (это наиболее простой и часто встречающийся случай) реализован в некоторых системах компьютерной алгебры.

Случай вещественных радикалов над вещественным полем $F \subset \mathbb{R}$ несколько проще теоретически. Здесь также известен эффективный (работающий за полиномиальное время) алгоритм упрощения для радикалов, уровень вложенности которых не превосходит двух (см. [3]). Этот алгоритм, однако, не гарантирует полного упрощения для радикалов большего уровня вложенности.

В докладе предполагается рассказать об алгоритме упрощения трижды вложенных вещественных радикалов над $\mathbb{Q}$ и особенностях его реализации (см. [4]).

Список литературы

[1] *Blömer J.* Denesting by Bounded Degree Radicals // Algorithmica. 2000. V. 28. P. 2–15.

[2] *Borodin A., Fagin R., Hopcroft J.E., Tompa M.* Decreasing the Nesting Depth of Expressions Involving Square Roots // J. Symbolic Computation. 1985. V. 1. P. 169–188.

[3] *Blömer J.* How to denest Ramanujans's nested radicals // in: Proc. 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press, 1992.

[26] Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания 1.1462.2014/К

[4] *Осипов Н.Н.* Об упрощении вложенных вещественных радикалов // Программирование. 1997. № 3. С. 31–35.

REAL POLYNOMIAL ROOT-FINDING BY MEANS OF MATRIX AND POLYNOMIAL ITERATIONS

Victor Y. Pan, Liang Zhao[27] (New York)
victor.pan@lehman.cuny.edu, lzhao1@gc.cuny.edu

Univariate polynomial root-finding is a classical subject, still important for modern comput- ing. Frequently one seeks just the real roots of a polynomial with real coefficients. They can be approximated at a low computational cost if the polynomial has no nonreal roots, but typically nonreal roots are much more numerous than the real ones. The subject of devising efficient real root-finders has been long and intensively studied. Nevertheless, we produce some novel ideas and techniques and obtain dramatic acceleration of the known numerical algorithms. In order to achieve our progress we exploit the correlation between the computations with matrices and polynomials, randomized matrix computations, and complex plane geometry, extend the techniques of the matrix sign iterations, and use the structure of the companion matrix of the input polynomial. The results of our extensive numerical tests with benchmark polynomials and random matrices are quite encouraging. In particular in these tests we have consistently computed accurate approximations of the real roots of benchmark polynomials of degree up to 1024 by using the IEEE standard double precision. Moreover the number of iterations required for convergence of our algorithms grew very slowly (if at all) as we increased the degree of the univariate input polynomials and the dimension of the input matrices from 64 to 1024.

[27]This work has been supported by NSF Grant CCF 1116736 and PSC CUNY Award 67699-00 45

РАЦИОНАЛЬНОСТЬ (КО)ПРИСОЕДИНЕННЫХ ОРБИТ

В. Л. Попов[28] (Москва)
popovvl@mi.ras.ru

Рассматриваемые далее алгебраические многообразия считаются определенными над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Пусть G — *связная* редуктивная алгебраическая группа и H — ее замкнутая подгруппа. Вопрос о рациональности алгебраического многообразия G/H является известной старой проблемой, тесно связанной с проблемой рациональности полей инвариантов линейных представлений алгебраических групп, см. [Po94, 1.5], [Po13, Thm. 1, Cor. 2]. Известно, см. [Po11, Example 1.22], [Po13, Thm. 2], [Po94, Rem. 1.5.9], что многообразие G/H нерационально (и даже стабильно нерационально) для некоторых *конечных* групп H. Вопрос же о существовании нерациональных многообразий вида G/H со *связной* группой H до сих пор открыт и является одной из центральных проблем бирациональной теории действий алгебраических групп. Вместе с тем, для многих пар (G, H) со *связной* группой H доказана либо рациональность, либо стабильная рациональность многообразия G/H (см., в частности, недавнюю публикацию [CZ15]). В [Ba15$_1$] вопрос о рациональности орбит коприсоединенного представления группы G (ввиду редуктивности группы G, это представление эквивалентно присоединеному представлению) исследовался в контексте построения бирациональных координат Дарбу на таких орбитах. В [Ba15$_2$], [Ba16], [BD10] такие координаты были построены и рациональность орбит доказана для классических групп $G = \mathrm{GL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_n$. Метод канонической параметризации восходит к работе И. М. Гельфанда и М. И. Наймарка по унитарным представлениям классических групп (1950 г.). Параметризация коприсоединенных орбит интересовала многих авторов в связи с задачами теории интегрируемых систем (см. введение и соответствующие ссылки в [Ba16]).

Нашим результатом является следующая

Теорема. *Всякая орбита присоединенного представления произвольной связной редуктивной алгебраической группы является рациональным алгебраическим многообразием.*

В качестве следствия получается

[28] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Теорема. *Всякое односвязное симплектическое алгебраическое многообразие, однородное относительно связной комплексной редуктивной алгебраической группы, рационально.*

Список литературы

[Ba15$_1$] М. В. Бабич, О бирациональной параметризации (ко)-присоединенных орбит комплексных классических групп, доклад на ежегодной мемориальной конференции памяти А. Н. Тюрина, 26 октября 2015 г., Москва, МИАН, `http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=12717`.

[Ba15$_2$] M. V. Babich, On birational Darboux coordinates on coadjoint orbits of classical complex Lie groups, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2015, 432, 36–57.

[Ba16] М. В. Бабич, Бирациональные координаты Дарбу на (ко)присоединенных орбитах группы GL(N,$\mathbb{C}$), Функц. анализ и его прил., 2016, 50, вып. 1, 20–37.

[BD10] М. В. Бабич, С. Э. Деркачев, О рациональной симплектической параметризации коприсоединенной орбиты GL(N,Ba15$_1\mathbb{C}$), диагонализуемый случай, Алгебра и анализ, 2010, 22, вып. 3, 16–31.

[CZ15] C. Chin, D.-Q. Zhang, Rationality of homogeneous varieties, Trans. Amer. Math. Soc., 2015, DOI:10.1090/tran/6728, `arXiv:1504.05402`.

[Po94] V. L. Popov, Sections in invariant theory, Proc. Sophus Lie Memorial Conf. (Oslo, 1992), Scandinavian University Press, Oslo, 1994, 315–361.

[Po11] V. L. Popov, On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties, CRM Proceedings and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., 2011, 54, 289–311.

[Po13] V. L. Popov, Rationality and the FML invariant, J. Ramanujan Math. Soc., 2013, 28A, 409–415.

ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ЧИСЕЛ ХОДЖА

В. В. Пржиялковский[29] (Москва)
victorprz@mi.ras.ru

Гипотеза зеркальной симметрии для многообразий Калаби–Яу утверждает, в частности, что для каждого многообразия Калаби–Яу X размерности n существует такое (не обязательно единственное) многообразие Калаби–Яу Y той же размерности, что выполнено равенство

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}.$$

Иными словами, ромбы Ходжа для X и Y получаются друг из друга зеркальным отражением относительно побочной диагонали.

Теорема ([BB96, Theorem 4.15])**.** *Пусть X и Y — пара двойственных по Гивенталю полных пересечений Калаби–Яу в горенштейновых торических многообразиях. Пусть $dim\,(X) = dim\,(Y) = n$. Тогда*

$$h^{p,q}_{st}(X) = h^{n-p,q}_{st},$$

где $h^{p,q}_{st}(\bullet)$ — струнное число Ходжа (обобщение числа Ходжа на особый случай).

Двойственность чисел Ходжа для многообразий Калаби–Яу можно обобщить на случай многообразий Фано. Напомним, что двойственным объектом для многообразия Фано является модель Ландау–Гинзбурга, то есть одномерное семейство многообразий Калаби–Яу со специальными свойствами. В работе [KKP14] Кацарков, Концевич и Пантев для модели Ландау–Гинзбурга LG определили три набора чисел $f^{p,q}(LG)$, $h^{p,q}(LG)$, $i^{p,q}(LG)$, играющих роль чисел Ходжа. Они выдвинули гипотезу ([KKP14, Conjecture 3.6]), утверждающую, что $f^{p,q}(LG) = h^{p,q}(LG) = i^{p,q}(LG)$. Кроме того, если LG — модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X, $dim\,(X) = dim\,(LG) = n$, то, согласно [KKP14, Conjecture 3.7], $f^{p,q}(LG) = h^{n-p,q}$.

Мы доказываем эти гипотезы для $n = 2$.

Теорема (В. А. Лунц, В. В. Пржиялковский)**.** *Гипотезы [KKP14, Conjecture 3.6] и [KKP14, Conjecture 3.7] выполнены для поверхностей дель Пеццо, снабженных любой симплектической формой.*

[29]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00160, 15-01-02164, 15-01-02158, 15-51-50045 и гранта МК-6019.2016.1.

Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева имеют геометрическую интерпретацию для крайних центральных чисел Ходжа. Определим (во введенных выше обозначениях) число k_{LG} как разность общего числа компонент (без кратностей) приводимых слоев семейства LG и числа самих приводимых слоев. Тогда $k_{LG} = h^{1,n-1}(X)$.

Теорема ([Prz13, Теорема 22]). *Эта гипотеза выполнена для многообразий Фано основной серии.*

Теорема ([PSh15, Theorem 1.2]). *Эта гипотеза выполнена для полных пересечений Фано.*

Список литературы

[BB96] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers, Invent. Math. 126 (1996), no. 1, 183–203.

[KKP14] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, Non-commutative Hodge structures of geomeric origin and Tian–Todorov theorems, arXiv:1409.5996.

[Prz13] В. В. Пржиялковский, Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано, Изв. РАН. Сер. матем., 77:4 (2013), 135–160.

[PSh15] V. Przyjalkowski, C. Shramov, On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2015:21 (2015), 11302–11332.

FINITE SUBGROUPS IN THE CREMONA GROUP OF RANK 3 AND RATIONALITY QUESTIONS FOR FANO THREEFOLDS

Yu. Prokhorov[30] (Steklov Mathematical Institute, Moscow)
prokhoro@mi.ras.ru

Recall that the *Cremona group* Cr_n of rank n is the group of birational self-maps of the projective space $\mathbb{P}^n$. I will report the recent progress in the classification of finite subgroups of Cremona groups. Finite subgroups of Cr_2 were classified by V. Dolgachev and V. Iskovskikh [DI]. Much less is known in the three-dimensional case.

The following theorem was proved in [Pr].

Theorem. *Let $G \subset \mathrm{Cr}_3$ be a non-abelian simple finite subgroup. Then G is isomorphic to one of the following:*

$$\mathrm{A}_5, \quad \mathrm{A}_6, \quad \mathrm{A}_7, \quad \mathrm{PSL}_2(7), \quad \mathrm{SL}_2(8), \quad \mathrm{PSp}_4(3).$$

All the possibilities occur.

The main result is a generalization of this theorem to the case of quasi-simple subgroups.

References

[DI] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In: Algebra, arithmetic, and geometry, vol. I: In Honor of Yu. I. Manin, Progr. Math., 269, 443–548, Birkhäuser, Basel, 2009

[Pr] Yu. Prokhorov, Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3, J. Algebraic Geom. 21(2012), 563–600

[30]The author work partially supported by the RFFI grants 15-01-02164a, 15-01-02158a, 15-51-50045

BIRATIONAL GEOMETRY OF FIBRATIONS INTO FANO DOUBLE SPACES

A. V. Pukhlikov (Liverpool)
pukh@liverpool.ac.uk

We consider a Fano-Mori fibre space $\pi\colon V \to S$, where the base S is non-singular, the variety V has at most factorial terminal singularities, the anticanonical class $(-K_V)$ is relatively ample and $\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}K_V \oplus \pi^* \operatorname{Pic} S$. We say that a fibre $F = F_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, satisfies the *condition* (h), if for any irreducible subvariety $Y \subset F$ of codimension 2 and any point $o \in Y$ the inequality

$$\frac{\operatorname{mult}_o Y}{\deg Y} \leqslant \frac{4}{\deg F}$$

holds, where the degrees are understood in the sense of the anticanonical class, that is,

$$\deg Y = \left(Y \cdot (-K_V)^{\dim Y}\right)$$

and

$$\deg F = \left(F \cdot (-K_V)^{\dim F}\right),$$

and the *condition* (hd), if for any mobile linear system $\Delta \subset |-nK_F|$ and any irreducible subvariety $Y \subset F$ of codimension 2 the inequality

$$\operatorname{mult}_Y \Delta \leqslant n$$

holds. Further, we say that a fibre F satisfies the *condition* (v), if for any prime divisor $Y \subset F$ and any point $o \in F$ of this fibre the inequality

$$\frac{\operatorname{mult}_o Y}{\deg Y} \leqslant \frac{2}{\deg F}$$

holds. Finally, we say that the fibre space V/S satisfies the K-*condition*, if for any mobile family $\overline{\mathcal{C}}$ of curves on the base S, sweeping out S, and a general curve $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ the class of algebraic cycle

$$-N(K_V \cdot \pi^{-1}(\overline{C})) - F$$

of dimension $\dim F$ for any $N \geqslant 1$ is not effective, that is, it is not rationally equivalent to an effective cycle of dimension $\dim F$, and the K^2-*condition*, if for any mobile family $\overline{\mathcal{C}}$ of curves on the base S, sweeping out S, and a general curve $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ the class of algebraic cycle

$$N(K_V^2 \cdot \pi^{-1}(\overline{C})) - H_F$$

of dimension $\dim F - 1$ is not effective for any $N \geqslant 1$, where $H_F = (-K_V \cdot F)$ is the class of the anticanonical section of the fibre.

Theorem 1. *Assume that* $\dim F \geqslant 4$ *and every fibre* F *of the projection* π *is a variety with at most quadratic singularities of rank at least 4, and moreover* $\operatorname{codim}(\operatorname{Sing} F \subset F) \geqslant 4$. *Assume further that every fibre* F *satisfies the conditions (h), (hd) and (v), whereas the fibre space* V/S *satisfies the* K*-condition* K^2*-condition.*

Then every birational map $\chi\colon V \dashrightarrow V'$ *onto the total space of rationally connected fibre space* V'/S' *is fibre-wise, that is, there is a rational dominant map* $\beta\colon S \dashrightarrow S'$ *such that the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccccc} & V & \stackrel{\chi}{\dashrightarrow} & V' & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi' \\ & S & \stackrel{\beta}{\dashrightarrow} & S'. & \end{array}$$

Theorem 1 implies immediately the following claim.

Corollary. *In the assumptions of Theorem 1 on the variety* V *there are no structures of a rationally connected fibre space over a base of dimension higher than* $\dim S$. *In particular, the variety* V *is non-rational. Any birational self-map of the variety* V *is fibre-wise and induces a birational self-map of the base* S*, so that there is a natural homomorphism of groups* $\rho\colon \operatorname{Bir} V \to \operatorname{Bir} S$*, the kernel of which* $\operatorname{Ker}\rho$ *is the group* $\operatorname{Bir} F_\eta = \operatorname{Bir}(V/S)$ *of birational self-maps of the generic fibre* F_η *(over the non-closed generic point* η *of the base* S*), whereas the group* $\operatorname{Bir} V$ *is an extension of the normal subgroup* $\operatorname{Bir} F_\eta$ *by the group* $\Gamma = \rho(\operatorname{Bir} V) \subset \operatorname{Bir} S$*:*

$$1 \to \operatorname{Bir} F_\eta \to \operatorname{Bir} V \to \Gamma \to 1.$$

Theorem 1 will be applied to fibrations into double spaces of index one, when the conditions (h) and (v) hold automatically by the equality $\deg F = 2$. We use the notations of subsection 0.2 of [3]: the symbol $\mathbb{P}$ stands for the projective space $\mathbb{P}^M$, $M \geqslant 4$, and $\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M)))$ is the space of hypersurfaces of degree $2M$ in $\mathbb{P}$. The following general fact is true.

Theorem 2. *The closed algebraic subset of homogeneous polynomials* f *of degree* d *in* $(N+1)$ *variables, such that the hypersurface* $\{f = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ *has a singular set of positive dimension, is of codimension at least* $(d-2)N$ *in the space* $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))$.

The following theorem is immediately implied by Theorem 2.

Theorem. *There is a Zariski open subset* $\mathcal{W}_{\rm reg} \subset \mathcal{W}$*, such that any hypersurface* $W \in \mathcal{W}_{\rm reg}$ *has finitely many singular points, each of which* *is a quadratic singularity of rank at least 3, and, moreover, the following estimate holds:*

$$\operatorname{codim}((\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}) \subset \mathcal{W}) \geqslant \frac{(M-2)(M-1)}{2} + 1.$$

If $F \to \mathbb{P}$ is a double cover, branched over a hypersurface $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$, then F is a factorial Fano variety with terminal singularities (see [1], Subsection 2.1 in [3] and Proposition 1.4 below), satisfying the conditions (h) and (v) by the equality $\deg F = 2$. The condition (hd) is easy to show by the standard methods (see [2, Chapter 2]; for $M \geqslant 5$ it holds in a trivial way, because for any irreducible subvariety $Y \subset F$ of codimension 2 the inequality $\deg Y \geqslant 2$ holds). Thus in order to apply Theorem 0.1, it is sufficient to require every fibre F_s, $s \in S$, to be branched over a regular hypersurface $W_s \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$, and the fibre space V/S to satisfy the K-condition and the K^2-condition.

In the notations of Subsection 0.2 of [3] let S be a non-singular rationally connected variety of dimension $\dim S \leqslant \frac{1}{2}(M-2)(M-1)$. Let $\mathcal{L}$ be a locally free sheaf of rank $M+1$ on S and $X = \mathbb{P}(\mathcal{L}) = \mathbf{Proj} \mathop{\oplus}\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^{\otimes i}$ the corresponding $\mathbb{P}^M$-bundle. We may assume that $\mathcal{L}$ is generated by its global sections, so that the sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(1)$ is also generated by the global sections. Let $L \in \operatorname{Pic} X$ be the class of that sheaf, so that

$$\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}L \oplus \pi_X^* \operatorname{Pic} S,$$

where $\pi_X \colon X \to S$ is the natural projection. Take a general divisor $U \in |2(ML + \pi_X^* R)|$, where $R \in \operatorname{Pic} S$ is some class. If that system is sufficiently mobile, then by the assumption about the dimension of the base S and by Theorem 0.4 we may assume that for any point $s \in S$ the hypersurface $U_s = U \cap \pi_X^{-1}(s) \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$, and for that reason the double space, branched over U_s, satisfies the conditions of Theorem 0.1. Let $\sigma \colon V \to X$ be the double cover branched over U. Set $\pi = \pi_X \circ \sigma \colon V \to S$, so that V is a fibration into Fano double spaces of index one over S. Recall that the divisor $U \in |2(ML + \pi_X^* R)|$ is assumed to be sufficiently general.

Theorem. *Assume that the divisorial class $(K_S + R)$ is pseudo-effective. Then for the fibre space $\pi \colon V \to S$ the claims of Theorem 0.1 and Corollary 0.1 are true. In particular,*

$$\operatorname{Bir} V = \operatorname{Aut} V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

is the cyclic group of order 2.

References

[1] Call F. and Lyubeznik G., A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings, Contemp. Math. **159** (1994), 15-18.

[2] Pukhlikov Aleksandr, Birationally Rigid Varieties. Mathematical Surveys and Monographs **190**, AMS, 2013.

[3] A.V.Pukhlikov, Birationally rigid Fano fibre spaces. II. Izvestiya: Mathematics **79** (2015), No. 4, 809-837.

SUPERCONNECTIONS AND CHERN CLASSES

A. Rosly (ITEP, HSE, IITP, Moscow)
rosly@itep.ru

A superconnection (according to Quillen's terminology) is a generalization of the notion of a connection where a connection 1-form is extended to the forms of any degree. We discuss how the standard Chern-Weil formalism for describing characteristic classes can be adopted to superconnections. We also consider $\bar{\partial}$-superconnections on a complex-analytic manifold, which analogously generalize ordinary $\bar{\partial}$-connections. The latter is a tool for describing holomorphic vector bundles. Similarly, flat $\bar{\partial}$-superconnections generalize this description to coherent sheaves. In particular, this is useful in dealing with characteristic classes of coherent sheaves.

This talk will be based on a joint work with A.Bondal.

О МОДИФИКАЦИИ БЫСТРОГО ОДНОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО АЛГОРИТМУ КУЛИ-ТЬЮКИ

Т. В. Сидорова (Красноярск), Т. В. Зыкова[31] (Красноярск)
stany6@yandex.ru, zykovatv@mail.ru

В настоящей работе рассматривается один из методов нахождения дискретного преобразования Фурье (ДПФ), позволяющий уменьшить затраты машинного времени на вычисления по сравнению с классическим алгоритмом. Быстрые алгоритмы вычисления преобразования Фурье очень востребованы и актуальны, они имеют множество приложений в задачах цифровой обработки одномерных и многомерных сигналов, обработки различных изображений, например, космоснимков.

Общепринятый алгоритм представляет собой последовательное вычисление одномерного дискретного преобразования Фурье по строкам и столбцам [1]. Существуют различные методы ускорения данного алгоритма, один из которых и реализован в данной работе.

Рассмотрим сигнал f, который является периодическим сигналом с периодом $p\cdot 2^s$. Отсчеты задаются как f_k, где $k=0,1,\ldots,p\cdot 2^s-1$. ДПФ для данного сигнала f задается формулой

$$F(t)=\sum_{k=0}^{p\cdot 2^s-1} f_k e^{\frac{2\pi i}{p\cdot 2^s}kt}.$$

Разобьем данную сумму на 2^s сумм следующего вида

$$F(t)=\sum_{k_1=0}^{2^s-1}\sum_{k_2=0}^{p-1} f_{pk_1+k_2}e^{\frac{2\pi i}{p\cdot 2^s}t(pk_1+k_2)}=\sum_{k_1=0}^{2^s-1}\left(\sum_{k_2=0}^{p-1} f_{pk_1+k_2}e^{\frac{2\pi i}{p\cdot 2^s}tk_2}\right)e^{\frac{2\pi i}{2^s}tk_1}.$$

Внешнюю сумму можно рассматривать как преобразование Фурье для сигнала с числом отсчетов 2^s, для подсчета которой можно воспользоваться алгоритмом Кули-Тьюки, а внутреннюю сумму вычислить как ДПФ для сигнала с числом отсчетов p. Тогда общее число операций в полученном алгоритме составит $p\cdot 2^s\cdot s$ комплексных сложений и $p\cdot 2^s\cdot\frac{s}{2}$ комплексных умножений.

Представлена программная реализация модифицированного алгоритма по аналогу Кули-Тьюки дискретного преобразования Фурье

[31] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований № 15-31-20008-мол_ а_вед

для одномерного сигнала с числом отсчетов $p \cdot 2^s$, $p, s \in \mathbb{N}$. Для данного алгоритма была разработана программа в системе компьютерной математики MatLab. Она протестирована на наборе, состоящем из 16384 отсчетов одномерного сигнала. При выполнении программы производится сравнение времени ее выполнения со временем, затрачиваемым встроенным алгоритмом вычисления быстрого преобразования Фурье. В результате, среднее время выполнения программы по модифицированному алгоритму дает выигрыш около 20%. Авторы ставили перед собой задачу реализации модифицированного одномерного алгоритма БПФ по аналогу Кули-Тьюки именно в MatLab, так как вопросы использования программируемых логических интегральных схемах (ПЛИС) для реализации цифровой обработки сигналов радиоприемных устройств на практике часто используют программное обеспечение фирмы Xilinx (LogiCORE IP Fast Fourier Transform), где БПФ реализовано по алгоритму Кули-Тьюки в MATLAB. В работе [2] приводится более подробное описание полученных результатов.

Список литературы

[1] J. W. Cooley, J. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comput. 1965. Vol. 19. No. 90. P. 297-301.

[2] Т. В. Сидорова, Т. В. Зыкова, К. В. Сафонов. О модификации быстрого одномерного преобразования Фурье по алгоритму Кули-Тьюки. Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2015. Т. 16. № 2. С. 360-363.

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов[32] (Гомель)
svoitov@gsu.by

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ натуральных чисел.

Многочленами $A_{n_p}^p$, $deg\, A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, одновременно тождественно не равные нулю и удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+...+n_k-1}\right)\,, \quad z \to 0\,,$$

введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа e. Их принято называть *многочленами Эрмита–Паде I рода* для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$.

Следующие теоремы об асимптотике функции остатка $R_{n_0, n_1, ..., n_k}$ и о локализации нулей многочленов $A_{n_p}^p$ дополняют и обобщают известные результаты Г. Сегё, К. Малера, Э. Саффа и Р. Варги, П. Борвейна, Ф. Вилонского, Г. Шталя.

Теорема. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при* $\min\{n_0, n_1, ..., n_k\} \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0+n_1+...+n_k-1}}{(n_0+n_1+...+n_k-1)!} e^{\frac{n_0\lambda_0+n_1\lambda_1+...+n_k\lambda_k}{n_0+n_1+...+n_k} z}\,.$$

Теорема. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, ..., k$, $k \geqslant 1$ *нули многочлена* $A_{n_p}^p$, $0 \leqslant p \leqslant k$, *находятся в круге* $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, *где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}\,.$$

[32]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Список литературы

[1] C. Hermite, Sur la généralisation des fractions continues algébriques Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A., 1883, 21, 289–308.

THE ALTERNATIVE ANALYSIS AND SOME DOGMAS

A. M. Sukhotin (National research Tomsk polytechnic university)
asukhotin@yandex.ru

Keywords: C–pair, Euclidian Axiom 8, continuum–hypothesis, e–divergence, w–convergence, infinite larger numbers, prime numbers.

Following to [1] we say that any dogma is such hypothesis which contradicts to new results either in the practice or in the theory. We use well known mathematical texts and follow to Paul Cohen's forecast about continuum–hypothesis (CH) [2, IV.13]]: "A point of view which the author feels may eventually come to be accepted is that CH is obviously false".

1. We define new concept using positive properties of the mathematical objects just as in [3]. Let the A and B be unlimited subsets of $N, E \triangleq A \cup B$, $\Psi \triangleq \{(m,k):\ (m,k) \in (A,B)\} \subset (A,B)$ be the set of the pair of neighboring in the E elements m and k.

Definition. The pair (m,k) of natural variables $(m,k) \in (A,B)$ is said to be C-pair, if there exists such number C that every pair $(m,k) \in \Psi$ holds the inequality $|m-k| < C$.

Definition. Let the E, Ψ be as above and $(A \cap B) = \varnothing$ be in addition. The number sequence $(\boldsymbol{a})$ is said to be *e-divergent* one if and only if it holds following implication $\forall n \in N \exists \delta(n) > 0, (m,k) \in \Psi, m > n) \Rightarrow |a_m - a_k| > \delta(n)$.

Definition. The sequence $(\boldsymbol{a})$ is said to be *w-convergent* one if it satisfies following inequality:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n(\epsilon) \in N : \forall n > n(\epsilon)\ |a_{n+1} - a_n| < \epsilon$$

2. We use those new notions and others in the proofs of following theorems some from them either is at variance with generally accepted or even *contraries to corresponding dogma*: At the first we prove Euclid Axiom 8, which has confirmed *"The Hole is more its own Part"*in form of

Theorem 1. *Let $B \subset A \subseteq R$. Then $\forall f\colon A \to B \exists (a,q) \in (A,A) : (a \neq q) \& f(a) = f(q)$.*

Theorem 1 has the canonically brief form:$(B \subset A) \Rightarrow \neg(A \sim B)$, which confirms the above-mentioned Paul Cohen's forecast: all sets divide into the equivalence classes up to an element.

Theorem. *Every permutation of any series addends does not change its convergence [3, 8.2].*

Theorem. *There exists in the analysis a set of unlimited with finite numbers Cauchy sequences (**a**), every one of them converges to corresponding infinity large number ILN(**a**) [3, 7.1].*

Theorem 2. *Unlimited differentiated at the ∞ function $f\colon R \to R$ converges to corresponding $ILN(f)$ if and only if $f'(\infty) = 0$.*

Let p_k be a $k - prime$ number at $k \in \pi \subset N, \pi(x) \triangleq max_{p_k \leq x}(k)$ which has well-known [3, 7.2] the asymptotic estimate: $\pi(x) = x/lnx + o(x/lnx)$. Now using Theorem 2 we prove new

Theorem. *There exists in the numbers theory some ILN $\Omega_\pi \triangleq lim_{x\to\infty}\pi(x)$.*

Let $P(x) \triangleq \{p_k : p_k \leq x, x > 1\}$, $p(x) \triangleq max_{p_k}\{P(x)\}$ and $z(x) \triangleq \pi(x)/p(x)$. Now let $z_\pi \triangleq lim_{x\to\infty} z(x) > 0$.

Theorem. *There exists some ILN $p_\pi \triangleq \Omega_\pi/z_\pi$, which defines the maximal prime number.*

References

[1] Carey W. Theories of the Earth and Universe. A History of Dogma in the Earth Sciences. Stanford University Press, Stanford California, 1989.

[2] Cohen Paul J. Set theory and continuum hypothesis.-Princeton-New Jersey-Toronto-New York: D. Van Nostrand Company, 1958.

[3] Sukhotin A. M. Alternative basis of higher mathematics. Alternative analysis: Verification, methodology, theory and some applications. Monograph.-Saarbrucken: LAP Gmb H&Co. KG.- 2011.-168 p.

КОГОМОЛОГИИ ГАЛУА РЕДУКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

Д. А. Тимашёв[33] (Москва)
timashev@mccme.ru

Доклад основан на совместной работе с М. В. Боровым.

Часто бывает так, что алгебро-геометрические объекты того или иного типа, эквивалентные над алгебраически замкнутым полем, распадаются на классы эквивалентности над его незамкнутым подполем (простейший пример, знакомый любому студенту-первокурснику, — разбиение вещественных квадратичных форм фиксированного ранга на классы эквивалентности). Проблему описания этих классов эквивалентности можно формализовать следующим образом. Пусть G — алгебраическая группа над полем $\Bbbk$, транзитивно действующая на алгебраическом $\Bbbk$-многообразии X; в частности, группа $G(\overline{\Bbbk})$ транзитивно действует на множестве $X(\overline{\Bbbk})$, где $\overline{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. При этом действие группы $G(\Bbbk)$ на множестве $X(\Bbbk)$ уже, вообще говоря, не транзитивно, и вопрос заключается в описании его орбит.

Общий ответ можно сформулировать в терминах когомологий Галуа [Се]. Для простоты будем считать $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Пусть $H \subset G$ — стабилизатор фиксированной (базисной) точки $x_0 \in X(\Bbbk)$. Тогда множество орбит $X(\Bbbk)/G(\Bbbk)$ находится в биекции с ядром естественного отображения когомологий Галуа $H^1(\Bbbk, H) \to H^1(\Bbbk, G)$.

Возникает задача вычисления когомологий Галуа алгебраических групп в «функториальных» терминах, позволяющих описывать их поведение при гомоморфизмах групп. Для линейных алгебраических групп с помощью точных последовательностей когомологий Галуа задача в известном смысле сводится к случаю редуктивных групп.

Мы получим такое описание для когомологий Галуа связных редуктивных групп над $\Bbbk = \mathbb{R}$ в явных комбинаторных терминах. Вычислению когомологий Галуа вещественных редуктивных групп посвящён ряд работ (см., например, [Ad]), однако преимущество нашего подхода в том, что он позволяет явно описывать отображения когомологий Галуа, индуцированные гомоморфизмами групп.

Можно отождествить 1-коциклы Галуа вещественной алгебраической группы G с элементами $h \in G(\mathbb{C})$, удовлетворяющими условию $h\bar{h} = 1$ (где черта обозначает комплексное сопряжение). При

[33]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16–01–00818

этом $H^1(\mathbb{R},G)$ отождествляется с множеством орбит действия группы $G(\mathbb{C})$ на множестве коциклов $Z^1(\mathbb{R},G)$ «скрученными сопряжениями» по формуле $g : h \mapsto gh\bar{g}^{-1}$.

Пусть теперь G — связная редуктивная вещественная алгебраическая группа, σ — инволюция Картана на $G(\mathbb{C})$, коммутирующая с комплексным сопряжением, а $\theta : g \mapsto \sigma(\bar{g})$ — соответствующий инволютивный автоморфизм группы G. Пусть $T_0 \subset G$ — максимальный алгебраический тор, на котором θ действует тождественно. Рассмотрим в его нормализаторе подгруппу

$$N_0 = \{n \in G \mid nT_0n^{-1} = T_0,\ n \cdot \theta(n)^{-1} \in T_0\}.$$

Следующая теорема по существу доказана в [Бо].

Теорема. $H^1(\mathbb{R},G) \simeq T_0^{(2)}/N_0$, *где* $T_0^{(2)}$ *— множество элементов порядка* ≤ 2 *в* $T_0(\mathbb{C})$ *(содержащее представителей всех классов когомологий), а* N_0 *действует на* T_0 *(сохраняя* $T_0^{(2)}$*) по формуле*

$$n : t \mapsto nt\,\theta(n)^{-1}. \tag{1}$$

Объясним, как описать орбиты последнего действия. Инволюция θ является композицией диаграммной инволюции $\hat{\theta}$ (автоморфизма группы G, индуцированного инволюциями её диаграммы Дынкина и связного центра Z) и сопряжения посредством элемента $z_0 \in T_0$ с квадратом $z = z_0^2$, лежащим в центре полупростой части группы G. Сдвиг $t \mapsto tz_0$ превращает действие (1) в действие по формуле

$$n : t \mapsto nt\,\hat{\theta}(n)^{-1}, \tag{2}$$

причём множество $T_0^{(2)}$ переходит в

$$T_0^{(2,z)} = \{t \in T_0 \mid t^2 = z\}.$$

Рассмотрим односвязное накрытие

$$\mathfrak{t}_0 := \mathrm{Lie}(T_0(\mathbb{C})) \to T_0(\mathbb{C}), \qquad x \mapsto \exp(2\pi x).$$

Известно [ВГО, гл. 3, 3.10], что действие (2) накрывается действием некоторой (явно описываемой) дискретной группы $\widetilde{W}_0$ аффинных преобразований пространства $\mathfrak{t}_0$, сохраняющих вещественную форму $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$. Остаётся описать орбиты $\widetilde{W}_0$ на $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ и выделить те из них, которые отображаются в $T_0^{(2,z)}$.

Имеют место разложения

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G(\mathbb{C})) = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s, \qquad \mathfrak{t}_0 = \mathfrak{z}_0 \oplus \mathfrak{t}_{10} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}_{s0},$$

где $\mathfrak{z} = \mathrm{Lie}(Z(\mathbb{C}))$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}_{i0} \subset \mathfrak{g}_i$, и каждое $\mathfrak{g}_i$ — либо $\hat{\theta}$-инвариантный простой идеал, либо сумма двух простых идеалов, переставляемых инволюцией $\hat{\theta}$.

Группа $\widetilde{W}_0$ содержит подгруппу конечного индекса

$$\widetilde{W}_0^r = \Lambda_0 \times \widetilde{W}_1^r \times \cdots \times \widetilde{W}_s^r,$$

где Λ_0 — решётка в $\mathfrak{z}_0(\mathbb{R})$, а каждая $\widetilde{W}_i^r$ — кристаллографическая группа аффинных изометрий пространства $\mathfrak{t}_{i0}(\mathbb{R})$, порождённая отражениями (*аффинная группа Вейля*). Легко описать фундаментальную область Δ группы $\widetilde{W}_0^r$ в пространстве $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ как произведение фундаментальных областей соответствующих сомножителей: для Λ_0 можно взять фундаментальный параллелепипед решётки Δ_0, а для $\widetilde{W}_i^r$ это будет симплекс Δ_i (*фундаментальный альков*).

Барицентрические координаты x_{ij} в алькове Δ_i отвечают вершинам аффинной диаграммы Дынкина и удовлетворяют условиям

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \sum_j m_{ij} x_{ij} = 1 \text{ или } 2, \tag{3}$$

где m_{ij} — числовые отметки Каца на аффинной диаграмме Дынкина, а 1 или 2 выбирается в зависимости от типа диаграммы. Координаты x_{0j} на Δ_0 также выбираются определённым образом.

При этом оказывается, что для $x \in \Delta = \Delta_0 \times \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_s$ условие $\exp(2\pi x) \in T_0^{(2,z)}$ равносильно $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ и набору неравенств вида

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \equiv \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij} \pmod{\mathbb{Z}}, \tag{4}$$

где $\exp(2\pi y) = z_0$ и c_{ij} — некоторые рациональные числа.

Остаётся учесть действие конечной группы $\Gamma = \widetilde{W}_0/\widetilde{W}_0^r$ на Δ (на каждом алькове Δ_i она действует автоморфизмами аффинной диаграммы Дынкина, переставляя x_{ij}). В итоге получается

Теорема. *$H^1(\mathbb{R}, G)$ находится в биекции с множеством орбит группы Γ на множестве целочисленных наборов $(x_{ij})_{i,j}$, удовлетворяющих условиям (3), (4) и неравенствам, задающим Δ_0.*

В случае, когда G полупроста, а θ — внутренний автоморфизм, эта теорема доказана в [BT].

References

[Бо] М. В. Боровой, *Когомологии Галуа вещественных редуктивных групп и вещественные формы простых алгебр Ли*, Функц. анализ и его прил. **22**:2 (1988), 63–64.

[ВГО] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, *Строение групп и алгебр Ли*, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Соврем. пробл. матем., Фундам. направл. **41**, Москва, 1990.

[Се] Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, Москва, 1968.

[Ad] J. Adams, *Galois cohomology of real groups*, `arXiv:1310.7917` (2013).

[BT] M. Borovoi, D. A. Timashev *Galois cohomology of real semisimple groups*, `arXiv:1506.06252` (2015).

МОДУЛИ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПАР

Н. В. Тимофеева[34] (Ярославль)
ntimofeeva@list.ru

Пусть алгебраическая поверхность S, определённая над полем k, неособа и проективна, и на ней зафиксирован очень обильный обратимый пучок L, имеющий достаточно много глобальных сечений. Пусть выбраны и фиксированы натуральное число r и полином $P(m) \in \mathbb{Q}[m]$. Предполагается, что когерентные пучки на поверхности S имеют ранг, равный r, и классы Чженя c_1, c_2 такие, что полином Гильберта, вычисляемый относительно L, равен $P(t)$.

Мы работаем в категории алгебраических схем конечного типа над полем $k = \overline{k}$ характеристики нуль.

Определение. Назовем схему $\widetilde{S}$ *допустимой*, если $\widetilde{S} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s/(t)^{s+1}$, где $I = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$, а $\varkappa$ – артинов факторпучок пучка $\bigoplus^r \mathcal{O}_S$, имеющий длину $l \leq c_2$. Морфизм $\sigma : \widetilde{S} \to S$ назван *каноническим* и определяется структурой $\mathcal{O}_S$-алгебры на $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s/(t)^{s+1}$. Учитывая предположение о пучке L, считаем, что обратимый пучок $\widetilde{L} = \sigma^* L \otimes \sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}}$ очень обилен, и называем его *выделенной поляризацией* на $\widetilde{S}$.

Возможен случай $\widetilde{S} \cong S$. В противном случае определено разложение $\widetilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \widetilde{S}_i$ такое, что компонента $\widetilde{S}_0$ изоморфна раздутию поверхности S в пучке идеалов I. Тогда $\sigma_i : \widetilde{S}_i \to S$ – ограничения морфизма σ на компоненты $\widetilde{S}_i$, $i \geq 0$.

Определение. *Стабильной (полустабильной) парой* $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ названы следующие данные:
✓$(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ – допустимая схема с выделенной поляризацией,
✓$\widetilde{E}$ – векторное расслоение на схеме $\widetilde{S}$;
такие, что 1) $\chi(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) = rp(m)$;
2) на схеме $\widetilde{S}$ пучок $\widetilde{E}$ *стабилен (полустабилен) по Гизекеру,* то есть для любого собственного подпучка $\widetilde{F} \subset \widetilde{E}$ при $m \gg 0$

$$\frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} F} < \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} E},$$
$$\text{(соответственно, } \frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} F} \leq \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} E} \text{);}$$

[34]Работа выполнена при поддержке проекта № 1.1875.2014/К проектной части госзадания на НИР ЯрГУ № 2014/258

3) на каждой из дополнительных компонент $\widetilde{S}_i, i > 0$, пучок $\widetilde{E}_i := \widetilde{E}|_{\widetilde{S}_i}$ *квазиидеален*, то есть обладает описанием вида $\widetilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0/(\mathrm{tors}|_{\widetilde{S}_i})$ для некоторого $q_0 \in \bigsqcup_{l \le c_2} \mathrm{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

Подпучок $\mathrm{tors} \subset \sigma^* \ker q_0$ определяется в работе; его роль аналогична роли подпучка кручения на приведенной схеме. Если $\widetilde{S} \cong S$, то пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ называется *S-парой*.

В серии работ [1]–[10] автором построены основные (т.е. содержащие S-пары) компоненты пространства модулей полустабильных пар и доказано, что эти компоненты изоморфны как алгебраические схемы соответствующим компонентам пространства модулей полустабильных когерентных пучков по Гизекеру–Маруяме на поверхности (S, L), имеющих те же ранг и полином Гильберта.

В докладе будут изложены результаты о тех компонентах схемы модулей полустабильных пар, которые не содержат S-пары.

Список литературы

[1] Н.В. Тимофеева, Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности, Матем. заметки, 2007, 82:5, 756–769.

[2] Н.В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, Матем. сб., 2008, 199:7, 103–122.

[3] Н.В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, II, Матем. сб., 2009, 200:3, 95–118.

[4] Н.В. Тимофеева, О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений, Матем. заметки, 2011, 90:1, 143–150.

[5] Н.В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, III: Функториальный подход, Матем. сб., 2011, 202:3, 107–160.

[6] Н.В. Тимофеева, Об одном изоморфизме компактификаций схемы модулей векторных расслоений, Моделир. и анализ информ. систем, 2012, 19:1, 37–50.

[7] Н.В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, IV: Неприведенная схема модулей, Матем. сб., 2013, 204:1, 139–160.

[8] Н.В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, V: Существование универсального семейства, Матем. сб., 2013, 204:3, 107–134.

[9] N. V. Timofeeva, On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles, Сибирские электрон. матем. известия, 2015, 12, 577 – 591.

[10] Н.В. Тимофеева, Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений: неприведенные схемы модулей, Моделир. и анализ информ. систем, 2015, 22:5, 629–647.

НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ В ТЕОРИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ИНСТАНТОННЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. С. Тихомиров (ВШЭ, Москва)
astikhomirov@mail.ru

Под симплектическим векторным расслоением на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ понимается векторное расслоение E на пространстве $\mathbb{P}^3$, снабженное симплектическим изоморфизмом $\varphi: \ E \xrightarrow{\sim} E^\vee$, где симплектичность φ означает, что $\varphi^\vee = -\varphi$. Из симплектичности расслоения E следует, что его ранг четен, а его нечетные классы Черна равны 0:

$$\mathrm{rk}E = 2r, \quad r \geq 1, \qquad c_1(E) = c_3(E) = 0.$$

Под симплектическим инстантонным расслоением на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ понимается симплектическое векторное расслоение E на $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющее условиям:

$$h^0(E) = 0, \qquad h^1(E(-2)) = 0.$$

В частности, при $r = 1$ эти условия означают, что E - математический инстантон. Поэтому эти условия называются условиями инстантонности для E. Из первого из этих условий, в частности, легко следует, что $c_2(E) \geq r$, а тем самым, $c_2(E) \geq 1$.

Первые результаты по пространствам модулей (т.е. классов изоморфизма) симплектических инстантонов были получены в работах У. Бруццо, Д. Маркушевича и А. Тихомирова в 2012 и 2015 гг. Они связаны с описанием симплектических инстантонов через гиперсвязки квадрик в n-мерном векторном пространстве $H_n = H^2(E(-3))$, где $n = c_2(E)$. А именно, из спектральной последовательности Бейлинсона и условий симплектичности и инстантонности расслоения E следует, что E определяет так называемую гиперсвязку квадрик в пространстве H_n как элемент $A(E)$ пространства $S^2H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, где $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))^\vee$. При этом гиперсвязка квадрик $A(E)$, рассматриваемая как антиавтодуальный гомоморфизм $A_E: \ H_n \otimes V \to H_n \otimes V^\vee$, имеет ранг $2n + 2r$ и удовлетворяет еще одному открытому по Зарискому условию. Тем самым, множество $M_{n,r}$ гиперсвязок квадрик локально замкнуто в $S^2H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, и на нем естественным образом действует группа $GL(H_n)$, так что пространство модулей $I_{n,r}$ симплектических инстантонных расслоений E ранга $2r$ с $c_2(E) = n$ получается как фактор $M_{n,r}/GL(H_n)$. Тем самым, $I_{n,r}$ имеет структуру алгебраического пространства и имеет ожидаемую размерность $\mathrm{v.dim}\, I_{n,r} = 4n(r+1) - r(2r+3)$. В вышеуказанных работах рассмотрены так называемые ручные (tame) симплектические инстантоны, которые удовлетворяют некоторому естественному непустому открытому условию на гомоморфизм A_E, так что пространство модулей ручных симплектических инстантонов является плотным открытым подмножеством некоторой компоненты $I^*_{n,r}$ в $I_{n,r}$. Доказывается, что компонента $I^*_{n,r}$ неприводима и имеет ожидаемую размерность для произвольных $n, r,\ n \geq r \geq 1$, а также совпадает с $I_{n,r}$ в граничных случаях $r = n \geq 1$ и $r = 1,\ n \geq 1$. Вопрос о совпадении $I_{n,r}$ с $I^*_{n,r}$ и, как следствие, неприводимости $I_{n,r}$ в общем случае $n > r > 1$ остается открытым.

В настоящем докладе приводится новая индукционная конструкция, позволяющая связать вопрос о неприводимости пространства $I_{n,r}$ с этим вопросом для пространства $I_{n+1,r-1}$. Первый результат, вытекающий из этой конструкции, — следующая теорема.

Теорема. *Пространство модулей $I_{n,n-2}$ симплектических инстантонных расслоений ранга $2n-4$ с $c_2 = n \geq 3$ неприводимо.*

Ожидается, что эта конструкция даст положительный ответ на вопрос о неприводимости пространств $I_{n,r}$ в диапазоне $\frac{3}{8}n \leq r \leq n$, $n \geq 2$.

АЛГОРИТМ ДВУМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО АНАЛОГУ АЛГОРИТМА КУЛИ-ТЬЮКИ

В. С. Тутатчиков[35] (Красноярск)
vtutatchikov@mail.ru

Двумерное дискретное преобразование Фурье широко применяется в цифровой обработке сигналов [Dud88]. Опишем вычисление двумерного быстрого преобразования Фурье по аналогу алгоритма Кули-Тьюки.

Рассмотрим двумерный периодический сигнал f со значениями в комплексном пространстве. Отсчеты задаются как $f(k,t)$, где k,t принимают значения $0,\ 1,\ \ldots,\ 2^s-1$. Дискретное преобразования Фурье (ДПФ) $F(p,m)$ для сигнала $f(k,t)$ задается формулой (1):

$$F(p,m)=\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{t=0}^{2^s-1} f(k,t)e^{\frac{2\pi itm}{2^s}}e^{\frac{2\pi ikp}{2^s}}, \tag{1}$$

где p,m принимают значения $0,\ 1,\ \ldots,\ 2^s-1$.

Стандартный способ вычисления двумерного БПФ представляет собой комбинацию двух одномерных (2): например, внутренняя сумма в квадратных скобках по строкам, а внешняя - вычиление одномерного БПФ по столбцам [Dud88]. В этом случае для двумерного сигнала f с $N\times N, N=2^s$ отсчетами нам потребуется $N^2\log_2 N$ комплексных умножений и $2N^2\log_2 N$ комплексных сложений.

$$F(p,m)=\sum_{k=0}^{2^s-1}\left[\sum_{t=0}^{2^s-1} f(k,t)e^{\frac{2\pi ikp}{2^s}}\right]e^{\frac{2\pi itm}{2^s}}. \tag{2}$$

Преобразуем формулу (1) разбиением обеих координат на четные и нечетные компоненты [Ble89]:

$$\begin{gathered}F(p,m)=g_{00}(k_1,t_1)+g_{10}(k_1,t_1)W_s^p+\\+g_{01}(k_1,t_1)W_s^n+g_{11}(k_1,t_1)W_s^{p+m},\end{gathered} \tag{3}$$

[35]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2016 году (Задание №1.1462.2014/К). Название проекта: «Алгебраические и аналитические методы создания алгоритмов решения дифференциальных и полиномиальных систем: факторизация, разрешение особенностей и оптимальные решетки»

где $W_s^p = e^{\frac{2\pi i p}{2^s}}$,

$$g_{ij}(k_1,t_1) = \sum_{k_1=0}^{2^{s-1}-1} \sum_{t_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2k_1+i, 2t_1+j) W_{s-1}^{k_1 p} W_{s-1}^{t_1 m},$$

$i, j = 0, 1$ - двумерное преобразование Фурье с $2^{s-1} \times 2^{s-1}$ элементами подсигналов f, состоящих из четных и нечётных индексов, соответственно.

Можно показать, что множитель W_s^p в (3) обладает симметричностью относительно 2^{s-1}, то есть для $p_1 = 0 : 2^{s-1} - 1$ и $p_1 + 2^{s-1}$ мы имеем:

$$W_s^{p_1+2^{s-1}} = W_s^{p_1} W_s^{2^{s-1}} = W_s^{p_1} W_1^1 = -W_s^{p_1}. \tag{4}$$

Тогда формула (3) с учетом (4) примет вид [Tut13]:

$$\begin{aligned}
F(p_1, m_1) = g_{00}(k_1,t_1) + g_{10}(k_1,t_1) W_s^{p_1} + \\
+ g_{01}(k_1,t_1) W_s^{m_1} + g_{11}(k_1,t_1) W_s^{p_1+m_1}; \\
F(p_1 + 2^{s-1}, m_1) = g_{00}(k_1,t_1) - g_{10}(k_1,t_1) W_s^{p_1} + \\
+ g_{01}(k_1,t_1) W_s^{m_1} - g_{11}(k_1,t_1) W_s^{p_1+m_1}; \\
F(p_1, m_1 + 2^{s-1}) = g_{00}(k_1,t_1) + g_{10}(k_1,t_1) W_s^{p_1} - \\
- g_{01}(k_1,t_1) W_s^{m_1} - g_{11}(k_1,t_1) W_s^{p_1+m_1}; \\
F(p_1 + 2^{s-1}, m_1 + 2^{s-1}) = g_{00}(k_1,t_1) - g_{10}(k_1,t_1) W_s^{p_1} - \\
- g_{01}(k_1,t_1) W_s^{m_1} + g_{11}(k_1,t_1) W_s^{p_1+m_1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Разложение (5) продолжаем до тех пор, пока не останутся подсигналы с 2×2 элементами, которые вычисляются непосредственно. При этом, если дан исходный сигнал f с $N \times N, N = 2^s$ отсчетами, то для вычисления всего алгоритма двумерного БПФ по аналогу алгоритма Кули-Тьюки потребуется $3/4 N^2 \log_2 N$ комплексных умножений и $2N^2 \log_2 N$ комплексных сложений [Sta10].

Список литературы

[Dud88] Даджион Д., Мерсеро Р., Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ.-М.: Мир, 1988. - 488 с., [Ble89] Блейхут Р., Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.-М.: Мир, 1989. - 448 с.,

[Tut13] V. S. Tutatchikov, O. I. Kiselev, M. V. Noskov, Calculating the n-Dimensional Fast Fourier Transform, Pattern Recognition and Image Analysis, 2013, vol. 23, no. 3, pp. 429-433,

[Sta10] Старовойтов А. В., О многомерном аналоге алгоритма Кули-Тьюки Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева, 2010, №1/2010, сс. 69-73.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ: НАИВНЫЕ ЗАДАЧИ

Н. А. Тюрин (BLThP JINR, Dubna, NRU HSE, Moscow)

Несмотря на название, наивные задачи ниже формулируются исключительно в терминах кэлеровой геометрии римановых поверхностей, поэтому вместо списка литературы в конце мы сразу сошлемся на любой стандартный учебник по теории римановых поверхностей или алгебраических кривых.

Пусть Σ — риманова поверхность рода $g > 1$ с некоторой фиксированной комплексной структурой I. Тогда эта комплексная структура может быть единственным образом дополнена до кэлеровой тройки (G, I, Ω), где G — риманова метрика постоянной отрицательной кривизны, согласованная с I, а соответствующая симплектическая форма Ω нормирована условием $\int_\Sigma \Omega = 1$.

Кэлерова структура (G, I, Ω) индуцирует соответствующую эрмитову структуру на комплексном линейном расслоении $T^*\Sigma$, которое мы, следуя алгебро - геометрической традиции, будем обозначать K_Σ и называть каноническим классом. С другой стороны, в присутствии комплексной структуры в пространстве всех гладких сечений K_Σ выделено подпространство $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ комплексной размерности g, состоящее из голоморфных дифференциалов.

Произвольный голоморфный дифференциал $\rho \in H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ имеет ровно $2g - 2$ нуля (с учетом кратности). Рассмотрим гладкую вещественную функцию

$$\phi(\rho) = -\ln|\rho|,$$

корректно определенную на $\Sigma \backslash \{p_1, ..., p_{2g-2}\}$, где p_i — нули голоморфного дифференциала ρ, а вертикальными чертами обозначается поточечная эрмитова норма ρ. Так как функция $\phi(\rho)$ строго выпукла относительно комплексной структуры I, все ее “конечные” изолированные критические точки имеют морсовские индексы 0 или 1 (то есть являются минимумами или седлами).

Нетрудно установить, что для общего голоморфного дифференциала критические точки $\phi(\rho)$ изолированы и составляют конечное множество. Первая задача, которая возникает в наших рассуждениях, такова:

Задача. *Для общего голоморфного дифференциала ρ оценить (или найти) число минимумов функции $\phi(\rho)$ на $\Sigma \backslash \{p_1, ..., p_{2g-2}\}$.*

Заметим, что число минимумов m и седел s функции $\phi(\rho)$ связаны формулой

$$m - s + 2g - 2 = 2 - 2g.$$

В самом деле, сумма индексов градиентного векторного поля $|\rho|^2$ равна правой части последнего равенства, в то время как эта сумма должна равняться эйлеровой характеристике Σ.

Далее, по построению число минимумов m зависит от голоморфного дифференциала ρ, а точнее — от соответствующего класса по модулю умножение на комплексное число, так как очевидно, что $\phi(\rho)$ и $\phi(\lambda\rho)$ имеют одинаковые критические точки. То есть мы получаем распределение натуральных чисел над проективным пространством $\mathbb{P}^{g-1}$, получающимся проективизацией $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$.

Кажется естественным высказать предположение о том, что для общей точки $\mathbb{P}^{g-1}$ число m одно и то же, то есть оно зависит только от комплексной структуры I на Σ.

Далее, кроме конечных критических точек функции $\phi(\rho)$ нас интересуют конечные траектории градиентного потока функции $\phi(\rho)$ на $\Sigma\backslash\{p_1, ..., p_{2g-2}\}$ то есть траектории, начинающиеся и заканчивающиеся в конечных критических точках.

Нетрудно показать, что множество таких конечных траекторий **конечно** (и вот тут может понадобиться Специальная геометрия Бора - Зоммерфельда, о которой можно узнать из препринта **arXiv:1508.06804**). То есть мы получаем, что каждый голоморфный дифференциал задает на проколотой римановой поверхности $\Sigma\backslash\{p_1, ..., p_{2g-2}\}$ некоторый **ориентированный** граф $\Gamma(\rho)$, вершинами которого являются конечные критические точки функции $\phi(\rho)$ а ребрами конечные траектории. Ориентация ребер возникает из того, что каждая линия градиентного потока ориентирована возрастанием функции вдоль нее. При этом однако в общем случае не возникает согласованной ориентации замкнутых циклов, лежащих на графе $\Gamma(\rho)$.

Данная конструкция позволяет сопоставить голоморфному дифференциалу ρ некоторый класс $z(\rho) \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$: рассмотрим все простые (некратные) замкнутые циклы на $\Gamma(\rho)$, каждому циклу сопоставим соответствующий ему класс из $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ и затем сложим все эти классы.

Задача. *Показать, что длс общего голоморфного дифференциала последняя сумма конечна, то есть класс $z(\rho)$ корректно определен.*

Снова возникает естественная гипотеза о том, что для общего голоморфного дифференциала класс $z(\rho)$ один и тот же, то есть зависит только от I. Тогда мы получаем, что конформная структура на Σ

индуцирует некоторый класс из $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Но про римановы поверхности человечество знает почти все, так что естественный вопрос: что это за класс?

Ответ может оказаться очень простым: естественным выглядит факт независимости этого класса от I, а только от рода g. В самом деле, нетрудно видеть, что граф $\Gamma(\rho)$ гомотопически эквивалентен $\Sigma \backslash \{p_1, ..., p_{2g-2}\}$: мы выбрали все конечные траектории градиентного потока функции $\phi(\rho)$, исключив полубесконечные траектории, каждую из которых можно стянуть, откуда следует, что $\Sigma \backslash \{p_1, ..., p_{2g-2}\}$ стягивается до $\Gamma(\rho)$.

С другой стороны, представленная выше конструкция позволяет построить некоторые универсальные функции на объектах, возникающих в теории римановых поверхностей. Например, рассмотрим многообразие модулей $\mathcal{M}_g$ кривых рода g вместе с комплексным векторным расслоением $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_g$ ранга g на голоморфные дифференциалы, слоем которого является $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$. Тогда для каждого класса из $\mathcal{M}_g$, представляемого Σ, I и каждого дифференциала, голоморфного относительно I, мы можем определить комплексное число $\psi(I, \rho)$ по следующему правилу. По голоморфному дифференциалу ρ построим граф $\Gamma(\rho)$, проинтегрируем ρ по каждому ориентированному ребру и затем сложим полученные числа. Если функция $\phi(\rho)$ имеет неизолированные критические точки, то поскольку каждая одномерная критическая компонента не ориентирована ростом функции $\phi(\rho)$, то мы просто исключаем эту компоненту из графа $\Gamma(\phi)$. Очевидно, что определенная таким образом универсальная функция ψ на пространстве $tot\mathcal{E}$ однородная степени 1 вдоль слоев расслоения $\mathcal{E}$. Какими еще свойствами она обладает? Например,

Задача. *Является ли функция ψ непрерывной? гладкой? на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_g$.*

В определении функции ψ выше мы использовали голоморфный дифференциал дважды: для определения графа $\Gamma(\rho)$, а затем интегрируя по его ребрам. Однако сам по себе граф $\Gamma(\rho)$ может доставлять и более простую числовую информацию: например, рассмотрим просто сумму длин его ребер $L(\rho)$ относительно метрики G. Так как граф $\Gamma(\rho)$ зависит от класса ρ в $\mathbb{P}H^0(\Sigma, K_\Sigma)$, то мы получаем неотрицательную функцию L на проективном пространстве $\mathbb{P}H^0(\Sigma, K_\Sigma)$. Так как сама риманова поверхность Σ вкладывается в $\mathbb{P}H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ полным линейным рядом, то ограничивая функцию $L(\rho)$ на образ вложения, мы получаем некоторую функцию $L_0(\rho)$ на исходной римановой поверхности Σ. Эта функция зависит только от конформного класса метрики G.

Задача. *Что это за функция?*

Конечно, представленные выше очень наивные задачи предполагают некоторое развитие, то есть построение подобных графов и для квадратичных дифференциалов, связь с симплектической геометрией, геометрией систем Хитчина и, возможно, еще далее...

BURKHARDT, TODD, IGUSA, BEAUVILLE AND RATIONAL QUARTIC THREEFOLDS

I. A. Cheltsov (Edinburgh)

Burkhardt and Igusa quartic threefolds are classically known to be rational. They generate a pencil of quartics that all admit an action of the symmetric group of degree six. Bondal and Prokhorov asked which threefolds in this pencil are rational and which are not. All these threefolds are singular, so Iskovskikh and Manin's result cannot be applied here. Recently Beauville proved that every quartic threefold in this pencil is irrational except for Burkhardt and Igusa quartics and possibly two more threefolds. In this talk I will show how to use two constructions of Todd (dated back to 1933 and 1935) to prove that the remaining two quartic threefolds in the pencil are also rational.

ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ТЕТРАНОМИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Черепанский[36] **(Красноярск)**
alex.cherepanskiy@gmail.com

В работе исследуются области сходимости степенных рядов для общих алгебраических функций. Под общей алгебраической функцией понимается (многозначное) решение алгебраического уравнения

$$a_0 + a_1 y + \, \ldots \, + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0,$$

с комплексными переменными коэффициентами $a = (a_0, \, \ldots \, , a_n)$. В статье Биркеланда [1] было замечено, что достаточно изучать приведенное уравнение вида

$$a_0 + a_1 y + \, \ldots \, + y^p + \, \ldots \, + y^q + \, \ldots \, + a_n y^n = 0,$$

полученного из общего уравнения фиксацией любой пары коэффициентов. Там же показано, что в окрестности точки $a_0 = 0, \ldots [p] \ldots [q] \ldots , a_n = 0$ это уравнение определяет $q-p$ аналитических решений, представляемых следующими гипергеометрическими рядами

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^{n-1}} \frac{\varepsilon^{-\langle \beta_q, k \rangle + 1}}{(q-p)\, k!} \frac{\Gamma\big(\left(- \langle \beta_q, k \rangle + 1 \right) / \left(q - p \right) \big)}{\Gamma\big(1 + \left(\langle \beta_p, k \rangle + 1 \right) / \left(q - p \right) \big)} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \, \ldots \, [p] \, \ldots \, [q] \, \ldots \, a_n^{k_n},$$

где ε — первообразный корень $(-1)^{\frac{1}{q-p}}$ и β_p, β_q - некоторые вектора B_{pq} с рациональными координатами. Обозначим через D_{pq} их области сходимости.

Пассаре-Цихом [2] (см. также [3]) было получено комбинаторное описание областей сходимости D_{pq}. Их описание ассоциируется с взаимным расположением областей D_{pq} и связных компонент дополнения амёбы дискриминантных множеств (Напомним, что амёбой алгебраического множества называется ее образ при логарифмическом отображении).

Теорема ([2])**.** *Область сходимости D_{pq} есть полная область Рейнхарда такая, что соответствующая выпуклая область* $\operatorname{Log}(D_{pq})$

[36]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

содержит все связные компоненты дополнения к амёбе $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathcal{A}_{pq}$, *ассоциированные с подразбиением отрезка* $[0, n]$. *Более того, область* $\operatorname{Log}(D_{pq})$ *не пересекает никакие другие связные компоненты дополнения к данной амёбе.*

Мы дадим описание областей сходимости D_{pq} в виде явных функциональных неравенств для случая тетраномиального алгебраического уравнения, т.е. уравнения вида

$$a_0 + a_l y^l + a_m y^m + a_n y^n = 0,$$

где l, m, n — взаимно просты и $l < m < n$.

Аналогично общему алгебраическому уравнению, мы можем зафиксировать произвольную пару коэффициентов и рассматривать приведенные тетраномиальные уравнения, решения которых будут представляться в виде двойных степенных рядов. Основную роль в описании области сходимости D_{pq} будет играть дискриминант Δ_{pq} этого уравнения.

Обозначим дополнительную пару коэффициентов через a_t, a_s. Справедлива следующая

Теорема. *Для любой пары* $p, q \in \{0, l, m, n\}$ *область сходимости* D_{pq} *ряда, представляющего решение приведенного тетраномиального уравнения, задается либо одним неравенством одного из следующих типов*

$$\varepsilon^{\mp(t-p)(s-p)} \Delta_{pq}\Big(\pm\varepsilon^{t-p}\left|a_t\right|, \pm\varepsilon^{s-p}\left|a_s\right|\Big) \lesseqgtr 0,$$

$$\Delta_{pq}\Big(-\left|a_t\right|, -\left|a_s\right|\Big) > 0,$$

либо двумя неравенствами одного из следующих типов

$$\Delta_{pq}\Big(\varepsilon^{t-p}\left|a_t\right|, \varepsilon^{s-p}\left|a_s\right|\Big) \lesseqgtr 0, \quad \Delta_{pq}\Big(-\left|a_t\right|, -\left|a_s\right|\Big) \lesseqgtr 0,$$

$$\Delta_{pq}\Big(-\varepsilon^{t-p}\left|a_t\right|, -\varepsilon^{s-p}\left|a_s\right|\Big) \lesseqgtr 0, \quad \Delta_{pq}\Big(\varepsilon^{p-t}\left|a_t\right|, \varepsilon^{p-s}\left|a_s\right|\Big) \lesseqgtr 0.$$

Список литературы

[1] Birkeland R. Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen // Math. Zeitschrift, 1927. Bd. 26. Tl. 1. S. 565–578.

[2] Passare M., Tsikh A.K. Algebraic equations and hypergeometric series // The Legacy of N.H.Abel, Springer-Verlag, 2004. P. 653–672.

[3] Садыков, Т.М., А.К. Цих. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных // Москва: Наука, 2014. 408 с.

RATIONALITY PROBLEM

Yu. Tschinkel (New York)

The problem of rationality is classical problem of algebraic geometry.It asks whether a given algebraic variety is rational or equivalently whether the field of rational functions is a purely transcendental extension of the ground field which is usually the field of definition of an algebraic variety.The problem was reduced to the case of rationally connected varieties. Recently a substantial progress was achieved. It was proved that in many families of rationally connected varieties the general fibers are not stably rational while some special smooth fibers are rational. The main idea is to connect this property with properties of special, singular fiber. I will review this new approach and principal results obtained.

О ФУНКЦИИ РОСТА ГРУППЫ

А. А. Шлепкин (Красноярск)
shlyopkin@gmail.com

Определение. Пусть $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ — группа с конечным множеством образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$. Через $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$, где l — целое неотрицательное число, будем обозначать функцию роста группы G в множестве образующих $\mathfrak{N}$. Если $l > 0$, то $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ дает число элементов группы G представимых в виде несократимого произведения не более чем l элементов множества $\mathfrak{N}$. Если $l = 0$, то $F_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ (считается, что единица группы представима в виде несократимого произведения длинны 0) [1].

Определение. Пусть $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ — группа с конечным множеством образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$. Множество $\mathfrak{N}$ будем называть минимальным множеством образующих для группы G, если для любого $i \in \{1, ..., n\}$ $G \neq \langle \mathfrak{N} \setminus \{g_i\} \rangle$.

Гипотеза. *Пусть $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ — группы с минимальными конечными множествами образующих $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ соответственно, такие, что $F_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $G \simeq H$.*

Теорема. *Пусть $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ — группы с минимальными множествами образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$, $\mathfrak{M} = \{b_1, ..., b_m\}$ соответственно, такие, что $F_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $n = m$.*

Теорема. *Пусть $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ — конечные группы с минимальными множествами образующих $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ соответственно, такие, что $F_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $|G| = |H|$.*

Теорема. *$G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ — конечные абелевы p −группы с минимальными множествами образующих $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ соответственно, такие, что $F_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $G \simeq H$.*

Особый интерес вызывает **Гипотеза** когда G, H — конечные простые неабелевы группы. Как известно, $L_3(4)$ и A_8 — неизоморфные конечные простые неабелевы группы, имеющие равные порядки.

Теорема. *$G = A_8 = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = L_3(4) = \langle \mathfrak{M} \rangle$ с минимальными множествами образующих $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ соответственно. Тогда $F_{(G,\mathfrak{N})}(l) \neq F_{(H,\mathfrak{M})}(l)$.*

Список литературы

[1] O. V. Melnikov, V. N. Remeslennikov, V. A. Romankov, I. P. Shestakov, General Algebra, Moscow, science, 1990, 592 p.

МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ СУММИРОВАНИЯ МОНОМОВ

О. А. Шишкина (Красноярск)
olga_a_sh@mail.ru

Рассмотрены обобщения чисел и многочленов Бернулли нескольких переменных. Строится разностный оператор, действующий на функциях в рациональном конусе, доказывается многомерный аналог основного свойства многочленов Бернулли.

Кроме того, вычислены значения интегралов от многочлена Бернулли по сдвигам фундаментального параллелотопа, и найден многомерный аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа.

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a^j_1, \ldots, a^j_n\right)$, $a^j_i \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - целые числа.

Определение. *Рациональным конусом*, построенным на векторах $a^1, \ldots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, n\}$.

Определение. Коэффициенты b^A_μ ряда

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b^A_\mu}{\mu!} \xi^\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $\mu! = \mu_1!...\mu_n!$, $\xi^\mu = {\xi_1}^{\mu_1}...{\xi_n}^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, назовем *числами Бернулли, ассоциированными с конусом K.*

Определение. Для $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ многочленом Бернулли нескольких переменных назовем многочлен вида

$$B^A_\mu(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)!k!} b^A_{\mu - k} x^k,$$

где b^A_k - числа Бернулли, $k = (k_1, ..., k_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, ..., \mu_n - k_n)$.

Далее нам потребуется полиномиальный разностный оператор вида $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n \left(\delta^{a^j} - 1\right)$, где $\delta = (\delta_1, ...\delta_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a^j_1}...\delta_n^{a^j_n}$, и операторы дифференцирования по направлению векторов a^j: $D_j = \langle a^j, \partial \rangle = \sum\limits_{k=1}^n a^j_k \partial_k$ где ∂_j — операторы дифференцирования по j-ой переменной, $\partial = (\partial_1, ..., \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1}...\partial_n^{\mu_n}$ $j = 1, ..., n$. Обозначим $D = D_1...D_n$.

Теорема. *Многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению*

$$Q\left(\delta\right) B_{\mu}^{A}\left(x\right) = Dx^{\mu}.$$

Теорема. *Пусть конус* K *— унимодулярный,* x *лежит на подрешетке* Λ *решетки* $\mathbb{Z}^n$ *с базисом* $a^1, ..., a^n$. *Для суммы значений мономов* t^{μ} *в целых точках рационального параллелотопа* $\Pi_K\left(x\right) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$ *справедлива формула:*

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^{\mu} = \int\limits_{\Pi_K(x+a)} B_{\mu}^{A}\left(\tau\right) d\tau.$$

Список литературы

[1] M. Brion, N. Berline, Local Euler-Maclaurin formula for polytopes, Moscow Mathematical Society Journal, 2007, 7, 355–383.

[2] M. Brion, M. Vergne, Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes, Journal of the American Mathematical Society, 1997, 10, 4, 797-833.

[3] A. V. Ustinov, A discrete analoge of Euler's summation formula, Mat. Zametki, 2002, 71, 6, 931-936, (in Russian).

[4] O. A. Shishkina, The Euler-Maclaurin formula for rational parallelotope, Izvestia Irkutskogo Gosydarstvennogo Universiteta, seria „Matematika", 2015, 13, 56–71, (in Russian).

[5] O. A. Shishkina, The Euler-Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order, Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2015, 8, 1, 86–93.

ТРЕХМЕРНЫЕ КВАРТИКИ С БОЛЬШИМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ

К. А. Шрамов[37] (Математический институт им. В. А. Стеклова, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва)
costya.shramov@gmail.com

Многообразия Фано с большими группами симметрий интересны с многих точек зрения, включая классификацию конечных подгрупп в группах Кремоны (см. [5], [8]). В этой заметке приведены результаты о трехмерных квартиках с большими группами симметрий. Основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами $x_0, \ldots, x_5$. Пусть группа перестановок $\mathfrak{S}_6$ действует на $\mathbb{P}^5$ перестановками координат. Симметрические многочлены

$$\sigma_k(x_0, \ldots, x_5) = x_0^k + \ldots + x_5^k$$

инвариантны относительно группы $\mathfrak{S}_6$. Уравнение

$$\sigma_1(x_0, \ldots, x_5) = 0$$

задает $\mathfrak{S}_6$-инвариантное линейное подпространство $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$. В пространстве $\mathbb{P}^5$ имеется единственная $\mathfrak{S}_6$-инвариантная трехмерная квадрика Q, заданная уравнениями

$$\sigma_1(x_0, \ldots, x_5) = \sigma_2(x_0, \ldots, x_5) = 0.$$

Легко проверить, что квадрика Q неособа. Все (приведенные) $\mathfrak{S}_6$-инвариантные трехмерные квартики в $\mathbb{P}^5$ задаются уравнениями

$$\sigma_1(x_0, \ldots, x_5) = \sigma_4(x_0, \ldots, x_5) - \lambda\sigma_2(x_0, \ldots, x_5)^2 = 0 \qquad (1)$$

при всевозможных $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть X_λ обозначает квартику, заданную уравнениями (1). Можно проверить, что любая трехмерная квартика с действием группы $\mathfrak{S}_6$ изоморфна одной из квартик X_λ.

Особенности квартик X_λ были описаны в [6, Theorem 4.1]. Пусть $\mathcal{L}_{15}$ обозначает $\mathfrak{S}_6$-орбиту прямой, проходящей через точки

$$[1 : 0 : -1 : 1 : 0 : -1], \quad [0 : 1 : -1 : 0 : 1 : -1].$$

[37] Статья подготовлена в ходе проведения исследования с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ

Пусть Σ_6, Σ_{10}, Σ_{15} и Σ_{30} обозначают $\mathfrak{S}_6$-орбиты точек

$$[-5:1:1:1:1:1],\ [-1:-1:-1:1:1:1],\ [1:-1:0:0:0:0]$$

и $[1:1:\omega:\omega:\omega^2:\omega^2]$, соответственно, где ω — нетривиальный кубический корень из 1. Тогда кривая $\mathcal{L}_{15}$ является объединением пятнадцати прямых, а длина орбиты Σ_k равна k, $k \in \{6, 10, 15, 30\}$.

Теорема (см. [6, Theorem 4.1]). *Выполнены равенства*

$$\mathrm{Sing}(X_\lambda) = \begin{cases} \mathcal{L}_{15} \ \textit{при}\ \lambda = \dfrac{1}{4}, \\ \Sigma_{30} \cup \Sigma_{15} \ \textit{при}\ \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ \Sigma_{30} \cup \Sigma_{10} \ \textit{при}\ \lambda = \dfrac{1}{6}, \\ \Sigma_{30} \cup \Sigma_{6} \ \textit{при}\ \lambda = \dfrac{7}{10}, \\ \Sigma_{30} \ \textit{иначе}. \end{cases}$$

Более того, при $\lambda \neq \frac{1}{4}$ особенности многообразия X_λ являются обыкновенными двойными.

Многообразие $X_{\frac{1}{2}}$ известно как *квартика Бурхарда*. В работе [2] было показано, что множество $\Sigma_{30} \cup \Sigma_{15}$ инвариантно при действии группы $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$ порядка 25920. В [4] было показано, что множество $\Sigma_{30} \cup \Sigma_{15}$ является множеством особых точек многообразия $X_{\frac{1}{2}}$, и многообразие $X_{\frac{1}{2}}$ само является $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$-инвариантным (в частности, его группа автоморфизмов больше, чем $\mathfrak{S}_6$). Позже Тодд доказал в работе [12], что многообразие $X_{\frac{1}{2}}$ рационально. В [7] было показано, что $X_{\frac{1}{2}}$ является единственной трехмерной квартикой с 45 особыми точками.

Многообразие $X_{\frac{1}{4}}$ известно как *квартика Игусы*. Оно являтеся компактификацией некоторого пространства модулей абелевых поверхностей с подходящим образом выбранной дополнительной структурой (см. [6]). Проективно двойственное многообразие к квартике $X_{\frac{1}{4}}$ известно как *кубика Сегре*. Эта кубика особа, и следовательно рациональна, так что квартика $X_{\frac{1}{4}}$ тоже рациональна.

На фоне этого представляет интерес вопрос о рациональности других квартик X_λ. Почти полный ответ на него недавно был получен Бовилем.

Теорема 1 ([1]). *Если $\lambda \notin \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{10}\}$, то квартика X_λ нерациональна.*

В работе [3] был получен следующий результат, дополняющий теорему 1.

Теорема 2. *Квартики* $X_{\frac{1}{6}}$ *и* $X_{\frac{7}{10}}$ *рациональны.*

Доказательство теоремы 2, полученное в [3], основано на двух классических конструкциях рациональности, найденных Тоддом в работах [10] и [11].

В работе [9] был получен следующий результат.

Предложение ([9, §6])**.** *Двойное накрытие квадрики* Q*, разветвленное в пересечении с* $\mathfrak{S}_6$*-инвариантной квартикой в* $\mathbb{P}^5$*, нерационально.*

Список литературы

[1] A. Beauville, *Non-rationality of the* $\mathfrak{S}_6$*-symmetric quartic threefolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **71** (2013), 385–388.

[2] H. Burkhardt, *Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen*, Math. Ann. **38** (1891), 161–224.

[3] I. Cheltsov, C. Shramov, *Two rational nodal quartic threefolds*, preprint, arXiv:1511.07508 (2015).

[4] A. Coble, *An invariant condition for certain automorphic algebraic forms*, Amer. J. Math. **28** (1906), 333–366.

[5] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Birkhauser Boston, Progr. Math. **269** (2009), 443–548.

[6] G. van der Geer, *On the geometry of a Siegel modular threefold*, Math. Ann. **260** (1982), 317–350.

[7] A. de Jong, N. Shepherd-Barron, A. Van de Ven, *On the Burkhardt quartic*, Math. Ann. **286** (1990), 309–328.

[8] Yu. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3, J. Alg. Geom. **21** (2012), 563–600.

[9] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Double quadrics with large automorphism groups*, preprint, arXiv:1604.00307 (2016).

[10] J. Todd, *Configurations defined by six lines in space of three dimensions*, Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **29** (1933), 52–68.

[11] J. Todd, *A note on two special primals in four dimensions*, Q. J. Math. **6** (1935), 129–136.

[12] J. Todd, *On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions*, Q. J. Math. **7** (1935), 168–174.