Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
КСА инновационная группа

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

"СИСТЕМЫ АНОСОВА И СОВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА"

посвященная 80-летию со дня рождения Дмитрия Викторовича АНОСОВА

Москва, 19–23 декабря 2016 г.

Тезисы докладов

INTERNATIONAL CONFERENCE

"ANOSOV SYSTEMS AND MODERN DYNAMICS"

dedicated to the 80th anniversary of Dmitry ANOSOV

Moscow, December 19–23, 2016

Abstracts

Москва 2016

УДК 517.9
ББК 22.16
М43

М43 Международная конференция “Системы Аносова и современная динамика”, посвященная 80-летию со дня рождения Дмитрия Викторовича Аносова, Москва, 19–23 декабря 2016 г.: Тезисы докладов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2016. — 146 с.
ISBN 978-5-98419-073-2

Ответственный редактор К.О. Бесов

Конференция проводится при финансовой поддержке

Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-20466), Федерального агентства научных организаций России

ISBN 978-5-98419-073-2

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

Casson-type asymptotic invariants of knots in the Poincaré sphere

Petr M. Akhmet'ev

IZMIRAN, Troitsk, Moscow, Russia

pmakhmet@mail.ru

Let Σ be the integer homology Poincaré sphere, $\mathbf{B}$ be a magnetic field on Σ. Analytic examples of magnetic fields of Anosov type are provided by geodesic flows [5]. Briefly, we recall this construction.

The standard Hopf fibration $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to S^2$ is given by geodesic flow on the standard sphere S^2. Assume that the Fuchsian Ikosaeder group $\mathbf{I}$ acts on S^2 by isometries. The factor-space $\mathbb{R}\mathrm{P}^3/\mathbf{I}$ is the Poincaré sphere, denoted by Σ, the fundamental group $\pi_1(\Sigma)$ is denoted by π. The space Σ is equipped by a divergent-free vector field, which is tangent to geodesics. On the covering space S^3 a magnetic force-free field $\mathbf{B}$ is well-defined, which is tangent to fibers of the standard Hopf fibration and is invariant with respect to the action of the group π on S^3. This magnetic field $\mathbf{B}$ has only closed magnetic lines.

Using the Klein–Poincaré uniformization mapping for the Ikosaeder group $\mathbf{I}$ one gets a family of examples of force-free magnetic fields $\mathbf{B}$ of Σ. An example, given by [6], shows that many knotted magnetic lines of different type exist. Examples depend on discrete parameters: angles of the conformal image of the Ikosaedral fundamental domain by the Klein–Poincaré mapping.

An asymptotic ergodic limit for the Casson invariant (Vassiliev 2-order invariant) for knot in S^3 is degenerated. For links higher asymptotic invariant exists, the simplest asymptotic invariant of the order 7 is constructed in [2]. Using the fact that Σ is not simply-connected, we introduce two new finite-type asymptotic invariants of knots in Σ, denoted by M_3 and M_5. A brief definition of M_3 is the following. Take the universal covering $S^3 \to \Sigma$. An arbitrary knot $L \subset \Sigma$ admits the universal π-equivariant covering $\tilde{L} \subset S^3$. We assume that L in Σ is inside the subgroup $A \cong \mathbf{Q} \tilde{\times} \mathbb{Z}/5 \subset \pi$ (for generic magnetic line even stronger assumption that L is contactable gives no restrictions). Dived the components of $\tilde{L}$ with respect to 3 (right) residue classes of the index 3 subgroup, denoted by $A \subset \pi$: $\tilde{L} = \cup_{i=1}^{3} \tilde{\lambda}_i$. For the 3-component link $\tilde{L}$ we apply an equivariant modification of M invariant. In [2] it is proved that M-invariant is asymptotic, analogous properties for M_3 and M_5 are conjectured. The invariant M_5 is new, this invariant is defined by index 5 subgroup $B \cong \mathbf{Q}\tilde{\times}\mathbb{Z}/3 \subset \pi$. We use the fact that components of $\hat{L} = \cup_{i=1}^{5} \hat{\lambda}_1$ admit a natural cyclic order.

Definitions of M_3, M_5 are analytic, as the definition of M in [1]. The combinatorial formula of the invariants is difficult. To investigate algebraic properties of M_3, M_5 invariants, we introduced a new finite-valued invariant, called the hyperquaternionic Arf-type invariant. This invariant is used to express arithmetic reduction modulo 16 of integer-valued invariants M_3 and M_5. Take the quaternionic group $\mathbf{Q} \subset \pi$, which acts freely on S^3 with the quotient $S^3/\mathbf{Q}$. An arbitrary Q-equivariant link $\tilde{L} \subset S^3$, whose components are null-homotopic in $S^3/\mathbf{Q}$, admits a Seifert surface, which is embedded into $S^3/\mathbf{Q}$ and bounds $\tilde{L}/\mathbf{Q} = L$. Arf-invariant is well-defined, in the case self-linking coefficients of components of L are even. The hyperquaternionic Arf-invariant is related with the 2-component of the stable steam Π_7, see [3] for more details.

Results are conjectured:

(1) Analytic integrals for M_3 and M_5. Asymptotic and ergodic properties of M_3 and M_5.

(2) Formulas for M_3 and M_5 modulo 16; Galois resolutions.

(3) The combinatorial formulas of M_3 and M_5; calculations for geodesic flows with various parameters of the angles of the fundamental domain.

References

1. *Akhmet'ev P.M.* On a higher integral invariant for closed magnetic lines // J. Geom. Phys. 2013. V. 74 P. 381–391.
2. *Akhmet'ev P.M.* On combinatorial properties of a higher asymptotic ergodic invariant of magnetic lines // J. Phys.: Conf. Ser. 2014. V. 544, N 1. Art. 012015.
3. *Akhmet'ev P.M.* Higher helicity of magnetic lines and Arf-invariants: E-print. arXiv:1503.05306v2
4. *Baader S., Marché J.* Asymptotic Vassiliev invariants for vector felds: E-print. arXiv: 0810.3870.
5. *Dehornoy P., Pinsky T.* Coding of geodesics and Lorenz-like templates for some geodesic flows: E-print. arXiv: 1411.6857v1 [math.GT].
6. *Ghys E.* Right-handed vector felds and the Lorenz attractor // Japan. J. Math. 2009. V. 4. P. 47–61.

What is the area of a finitely presented group and what does this area depend on

Ivan Babenko

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Montpellier, France

ivan.babenko@umontpellier.fr

The construction of a riemann metric on a manifold is easily generalized to any finite simplicial polyhedron, the notion of volume (area) and of geodesic (as a locally shortest path) conserve their meaning. This allows to use the methods of differential geometry to study, for example, abstract groups.

In the beginning of the 80s, Gromov, using the method of the filling, demonstrated that if one normalizes the metric on a two dimensional polyhedron with the condition that any closed non contractible geodesic cannot have length less than 1, then there exists a fundamental constant c such that the area of any polyhedron with a non free fundamental group is not less than c. Relatively recently the estimation of c was improved by some authors, using "elementary methods", however the hypothesis about the exact meaning of c remains completely open.

This observation of Gromov allows to relate any finitely presented group G with its area $\sigma(G)$ (sometimes called the systolic area), as the lower bound of normalized areas of 2 dimensional riemann polyhedra that have the given fundamental group G. It appears that the area of the group G is 0 if and only if G is free.

For any positive number T one can naturally define the set $G(T)$ of two by two non isomorphic groups of area not larger than T. What is the structure and the cardinality of the set $G(T)$? Although this questions were raised by Gromov almost 25 years ago, partial answers were obtained only 8 years ago.

Recently it was discovered that the area $\sigma(G)$ of the group is closely related to the purely combinatorial invariant of this group, which is equal to the minimal number of 2-simplexes required to the triangulation of some 2-complex with given fundamental group G. This invariant, called the simplicial complexity of the group, approximates well the area of the group, when this area is large. The simplicial complexity is of interest from a purely combinatorial point of view and is related to the more "economical" corepresentation of the group. The study of this invariant allowed to move forward considerably in the study of the problems formulated above.

The talk will be dedicated to the range of questions described above.

References

1. *Babenko I., Balacheff F., Bulteau G.* Systolic geometry and simplicial complexity for groups: E-print. arXiv: 1152259.

Группы диффеоморфизмов прямой и окружности. Структурные теоремы, критерии почти нильпотентности (Groups of diffeomorphisms of the line and circle. Structural theorems and almost nilpotency criteria)*

Л. А. Бекларян (L. A. Beklaryan)

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

beklar@cemi.rssi.ru, beklaryan@mailfrom.ru

Для абстрактных конечно порожденных групп $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ какой-либо шкалы соответствий между классами таких групп и их ростом не существует. Тем не менее для отдельных классов конечно порожденных групп имеет место взаимно однозначное соответствие с ростом группы.

Теорема 1 (Gromov, 1981) [1]. *Конечно порожденная группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда она почти нильпотентна.*

Учитывая значимость свойства почти нильпотентности группы в связи с его однозначным соответствием со свойством полиномиальности роста группы (теорема 1), представляются важными как критерии, так и признаки почти нильпотентности группы. Ранее такой результат был получен для разрешимых групп.

Теорема 2 (строгая альтернатива, Rosenblatt, 1974) [2]. *Конечно порожденная разрешимая группа либо содержит свободную подполу-*

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-01-00110).

группу с двумя образующими, либо является почти нильпотентной (*соответственно имеет полиномиальный рост*).

Интересен вопрос о возможности реализации абстрактных групп в виде подгрупп групп диффеоморфизмов интервала (прямой, окружности) различной гладкости [3–5] и, соответственно, критерии почти нильпотентности таких групп.

Теорема 3 (строгая альтернатива, Navas, 2007) [6]. *Для любого заданного $\alpha > 0$ каждая конечно порожденная подгруппа группы $Diff_+^{1+\alpha}([0,1])$ либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является почти нильпотентной.*

Для групп гомеоморфизмов прямой и окружности имеется серия метрических инвариантов [7, 8]. Критерии существования метрических инвариантов удается сформулировать в терминах различных характеристик группы. На основе полученных критериев предложена схема классификации таких групп [8]. На этом пути, в частности, получены критерии почти нильпотентности, а также структурные теоремы.

Теорема 4 (строгая альтернатива, Beklaryan, 2015) [9]. *Пусть группа $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff_+^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда либо группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*

Теорема 5 (структурная теорема, Beklaryan, 2015) [9]. *Пусть группа $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы G справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) *Для группы G не существует инвариантной меры, и группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*

2) *Для группы G существует инвариантная мера, и G — коммутативная бесконечная группа. Группа G топологически полусопряжена бесконечной группе вращений. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*

3) *Для группы G существует инвариантная мера, и группа G почти нильпотентная. Фактор-группа G/H_G — циклическая группа конечного порядка, а подгруппа H_G коммутативная. Группа G*

полусопряжена циклической группе вращений конечного порядка, а минимальные множества группы G дискретные.

Теорема 6 (строгая альтернатива, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff_+^1(\mathbb{R})$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда либо группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*

Теорема 7 (структурная теорема, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff_+^1(\mathbb{R})$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы G справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) *Для группы G не существует инвариантной меры, и группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*

2) *Для группы G существует инвариантная мера, и группа G — коммутативная нециклическая группа. Группа G топологически полусопряжена группе сдвигов на прямой. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*

3) *Для группы G существует инвариантная мера, и группа G почти нильпотентная. Фактор-группа G/H_G — циклическая группа, а подгруппа H_G коммутативная. Группа G полусопряжена циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы G дискретные.*

4) *Для группы G существует инвариантная мера, и группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Фактор-группа G/H_G — циклическая группа, подгруппа $H_G \neq \langle e \rangle$ коммутативная и, соответственно, группа G разрешимая. Группа G полусопряжена циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы G дискретные.*

Список литературы

1. *Gromov M.* Group of polinomial growth and expending maps // Publ. Math. IHES. 1981. V. 53. P. 53–73.
2. *Rosenblatt J.* Invariant measures and growth conditions // Trans. AMS. 1974. V. 197. P. 33–53.

3. *Farb B., Franks J.* Groups of homeomorphisms of one-manifolds. III: Nilpotent supgroups // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2003. V. 23. P. 1467–1484.
4. *Deroin B., Kleptsyn V., Navas A.* Sur la dynamique unidimensionnelle en regularite intermediaire // Acta Math. 2007. V. 199. P. 199–262.
5. *Plante J., Thurston W.* Polinomial growth in holonomy groups of foliations // Comment. Math. Helv. 1976. V. 51. P. 567–584.
6. *Navas A.* Groups of circle diffeomorphisms: E-print. arXiv: math/0607481v3 [math.DS].
7. *Бекларян Л.А.* Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты // УМН. 2004. Т. 59, №4. С. 3–68.
8. *Бекларян Л.А.* Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации // УМН. 2015. Т. 70, №2. С. 148–184.
9. *Бекларян Л.А.* Критерии почти нильпотентности для групп гомеоморфизмов прямой и окружности. Структурные теоремы // Мат. сб. 2016 (в печати).

Emergence and Para-Dynamics

Pierre Berger

CNRS-LAGA, Université Paris 13, USPC, France

berger@math.univ-paris13.fr

Recently we showed that some degenerate bifurcations can occur robustly. Such a phenomenon enables ones to prove that some pathological dynamics are not negligible and even typical in the sense of Arnold–Kolmogorov. More precisely, we proved:

Theorem 1. *For every $\infty > r \geq 1$, for every $k \geq 0$, for every manifold of dimension ≥ 2, there exists an open set $\hat{U}$ of C^r-k-parameter families of self-mappings, so that for every topologically generic family $(f_a)_a \in \hat{U}$, for every $\|a\| \leq 1$, the mapping f_a displays infinitely many sinks.*

We will introduce the concept of Emergence which quantifies how wild the dynamics is from the statistical viewpoint, and we will conjecture the local typicality of super-polynomial ones in the space of differentiable dynamical systems.

To this end, we will develop the theory of Para-Dynamics, by giving the following negative answer to a problem of Arnold (1989):

Theorem 2. *For every $\infty > r \geq 1$, for every $k \geq 0$, for every manifold of dimension ≥ 2, there exists an open set $\hat{U}$ of C^r-k-parameter families of self-mappings, so that for every topologically generic family $(f_a)_a \in \hat{U}$, for every $\|a\| \leq 1$, the map f_a displays a fast increasing number of periodic points:*

$$\limsup \frac{\log Card\ Per_n\, f_a}{n} = \infty.$$

In order to prove this theorem, we will show an extension of theorems by Gonchenko–Shilnikov–Turaev, Kaloshin and Turaev, to give the following answer to questions asked by Smale in 1967, Bowen in 1978 and by Arnold in 1989, for manifolds of any dimension ≥ 2:

Theorem 3. *For every $\infty \geq r \geq 1$, for every manifold of dimension ≥ 2, there exists an open set U of C^r-diffeomorphisms, so that a generic $f \in U$ displays a fast growth of the number of periodic points.*

The proof involves a new object, the λ-C^r-parablender, the Renormalization for hetero-dimensional cycles, the Hirsh–Pugh–Shub theory, the parabolic renormalization for parameter family, and the KAM theory.

Typical points in chaotic dynamics*

Michael Blank

Institute for Information Transmission Problems, RAS, Moscow, Russia,
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

`blank@iitp.ru`

The classical Birkhoff ergodic theorem in its most popular version says that the time average along a single typical realization of a Markov process is equal to the space average with respect to the ergodic invariant distribution. This result is one of the cornerstones of the entire ergodic theory and its numerous applications. In this talk I'll address two questions related to this subject: how large is the set of typical realizations, in particular in the

*Supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-50-00150).

case when there are no invariant distributions, and how this is connected to properties of the so called natural measures (limits of images of "good" measures under the action of the system).

Our main results concern with necessary and sufficient conditions under which for a given reference measure (e.g. Lebesgue measure), whose support might be much larger than the support of the invariant one, the set of typical initial points is of full measure. It turns out that one of the main assumptions here is the ergodicity of the natural measure. To deal with the situation when the invariant measure does not exist we extend the notion of ergodicity to measures being non invariant.

To give an example of a system without invariant distributions satisfying our setup, consider the following deterministic Markov process: a family of maps from the unit disc $X := \{(\phi, R)\colon\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le R \le 1\}$ into itself defined in the polar coordinates (ϕ, R) by the relation:

$$T(\phi, R) := \begin{cases} (\phi + 2\pi\alpha + \beta(R - r) \bmod 2\pi, \gamma(R - r) + r) & \text{if } r(R - r) \neq 0, \\ (\phi + 2\pi\alpha \bmod 2\pi, (1 + r)/2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

with the parameters $\alpha, \beta, \gamma, r \in (0, 1)$. One can show that for any probability measure μ absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, the sequence of measures $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_*^k\mu$ (Cesaro averages of images of the measure μ under the action of T) converges weakly to a certain limit measure $\tilde{\mu}$ on the circle $\{R = r\}$, but this measure is no longer invariant. Depending on the choice of the rotation parameters $\alpha, \beta \in (0, 1)$ properties of the set of $\tilde{\mu}$-typical points turn out to be very different. In particular, if the parameter α is irrational, then the limit measure is unique and the set of $\tilde{\mu}$-typical points coincides with the entire unit disk.

Questions discussed above turn out to be especially actual in the case of large systems, when even in the presence of ergodic invariant measures, their supports cover only a small part of the phase space.

To formulate the results we need a few definitions.

Let $(X, \mathcal{B}, m)$ be a compact measurable space with a probabilistic reference measure m on it (e.g. a unit cube X equipped with the Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ and the Lebesgue measure m). Only probability measures will be considered and the reference measure is supposed to be positive on open sets.

For a given measure ν denote by $\mathcal{M}(\nu)$ the set of measures μ on X absolutely continuous with respect to ν (notation $\mu \ll \nu$). The map T induces the transfer-operator T_* acting on measures according to the formula

$T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A),\ \ A \in \mathcal{B}$. A measure μ is said to be *wandering* if its images under the action of the transfer-operator are mutually singular.

Denote by S the support of the limit measure $\tilde{\mu}$ and by μ_S the conditional measure on S constructed from a measure μ.

Depending on the properties of the transfer-operator there are three different situations. The first of them is the regular case: the transfer-operator T_* is continuous at the limit measure $\tilde{\mu}$. The following result gives necessary and sufficient conditions that the set of $\tilde{\mu}$-typical points

$$Z_{\tilde{\mu}} := \{x \in X\colon \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \xrightarrow{n\to\infty} \int f d\tilde{\mu} \quad \forall f \in C^0(X)\}$$

is of full reference measure m.

Theorem 1. *The property* $m(Z_{\tilde{\mu}}) \cdot m_S(Z_{\tilde{\mu}}) = 1$ *is equivalent to the following three assumptions*:

(i) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_*^k\mu \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\mu} \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(m) \cup \mathcal{M}(m_S)$,

(ii) *the limit measure* $\tilde{\mu}$ *is ergodic,*

(iii) *there are no wandering measures in* $\mathcal{M}(m_S)$.

The situation when the transfer-operator T_* is discontinuous at the limit measure $\tilde{\mu}$ (see example above) we refer to as an irregular case. In this situation there might be no invariant measures and thus the Birkhoff ergodic theorem is no longer applicable. To overcome this difficulty we (motivated by the fact that in the regular setting the set of typical points is of full ergodic invariant measure) say that a measure μ is *weakly ergodic* if $\mu(Z_\mu) = 1$.

Theorem 2. *The assumptions*

(i) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_*^k\mu \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\mu} \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(m) \cup \mathcal{M}(m_S)$,

(ii) *the limit measure* $\tilde{\mu}$ *is weakly ergodic,*

(iii) *there are no wandering measures in* $\mathcal{M}(m_S)$,

imply that $m(Z_{\tilde{\mu}}) \cdot m_S(Z_{\tilde{\mu}}) = 1$.

The third situation under study corresponds to the so called self-consistent dynamical systems. By a *self-consistent dynamical system* we mean a skew product map $\mathcal{T}(x,\mu) := (T_\mu x, (T_\mu)_*\mu)$ acting in the direct product space $X \times \mathcal{M}$. Here $\{T_\mu\}$ is a family of maps acting from X into itself and indexed by measures μ from $\mathcal{M}$, the space of probability measures on X. This construction is a deterministic counterpart of the so called nonlinear

Markov chains. In this setting we also give sufficient conditions under which the set of typical points for the limit measure is of full reference measure.

Let us mention a few known results related to the questions under study. The classical ergodicity assumption may be justified by the well known Oxtoby–Ulam result [1], according to which a generic volume preserving homeomorphism of a compact manifold is ergodic. In turn ergodicity by the Birkhoff ergodic theorem means that almost all points (with respect to the volume measure) are typical in this case. In a recent paper [2] this reasoning was extended to generic continuous maps *without* the assumption of the volume preservation and it has been shown that for a generic map the Birkhoff average converges almost everywhere, but the limit value may depend sensitively on the initial point. This disproves a conjecture by D. Ruelle [3] who expected that generically those averages should diverge, which he called *historical behavior*. A different approach to this question together with a comprehensive review of corresponding results may be found in [4].

We already mentioned that the questions we consider are closely related to the connections between the *natural* and *observable* versions of the so called Sinai–Ruelle–Bowen measures. We refer a reader to [5], where this question has been raised in the first time and to [6, 7] where further clarifications were obtained.

References

1. *Oxtoby J.C., Ulam S.M.* Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity // Ann. Math. (2). 1941. V. 42. P. 874–920.
2. *Abdenur F., Andersson M.* Ergodic theory of generic continuous maps // Commun. Math. Phys. 2013. V. 318. P. 831–855.
3. *Ruelle D.* Historical behaviour in smooth dynamical systems // Global analysis of dynamical systems / Ed. by H. Broer, B. Krauskopf, G. Vegter. London: Inst. Phys., 2001. P. 63–66.
4. *Araujo V., Pinheiro V.* Abundance of wild historic behavior, ergodic decomposition and generalized physical measures: E-print. arXiv: 1609.05356v1 [math.DS].
5. *Blank M., Bunimovich L.* Multicomponent dynamical systems: SRB measures and phase transitions // Nonlinearity. 2003. V. 16, N 1. P. 387–401.
6. *Misiurewicz M.* Ergodic natural measures // Contemp. Math. 2005. V. 385. P. 1–6.
7. *Jarvenpaa E., Tolonen T.* Relations between natural and observable measures // Nonlinearity. 2005. V. 18, N 2. P. 897–912.

Quasi-symmetries and conditional measures of determinantal point processes

Alexander I. Bufetov

Steklov Mathematical Institute, RAS, Moscow, Russia

bufetov@mi.ras.ru

The classical De Finetti Theorem (1937) states that an exchangeable collection of random variables is a mixture of Bernoulli sequences. Markov measures with full support and, more generally, Gibbs measures, on the space of binary sequences are easily seen to be quasi-invariant under the natural action of the infinite symmetric group.

The first result of the talk is that determinantal point processes on $\mathbb{Z}$ induced by integrable kernels are also quasi-invariant under the action of the infinite symmetric group. A key example is the discrete sine-process of Borodin, Okounkov and Olshanski. The Radon–Nikodym derivative is a regularized multiplicative functional on the space of configurations. The formula for the Radon–Nikodym derivative can be seen as the analogue of the Gibbs property for our processes.

The discrete sine-process is very different from a Gibbs measure: for example, the rigidity theorem of Ghosh and Peres shows that the number of particles in a bounded interval is almost surely determined by the configuration outside the interval.

The quasi-invariance can then informally be understood as the statement that there are no other invariants except the number of particles.

The second result is a continuous counterpart of the first: namely, it is proved that determinantal point processes with integrable kernels on $\mathbb{R}$, a class that includes processes arising in random matrix theory such as Dyson's sine-process, or the processes with the Bessel kernel or the Airy kernel studied by Tracy and Widom, are quasi-invariant under the action of the group of diffeomorphisms of the line with compact support (rigidity for the sine-process has been established by Ghosh, for the Airy and the Bessel by the speaker).

While no analogues of these results in higher dimensions are known, in joint work with Yanqi Qiu it is shown that for determinantal point processes corresponding to Hilbert spaces of holomorphic functions on the complex plane C or on the unit disk D, the quasi-invariance under the action of the group of diffeomorphisms with compact support also holds.

Quasi-symmetry theorems have an analogue also for determinantal point processes governed by J-Hermitian kernels, such as, for example, the Whittaker kernel: in joint work with Yanqi Qiu it is shown that adding a particle in one half of the phase space is equivalent to removing a particle in the other half. This can be seen as a manifestation, in the continuous case, of particle-hole duality.

Some examples of KAM-nondegenerate nearly integrable systems with positive metric entropy

Dong Chen

Pennsylvania State University, Department of Mathematics, University Park, PA, 16802, USA

dxc360@psu.edu

The celebrated KAM Theory says that if one makes a small perturbation of a non-degenerate completely integrable system, we still have a huge measure of invariant tori with quasi-periodic dynamics in the perturbed system. These invariant tori are known as KAM tori. What happens outside KAM tori draws lots of attention. In this talk I will present two types of C^∞ small Lagrangian perturbation of the geodesic flow on a flat torus. Both resulting flows have positive metric entropy. From this result we get positive metric entropy outside some KAM tori. What is special in the second type is that positive metric entropy comes from an arbitrarily small tubular neighborhood of one trajectory [1]. This is a joint work with Burago and Ivanov.

In [3] we prove the following theorem:

Theorem 1. *The Euclidean metric φ_0 of $\mathbb{T}^n (n \geq 3)$ can be perturbed in the class of reversible Finsler metrics so that the resulting metric φ_ϵ has positive metric entropy of its geodesic flow. φ_ϵ converges to φ_0 in C^∞ as $\epsilon \to 0$.*

In higher dimensions we are able to construct perturbation with entropy non-expansive geodesic flows [1]:

Theorem 2. *The Euclidean metric φ_0 of $\mathbb{T}^n (n \geq 4)$ can be perturbed in the class of reversible Finsler metrics so that the resulting geodesic flow has* *positive metric entropy and is entropy non-expansive. Such perturbations can be made C^∞ small.*

In order to prove Theorems 1 and 2 we use notions and definitions from [2]:

Let D be an n-dimensional disc and φ a Finsler metric on D.

Definition 1. φ is called *simple* if it satisfies the following three conditions:

(1) Every pair of points in D is connected by a unique geodesic.

(2) Geodesics depend smoothly on their endpoints.

(3) The boundary is strictly convex, that is, geodesics never touch it at their interior points.

Denote by U_{in} the set of unit tangent vectors with base points at the boundary ∂D and pointing inwards. And U_{out} denotes the unit tangent vectors at the boundary, pointing outwards. For a vector $v \in U_{in}$, we can look at the geodesic with initial velocity v. Once it hits the boundary again, we get its velocity vector $\beta(v) \in U_{out}$. This defines a map $\beta\colon U_{in} \to U_{out}$, which is called *the lens map of* φ. If φ is reversible, then the lens map is reversible in the following sense: $-\beta(-\beta(v)) = v$ for every $v \in U_{in}$.

We denote by UT^*D the unit sphere bundle with respect to the dual norm φ^*. Let $\mathscr{L}\colon TD \to T^*D$ be the Legendre transform of the Lagrangian $\varphi^2/2$. It maps UTD to UT^*D. For a tangent vector $v \in UT_xD$, its Legendre transform $\mathscr{L}(v)$ is the unique covector $\alpha \in U^*_xD$ such that $\alpha(v) = 1$.

Then consider subsets $U^*_{in} = \mathscr{L}(U_{in})$ and $U^*_{out} = \mathscr{L}(U_{out})$ of UT^*D. *The dual lens map of* φ is the map $\sigma\colon U^*_{in} \to U^*_{out}$ given by $\sigma := \mathscr{L} \circ \beta \circ \mathscr{L}^{-1}$ where β is the lens map of φ. If φ is reversible then σ is symmetric in the sense that $-\sigma(-\sigma(\alpha)) = \alpha$ for all $\alpha \in U^*_{in}$.

Note that U^*_{in} and U^*_{out} are $(2n-2)$-dimensional submanifolds of T^*D. The restriction of the canonical symplectic 2-form of T^*D to U^*_{in} and U^*_{out} determines the symplectic structure. And the dual lens map σ is symplectic. In [2], Burago and Ivanov proved the following theorem, which says that under certain natural restrictions, a symplectic perturbation of σ is the dual lens map of some metric that is closed to φ:

Theorem 3. *Assume that $n \geq 3$. Let φ be a simple metric on $D = D^n$ and σ its dual lens map. Let W be the complement of a compact set in U^*_{in}. Then every sufficiently small symplectic perturbation $\tilde{\sigma}$ of σ such that $\tilde{\sigma}|_W = \sigma|_W$ can be realized by the dual lens map of a simple metric $\tilde{\varphi}$ which coincides with φ in some neighborhood of ∂D.*

The choice of $\tilde{\varphi}$ can be made in such a way that $\tilde{\varphi}$ converges to φ whenever $\tilde{\sigma}$ converges to σ (in C^∞). In addition, if φ is a reversible Finsler metric and $\tilde{\sigma}$ is symmetric then $\tilde{\varphi}$ can be chosen reversible as well.

In the proof of Theorem 2 we use the following lemma from [2]:

Lemma 1. *There exists a symplectomorphism $\theta\colon D^6 \to D^6$ which is arbitrarily close to the identity in C^∞, coincides with the identity map near the boundary, and has positive metric entropy.*

References

1. *Burago D.Y., Chen D., Ivanov S.V.* An example of entropy non-expansive KAM-nondegenerate nearly integrable system, in progress.
2. *Burago D.Y., Ivanov S.V.* Boundary distance, lens maps and entropy of geodesic flows of Finsler metrics // J. Geom. Topol. 2016. V. 20. P. 469–490.
3. *Chen D.* Positive metric entropy arises in some nondegenerate nearly integrable systems: E-print. arXiv: 1604.07483v1 [math.DS].

Shadowing and density of minimal points

Danila Cherkashin, Sergey Kryzhevich

Geneva University, Geneva, Switzerland,
and Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia,
and University of Nova Gorica, Nova Gorica, Slovenia

kryzhevicz@gmail.com

We study structural stability and shadowing in dynamical systems by means of Topological Dynamics. Consider a homeomorphism T of a compact metric space (X, ρ) to itself. Let $\mathrm{M}(X,T) \subset \mathrm{R}(X,T) \subset \Omega(X,T) \subset \mathrm{CR}(X,T)$ be sets of minimal, recurrent, non-wandering and chain recurrent points of T. Let NW be the class of dynamical systems with $X = \Omega(X,T)$.

Definition 1. Let $d > 0$. A sequence $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is a *d-pseudotrajectory* if $\rho(x_{k+1}, T(x_k)) \le d$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Definition 2. An ε-network Y is *almost invariant* if for every $n \in \mathbb{Z}$ the set $T^n(Y)$ is an ε-network. Denote by Q the class of systems (X,T) that have finite almost invariant ε-networks for every $\varepsilon > 0$.

Definition 3. Let W be the class of dynamical systems (X,T) such that for any $\varepsilon > 0$ there exists a $d > 0$: for any d-pseudotrajectory $\{x_k\}$ there exist points $y^1, \dots, y^N$ such that x_k is ε close to one of points $T^k(y^i)$ for all $k \in \mathbb{N}$. Then the system (X,T) is said to satisfy the *multishadowing* property.

Proposition. *For any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for any δ-pseudotrajectory $p = \{p_k\}$ of the map T*

$$\liminf_{N\to\infty} \#K_\varepsilon \bigcap [0,N]/N > 1-\varepsilon.$$

Here $K_\varepsilon = \{k \ge 0\colon p_k \in U_\varepsilon(\mathrm{R}(X,T))\}$ where $U_\varepsilon(\mathrm{R}(X,T))$ is the ε-neighborhood of all recurrent points in X.

Theorem. 1. $\mathrm{Q} = \mathrm{W} \bigcap \mathrm{NW}$.

2. *For any homeomorphism from the class* Q *there exists a probability invariant measure, supported on all X.*

3. $(X,T) \in \mathrm{W}$ *if and only if* $\mathrm{CR}(X,T) = \overline{\mathrm{M}(X,T)}$.

This fact implies some interesting corollaries, e.g. the following.

Corollary. *Let X be a C^1 smooth compact manifold. There exists a residual subset $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Diff}^1(X)$ such that for any $T \in \mathrm{Z}$ and any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $\mathrm{dist}_{C^0}(S,T) < \delta$ implies $\Omega(X,S) \subset U_\varepsilon(\Omega(X,T))$.*

We also discuss some other corollaries of the formulated theorem.

Fast–slow partially hyperbolic systems and pathological foliations*

Jacopo De Simoi, Carlangelo Liverani, Christophe Poquet, Denis Volk

Department of Mathematics, University of Toronto, Canada
Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Italy
Université de Lyon, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, UMR 5208, France
Centre for Cognition and Decision Making, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

dvolk@hse.ru

In [2–4] the first two authors studied the following class of partially hyperbolic systems of the fast–slow type on $\mathbb{T}^2$

$$F_\varepsilon(x,\theta) = (f(x,\theta), \theta + \varepsilon\omega(x,\theta)) \mod 1, \tag{1}$$

with $\varepsilon > 0$, small, $F_\varepsilon \in \mathcal{C}^5(\mathbb{T}^2,\mathbb{T}^2)$, and $\inf_{x,\theta} \partial_x f(x,\theta) \geq \lambda > 1$, $\|\omega\|_{\mathcal{C}^4} = 1$. As usual it is important to specify the type of initial conditions under which we like to study the dynamical systems $(\mathbb{T}^2, F_\varepsilon)$. It is well known that, in order to be able to obtain meaningful results for long times, they must be random. More precisely, if we define $(x_n,\theta_n) = F_\varepsilon^n(x_0,\theta_0)$, then we would like to consider, at least, the initial condition $\theta_0 \in \mathbb{T}^1$ fixed, while $x_0 \in \mathbb{T}^1$ is distributed according to a probability measure with smooth density w.r.t. Lebesgue. Then (x_n,θ_n) can be viewed as a (Markov) random process.

Even though (1) is arguably the simplest possible model problem for a fast–slow partially hyperbolic system, its exact properties are not understood in full generality. If we want to develop a general theory for fast–slow partially hyperbolic systems, it is then important to see were do we stand and what are the open problems for the above basic model.

In [1], we studied the statistical properties of (1) in a much greater detail. In my presentation, however, I will only focus on the geometrical implications of these properties. In particular, in [1] we showed that, contrary

*Supported by the European Advanced Grant Macroscopic Laws and Dynamical Systems (MALADY) (ERC AdG 246953). D.V. has been partially funded by the Russian Academic Excellence Project '5-100'.

to naive intuition, it is possible that the central Lyapunov exponent χ_c is positive, despite having a statistical sink. We also proved below that F_ε has an invariant foliation made of smooth compact leaves tangent to the central distribution. If $\chi_c > 0$, these leaves have to expand in average but at the same time their length is uniformly bounded.

The reason why this is not contradictory is that the center foliation fails to be absolutely continuous. This means that, despite each leaf being individually smooth, the foliation as a whole is very wild. This situation is strange but known to happen, see the papers of Ruelle, Shub and Wilkinson [7, 6] where they presented an open set of volume preserving partially hyperbolic systems with non absolutely continuous central foliation for a perturbation of the product of an Anosov map by an identity map on the circle. This behaviour was later observed in many other partially hyperbolic systems.

Proposition 1. *There exists a C^1-open set $\mathcal{U}_\varepsilon$ such that for any $F \in \mathcal{U}_\varepsilon$ we have $\chi_c > 0$.*

In particular, if $F \in \mathcal{U}_\varepsilon$ has a physical measure, then it must have positive Lyapunov exponents.

Theorem 1. *For every map F from $\mathcal{U}_\varepsilon$*

1. *the central distribution E^c is uniquely integrable to a C^1 foliation $\mathcal{W}^c$;*
2. *if, in addition, F has j-pinching, $j \geq 1$, then $\mathcal{W}^c$ is C^j;*
3. *every leaf $W \in \mathcal{W}^c$ is a diffeomorphic circle of uniformly bounded length;*
4. *if F has a physical measure, then $\mathcal{W}^c$ is not absolutely continuous.*

Remark 1. According to Tsujii [5], the existence of the physical measure is generic and hence it holds generically for $F \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Accordingly, the above Theorem implies that generically $\mathcal{W}^c$ is not absolutely continuous.

References

1. *De Simoi J., Liverani C., Poquet C., Volk D.* Fast–slow partially hyperbolic systems versus Friedlin–Wentzell random systems: Preprint, 2016.
2. *De Simoi J., Liverani C.* The Martingale approach after Varadhan and Dolgopyat // Hyperbolic Dynamics, Fluctuations and Large Deviations / Ed. by Dolgopyat, Pesin, Pollicott, Stoyanov. AMS, 2015. P. 311–339. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 89).
3. *De Simoi J., Liverani C.* Fast–slow partially hyperbolic systems. Limit theorems: E-print. arXiv: 1408.5453.

4. *De Simoi J., Liverani C.* Fast–slow partially hyperbolic systems. Statistical properties // Invent. Math. DOI: 10.1007/s00222-016-0651-y.
5. *Tsujii M.* Physical measures for partially hyperbolic surface endomorphisms // Acta Math. 2005. V. 194, N 1. P. 37–132.
6. *Ruelle D., Wilkinson A.* Absolutely singular dynamical foliations // Commun. Math. Phys. 2001. V. 219, N 3. P. 481–487.
7. *Shub M., Wilkinson A.* Pathological foliations and removable zero exponents // Invent. Math. 2000. V. 139, N 3. P. 495–508.

Anti-integrable limit and non-existence of first integral in many-dimensional systems

Sergei A. Dovbysh

Moscow State University, Moscow, Russia

sdovbysh@yandex.ru

Earlier, the author has obtained conditions which imply the non-integrability of many-dimensional systems in the strongest analytic case, i.e., the absence of a non-constant analytic and even meromorphic first integral, and a non-trivial one-parameter analytic symmetry group [1–4]. These conditions are related to transversal intersections of many-dimensional invariant manifolds (separatrices) and utilize coordinates reducing dynamics over separatrices to normal forms. So, the conditions are constructively verifiable for concrete systems but their checking could involve some difficulties.

We discuss situation of anti-integrable limit where these conditions are easily verifiable. It is practically evident that quasirandom dynamics of systems near the anti-integrable limit admits a description in terms of Smale horseshoes and corresponding homoclinic structures, though this fact seems to be not pointed out in the literature, except for some particular discussion in [5]. In the anti-integrable limit the invariant manifolds and their normalizing transformations are tending to some manifolds and mappings that admit very simple description. This easily allows to apply author's results on many-dimensional non-integrability.

Consider the simplest example, a many-dimensional generalized standard map defined as

$$y_1 = y + \varepsilon^{-1} DV(\varphi), \qquad \varphi_1 = \varphi + y_1,$$

where $(y,\varphi),(y_1,\varphi_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n$, with ε being a small parameter, and V, a potential on $\mathbb{T}^n$.

Theorem. *If C^∞-potential V possesses a non-degenerate critical point on $\mathbb{T}^n$ then the mapping is non-integrable for all small $\varepsilon\neq 0$.*

References

1. *Dovbysh S.A.* Transversal intersection of separatrices and non-existence of an analytical integral in multi-dimensional systems // Variational and Local Methods in the Study of Hamiltonian Systems: Proc. Workshop, Trieste, Oct. 24–28, 1994. World Scientific, 1995. P. 156–165.
2. *Dovbysh S.A.* Transversal intersection of separatrices, the structure of the set of quasi-stochastic motions, and the non-existence of an analytic integral in multidimensional systems // Russ. Math. Surv. 1996. V. 51, N 4. P. 730–731.
3. *Dovbysh S.A.* Transversal intersection of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems. I: Basic result: Separatrices of hyperbolic periodic points // Collectanea Math. 1999. V. 50, N 2. P. 119–197.
4. *Dovbysh S.A.* Intersection of separatrices and the non-integrability of multidimensional systems // Russ. Math. Surv. 2000. V. 55, N 3. P. 574–575.
5. *Chen Y.-Ch.* Smale horseshoe via the anti-integrability // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 28, N 2. P. 377–385.

Towards the theory of solutions of the flow equations of incompressible liquid

V. S. Dryuma

Institute of Mathematics and Computer Science
of Academy of Sciences of Moldova, Chisinau, Moldova

valdryum@gmail.com

The Euler system of equations

$$\vec{U}_t+(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}+\vec{\nabla}P=0,\quad(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})=0,\tag{1}$$

where $\vec{U}=[U(\vec{x},t),V(\vec{x},t),W(\vec{x},t)]$ and $P=P(\vec{x},t)$ are the velocity and, respectively, the pressure of liquid, after change of the variables $x=x+\alpha t,\ y=y+\beta t,\ z=z+\gamma t$ and the functions $U(x,y,z,t)=\alpha+U(x-\alpha t,y-$

$\beta t, z-\gamma t)$, $V(x,y,z,t) = \beta + V(x-\alpha t, y-\beta t, z-\gamma t)$, $W(x,y,z,t) = \gamma + U(x-\alpha t, y-\beta t, z-\gamma t)$, $P(x,y,z,t) = P_0 + P(x-\alpha t, y-\beta t, z-\gamma t)$, takes the form

$$P_x + UU_x + VU_y + WU_z = 0,\ P_y + UV_x + VV_y + WV_z = 0,$$

$$P_z = UW_x + VW_y + WW_z = 0,\quad U_x + V_y + W_z = 0. \tag{2}$$

To integrate the system (2) we transform it into the system of equations (in new variables)

$$VWP_x + UWP_y + UVP_z - V^2(WU)_y - W^2(VU)_z - U^2(WV)_x = 0,$$

$$(UU_x)_y + (VU_y)_y + (WU_z)_y - (UV_x)_x - (VV_x)_x - (WV_z)_x = 0,$$

$$(UU_x)_z + (VU_y)_z + (WU_z)_z - (UW_x)_x - (VW_y)_x - (W_zW)_x = 0,$$

$$(UV_x)_z + (VV_y)_z + (WV_z)_z - (UW_x)_y - (VW_y)_y - (WW_z)_y = 0, \tag{3}$$

using the relations $UU_x = P_x - VU_y - WU_z$, $VV_y = (P_y - UV_x - WV_z)$, $WW_z = (P_z - UW_x - VW_y)$, and conditions of their compatibility.

As a result we find that the simplest non singular solution (1-soliton) of the system (3) has the form

$$W(\vec{x},t) = c + \frac{e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}}{1+e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}},$$

$$V(\vec{x},t) = b + \frac{e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}}{1+e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}},$$

$$U(\vec{x},t) = a - \frac{(\beta+\delta)\,e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}}{\alpha\,\left(1+e^{\alpha\,(x-at)+\beta\,(y-bt)+\delta\,(z-ct)}\right)}$$

where (a,b,c) and α, β, δ are the parameters.

More complicate solution (2-soliton) of the system (3) is

$$W(\vec{x},t) = c$$
$$+\frac{e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct}+e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+2\,z-2\,ct-y+bt}}{\left(1+e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct}\right)\left(1+e^{-y+bt+z-ct}\right)},$$

$$V(\vec{x},t) = b$$
$$+\frac{e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct}+e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+2\,z-2\,ct-y+bt}}{\left(1+e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct}\right)\left(1+e^{-y+bt+z-ct}\right)},$$

$$U(\vec{x},t) = a$$
$$+ \frac{e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct} + e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+2\,z-2\,ct-y+bt}}{\left(1+e^{-x+at-(x-at)\beta+\beta\,(y-bt)+z-ct}\right)\left(1+e^{-y+bt+z-ct}\right)}.$$

In given examples of the flows the condition $P(\vec{x},t) = const$ is satisfied.

As the flows with condition $P(x,y,z,t) \neq const$ may be considered following example

$$W(x,y,z,t) = c - 1/2\,\sin(x-at) - \sin(y-bt),$$

$$V(x,y,z,t) = b - 1/2\,\cos(x-at) + \cos(z-ct),$$

$$U(x,y,z,t) = a + \cos(y-bt) - \sin(z-ct),$$

$$P(x,y,z,t) = P_0 - 1/4\,\cos(-y+bt+x-at)$$

$$+1/4\,\cos(y-bt+x-at) + 1/4\,\cos(x-at-z+ct)$$

$$+1/4\,\cos(x-at+z-ct) + 1/2\,\sin(y-bt+z-ct) - 1/2\,\sin(y-bt-z+ct).$$

More general consideration of the system (3) allow as to formulate the

Theorem 1. *Non singular and non stationary solution of the system* (1) *has the form*

$$U(x,y,z,t) = a + A\sin(z-ct) + C\cos(y-bt),$$

$$V(x,y,z,t) = b + B\sin(x-at) + A\cos(z-ct),$$

$$W(x,y,z,t) = c + C\sin(y-bt) + B\cos(x-at),$$

$$P(x,y,z,t) = 1/2\,CB\sin(-y+bt+x-at) - 1/2\,CB\sin(y-bt+x-at)$$

$$-1/2\,BA\sin(-z+ct+x-at) - 1/2\,BA\sin(z-ct+x-at)$$

$$+1/2\,AC\sin(-z+ct+y-bt) - 1/2\,AC\sin(z-ct+y-bt) + F_2(t), \quad (4)$$

which is a generalization of the famous stationary $ABC - flow$.

Theorem 2. *Non singular and non stationary solution of the system* (3) *has the form*

$$U(x,y,z,t) = a + 1/2\,C_1\,\sin(y-bt) + 1/2\,E_1\,\cos(y-bt) + 1/2\,F_1\,\cos(z-ct)$$

$$+1/2\,H_1\,\sin(z-ct),$$

$$V(x,y,z,t) = b + 1/2\, F_1 \, \sin(z-ct) - 1/2\, H_1 \, \cos(z-ct) - A_1 \, \sin(x-at)$$

$$+B_3 \, \cos(x-at),$$

$$W(x,y,z,t) = c + A_3 \, \cos(x-at) + B_3 \, \sin(x-at)$$

$$+1/2\, C_1 \, \cos(y-bt) - 1/2\, E_1 \, \sin(y-bt),$$

Remark. To integrate the Navier–Stokes system of equations

$$\vec{U}_t + (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}P = \mu\Delta\vec{U}, \quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{U}) = 0, \tag{5}$$

the approach described above can be applied, where the condition

$$VWP_x + UWP_y + UVP_z - V^2(WU)_y - W^2(VU)_z - U^2(WV)_x +$$

$$+\mu(VW\Delta U + UW\Delta V + UV\Delta W) = 0,$$

is used, which is consequence of the condition of incompressibility of liquid $(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}) = 0$.

References

1. *Dryuma V.* On solving equations of flows of incompressible liquids // Abstr. Int. Conf. "Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2016)", Chisinau, June 23–26, 2016. P. 28–29.

Non-integrable model describing some aspects of celestial bodies' dynamics in first order mean motion resonance

Sergey Efimov, Vladislav Sidorenko

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

efimov.ss@phystech.edu, vvsidorenko@list.ru

Mean-motion resonance (MMR) is the dynamical situation in characterized by commensurability between the orbital periods of two celestial bodies. Effects of bodies' interaction in the resonance are very different from non-resonant case. The study of MMR is very important, in particular, for problems of formation and stability of the solar system.

The commensurability $p+q\colon p$ ($p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$) is referred to as resonance of order $|q|$. Systems with the first order MMR are usually considered to be integrable [1]. However, there is evidence that dynamics of Pluto, which is in $2\colon 3$ orbital resonance with Neptune, is chaotic [2]. In this work, it is shown that integrability of the problem is a consequence of a rough approximation. General non-planar case within the circular restricted three-body problem is considered. The model Hamiltonian describing evolution of the system in the first order MMR more accurately is introduced. Following the technique originated from [3, 4], canonical variables are divided into slow and fast and the averaging method is applied to study long-term evolution of the orbit.

It is shown that the phase space of the system contains a region with adiabatic chaos. Some characteristics of emerging chaos are calculated, classification of all possible long-term evolution scenarios is presented and bifurcations in phase portraits of the system are analyzed.

References

1. *Sessin W., Ferraz-Mello S.* Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1 solutions of the Hori auxiliary system // Celestial Mechanics. 1984. V. 32. P. 307–332.
2. *Wisdom J., Sussman G.J.* Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic // Bull. Amer. Astron. Soc. 1988. V. 20. P. 910.
3. *Wisdom J.* A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability // Icarus. 1985. V. 63. P. 272–289.
4. *Neishtadt A.I.* Jumps in the adiabatic invariant on crossing the separatrix and the origin of the 3 : 1 Kirkwood gap // Sov. Phys. Dokl. 1987. V. 32. P. 571–573.

Main subspaces of the space of C^1-smooth skew products of interval maps*

Lyudmila Efremova

National Research Nizhni Novgorod State University, Nizhni Novgorod, Russia

lefunn@gmail.com

We consider the space $\widetilde{T}^1_*(I)$ of C^1-smooth skew products of maps of an interval with invariant boundary of a closed rectangle $I = I_1 \times I_2$ (I_1, I_2 are closed intervals) such that quotient map $f\colon I_1 \to I_1$ of a skew product $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ is Ω-stable[1] in the space of C^1-smooth maps of interval I_1 into itself with invariant boundary of interval I_1. Here

$$F(x,\, y) = (f(x),\, g_x(y)) \;\; g_x(y) = g(x,\, y) \;\text{ for any point }\; (x,\, y) \in I.$$

In addition, we suppose that a map $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ has quotient of type $\succ 2^\infty$, i. e. f has a periodic orbit with a (least) period $\notin \{2^i\}_{i\geq 0}$.

Our considerations are based on use of the special multifunctions such as the Ω-function, auxiliary and suitable functions (for details see, e.g., [2]).

We formulate Decomposition Theorem [2] for the above space of skew products. This Theorem makes it possible to present the considering space as the union of nonempty pairwise disjoint subspaces $\widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$ for $j = 1, 2, 3, 4$.

These main subspaces are distinguished in accordance with continuity property of auxiliary multifunctions (as $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$) or in accordance with continuity property of suitable (but not auxiliary) multifunctions (as $\widetilde{T}^1_{*,\,2}(I)$); or vise versa, in accordance with discontinuity property of suitable multifunctions in combination with continuity property of the Ω-function (as $\widetilde{T}^1_{*,\,3}(I)$) or in combination with discontinuity property of the Ω-function (as $\widetilde{T}^1_{*,\,4}(I)$). Thus, Decomposition Theorem gives implicit description of subspaces $\widetilde{T}^1_{*,\,j}(I)$ for $1 \leq j \leq 4$.

We distinguish important nonempty subsets of the above subspaces and investigate approximate properties of skew products from distinguished subsets. Explicit description of these subsets of skew products is based, in the

*Supported by the Ministry of Science and Education of Russia, grant no. 14-10.

[1] The paper [1] contains deep analysis of the concept of Ω-stability for maps on manifolds with boundary.

first place, on the concept of stability as a whole in C^1-norm of family of fibers maps [3] and, in the second place, on the concept of dense stability as a whole in C^1-norm of family of fibers maps.

To give the Definition we need some information on iterations of a skew product F and their special presentation. So, for any $n \geq 1$ and any point $(x,\, y) \in I$ the following equality holds

$$F^n(x,\, y) = (f^n(x),\, g_{x,\,n}(y)), \text{ where } g_{x,\,n}(y) = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_x(y).$$

Any iteration of a skew product F can be presented as composition of two maps $F_n \colon I \to I$, where $F_n(x,\, y) = (id(x),\, g_{x,\,n}(y))$, and $F_{n,\,1} \colon I \to I$, where $F_{n,\,1}(x,\, y) = (f^n(x),\, id(y))$ (here $id(x)$ and $id(y)$ are identity maps of intervals I_1 and I_2 respectively). Let us give the exact formula:

$$F^n = F_{n,\,1} \circ F_n.$$

Definition. We say that family of fibers maps of a skew product $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ with quotient of type $\succ 2^\infty$ *is stable as a whole in C^1-norm* if for any $\delta > 0$ there is a neighborhood $B^1_\varepsilon(F)$ of a map F in the space $\widetilde{T}^1_*(I)$ such that for every map $\Phi \in B^1_\varepsilon(F)$ and for return times l^*_i ($i \geq i^*$ for some $i^* \geq i_*$) of trajectories from f-nonwandering set $\Omega(f)$ there exists δ-closed to the identity map in C^0-norm homeomorphism $H^{\langle l^*_i \rangle} \colon \overline{\eta}^F_{l^*_i} \to \overline{\eta}^\Phi_{l^*_i}$ of skew products class satisfying: maps $F_{l^*_i}{}_{|\Omega(f)\times I_2}$ and $\Phi_{l^*_i}{}_{|\Omega(\varphi)\times I_2}$ are Ω-conjugate with respect to $H^{\langle l^*_i \rangle}$, where $\overline{\eta}^{(\cdot)}{}_{l^*_i}$ is the graph in I of the suitable function corresponding to l^*_i-th iteration of a map.

The property of *dense stability as a whole in C^1-norm* of family of fibers maps means breakdown of the above property on the nonempty closed nowhere dense subset of f-nonwandering set.

The property of stability as a whole in C^1-norm of family of fibers maps of a skew product $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ selects C^1-smooth Ω-stable skew products (with respect to homeomorphisms of skew products class) [4].

Theorem 1. *A skew product $F \in \widetilde{T}^1_*(I)$ with quotient map of type $\succ 2^\infty$ is Ω-stable in C^1-norm if and only if its family of fibers maps is stable as a whole in C^1-norm. Moreover, Ω-stable skew products with quotient of type $\succ 2^\infty$ are contained in the subspace $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$.*

The claim of the following Theorem 2 means that Ω-stable skew products with quotient of type $\succ 2^\infty$ are not dense in $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ (see [4]).

Theorem 2. *There exists a skew product $F \in \widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ with quotient map of type $\succ 2^\infty$ such that some its neighborhood $B^1_\varepsilon(F)$ in the space $\widetilde{T}^1_{*,\,1}(I)$ does not contain Ω-stable skew products of maps of an interval.*

Let us consider skew products with densely stable as a whole in C^1-norm families of fibers maps.

Theorem 3. *For any $j = 1, 2, 3, 4$ there exists a map $F_j \in \widetilde{T}^1_{*,\, j}(I)$ with quotient of type $\succ 2^\infty$ and densely stable as a whole in C^1-norm family of fibers maps.*

The following Theorem 4 gives criterion of approximability in C^1-norm of skew products with quotient map of type $\succ 2^\infty$ and densely stable as a whole family of fibers maps by means of Ω-stable skew products.

Theorem 4. *Let $F \in \widetilde{T}^1_{*,\, j}(I)$ ($j = 1, 3$ or 4) be a skew product with quotient of type $\succ 2^\infty$ and densely stable as a whole in C^1-norm family of fibers maps.*

Then F admits approximation in C^1-norm by means of C^1-smooth Ω-stable skew products of maps of an interval with an arbitrary degree of accuracy if and only if for every locally maximal f-quasiminimal set $K(f)$ and $i \geq i^*$ there exists a connected component $C_{K(f),\, i}$ of the space of C^1-smooth Ω-stable maps of interval I_2 into itself satisfying the inclusion

$$\{g_{x,\, l_i^*}\}_{x \in K(f)} \subset \overline{C}_{K(f),\, i}.$$

Remark 1. At present, examples of skew products from subspace $\widetilde{T}^1_{*,\, 2}(I)$ with quotient of type $\succ 2^\infty$ and densely stable as a whole in C^1-norm family of fibers maps, that satisfy conditions of Theorem 4, are unknown.

The subspace $\widetilde{T}^1_{*,\, 4}(I)$ demonstrates new unusual properties.

Theorem 5. *The set of Ω-conjugacy classes of maps from the subspace $\widetilde{T}^1_{*,\, 4}(I)$ is uncountable and has cardinality $\geq \aleph_1$, where $\aleph_1$ is cardinality of the set of ordinal numbers of second class.*

Moreover, $\widetilde{T}^1_{*,\, 4}(I)$ contains the subset of skew products every of which can be approximated with any degree of accuracy in C^1-norm by means of skew products from the same subset with any depth of the center, which is ordinal number of second class.

Remark 2. Analogously results of paper [5], Theorem 5 demonstrates impossibility of complete dynamical description of skew products from the subspace $\widetilde{T}^1_{*,\, 4}(I)$ based on the concept of Ω-conjugacy.

References

1. *Anosov D.V.* Structurally stable systems // Trudy Mat. Inst. Steklova. 1985. V. 169. P. 59–93.

2. *Efremova L.S.* A decomposition theorem for the space of C^1-smooth skew products with complicated dynamics of the quotient map // Mat. Sb. 2013. V. 204, N 11. P. 55–82.
3. *Efremova L.S.* Set-valued functions and dynamics of skew products of interval maps // Progress in Nonlinear Science: Int. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov, Nizhny Novgorod, Russia. July 2–6, 2001. Proc.: Math. Problems of Nonlinear Dynamics. 2002. V. 1. P. 219–224.
4. *Efremova L.S.* Stability as a whole of a family of fibers maps and Ω-stability of C^1-smooth skew products of maps of an interval // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 692, N 1. Art. 012010.
5. *Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shil'nikov L.P.* Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains // Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz., Moscow: VINITI, 1999. V. 67. P. 69–128.

Lower bounds for Lyapunov exponents of flat bundles on curves

Alex Eskin, Maxim Kontsevich, Martin Möller, Anton Zorich

Department of Mathematics, University of Chicago, USA
IHES, France
Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt, Germany
Institut Universitaire de France; Institut de Mathématiques de Jussieu, France

eskin@math.uchicago.edu, maxim@ihes.fr, moeller@math.uni-frankfurt.de, anton.zorich@imj-prg.fr

Lyapunov exponents are dynamical analogs of characteristic numbers of vector bundles. The Lyapunov exponents for the Teichmüller geodesic flow relate the dynamics on moduli space with the dynamics on flat surfaces. Efficiently computing them is currently still a challenge, both for strata of the moduli space of flat surfaces and for Teichmüller curves, including all the Teichmüller curves generated by square-tiled surfaces. Starting with [7] it was realized that the *sum* (i.e. the sum of the positive) Lyapunov exponents equals the normalized degree of the Hodge bundle on Teichmüller curves, see [6, 8, 1, 3, 2] for versions of this formula, including the case of strata.

This observation generalizes from the variation of Hodge structures over Teichmüller curves to any weight one variation of Hodge structures (VHS). Presently, irreducible summands of weight one VHS are the only instances where such degree formulas are known. Even the computation of Filip [5] of the top Lyapunov exponent for families of K3 surfaces can be subsumed under this observation, if one refers to his proof using the Kuga–Satake construction.

The main result of this paper is that an *inequality* for the sum of the top k Lyapunov exponents holds in great generality. This was first conjectured by [9], but the scope given here is more general.

Let $C = \mathbb{H}/\Gamma$ be hyperbolic Riemann surface of finite area (or equivalently, a complex quasi-projective curve) with a representation $\rho\colon \pi_1(C) \to \mathrm{GL}(V)$ such that, if C is non-compact, the monodromies around the cusps $\Delta = \overline{C} \setminus C$ are *non-expanding*, i.e. all the eigenvalues lie on the unit circle. This assumption is necessary and also sufficient for Oseledets theorem. To be more precise, we need to specify a norm on the flat bundle $\mathbb{V}$ determined by ρ. There are two natural choices: the practical choice (for simulations) is a "constant" norm obtained by parallel transport along a Dirichlet fundamental domain for Γ and a more sophisticated choice of an *admissible* norm that has the right growth at the cusps and compatibility with exterior powers. Oseledets theorem is very insensitive to such choices: we show that both norms satisfy the integrability condition and compute the same Lyapunov exponents.

For VHS of arbitrary weight we show that the Hodge norm is admissible. Along with the proof we give an upper bound for the Lyapunov exponents that is uniform for all VHS of given weight and rank. However, our estimate is very crude. It is an interesting problem to prove tight upper bounds for Lyapunov exponents for VHS.

In the setting of a local system $\mathbb{V}$ defined by ρ and a norm as above, we can now state our main Theorem:

Theorem. *For any holomorphic rank k subbundle $\mathcal{E}$ of the Deligne extension of $\mathbb{V}$ the sum of the top k Lyapunov exponents is bounded below by*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \frac{2\deg_{\mathrm{par}}(\mathcal{E})}{2g(\overline{C}) - 2 + |\Delta|}\,, \tag{1}$$

where $g(\overline{C})$ is the genus of the curve $\overline{C}$ and $|\Delta|$ is the number of cusps.

Here the parabolic degree $\deg_{\mathrm{par}}$ of a vector bundle is equal to the degree in the case of unipotent monodromies.

This theorem has two types of applications. The first is the large genus limit of Lyapunov exponents for hyperelliptic strata of Abelian differentials, proven by F. Yu conditionally to our main theorem in [9].

The second application concerns families of Calabi–Yau threefolds and conjecturally gives new cases where equality in (1) holds. There is a well-known list of 14 rank 4 hypergeometric local systems that could be the middle cohomology of a family of Calabi–Yau threefolds with $h^{2,1} = 1$. Numerical examples suggest that for precisely 7 out of these 14 examples the sum of the top two Lyapunov exponents coincides with the degree of the top two terms of the Hodge filtration. These are exactly those examples where the monodromy group is thin in the symplectic group.

The talk is based on paper [4].

References

1. *Bouw I., Möller M.* Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents // Ann. Math. 2010. V. 172, N 1. P. 139–185.
2. *Deroin B., Dujardin R.* Complex projective structures: Lyapunov exponent, degree and harmonic measure: E-print. arXiv: 1308.0541 [math.GT].
3. *Eskin A., Kontsevich M., Zorich A.* Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow // Publ. Math. IHES. 2014. V. 120. P. 207–333.
4. *Eskin A., Kontsevich M., Möller M., Zorich A.* Lower bounds for Lyapunov exponents of flat bundles on curves: E-print. arXiv: 1609.01170 [math.GT].
5. *Filip S.* Families of K3 surfaces and Lyapunov exponents: E-print. arXiv: 1410.2129 [math.DS].
6. *Forni G.* Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus // Ann. Math. 2002. V. 155, N 1. P. 1–103.
7. *Kontsevich M.* Lyapunov exponents and Hodge theory // The mathematical beauty of physics. River Edge, NJ: World Sci., 1997. P. 318–332. (Adv. Ser. Math. Phys.; V. 24).
8. *Krikorian R.* Déviations de moyennes ergodiques, flots de Teichmüller et cocycle de Kontsevich–Zorich (d'après Forni, Kontsevich, Zorich) // Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004. 2005. P. 59–93. (Astérisque; V. 299).
9. *Yu F.* Eigenvalues of curvature, Lyapunov exponents and Harder–Narasimhan filtrations: E-print. arXiv: 1408.1630 [math.AG].

Lebesgue spectrum for area preserving flows on the two torus

Bassam Fayad

Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, France

bassam.fayad@imj-prg.fr

How much “chaotic” can area preserving surface flows be? It is widely known (from the works of Kolmogorov, Katok and others) that starting from very low regularity these flows, if they do not have singularities, cannot be mixing. Via Poincare sections, the latter phenomenon is due to a Denjoy type rigidity of discrete time one dimensional dynamics. However, Kochergin and then Khanin and Sinai showed that these flows can be mixing when they have singularities. Nothing however was know about their spectral type. We will explain why Kochergin flows with one (sufficiently strong) power like singularity typically have a maximal spectral type equivalent to Lebesgue measure on the circle. So, these quasi-minimal flows on the two torus, that have almost the same phase portrait as that of a minimal translation flow, share the same maximal spectral type as Anosov flows! In fact, the Lebesgue spectrum is rather reminiscent of the parabolic paradigm (of horocyclic flows for example) to which the Kochergin flows are related due to the shear along their orbits. We will discuss this relation and its consequences as well as several questions around mixing area preserving flows.

This is a joint work with Adam Kanigowski and Giovanni Forni.

On the development of Anosov's topological ideas in fixed point and coincidence theory

Tatiana N. Fomenko

Moscow State University, Moscow, Russia

tn-fomenko@yandex.ru

The report is a survey (not pretending to the completeness) of results in fixed point and coincidence theory inspired by Anosov's famous theorem on Nielsen numbers for self-mappings of a nilmanifold (that is a homogeneous space of a simply connected nilpotent group by a discrete cocompact subgroup).

In 1985 D.V. Anosov proved [1] the following remarkable theorem. For definitions see, for example, [2, 3].

Theorem. *For any self-mapping $f\colon X \to X$ of a nilmanifold X (mappings are always supposed to be continuous), its Nielsen number $N(f)$ coincides, up to the sign, with its Lefschetz number $\Lambda(f)$.*

E. Fadell and S. Husseini [4] independently gave another proof of Anosov's theorem. Earlier, such fact was known only for mappings of n-tori [5]. Later, D.L. Gonçalves [6] extended this fact to coincidence Nielsen numbers for pairs of mappings of n-tori.

Anosov's main idea consists of the fact that an n-torus should be considered not as a Lie group, but as a nilmanifold. It is known that the Nielsen number is an object difficult to compute, while the Lefschetz number is computable in many cases. So, the significance of Anosov's theorem is that the Nielsen number can be calculated in the indicated situation. It is also well-known that the computing of Nielsen number is important because in many cases $N(f)$ coincides with the least number of fixed points in the homotopy class of a given mapping f. The same is true for the coincidence Nielsen number $N(f,g)$ of a pair of mappings f, g (see [9, 10]).

Let us list a selection of results generalizing and developing the Anosov theorem. It should be mentioned that in the fixed point theory it was generalized by C.K. McCord [7] for mappings of solvmanifolds (a solvmanifold is a quotient space of a connected solvable Lie group by a closed subgroup). Later this was done by E. Keppelman and C. McCord [8] for mappings of so called exponentially solvmanifolds as well.

There are also some more generalizations of the Anosov theorem for coincidence Nielsen numbers. J. Jezierski [11] obtained the equality $N(f,g) = |\Lambda(f,g)|$ (here $\Lambda(f,g)$ is the coincidence Lefschetz number) for any mappings $f, g\colon X \to X$, where X is a nilmanifold. R. Brooks and P. Wong [12] tried to prove the same result for mappings $f, g\colon M \to M$, where M is a compact connected nilmanifold, converting the fixed point and coincidence problems for self-mappings of nilmanifolds into a root problem. Unfortunately, an error slipped in this paper. B. Jiang took notice of it, and later P. Wong corrected the arguments.

Following the technique of [12] for nilmanifolds, C. McCord [7](II) proved the equality $N(f,g) = |\Lambda(f,g)|$ for the case when $X \neq Y$, but $\dim X = \dim Y$. Earlier, in 1992, C. McCord in [7](I) claimed the inequality $N(f,g) \geq |\Lambda(f,g)|$ for mappings of solvmanifolds of the same dimension. But, there was a gap in his arguments, partly corrected in [7](II). So, the last inequality was kept as a conjecture.

Using the fiberwise technique, P. Wong in [13] investigated the coincidence problem for mappings f, g of solvmanifolds of different dimensions. In particular, he proved the inequality $N(f,g) \geq |\Lambda(f,g)|$ for the case of mappings f, g between two oriented solvmanifolds of the same dimensions and eliminated the gaps in [7](I,II).

D. Gonçalves [14] proved that the following 3 conditions are equivalent for any 2 mappings f, g between nilmanifolds.

1. $R(f,g) < \infty$;
2. $Coin(f_\sharp, g_\sharp) = 1, f_\sharp, g_\sharp \colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$;
3. $N(f,g) \neq 0$.

In addition, he proved that under any of these conditions $N(f,g) = R(f,g) = |\Lambda(f,g)|$, where $R(f,g)$ stands for the Reidemeister number of a pair of mappings (f,g).

Now, let us list some results by P. Penninckx (see for definitions and details [15, 16]). In his Ph.D. dissertation he proved statements generalizing the Anosov's theorem.

As it was noticed by D.V. Anosov himself in [1], his theorem cannot be generalized to arbitrary infra-nilmanifolds. Nevertheless, it aroused interest in proving fixed point theory results for infra-nilmanifolds, under suitable conditions. P. Penninckx generalizes the Anosov theorem to a large and important class of infra-nilmanifolds. More exactly, let G be a connected, simply connected, nilpotent Lie group. The automorphism group $Aut(G)$ of G acts naturally on G. The semi-direct product $Aff(G) = G \rtimes Aut(G)$ acts on G by $(d,D)(g) = dD(g)$ for all $(d,D) \in Aff(G), g \in G$. Let C be a maximal compact subgroup of $Aut(G)$. If a cocompact discrete subgroup Γ of $G \rtimes C$ is torsion free, and $\Gamma \subset Aff(G)$, then the quotient space $\Gamma \setminus G$ is a manifold. Such manifolds are called infra-nilmanifolds. In particular, if $\Gamma \subset G$, the quotient $\Gamma \setminus G$ is called a nilmanifold. The finite group $F = \{A \in Aut(G) | \exists a \in G \colon (a,A) \in \Gamma\}$ is called the holonomy group of Γ. P. Penninckx proved that if F is a finite group, the Anosov theorem holds for any infra-nilmanifold with holonomy group F if and only if F has no index two subgroup. In addition, for some results from fixed point theory, P. Penninckx proves a counterpart in coincidence theory. For the results from fixed point theory which can not be generalized to coincidence theory, he gives counterexamples. For example, P. Penninckx proves that if M1 and M2 are infra-nilmanifolds of equal dimension with the same odd order cyclic holonomy group, the equality $N(f,g) = |\Lambda(f,g)|$ is true for any pair of mappings $f, g\colon M_1 \to M_2$.

There are a lot of other works which have appeared under the influence of Anosov's topological ideas which had been realized in his theorem mentioned above. It served as a starting point for the booming development of Nielsen fixed point and coincidence theory and generated a continuing flow of interesting new results by many authors in this field.

References

1. *Anosov D.V.* The Nielsen numbers of maps of nil-manifolds// Usp. Mat. Nauk. 1985. V. 40, N 4. P. 133–134.
2. *Bogatyi S.A., Gonçalves D.L., Zieschang H.* Coincidence theory: The minimizing problem // Tr. Mat. Inst. Steklova. 1999. V. 225. P. 52–86.
3. *Jiang B.* Lectures on Nielsen fixed point theory. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1983. (Contemp. Math.; V. 14).
4. *Fadell E., Husseini S.* On a theorem of Anosov on Nielsen numbers for nilmanifolds // Nonlinear functional analysis and its applications, Maratea, 1985. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1986. P. 47–53.
5. *Brooks R.B.S., Brown R.F., Pak J., Taylor D.H.* Nielsen numbers of maps of tori // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 52, P. 398–400.
6. *Gonçalves D.L.* Coincidence Reidemeister classes on nilmanifolds and nilpotent fibrations // Topol. Appl. 1998. V. 83. P. 169–183.
7. *McCord C.K.* Lefschetz and Nielsen coincidence numbers on nilmanifolds and solvmanifolds. I, II // Topol. Appl. 1992. V. 43. P. 249–261; 1997. V. 75. P. 81–92.
8. *Keppelman E., McCord C.* The Anosov theorem for exponential solvmanifolds // Pacif. J. Math. 1995. V. 170, N 1. P. 143–159.
9. *Wong P.* Fixed point theory for homogeneous spaces—A brief survey // Handbook of Topological Fixed Point Theory. Springer, 2005. P. 265–283.
10. *Gonçalves D.L.* Coincidence theory // Ibid. P. 3–42.
11. *Jezierski J.* The Nielsen number product formula for coincidences // Fund. Math. 1989. V. 134. P. 183–212.
12. *Brooks R., Wong P.* On changing fixed points and coincidence to roots // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115, N 2. P. 527–533.
13. *Wong P.* Reidemeister number, Hirsch rank, coincidences on polycyclic groups and solvmanifolds // J. Reine Angew. Math. 2000. V. 524. P. 185–204.
14. *Gonçalves D.L.*. The coincidence Reidemeister classes of maps on nilmanifolds // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1998. V. 12, N 2. P. 375–386.

15. *Penninckx P.* Fixed point theory and coincidence theory for infra-nil-manifolds (Vastepuntstheorie en coïncidentietheorie voor infra-nilvariëteiten): PhD Thesis. KU Leuven, 2009.
16. *Dekimpe K., Penninckx P.* Coincidence theory for infra-nilmanifolds // Topology Appl. 2010. V. 157, N 10–11. P. 1815–1832. (Special Issue: Nielsen Theory and Related Topics 2009).

Асимптотический анализ в одной задаче сингулярной теории возмущений (Asymptotic analysis in one problem of singular perturbation theory)

В. В. Фуфаев (V. V. Fufaev)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

fufaevvv@yandex.ru

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля с полиномиальным вещественным потенциалом и малым (чисто мнимым) параметром при второй производной. В докладе предполагается представить результаты асимптотического анализа, в ходе которого для рассматриваемой краевой задачи даже в случае потенциала-полинома третьей степени были обнаружены новые явления, связанные с концентрацией собственных значений, их бифуркациями и движением при изменении малого параметра. Обнаруженные эффекты получают обоснование на основе подхода к асимптотическому интегрированию дифференциальных уравнений, развивающего технику биркгофовских канонических путей и не использующего априорной информации о расположении соответствующих линий Стокса.

On a model of Josephson effect, dynamical systems on two-torus and Heun equations*

Alexey Glutsyuk

CNRS, ENS de Lyon, France, and HSE, Moscow, Russia

aglutsyu@ens-lyon.fr

We study a family of two-parametric nonlinear equations that arises in the problem of modeling the overdamped Josephson junction in superconductivity. This family is parametrized by the third parameter: the frequency. It originates from quantum mechanics but also arises in several problems of classical mechanics and geometry. It is equivalent to a special three-parametric dynamical systems on two-torus that also arises in the theory of slow-fast systems. We fix a frequency and consider the rotation number of dynamical system as a function of two remaining parameters. The *phase-lock areas* are the level sets of the rotation number that have non-empty interiors. An important problem is the description of the dynamics of the structure of phase-lock area portrait, as the frequency tends to either zero, or infinity. We present a series of results and conjectures on the geometry of phase-lock areas obtained in collaboration with V.M. Buchstaber [5, 6] and in the previous joint papers of V.M. Buchstaber and S.I. Tertychnyi [2–4]. These results were obtained via complexification, which allowed to use the methods of investigation of equations in the complex domain. This was realized via reduction of the nonlinear equations under question to appropriate second order linear ordinary differential equations on functions of complex variable: a certain subfamily of double confluent Heun equations. It appears that the phase-lock areas exist only for integer rotation numbers (the *quantization effect of rotation number*: a joint result of V.M. Buchstaber, O.V. Karpov and S.I. Tertychnyi [1]). A series of joint results of V.M. Buchstaber and S. Tertychnyi relates the geometry of phase-lock areas to the existence of entire (or polynomial) solutions of the double confluent Heun equations. A joint result with V.M. Buchstaber [5] implies a conjecture due to himself and S. Tertychnyi [3, 4] about the description of the parameter values corresponding to the adjacencies of the phase-lock areas (equivalently, to the double confluent Heun equations having entire solutions). We

*Supported in part by RFBR grants 13-01-00969-a, 16-01-00748, 16-01-00766 and ANR grant ANR-13-JS01-0010.

also present a recent joint result with V.M. Buchstaber [6] describing the double confluent Heun equations having monodromy eigensolution with a given eigenvalue. The latter result implies a description of boundaries of phase-lock areas as solutions of explicit analytic functional equations. Its proof is based on the uniqueness theorem for existence of entire solution E of a non-homogeneous version of double confluent Heun equation. The uniqueness theorem is equivalent to the statement that the sequence of three-term linear relations on the Taylor coefficients of E (equivalent to the differential equation) has a unique converging solution. This is proved by using ideas from hyperbolic theory: the converging solution corresponds to the unstable manifold of appropriate fiberwise contracting skew product dynamical system.

References

1. *Buchstaber V.M., Karpov O.V., Tertychnyi S.I.* The rotation number quantization effect // Theor. Math. Phys. 2010. V. 162, N 2. P. 211–221.
2. *Buchstaber V.M., Tertychnyi S.I.* Explicit solution family for the equation of the resistively shunted Josephson junction model // Theor. Math. Phys. 2013. V. 176, N 2. P. 965–986.
3. *Buchstaber V.M., Tertychnyi S.I.* Holomorphic solutions of the double confluent Heun equation associated with the RSJ model of the Josephson junction // Theor. Math. Phys. 2015. V. 182, N 3. P. 329–355.
4. *Buchstaber V.M., Tertychnyi S.I.* A remarkable sequence of Bessel matrices // Math. Notes. 2015. V. 98, N 5. P. 714–724.
5. *Buchstaber V.M., Glutsyuk A.A.* On determinants of modified Bessel functions and entire solutions of double confluent Heun equations: E-print. arXiv: 1509.01725.
6. *Buchstaber V.M., Glutsyuk A.A.* On monodromy eigenfunctions of Heun equations and boundaries of phase-lock areas in a model of overdamped Josephson effect: E-print. arXiv: 1609.00244.

Anosov ε-orbits and mixed dynamics

Sergey Gonchenko

Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia

sergey.gonchenko@mail.ru

We review recent results related to the new type of dynamical chaos, the so-called, "mixed dynamics" which can be considered as an intermediate state between the strange attractor and conservative chaos. The phenomenon of mixed dynamics is related to the existence of such open regions (a version of Newhouse regions) in the space of dynamical systems, where systems with the following properties are dense:

(i) the system has infinitely many hyperbolic periodic orbits of all possible types (stable, completely unstable, saddle);

(ii) the closures of the sets of orbits of different types have a nonempty intersection.

Essentially, this means that for such systems the attractor $\mathcal{A}$ and repeller $\mathcal{R}$ have a non-empty intersection but do not coincide. In the talk we propose a mathematical concept of mixed dynamics based on the notion of ε-orbits.

Parametric Furstenberg theorem on random products of $SL(2,\mathbb{R})$ matrices*

Anton Gorodetski, Victor Kleptsyn

Department of Mathematics, University of California Irvine, USA
CNRS, Institute of Mathematical Research of Rennes,
UMR 6625 du CNRS, France

asgor@math.uci.edu, kleptsyn@gmail.com

Random products of matrices appear naturally in many different settings, in particular in smooth dynamical systems, probability theory, spectral theory, mathematical physics. The crucial result is Furstenberg's Theorem [2, 3]

*A.G. was supported in part by NSF grant DMS–1301515. V.K. was supported in part by RFBR projects 13-01-00969-a and 16-01-00748-a.

on positivity of Lyapunov exponents. It claims that generically the exponential rate of growth (Lyapunov exponent) of product of random matrices is well defined and positive. In the talk we will discuss the random products of $SL(2,\mathbb{R})$ matrices that depend on a parameter. This is motivated, in particular, by the study of discrete Schrödinger operators with random potentials. In that case the Schrödinger cocycle is given by the random products of transfer matrices, and energy serves as a natural parameter. From spectral point of view it is natural to fix the potential first, and then vary the energy. As a more general setting, one can consider random products of matrices depending on a parameter, and study existence and properties of Lyapunov exponent for a typical fixed sequence when the parameter varies. We will show, for example, that in the non-uniformly hyperbolic regime almost surely upper Lyapunov exponent is positive (and coincides with the one prescribed by Furstenberg Theorem) for all parameters, but lower Lyapunov exponent vanishes for a topologically generic parameter. These result explain the difficulties one encounters in the classical proofs of Anderson localization for random Schrödinger operators.

Let us now provide the formal statement of the result. Let $\mathcal{A} \subset SL(2,\mathbb{R})$ be a precompact set of matrices (i.e. for some $M > 0$ we have $\|A\| \leq M$ for all $A \in \mathcal{A}$). Let Ω be a topological space, and μ some Borel probability measure with $\operatorname{supp}\mu = \Omega$. Let $J \subset \mathbb{R}$ be a compact interval of parameters. Suppose a continuous map $F\colon \Omega \times J \to \mathcal{A}$ is given with the following properties:

- For each $\omega \in \Omega$ the matrix valued function $F_a(\omega)$ is a C^1 function of a, with C^1-norm uniformly bounded in ω;
- Monotonicity: there exists $\delta > 0$ such that $\frac{d}{da} arg(F_a(\omega)\bar{v}) > \delta > 0$ for all $a \in J, \omega \in \Omega, \bar{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
- For each $a \in J$ the collection of matrices $\{F_a(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ is not uniformly hyperbolic.
- Furstenberg condition: denote by μ_a the measure $\mu_a = F_a(\mu)$. Let G_a be the smallest closed subgroup which contains the support of μ_a. Suppose that for each $a \in J$ the subgroup G_a is not compact, and there is no proper linear subspace $L \subset \mathbb{R}^2$ (or a pair of subspaces L_1, L_2) such that $A(L) = L$ (resp., $A(L_1 \cup L_2) = L_1 \cup L_2$) for all $A \in G_a$.

Under the conditions above, consider random sequences $\bar{\omega} = \omega_1\omega_2\ldots$, where $\omega_i \in \Omega$ are chosen independently with respect to the measure μ. For a given $\bar{\omega} \in \Omega$ set $T_{n,a,\bar{\omega}} = F_a(\omega_1)F_a(\omega_2)\ldots F_a(\omega_n)$.

Let us denote by $\lambda_F(a)$ the Furstenberg value of the Lyapunov exponent. Notice that due to Furstenberg Theorem for each $a \in J$ there exists a subset Ω_a with $\mu(\Omega_a) = 1$ such that for $\bar{\omega} \in \Omega_a$ one has

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|T_{n,a,\bar{\omega}}\| = \lambda_F(a).$$

In turns out that the full measure set Ω_a of "typical" sequences cannot be chosen independent of the parameter $a \in J$. Moreover, the following statement holds:

Theorem. *In the notations above the following holds μ-almost surely:*

- *For all $a \in J$ we have*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|T_{n,a,\bar{\omega}}\| = \lambda_F(a) > 0.$$

- *We have*

$$\dim_H \left\{ a \in J \mid \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|T_{n,a,\bar{\omega}}\| < \lambda_F(a) \right\} = 0.$$

- *The set*

$$\left\{ a \in J \mid \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|T_{n,a,\bar{\omega}}\| = 0 \right\}$$

  is a dense G_δ subset of J.

It is interesting to compare this result with the results in [1].

References

1. *Bochi J., Viana M.* The Lyapunov exponents of generic volume-preserving and symplectic maps // Ann. Math. (2). 2005. V. 161, N 3. P. 1423–1485.
2. *Furstenberg H.* Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 377–428.
3. *Furstenberg H.* Random walks and discrete subgroups of Lie groups // Advances in probability and related topics. New York: Dekker, 1971. V. 1. P. 1–63.

Dynamical constructions on the space of finitely generated groups and the concept of random group

Rostislav Grigorchuk

Texas A&M University, College Station, USA

grigorch@math.tamu.edu

Let $\mathbb{X}_m, m \geq 2$ be a space of *marked* m-generated groups introduced by the speaker in 1984 [1]. It consists of pairs (G, S), where G is a group and $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ is ordered generating set of cardinality m. Space $\mathbb{X}_m$ is supplied by a local topology: two marked groups $(G_1, S_1), (G_2, S_2)$ are close in this topology if the Cayley graphs $\Gamma(G_1, S_1), \Gamma(G_2, S_2)$ are isomorphic on the large neighborhood of the identity element. Each of the spaces $\mathbb{X}_m$ is a compact metrizable totally disconnected space. $\mathbb{X}_m$ naturally embeds into $\mathbb{X}_{m+1}$ and the union $\mathbb{X}_\infty = \bigcup_{m \geq 2} \mathbb{X}_m$ can be considered as a space of finitely generated groups. Each of the spaces $\mathbb{X}_m, \mathbb{X}_\infty$ has a scattered part consisting of isolated points of different Cantor–Bendixson rank and a condensation part (perfect kernel) denoted $\mathbb{X}_m^*$ and $\mathbb{X}_\infty^*$, respectively. It is interesting problem to identify groups that belong to each of these parts and compute the Cantor–Bendixson ranks $r(\mathbb{X}_m), r(\mathbb{X}_\infty)$. Perfect kernels $\mathbb{X}_m^*, 2 \leq m < \infty$ are homeomorphic to a Cantor set.

The group $\mathcal{N}_m$ of Nielsen transformations naturally acts by homeomorphisms on $\mathbb{X}_m$ (preserving condensation part $\mathbb{X}_m^*$), and the inductive limit $\mathcal{N}_\infty = \varinjlim \mathcal{N}_m$ acts by homeomorphisms on $\mathbb{X}_\infty$.

Problem 1. (a) *Is there is a continuous invariant Borel probability measure for the action* $(\mathcal{N}_m, \mathbb{X}_m), 2 \leq m \leq \infty$*?.*

(b) *If the answer to the part* (a) *is no, is there is a continuous quasi-invariant Borel probability measure for the action* $(\mathcal{N}_m, \mathbb{X}_m), 2 \leq m \leq \infty$*?.*

If such measure exists then it can be used for study of typical properties of groups in corresponding class (in the case $m = \infty$ it is the of all finitely generated groups). Suggested approach to the randomness is called by us *global* dynamical approach (it was suggested in [4]). An alternative *local* approach is described and used in [5].

There is a notion of random group due to Gromov [2] (based on his *density* model). It is far from to have a dynamical flavor as the randomness appears in the form of the quantity given by the limit behavior of the ratio m_i/n_i, where n_i is the cardinality of the set of finite group presentations with relations of the length i and m_i is the number of presentations that define a group with a certain group property $\mathcal{P}$. Some parameters are involved in the model and depending of their value typical group properties may vary.

Let $\mathcal{S}(G)$ and $\mathcal{N}(G)$ be sets of subgroups and normal subgroups of a countable group G. These sets can be considered as subsets of $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ and therefore can be supplied by induced topology of the product topology on $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. This makes them compact metrizable totally disconnected spaces. The questions about condensation and scattered parts of $\mathcal{S}(G)$ and of $\mathcal{N}(G)$ and about the Cantor–Bendixson ranks $r(\mathcal{S}(G)), r(\mathcal{N}(G))$ are interesting in many cases. A group G acts on $\mathcal{S}(G)$ by conjugation and a group of automorphisms $Aut(G)$ naturally acts on $\mathcal{S}(G)$ and $\mathcal{N}(G)$. Invariant probability measures for actions $(G, \mathcal{S}(G))$, $(Aut(G), \mathcal{S}(G))$ and $(Aut(G), \mathcal{N}(G))$ can be viewed as invariant random subgroup (IRS), characteristic random subgroup (CRS), or characteristically normal random subgroup (CNRS), and will be identified with them. Let $IRS(G)$, $CRS(G)$ and $CNRS(G)$ be the corresponding Choquets simplexes. We are interested in topological structure of them, number of critical points (they correspond to the ergodic measures), etc. A delta mass δ_N supported on one point $N \in \mathcal{N}(G)$ is a trivial example of IRS and therefore we focus on *continuous* random subgroups. Let F_m be a free group of finite or countably infinite rank m.

Theorem 1. [6] *There is uncountably many continuous F_m-weakly mixing CRS's on F_m, $2 \leq m \leq \infty$.*

This is stronger than the results of L. Bowen [7], or E. Glasner–B. Weiss [8] about existence of uncountably many continuous ergodic IRS's on F_m.

Corollary 1. *Let G be acylindrically hyperbolic group. Then it has uncountably many continuous ergodic IRS's.*

This is because acylindrically hyperbolic group contains a normal subgroup isomorphic to a noncommutative free group. The class of acylindrically hyperbolic group includes such important subclasses as non-elementary Gromov hyperbolic groups, mapping class groups of oriented surfaces of negative Euler characteristic and groups of outer automorphisms $Out(F_m)$. The corresponding results are due to T. Delzant, F. Dahmani, V. Guirardel, and D. Osin.

In the proof of the above theorem we use existence of uncountably many characteristic subgroups in a free group $F_m, m \geq 2$, and description of ergodic CRS's on elementary abelian p-group of infinite rank $\mathcal{A}_p = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ (p prime). Recall that a simplex is called a Bauer simplex if the set of extreme points is dense.

Theorem 2 [6]. *The simplex $CRS(\mathcal{A}_p)$ is a Bauer simplex. The set of its extreme points is countable and can be enumerated as $\mu_n, n = 1, 2, \ldots,$ where μ_n is a measure supported on subgroups of index p^n.*

In fact in [6] the CRS's are described on groups $\mathcal{A}_k = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_k$ for arbitrary $k \in \mathbb{N}$ and on free abelian group $\mathbb{Z}^\infty$ of countably infinite rank. The case $k = p$ also can be deduced from the result of A. Gnedin and G. Olshanski [8].

By Nielsen theorem the group $\mathcal{N}_m$ is isomorphic to $Aut(F_m)$, and space $\mathbb{X}_m$ can be identified with space $\mathcal{N}(F_m)$, as each m-generated group is isomorphic to a quotient of a free group F_m. Therefore part (a) of Problem 1 is equivalent to the following problem: "Is there a continuous invariant Borel probability measure for the system $(Aut(F_m), \mathcal{N}(F_m))$?" (similarly, we can reformulate the part (b) of the problem). The CRS's given by Theorem 2 are supported on step 2 subnormal subgroups (normal subgroups of normal subgroups, in fact they are supported on normal subgroups of characteristic subgroups). Therefore to solve in affirmative way Problem 1 it is enough to construct a continuous CRS on F_m whose support is on the set of normal subgroups, i.e. to construct continuous CNRS. In the above discussion the system $(Aut(F_m), \mathcal{N}(F_m))$ can be replaced by the system $(Out(F_m), \mathcal{N}(F_m))$ as the group of inner automorphisms $Inn(F_m)$ acts trivially on $\mathcal{N}(F_m)$ and $Out(F_m) = Aut(F_m)/Inn(F_m)$. The groups $Aut(F_m)$ and $Out(F_m)$ are very popular objects of investigation in geometric group theory and their actions on Teichmuller type spaces are thoroughly studied. Perhaps this could help to solve the suggested problem.

A global categorical approach to the notion of typical group for study of typical properties of groups also works for described dynamical systems. A local categorical approach is used in [3] and [5]. Study of countable Borel equivalence relations $\sim_m, \sim_\infty$ given by the partition on orbits for systems $(\mathcal{N}_m, \mathbb{X}_m), 2 \leq m \leq \infty$ is another challenging problem. It is known that they are not *smooth* (i.e. not *tame* or not *measurable* in the language of Rokhlin), and are not *hyperfinite*). But it may happen that they are μ-hyperfinite and so Zimmer amenable, where μ is invariant or a quasi-invariant measure discussed above.

If (T, X) is a Cantor system where $X \subset \mathbb{X}_m$ is a Cantor set, T is a homeomorphism of X, and equivalence relation on X generated by T is a subrelation of $\sim_m$ (or of any other useful relation on $\mathbb{X}_m$), then any T-invariant probability measure μ on X can be used for study of typical properties of groups from X. This is what we mean by the local approach and it was used in [5] for study of typical growth of groups of intermediate growth from [1].

References

1. *Grigorchuk R.I.* Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1984. V. 48, N 5. P. 939–985.
2. *Gromov M.* Asymptotic invariants of infinite groups // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1993. V. 182. P. 1–295.
3. *Stepin A.M.* Approximation of groups and group actions, the Cayley topology // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1996. V. 228. P. 475–484.
4. *Grigorchuk R.I.* Solved and unsolved problems around one group // Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects. Birkhauser, 2005. P. 117–218.
5. *Benli M.G., Grigorchuk R.I, Vorobets A.B.* On growth of random groups of intermediate growth // Groups Geom. Dyn. 2014. V. 8, N 3. P. 643–667.
6. *Bowen L., Grigorchuk R.I., Kravchenko R.* Characteristic random subgroups of geometric groups and free abelian groups of infinite rank // Trans. Amer. Math. Soc. 2016.
7. *Bowen L.* Invariant random subgroups of the free group // Groups Geom. Dyn. 2015. V. 9, N 3. P. 891–916.
8. *Glasner E., Weiss B.* Uniformly recurrent subgroups // Contemp. Math. 2015. V. 631. P. 63–75.
9. *Gnedin A., Olshanski G.* A q-analogue of de Finetti's theorem. Electron. J. Combin. 2009. V. 16, N 1. 16 pp.

Group actions, subshifts and spectra

Rostislav Grigorchuk, Daniel Lenz, Tatiana Nagnibeda

TAMU, College Station, USA
University of Jena, Germany
University of Geneva, Switzerland

daniel.lenz@uni-jena.de, tatiana.smirnova-nagnibeda@unige.ch

We will discuss a recently discovered connection between the spectral theory of Schrödinger operators whose potentials exhibit aperiodic order, and that of Laplacians associated with certain interesting group actions, as, for example, the action of Grigorchuk's group of intermediate growth on the boundary of the infinite binary tree. The connection goes through a subshift associated with the action; in many cases it is given by a substitution over a finite alphabet that defines the group algebraically, via a recursive presentation by generators and relators. Our results allow us to apply methods from the theory of aperiodic order to deduce information about the spectra of the Laplacians. We then study the dependence of the subshift, the Laplacians and their spectra on the group, as a point in the space of marked groups. The talk is chiefly based on the two joint papers listed below, but will also contain some new as yet unpublished results.

References

1. *Grigorchuk R., Lenz D., Nagnibeda T.* Schreier graphs of Grigorchuk's group and a subshift associated to a non-primitive substitution // Groups, Graphs, and Random Walks / Ed. by T. Ceccherini-Silberstein, M. Salvatori, E. Sava-Huss. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016. (LMS Lect. Note Ser.). To appear.
2. *Grigorchuk R., Lenz D., Nagnibeda T.* Spectra of Schreier graphs of Grigorchuk's group and Schroedinger operators with aperiodic order: E-print. arXiv: 1412.6822.

On Anosov–Weil theory and classification of dynamical systems on surfaces*

Viacheslav Grines, Evgenii Zhuzhoma

National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

vgrines@yandex.ru, zhuzhoma@mail.ru

In 1966 in Tiraspol at the Symposium on General Topology D.V. Anosov formulated the idea that a clue to the construction of effective topological invariants for dynamical systems with nontrivially recurrent motions (including foliations with nontrivially recurrent leaves) on surfaces consists in studying nonclosed curves without self-intersections that possess certain recurrent properties and in investigating the nonlocal asymptotic behavior

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 15-01-03687-a, 16-51-10005-Ko a), Russian Science Foundation (project no. 14-41-00044), the Basic Research Program at the HSE (project 98) in 2016 and the European Union ERC AdG grant no 339523 RGDD.

of the lifts of these curves to the universal covering by means of the absolute (circle at infinity). Idea of using universal covering for investigation of asymptotic behavior of curves without self-intersection was firstly mentioned by A. Weil in 1931 and then in 1935 and unfortunately was soon forgotten. After 1966 the development of Weil and Anosov ideas led to the topological classification of the basic classes of flows, foliations, 2-webs, nontrivial one-dimensional basic sets, and homeomorphisms with invariant foliations on closed surfaces of constant nonpositive curvature. The field of inquiry in question was called the "Anosov–Weil Problem" or "Anosov–Weil Theory". We consider some aspects concerning Anosov–Weil Theory (see [1–5] for introduction to subject).

References

1. *Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds // Springer, 2016.
2. *Aranson S.Ch., Grines V.Z.* Topological classification of flows on closed two-dimensional manifolds // Russ. Math. Surv. 1986. V. 41, N 1. P. 183–208.
3. *Aranson S.Ch., Grines V.Z.* The topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds // Russ. Math. Surv. 1990. V. 45, N 1. P. 1–35.
4. *Aranson S.Kh., Grines V.Z., Zhuzhoma E.V.* On Anosov–Weil problem // Topology. 2001. V. 40. P. 475–502.
5. *Anosov D.V., Zhuzhoma E.V.* Nonlocal asymptotic behavior of curves and leaves of laminations on universal coverings // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. V. 249. P. 1–221.

Скорость деформации в динамических системах (Deformation rate in dynamical systems)*

Б. М. Гуревич (B. M. Gurevich), С. А. Комеч (S. A. Komech)

Московский государственный университет, Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

bmgbmg2@gmail.com, komech@mail.ru

Связь энтропии Колмогорова–Синая со скоростью деформации границы обсуждалась в нестрогой форме в физической и научно-популярной литературе (см. [1, 2]). В работе [3] впервые были получены строгие результаты, устанавливающие такую связь для марковских сдвигов. Опишем основную конструкцию для символических динамических систем. На метрическом пространстве двусторонних последовательностей над конечным алфавитом рассмотрим динамическую систему (X, S, ν), где (X, S) — транзитивный подсдвиг со стандартным преобразованием сдвига S, сохраняющим борелевскую вероятностную меру ν. Для всякого множества $Y \subset X$ обозначим через $O_\varepsilon(Y)$ его ε-окрестность. Пусть $B(x, r) \subset X$ — шар радиуса r с центром в точке $x \in X$. В качестве характеристики, отвечающей за локальную скорость деформации, была рассмотрена асимптотика отношения

$$\frac{1}{n} \ln \frac{\nu(O_\varepsilon(S^n B(x, \varepsilon)))}{\nu(B(x, \varepsilon))} \tag{1}$$

при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Одним из важных условий, дающих нетривиальную асимптотику, является соотношение между n и ε

$$n = n(\varepsilon) = o(\ln(\varepsilon)), \tag{2}$$

впервые предложенное в работе [3]. Оказалось, что это условие достаточно универсально и при его выполнении удается доказать(см. [7]) для произвольной эргодической инвариантной меры ν сходимость выражения (1) к энтропии, если (X, S) — синхронизованная символическая система. Широкий класс синхронизованных символических систем, введенный в работе [4], содержит не только марковские, но и софические (sofic) системы Вейсса (см. [5]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00379 А).

Для гладких систем на римановых многообразиях естественно рассмотреть риманов объем в качестве меры деформации границы

$$\frac{1}{n} \ln \frac{\mu(O_\varepsilon(f^n B(x,\varepsilon)))}{\mu(B(x,\varepsilon))}, \tag{3}$$

где f — гладкое отображение компактного риманова многообразия, μ — мера Лебега, а n и ε связаны тем же соотношением (2).

Для автоморфизмов n-мерного тора с инвариантной мерой Лебега в работе [6] была установлена сходимость (3) к энтропии во всех точках многообразия. В [8] установлено, что хотя в общей ситуации риманов объем не инвариантен относительно f, оказывается, что для равномерно гиперболических систем, диффеоморфизмов Аносова, выражение (3) сходится к сумме положительных показателей Ляпунова, отвечающих произвольной инвариантной эргодической мере, почти всюду по этой мере. Таким образом, если инвариантная мера является мерой Синая–Рюэлля–Боуэна, выражение (3) сходится почти всюду к энтропии. Предложенный подход удается применить и для систем, в которых отсутствует равномерная гиперболичность, например, для потоков Аносова.

Список литературы

1. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. *Yau S.-T., Nadis S.* The shape of inner space: String theory and the geometry of the universe's hidden dimensions. New York: Basic Books, 2012.
3. *Gurevich B. M.* Geometric interpretation of entropy for random processes // AMS Transl. 1996. V. 171. P. 81–87.
4. *Blanchard F., Hansel G.* Syste'mes Code's // Theor. Comput. Sci. 1986. V. 44. P. 17-49.
5. *Weiss B.* Subshifts of finite type and sofic systems // Monatsh. Math. 1973. V. 77. P. 462–474.
6. *Gurevich B., Komech S.* On evolution of small spheres in the phase space of a dynamical system // ESAIM: PROC. 2012. V. 36. P. 68–72.
7. *Комеч С.А.* Скорость искажения границы в синхронизованных системах: геометрический смысл энтропии // Проблемы передачи информации. 2012. Т. 48. С. 15–25.
8. *Gurevich B., Komech S.* Lyapunov exponents and the boundary deformation rate under the action of hyperbolic dynamical systems // J. Difference Equat. Appl. 2016. V. 22, N 1. P. 140–146.

Rates of convergence in ergodic theorems for Anosov diffeomorphisms

Alexander Kachurovskii

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

agk@math.nsc.ru

1. Let $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ be a probability measure space, and let T be its automorphism. For $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, and $n \geq 1$, we set

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega).$$

The individual Birkhoff ergodic theorem asserts that the limit $f^* = \lim_{n\to\infty} A_n f$ exists λ-a.e. The mean von Neumann ergodic theorem asserts that, for $f \in L_2(\Omega)$, this limit also exists in $L_2(\Omega)$.

We measure the convergence rate in the Birkhoff theorem in terms of the rate of decay as $n \to \infty$ of the quantities

$$\mathrm{P}_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\}$$

for every $\varepsilon > 0$. The rate of convergence in the von Neumann theorem is the rate of the convergence of $\|A_n f - f^*\|_2^2$ to zero as $n \to \infty$.

For Anosov diffeomorphisms, the phase space Ω is a compact C^r Riemannian manifold, $r \geq 1$; T is a $C^{1+\alpha}$ diffeomorphism, i.e. the differential DT belongs to the set $H^\alpha(\Omega)$ of Hölder continuous functions, $\alpha \in (0,1)$; and λ is an SRB-measure for T.

2. Let's begin with estimating the rate of convergence in the von Neumann theorem. We assume that $\dim \Omega \geq 2$ and that the diffeomorphism T is transitive and, therefore, mixing with respect to λ. The rate of such mixing, i.e. the rate of convergence to zero as $n \to \infty$ of correlations

$$b_n(f) = \int_\Omega f(T^n \omega) f(\omega)\, d\lambda - \left(\int_\Omega f(\omega)\, d\lambda \right)^2$$

for Hölder continuous functions f, has long been known: it is exponential; we use estimates obtained by coupling method in [1].

Let d_s and d_u be metrics on the stable and unstable manifold induced by the Riemannian metric d on Ω. Take sufficiently small $\delta > 0$. Following [1], for any measurable function on Ω, we set

$$\|f\|_s = \|f\|_\infty + \sup_{d_s(\omega_1,\omega_2)\le\delta} \frac{|f(\omega_1) - f(\omega_2)|}{d_s^\alpha(\omega_1,\omega_2)};$$

$$\|f\|_u = \|f\|_1 + \sup_{d_u(\omega_1,\omega_2)\le\delta} \frac{|f(\omega_1) - f(\omega_2)|}{d_u^\alpha(\omega_1,\omega_2)}.$$

If $f \in H^\alpha(\Omega)$, then $\|f\|_s < \infty$ and $\|f\|_u < \infty$. According to [1], there exist constants $0 < \vartheta < 1$ and $A > 0$ such that, for any $f \in H^\alpha(\Omega)$ and $n \ge 1$,

$$|b_n(f)| \le A\|f\|_s\|f\|_u\vartheta^n.$$

Using the results of [2], we immediately obtain the following estimate in the von Neumann theorem for an Anosov diffeomorphism, any function $f \in H^\alpha(\Omega)$, and any $n \ge 1$:

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - an^{-1} - bn^{-2}\right| \le 2A\|f - f^*\|_s\|f - f^*\|_u \left(\frac{1}{1-\vartheta}\right)^2 \frac{\vartheta^n}{n}$$

with some constants a and b (whose exact values can be found in [2]).

3. Let's estimate the rate of convergence in the Birkhoff theorem. We assume diffeomorphism to be C^2 and, as previously, transitive. It is well known (see, e.g., [3]) that large deviations $\mathrm{p}_n^\varepsilon = \lambda\{|A_n f - f^*| \ge \varepsilon\}$ for an Anosov system decrease as $n \to \infty$ exponentially too. Namely, for any $f \in H^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, not cohomologous to a constant (i.e., not satisfying the relation $f(\omega) = g(T\omega) - g(\omega) + c$ for some $g \in C(\Omega)$) and any sufficiently small $\varepsilon > 0$, there exist constants $C(\varepsilon) > 0$ and $\gamma(\varepsilon) > 0$ such that

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon \le C(\varepsilon)e^{-\gamma(\varepsilon)n}$$

for all $n \ge 1$. Applying the results of [4], we immediately obtain the following relation for all $n \ge 1$ and any sufficiently small $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}_n^{2\varepsilon} \le C(\varepsilon)\left(1 + \frac{\ln(1 + \gamma^{-1}(\varepsilon))}{\ln(1 + \varepsilon\|f - f^*\|_\infty^{-1})}\right)e^{-\gamma(\varepsilon)n}.$$

If the function f is cohomologouos to a constant, then, for any $\varepsilon > 0$ and sufficiently large n, we have $\mathrm{P}_n^\varepsilon = \mathrm{p}_n^\varepsilon = 0$.

As it is shown in [5] (by approximation method), analogous exponential estimates for p_n^ε and P_n^ε are valid not only for Hölder continuous functions f, but for all functions continuous a.e. This result has, for example, such a simple consequence.

Let $A \subset \Omega$, $0 < \lambda(A) < 1$, and boundary of A has measure zero: $\lambda(\partial A) = 0$ (i.e., the characteristic function χ_A of the set A is continuous a.e.). And let denote the first hit time

$$k_A(\omega) = \inf\{k \geq 1 \colon T^k\omega \in A\}$$

for each $\omega \in \Omega$ (as in the Kac lemma). Then quantities $\lambda\{k_A(\omega) \geq n\}$ decay exponentially as $n \to \infty$ (for any transitive Anosov C^2 diffeomorphism T, and its SRB-measure λ).

References

1. *Bressaud X., Liverani C.* Anosov diffeomorphisms and coupling // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2002. V. 22, N 1. P. 129–152.
2. *Kachurovskii A.G., Sedalishchev V.V.* Constants in estimates for the rates of convergence in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems // Sb. Math. 2011. V. 202, N 8. P. 1105–1125.
3. *Pollicott M., Sharp R.* Large deviations, fluctuations and shrinking intervals // Commun. Math. Phys. 2009. V. 290, N 1. P. 321–334.
4. *Kachurovskii A.G., Podvigin I.V.* Large deviations and the rate of convergence in the Birkhoff ergodic theorem // Math. Notes. 2013. V. 94, N 4. P. 524–531.
5. *Kachurovskii A.G., Podvigin I.V.* Large deviations and rates of convergence in the Birkhoff ergodic theorem: from Hölder continuity to continuity // Dokl. Math. 2016. V. 93, N 1. P. 6–8.

On local Birkhoff conjecture for convex billiards

Vadim Kaloshin

University of Maryland, College Park, MD, USA

vadim.kaloshin@gmail.com

The classical Birkhoff conjecture states that the only integrable billiard is the billiard inside an ellipse. We show that this conjecture is true for small perturbations of ellipses preserving many rational caustics. This consists of two main steps: study small perturbations of the circle (joint with A. Avila and J. De Simoi) and extend the analysis to small perturbation of ellipses (joint with A. Sorrentino). In a somewhat different direction we prove the conjecture that for small perturbation of the circle preserving not so many rational caustics (joint w G. Huang and A. Sorrentino).

О дискретных орбитах цилиндрического каскада с гёльдеровой функцией (On discrete orbits for a cylindrical cascade with a Hölder function)

А. В. Кочергин (A. V. Kochergin)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

a.kochergin@gmail.com

В 70-х годах под руководством Дмитрия Викторовича Аносова его ученики А.В. Крыгин и Е.А. Сидоров опубликовали ряд работ, в которых изучаются топологические и метрические свойства цилиндрических каскадов — косых произведений над эргодическим поворотом окружности T_ρ. Сам Дмитрий Викторович опубликовал замечательную статью [1], посвященную гомологическому (или когомологическому в современной терминологии) уравнению

$$f(x) = F(T_\rho x) - F(x), \tag{1}$$

где f — заданная функция на окружности, F — неизвестная функция. Д.В. Аносов исследовал разрешимость этого уравнения в различных классах функций и показал связь решения F или его отсутствия с топологическими и метрическими свойствами цилиндрического каскада и специального потока над поворотом окружности. В частности, он привел новый способ построения топологически транзитивного цилиндрического каскада, у которого всюду плотные орбиты образуют множество меры ноль.

Уточним обозначения. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность длины 1, $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ — цилиндр, $T_\rho\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\quad T_\rho x = x+\rho \pmod 1$ — поворот окружности на иррациональный угол ρ; $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ — непрерывная на окружности функция, $\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = 0$.

Мы рассматриваем косое произведение, построенное по повороту окружности T_ρ и функции f:

$$T_{\rho,f}\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}\times\mathbb{R}, \quad T_{\rho,f}(x,y)=(T_\rho x, y+f(x)).$$

Это косое произведение называется цилиндрическим отображением, построенным по повороту окружности T_ρ и функции f, или вслед за Д.В. Аносовым, цилиндрическим каскадом.

Цилиндрические каскады изучались А. Пуанкаре, Л.Г. Шнирельманом, А.С. Безиковичем и многими другими авторами.

В случае, если существует непрерывная F, удовлетворяющая уравнению (1), каждая орбита каскада $T_{\rho,f}$ ограничена, ее замыкание описывается с помощью графика функции F, и цилиндр расслаивается на такие инвариантные кривые. В этом случае f называется *кограницей*. Заметим, забегая вперед, что кограницы играют особую роль в конструкциях каскадов с дискретными орбитами.

Цилиндрический каскад топологически транзитивен тогда и только тогда, когда уравнение (1) не имеет непрерывного решения F.

В связи с изучением минимальных множеств цилиндрических каскадов А.С. Безикович [2] в 1951 году обнаружил, что существуют (топологически транзитивные) цилиндрические каскады, имеющие дискретные, убегающие в бесконечность, орбиты, а Е.А. Сидоров [3] в 1973 году построил каскад, у которого нет дискретных орбит. Дискретные орбиты образуют множество меры нуль, однако это множество может иметь положительную размерность Хаусдорфа. Также нетрудно видеть (хотя опубликовано это было только в двухтысячных годах, Сидоров этого не увидел), что для f с ограниченной вариацией каскад $T_{\rho,f}$ не может иметь дискретных орбит. Исходя из этого, К. Фрончек и М. Леманчик [4] поставили вопросы о том, при каких условиях непрерывности для функции f цилиндрический каскад может иметь дискретные орбиты, какую размерность Хаусдорфа может иметь множество, образованное дискретными орбитами, и связана ли эта размерность со степенью непрерывности f.

Мы называем множество точек на окружности $\mathbb{T}\times\{0\}$, имеющих дискретные орбиты, *множеством Безиковича.*

Теорема 1. *Для любого $\gamma\in(0,1)$ существует функция f, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем γ, и поворот окружности T_ρ на иррациональный угол, для которых цилиндрический каскад $T_{\rho,f}$ имеет дискретные орбиты, а размерность Хаусдорфа множества Безиковича не меньше,чем $1-\gamma$.*

Теорема 2. *Существует функция f, удовлетворяющая условию Гёльдера с любым показателем $\gamma \in (0,1)$, и поворот окружности T_ρ такие, что цилиндрический каскад $T_{\rho,f}$ имеет дискретные орбиты.*

Во втором случае нижняя оценка размерности Хаусдорфа множества Безиковича, полученная тем же методом, что и в первой теореме, оказывается равной нулю. Есть основания полагать, что полученная оценка как в случае первой теоремы, так и второй, не улучшаема.

Гипотеза. *Если функция f, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0,1)$, то множество Безиковича цилиндрического каскада $T_{\rho,f}$ имеет размерность Хаусдорфа не выше, чем $1-\gamma$.*

Доказательство приведенных теорем основано на конструкции из работы [5] автора. За счет ее модификации удалось получить в теореме 1 множество Безиковича с лучшей нижней оценкой, а в теореме 2 увеличить степень непрерывности функции.

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, №6, С. 1259–1274.
2. *Besicovitch A.S.* A problem on topological transformations of the plane // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. V. 47. P. 38–45.
3. *Сидоров Е.А.* Об одном классе минимальных множеств // УМН. 1973. Т. 28, №4. С. 225–226.
4. *Frączek K., Lemańczyk M.* On Hausdorff dimension of the set of closed orbits for a cylindrical transformation // Nonlinearity. 2010. V. 23. P. 2393–2422.
5. *Кочергин А.В.* Цилиндрический каскад Безиковича с гёльдеровой функцией // Мат. заметки. 2016. Т. 99, №3. С. 366–375.

Гиперболический принцип кольца (The hyperbolic annulus principle)*

**А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov),
Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)**

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

Пусть $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, — произвольное открытое множество, содержащее начало координат; S — окружность $\{\varphi \in \mathbb{R}\colon 0 \leq \varphi \leq 2\pi \,(\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$. Далее, пусть задан диффеоморфизм $\Pi\colon \mathscr{U} \times S \to \mathbb{R}^k \times S$, имеющий вид

$$\Pi\colon \begin{array}{l} v \to f(v,\varphi), \\ \varphi \to m\varphi + g(v,\varphi) \,(\,\mathrm{mod}\ 2\pi), \end{array} \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \geq 2$, а $f(v,\varphi) \in C^1(\mathscr{U} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k)$, $g(v,\varphi) \in C^1(\mathscr{U} \times \mathbb{R})$ и $f(v,\varphi+2\pi) \equiv f(v,\varphi)$, $g(v,\varphi+2\pi) \equiv g(v,\varphi)$. Кольцом (полноторием) назовем множество

$$K = \{w = (v,\varphi)\colon \ \|v\| \leq r, \ \varphi \in S\} = B \times S, \tag{2}$$

где $r = \mathrm{const} > 0$, $B = \{v \in \mathbb{R}^k\colon \|v\| \leq r\}$, а $\|*\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^k$. Предполагается, что $B \subset \mathscr{U}$, т.е. оператор (1) определен в кольце (2). Кроме того, считаем, что

$$\Pi(K) \subset \operatorname{int} K. \tag{3}$$

Изучение диффеоморфизмов вида (1) берет начало с работы [1], где сформулирован общий принцип построения отображений кольца в себя, допускающих гиперболические аттракторы соленоидального типа. Отметим, что диффеоморфизмы (1) возникают при исследовании эффекта так называемой "катастрофы голубого неба" [2], связанного с исчезновением седло-узлового цикла. В настоящей публикации предлагаются легко проверяемые достаточные условия на функции f, g, при которых

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04066а) и проекта 1875 госзадания на НИР № 2014/258.

диффеоморфизм Π имеет в кольце K гиперболический странный аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса. Иными словами, устанавливается гиперболический принцип кольца, аналогичный принципу кольца в задаче о существовании и устойчивости инвариантного тора [3, 4]. Подчеркнем, что эти условия выполняются для известных модельных примеров соленоидальных отображений (и для отображения, описывающего "катастрофу голубого неба").

Снабдим кольцо K метрикой

$$\rho(w_1, w_2) = \|v_1 - v_2\| + |\exp(i\varphi_1) - \exp(i\varphi_2)|, \tag{4}$$

где $w_j = (v_j, \varphi_j) \in K$, $j = 1, 2$, а окружность S отождествляется с множеством $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ на комплексной плоскости. В силу (3) достаточно рассмотреть аттракторы диффеоморфизма Π, лежащие в K. Будем считать известными два (эквивалентных) определения понятия аттрактора $A \subset K$ отображения Π в кольце K, приведенные в обзоре [5], а максимальным его аттрактором (который в силу (3) существует) назовем

$$A = \bigcap_{n \geq 0} \Pi^n(K). \tag{5}$$

Обратимся к определению гиперболичности, адаптированному для нашего случая. Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{R}^{k+1}$, состоящее из векторов

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \xi = \operatorname{colon}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} = \|\xi\| + |\eta|. \tag{6}$$

Далее, привлекая покоординатные представления

$$v = \operatorname{colon}(v_1, \ldots, v_k), \quad f(v, \varphi) = \operatorname{colon}(f_1(v, \varphi), \ldots, f_k(v, \varphi)),$$

для любой точки $w \in K$ определим линейный оператор $D\Pi(w)\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \to \mathbb{R}^{k+1}$ (дифференциал), действующий на произвольный вектор (6) по правилу:

$$D\Pi(w)x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v}(w)\xi + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(w)\eta \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(w)\xi + \left(m + \dfrac{\partial g}{\partial \varphi}(w)\right)\eta \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial v}(w) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial v_s}(v,\varphi)\right)_{j,s=1}^{k}, \ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(v,\varphi), \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) = \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v,\varphi),$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(w) = \left(\frac{\partial g}{\partial v_1}(v,\varphi),\ldots,\frac{\partial g}{\partial v_k}(v,\varphi)\right). \tag{8}$$

Наконец, введем операторы $D(\Pi^n(w))$, $n \in \mathbb{N}$, задающиеся равенствами

$$D(\Pi^n(w)) = D\Pi(w_{n-1}) \circ D\Pi(w_{n-2}) \circ \ldots \circ D\Pi(w_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где $w_s = \Pi^s(w)$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 1. Максимальный аттрактор (5) назовём гиперболическим, если для каждого $w \in A$ справедливо представление

$$\mathbb{R}^{k+1} = E^u_w \oplus E^s_w \tag{10}$$

в виде прямой суммы линейных подпространств E^u_w, E^s_w, причём

а) для $\forall\, w \in A$ имеем $D\Pi(w)E^u_w = E^u_{\Pi(w)}$, $D\Pi(w)E^s_w = E^s_{\Pi(w)}$;

б) существуют такие (не зависящие от w, x) постоянные $\lambda > 1$, $\mu \in (0,1)$, c_1, $c_2 > 0$, что

$$\|D(\Pi^n(w))x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \geq c_1\lambda^n\|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \quad \forall\, w \in A, \quad \forall\, x \in E^u_w, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\|D(\Pi^n(w))x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \leq c_2\mu^n\|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \quad \forall\, w \in A, \quad \forall\, x \in E^s_w, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Определение 2. Диффеоморфизм $\Pi|_A$ назовем топологическим перемешиванием, если для любых двух непустых множеств $U, V \subset A$, открытых в топологии пространства (A,ρ), существует такое натуральное $n_0 = n_0(U,V)$, что $\Pi^n(U) \cap V \neq \varnothing$ при всех $n \geq n_0$.

Рассмотрим последовательность замкнутых вложенных множеств

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots, \tag{13}$$

где K_1 совпадает с полноторием (2), $K_{n+1} = F_n(K_n)$, $n \geq 1$, а $F_n\colon K_n \to$ $\to K_{n+1}$ — некоторая последовательность гомеоморфизмов.

Определение 3. Множество $A = \bigcap_{n\geq 1} K_n$ назовем соленоидом, если:

а) A является замкнутым, совершенным и нигде не плотным;

б) для любого $n \geq 1$ ось полнотория K_{n+1} обходит $m_n \geq 2$ раз ось полнотория K_n, не образуя крюков (см. [6]).

Определим следующие константы:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \max_{(v,\varphi)\in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(v,\varphi) \right\|, \quad \alpha_2 = \max_{(v,\varphi)\in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(v,\varphi) \right\|, \\
&\beta_1 = \min_{(v,\varphi)\in K} \left| m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v,\varphi) \right|, \quad \beta_2 = \max_{(v,\varphi)\in K} \left\| \frac{\partial g}{\partial v}(v,\varphi) \right\|
\end{aligned} \tag{14}$$

Справедливо утверждение, являющееся основным результатом данной публикации и представляющее собой гиперболический принцип кольца.

Теорема. *Пусть, помимо* (3), *выполнены неравенства*

$$\alpha_1 < 1, \quad \beta_1 > 1 + \frac{\alpha_2 \beta_2}{1 - \alpha_1}. \tag{15}$$

Тогда максимальный аттрактор (5) *диффеоморфизма* (1) *таков, что:*

а) A *— гиперболическое множество и соленоид;*

б) $\Pi|_A$ *— топологическое перемешивание.*

В заключение отметим, что из свойств гиперболичности, локальной максимальности (множество A таковым является, ибо оно аттрактор) и топологического перемешивания вытекают транзитивность (существование всюду плотной в A полутраектории $\Pi^n(w_0)$, $n \geq 0$ при некотором $w_0 \in A$) и равенство $\overline{\mathrm{Per}} = A$, где Per — совокупность периодических точек из A. Таким образом, можно утверждать, что отображение Π хаотично на A в смысле Девани.

Список литературы

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, №1. С. 113–185.
2. *Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors // Comput. Math. Appl. 1997. V. 34, N 2–4. P. 173–193.
3. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Чуа Л.* Методы качествен- ной теории в нелинейной динамике. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. Ч. 1.
4. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
5. *Аносов Д.В., Солодов В.В.* Гиперболические множества // Динамические системы с гиперболическим поведением (Динамические системы–9). М.: ВИНИТИ, 1991. С. 12–99. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления; Т. 66).
6. *Aarts J.M., Fokkink R.J.* The classification of solenoids // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 11, N 4. P. 1161–1163.

Условия неинтегрируемости уравнений геодезических на однородных пространствах фуксовых групп (Non-integrability conditions for geodesic flows on homogeneous spaces of Fuchsian groups)

В. В. Козлов (V. V. Kozlov)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

vvkozlov@mi.ras.ru

Рассматривается задача об интегрируемом поведении геодезических на однородных факторах плоскости Лобачевского по фуксовым группам (орбифолдах). Локально уравнения геодезических допускают три независимых нетеровых интеграла, линейных по скоростям (энергия — квадратичная форма от этих интегралов). Однако при обходе вдоль замкнутых циклов нетеровы интегралы претерпевают линейную подстановку. Таким образом, задача об интегрируемости сводится к поиску функций, инвариантных относительно этих подстановок. Если фуксова группа абелева, то имеется линейный по скорости первый интеграл (независимый от интеграла энергии). Наоборот, если фуксова группа содержит некоммутирующие гиперболические или параболические элементы, то геодезический поток не допускает дополнительных интегралов в виде рациональной функции от нетеровых интегралов. Подчеркнем, что этот результат справедлив и для некомпактных орбифолдов, когда об эргодичности геодезического потока говорить не приходится (поскольку невозвращающиеся геодезические могут составлять множество положительной меры).

Гиперболическая динамика физических систем (Hyperbolic dynamics of physical systems)*

С. П. Кузнецов (S. P. Kuznetsov)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

spkuz@yandex.ru

С 60-х годов XX века, благодаря Д.В. Аносову и другим исследователям получила развитие гиперболическая теория – раздел теории динамических систем, доставляющий строгое обоснование возможности хаотического поведения в системах как с дискретным временем (диффеоморфизмы), так и с непрерывным временем (потоки), на инвариантных множествах в фазовом пространстве, составленных исключительно из седловых траекторий [1]. Для консервативных систем гиперболический хаос представлен динамикой Аносова, когда инвариантное множество занимает компактное фазовое пространство полностью (для диффеоморфизма) или отвечает поверхности постоянной энергии (для потока). Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип притягивающих инвариантных множеств, таких как аттрактор Плыкина или соленоид Смейла – Вильямса. Доклад имеет содержанием обзор исследований, направленных на построение примеров систем с гиперболической динамикой на базе инструментария физики и электроники [2].

В качестве первого примера [3] рассмотрим движение частицы единичной массы на плоскости $(x,\, y)$ в стационарном потенциальном поле $U(x,y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2+y^2)^2$, с минимумом на единичной окружности. Примем, что периодически, с периодом T, на короткое время включаются импульсы силового поля с потенциалом $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{3}x^3 + xy^2$, так уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu x(1-x^2-y^2) + (-x+x^2-y^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) - \dot{x}, \\ \ddot{y} &= \mu y(1-x^2-y^2) + (-y-2xy)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) - \dot{y}. \end{aligned} \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 15-12-20035).

Здесь добавлена сила трения, пропорциональной мгновенной скорости, и коэффициент трения принят равным единице.

Представим себе кольцо из множества невзаимодействующих частиц, в начальный момент покоящихся на единичной окружности в точках $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$, где $0 \leq \varphi < 2\pi$. После толчка поля V частица, имевшая начальный угол φ, получит импульс $P_x = -x + x^2 - y^2$, $P_y = -y - 2xy$. Если не учитывать поле U, то остановка из-за трения произойдет в точке $x' = x + P_x = x^2 - y^2$, $y' = y + P_y = -2xy$, т.е. $x' = \cos\varphi'$ и $y' = -\sin\varphi'$, где $\varphi' = -2\varphi$, т.е. частицы расположатся по единичной окружности, но с двукратным обходом кольца в обратном направлении. Для угловой координаты получаем растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли.

Соотношения (1) приводят к четырехмерному отображению Пуанкаре, которое, аттрактором которого служит соленоид Смейла – Вильямса, что обусловлено топологическим свойством ансамбля частиц после преобразования. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения на той стадии процесса, когда под действием потенциального поля частица дрейфует в направлении потенциального минимума.

Второй пример – система двух попеременно возбуждаемых автогенераторов [4]:

$$\begin{gathered}\ddot{x} - [A\cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon y \cos\omega_0 t,\\ \ddot{y} - [-A\cos(2\pi t/T) - y^2]\dot{y} + 4\omega_0^2 y = \varepsilon x^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Переменные x и y относятся к подсистемам, активным по очереди благодаря принудительному изменению параметра с периодом T и амплитудой A. Предполагается выполненным соотношение $T = 2\pi N/\omega_0$, где N – целое число, так что это система уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть первый осциллятор на стадии активности имеет фазу φ, так что $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Его воздействие на партнера определяется второй гармоникой $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$, и при переходе в активную стадию возникающие колебания получают фазу 2φ. В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, обеспечивается его возбуждение с фазой 2φ благодаря присутствию опорного сигнала частоты ω_0.

Таким образом, обе подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и при этом на последовательных стадиях активности фаза колебаний дается отображением Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \mathrm{const}\ (\mathrm{mod} 2\pi)$. В четырехмерном пространстве состояний за период модуляции имеет место растяжение в направлении, связанном с фазой, и сжатие по трем остальным направлениям. Это соответствует конструкции Смейла – Вильямса в четырехмерном пространстве.

Третий пример – система с аттрактором типа Плыкина. Пусть мгновенные состояния задаются тремя переменными подчиненными условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть A, B, C, D четыре особые точки на одном меридиональном сечении сферы на равном удалении друг от друга, N и S - северный и южный полюсы. Рассмотрим последовательность непрерывных преобразований, каждое продолжительностью в единицу времени

I. Сток по параллели – смещение точек от меридианов NABS и NCDS по параллелям к равноудаленной меридиональной окружности:

$$\dot{x} = -\varepsilon x y^2, \ \ \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \ \ \dot{z} = 0. \tag{3}$$

II. Дифференциальное вращение вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z, так что точки на параллели BC неподвижны, а на параллели AD совершают поворот на 180^o:

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \ \ \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \ \ \dot{z} = 0. \tag{4}$$

III. Сток к экватору – смещение точек по окружностям с центрами на оси x от большого круга ABCD к экватору:

$$\dot{x} = 0, \ \ \dot{y} = \varepsilon y z^2, \ \ \dot{z} = -\varepsilon y^2 z. \tag{5}$$

IV. Дифференциальное вращение вокруг оси x с угловой скоростью, линейно зависящей от x, так что ортогональное оси x сечение, содержащее точку C, остается неподвижным, а сечение, содержащее точку B, претерпевает поворот на 180^o:

$$\dot{x} = 0, \ \ \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \ \ \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения для каждой стадии решаются аналитически. В результате можно получить отображение за период, как композицию отображений, отвечающих всем четырем стадиям [2], которое, как оказывается, имеет аттрактор типа Плыкина. В работе [5] представлена схема электронного устройства, где динамика такого типа может быть обеспечена.

Возможность физической реализации гиперболического хаоса открывает перспективы приложений для хорошо развитой математической теории и создает основу для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса, в том числе в рамках компьютерного исследования и в эксперименте. Можно думать, что модели, целенаправленно сконструированные с тем, чтобы реализовать гиперболический хаос, окажутся полезными для понимания фундаментальных вопросов, все еще бросающих вызов исследователям, например, в отношении проблемы турбулентности.

Список литературы

1. *Аносов Д.В. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением. М.: ВИНИТИ, 1991.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, №2. С. 121–149.
3. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // Regul. Chaotic Dyn. 2016. V. 21, N 2. P. 160–174.
4. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. Art. 144101.
5. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in Multisim // Chaos. 2011. V. 21. Art. 043105.

Nonautonomous dynamics: Anosov's heritage in action*

Lev Lerman

Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod, Russia

lermanl@mm.unn.ru

I shall discuss a topic that is closely related with what was introduced to the theory of dynamical systems by D.V. Anosov [1]. This concerns the notion of hyperbolic dynamics when it is applied to nonautonomous dynamical systems on smooth closed manifolds. In the first paper on the structurally stable nonautonomous dynamics [2] the main approach was relied on the notion of a specific integral curve as such that stays fixed under the action of

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 16-51-10005, 16-01-00364).

all equimorphisms of the extended phase manifold preserving the foliation into integral curves. It appeared that this was not too convenient. The more flexible approach was developed in [3] based on the notion of exponential dichotomy of solutions to a nonautonomous vector field (shortly, NVF) given on a smooth closed manifold on the semi-axis $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$. This allowed one to get stable and unstable manifolds related with any integral curve and to distinguish a class of NVFs with a finite number of such manifolds. In this way the class of nonautonomous gradient-like systems was introduced and some elements of its structure were studied [3].

Let us recall some notions. We consider NVFs on a smooth closed manifold M. A nonautonomous vector field on M is a uniformly continuous map $v\colon \mathbb{R} \to V^k(M)$ where $V^k(M)$ is a Banach space of C^k-smooth vector fields on M endowed with C^k-norm. Such a NVF generates its solutions and their graphs in the extended phase space $M \times \mathbb{R}$ (integral curves) define a foliation into integral curves. Let us endow M some Riemannian metric and take in $M \times \mathbb{R}$ the metric of the direct product of two metric in M and standard metric on $\mathbb{R}$. It is evident that for any NVF its foliation into integral curves is homeomorphic to the trivial foliation into straight-lines given by the zeroth vector field. In order to bypass this triviality we lay as an equivalence relation between two NVFs an equimorphism of their extended phase manifolds sending one foliation into another one with the preservation of time direction.

A natural question arises for NVFs: which types of foliations into integral curves are possible, what are the constructions allowing to find nonautonomous systems from some interesting autonomous ones, etc.? On this way a notion of the nonautonomous suspension was introduced [4] which was proved useful to transfer dynamics of some diffeomorphisms onto NVFs. The construction of a nonautonomous suspension is as follows. Let M be a smooth closed manifold and $f\colon M \to M$ be a diffeomorphism. Denote M_f a standard suspension over f with its flow orbits structure. M_f is a bundle $p\colon M_f \to S^1$ with the leaf M and f being a characteristic mapping. Due to the construction M_f is covered by the manifold $M \times \mathbb{R}$: $H\colon M \times \mathbb{R} \to M_f$. Let us endow M_f by some Riemannian metric (in fact, only the uniform structure is essential) and lift this metric to $M \times \mathbb{R}$ using H. The Riemannian manifold $M \times \mathbb{R}$ with this metric (denote it as $\tilde{M}_f$) is not always equimorphic to $M \times \mathbb{R}$ with the metric of direct products of a metric on M and the standard metric on $\mathbb{R}$. The covering H lifts also the foliation from M_f. In this respect the main question is when two diffeomorphisms $f, g\colon M \to M$ have equimorphic manifolds $\tilde{M}_f, \tilde{M}_g$ along with their foliations? In this case diffeomorphism f, g are called to be δ-equivalent [4]. In this direction a more weak result was found.

Theorem 1. *In order that the spaces $\tilde{M}_f$ and $\tilde{M}_g$ be uniformly homotopically equivalent, it is necessary and sufficient that integers $m, n \neq 0$ and a homotopy equivalence $\varphi\colon M \to M$ would exist such that $\varphi \circ f^m \sim g^n \circ \varphi$, where $\sim$ denotes the homotopy of the maps.*

It is natural to ask: suppose there is an NVF on a smooth closed M with its foliation of $M \times \mathbb{R}$ into integral curves. Does a diffeomorphism $f\colon M \to M$ exist such that $\tilde{M}_f$ with its foliation is equimorphic to $M \times \mathbb{R}$ with its foliation. In particular, the following result was closely connected with the properties of Anosov diffeomorphisms.

Corollary 1. *The nonautonomous suspension over a hyperbolic automorphism of an n-dimensional torus T^n is not equimorphic to $T^n \times \mathbb{R}$.*

On the other hand,

Proposition 1. *The following diffeomorphisms are always δ-equivalent:*
a) *f and f^k, $k \neq 0$ is an integer;*
b) *φ_1 and φ_t, $t \neq 0$, φ_t is an autonomous flow;*
c) *topologically conjugate diffeomorphisms.*

One of the main results in [3] was the generalization into nonautonomous case the notions and results obtained for a autonomous vector field about the orbit structure near a homoclinic orbit to a saddle periodic orbit (Smale, Shilnikov). These results were published later in [5]. The main construction in [3, 5] was related with the existence of uniform sequence of h-curves to some integral curve of an NVF. In particular, the existence of such a sequence leads to the fact that such NVF possesses infinitely many different stable leaves. This shows impossibility of such the structure in NVFs of the Morse–Smale type.

Another result in [3] was the construction of a distinguishing graph as an invariant of uniform classification for gradient-like NVFs on 2-dimensional closed manifolds. Roughly speaking, a gradient-like NVF means that (1) every integral curve possesses the exponential dichotomy both on the semiaxis $t > -$ and $t < 0$; this property implies the existence of the local stable manifold (if dichotomy on $t > 0$) or the local unstable manifold (if dichotomy on $t < 0$); (2) there are only finitely many stable and unstable manifolds; two more assumptions guaranteeing the right behavior of boundaries of stable and unstable manifolds. For such NVFs on 2-dimensional manifold we consider traces of global stable and unstable manifolds on the section $t = 0$ (these traces can be either a point, a smooth curve, or a open disk).

This allows one to introduce some invariant of these NVFs similar to that found by Leontovich, Peixoto and others. Then the following two theorems are valid.

Theorem 2. *The invariant found is the complete classifying invariant for gradient-like NVFs.*

Theorem 3. *Gradient-like NVFs are structurally stable.*

The same ideas work also for 1-dimensional case for nonautonomous equations on the circle S^1. Namely, the following theorem is valid:

Theorem 4. *For a gradient-like nonautonomous equation on S^1 there exists a complete invariant of the uniform equivalency, that is two such equations are uniformly equivalent iff their invariants coincide.*

This can be applied to a differential equation on S^1 which depends almost periodically in t. Then the following result holds.

Proposition 2. *If a gradient-like differential equation is almost periodic in t then there are a finite number of almost periodic integral curves in $S^1 \times \mathbb{R}$ such that each such a curve possesses exponential dichotomy on $\mathbb{R}$, half of these curve are exponentially stable and another half are exponentially unstable. These curves divide $S^1 \times \mathbb{R}$ into finite number of strips which boundary are one stable and one unstable curve.*

References

1. *Anosov D.V.* Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature // Trudy Mat. Inst. Steklova. 1967. V. 90. 211 pp.
2. *Lerman L.M., Shilnikov L.P.* On the classification of structurally stable nonautonnomous systems of the second order with the finite numbers of cells // Sov. Math. Dokl. 1973. V. 14, N 2. P. 444–447.
3. *Lerman L.M.* On nonautonomous dynamical systems of the Morse–Smale type: PhD thesis. Gorky: Gorky State Univ., 1975. 150 pp.
4. *Lerman L.M., Vainshtein A.G.* Uniform structures and the equivalence of diffeomorphisms // Math. Notes. 1978. V. 23, N 5. P. 407–414. (Transl. from Mat. Zametki. 1978. V. 23, N 5. P. 739–752.)
5. *Lerman L.M., Shilnikov L.P.* Homoclinic structures in nonautonomous systems: Nonautonomous chaos // Chaos: Int. J. Nonlin. Sci. 1992. V. 2, N 3. P. 447–454.

К мультипликативной эргодической теореме (On multiplicative ergodic theorem)

М. Е. Липатов (M. E. Lipatov), А. М. Степин (A. M. Stepin)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

maxim.lipatov@gmail.com, anmist@inbox.ru

Коцикл над измеримым потоком $T = \{T^t \colon X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$ со значениями в топологической группе G — это измеримое отображение $A\colon \mathbb{R}\times X \to G$, удовлетворяющее условию $A(t+s, x) = A(s, T^t x)A(t, x)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $x \in X$. Далее будем предполагать, что поток T сохраняет конечную меру μ на X.

Теорема 1. *Пусть коцикл A над T со значениями в $GL(m, \mathbb{R})$ при каждом t удовлетворяет условию $\ln \|A(t, \cdot)\| \in L_1(\mu)$. Тогда существует измеримая функция $x \mapsto \tau(x)$ со значениями в борелевских подмножествах $\mathbb{R}$ плотности 1 такая, что для всех x из некоторого T-инвариантного множества полной меры*

(i) *существует предел*

$$\lim_{\tau(x)\,\ni\, t\to+\infty} (A^*(t, x)A(t, x))^{\frac{1}{2t}} =: \Lambda(x);$$

(ii) *$\mathbb{R}^m$ представимо в виде прямой суммы $\bigoplus_{i=1}^{k(x)} U_i(x)$, где $U_i(T^t x) = A(t, x)U_i(x)$ и*

$$\lim_{\tau(x)\,\ni\, t\to\pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|A(t, x)v\| = \pm\chi_i(x) \tag{1}$$

равномерно по $v \in U_i(x)\setminus\{0\}$, причем функции $x \mapsto k(x)$, $x \mapsto \chi_i(x)$ и $x \mapsto d_i(x) := \dim U_i(x)$ T-инварианты, а $\{(e^{\chi_i(x)}, d_i(x)\}$ есть спектр матрицы $\Lambda(x)$ с учетом кратностей.

Ранее в мультипликативной эргодической теореме для операторных коциклов над потоками предполагалось выполненным условие

$$\sup_{0\le t\le 1} \ln^+ \|A(t, \cdot)^{\pm 1}\| \in L_1(\mu). \tag{2}$$

Предложенная выше формулировка утверждает, в частности, блочную диагонализуемость коциклов в общем случае их log-интегрируемости при всех $t \in \mathbb{R}$.

Все это достигается за счет замены пределов при $t \to \infty$ (в определении показателей Ляпунова) пределами при $t \to \infty$ по множествам плотности 1. Неизбежность этого следует из существования log-интегрируемых операторных коциклов, для которых показатели Ляпунова χ_i не существуют в прежнем смысле. С другой стороны, оказывается, что существование (точных) пределов при $t \to \infty$ в формуле (1) *возможно* для коциклов, не удовлетворяющих условию (2).

Утверждение о диагонализуемости log-интегрируемых коциклов можно усилить — каждый подкоцикл на диагонали когомологичен коциклу блочно-треугольного вида с неприводимыми блочно-конформными подкоциклами на диагонали, что получается использованием результата [1].

Доказательство теоремы 1 можно провести по схеме, предложенной в оригинальном доказательстве Оселедца [2] с использованием понятия правильности, основанного на переходе к пределу по множеству плотности 1. Другой подход к доказательству МЭТ, предложенный Рагунатаном [3], использующий субаддитивную эргодическую теорему Кингмана–Рюэлля [4, 5], также может быть применен к доказательству теоремы 1. Для этого требуется соответствующий вариант субаддитивной эргодической теоремы.

Теорема 2. *Пусть для измеримой функции* $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *выполняется* $\alpha^+(t,\cdot) \in L_1(\mu)$ *при каждом* t *и для всех* $t, s \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$

$$\alpha(t+s,x) \le \alpha(t,x) + \alpha(s, T^t x).$$

Тогда существуют измеримая функция $x \mapsto \tau(x)$ *со значениями в борелевских подмножествах* $\mathbb{R}$ *плотности 1 и измеримая* T*-инвариантная функция* $\beta\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *такие, что* $\beta^+ \in L_1(\mu)$,

$$\lim_{\tau(x) \ni t \to \infty} \frac{\alpha(t,x)}{t} = \beta(x) \ \mu\text{-п.в.},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int \alpha(t,x) d\mu(x) = \inf_t \frac{1}{t} \int \alpha(t,x) d\mu(x) = \int \beta(x) d\mu(x).$$

Приведем две конструкции, содержащие объяснение утверждений, упомянутых в тексте.

Пусть аддитивный коцикл $\alpha\colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ ассоциирован с эргодическим потоком $\{T^t\}$. Можно считать, что $X = \{(y,\tau) \in Y \times \mathbb{R} \colon 0 \le \tau \le$ $\le f(y)\}$, где S — эргодический автоморфизм пространства с конечной мерой (Y,ν), $f\colon Y\to[a,\infty)$ $(a>0)$, $f\in L_1(\nu)$, $d\mu=d\nu\cdot d\tau$, динамика — вертикальное движение, а точки $(y,f(y))$ и $(Sy,0)$ отождествляются. В таком представлении потока каждый ассоциированный с ним аддитивный коцикл однозначно восстанавливается по его ограничению на множество $\{(t,(y,0)),\ y\in Y,\ 0\le t\le f(y)\}$; более того, можно считать, что функция f ограничена, и тогда любая суммируемая функция α_0 на этом множестве продолжается до аддитивного коцикла над $\{T^t\}$ со значениями в $L_1(\mu)$. Если при этом для каждого y функция α_0 неограничена по t, то для ее продолжения до коцикла α не верно заключение теоремы Биркгофа.

Пусть поток $\{T_t\}$ построен по эргодическому автоморфизму $S\colon[0,1]\to\to[0,1]$ с инвариантной мерой Лебега в качестве ν и функции $f(y)==y^{-2/3}$. Полагая значения α_0 равными 0 всюду, кроме точек $(n,(y,0))$, $n\in\mathbb{N}\cap[0,f(y))$, а для них — равными $\sqrt{n}$, получаем коцикл над эргодическим потоком, для которого $\sup_{0\le t\le 1}|\alpha(t,\cdot)|\notin L_1(\mu)$, а временные средние сходятся.

Список литературы

1. *Arnold L., Nguyen Dinh Cong, Oseledets V.I.* Jordan normal form for linear cocycles // Random Op. Stoch. Eq. 1999. V. 7, N 4. P. 303–358.
2. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО. 1968. Т. 19. С. 179–210.
3. *Raghunathan M.S.* A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem // Israel J. Math. 1979. V. 32, N 4. P. 356–362.
4. *Kingman J.F.C.* The ergodic theory of subadditive stochastic processes // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1968. V. 30., N 3. P. 499–510.
5. *Ruelle D.* Ergodic theory of differentiable dynamical systems // IHES Publ. Math. 1979. Vol. 50, N 1. P. 27–58.

Достаточные условия неустойчивости положений равновесия релейных систем (Sufficient conditions of unstability of relay system equilibrium)

А. А. Лосев (A. A. Losev)

Москва, Россия

andrey.a.losev@gmail.com

Рассматривается система вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \ldots, n$; $(p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ T обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Для доопределения системы (1) на гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы и на пересечении этих гиперплоскостей можно использовать простейшее выпуклое доопределение, доопределение методом эквивалентного управления, общее доопределение, причем для релейной системы (1) все три доопределения совпадают [1].

Определение. *Решением системы* (1) называется набор абсолютно непрерывных функций $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$, который вне гиперплоскостей $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ удовлетворяет системе (1), а на этих гиперплоскостях и их пересечении – системам, полученным из (1) методом эквивалентного управления (при почти всех t).

Если $\Delta := p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, то систему (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \\ \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, i = 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Релейную систему вида (2) мы называем *приведенной*.

В настоящей работе получен ряд достаточных условий неустойчивости (в малом) положения равновесия $(0, \ldots, 0)$ приведенной системы.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$ и выполнена одна из следующих систем условий:*

1) $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 > 0$, $a_2 + b_2 > 0$;
2) $\Delta \neq 0$, $-a_1 + b_1 < 0$, $-a_2 + b_2 > 0$;
3) $\Delta < 0$, $|b_1| < -a_1$;
4) $\Delta < 0$, $|a_2| < -b_2$;
5) $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| > 0$, $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$;
6) $r > 0$, $|a_1| < -b_1$, $|b_2| < a_2$.

Тогда положение равновесия $(0, \ldots, 0)$ *приведенной системы неустойчиво.*

Список литературы

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Omega-limit sets of generic points of partially hyperbolic diffeomorphisms

S. S. Minkov, A. V. Okunev

Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

stanislav.minkov@yandex.ru, aokunev@list.ru

We prove that for any $E^u \oplus E^{cs}$-partially hyperbolic C^2-diffeomorphism the ω-limit set of a generic (with respect to the Lebesgue measure) point is saturated by the unstable leaves. As a corollary we prove a conjecture from a paper by Ilyashenko (2011) that the Milnor attractor is saturated by the unstable leaves. This property was used by Ilyashenko to prove that there exists a locally generic set of boundary preserving diffeomorphisms of $[0, 1] \times \mathbb{T}^2$ with "thick" Milnor attractors.

Definition 1. For a diffeomorphism F of a Riemannian manifold X the Milnor attractor (notation: $A_M(F)$ or A_M) is the smallest invariant closed set that contains the ω-limit sets of almost all points with respect to the Lebesgue measure on X.

Consider is a Riemannian manifold M, possibly with a boundary. The metric induces the Lebesgue measure on M.

Definition 2. A diffeomorphism $F\colon M \to M$ is called $E^u \oplus E^{cs}$-*partially hyperbolic* if there exist $\lambda > 1, \mu < \lambda$, $c > 0$ and two invariant distributions $E_x^{cs} \subset T_xM$ and $E_x^u \subset T_xM$, (i.e., $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$) and

$$T_xM = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Theorem. *Let $F\colon M \to M$ be a $E^u \oplus E^{cs}$ partially hyperbolic C^2-diffeomorphism. Then the ω-limit set of almost any point with respect to the Lebesgue measure is saturated by the unstable leaves (i.e. it either contains an entire leaf or does not intersect it).*

References

1. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity. Springer, 2004.
2. *Ilyashenko Yu.S.* Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indag. Math. 2011. V. 22, N 3–4. P. 257–314.
3. *Kudryashov Yu.G.* Bony attractors in higher dimensions: E-print. arXiv: 1305.3889v1.
4. *Pesin Ya.* Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. Eur. Math. Soc., 2004

Long-term behaviour of slow–fast systems with passages through resonances: Examples from charged particle dynamics

Anatoly Neishtadt

Space Research Institute of RAS, Moscow, Russia; Loughborough University, Loughborough, UK

aneishta@iki.rssi.ru, a.neishtadt@lboro.ac.uk

Long-term behaviour of slow–fast systems with passages through resonances can be described in probabilistic terms. In this talk we discuss examples of such a behaviour in charged particle dynamics.

A probabilistic approach to description of dynamics in slow–fast systems has Anosov's averaging theorem [1] as one of his origins. This theorem is dealing with systems of the form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon), \ \frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \tag{1}$$

Here ε is a small positive parameter, the vector y is called the slow variable, and the vector x is called the fast variable. System (1) is called a slow–fast system. The system for x for $\varepsilon = 0, y = \text{const}$ is called the fast system. It is assumed that x is a point on a smooth compact manifold M_y, and that the dynamics in fast system has a smooth invariant measure and is ergodic with respect to this measure for almost all values of y from a given bounded domain. Averaging of the function $g(x, y, 0)$ over M_y with respect to this measure gives a closed system for description of dynamics of the slow variable y: the averaged system. The averaging method consists of using solutions of the averaged system for approximate description of behaviour of the slow variables in the original system (1). Anosov's averaging theorem states that for any fixed in advance threshold the measure of initial conditions for which the error of such a description on the time interval $0 \le t \le 1/\varepsilon$ exceeds this threshold tends to 0 as $\varepsilon \to 0$. Sets of initial condition for solutions that can and can not be approximately described by the averaged method tend to fill the phase space densely as $\varepsilon \to 0$. Thus a probabilistic interpretation can be used: the probability that the error of the averaging method exceeds any fixed threshold tends to 0 as $\varepsilon \to 0$.

In this talk we discuss dynamics on time intervals which are much longer than $1/\varepsilon$. Deviations of exact solutions from solutions of the averaged system on the time intervals of length $\sim 1/\varepsilon$ can determine dynamics on longer time intervals. We will consider this question for the cases when M_y is the two-dimensional torus with angular variable x, and dynamics of the fast system is a linear flow (rotation) on this torus: $f(x, y, 0) = \omega(y)$. In this case a rather detailed information about dynamics on the time intervals of length $\sim 1/\varepsilon$ is available (see [5] and references therein). Main effects a related to resonances between frequencies of the fast motion (components of the 2-dimensional vector $\omega(y)$) that appear in the process of the evolution of the slow variable y. Principal time scales here are $t \sim 1/\varepsilon^{3/2}$ and $t \sim 1/\varepsilon^2$.

Effects of passages through resonances can be treated as random events if ε is small enough. There is a heuristic reasoning that suggests that such effects separated by time intervals $\sim 1/\varepsilon$ can be treated as statistically independent. For some cases this suggestion is proved in [4]. In this talk we describe several model examples from charged particle dynamics that demonstrate these quasi-random effects. In particular, we present an analog of kinetic equation for description of such kind of dynamics.

The talk is a review based on papers [2, 3, 5–7].

References

1. *Anosov D.V.* Averaging in systems of ordinary differential equations with rapidly oscillating solutions // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1960. V. 24, N 5. P. 721–742.
2. *Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Vasiliev A., Mourenas D.* Kinetic equation for nonlinear resonant wave-particle interaction // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. Art. 090701.
3. *Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Vasiliev A., Mourenas D.* Probabilistic approach to nonlinear wave-particle resonant interaction. Submitted.
4. *Dolgopyat D.* Repulsion from resonances // Mém. Soc. Math. France (N.S.). 2012. V. 128. 119 pp.
5. *Neishtadt A.I.* Averaging, passage through resonances, and capture into resonance in two-frequency systems // Russ. Math. Surv. 2014. V. 69, N 5. P. 771–843.
6. *Neishtadt A.I., Artemyev A.V., Zelenyi L.M., Vainchtein D.L.* Surfatron acceleration in electromagnetic waves with a low phase velocity // JETP Lett. 2009. V. 89, N 9. P. 441–447.
7. *Vasiliev A., Neishtadt A., Artemyev A.* Nonlinear dynamics of charged particles in an oblique electromagnetic wave // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 3075–3079.

Closures of group actions and Poisson measures

Yury Neretin

University of Vienna, Austria; Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow, Russia; Moscow State University, Moscow, Russia; Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russia

neretin@mccme.ru

Consider the group G of all transformations of a Lebesgue measure (M, μ) space (M, μ) leaving the measure μ quasiinvariant. Denote by $\mathbb{R}^+$ the half-line $t > 0$. We say that a *polymorphism* (see [3]) of M is a measure $\varkappa$ on $M \times M \times \mathbb{R}^+$ satisfying two conditions:

1) The pushforward of $\varkappa$ to the first factor M is μ.

2) The pushforward of $t \cdot \varkappa$ to the second factor M is μ.

For any $g \in G(M)$ we define a polymorphism as a pushforward of the measure μ under the map $m \mapsto (m, g(m), g'(m))$. Denote by $\mathrm{Pol}(M)$ the set of all polymorphisms. It has a structure of a semigroup with a topology, and the group $G(M)$ is dense in $\mathrm{Pol}(M)$ (so $\mathrm{Pol}(M)$ is a 'natural completion' of $G(M)$).

Therefore, for any action of a group Γ on M there arise a problem about closure of Γ in $\mathrm{Pol}(M)$. This question is interesting at least for infinite-dimensional ('large') groups Γ, several examples were examined in [1–5].

The talk contains a solution of this question for the space (Ω, ω) of Poisson configurations on a space N with non-atomic σ-finite measure and the group Γ of measurable transformations leaving ω quasiinvariant.

References

1. *Nelson E.* The free Markoff field // J. Funct. Anal. 1973. V. 12. P. 211–227.
2. *Neretin Yu.* Spreading maps (polymorphisms), symmetries of Poisson processes, and matching summation // J. Math. Sci. (N. Y.). 2005. V. 126, N 2. P. 1077–1094.
3. *Neretin Yu.* On the boundary of the group of transformations leaving a measure quasi-invariant // Sb. Math. 2013. V. 204, N 8. P. 1161–1194.
4. *Neretin Yu.* Symmetries of Gaussian measures and operator colligations // J. Funct. Anal. 2012. V. 263, N 3. P. 782–802.
5. *Neretin Yu.* Wishart–Pickrell distributions and closures of group actions: E-print. arXiv: 1602.03492.

A C^1 Anosov diffeomorphism with a horseshoe that attracts almost any point

Alexey Okunev

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

aokunev@list.ru

This is joint work with C. Bonatti, S. Minkov, and I. Shilin.

Using Bowen's construction of a horseshoe with positive Lebesgue measure [1], we construct an example of a C^1 Anosov diffeomorphism of the 2-torus that admits a physical measure ν such that

- the basin of ν has full Lebesgue measure,
- ν is supported on a horseshoe $\mathcal{H}$ with zero Lebesgue measure.

The horseshoe $\mathcal{H}$ is *semithick*, i.e. it is a product of a Cantor set with positive measure in the unstable direction and a Cantor set with zero measure in the stable direction.

References

1. *Bowen R.* A horseshoe with positive measure // Invent. Math. 1975. V. 29, N 3. P. 203–204.

Erdős measures on Euclidean space and $\widehat{Z}^n$

Valery Oseledets

Moscow State University and Financial University, Moscow, Russia

oseled@gmail.com

What one can say about the distribution of the random variable:

$$\zeta = A^{-1}\xi_1 + A^{-2}\xi_2 + \dots,$$

where $\xi_k \in Z^n$ are independent identically distributed random variables, $0 < P(\xi_1 = 0) < 1$, the expanding matrix $A \in GL(n, Z)$.

We will call the distribution of the random variable ζ the *Erdős measure* on the space R^n.

Another question is what one can say about the distribution of the random variable:

$$\widehat{\zeta} = \xi_1 + A\xi_2 + A^2\xi_3 + \dots,$$

Here $\zeta \in \widehat{Z}^n$, where $\widehat{Z}^n$ is the profinite extension of Z^n with respect to $Z^n > AZ^n > A^2Z^n > \dots$

We will call the distribution of the random variable $\widehat{\zeta}$ the *Erdős measure* on the group $\widehat{Z}^n$. We give some answers to these questions.

We use the notions of A-invariant Erdős measure on the torus and the invariant Erdős measure on the compact abelian group $\widehat{Z}^n$.

Shadowing and inverse shadowing in group actions

Sergei Yu. Pilyugin

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

sergeipil47@mail.ru

In this talk, we discuss shadowing and inverse shadowing in actions of some finitely generated groups.

The shadowing property means that, given an approximate trajectory, we can find an exact trajectory close to it. The Reductive Shadowing Theorem (RST) states that if Φ is a uniformly continuous action of a finitely generated group G and the action of a one-dimensional subgroup of G is topologically Anosov (i.e., it has the shadowing property and is expansive), then the action Φ is topologically Anosov as well (and hence, Φ has the shadowing property).

The first RST was proved in [1] for the groups $\mathbf{Z}^p$; later it was proved for virtually nilpotent groups [2]. At the same time, it was shown in [2] that the RST is not valid for the Baumslag–Solitar groups $\mathrm{BS}(1, n)$ with $n > 1$.

The inverse shadowing property means that, given a family of approximate trajectories (generated by a so-called approximate method), we can find a member of this family that is close to any chosen exact trajectory. It is shown in [3] that an analog of the RST for the case of inverse shadowing (with "topologically Anosov" replaced by the so-called "Tube Condition") is also valid for virtually nilpotent groups.

References

1. *Pilyugin S.Yu., Tikhomirov S.B.* Shadowing in actions of some abelian groups // Fund. Math. 2003. V. 179, N 1. P. 83–96.
2. *Osipov A.V., Tikhomirov S.B.* Shadowing for actions of some finitely generated groups // Dyn. Syst. 2014. V. 29, N 3. P. 337–351.
3. *Pilyugin S.Yu.* Inverse shadowing in group actions // Dyn. Syst. 2016.

О топологической классификации систем Морса–Смейла (On topological classification of Morse–Smale systems)*

О. В. Починка (O. V. Pochinka)

НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

olga-pochinka@yandex.ru

Потоки Морса–Смейла на многообразиях были введены в рассмотрение в середине прошлого века [1] как претенденты на типичные структурно устойчивые системы. Благодаря пионерской работе [2] о грубых системах на плоскости, казалось, что мир динамических систем устроен довольно просто и на других многообразиях. В действительности всё оказалось более драматичным, но системы Морса–Смейла вошли в мир динамики, как структурно устойчивые системы с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа орбит. Несмотря на кажущуюся простоту этих систем, их топологическая классификация, начиная с размерности два, является довольно сложной задачей. И если для непрерывных систем всё свелось к комбинаторной задаче различения направленных [3] или трехцветных [4] графов, то в дискретном случае на сегодняшний день известен лишь подход, использующий аппарат марковских разбиений [5]. В докладе будет изложен новый подход к топологической классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях, позволяющий реализовать любой такой каскад по конечному набору торов, с вложенными в него проколотыми дисками. В раз-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-03687-a, 16-51-10005-Ko_a) и ЦФИ НИУ ВШЭ (проект 98 в 2016 г.).

мерности три классификационные результаты для диффеоморфизмов Морса–Смейла были получены на языке гетероклинических ламинаций [6], о чем тоже будет упомянуто в докладе. Кроме того, будут приведены некоторые классификационные результаты для многомерных систем Морса–Смейла [7, 8].

Список литературы

1. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 43–49.
2. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
3. *Peixoto M.M.* On a classification of flows on 2-manifolds // Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador. 1973. P. 389–492.
4. *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 8. С. 93–140.
5. *Bonatti C., Langevin R.* Difféomorphismes de Smale des surfaces. Paris: Soc. math. France, 1998. (Astérisque; V. 250).
6. *Починка О.В.* Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // ДАН. 2011. Т. 440, № 6. С. 34–37.
7. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // J. Math. Sci. 2015. V. 208, N 1. P. 81–91.
8. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* Системы Морса–Смейла с тремя неблуждающими точками // ДАН. 2011. Т. 440, № 1. С. 11–14.

Estimates of correlations in dynamical systems: from Hölder continuous to general observables

Ivan Podvigin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

ipodvigin@math.nsc.ru

Let μ be a Borel measure on a metric space M and $T\colon M \to M$ be a measure preserving transformation, i.e. $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ for all Borel sets $A \subseteq M$. For observables $f \in L_p(M, \mu)$ and $g \in L_q(M, \mu)$ with Hölder conjugate $p, q \in [1, \infty]$, we denote as $c_n(f, g)$ the pair correlations, i.e.

$$c_n(f, g) = \int_M f(x)g(T^n x)\, d\mu(x) - \int_M f(x)\, d\mu(x) \int_M g(x)\, d\mu(x),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

As is well known, for mixing measure preserving transformation the pair correlations $c_n(f, g)$ for $f, g \in L_2(M, \mu)$ may decay to zero as $n \to \infty$ with arbitrary slow rate, and furthermore such behavior is typical in L_2 (see [1]). Nevertheless for general observables f and g it is interesting to know how slow the pair correlations $c_n(f, g)$ decay. We present in this talk the approach to estimating of the pair correlations for general observables via approximation by observables with already known information on the decay of pair correlations.

More precisely, let $\mathfrak{F}_p \subseteq L_p(M)$ and $\mathfrak{G}_q \subseteq L_q(M)$ be densely embedded Banach spaces of complex valued functions on M. Assume that for all $f \in \mathfrak{F}_p$ and $g \in \mathfrak{G}_q$

$$|c_n(f, g)| \le A\|f\|_{\mathfrak{F}_p}\|g\|_{\mathfrak{G}_q}\Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{\#}$$

with some constant $A > 0$ and $\Phi \searrow 0$ as $n \to \infty$.

There are a lot of the dynamical systems with estimates of the pair correlations like (#), among which there are the classical transitive Anosov diffeomorphisms with sets $\mathfrak{F}_p$ and $\mathfrak{G}_q$ of Hölder continuous functions in stable and unstable directions respectively (see [2]).

For $f \in L_p(M)$ and $t \ge 0$ denote as $\tau_f(t)$ the best $\mathfrak{F}_p$-approximation of order t for function f, i.e.

$$\tau_f(t) = \inf\{\|f - h\|_p\colon\ h \in \mathfrak{F}_p,\ \ \|h\|_{\mathfrak{F}_p} \le t\}.$$

Let us define new Banach spaces of functions associated with different estimates of the best approximations. Let Ξ be the set of all decreasing to zero functions $\Theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, i.e. $\Theta(t_1) \ge \Theta(t_2)$ for $0 \le t_1 \le t_2$ and $\Theta(t) \to 0$ as $t \to +\infty$. Let $\Xi^0 \subset \Xi$ be the set of functions which equal to zero beginning at some point.

Definition. For $\Theta \in \Xi$ denote as $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ the set of all functions $f \in L_p(M)$ such that the best $\mathfrak{F}_p$-approximation satisfies the estimate

$$\tau_f(ct) \le c\Theta(t)$$

for all $t \ge 0$ and some constant $c \ge 0$. The set of such constants is denoted as $C(\Theta, f)$. Let

$$\|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta)} = \inf_{c \in C(\Theta, f)} c$$

be the norm in the space $\mathfrak{F}_p(\Theta)$.

Let us formulate the main result.

Theorem. *Assume that the estimate (#) holds true. Let* $\Theta_1, \Theta_2 \in \Xi$, *then for any* $f \in \mathfrak{F}_p(\Theta_1)$, $g \in \mathfrak{G}_q(\Theta_2)$ *for all* $n \geq n_0$

$$|c_n(f,g)| \leq A' \|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta_1)} \|g\|_{\mathfrak{G}_q(\Theta_2)} \Phi'(n) \qquad (\#\#)$$

for some $n_0 \in \mathbb{N}$, *constant* $A' > 0$, *and* $\Phi' \searrow 0$ *as* $n \to \infty$.

In the case $\Theta_1 \vee \Theta_2 \notin \Xi^0$, *we have* $\Phi'(n) = \Phi(n)\upsilon(\Phi(n))$ *with the function* $\upsilon\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *which is the inverse of*

$$\frac{1}{t}(\Theta_1 \vee \Theta_2)(\sqrt{t}), \ t > 0,$$

and n_0 *is the smallest integer satisfying the estimate*

$$\Phi(n_0)\upsilon(\Phi(n_0)) \leq 1.$$

In the case $\Theta_1 \vee \Theta_2 \in \Xi^0$, *we have* $\Phi'(n) = \Phi(n)$ *and* $n_0 = 1$.

As we see the estimate (##) looks like (#) and evidently extends it to all observables.

As application of the main result one can obtain, following the approach [3], the CLT for Anosov diffeomorphisms with some new observables, for example for the characteristic functions of the sets with power behavior of the measure near the boundary.

References

1. *Chernov N.I.* Limit theorems and Markov approximations for chaotic dynamical systems // Probab. Theory Relat. Fields. 1995. V. 101, N 3. P. 321–326.
2. *Bressaud X., Liverani C.* Anosov diffeomorphisms and coupling // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2002. V. 22, N 1. P. 129–152.
3. *Stenlund M.* A strong pair correlation bound implies the CLT for Sinai billiards // J. Stat. Phys. 2010. V. 140, N 1. P. 154–169.

О динамике дискретных систем со случайными параметрами (About dynamics of discrete systems with random parametres)*

Л. И. Родина (L. I. Rodina)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

LRodina67@mail.ru

При математическом моделировании дискретных динамических систем возникают разностные (или рекуррентные) уравнения. Например, развитие многих биологических популяций с неперекрывающимися поколениями (к которым можно отнести популяции некоторых видов насекомых, рыб, однолетних растений) определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где x_{n+1} — размер популяции в момент времени $n+1$ выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений хорошо изучены и описаны, в частности, в работах [1, 2]. К наиболее известным результатам можно отнести теорему А.Н. Шарковского [2, гл. 3] о сосуществовании циклов различной длины и утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [3] о связи между наличием цикла периода три и существованием несчетного множества хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (1) в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω. Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$, $I = [a, b]$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Приведем результаты работы [4], в которой для данной вероятностной модели получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, а также условия, при которых решения

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

хаотические с вероятностью единица. Покажем, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение со случайными параметрами (2) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma \colon \omega_0 \in \Omega_0, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где } \ \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 0, \ldots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Приведем определения и достаточные условия существования *притягивающего и отталкивающего циклов* для уравнения (2), выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\sigma^n \doteq (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$,

$$f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x) \doteq f\big(\omega_{n-1}, \ldots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))\big).$$

Определение 1. Точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода $k \geqslant 1$* для уравнения (2), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0, \quad f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m, \quad m = 1, \ldots, k-1$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода.

Положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (2) назовем точку $x_* \in I$ такую, что $f(\omega, x_*) = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ назовем *притягивающим циклом* для уравнения (2), если существует окрестность U этого цикла такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Цикл B назовем *притягивающим с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность $U = U(\sigma)$ цикла B такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$.

Определение 3. Цикл B назовем *отталкивающим циклом* уравнения (2), если существует окрестность U цикла B, которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время, то есть для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$. Цикл B назовем *отталкивающим с вероятностью* *единица,* если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла, такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$. *Если*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \varlimsup_{x \to \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} \bigl| f'_x(\omega, x) \bigr| < 1,$$

то B *является притягивающим циклом данного уравнения.*

Если $\prod\limits_{i=0}^{k-1} \varliminf\limits_{x \to \beta_i} \inf\limits_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1$, *то цикл* B *является отталкивающим циклом уравнения* (2).

Теорема 2. *Пусть уравнение* (2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$. *Если существует окрестность* U *этого цикла такая, что*

$$M\Bigl(\ln \sup_{x \in U} \bigl| \bigl(f^k(\sigma, x)\bigr)'_x \bigr| \Bigr) < 0,$$

то цикл B *притягивающий с вероятностью единица. Если существует окрестность* U *цикла* B *такая, что* $M\Bigl(\ln \inf\limits_{x \in U} \bigl| \bigl(f^k(\sigma, x)\bigr)'_x \bigr| \Bigr) > 0$, *то цикл является отталкивающим с вероятностью единица.*

Определение 4. Решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (2) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует. Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (2), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические.

Точку y назовем *со временем периодической* или предпериодической точкой уравнения (2), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geqslant 1$.

Условие 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \ldots, v_r\}$, где $r \geqslant 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i = 1$ и каждая из функций $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $I = [a, b]$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* 1 *и уравнение* (2) *либо не имеет ни одного цикла (периода* $k \geqslant 1$), *либо все циклы* *отталкивающие с вероятностью единица. Пусть Y — множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка $x_0 \in I \setminus Y$ апериодическая с вероятностью единица.*

Список литературы

1. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
2. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989.
3. *Li T.-Y., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon. 1975. V. 82, N 10. P. 985–992.
4. *Родина Л.И.* Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 22, №2. С. 227–235.

Homoclinic invariants of ergodic actions

Valery Ryzhikov

Moscow State University, Moscow, Russia

vryzh@mail.ru

We consider a family of homoclinic groups and Gordin's type invariants of measure-preserving actions, state their connections with factors, full groups, ranks, rigidity, multiple mixing and realize such invariants in the class of Gaussian and Poisson suspensions.

In a topological group G there is the correspondence between an element T and its homoclinic group:

$$H(T) = \{S\colon T^{-n}ST^n \to I,\ n \to \infty\},$$

where I is the neutral element. We consider the case where G is the group of all automorphisms of a Lebesgue space. It is not hard to see that all Bernoulli actions have ergodic homoclinic groups (the same is probably true for all K-automorphisms). King, answering Gordin's question, built in [2] a zero entropy transformation T of a probability space with ergodic $H(T)$, we say *a transformation T with Gordin's G-property.* This invariant implies the mixing [1], furthermore, it implies the mixing of all orders [8].

All mixing Gaussian and Poisson suspensions (see [3] for definitions), have G-property (the proof for Poisson suspensions see in [8], as for Gaussian actions, it is an exercise).

We know that all group actions without multiple mixing property and the horocycle flows do not possess Gordin's property (the latter follows from Ratner's results [6]).

Let us define a family of homoclinic nature groups. The weak homoclinic group is defined as

$$WH(T) = \{S \in G\colon \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{-n}ST^{n} \to I,\ N \to \infty\}.$$

For P, an infinite subset of integers, we define the group

$$H_P(T) = \{S \in G\ :\ T^{-n}ST^{n} \to I,\ n \in P,\ n \to \infty\}.$$

One presumes here the strong operator convergence, associating the transformations with corresponding operators in $L_2(X,\mu)$.

A transformation T is prime by definition as it possesses only trivial invariant σ-algebras. Recall that the full group $[S]$ of the automorphism S is defined as the collection of all automorphisms R of the Lebesgue space (X,μ) such that for all $x \in X$ one has $R(x) = S^{n(x)}$. The full group $[\{S_g\}]$ of a family $\{S_g\}$ is the group generated by all groups $[S_g]$.

Theorem 1. *If a transformation T is prime, then either the group $H_P(T)$ is ergodic or $H_P(T) = \{I\}$.*

For all P the group $H_P(T)$ is full: $H_P(T) = [H_P(T)]$.

Corollary 1. *If the group $WH(T)$ $(H(T)$,$H_P(T))$ is ergodic, then it includes representatives of all conjugacy classes of ergodic transformations. King's homoclinic group from* [2] *contains isomorphic copies of all ergodic transformations.*

Theorem 2. *Weakly mixing Gaussian and Poisson suspensions have ergodic weak homoclinic group.*

Let T be an automorphism of a standard Lebesgue space (X,μ), $\mu(X)=1$. Let for a number $\beta > 0$ there exist a sequence ξ_j of partitions of X in the form

$$\xi_j = \{B_j, TB_j, T^2B_j, \ldots, T^{h_j-1}B_j, C_j^1, \ldots, C_j^{m_j} \ldots\},$$

and any measurable set can be approximated by ξ_j-measurable ones as $j \to \infty$, and $\mu(U_j) \to \beta$, where $U_j = \bigsqcup_{0\le k<h_j} T^kB_j$. *The local rank $\beta(T)$*

is defined as maximal number β for which the automorphism T possesses a corresponding sequence of approximating partitions. An automorphism T is said to be of rank 1, if $\beta(T) = 1$.

Theorem 3. *If for an automorphism T of rank 1 the group $WH(T)$ is infinite, then T is rigid: for some sequence $n_i \to \infty$ it holds $T^{n_i} \to I$.*

If a mixing transformation R is of rank 1, then $H(R) = WH(R) = \{I\}$.

If an automorphism T is ergodic, $\beta(T) = \beta > 0$ and the group $WH(T)$ is infinite, then there is a sequence $n_i \to \infty$ such that $T^{n_i} \to \beta I + (1-\beta)M$ for some Markov operator M (we say: T is partially rigid).

Theorems 2 and 3 imply a generalization of Parreau–Roy's result: rank-one Poisson suspension must be rigid [5] (for now there are no examples of such kind).

Theorem 4. *For any two infinite families of integers there are some subsets Q, P of these families, respectively, such that for some weakly mixing Poisson (Gaussian) suspensions T,T' the groups $H_P(T)$, $H_Q(T')$ are ergodic and the groups $H_P(T')$, $H_Q(T)$ are trivial.*

The homoclinic approach gives new proofs of the multiple mixing for Poisson suspensions (Roy [7]) and Gaussian actions (Leonov [4]) as well as the proof of weak multiple mixing for weakly mixing Gaussian and Poisson suspensions.

Theorem 5. *Suppose that an automorphism T satisfies the properties $H_P(T)$ is ergodic, and for sequences $m_i^1, \dots, m_i^k \in P$, $m_i^1, m_i^k \to \infty$ the convergence*

$$\mu(T^{m_i^1} B_1 \cap \ldots \cap T^{m_i^k} B_k) \to \mu(B_1) \ldots \mu(B_k)$$

holds for any measurable sets $B_1, \dots, B_k$.

Then for any measurable sets $B, B_1, \dots, B_k$ we have

$$\mu(B \cap T^{m_i^1} B_1 \cap \ldots \cap T^{m_i^k} B_k) \to \mu(B)\mu(B_1) \ldots \mu(B_k).$$

Questions. *Let T be weakly mixing rank-one transformation. What can we say about homoclinic groups $WH(T)$, $H_P(T)$?*

Could $H_P(T)$ be ergodic for mixing rank-one transformation T, or, more generally, for a transformation with minimal self-joinings?

From Ageev's results we know that for generic actions of the group $(S, T \colon T^{-1}S^2T = S)$ the generator S is rank-one. In connection with the above question it is naturally to ask: could such T be a rank-one automorphism? For all known models the corresponding element T is out of rank one. In generic case for some infinite set $P \subset \{2, 4, 8, \ldots\}$ the group $H_P(T)$ is ergodic.

Only for transformations R with discrete spectrum we know that $H_P(R) = \{I\}$ for all infinite sets P.

Are there weakly mixing transformations with the same property?

References

1. *Gordin M.I.* A homoclinic version of the central limit theorem // J. Math. Sci. 1994. V. 68. P. 451–458.
2. *King J.L.* On M. Gordin's homoclinic question // IMRN Int. Math. Res. Not. 1997. N 5. P. 203–212.
3. *Kornfeld I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V.* Ergodic theory. Moscow: Nauka, 1980.
4. *Leonov V.P.* The use of the characteristic functional and semi-invariants in the ergodic theory of stationary processes // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1960. V. 133. P. 523–526.
5. *Parreau F., Roy E.* Prime Poisson suspensions // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2015. V. 35, N 7. P. 2216–2230.
6. *Ratner M.* Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows // Duke Math. J. 1991. V. 63, N 1. P. 235–280.
7. *Roy E.* Poisson suspensions and infinite ergodic theory // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2009. V. 29. P. 667–683.
8. *Ryzhikov V.V.* Ergodic homoclinic groups, Sidon constructions and Poisson suspensions // Trans. Moscow Math. Soc. 2014. P. 77–85.
9. *Ryzhikov V.V.* Mixing, rank, and minimal self-joining of actions with an invariant measure // Mat. Sb. 1992. V. 183, N 3. P. 133–160.

Композиции случайных полугрупп и закон больших чисел (Composition of random semigroups and the law of large numbers)*

В. Ж. Сакбаев (V. Zh. Sakbaev)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

fumi2003@mail

Для последовательностей $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k$, $n \in \mathbf{N}$, сумм независимых числовых случайных величин η_n, $n \in \mathbf{N}$, закон больших чисел утверждает, что $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\}) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого числа $\epsilon > 0$, где $M\eta$ – математическое ожидание случайной величины η_k и $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\})$ – вероятность отклонения случайной величины S_n от ее математического ожидания более чем на ϵ. Для последовательности $\{\mathbf{U}_n\}$ независимых случайных величин со значениями в множестве однопараметрических полугрупп линейных операторов в гильбертовом пространстве H ставится вопрос об асимптотическом поведении последовательности $\mathbf{U}(n) = \mathbf{U}_n^{1/n} \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$, композиций независимых случайных полугрупп $\mathbf{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Определение 1. Пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых случайных операторов, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}}$. Тогда если

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|(\mathbf{A}_n)^{1/n} \circ \ldots \circ (\mathbf{A}_1)^{1/n} - \bar{\mathbf{A}}\|_{B(H)} > \epsilon\}) = 0 \tag{1}$$

при любых любых $\epsilon > 0$, либо

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|((\mathbf{A}_n)^{1/n} \circ \ldots \circ (\mathbf{A}_1)^{1/n} - \bar{\mathbf{A}})x\|_H > \epsilon\}) = 0 \tag{2}$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\epsilon > 0$, то для последовательности независимых случайных операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ закон больших чисел выполнен но норме (1), либо в сильной операторной топологии (2).

Понятие случайной полугруппы состоит в следующем. Пусть $Y_s(X)$ — топологическое векторное пространство сильно непрерывных отобра-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00516), Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

жений $\mathbf{F}$ полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ линейных преобразований банахова пространства X, топология τ_s на котором определяется семейством функционалов $\phi_{T,u}$, $T \geq 0$, $u \in X$, действующих по правилу $\phi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$.

Определение 2. Случайной полугруппой мы называем случайную величину G, принимающую значения в множестве $\mathcal{S}(X)$ сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве X (алгебра $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ подмножеств $\mathcal{S}(X)$, превращающая его в измеримое пространство, представляет собой минимальную алгебру подмножеств множества $\mathcal{S}(X)$, содержащую все множества из топологии $\tau_\mathcal{S}$, индуцированной на $\mathcal{S}(X)$ из топологического пространства $Y_s(X)$).

Математическим ожиданием случайной полугруппы G как отображения пространства с мерой $(\Omega, 2^\Omega, \mu)$ в топологическое пространство $Y_s(X)$ будем называть интеграл Петтиса

$$M[G](t) = \int_\Omega G_\epsilon(t) d\mu(\epsilon), \quad t \geq 0.$$

Теорема 1. *Пусть μ – вещественнозначная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества E с ограниченной вариацией. Тогда если измеримое отображение $\xi\colon\ \Omega \to Y_s(X)$ является равномерно ограниченным и существует такое плотное в пространстве X линейное подпространство $\mathcal{D}$, что для каждого $u \in \mathcal{D}$ семейство отображений $\xi_\omega(t)u \in C(R_+, X)$, $\omega \in \Omega$, является равномерно непрерывным, то $M\xi(t) \in Y_s(X)$.*

Дисперсией случайного оператора $\mathbf{A}$ со значениями в пространстве $B(H)$ с математическим ожиданием $\bar{\mathbf{A}}$ (случайной оператор-функции $\mathbf{U}$ со значениями в пространстве $Y_s(H)$ с математическим ожиданием $\bar{\mathbf{U}}$) будем называть математическое ожидание случайного оператора $(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})^*(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})$ (математическое ожидание случайного оператора $(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})^*(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})$).

Лемма 1. *Если случайный ограниченный линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет дисперсию $D_K \in B(H)$, то тогда справедливы неравенства Чебышева:*

$$P(\{\|\mathbf{A} - M\mathbf{A}\|_{B(H)} > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\|D_K\|_{B(H)}$$

$$P(\{\|(\mathbf{A} - M\mathbf{A})x\|_H > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\|D_K x\|_H \quad \forall\ x \in H.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с счетно-аддитивной мерой на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}$ минимальную σ-алгебру, содержащую совокупность $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ всевозможных n-кратных прямых произведений множеств из алгебры $\mathcal{A}$; через $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$ обозначим счетно-аддитивную меру, являющуюся счетно-аддитивным продолжением функции множества $\mu \times \ldots \times \mu$ с совокупности множеств $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}$ (см. [1], теорема 3.3.1).

Определение 3. Композицией n независимых одинаково распределенных случайных полугрупп $\mathbf{U}$ называется отображение $\mathbf{U}^n$ пространства с мерой $(\Omega \times \ldots \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \ldots \otimes \mu)$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{\mathcal{S}})$, определяемое равенством $\mathbf{U}^n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \mathbf{U}(\omega_n) \circ \ldots \circ \mathbf{U}(\omega_1)$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \times \ldots \times \Omega$.

Лемма 2. *Если при каждом $n \in \mathbf{N}$ случайные полугруппы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_n$ являются независимыми, то*

$$M[\mathbf{U}^n] = M[\mathbf{U}_n] \circ \ldots \circ M[\mathbf{U}_2] \circ M[\mathbf{U}_1] \quad \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Теорема 2. *Пусть ξ — случайная величина со значениями в пространстве $B(H)$, множество значений которой ограничено по норме пространства $B(H)$, и $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, — соответствующая случайная полугруппа. Тогда для последовательности $\{\mathbf{U}_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{T>0} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ \ldots \circ U_n(\frac{t}{n}))\|_{B(H)}] = 0. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть ξ — случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве H и пусть $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, — соответствующая случайная полугруппа. Пусть существует такое плотное в пространстве H подпространство $\mathcal{D}$, что для любого $u \in \mathcal{D}$ выполнено условие $\int_\Omega \|\xi(\omega)u\|_H d\mu(\omega) < \infty$. Тогда если определенный на пространстве $\mathcal{D}$ равенством $\bar{\xi}u = \int_\Omega \xi(\omega)u d\mu(\omega)$ оператор $\bar{\xi}$ существенно самосопряжен, то для последовательности $\{\mathbf{U}^n\}$ композиций независимых случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{t\in[0,T]} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ \ldots \circ U_n(\frac{t}{n}))x\|_H] = 0\ \forall\ T > 0,\ \forall\ x \in H. \tag{4}$$

Замечание 1. Из условия (3) в силу леммы 2 следует справедливость закона больших чисел по норме (1), а из условия (4) — в сильной операторной топологии (2). Существуют случайные самосопряженные операторы ξ, удовлетворяющие условиям теоремы 3, для которых условие не выполняется закон больших чисел по норме. Таков, например, случайный самосопряженный оператор, принимающий с равной $1/2$ два значения: $\mathbf{A}$ и $-\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — самосопряженный оператор со спектром $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{N}$, состоящим из однократных собственных значений. В работе [2] приведены примеры случайных полугрупп, для которых закон больших чисел не выполнен и в сильной операторной топологии.

Список литературы

1. *Богачев В.И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: РХД, 2003. Т. 1.
2. *Сакбаев В.Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп // Тр. МФТИ. 2016. Т. 8, № 1. С. 140–152.

Топологическая классификации диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными множествами (Topological classification of surface diffeomorphisms with one-dimensional invariant sets)*

А. Н. Сахаров (A. N. Sakharov)

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород, Россия.

ansakharov2008@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается задача топологической классификации диффеоморфизмов поверхностей, неблуждающее множество которых содержится в инвариантном объединении конечного числа непересекающихся замкнутых кривых. Более точно, пусть G — класс

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03687-а).

диффеоморфизмов замкнутых поверхностей таких, что для каждого $f \in G$ выполняются следующие условия

1) неблуждающее множество $NW(f)$ содержится в f-инвариантном многообразии K, представляющем собой дизъюнктное объединение конечного числа простых замкнутых кривых;
2) K — нормально гиперболическое инвариантное многообразие диффеоморфизма f.
3) сужение некоторой степени диффеоморфизма f на любую кривую из K является транзитивным гомеоморфизмом окружности с одним и тем же иррациональным числом вращения.

Решение задачи классификации основано на методах работы [1], посвященной решению аналогичной задачи для А-диффеоморфизмов 3-многообразий с двумерными базисными множествами. При этом удается показать, что классификация диффеоморфизмов из класса G сводится к классификации транзитивных диффеоморфизмов окружности.

Напомним, классификацию гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения. Пусть $\chi\colon S^1 \to S^1$ — диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения α. Согласно теореме А. Пуанкаре существует непрерывное отображение $p\colon S^1 \to S^1$, переводящее χ в поворот на угол α. Пусть $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм из класса G на замкнутой поверхности M. Существование такого диффеоморфизма позволяет уточнить топологию многообразия M. Обозначим через $\mathcal{A}_f$ ($\mathcal{R}_f$) множества всех аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма f.

Предложение 1. *Для любого $f \in G$ верно следующее:*

- *множества $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{R}_f$ не пусты и состоят из одинакового числа попарно непересекающихся негомотопных нулю простых замкнутых кривых;*
- *$K = \mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$;*
- *замыкание каждой компоненты связности множества $V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f)$ гомеоморфно $S^1 \times [0,1]$ и состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора $\mathcal{A}_f$ и одной периодической компоненты репеллера $\mathcal{R}_f$.*

В силу этого утверждения многообразие M гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $S^1 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где $\tau\colon S^1 \to S^1$ — некоторый гомеоморфизм.

Лемма 1. *Фактор-пространство M_τ гомеоморфно $\mathbb{T}^2$, если гомеоморфизм τ сохраняет ориентацию; бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$, если τ меняет ориентацию.*

В итоге получаем следующую теорему, описывающую топологию несущего многообразия диффеоморфизма $f \in G$.

Теорема 1. *Пусть многообразие M допускает диффеоморфизм из класса G. Тогда M гомеоморфно многообразию M_τ.*

Построим модельные диффеоморфизмы из класса G на торе и бутылке Клейна. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока, порождаемого уравнением $\dot{r} = \sin 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$, для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ и является числом, взаимно простым с k. Обозначим через $\eta_{k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\eta_{k,l}(r) = r - l/k$, $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\eta(r) = -r$. Положим $\psi^+_{n,k,l} = \psi_{n,k} \circ \eta_{k,l}$, $\psi^-_n = \psi_n \circ \eta$.

Обозначим через $\psi^+_{\alpha,n,k,l}\colon S^1 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\psi^+_{\alpha,n,k,l}(z, r) = (e^{2\pi\alpha} z, \psi^+_{n,k,l})$, через $\psi^-_{\alpha,n}\colon S^1 \times \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\psi^-_{\alpha,n}(z, r) = (e^{2\pi\alpha} z, \psi^-_n)$. Напомним, что здесь α — иррациональное число. Обозначим множество диффеоморфизмов указанного вида через Ψ.

Будем рассматривать M_τ как фактор-пространство $(S^1 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ — группа степеней диффеоморфизма $\gamma\colon (S^1 \times \mathbb{R}) \to (S^1 \times \mathbb{R})$, $\gamma(z, r) = (\tau(z), r - 1)$, а $\tau\colon S^1 \to S^1$ — некоторый гомеоморфизм. Пусть $p_\tau\colon S^1 \times \mathbb{R} \to M_\tau$ — естественная проекция. Если $\psi \in \Psi$, тогда равенство $\psi \circ \gamma = \gamma \circ \psi$ является необходимым и достаточным условием проекции диффеоморфизма ψ на диффеоморфизм $\varphi\colon M_\tau \to M_\tau$, где $\varphi = p_\tau \circ \psi \circ p_\tau^{-1}$. Из этого условия следует, что гомеоморфизм τ может быть либо тождественным, либо инволюцией, либо поворотом[1].

Будем обозначать через Φ построенное таким образом множество модельных диффеоморфизмов $\varphi\colon M_\tau \to M_\tau$. Каждый диффеоморфизм из класса Φ характеризуется набором параметров (τ, α, n, k, l) (множество таких модельных диффеоморфизмов будем обозначать через Φ^+), либо набором (τ, α, n) (множество таких диффеоморфизмов обозначим через Φ^-).

[1] Действительно, представив τ с помощью угловой функции, то есть $\tau(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+h(t))}$, получаем уравнение $h(t+\alpha) - h(t) = 0$, которое имеет бесконечное множество решений $h(t) = \mathrm{const}$.

Следующий результат дает топологическую классификацию модельных диффеоморфизмов.

Теорема 2. *Два диффеоморфизма* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^+$ *с наборами параметров* $(\tau_1, \alpha_1, n_1, k_1, l_1)$ *и* $(\tau_2, \alpha_2, n_2, k_2, l_2)$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $n_1 = n_2$, $k_1 = k_2$, *причем если сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию, то* $l_1 = l_2$, *если меняет, то* $-l_1 = k_2 - l_2$, $-l_2 = k_1 - l_1$.

Два диффеоморфизма $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^-$ *с наборами параметров* (τ_1, α_1, n_1) *и* (τ_2, α_2, n_2) *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $n_1 = n_2$, $k_1 = k_2$, *причем если сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию, то* $l_1 = l_2$, *если меняет, то* $-l_1 = k_2 - l_2$, $-l_2 = k_1 - l_1$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 3. *Каждый диффеоморфизм из класса* G *топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму из класса* Φ.

Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи.

Список литературы

1. *Гринес В.З., Левченко Ю.А., Починка О.В.* О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, №1. С. 17–33.

Грубая энтропия в задаче о распределении космических пылевых частиц (The coarse-grained entropy in the problem of the distribution of dust cosmic particles)*

Т. В. Сальникова (T. V. Salnikova), С. Я. Степанов (S. Ya. Stepanov), А. И. Шувалова (A. I. Shuvalova)

МГУ им. М.В. Ломоносова, РУДН, Москва, Россия
ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

tatiana.salnikova@gmail.com, stepsj@ya.ru, a.shuvalova@yahoo.com

Рассматривается задача о движении Частицы в гравитационном поле Солнца, Земли и Луны. В рамках подвижной системы координат, связанной с Землей и Луной исследуется плоская бициркулярная ограниченная задача четырех тел Солнце–Земля–Луна–Частица. В окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна существуют устойчивые периодические движения [1]. Наличие периодических траекторий объясняет непостоянство наблюдения облаков Кордылевского — гипотетических скоплений космической пыли в окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна [2, 3]. Предлагаемое исследование базируется на анализе эволюции функции распределения частиц в фазовом пространстве в окрестности периодического движения [4].

Постановка задачи. Мы исследуем плоскую бициркулярную задачу четырех тел на примере движения Частицы в гравитационном поле Земли (E), Луны (M) и Солнца (S). Земля и Луна движутся вокруг их общего центра масс O с постоянной угловой скоростью ω_1. В качестве единиц массы, длины и времени выберем суммарную массу Земли и Луны, $|EM| = 1$, $\omega_1^{-1} = 1$. Барицентр O движется по круговой орбите с центром S и радиусом $R = 389.18$, с постоянной угловой скоростью $\omega = 1/13.36$. Движение Частицы рассматриваем во вращающейся си-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-03747 и 16-01-00625).

стеме координат с центром в точке O, ось Ox направлена от Земли к Луне. Период обращения рассматриваемой системы равняется одному синодическому месяцу (29дней 12часов 44минут).

За начальное время $t = 0$ мы возьмем момент полнолуния, то есть момент, когда Солнце, Земля и Луна находятся на одной прямой. Тогда уравнения движения Частицы в форме Лагранжа имеют вид:

$$\dot{x} = u, \qquad \dot{y} = v,$$

$$\dot{u} = 2v + (1-\omega^2)x + 3\omega^2 \cos p(x\cos p - y\sin p) - (1-\mu)(x+\mu)r^{-3} +$$
$$+\mu(1-\mu-x)l^{-3},$$

$$\dot{v} = -2u + (1-\omega^2)y - 3\omega^2 \sin p(x\cos p - y\sin p) - (1-\mu)yr^{-3} - \mu y l^{-3},$$

где $\mu = 0.0122$ — масса Луны, $p = (1-\omega)t$ — угол между $\overrightarrow{SO}$ и $\overrightarrow{EM}$, $r = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ и $l = \sqrt{(1-x-\mu)^2+y^2}$ — расстояния от частицы до Земли и Луны соответственно. Представленный вид уравнения движения имеют, когда отбрасываются слагаемые лагранжиана порядка $1/R$. Описанная задача имеет периодические решения [3]. Будем рассматривать устойчивое в линейном периодическое решение с периодом $T = 2\pi/(1-\omega)$, охватывающее точку либрации L_4 системы Земля–Луна, с началом в точке A (0.7274, 0.815, 0.0742, −0.2113).

Численное моделирование функции распределения. Рассмотрим ансамбль частиц одинаковой массы. Если между частицами отсутствует взаимодействие, то ансамбль статистически эквивалентен тестовой частице P(x,y,u,v) с функцией распределения $\rho(x, y, u, v, t)$, описываемой уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \dot{u}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

Это однородное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Его решение постоянно вдоль характеристик, уравнения которых совпадают с уравнениями движения частицы.

Рассмотрим прямоугольную область фазового пространства:

$$[x_0 - 0.5w_x; x_0 + 0.5w_x] \times \ldots \times [v_0 - 0.5w_v; v_0 + 0.5w_v],$$

где w_x, w_y, w_u, w_v — длины сторон прямоугольного четырехмерного параллелепипеда, ограничивающего область фазового пространства с центром в точке (x_0, y_0, u_0, v_0). Разобьем область равномерной по каждой координате сеткой.

Численное моделирование функции распределения $\rho(x, y, u, v, t)$ частиц в фазовом пространстве основано на интегрировании уравнений движения Частицы для всех узлов сетки назад по времени до определенного момента, где задано начальное распределение $\rho_0(x, y, u, v)$. При этом функция распределения будет постоянна вдоль траектории в фазовом пространстве, следовательно на начальном и конечном отрезке одной траектории в фазовом пространстве будет сохраняться значение функции распределения. Таким образом получим значения функции распределения для всех узлов сетки в рассматриваемой области фазового пространства.

В качестве точки $(x_0,\ y_0\ , u_0,\ v_0)$ последовательно берутся точки A, B, P принадлежащие периодической траектории, соответствующие моментам времени $t = 0$, $t = T/2$, $t = 0.3024T$ (P — точка периодической траектории, находящаяся на линии визирования с Земли точки либрации L_4).

Начальное распределение задается в виде

$$\rho_0(x, y, u, v) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi^2} exp(-\sigma_1((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)-\sigma_2((u-u_1)^2+(v-v_1)^2)),$$

где σ_1, σ_2 — параметры модели, $(x_1, y_1, u_1, v_1) = A$.

Грубая энтропия. Полученная в узлах сетки функция распределения позволяет вычислить грубую энтропию, которая является функционалом, обобщающим обычную энтропию Гиббса [5, 6]. Функция распределения в узлах рассматривается как грубая плотность. Грубая энтропия вычисляется по формуле

$$\overline{s}(t) = -\sum_{a,b,c,d} d\mu\rho(x_a, y_b, u_c, v_d, t) \ln \rho(x_a, y_b, u_c, v_d, t),$$

где $d\mu$ — мера элемента фазового пространства,

$$d\mu = \frac{w_x w_y w_u w_v}{(N_k-1)(N_l-1)(N_n-1)(N_m-1)},$$

N_k, N_l, N_m, N_n — количество узлов сетки по x, y, u, v соответственно.

Полученная грубая энтропия имеет тенденцию к возрастанию со временем до некоторого предельного значения для каждого рассмотренного участка фазового пространства, но не является монотонной.

Список литературы

1. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
2. *Kordylewski K.* Photographische Untersuchungen des Librationspunktes L5 im System Erde-Mond // Acta Astron. 1961. V. 11, N 3. P. 165–169.
3. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я.* Математическая модель образования космических пылевых облаков Кордылевского // ДАН. 2015. Т. 463, №2. С. 164-167.
4. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я., Шувалова А.И.* Вероятностная модель облаков Кордылевского // ДАН. 2016. Т. 468, №3. С. 276–279.
5. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Тонкая и грубая энтропия в задачах статистической механики // ТМФ. 2007. Т. 151, №1. С. 120–137.
6. *Козлов В.В.* Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. М.; Ижевск: НИЦ "РХД", 2008.

Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении многомерной сферы (Integrable variable dissipation systems on tangent bundle of multi-dimensional sphere)*

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем с диссипацией на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле класси-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00848-а).

фикации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n-3$:

$$\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \big[\dot{\eta_1}^2 + \dot{\eta_2}^2\sin^2\eta_1 +$$

$$+\dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,$$

$$\ddot{\eta_1} + b_*\dot{\eta_1}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_1}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \big[\dot{\eta_2}^2 + \dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_2 +$$

$$+\dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,$$

$$\ddot{\eta_2} + b_*\dot{\eta_2}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta_1}\dot{\eta_2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \big[\dot{\eta_3}^2 + \dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_3 +$$

$$+\dot{\eta_5}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \quad (1)$$

....

$$\ddot{\eta}_{n-3} + b_*\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+ \ldots + 2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0,$$

$$\ddot{\eta}_{n-2} + b_* \dot{\eta}_{n-2} \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2} \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi \sin\xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_{n-2} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+ \ldots + 2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0,$$

$b_* > 0$, описывающую закрепленный n-мерный маятник в неконсервативном поле сил. Переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\} \tag{2}$$

к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\colon\ 0 \le \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \le \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}.$$

Рассматриваемая система (1) является динамической системой с переменной диссипацией [1–3] на касательном расслоении (2).

Теорема. *Система (1) на касательном расслоении (2) обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда рассматриваемые функции (первые интегралы) имеют существенно особые точки, соответствующие притягивающим или отталкивающим предельным множествам в фазовом пространстве системы.

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после некоторой замены переменных система (1) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_{n-1} - b_*\sin\xi,\ w'_{n-1} = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\\ &\eta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}),\ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}). \tag{5}$$

Видно, что в системе (3)–(5) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3), $n-3$ независимых систем второго порядка (4) (после замены независимой переменной), а также уравнение (5) на η_{n-2} отделяется. Для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для систем (4) (всего $n-3$ штук) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5) (*т.е. всего* n).

Один из первых интегралов системы (3) следующий:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1} \sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

а дополнительный первый интеграл системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5).

Действительно, искомые интегралы будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const},\ s = 1, \ldots, n-3, \tag{8}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) =$$

$$= \eta_{n-2} \pm \mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \mathrm{const}, \tag{9}$$

при этом в левую часть равенства (9) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить первые интегралы (8) при $s = n-4, n-3$.

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16, №4. С. 3–229.

3. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 4–254.

Iterated monodromy groups and invariant trees

Anastasia Shepelevtseva

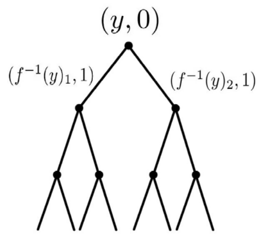
Higher School of Economics, Moscow, Russia

asyashep@gmail.com

Definition of the iterated monodromy group.

Definition 1. A post-critically finite orientation preserving branched covering f with $deg(f) \geq 2$ is called *Thurston map*.

We can relate to it a special group which acts on some rooted tree. This rooted tree is a tree of preimages. The point $(y, 0)$ is the root (the second number means the level) and is connected with its preimages $(f^{-1}(y)_1, 1)$ and $(f^{-1}(y)_2, 1)$ by two edges. As we have branched coverings of degree 2, there always will be two preimages. Thus the root will be connected by concatenations of edges with all its preimages of any order.



To describe the group, we label all the vertices by finite words in the alphabet $\{0, 1\}$. The vertex $(y, 0)$ is labeled by empty word, the vertices $(f^{-1}(y)_1, 1)$ and $(f^{-1}(y)_2, 1)$ are labelled by 0 and 1 respectively. Let the path from y to $f^{-1}(y)_1$ be l_0 and the path from y to $f^{-1}(y)_2$ be l_1. At the next steps we can consider the lift of the paths l_0 and l_1 originating at $f^{-1}(y)_1$, $f^{-1}(y)_2$. We will add at the end of the word the element 0 if we take the lift of l_0, and 1 otherwise.

Computation of iterated monodromy group gives us an ability to describe the action of any element of the fundamental group of $S^2 - P$, where P is postcritical set of our branched covering, on any word from alphabet $\{0, 1\}$.

Let the $\mathfrak{M}$ be a set of homotopy classes of paths starting in y and terminating in preimage $f^{-n}(y)$ of order n of y (one of the vertexes of the tree of preimages). There is a structure of *bimodule*, defined for the $\mathfrak{M}$ on the fundamental group $\pi_1(S^2-P)$. That means that both right and left actions of the $\pi_1(S^2-P)$ are defined on $\mathfrak{M}$. Left action is just a simple composition of $\gamma \in \pi_1(S^2 - P)$ and $\alpha \in \mathfrak{M}$:

$$\gamma.\alpha = \gamma\alpha$$

It is well defined when we choose the basepoint as y so the loop γ has the same end with the path α.

In the case of the right action we take the path α first, so it finishes in $f^{-n}(y)$. To define composition correctly we take the preimage of γ under the covering starting in $f^{-n}(y)$. So:

$$\alpha.\gamma = \alpha f^{-n}(\gamma)$$

In this case in terms of binary words these actions are equal.

The group of automorphisms of a tree acting on the right as described above is called *the iterated monodromy group (IMG)*.

For the description of the iterated monodromy group for any generator $\gamma \in \pi_1(S^2 - P)$ we should find elements $\gamma_i \in \pi_1(S^2 - P)$ and symbols $u_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{0, 1\}$ such that $0.\gamma = \gamma_0 u_o$ and $1.\gamma = \gamma_1 u_1$.

Definition 2. The map F acting on the fundamental group of the sphere without the postcritical set $F\colon \pi_1(S^2 - P(f)) \to \pi_1(S^2 - P(f))$ is defined by the following property: $\alpha.\gamma = F(\gamma)\tilde{\alpha}$.

Getting the IMG by invariant tree. Assume that we have a post-critically finite branched covering f with post-critical set $P(F)$. Let it have an invariant tree Γ with vertices set V such that $P(f) \subset V$. Let us choose some point a that does not belong to the tree as a basepoint. We will call the loops starting at the basepoint and crossing Γ only once at the edge *the legitimate loop.*

Theorem. *Homotopy classes of the legitimate loops and the trivial loop form a closed set under the action of F.*

References

1. *Nekrashevych V.* Self-similar groups.

Lyapunov unstable global attractors

Ivan Shilin

Independent University of Moscow, Moscow, Russia

i.s.shilin@yandex.ru

A global attractor is a set that attracts most points of the phase space. One of the definitions of a global attractor was presented by J. Milnor in [1]: *the likely limit set* is the smallest closed subset of the phase space that contains the ω-limit set for Lebesgue-a.e. point. This definition will be our primary example; however, the list of other, nonequivalent definitions includes *minimal* and *statistical* attractors and *the generic limit set*. The results below apply to any definition of global attractor provided that the attractor thus defined

- exists and is unique for any mapping in the class under consideration (say, for any diffeomorphism of a given smooth closed manifold),
- is contained in the nonwandering set,
- is closed,
- contains every hyperbolic sink.

Assume from now on that such a definition of global attractor is fixed.

Recall that a subset of the phase space is called *Lyapunov stable* if for any its neighborhood there is a smaller neighborhood such that the orbits which start at the latter never quit the first one. This is a nice property which topological attractors, such as sinks, have. Yet it is easy to give an example of a diffeomorphism whose global attractor is Lyapunov unstable: consider a diffeomorphism of a circle with a single semi-stable fixed point.

It turns out that the Lyapunov instability of global attractors is a locally topologically generic phenomenon closely related to *the Newhouse phenomenon*, i.e., to existence of open subsets in the space of diffeomorphisms where the maps exhibiting a homoclinic tangency associated with a continuation of a single hyperbolic saddle are dense and where coexistence of infinitely many sinks is generic.

Theorem. *Suppose that in an open set of diffeomorphisms there is a persistent homoclinic tangency associated with a sectionally dissipative periodic saddle. Then for a topologically generic diffeomorphism in this set the global attractor is Lyapunov unstable.*

The argument that proves this result can be applied with minor modifications to the case of P. Berger's locally topologically generic finite-parameter families of diffeomorphisms with robustly infinitely many sinks (see [2]). This yields the following result.

Theorem. *There exist locally topologically generic finite-parameter families of diffeomorphisms where the unit ball in the parameter space corresponds to diffeomorphisms with Lyapunov unstable global attractors.*

For any C^2-smooth diffeomorphism, as well as for a C^1-generic one, if this diffeomorphism satisfies axiom A, its likely limit set is Lyapunov stable (same for the minimal and statistical attractors and the generic limit set). When hyperbolicity is violated strongly enough, we have the contrary, as the following result shows.

Theorem. *If a topologically generic C^1-diffeomorphism of a closed manifold has a homoclinic class that does not admit a dominated splitting, the global attractor is unstable for this diffeomorphism or for its inverse.*

References

1. *Milnor J.* On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 177–195.
2. *Berger P.* Generic family with robustly infinitely many sinks // Invent. Math. 2016. V. 205, N 1. P. 121–172; arXiv: 1411.6441.
3. *Shilin I.* Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors: E-print. arXiv: 1604.02437.

Discrete complex analysis: convergence results*

Mikhail Skopenkov

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia,
Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia

skopenkov@rambler.ru

Various discretizations of complex analysis have been actively studied since 1920s because of applications to numerical analysis, statistical physics, and integrable systems. This talk concerns complex analysis on quadrilateral lattices tracing back to the works of J. Ferrand, R. Isaacs, R. Duffin.

We solve a problem of S.K. Smirnov from 2010 on the convergence of discrete harmonic functions on planar nonrhombic lattices to their continuous counterparts under lattice refinement. This generalizes the results of R. Courant–K. Friedrichs–H. Lewy, L. Lusternik, D.S. Chelkak–S.K. Smirnov, P.G. Ciarlet–P.-A. Raviart.

We also prove convergence of discrete period matrices and discrete Abelian integrals to their continuous counterparts (this is a joint work with A.I. Bobenko). The proofs are based on energy estimates inspired by electrical network theory.

References

1. *Bobenko A., Skopenkov M.* Discrete Riemann surfaces: linear discretization and its convergence // J. Reine Angew. Math. To Appear; arXiv: 1210.0561.
2. *Chelkak D., Smirnov S.* Discrete complex analysis on isoradial graphs // Adv. Math. 2011. V. 228. P. 1590–1630; arXiv: 0810.2188v2.
3. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 32–74. Engl. transl.: IBM J. 1967. P. 215–234. Russ. transl.: Russ. Math. Surv. 1941. V. 8. P. 125–160. http://www.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf
4. *Ferrand J.* Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes // Bull. Sci. Math. 1944. V. 68. P. 152–180.

*Supported in part by the President of the Russian Federation grant MK-6137.2016.1.

Бифуркация удвоения ведущих элементов R-метода Гаусса на подпоследовательности, порожденной процедурой Сильвестра (Doubling bifurcation of the leading elements of the Gauss R-method on a subsequence generated by the Sylvester procedure)

П. Н. Сорокин (P. N. Sorokin),
Н. Н. Ченцова (N. N. Chentsova)

ФГУ ФНЦ НИИ системных исследований РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

s_p_n_1974@bk.ru, nataly.chentsova@gmail.com

Определение 1. Пусть заданы $k \in \mathbb{N}^+$, квадратная матрица $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ порядка k с матричными элементами $(A^{(k)})_{i,j} \in \mathbb{R}$ с индексами $i,j = \overline{1,k}$, вектора-столбцы $x^{(k)}, b^{(k)}, p^{(k)} \in \mathbb{R}^k$ с координатами $(x^{(k)})_i, (b^{(k)})_i, (p^{(k)})_i \in \mathbb{R}$ и с индексами $i = \overline{1,k}$. R-методом Гаусса поиска решения $x^{(k)}$ системы линейных уравнений с матрицей $A^{(k)}$ и с правой частью $b^{(k)}$:

$$\sum_{1\le j\le k} (A^{(k)})_{i,j} \cdot (x^{(k)})_j = (b^{(k)})_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1}$$

называется такая модификация метода Гаусса, когда при $n = \overline{1,k}$ за $\ell_n^{(k)}$ — ведущий элемент n-го шага — выбирается матричный элемент $(A_{n-1}^{(k)})_{i_n^{(k)},j_n^{(k)}}$ матрицы $A_{n-1}^{(k)}$ с максимальным значением модуля и минимальной в лексикографическом порядке парой индексов:

$$(i_n^{(k)}, j_n^{(k)}) = \min\{(i_1,j_1)\colon n \le i_1, j_1 \le k, |(A_{n-1}^{(k)})_{i_1,j_1}| = \max_{n\le i,j\le k} |(A_{n-1}^{(k)})_{i,j}|\}, \tag{2}$$

$$\ell_n^{(k)} = (A_{n-1}^{(k)})_{i_n^{(k)},j_n^{(k)}}. \tag{3}$$

Если при $1 \le n \le k$ оказалось, что $\ell_n^{(k)} = 0$, то алгоритм заканчивает работу, напечатав: “Матрица $A^{(k)}$ линейной системы (1) вырождена”.

Пусть ведущий элемент n-го шага отличен от нуля:

$$\ell_n^{(k)} \ne 0, \quad 1 \le n \le k. \tag{4}$$

Далее вычисляются матрица $A_n^{(k)}$ и вектора-столбцы $b_n^{(k)}$, $p^{(k)}$ по следующей схеме:

Если $n = 0$, то выполняются начальные присвоения:

$$(p^{(k)})_i = i, \quad (b_0^{(k)})_i = (b^{(k)})_i, \quad 1 \le i \le k, \tag{5}$$

$$(A_0^{(k)})_{i,j} = (A^{(k)})_{i,j}, \quad 1 \le i, j \le k, \tag{6}$$

где $A^{(k)}$ — исходная матрица, а $b^{(k)}$ — правая часть системы (1).

Если $1 \le n \le k - 1$, то выполняются присвоения:

$$(b_n^{(k)})_i = (b_{n-1}^{(k)})_i, \quad 1 \le i \le k, \tag{7}$$

$$(A_n^{(k)})_{i,j} = (A_{n-1}^{(k)})_{i,j}, \quad 1 \le i, j \le k. \tag{8}$$

Далее, если оказалось, что

$$i_n^{(k)} \ne n, \tag{9}$$

то переставляются $i_n^{(k)}$-я и n-я строки матрицы $A_n^{(k)}$, а также $i_n^{(k)}$-е и n-е координаты вектора $b_n^{(k)}$.

Далее, если оказалось, что

$$j_n^{(k)} \ne n, \tag{10}$$

то переставляются $j_n^{(k)}$-й и n-й столбцы матрицы $A_n^{(k)}$, и определяется

$$(p^{(k)})_{j_n^{(k)}} = n, \quad (p^{(k)})_n = j_n^{(k)}. \tag{11}$$

Затем при каждом $i = \overline{n+1, k}$ к i-й строке матрицы $A_n^{(k)}$ прибавляется n-я строка матрицы $A_n^{(k)}$, умноженная на число:

$$(g_n^{(k)})_{i,\,n} = -(A_n^{(k)})_{i,n}/\ell_n^{(k)}, \quad n+1 \le i \le k, \tag{12}$$

$$(A_n^{(k)})_{i,j} = (A_n^{(k)})_{i,j} + (g_n^{(k)})_{i,\,n} \cdot (A_n^{(k)})_{n,j}, \quad n+1 \le i \le k, \quad 1 \le j \le k, \tag{13}$$

а i-я координата вектор-столбца $b_n^{(k)}$ изменяется аналогично:

$$(b_n^{(k)})_i = (b_n^{(k)})_i + (g_n^{(k)})_{i,\,n} \cdot (b_n^{(k)})_n. \tag{14}$$

Формулой (14) завершается n-й шаг при $1 \le n \le k - 1$.

Если $k \le n \le 2 \cdot k - 1$, то сначала выполняются присвоения (7), (8).

Затем при каждом $i = \overline{1, 2 \cdot k - n - 1}$ к i-й строке матрицы $A_n^{(k)}$ прибавляется n-я строка матрицы $A_n^{(k)}$, умноженная на число:

$$g_{i,2\cdot k-n} = -(A_n^{(k)})_{i,2\cdot k-n}/\ell_{2\cdot k-n}^{(k)}. \tag{15}$$

Затем вычисляются

$$(x^{(k)})_{(p^{(k)})_{2\cdot k-n}} = (b_{n-1}^{(k)})_{2\cdot k-n}/\ell_{2\cdot k-n}^{(k)}. \tag{16}$$

Формулой (16) завершается n-й шаг при $k \le n \le 2 \cdot k - 1$.

После $(2 \cdot k - 1)$-го шага алгоритм R-метода Гаусса заканчивается.

Определение 2. Пусть $p \in N^+$, $k = 2^p$. Следуя [6], будем говорить, что подпоследовательность матриц $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ порождена процедурой Сильвестра, если

$$A^{(1)} = 1, \quad A^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A^{(k)} & A^{(k)} \\ A^{(k)} & -A^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Замечание. Пусть $p \in \mathbb{N}^+, k = 2^p$ и матрицы $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ принадлежат подпоследовательности, порожденной процедурой Сильвестра. Тогда

$$(A^{(k)})_{i,j} \in \{-1, 1\}, \quad 1 \le i, j \le k, \quad |\det A^{(k)}| = k^{k/2}. \tag{18}$$

Теорема. *Пусть $p \in \mathbb{N}^+$, $k = 2^p$ и подпоследовательность матриц $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ порождена процедурой Сильвестра. Тогда R-метод Гаусса, примененный к матрице $A^{(k)}$ совпадает с методом Гаусса, так как перестановок строк и столбцов нет. Пусть $A_{k-1}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ получена из матрицы $A^{(k)}$ после выполнения $k-1$ шагов R-метода Гаусса. Пусть матрица $A_k^{(2\cdot k)} \in \mathbb{R}^{2\cdot k\times 2\cdot k}$ получена из матрицы $A^{(2\cdot k)}$ после выполнения k шагов R-метода Гаусса, а матрица $A_{2\cdot k-1}^{(2\cdot k)} \in \mathbb{R}^{2\cdot k\times 2\cdot k}$ — после $2\cdot k-1$ шагов. Тогда*

$$A_k^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{(k)} & A_{k-1}^{(k)} \\ Z^{(k)} & -2 \cdot A^{(k)} \end{pmatrix}, \quad A_{2\cdot k-1}^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{(k)} & A_{k-1}^{(k)} \\ Z^{(k)} & -2 \cdot A_{k-1}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где матрица $Z^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ состоит из одних нулей.

Ведущие элементы $\ell_n^{(2\cdot k)} = \ell_n^{(k)}$ при $1 \le n \le k$, а при $k < n \le 2 \cdot k$ происходит бифуркация удвоения, то есть: $\ell_n^{(2\cdot k)} = -2 \cdot \ell_{n-k}^{(k)}$.

При всех $k \in \mathbb{N}^+$ ведущие элементы $\ell_n^{(k)}$ удовлетворяют неравенству

$$|\ell_n^{(k)}| \le n, \quad 1 \le n \le k. \tag{20}$$

Замечание. Метод, названный нами R-методом Гаусса (см., например, [1]), хорошо известен и используется при расчетах на ЭВМ, но общепринятого названия не имеет. Например, в [2–4] он называется методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, а в [5] — методом Гаусса с полным перебором. Вопрос о скорости роста ведущих элементов остается открытым. Нами найдена верхняя оценка роста для матриц, порожденных процедурой Сильвестра при всех $k = 2^p$. Эта оценка (20) достигается при всех $n = 2^s \leq k = 2^p$. В монографиях [4, 5] приведены ссылки на статьи с некоторыми оценками. Мы надеемся, что наша оценка универсальна в смысле [7].

Список литературы

1. *Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н.* Предельные теоремы для R-метода Гаусса // Материалы 12-й международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”. Тула: Изд-во ТПГУ им. Л.Н. Толстого, 2014. С. 210–214.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во мехмата МГУ, 1999.
4. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
6. *Таранников Ю.В.* Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптографии. М.: МЦНМО, 2011.
7. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.

Оценки возмущения резольвент краевых задач на многообразии (Estimates of resolvent perturbation of boundary value problems on a manifold)

А. М. Степин (A. M. Stepin), И. В. Цылин (I. V. Tsylin)

Московский государственный университет, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ststepin@mail.ru, ioxlxoi@yandex.ru

Пусть M — гладкое связное многообразие с римановой метрикой g, эллиптический оператор $\mathcal{A}$ строится по полуторалинейной форме Φ, положительной и непрерывной в $H_0^1(\Omega)$. Сама форма Φ порождается дифференциальным выражением

$$\nabla^* \left(A\nabla u + au\right) + b\nabla u + cu, \tag{1}$$

где тензорное поле A предполагается эрмитовым и положительно определенным, $A \in L_\infty(M)2$, $a, b \in M(H^1(M) \to L_2(M))$, $c \in M(H^1(M) \to$ $\to H^{-1}(M))$. Для области $\Omega \subset M$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\mathcal{A}u = f \in H^{-1}(\Omega), \qquad u \in \mathring{H}^1(\Omega) \tag{2}$$

Введем оператор, решающий задачу (2)

$$\mathcal{G}_\Omega \colon H^{-1}(M) \to \mathring{H}^1(M).$$

Нас будет интересовать следующий вопрос. Пусть Ω_1 — некоторая фиксированная область и Ω_2 область близкая к Ω_1 (возмущение). Насколько будут близки резольвенты

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varphi(\varepsilon), \tag{3}$$

где ε — величина расстояния (в том или ином смысле) между Ω_1 и Ω_2, X, Y — фиксированные банаховы пространства и функция φ зависит только от коэффициентов оператора $\mathcal{A}$ и от ε, но не от области Ω_2. Оценка (3) была представлена для произвольного возмущения области Ω_1 с границей C-класса в работе [1]. Однако, в свете работы [4] стало ясно, что при произвольных возмущениях мы теряем часть информации. Более того, изотропные пространства Соболева оказались менее полезными чем их анизотропные обобщения. Цель данного стендового доклада продемонстрировать часть результатов, полученных авторами за последние два года в этом направлении.

Определение 1 (расстояние типа Хаусдорфа)**.** Введем измеритель расстояния между множествами следующим образом, пусть X, Y — некоторые подмножества метрического компакта M, тогда

$$e(X,Y) = \sup_{x\in X} d(x,Y).$$

Определение 2. Для данного атласа $\mathcal{U}$ многообразия (M,g) скажем, что область $\Omega \subset M$ имеет границу класса $C^{0,\omega}_{\mathcal{U}}$ с нормой N, $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности, если для любого элемента $(U,\kappa_U) \in \mathcal{U}$ множество $\kappa_U\,(U \cap \partial\Omega)$ представимо в виде графика некоторой функции $h \in C^{0,\omega}(\tilde{U})$ и $\max_{\mathcal{U}} \|h\|_{C^{0,\omega}(U)} \leq N$.

Будем писать $\partial\Omega \in C^{0,\omega}$, если существует такой атлас $\mathcal{U}$, что $\partial\Omega \in \in C^{0,\omega}_{\mathcal{U}}$.

Пусть $F(L)$ — банахово пространство функций с носителями из (необязательно компактного) многообразия L, тогда $\tilde{F}(\Omega)$ состоит из всех функций $f \in F(L)$, таких, что $\operatorname{supp} f \subset \bar{\Omega}$. В свою очередь, замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ будем обозначать через $\mathring{F}(\Omega)$. Скажем, что функция $u \in W_p^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству Никольского $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, где s есть вектор размерности d, состоящий из модулей непрерывности, если конечна полунорма

$$\|u\|_{N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=\overline{1,\dots d}} \sup_{h\neq 0} \frac{\|\Delta^2_{he_k} u\|_{W_2^m(\mathbb{R}^d)}}{s_k(|h|)},$$

$$\Delta_h^2 u = \Delta_h(\Delta_h u), \qquad \Delta_h u = u_h - u, \qquad u_h(x) = u(x+h).$$

Пространства Бесова отрицательной гладкости введем как

$$\left(B^{-k,\overline{s}}_{2,1}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\mathring{N}_{k-1,\frac{|\cdot|}{\overline{s}}}2\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^\star, \qquad \frac{|\cdot|}{\overline{s}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{|\cdot|}{s_1(\cdot)},\dots,\frac{|\cdot|}{s_d(\cdot)}\right);$$

если s_d — степенные функции и $\partial\Omega \in C^{0,1}$, то это определение эквивалентно классическому (см. [4]). Дополнительно введем вспомогательное пространство $K_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, которое получается из $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$ заменой в определении нормы второй разности на первую, аналогично

$$\left(K^{-k,\overline{s}}_{2,1}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\mathring{\tilde{K}}_2^{k-1,\frac{|\cdot|}{\overline{s}}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^\star.$$

Потребуем выполнения следующих условий:
A1. $A \in C^{0,\overline{\varkappa}}_{\mathcal{V}}(M)$, $\overline{\varkappa} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_d)$, $\varkappa_k$ — модули непрерывности.
A2. $a, b \in M\big(L_2(\Omega) \to \big(K_2^{-1,\overline{\gamma}}\big)_{\mathcal{V}}(\Omega)\big)$, $c \in M\big(\mathring{H}^1(\Omega) \to \big(K_2^{-m+m_2,\overline{\gamma}}\big)_{\mathcal{V}}(\Omega)\big)$.

Введем отношение порядка на модулях непрерывности. Будем писать $\omega_1 \preceq \omega_2$, если существует такая константа C, что $\omega_2(x) \le \mathrm{C}\omega_1(x)$ для любых $x \in [0,1]$, например $h^{\gamma_1} \preceq h^{\gamma_2}$, если $\gamma_1 \le \gamma_2$.

Случай компактного риманова многообразия (M, g)**.** *Произвольные возмущения.*

Теорема 1. *Пусть*
$$\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}, \quad \omega \preceq (\cdot)$$
оператор $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* **A1**, **A2** *для*
$$\varkappa_1 \equiv \cdots \equiv \varkappa_d \equiv \varkappa_0 \preceq (\cdot), \qquad \gamma_1 \equiv \cdots \equiv \gamma_d \equiv \varkappa_0 \preceq (\cdot),$$
тогда для $\overline{s} = (s(\cdot), \ldots s(\cdot))$, $s \preceq \sqrt{\varkappa_0}$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \mathring{H}^1(M))} \le Cs[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))],$$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} \le Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))].$$

Регулярные внешние возмущения при произвольных внутренних. Как подчеркивалось в [2], для стабильности спектра внутренние и внешние возмущения области должны обладать некоторыми свойствами регулярности. Так, например, для стабильности при возмущении области по Хаусдорфу внутренние возмущения могут быть произвольные, а вот внешние накладывают ограничения на предельную область. Подобное условие содержится и в теореме ниже

Теорема 2. *Пусть*
$$\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}_{\mathcal{U}}, \quad \partial\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \in C^{0,\omega(\cdot)}_{\mathcal{U}}, \quad \omega \preceq (\cdot)$$
оператор $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* **A1**, **A2** *для*
$$\varkappa_1 \equiv \cdots \equiv \varkappa_{d-1} \equiv \gamma_1 \equiv \cdots \equiv \gamma_{d-1} \equiv 1, \quad \gamma_d, \varkappa_d \preceq (\cdot),$$
тогда для $\overline{s} = (1, \ldots 1, s(\cdot))$, $s \preceq \sqrt{\varkappa_d} + \gamma_d^c$, $c \in (0,1)$, *выполнено*
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \mathring{H}^1(M))} \le Cs[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))],$$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} \le Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))].$$

Заметим, что в этом утверждении нам удалось усилить операторную норму оценки и в то же время ослабить условия на коэффициенты. Это возможно в силу теоремы из [4].

Случай областей в $\mathbb{R}^d$ с метрикой g. В случае областей в евклидовом пространстве можно ослабить условия на коэффициенты в утверждении 1

Теорема 3. *Пусть*

$$\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}, \quad \omega \preceq (\cdot)$$

оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **A1**, **A2** *для*

$$\varkappa_1 \equiv \cdots \equiv \varkappa_d \equiv \varkappa_0 \preceq (\cdot), \qquad \gamma_1 \equiv \cdots \equiv \gamma_d \equiv \gamma_0 \preceq (\cdot),$$

тогда для $\overline{s} = (s(\cdot), \dots s(\cdot))$, $s \preceq \sqrt{\varkappa_0} + \gamma_0^c$, $c \in (0,1)$, выполнено

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \mathring{H}^1(M))} \leq Cs[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1 \Delta \Omega_2))],$$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} \leq Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1 \Delta \Omega_2))].$$

Список литературы

1. *Степин А.М., Цылин И.В.* О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях // ДАН. 2015. Т. 463, №2. С. 144–148.
2. *Цылин И.В.* О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2015. №3. С. 35–39.
3. *Цылин И.В.* О регулярности решений вариационных и краевых задач в областях с гёльдеровой границей // Мат. заметки. 2016. Т. 99, №5. С. 794–800.
4. *Цылин И.В.* Регулярность решений первой краевой задачи в областях на многообразии // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2016. №5. С. 44–49.

Пространства нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах (The spaces of non-contractible closed curves in compact space forms)

И. А. Тайманов (I. A. Taimanov)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

taimanov@math.nsc.ru

Изучение проблемы о существовании замкнутых геодезических необратимых финслеровых метрик было инициировано Д.В. Аносовым в [1]. Мы, следуя [2], изложим некоторые результаты о вычислении когомологий пространств нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах и продемонстрируем, как они могут применяться для доказательства существования замкнутых геодезических финслеровых метрик.

Пусть

$$M = S^n/\Gamma, \quad n \geq 2,$$

где Γ свободно действует изометриями на n-мерной сфере, $\Lambda(M^n) = H^1(S^1, M)$ — пространство всех H^1-отображений

$$\gamma\colon [0,1] \to M, \quad f(0) = f(1),$$

окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в M, $\Omega_x(M)$ — подпространство в $\Lambda(M)$, образованное петлями, начинающимися и заканчивающимися в $\gamma(0) = \gamma(1) = x \in M$, и $\Pi^+(M)$ и $\Pi(M)$ — фактор-пространства пространства $\Lambda(M)$ относительно действия $SO(2)(= S^1)$:

$$\varphi \cdot \gamma(t) = \gamma(t + \varphi), \quad \varphi \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

и действия $O(2)$, соответственно. Здесь действие $O(2)$ является расширением действия $SO(2)$ с помощью инволюции

$$\sigma \cdot f(t) = f(-t).$$

Пусть $h \in \pi_1(M, x_0)$, h реализуется отображением $\omega\colon [0,1] \to M$, где $\omega(0) = x_0$, и $[h]$ — соответствующий свободный гомотопический класс замкнутых кривых: $[h] \in [S^1, M]$. Мы обозначим через

$$\Lambda M[h] \subset \Lambda M \quad \text{и} \quad LM[h] \subset LM$$

связные компоненты пространств ΛM и LM, образованные кривыми из класса $[h]$, а через $h_i, i = 1, 2, \dots,$ — автоморфизм

$$h_i \colon \pi_i(M, x_0) \to \pi_i(M, x_0),$$

отвечающий стандартному действию $h \in \pi_1$ на π_i.

Теорема 1. *Пусть* $h \neq 1 \in \pi_1(M)$. *Тогда*

1) *при* $i \geq 2$

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(\Lambda M[h])) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{\textit{при} } i = 4k-2, 4k-1, \\ 0 & \text{\textit{в противных случаях}} \end{cases}$$

для $M = S^{2k}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{2k}$ *и*

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(\Lambda M[h])) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{\textit{при} } i = 2k, 2k+1, \\ 0 & \text{\textit{в противных случаях}} \end{cases}$$

для $M = S^{2k+1}/\Gamma$;

2)

$$\pi_1(\Lambda M[h]) = C(h) = \mathbb{Z}_{r(h)} \quad \text{\textit{for} } n \geq 3,$$

где $C(h) = \mathbb{Z}_{r(h)} \subset \Gamma$ *— централизатор* h *в* Γ, *и*

$$\pi_1(\Lambda \mathbb{R}P^2[h]) = \mathbb{Z}_4.$$

Здесь

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(X) = \pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad i \geq 2.$$

Фактор-пространство произведения $LM[h] \times ESO(2)$ по диагональному действию $SO(2)$ обозначим через $LM[h]_{SO(2)}$, когомологии этого пространства называются $SO(2)$–эквивариантными когомологиями пространства $LM[h]$.

Теорема 2. *Пусть* $h \neq 1 \in \pi_1(M)$. *Тогда*

1) *при* $i \geq 2$

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(LM[h]_{SO(2)}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{\textit{при} } i = 2, 4k-2, 4k-1, \\ 0 & \text{\textit{в противных случаях},} \end{cases}$$

если $M = S^{2k}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{2k}$, *и*

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(LM[h]_{SO(2)}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{\textit{при} } i = 2, 2k, 2k+1, \\ 0 & \text{\textit{в противных случаях},} \end{cases}$$

если $M = S^{2k+1}/\Gamma$;

2) *для нечетных* $n \geq 3$ *пространства* $LM[h]_{SO(2)}$ *гомотопически просты и*

$$\pi_1(LM[h]_{SO(2)}) = C(h)/\mathbb{Z}[h] \quad \textit{для нечетных } n \geq 3,$$

где $C(h) \subset \Gamma$ *— централизатор* h *в* Γ *и* $\mathbb{Z}[h]$ *— подгруппа в* $C(h)$, *порожденная элементом* h;

3) *при* $n \geq 1$

$$\pi_1(L\mathbb{R}P^{2n}[h]_{SO(2)}) = 0.$$

Имеет место

Следствие 1. *Для каждой необратимой финслеровой метрики на* $\mathbb{R}P^2$ *все замкнутые геодезические которой невырожденны по Морсу, существует по меньшей мере две различные нестягиваемые замкнутые геодезические.*

Вывод аналогичного результата для $n \geq 3$ сводится к решению некоторых задач теории чисел. С использованием указанных выше теорем из [2] это было недавно сделано в [3]. Заметим, что при $n = 3$ аналогичный результат был получен ранее в [4].

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Геодезические в финслеровой геометрии // Proc. Int. Congr. Math. (Vancouver, B.C., 1974). Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. V. 2. P. 293–297.
2. *Тайманов И.А.* Пространства нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах. // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 10. С. 105–118. (см. также arxiv: 1604.05237).
3. *Liu H., Xiao Y.* Resonance identity and multiplicity of non-contractible closed geodesics on Finsler $\mathbb{R}P^n$: E-print. arXiv: 1607.02746.
4. *Duan H., Long Y., Xiao Y.* Two closed geodesics on $\mathbb{R}P^{2n+1}$ with a bumpy Finsler metric // Calc. Var. Partial Diff. Equat. 2015. V. 54. P. 2883–2894.

A metric property of smooth dynamical systems

Jean-Paul Thouvenot

L.P.M.A. Université Paris 6, France

jean-paul.thouvenot@upmc.fr

We are going to define a measure theoretic property of abstract measure preserving transformations with finite entropy, give some examples, and show that this property is satisfied for smooth dynamical systems.

Quantitative aspects of the shadowing property

Sergey Tikhomirov

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

stikhomirov@spbu.ru

The shadowing theory studies properties of pseudotrajectories. Pseudotrajectories naturally appears in various situations: presence of a noise, not complete information about the law of evolution, it appears as a result of round-off errors in numerics.

The shadowing theory starts its rapid development after celebrated work of Anosov on structural stability of geodesic flows on manifolds of negative curvature. In particular Anosov proved that in a neighborhood of a hyperbolic set any pseudotrajectory can be shadowed by an exact trajectory.

In the talk we discuss some of recent results on shadowing theory devoted to quantitative and probabilistic aspects of shadowing.

Generic mixing actions

Sergey Tikhonov

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

tikhonovc@mail.ru

In this talk a transformation means an invertible measure preserving transformation of a nonatomic finite Lebesgue space. A group of transformations $\{T^g\}_{g\in G}$ is called a G-action if it is isomorphic to group G.

A G-action T is called Γ-*mixing* for a given set $\Gamma \subset G$ if for any $\varepsilon > 0$ and measurable sets A, B there exists a bounded subset $C \subset G$ such that

$$|\mu(T^g A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \varepsilon,$$

for every $g \in \Gamma \setminus C$. If $\Gamma = G$ then we say that T is *mixing.*

Theorem 1. *Let G be a local compact Hausdorff group with a countable neighbourhood basis and Γ an unbounded subset of G. Then the set $\mathcal{M}_{G,\Gamma}$ of all Γ-mixing G-actions is a separable metric space for certain appropriate metric m.*

We call m the *leash-metric.* It was introduced independently by S. Alpern for mixing actions [1] and by the author for all cases [2, 3].

We have several directions for using the metric.

Generic properties. A subset of a metric space is called massive if it is a countable intersection of dense open sets.

Theorem 2. *(Bashtanov* [4, 5]*) The set of rank one $\mathbb{Z}^d$-actions is massive.*

Hence generic mixing $\mathbb{Z}^d$-actions have a zero entropy and a trivial centralizer.

k-fold mixing. An action T is called *k-fold mixing* if for any $\varepsilon > 0$ and measurable sets $A_1, \ldots, A_k$ there exists a bounded set $C \subset G$ such that for any $D = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset G$, $D^{-1}D \cap C = \varnothing$ we have

$$\left|\mu\left(\bigcap_i T^{g_i} A_i\right) - \prod_i \mu(A_i)\right| < \varepsilon.$$

Rokhlin problem. For a given group, is arbitrary 2-fold mixing action necessarily any-fold mixing?

Alpern's conjecture. Generic mixing transformation is not 3-fold mixing.

It is proven to be false by next theorem.

Theorem 3. *Let G be a direct product of an amenable monotilable group and $\mathbb{Z}$. Then generic mixing G-action is any-fold mixing.*

Spectral properties of mixing transformations. A spectral multiplicity of a transformation T is the spectral multiplicity of operator U, defined by the formula $Uf(x) = f(Tx)$.

Theorem 4. *For any finite collection $\{n_i\}$ of natural numbers there exists a mixing transformation T with*

$$M(T) = \bigcup_{I \neq \varnothing} \left\{ \prod_{i \in I} n_i \right\}.$$

In particular, there exist mixing transformations with homogeneous spectrum of any multiplicity.

This is an analog of results [6, 7] for mixing transformations.

References

1. *Alpern S.* Conjecture: In general a mixing transformation is not two-fold mixing // Ann. Probab. 1985. V. 13, N 1. P. 310–313.
2. *Tikhonov S. V.* Complete metric on mixing actions of general groups // JDCS. 2013. V. 19, N 1. P. 17–31.
3. *Tikhonov S. V.* A complete metric in the set of mixing transformations // Sb. Math. 2007. V. 198, N 4. P. 575–596.
4. *Bashtanov A.I.* Conjugacy classes are dense in the space of mixing Zd-actions // Math. Notes. 2016. V. 99, N 1–2. P. 9–23.
5. *Bashtanov A.I.* Generic mixing transformations are rank 1 // Math. Notes. 2013. V. 93, N 2. P. 209–216.
6. *Ageev O.* The homogeneous spectrum problem in ergodic theory // Invent. Math. 2005. V. 160, N 1. P. 417–446.
7. *Ryzhikov V. V.* Spectral multiplicity for powers of weakly mixing automorphisms // Sb. Math. 20012. V. 200, N 7. P. 1065–1076.

Аналитические свойства решений трехмерной нелинейной динамической системы (Analytical properties of solutions of three-dimensional nonlinear dynamical system)

В. В. Цегельник (V. V. Tsegel'nik)

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

tsegvv@bsuir.by

Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + z - 1) + ax, \\ \dot{y} = x(-x^2 + 3z + 1) + ay, \\ \dot{z} = -2z(b + xy) \end{cases} \tag{1}$$

(система Рабиновича–Фабриканта [1] с неизвестными функциями x, y, z независимой переменной t (a, b — произвольные фиксированные параметры)) моделирует процесс нелинейного взаимодействия волн в плазме. Она оказывается полезной при описании процессов, протекающих в вязкой среде (жидкой или газообразной), при возникновении волн Толлмина–Шлихтинга и др. При стандартных значениях $a = 0.87$, $b = 1.1$ в модели (1) наблюдается детерминированный хаос, а ее притягивающее множество представляет собой странный аттрактор [2].

Новые качественные свойства решений системы (1) получены в [3] (смотри также [4]) с учетом новых подходов к исследованию динамических систем, изложенных в [5]. В частности, доказано существование в (1) скрытых хаотических аттракторов при определенных значениях a и b.

На основании известной гипотезы [6] о несовместимости выполнения для системы свойства Пенлеве с хаотичностью ее поведения, актуальным является исследование аналитических свойств решений системы (1). Под свойством Пенлеве (в предположении, что независимая переменная t является комплексной) будем понимать отсутствие у общего решения системы (1) подвижных критических особых точек [7, 8], т.е. возможность наличия только подвижных полюсов.

Одним из алгоритмов, обеспечивающих проверку выполнения условий, необходимых для наличия у дифференциального уравнения свойства Пенлеве является формальный тест Пенлеве [9, 10] (алгоритм Ковалевской–Гамбье [11]).

Теорема 1. *Система* (1) *ни при каких значениях параметров* a, b *не проходит формальный тест Пенлеве и, следовательно, не обладает свойством Пенлеве.*

Доказательство утверждения следует из того, что для системы (1) ни при каких a и b не выполняется первый (из трех) шаг формального теста Пенлеве.

Система (1) в общем случае обладает симметрией $x(t) \to -x(t)$, $y(t) \to -y(t)$, $z(t) \to z(t)$.

Если $a = b = 0$, то (1) сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:

а) $x(t) \to -x(-t), y(t) \to y(-t), z(t) \to z(-t)$.

б) $x(t) \to x(-t), y(t) \to -y(-t), z(t) \to z(-t)$.

Теорема 2. *Система* (1) *при* $a = 0$ *имеет решение вида*

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + x_1\tau^{\frac{1}{2}} + x_3\tau^{\frac{3}{2}} + \ldots, \tag{2}$$

$$y = \frac{ix_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + y_1\tau^{\frac{1}{2}} + y_3\tau^{\frac{3}{2}} + \ldots, \tag{3}$$

$$z = z_0\tau + z_1\tau^2 + \ldots, \tag{4}$$

где $\tau = t - t_0$, $x_{-1}^2 = \frac{i}{2}$, $i^2 = -1$, z_0, $x_1(y_1)$, t_0 *— произвольные постоянные, причем* $\frac{3}{2}x_1 - \frac{iy_1}{2} = -ix_{-1}$. *Ряды* (2)–(4) *сходятся в области* $0 < |\tau| < \rho$, $\rho > 0$.

В том, что разложения (2)–(4) зависят от трех произвольных постоянных, легко убедиться непосредственной подстановкой рядов в уравнения системы (1). Для доказательства сходимости разложений (2)–(4) достаточно ввести преобразования

$$\tau = s^2, x = \frac{1}{s}(x_{-1} + u_1(s)), y = \frac{1}{s}(ix_{-1} + u_2(s)), z = s^2(z_0 + u_3(s)),$$

переводящие систему (1) в систему Брио и Буке и воспользоваться следующим результатом (см. теорему А.12 из [12, с. 272]):

Если система Брио и Буке

$$su_j' = f_j(s, u_1, u_2, \ldots, u_n), \ \ ' = \frac{d}{ds} \tag{5}$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки $s = u_1 = \cdots = u_n = 0$ функциями f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, с условиями $f_j(0, \ldots, 0) = 0$, допускает формальное решение

$$u_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

то разложение (6) сходится в области $0 < |s| < \rho_1$, $\rho_1 > 0$.

Теорема 3. *Система* (1) *в случае* $a = -b$ *имеет неавтономный первый интеграл* $x^2 + y^2 + 4z = Ce^{2at}$, *где* C *— произвольная постоянная.*

Следствие. *Система* (1) *при* $a = b = 0$ *имеет интеграл энергии* [1] $x^2 + y^2 + 4z = E$, *где* E *— произвольная постоянная.*

Теорема 4. *Система* (1) *в случае* $a = b = 0$ *не обладает хаотическим поведением.*

В силу следствия систему (1) можно свести к двумерной автономной системе. Но согласно [13] решения автономных систем с двумерным фазовым пространством не могут быть хаотичными.

Список литературы

1. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит. 2006.
3. *Danca M.-F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. V. 26, N 2. Art. 165 0038.
4. *Danca M.-F., Chen G.* Bifurcation and Chaos in a complex model of dissipative medium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2004. V. 14. P. 3409–3447.
5. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Калмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 105–121.
6. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2006.
7. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
8. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское. 1990.

9. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715–721.
10. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир. 1987.
11. *Ковалевская С.В.* Научные работы. М.: АН СССР. 1948.
12. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: de Gruyter, 2002.
13. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир. 1990.

Поведение резольвенты краевых задач в областях с трещинами (Resolvent behavior of boundary value problems on domains with cracks)

И. В. Цылин (I. V. Tsylin)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ioxlxoi@yandex.ru

Пусть M — гладкое связное многообразие с римановой метрикой g, $\mathcal{A}$ — эллиптический оператор

$$\nabla^* \left(A\nabla u + au\right) + b\nabla u + cu, \tag{1}$$

Введем оператор, решающий первую краевую задачу для оператора $\mathcal{A}$ в области Ω

$$\mathcal{G}_\Omega \colon H^{-1}(M) \to \mathring{H}^1(M).$$

Определение 1. Для пары фиксированных атласов $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ многообразия M положим, что $(\kappa_U, U) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (\kappa_U, V) \in \mathcal{U}$, $V \Subset U$, введем расстояние $d_{\mathcal{U}}$ между произвольными множествами X и Y следующим образом

$$d_{\mathcal{U}}(X, Y) = \sup_{\mathcal{U}} \inf_{\nexists\delta\Rightarrow\infty} \{\delta \,| \kappa_U(X \cap U) + \delta e_d \supset \kappa_U(Y \cap V),$$
$$\kappa_U(X \cap V) - \delta e_d \subset \kappa_U(Y \cap U)\}\,.$$

Определение 2. Для данного атласа $\mathcal{U}$ многообразия (M, g) скажем, что область $\Omega \subset M$ имеет границу класса $L^{\infty}_{\mathcal{U}}$, если для любого элемента $(U, \kappa_U) \in \mathcal{U}$ множество $\kappa_U\,(U \cap \partial\Omega)$ представимо в виде графика некоторой (многозначной) функции $h \in L_\infty(\tilde{U}, \mathbb{R})$. Причем прообраз $h^{-1}(x)$ любой точки $x \in \tilde{U}$ является линейно-связным множеством (то есть отрезком).

Таким образом, если $\partial\Omega \in L^{\infty}_{\mathcal{U}}$, то область Ω может иметь трещины. Необходимо, чтобы все поверхности трещин можно было выпрямить (то есть подобрать диффеоморфизм) таким образом, чтобы в каждой пересекаемой карте они (поверхности) стали параллельны некоторому направлению. Тогда для достаточно регулярных коэффициентов имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть*

$$\partial\Omega_1 \in \partial\Omega \in L^{\infty}_{\mathcal{U}}, \quad \partial\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \in L^{\infty}_{\mathcal{U}}$$

тогда имеют место оценки

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \mathring{H}^1(M))} \leq Cs(d_{\mathcal{U}}(\Omega_1, \Omega_2)),$$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} \leq Cs^2(d_{\mathcal{U}}(\Omega_1, \Omega_2)).$$

При этом приведенная оценка является точной.

Список литературы

1. *Степин А.М., Цылин И.В.* О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях // Доклады Академии Наук. 2015. Т. 463, № 2. С. 144–148.
2. *Цылин И.В.* О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 35–39.
3. *Цылин И.В.* О регулярности решений вариационных и краевых задач в областях с гёльдеровой границей // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 794–800.
4. *Цылин И.В.* Регулярность решений первой краевой задачи в областях на многообразии // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2016. № 5. С. 44–49.
5. *Цылин И.В.* Регулярность типа Никольского решений нелинейных задач. Случай областей с гёльдеровой границей // Проблемы мат. анализа. 2016. Т. 86. С. 119–139

Averaging over a non-ergodic subsystem*

Dmitry Turaev

Imperial College, London, UK,
Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Russia

dturaev@imperial.ac.uk

One of the most basic results of the averaging theory was discovered and proven by Anosov [1]:

If, in a slow-fast system, the fast subsystem preserves a smooth invariant measure μ and is ergodic for almost all values of the frozen slow variables, then the evolution of the slow variables is close to that given by the averaged system (averaged over the measure μ in the space of fast variables) for any finite time interval (which can be taken as long as we want) and for all initial conditions except for a set of a small measure, provided the separation between the slow and fast scales is sufficiently large.

It is a very general theorem, which has almost no assumptions - it uses only smoothness and ergodicity of the measure μ. The natural application is given by slow-fast Hamiltonian systems:

$$\dot{x} = \varepsilon\, \Omega_x^{-1} \partial_x H(x, y, \varepsilon), \qquad \dot{y} = \Omega_y^{-1} \partial_y H(x, y, \varepsilon),$$

where Ω_x and Ω_y are the matrices defining the standard symplectic form in the x- and y-spaces respectively, H is the Hamiltonian function (its value is preserved by the system), and ε is a small parameter, so the x variables are slow and the y variables are fast. This system preserves the standard volume form, so the Anosov theorem is applied if the y-subsystem at $\varepsilon = 0$ is ergodic with respect to the Liouville measure $\mu_x^L(dy) = \dfrac{\delta(E - H(x, y, 0))dy}{\int \delta(E - H(x, y, 0))dy}$ at the given value of $H(x, y, 0) = E$ for almost every value of x (here δ stays for the delta-function). Under the ergodicity condition, Anosov theorem implies that given any $\gamma > 0$, $\nu > 0$ and $T > 0$ there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ we have

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| < \gamma \;\; \text{on the interval} \;\; 0 \le \varepsilon t \le T$$

*Supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-41-00044).

for all initial conditions except, may be, for a set of measure less than ν, where $\hat{x}(t)$ is the solution of the averaged system

$$\dot{x} = \varepsilon \int \Omega_x^{-1} \partial_x H(x,y,0) \mu_x^L(dy).$$

It is a simple computation to show that this system can be written in the following form:

$$\dot{x} = -\varepsilon T(x)\, \Omega_x^{-1} \partial_x S(x)$$

where the effective Hamiltonian $S(x) = \ln \int_{H(x,y,0)\leq E} dy$ can be identified with the Gibbs volume entropy of the y-subsystem, and the scalar time-reparameterisation factor $T(x) = (\partial_E S)^{-1}$ can be viewed as the temperature [2]. Obviously, the averaged system preserves $S(x)$. Therefore, Anosov theorem actually establishes that the fundamental physical fact of the entropy preservation at adiabatic (i.e. sufficiently slow) changes of system parameters follows from the ergodicity of the system.

In this talk we address the question of what happens if the fast system is not ergodic. We need to consider this question because the ergodicity does not seem to be the prevalent feature of the Hamiltonian dynamics. We discuss a theory which is developing in joint works with V. Gelfreich, T. Pereira, V. Rom-Kedar, and K. Shah [3–9] and suggest that in the non-ergodic case the behaviour of the slow variables is approximated by a random process, and not a single, deterministic averaged system. Namely, we propose the following conjecture (corroborated by an extensive set of numerical experiments).

Conjecture. *For fixed tolerance parameters γ and ν, there exists a finite set of smooth non-negative functions $\rho_k(x,y)$, $\sum_k \rho_k \equiv 1$, such that for any $T > 0$ and all sufficiently small ε the evolution of the slow variables is approximated on the time interval $[0, T/\varepsilon]$ by the solutions of the system*

$$\dot{x} = \varepsilon \int \Omega_x^{-1} \partial_x H(x,y,0) \rho_k(t)(x,y) \mu_x^L(dy).$$

Here the index k of the "approximate ergodic component" ρ_k, over which we perform the averaging at each given moment of time, is a random function obtained as a realisation of the Markov process with the x-dependent transition probabilities

$$\Pr\left[k(t) = i \longrightarrow k(t+\Delta t) = j\right] = \frac{\int \rho_j(x(t+\Delta t), y)\ \rho_i(x(t), y)\ \mu^L_{x(t)}(dy)}{\int \rho_i(x(t), y)\ \mu^L_{x(t)}(dy)}.$$

The conjectured Markov property is crucial here, as it implies that a typical process of this type must equilibrate at an exponential rate. This means an exponential convergence of any absolutely continuous initial measure on the given energy level $H = E$ to a unique stationary one, i.e., to the Liouville measure. Moreover, the equilibration process can be attributed to the increase of the Gibbs volume entropy. It is not clear whether a typical random process described above corresponds to a typical slow-fast Hamiltonian system. However, a success in establishing the validity of this conjecture would offer a way of explaining the equilibration in adiabatically evolving systems of statistical mechanics as an effect of ergodicity violation.

References

1. *Anosov D.V.* Averaging in systems of ordinary differential equations with rapidly oscillating solutions // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1960. V. 24. P. 721.
2. *Hilbert S., Hänggi P., Dunkel J.* Thermodynamic laws in isolated systems // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. Art. 062116.
3. *Shah K., Turaev D., Rom-Kedar V.* Exponential energy growth in a Fermi accelerator // Phys. Rev. E. 2010. V.81. Art. 056205.
4. *Gelfreich V., Rom-Kedar V., Shah K., Turaev D.* Robust exponential acceleration in time-dependent billiards // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. Art. 074101.
5. *Gelfreich V., Rom-Kedar V., Turaev D.* Fermi acceleration and adiabatic invariants for non-autonomous billiards // Chaos. 2012. V. 22. Art. 033116.
6. *Gelfreich V., Rom-Kedar V., Turaev D.* Oscillating mushrooms: adiabatic theory for a non-ergodic system // J. Phys. A. 2014. V. 47. Art. 395101.
7. *Turaev D.* Exponential Fermi acceleration in adiabatically perturbed Hamiltonian systems // Proc. 8th Eur. Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014). 2014.
8. *Pereira T., Turaev D.* Exponential energy growth in adiabatically changing Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. Art. 010901(R).
9. *Pereira T., Turaev D.* Fast Fermi acceleration and entropy growth // Math. Model. Nat. Phenom. 2015. V. 10. P. 31.

How to define a notion of hyperbolicity of a dynamical system in terms of measure preserving transformations (without smoothness and topology)*

A. M. Vershik

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia

avershik@gmail.com

In the paper [1] we gave a version of the definition of the notion of hyperbolicity in the measure-theoretical category or the notion of hyperbolic measure-preserving transformation. The definition use the terms of Markov operators or so called polymorphisms with invariant measures. The main problem is to enlarge some results of ergodic theory to polymorphisms. We introduce invariant definition of metric hyperbolicity and produce the arguments for the following thesis: metric hyperbolicity of the automorphism is equivalent to be K-automorphism. This claim can consider as a completely new characterization of the K-property and connected with many facts about Markov processes, Past and Future context of random process, entropy theory et al.

References

1. *Vershik A.M.* Towards the definition of metric hyperbolicity // Moscow Math. J. 2005. V. 5, N 3. P. 721–737.

*Supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00581).

Smooth models and the Anosov–Katok method

Benjamin Weiss

Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel

weiss@math.huji.ac.il

One of the classic methods for constructing smooth mappings was developed almost half a century ago in a landmark paper by D. Anosov and A. Katok. Recently, in joint work with Matt Foreman we have used this method in order to show that the isomorphism relation when restricted to smooth mappings is not Borel and is in fact a complete analytic set. I will explain these concepts and our work which is based on a new symbolic representation of irrational rotations.

References

1. *Foreman M., Weiss B.* A symbolic representation for Anosov–Katok systems // J. Anal. Math. To appear.

Topological and measurable aspects of multiple ergodic averages

Xiangdong Ye

School of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui province, China

yexd@ustc.edu.cn

In this talk first I will review the results related to the convergence of the multiple ergodic averages both in L^2-norm or almost surely. Then I will talk about the topological analogues of the measurable results. This talk is based on joint works with Glasner, Gutman, Huang and Shao.

Measurable results. It is a long-standing open question whether $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x)\dots f_d(T^{dn}x)$ converges a.s. Bourgain [1] showed it does when $d = 2$. We have some partial results for the general case.

Theorem 1. [4] *Let $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ be an ergodic measurable distal system, and $d \in \mathbb{N}$. Then for all $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(\mu)$ the averages*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x)\dots f_d(T^{dn}x), \text{ converge } \mu \text{ a.s.}$$

Theorem 2. [3] *Let $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ be a weakly mixing PID measure preserving transformation. Then for all $d \in \mathbb{N}$ and all $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(\mu)$,*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x)\dots f_d(T^{dn}x) \xrightarrow{a.s.} \int f_1 d\mu \int f_2 d\mu \dots \int f_d d\mu, \quad N \to \infty.$$

Moreover, for a generic measurable preserving transformation,

$$\text{the limit of } \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x)\dots f_d(T^{dn}x) \text{ exists a.s.}$$

Topological results. Let (X, T) be a topological system and let $d \in \mathbb{N}$. The pair $(x, y) \in X^2$ is said to be *regionally proximal of order d* if for any $\delta > 0$, there exist $x', y' \in X$ and a vector $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ such that $\rho(x, x') < \delta, \rho(y, y') < \delta$, and

$$\rho(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x', T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}y') < \delta$$

for any $\epsilon \in \{0,1\}^d \setminus \{(0,\dots,0)\}$. The set of regionally proximal pairs of order d is denoted by $RP^{[d]}$ (or by $RP^{[d]}(X,T)$ in case of ambiguity), and is called *the regionally proximal relation of order d*.

Let (X, T) be a topological system and $d \in \mathbb{N}$. We say $(x, y) \in X^2$ is a *regionally proximal pair of order d along arithmetic progressions* if for each $\delta > 0$ there exist $x', y' \in X$ and $n \in \mathbb{Z}$ such that $\rho(x, x') < \delta, \rho(y, y') < \delta$ and

$$\rho(T^{in}(x'), T^{in}(y')) < \delta \text{ for each } 1 \leq i \leq d.$$

The set of all such pairs is denoted by $AP^{[d]}(X,T)$ and is called the *regionally proximal relation of order d along arithmetic progressions.*

Remark 1. In [2] the authors defined a regionally proximal relation of order d for any group actions (this definition is the same as the previous definition when the group is abelian) and showed that it is also an equivalence relation.

Theorem 3. [5] *Let (X, T) be a unique ergodic minimal distal system such that for each $d \geq 1$, Z_d is isomorphic to X_d. Then for $d \geq 1$, $AP^{[d]} = RP^{[d]}$.*

Note that Z_d is the d-step nilfactor for the measurable system (X, T, μ) and X_d is the d-step nilfactor for the topological system (X, T).

Theorem 4. [6] *Let (X, Γ) be a topological system, where Γ is a nilpotent group generated by $T_1, \ldots, T_d$ such that for each $T \in \Gamma$, $T \neq e_\Gamma$, (X, T) is weakly mixing and minimal. For $d, k \in \mathbb{N}$, let $p_{i,j}(n), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d$ be polynomials with rational coefficients taking integer values on the integers and $p_{i,j}(0) = 0$. We show that if the expressions $g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n)}$ depends nontrivially on n for $i = 1, 2, \cdots, k$, and for all $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ the expressions $g_i(n)g_j(n)^{-1}$ depend nontrivially on n, then there is a residual set X_0 of X such that for all $x \in X_0$*

$$\{(g_1(n)x, g_2(n)x, \ldots, g_k(n)x) \in X^k : n \in \mathbb{Z}\} \textit{ is dense in } X^k.$$

References

1. *Bourgain J.* Double recurrence and almost sure convergence // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 404. P. 140–161.
2. *Glasner E., Gutman Y., Ye X.* Higher order regionally proximal equivalence relations for general group actions: Preprint.
3. *Gutman Y., Huang W., Shao S., Ye X.* Old and new results for the almost sure convergence of the multiple ergodic average: Preprint.
4. *Huang W., Shao S., Ye X.* Pointwise convergence of multiple ergodic averages and strictly ergodic models: E-print. arXiv: 1406.5930v2 [math.DS].
5. *Huang W., Shao S., Ye X.* Regionally proximal relation of order d along arithmetic progressions and nilsystems. In preparation.
6. *Huang W., Shao S., Ye X.* Topological correspondence of multiple ergodic averages of nilpotent actions: E-print. arXiv: 1604.07113.
7. *Huang W., Shao S., Ye X.* Nil Bohr-sets and almost automorphy of higher order // Mem. Amer. Math. Soc. 2016. V. 241, N 1143; arXiv: 1407.1179v1 [math.DS].
8. *Shao S., Ye X.* Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence // Adv. Math. 2012. V. 231. P. 1786–1817.

Условие единственности геодезических в игре ‘Лев и человек’ (Uniqueness of geodesics in the Lion and Man game)

О. О. Юферева (O. O. Yufereva)

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

yufereva12@gmail.com

Игра ‘Лев и человек’ — одна из игр преследования-убегания, которой занимались многие исследователи [1–4]. Этот вариант игры предполагает двух игроков, обладающих одинаковыми максимальными скоростями; один игрок (преследователь) пытается ‘поймать’ второго (убегающего), тогда как второй пытается избежать поимки. В случае игры на круге (см. например [5]) вне зависимости от действий преследователя убегающий может избежать точной поимки, но при этом преследователь всегда может обеспечить сколь угодно малое расстояние до убегающего. По этой причине считается, что преследователь побеждает, если может приблизиться к убегающему на любое, сколь угодно малое, заранее заданное расстояние ε вне зависимости от действий убегающего.

Доклад посвящен стратегии простого преследования в игре ‘Лев и человек’ на метрическом компакте. В пошаговой версии стратегии преследователь через равные промежутки времени нацеливается на положение убегающего и двигается по геодезической их соединяющей. В непрерывной версии нацеливание происходит постоянно. При этом убегающий, зная о стратегии преследователя, может выбрать любую 1-липшицеву траекторию, а траектория преследователя состоит из отрезков геодезических.

Отметим, что такая стратегия корректна если в пространстве любые две точки соединяет единственная геодезическая. Это условие выполняется, например, для CAT(0)-пространств (пространства Александрова с неположительной кривизной). К ним относятся в том числе выпуклые подмножества в $\mathbb{R}^n$, односвязные подмножества евклидовой плоскости и $\mathbb{R}$-деревья. Как показано в [6] непрерывная версия этой стратегия гарантирует победу преследователя в CAT(0)-компактах.

Условие CAT(0)-компактности не является необходимым (см. [7]). Более того, для пошагового варианта стратегии простого преследования можно показать следующий результат:

Теорема. *Пусть K — метрический компакт, любые две точки из K соединяет единственная геодезическая. Если геодезические непрерывно (в равномерной метрике) зависят от своих концов, то в игре 'Лев и человек' побеждает преследователь.*

Данная теорема обеспечивает, в частности, победу преследователя в произвольном шаре из $\mathbb{R}^n$, оснащенного $\|\cdot\|_p$-метрикой $(1 < p < \infty)$. Такие шары не являются CAT(0)-компактами.

В докладе планируется также рассмотреть примеры многообразий, в которых можно обеспечить поимку, но не удовлетворяющих условиям теоремы. Например, у замкнутой полусферы (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$) имеется замкнутая геодезическая, и значит не выполнено условие единственности. Легко проверить, что стратегии простого преследования не приводит к победе. Тем не менее, есть её модификация, выигрышная для преследователя, которая основывается на показанной теореме.

Список литературы

1. *Pontryagin L.S.* On the theory of differential games // Russian Math. Surveys. 1966. V. 21, N. 4. P. 193–246.
2. *Isaacs R.* Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization. Courier Corporation, 1999.
3. *Ivanov R.P., Ledyaev Y.S.* Optimality of the Pursuit Time in a Differential Game with Several Pursuers under Simple Motion // Tr. MIAN SSSR. 1981. V. 158, P. 87–97.
4. *Petrov N.N.* 'Soft' capture in pontryagin's example with many participants // J. Appl. Math. Mech. 2003. V. 67, N 5. P. 671–680.
5. *Littlewood J.E.* A mathematician's miscellany. Methuen and Company Limited, 1953.
6. *Alexander S., Bishop R., Ghrist R.* Total curvature and simple pursuit on domains of curvature bounded above // Geom. Dedicata. 2010. V. 149, N 1. P. 275–290.
7. *Miroslav B.* Note on a compactness characterization via a pursuit game // Geom. Dedicata. 2012. V. 160, N 1. P. 195–197.

Some problems on pseudo-Anosov homeomorphisms

Alexey Zhirov

Moscow Aviation Institute, Moscow State University, Moscow, Russia

alexei_zhirov@mail.ru

The research of pseudo-Anosov and generalized pseudo-Anosov homeomorphisms of surfaces is one of the areas that has grown from the fundamental works of D.V. Anosov on the theory of dynamical systems. The concept of pseudo-Anosov homeomorphism was introduced by W. Thurston in his development of the J. Nielsen theory of classification up to isotopy surfaces homeomorphisms (see. [1]). In Thurston theory the pseudo-Anosov homeomorphisms appear as natural representatives of "mysterious" third Nielsen class. Thus, the dynamics helped topology in solving of the old difficult problem. At the same time, Thurston's results were useful for dynamics as they are closely related to the smooth cascades on surfaces possessing hyperbolic strange attractors which are the important objects of the theory of smooth dynamical systems.

Dmitry Victorovich was keenly interested in the emerging theory and its connections. Shortly before his illness the author of the report had a chance to discuss with him a program of a research in this area. In this talk we will speak on the problems in accordance with this program. The author is also going to report his comprehension about the progress in resolving of some of these problems. Below there are formulations of these problems in exactly the same form in which they were discussed with Dmitry Victorovich.

Begin with few remarks on the terminology used (see [2] for more details).

Pseudo-Anosov homeomorphisms (PA) stand out among *generalized pseudo-Anosov* (GPA) by absence of valence 1 singularities (thorns) in its invariant foliations. *Singular type* of GPA-homeomorphism is the sequence $\{b_d \colon d \in \mathbb{N}\}$, where b_d is the number of valence d singularities. Almost all elements of this sequence are 0 and we may assume that $b_2 = 0$.

1. Is the Thurston theorem on the classification up to isotopy of homeomorphisms true for non-orientable surfaces?

2. Can be extended to the nonorientable case Bestvina–Handel algorithm [3] for constructing train-track by automorphism of the fundamental group of the surface and defining the singular type of GPA-homeomorphism if such is defined by this automorphism according to Dehn–Nielsen theorem?

3. Describe the singular types which are formally admitted by Euler–Poincaré formula and actually realized by (generalized) pseudo-Anosov homeomorphisms of non-orientable surfaces with orientable and nonorientable invariant foliations. In the case of orientable surfaces the answer is given in [4].

4. Is it true that there are no pseudo-Anosov homeomorphisms of nonorientable surface of genus 3?

5. Is it true that there are no GPA-homeomorphisms of the Klein bottle of singular type $\{b_3 = b_1 = 1\}$? Note: this singular type is not realized in the case of the torus.

6. Whether exists PA-homeomorphism of singular type $\{b_3 = b_5 = 1\}$ on non-orientable surface of genus 4? Note: this singular type is not realized in the case of an orientable surface of genus 2.

7. Give an example of PA-homeomorphism for each non-orientable surface of odd genus > 5 (for $g = 5$ and each even genus, such examples are known [2]).

8. Is it true that for each surface (orientable or not) there is a GPA-homeomorphism with the topological entropy smaller than prescribed value? (With the decreasing of entropy increase the number of thorns.) The answer is yes for the sphere and the projective plane [2].

9. Evaluate the minimum of dilation of PA-homeomorphisms of the non-orientable surface depending on its genus. For orientable surfaces, such evaluations are known (see [5] for example), but whether it is possible to improve them?

10. Evaluate the minimum of dilation for GPA-homeomorphisms with a fixed number of valence 1 singularities depending on the type of surface and the number of thorns.

11. Whether is it possible to find the exact value of the minimum for at least surfaces of small genus, and with a small number of thorns? For Anosov diffeomorphisms of torus, and GPA-homeomorphisms with no more than with 4 thorns it is simple. Some other results see in [6].

12. Is it true that the simplest (i.e. with minimal dilatation) PA-homeomorphism (GPA) of fixed surface and with a fixed number of thorns is unique up to topological conjugacy?

13. Is it true that for any PA-homeomorphism of orientable surface of genus 2 there exists an invariant leaf?

14. Is it true that for a fixed singular type there are only a finite number of conjugacy classes of GPA-homeomorphisms having no invariant leaf?

15. Evaluate the growth rate of the number of conjugacy classes of PA-homeomorphisms for given surface (GPA-homeomorphisms with a given number of thorns) depending on dilation.

References

1. *Casson E., Bleiler S.* Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. Cambridge University Press, 1988.
2. *Zhirov A.Yu.* Topological conjugacy of pseudo-Anosov homeomorphisms. Moscow: MCCME, 2013 (in Russian).
3. *Bestvina M., Handel M.* Train-tracs for surface homeomorphisms // Topology. 2000. V. 34, N 1. P. 109–140.
4. *Masur H., Smille J.* Quadratic differential with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms // Comment. Math. Helv. 1993. V. 68, P. 289–307.
5. *Minakawa H.* Examples of pseudo-Anosov homeomorphisms with small dilatation // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 2006. V. 13, N 2. P. 95–100.
6. *Lanneau E., Thiffeault J.-L.* On the minimum dilatation of pseudo-Anosov homeomorphisms on surfaces of small genus // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2011. V. 61, N 1. P. 105–144.

Научное издание

Международная конференция
“Системы Аносова и современная динамика”, посвященная
80-летию со дня рождения Дмитрия Викторовича Аносова,
Москва, 19–23 декабря 2016 г.: Тезисы докладов

Подписано к печати 13.12.2016
Тираж 120 экз.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, 8

ISBN 978-5-98419-073-2