Посвящается 100-летию Пермского университета

Открывая мир, создавая будущее

МАТЕМАТИКА
И ГЛОБАЛЬНЫЕ
ВЫЗОВЫ XXI ВЕКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СТО ЛЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ УРАЛА

г. Пермь, 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
СТО ЛЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ УРАЛА

Материалы симпозиума, проводимого в рамках форума
«Математика и глобальные вызовы XXI века»
и посвященного столетию Пермского государственного
национального исследовательского университета

(г. Пермь, 16-21 мая 2016 года)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2016

УДК 517.2: 378.4(470.5)

ББК 22.161.1: 74.58

Д 50

Д 50 **Дифференциальные** уравнения. Сто лет математической науке урала [Электронный ресурс]: Материалы симпозиума, провод. в рамках форума «Математика и глобальные вызовы XXI века» и посвящ. столетию Перм. гос. нац. исслед. ун-та / гл. ред. В. П. Максимов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2016 – 6 Мб. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. требования: процессор Intel Pentium, 1,3 ГГц; 40 Мб HDD; 256 Мб RAM; операц. система Windows 98 и выше; рек. разрешение 1024×576; CD-ROM или DVD-ROM. – Загл. с этикетки диска.

ISBN 978-5-7944-2720-2

В сборнике материалов приведены небольшие обзоры результатов решения тех научных задач, над которыми в настоящее время работают участники симпозиума. Эти задачи касаются как общей теории дифференциальных уравнений, так и приложений теории. География более чем пятидесяти ученых, материалы исследований которых освещены в сборнике, охватывает территорию России и территорию от стран дальнего зарубежья до стран СНГ, а поэтому дает представление о том, над чем трудятся современные специалисты в области дифференциальных уравнений. Программный комитет симпозиума надеется, что эти материалы вызовут интерес не только у узких специалистов, но и у широкого круга ученых, использующих дифференциальные уравнения в своей научной практике.

УДК 517.2: 378.4(470.5)

ББК 22.161.1: 74.58

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Редакционная коллегия: В. П. Максимов (гл. ред), А. В. Поносов, П. М. Симонов, О. Г. Пенский.

ISBN 978-5-7944-2720-2 © Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.988

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абдуллаев Абдула Рамазанович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, h.m@pstu.ru

Скачкова Елена Александровна

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, skachkovaea@gmail.com

Рассматривается линейное функционально-дифференциальное уравнение:

$$x''(t) = (Sx)(t) + h(t)\,, t \in [0,1] \qquad (1)$$

где $t \in [0,1]$, функция $h:[0;1] \to R^1$ измерима, $S-$ линейный оператор.

Для уравнения (1) исследуется на разрешимость краевая задача со следующими условиями:

$$x(0) = \alpha x(\xi), x(1) = \beta x(\eta)\,, \qquad (2)$$

где $\xi, \eta \in (0;1)$, $\alpha, \beta \in R^1$. В частных случаях задачу (1), (2) можно рассматривать как двух- или трехточечную. В работе рассматривается критический (резонансный) случай задачи (1), (2), когда соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение.

Отметим, что задачи вида (1), (2) находят широкое применение в различных областях физики, в теории управления, в экономике и т.д. Условиям разрешимости задачи вида (1), (2) посвящено большое количество работ (см., например, [1-4]).

В работе получены достаточные условия существования хотя бы одного решения задачи (1), (2) в критическом случае для возможных значений параметров α, β безотносительно взаимного расположения значений ξ и η на интервале $(0;1)$). Результаты работы опираются на применение специальной теоремы о разрешимости операторного уравнения, которая является достаточно эффективной в применении к резонансным краевым задачам (см., например, [5,6]). Утверждение позволяет получить эффективные условия разрешимости задач вида (1),(2) для конкретных классов линейных операторов S.

© Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А., 2016

Библиографический список

1. *Gupta C.P.*. Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance // Results Math. 1995. Vol. 28. P. 270–276.
2. *Feng W., Webb J. R. L.* Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1997 Vol. 212, P. 467-480.
3. *Przeradzki B, Stanczy R.* Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001 Vol. 264, P. 253-261.
4. *Liu B.* Solvability of multi-point boundary value problems at resonance (I). Indian J. pure appl. Math. 2002. № 33(4). P. 475–494.
5. *Скачкова Е.А.* О периодических решениях функционально-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 3(7).
6. *Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А*. Периодические решения системы линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4(23).

A MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ORDER LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

A. R. Abdullaev

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000, h.m@pstu.ru

E. A. Skachkova

Perm State University, st. Bukireva,15 , Perm, Russia, 614990, skachkovaea@gmail.com

УДК 517.938.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА

Асташова Ирина Викторовна

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет; 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1,

РЭУ имени Г.В. Плеханова, факультет математической экономики, статистики и информатики, 117997, г.Москва, Стремянный пер., 36, ast@diffiety.ac.ru

Получен ответ на ряд давно стоявших вопросов, связанных с уравнением типа Эмдена – Фаулера высокого порядка.

В частности, доказано существование решений, имеющих вертикальную асимптоту, с нестепенным поведением для уравнений порядков n=12, 13, 14, что опровергает гипотезу, высказанную И.Т. Кигурадзе [1, с. 324], о степенном характере асимптотики таких решений для уравнений произвольного порядка. Ранее эта гипотеза была подтверждена для n=2 (см. [1, § 20]) и для n=3, 4 (см. [2; 3, гл.V]), а в работе [4] доказано, что решения с нестепенным поведением существуют для достаточно больших n. Доказательство результатов для n =12, 13, 14 содержится в [5,6]. Вопрос о существовании решений с нестепенным поведением при 4<n<12 и n>14 до сих пор остается открытым, однако оказалось, что подобное поведение решений является в некотором смысле «типичным», установлено существование колеблющихся решений уравнений произвольного порядка, имеющих поведение, описываемое при помощи аналогичного аналитического выражения.

Приведем формулировки некоторых полученных результатов.

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)}+p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \; k \in \mathbf{R}, \quad k > 0, \; k \neq 1, \; p_0 > 0. \qquad 1)$$

Приведем результаты о существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнения (1). При этом будет использоваться обозначение $\alpha = \dfrac{n}{k-1}$.

© Асташова И.В., 2016 г.

Теорема 1. Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbf{R}$ функция

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x^* - x)^{-\alpha} h(\ln(x^* - x)),\ -\infty < x < x^*, \qquad 2)$$

является решением уравнения (1).

Следствие 1. Для любого четного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbf{R}$ функция

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\ln(x - x^*)),\ x^* < x < \infty,$$

является решением уравнения (1).

Следствие 2. Для любого нечетного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 < 0$ и $x^* \in \mathbf{R}$ функция

$$y(x) = |p_0|^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\ln(x - x^*)),\ x^* < x < \infty,$$

является решением уравнения (1).

Аналогичные результаты получены для уравнения (1) в случае $0 < k < 1$. Эти результаты частично опубликованы в [7,8].

Получена асимптотическая классификация решений уравнения (1) при в случае n=3, 4, $k > 1$ и, $0 < k < 1$. Доказательство для случая $k > 1$ приведено в [9].

Библиографический список

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. *И. В. Асташова*. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа, Тбилиси, ТГУ, 1988. Т.1. № 3. С. 9–11.
3. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В.Асташовой. М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2012. С. 22--288.

4. *Kozlov V. A.*: On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. Ark. Mat., (37), 2, 305–322, (1999).
5. *Astashova I. V.* On the existence of positive solutions with a nonpower- law asymptotics of an equation of the emden–fowler type of thirteenth and fourteenth order // Differential Equations. 2013. V. 49, №. 6. P. 775–777.
6. *Astashova I.V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220
7. *Асташова И. В.* О положительных решениях с нестепенной асимптотикой и квазипериодических решениях уравнения типа Эмдена - Фаулера высокого порядка // Проблемы математического анализа. 2015. Т. 79. С. 17–31.
8. *Astashova I.* On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden-Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. № 2014:174. P. 1–8. DOI: 10.1186/s13661-014-0174-7
9. *Astashova I. V.* On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity (об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью) // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. № 2. С. 3–25. (English)

ON SOME PROBLEMS CONNECTED WITH EMDEN– FOWLER TYPE DIFFERENTIAL EQUATION

Astashova Irina V.

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 119991, M, GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Moscow, Russia, ast@diffiety.ac.ru

Plekhanov Russian University of Economics, Faculty of Mathematical Economics, Statistics and Informatics (MESI), Stremyanny lane. 36, Moscow, 117997, Russia

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ НА ОСИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Баландин Антон Сергеевич, Малыгина Вера Владимировна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, balandin-anton@yandex.ru

Задача разрешимости дифференциального уравнения с последействием на оси принципиально отличается от аналогичной задачи на положительной полуоси. Это видно уже на примере самого простого уравнения $\dot{x}(t)+ax(t-1)=0$: его однозначная разрешимость при $t\in R_+$ очевидна; однако при $t\in R$ это уравнение имеет уже бесконечное множество решений [1–2], причем класс решений столь широк, что до сих пор не удалось найти его полного описания.

Большинство авторов, занимавшихся проблемой разрешимости уравнений с последействием на оси, следовало естественной логике поиска решений в некотором заранее заданном пространстве – но с целью найти в нем *все* решения уравнения. Опыт работы в этом направлении показывает, что самой плодотворной оказалась идея ограничить скорость роста решений при $t\to\pm\infty$ некоторой заданной функцией. В работах [3–4] это был класс функций, растущих на бесконечности не быстрее степенной, в работах [1], [5–8] решения должны были иметь подэкспоненциальный рост. При таких ограничениях множество решений функционально-дифференциальных уравнений допускало простое и конструктивное описание.

В настоящей работе также реализуется подход к исследованию уравнений с последействием на оси, основанный на априорном выборе пространства, ограничивающего рост решений на R_- (существование аналогичной оценки на R_+ доказывается непосредственно). Но, в отличие от перечисленных выше работ, поточечная экспоненциальная оценка решения заменяется интегральной. В таких пространствах также удалось найти эффективные условия разрешимости и описать структуру множества решений.

[1] Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2014/152, проект № 1890).
© Баландин А. С., Малыгина В. В., 2016 г.

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с ограниченным последействием

$$\dot{x}(t)+\int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s)=0,\ t\in R, \tag{1}$$

где $\omega>0$, функция $r:[0,\omega]\to C$ имеет ограниченную вариацию, $r(0)=0$. Найдём условия разрешимости и структуру решений уравнения (1) в пространствах

$$L^{\alpha}=\left\{x\in D_{loc}:\int_{-\infty}^{0}\left|x(t)\right|e^{-\alpha t}\,dt<\infty\right\},$$

где D_{loc} – пространство локально суммируемых функций, α – произвольное вещественное число.

Пусть $\left\{p_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ – множество всех корней функции $g(p)=p+\int_0^{\omega}e^{-p\xi}\,dr(\xi)$, $p\in C$, занумерованных так, чтобы $\operatorname{Re}p_1\geq\operatorname{Re}p_2\geq\ldots\geq\operatorname{Re}p_n\geq\ldots$. Порядок нумерации корней с одинаковой вещественной частью произвольный. Через k_n обозначим кратность корня p_n.

Теорема. *Любое решение уравнения* (1) *в пространстве* L^{α} *представимо в виде конечной суммы*

$$x(t)=\sum\nolimits_{\operatorname{Re}p_n>\alpha}q_n(t)e^{p_n t},$$

где q_n *– полином степени* k_n-1 *с произвольными коэффициентами.*

Библиографический список

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. *Schmidt E.* Über eine Klasse linearer funktionalen Differentialgleichungen // Math. Ann. 1911. № 70. S. 499-521.
4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
5. *Green J.W.* A note on the solutions of the equation $f'(x)=f(x+a)$ // Math. Mag. 1953. V. 26. № 3. P. 117-120.
6. *Pitt H.R.* On a class of integro-differential equations. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1944. V. 40. Part. 3. P. 199-211.
7. *Зверкин А.М.* О полноте системы решений типа Флоке для уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравн. 1968. Т. 4. № 3. С. 474-478.

8. *Рябов Ю.А.* Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 1. С. 52-54.

ON SOLVABILITY AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY ON THE AXES

Balandin Anton S., Malygina Vera V.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000,
balandin-anton@yandex.ru

УДК 517.958

МЕТОД РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ И ДЛЯ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ

А. В. Боровских

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия, 119991,
Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, МГУ, мехмат, каф. дифференциальных уравнений.
e-mail: bor.bor@mail.ru; контактный телефон: +7(910)459-92-80

Доклад посвящен результатам, полученным при разработке методов явного, насколько это возможно, решения различных задач для волновых уравнений в одномерной неоднородной среде на основе представления о волне как о движущемся состоянии среды. При таком представлении параметры, характеризующие состояние среды, оказываются числами (или векторами), "переносимыми", полностью или частично, из одной точки пространства в другую.

Несмотря на свою условность, такое представление оказывается чрезвычайно удобным для получения формул решения ряда граничных задач для волнового уравнения, поскольку вся проблема сводится просто к уяснению того, откуда, куда и с каким коэффициентом переносятся значения параметров среды и к интегрированию полученного соотношения по кривой или области, на которой заданы начальные и/или граничные данные.

Математически введение волновых представлений выражается в переходе от пары "фазовых" переменных $u(t,x)$, $u_t(t,x)$ к паре "волновых" (правая и левая волна). Формальной основой такого перехода оказалась *формула распространяющихся волн*, в которой правая и левая волны появляются просто как слагаемые, так что формула распространяющихся волн описывает просто преобразование волновых переменных с течением времени. При этом фигурирующие в интегралах ядра $J(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\tilde{\tilde{\tilde{J}}}(\alpha,\beta,\gamma)$ оказываются коэффициентами переноса значений параметров при отражениях на неоднородностях среды. Эти ядра, как оказалось, имеют универсальный характер, поскольку именно через них выражаются решения всех приведенных ниже задач. Это делает ядра $J(\alpha,\beta,\gamma)$, $\tilde{J}(\alpha,\beta,\gamma)$ (определяемые системой уравнений Вольтерра) аналогом специальных функций, только зависящих не от одного или нескольких скалярных, а от функционального параметра.

© Боровских А.В., 2016 г.

Рассмотрим волновое уравнение в неоднородной среде, приведённое заменой независимой переменной к единичной скорости распространения волны

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s. \qquad (1)$$

Нас интересуют, для простоты, классические решения уравнения, поэтому мы будем предполагать k(s) дважды непрерывно дифференцируемой и положительной, а начальные или граничных данные – достаточно гладкими.

Формула распространяющихся волн для уравнения (1) имеет вид

$$u(t,s) = V^t(s) + W^t(s),$$

где функции $V^t(s)$ и $W^t(s)$ играют ту же роль, что и $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ в классической формуле $u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$ для волнового уравнения в однородной среде $u_{tt}=u_{xx}$, они определяются либо системой дифференциальных уравнений переноса

$$V_t^t + V_s^t = \varphi(s)W^t - \varphi(s)V^t, \qquad W_t^t - W_s^t = \varphi(s)W^t + \varphi(s)V^t,$$

(здесь $\psi(s)=k'(s)/2k(s)$) либо выражаются интегральными формулами

$$V^t(s) = \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}V(s-t) + \frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\,J\left(\frac{s+y-t}{2},\frac{s-y-t}{2},y\right)dy + \frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\,\tilde{J}\left(\frac{s+y-t}{2},\frac{s-y-t}{2},y\right)dy -$$

$$W^t(s) = \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}W(s+t) - \frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\,J\left(\frac{s+y+t}{2},\frac{s-y+t}{2},y\right)dy - \frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\,\tilde{J}\left(\frac{s+y+t}{2},\frac{s-y+t}{2},y\right)dy$$

через свои начальные (при $t=0$) значения – функции $V(\cdot)$ и $W(\cdot)$, связанные с начальными условиями Коши $u(0,s)=u_0(s)$, $u'_t(0,s)=u_1(s)$ соотношениями

$$V(s) + W(s) = u_0(s), \qquad -[k(s)\,V(s)]' + [k(s)\,W(s)]' = k(s)u_1(s).$$

Ядра $J(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\tilde{J}(\alpha,\beta,\gamma)$ определяются из системы интегральных уравнений Вольтерра (интегрирование происходит только по второму и третьему аргументу, так что γ здесь присутствует только как параметр)

$$J(\alpha,\beta,\gamma) = -\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(\sigma-\beta)\tilde{J}(\sigma,\beta,\gamma)d\sigma, \qquad \tilde{J}(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi(\alpha) + \int_{\beta}^{0} \varphi(\alpha-\tau)\, J(\alpha,\tau,\gamma)d\tau.$$

Аналогичные результаты получены для волновых уравнений для неоднородной среды с памятью, выражаемой членом интегрального типа.

УДК 517.929

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Бравый Евгений Ильич

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, bravyi@perm.ru

Функционально-дифференциальные уравнения и системы таких уравнений широко используются при математическом описании самых разных явлений (например, [1, 2]). Вопрос о возможности существования нетривиальных периодических режимов – один из основных вопросов, возникающий при исследовании моделей [3]. В линейном случае он сводится к условиям существования и единственности решений периодической краевой задачи, обладающей свойством фредгольмовости при естественных предположениях. Мы рассмотрим два класса периодических краевых условий. Для каждого будут предложены необходимые и достаточные условия существования и единственности периодической краевой задачи для всех уравнений из заданного семейства. Ранее такого рода необходимые и достаточные условия разрешимости периодической задачи были известны только для отдельных случаев систем уравнений. В частности, для уравнений с циклической матрицей и периодическими условиями по каждой переменной или для систем двух скалярных уравнений [4–9].

Рассмотрим систему $n \geq 2$ функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (T_{ij}x_j)(t) + f_i(t), \qquad t \in [0,1], \qquad i = 1, \dots, n, \qquad (1)$$

где T_{ij} – линейные ограниченные операторы, действующие из пространства непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций в пространство суммируемых на этом отрезке вещественных функций $L[0,1]$, $f_i \in L[0,1]$, $i, j = 1, \dots, n$. Предполагается, что каждый из операторов T_{ij} положителен (отображает неотрицательные функции в неотрицательные) или отрицателен (оператор $-T_{ij}$ положителен). Знак оператора T_{ij} определяется знаком обратной связи между переменными x_i и x_j в системе (1).

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №14-01-00338.
© Бравый Е. И., 2016 г.

Под решением (1) понимается набор абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций x_i, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих каждому уравнению системы (1) при почти всех $t \in [0,1]$.

Зададим периодические краевые условия равенствами

$$x_i(0) = x_i(1), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

или равенствами

$$x_i(1) = x_{i+1}(0), \qquad i = 1, \dots, n-1, \qquad x_n(1) = x_1(0). \tag{3}$$

Задача (1), (2) – классическая периодическая задача с единичным периодом, к задаче (1), (3) приводит рассмотрение периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с ограничениями на поведение отклоняющегося аргумента.

Наша цель – получить условия существования и единственности решений периодической краевой задачи (1), (2) и задачи (1), (3) для всех систем (1) из заданного семейства. Семейства уравнений будем задавать нормами входящих в систему (1) функциональных операторов следующим образом. Норма положительного оператора определена равенством. Пусть даны две $n \times n$ матрицы: S с компонентами $s_{ij} \in \{-1,0,1\}$ и P с неотрицательными компонентами p_{ij}, причем, если $s_{ij} = 0$, то $p_{ij} = 0$. Семейством (S,P) будем называть множество таких систем (1), что $s_{ij}T_{ij}$ – положительный оператор с нормой p_{ij} при каждых $i,j = 1, \dots, n$.

Основной результат работы: для каждого семейства проверка того, что все краевые задачи (1), (2) (или (1), (3)) имеют единственное решение, заключается в проверке положительности конечного числа функций на $\mathbf{r}$-мерном кубе, причем каждая из этих функций является многочленом не более второй степени по каждой переменной.

Такая проверка может быть эффективно осуществлена с помощью компьютерных систем, но в некоторых случаях удается получить аналитические условия разрешимости. Приведем пример необходимого и достаточного условия разрешимости. Пусть

$$n = 3, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Теорема. Для того чтобы задача (1), (3) имела единственное решение при всех системах (1) из семейства (S,P), определенного равенствами (4), необходимо и достаточно,

$p \in (0, p^*)$, где $p^* \approx 2{,}7027$

чтобы было выполнено включение – единственное положительное решение уравнения.

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.
   Москва: Институт компьютерных исследований. 2002.
2. *Cao J.D.; Lu J.Q.* Adaptive synchronization of neural networks with or without time-varying delay // Chaos.2006. V. 16. No. 013133.
3. *Myshkis A.D.* Periodic solutions of the simplest continuous system with delay and relaxation // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 246–253.
4. *Hakl R., Lomtatidze A., Puza B.* On a periodic boundary value problem for the first order scalar functional differential equation // Differential Equations. 2003. V. 39. No. 3.P. 310–327.
5. *Mukhigulashvili S.* On a periodic boundary value problem for cyclic feedback type linear functional differential systems // Archiv der Mathematik. 2006. V. 87. No. 3. P. 255–260.
6. *Mukhigulashvili S.*On a problem with nonlinear boundary conditions for systems of functional-differential equations // Differential Equations. 2010. V. 46. No. 1.P. 48–60.
7. *Бравый Е.И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2011.
8. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической краевой задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений с циклической матрицей // Известия вузов. Математика. 2011. № 10. С. 17–27.
9. *Bravyi E.* On the solvability of the periodic problem for systems of linear functional differential equations with regular operators // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2011. No. 59. P. 1–17.

ON PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Bravyi Evgenii I.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614990, bravyi@perm.ru

УДК 519.6

МЕТОДИКА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Булаев Владимир Владимирович

АО «Научно-производственное объединение автоматики им. академика Н.А. Семихатова», 620075, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 145, bulaev1991@mail.ru

Шориков Андрей Федорович

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, afshorikov@mail.ru

Для разработки цифровых систем систем управления, например для ракет-носителей, разработчику требуется адаптировать модель объекта управления к требуемому классу систем. В работе предлагается алгоритм дискретизации линейных динамических систем, основанный на соотношениях, вытекающих из формулы Коши [2,3,5]. Указанный алгоритм позволяет перейти от непрерывной модели управляемого объекта, записанной в явной форме Коши, к дискретной с заданным периодом дискретизации.

Методика дискретизации применена для формирования дискретной динамической модели возмущенного движения первой ступени перспективной ракеты-носителя «Союз-5.1» в плоскости тангажа [1]. Сформированная модель позволяет формализовать задачу стабилизации движения как задачу оптимального управления дискретной динамической системой и применить подходы к ее решению [4].

Библиографический список

1. *Булаев В.В., Горанов А.Ю.* Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. 2015. Т. 15, № 4. С. 90–100.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
3. *Медич Дж.* Статистически оптимальные оценки и управление. Москва: Энергия, 1973. 440 с.
4. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.
5. *Khalil H.K.* Nonlinear systems (2nd ed.). New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №15-01-02368.

© Булаев В. В., Шориков А. Ф., 2016 г.

THE DISCRETIZATION PROCEDURE FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Bulaev Vladimir V.

JSC «Scientific and Production Association of automatics named after academician N.A. Semikhatov», 145 Mamina-Sibiryaka st., Yekaterinburg, Russian Federation, 620075, bulaev1991@mail.ru

Shorikov Andrew F.

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 19 Mira st., Yekaterinburg, Russian Federation, 620002, afshorikov@mail.ru

УДК 517.929

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ[1]

Власов Виктор Валентинович, Раутиан Надежда Александровна

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Россия, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, vicvvlasov@rambler.ru

Наши исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int_0^t \Gamma_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \int_0^t \Gamma_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ - вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $x \in \Omega$, $t > 0$, $\rho > 0$ - постоянная плотность, коэффициенты Ламе λ, μ - положительные постоянные, $Lu = (L_1 + L_2)u = \mu\cdot(\Delta u + \text{grad div}u) + \lambda\cdot\text{grad div}u$ - оператор Ламе теории упругости, Γ_1, Γ_2 - функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды, представимые рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см. [7]). Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работах [3] - [6].

---

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №14-01-00349а.
© Власов В.В., Раутиан Н.А., 2016 г.

Библиографический список

1. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V.31. P. 113 - 126.
2. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory // J. Math. Anal. Appl. 1978. T.66. P. 313 - 332.
3. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. Под редакцией В. А. Садовничего. Современные проблемы математики и механики. Том VIII. Математика. Выпуск 1. М.: Издательство МГУ имени М.В. Ломоносова, 2011.
4. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т.30. С. 3-173.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т.39. С. 36 - 65.
6. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral Analysis and Representations of Solutions of Abstract Integro-differential Equations in Hilbert Space // Operator Theory: Advances and Applications. 2013. V. 236 P. 519-537. Springer Basel AG.
7. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т.58. С. 22 - 42.

SPECTRAL ANALYSIS OF LINEAR VISCOELASTICITY MODELS

Vlasov Victor V., Rautian Nadezhda A..

Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, Main Building, Moscow, GSP-1, Russia, 119991, vikvvlasov@rambler.ru

УДК 517.929

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Долгий Юрий Филиппович

Уральский федеральный университет, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
Институт математики и механики УрО РАН, Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, yurii.dolgii@imm.uran.ru

Изучается зависимость устойчивости линейной динамической системы с последействием от формы описания линейной динамической системы и выбора топологий функциональных пространств.

Рассмотрим линейную динамическую систему на временной оси *R*. Функцию, моделирующую динамический процесс до начального момента времени $t_0 \in [a,+\infty)$, $\varphi(\cdot) \in \Phi = \Phi((-\infty, t_0], R^n)$ будем называть предысторией динамического процесса, а функцию, моделирующую динамический процесс после начального момента времени, $x(\cdot) \in X = X((t_0,+\infty), R^n)$ --- историей динамического процесса. Здесь $\Phi((-\infty, t_0], R^n)$ и $X((t_0,+\infty), R^n)$ --- топологические векторные пространства. Линейный оператор $S(t_0): \Phi((-\infty, t_0], R^n) \to X((t_0,+\infty), R^n)$ задает описание системы в терминах “предыстория-история”. Линейная динамическая система, описанная в терминах “предыстория—история”, удовлетворяет условию корректности, если непрерывно отображение $S(t_0): \Phi \to (X, \tau_p)$, где τ_p --- топология проективного предела пространства X. Устойчивость линейной динамической системы, описанной в терминах “предыстория-история”, связана с непрерывностью отображения $S(t_0): \Phi \to (X, \tau_n)$, в котором топология проективного предела заменяется более сильной топологией τ_n нормированного пространства. В рамках этого описания при исследовании устойчивости автономных линейных динамических систем с последействием эффективно использовали методы преобразования Лапласа [1].

При эволюционном описании динамической системы с ограниченным последействием r элементы, определяющие предыстории φ_{t_0} и истории x_t, $t \ge t_0$, принадлежат нормируемому пространству $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}([-r,0], R^n)$, которое называется фазовым.

© Долгий Ю. Ф., 2016 г.

Эволюционное описание линейной динамической системы задается двухпараметрическим семейством линейных непрерывных операторов $\{T(t,t_0), t \ge t_0 \ge a\}$, $T(t,t_0): \hat{\Phi}([-r,0], R^n) \to \hat{\Phi}([-r,0], R^n)$. Требование корректности эволюционного описания можно описать в топологическом пространстве $C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$, вводя для него топологию проекционного предела нормированных пространств. Для исследования устойчивости линейной динамической системы при эволюционном описании, обычно, используют топологию пространства $\mathbf{C} = C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$, определяемую следующей нормой его элементов $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t>t_0} \|x_t(\cdot)\|_{\hat{\Phi}}$. Эволюционное описание динамической системы с ограниченным последействием дает возможность при исследовании устойчивости динамических процессов использовать результаты спектральной теории линейных операторов [2, 3].

Рассмотрим описание линейной динамической системы в терминах “вход-выход”. Входной сигнал моделируется функцией $u(\cdot) \in U = U([t_0,+\infty), R^m)$, а выходной сигнал --- функцией $x(\cdot) \in X = X([t_0,+\infty), R^n)$. Здесь $U([t_0,+\infty), R^m)$ и $X([t_0,+\infty), R^n)$--- топологические векторные пространства. Описание системы в терминах “вход-выход” задается линейным оператором $F: U([t_0,+\infty), R^m) \to X([t_0,+\infty), R^n)$. Обзор результатов по теории устойчивости динамических систем с последействием, по отношению к постоянно действующим возмущениям, приведен в монографии [4].

Библиографический список

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1984.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1967..
4. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

THE STABILITY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

Dolgii Yurii F.

Ural Federal University, Russia, 620002, Ekaterinburg, Mira st., 19
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 620990, Ekaterinburg, S. Kovalevskoi st., 16. yurii.dolgii@imm.uran.ru

УДК 517.929.4

О РАЗВИТИИ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Дружинина Ольга Валентиновна

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65, ovdruzh@ipu.ru

Седова Наталья Олеговна

Ульяновский государственный университет, 432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, sedovano@ulsu.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение с бесконечным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, и для функции $x \in C((-\infty, A), R^n)$ при каждом значении $t < A$ определим отображение $x_t :(-\infty,0] \to R^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$, $s \le 0$. Решение $x(t;t_0,\varphi)$ уравнения (1) с начальной функцией $\varphi :(-\infty,0] \to R^n$ при $t \in [t_0, \beta)$, $\beta > t_0$, определяется как непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[t_0, \beta)$, и такое, что $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$. Предполагается, что x_t при всех t из области определения решения принадлежит допустимому фазовому пространству с исчезающей памятью [1], и правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиями типа Каратеодори из [1]. Эти условия обеспечивают существование, единственность и непрывную зависимость решений уравнения (1) от начальных данных, при этом если решение ограничено по норме постоянной *h*<*H*, то оно неограниченно продолжается вправо и положительная орбита такого решения $\{x_t(t_0,\varphi_0): t \ge t_0\}$ предкомпактна в пространстве *B*. Кроме того, уравнению (1) можно поставить в соответствие семейство *предельных уравнений* $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, где $f^*(t,\varphi)$ есть предельный к f функционал, определяемый некоторой последовательностью $t_k \to +\infty$ как предельная точка последовательности $f(t+t_k,\varphi)$ в некотором функциональном пространстве [1].

---

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН № I.31.

© Дружинина О. В., Седова Н.О., 2016 г.

Пусть $V = V(t,x)$, $V \in C^1(R \times G_H, R^+)$ есть функция Ляпунова, где $G_H = \{x \in R^n : |x| < H\}$. Ее производная в силу уравнения (1) есть функционал $V' : R^+ \times B_H \to R$: $V'(t,\varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x_i} f_i(t,\varphi)$.

Определим также функционал $W \in C(R^+ \times B_H, R^+)$. Используем следующее определение [2]:

Определение 1. *Пара* (V,W) *называется парой Ляпунова-Разумихина, если* $V(t,x) \ge 0$, $V(t,0) = 0$, $W(t,0) = 0$, *и для каждого* $\rho > 0$, $t \ge \rho$ *и* $\varphi \in B_H$ *такой, что* $\varphi_{-\rho} \in B_H$ *и* φ *непрерывна на* $[-\rho, 0]$, *выполняется*

$$V(t,\varphi(0)) \le W(t,\varphi) \le \max\{\max_{-\rho \le s \le 0} V(t+s,\varphi(s)), W(t-\rho,\varphi_{-\rho})\},$$

если $0 < V(t,\varphi(0)) = W(t,\varphi)$, то $V'(t,\varphi) \le 0$.

Предполагается, что функционал $W(t,\varphi)$, а также некоторый функционал $U : R^+ \times B_H \to R^+$, для которого справедливы оценки $0 \le U(t,\varphi) \le |V'(t,\varphi)|$, также удовлетворяют условиям типа Каратеодори. Заметим, что в силу непрерывной дифференцируемости по всем аргументам функция $V(t,x)$ удовлетворяет аналогичным условиям. Тогда любая последовательность $t_n \to +\infty$ определяет отображения, предельные к V, W, U, которые образуют предельную совокупность (V^*, W^*, U^*).

Для уравнения (1) обоснованы достаточные условия асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости в зависимости от ограничений на функцию $V(t,x)$ и ее производную в силу уравнения (1), а также на некоторые множества, определяемые предельными V^*, W^*, U^*. Эти условия могут быть модифицированы так, что в них не фигурируют предельные функции и функционалы, при этом они становятся, вообще говоря, более ограничительными. Основное отличие полученных результатов от ранее известных заключается в более общих предположениях относительно правой части уравнения и вспомогательных функций и функционалов, в терминах которых формулируются условия устойчивости.

Полученные результаты быть применены к исследованию качественного поведения многомерных математических моделей биологии, робототехники и биомеханики.

Библиографический список

1. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Метод предельных уравнений исследования устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием в условиях Каратеодори. I. // Дифференциальные уравнения. 2014. Т.50, № 5. С. 572–583.
2. *Седова Н.О.* К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Диффер. уравнения. 2002. V.10. С.1338–1347.

ON LYAPUNOV FUNCTION METHOD FOR INFINITE DELAY EQUATION

Druzhinina Olga V.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Profsoyuznaya st., 65, Moscow, Russia, 117997, ovdruzh@ipu.ru

Sedova Natalya O.

Ulyanovsk State University, Leo Tolstoi st., 42, Ulyanovsk, Russia, 432000, sedovano@ulsu.ru

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ[1]

Желонкина Наталья Игоревна

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Сесекин Александр Николаевич

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, УрО РАН, Россия, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, sesekin@list.ru

Работа посвящена исследованию устойчивости и асимптотической устойчивости для линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы. Системы с такого рода с импульсным воздействием встречаются в электрофизике, технике, медицине, биологии (см. [1-3]) и экономике [4,5]. Свойства асимптотической устойчивости для таких систем рассматривались в [6-7]. Заметим, что в этих работах, импульсное воздействие играло роль возмущения, а свойство асимптотической устойчивости обеспечивалось за счет асимптотической устойчивости линейной однородной системы без импульсов. В данной работе предполагается, что однородная система без импульсов – неустойчива, а свойство устойчивости и асимптотической устойчивости достигается за счет импульсного воздействия. В отличии от [6-7] в данной работе обобщенное воздействие не содержит регулярной составляющей и является обобщенной производной ступенчатой функции. Особенностью рассматриваемой системы также является то, что в правой части системы имеются некорректные операции умножения разрывной функции на $\delta-$ функцию.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} D_{\mathrm{j}}(t)\dot{\upsilon}_i(t) \right) x(t), \quad t \ge t_0, x(t_0) = x_0 . \tag{1}$$

Здесь $A(t)$, $D_j(t), j \in \overline{1,m}$ - непрерывные ограниченные матрицы-функции размерности $n \times n$, $D_j(t)$ -взаимно коммутативны, υ_i - компоненты вектор функции $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \ldots, \upsilon_m(t))^T$ кусочно–постоянные функции, последовательности точек разрыва $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{n\to\infty} t_i = \infty$. Функции $\upsilon_i(t)$ - в точках разрыва будем считать непрерывными слева. Устойчивость системы (1) в случае, когда $\upsilon_i(t)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – произвольные функции ограниченной вариации, рассматривались в [6-7].

---

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №16-01-00505.
© Желонкина Н.И., Сесекин А.Н., 2016 г

При сделанных предположениях на функции $\upsilon_i(t)$ систему (1) можно записать в виде:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} D_{\mathrm{j}}(t) \Delta \upsilon_j(t_i) \cdot \delta(t - t_i) \right) x(t),$$

где $\Delta \upsilon_j(t_i) = \upsilon_j(t_i + 0) - \upsilon_j(t_i)$ – скачки кусочно-постоянных функций $\upsilon_i(t)$, $\delta(t - t_i)$ - δ - функция Дирака [1], сосредоточенная в момент t_i.

Как и в [1,6-8] под аппроксимируемыми решениями системы (1) будем понимать функции ограниченной вариации $x(t)$, являющиеся поточечными пределами последовательностей абсолютно непрерывных функций $x_k(t)$ - решений системы (1), порожденных последовательностями абсолютно непрерывных функций $\upsilon_k(t)$, поточечно сходящимися к вектор-функции ограниченной вариации $\upsilon(t)$, если предел не зависит от выбора $\upsilon_k(t)$.

Теорема. Пусть справедливо неравенство $\left\| \tilde{D}_i(s) \right\| \le e^{\lambda_i s}$, где $\tilde{D}_i(s)$ - нормированная фундаментальная матрица для системы $\dot{z} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} D_{\mathrm{j}}(t_i) \Delta \upsilon_j(t_i) \cdot z$, а также имеет место неравенство $\left\| Y(t,s) \right\| \le c e^{\alpha(t-s)}$, где $Y(t,s)$ - фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t) x(t)$. Тогда если выполняется условие

$$\lim_{i \to \infty} \left(i \ln c + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k + \alpha(t_i - t_0) \right) = \beta < \infty,$$

то система (1) устойчива, а если выполняется условие

$$\lim_{i \to \infty} \left(i \ln c + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k + \alpha(t_i - t_0) \right) = -\infty,$$

то система (1) асимптотически устойчива.

Библиографический список

1. *Zavalishin S. T., Sesekin A. N.*. Dynamic Impulse Systems: Theory and // Kluwer Academic Publisher, Dorbecht, 1997. P.256.
2. *Миллер Б. М., Рубинович В. Я.*. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно – временных преобразований // Автоматика и телемеханика, 2013. № 12. С. 56-103.
3. *Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.*. Оптимальное импульсное управление с приложениями. // Москва. Физматлит, 2003.

4. *Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М.*. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация. // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика, 2015. № 4(27). С.8–32.
5. *Максимов В. П.*. Позиционное парирование импульсных возмущений в задаче управления линейной системой с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика, 2014. № 2(21). С.6–14.
6. *Корнилов И. А*., *Сесекин А. Н*.. Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции // Вестник УГТУ-УПИ, 2004. № 3(33). С.386–388.
7. *Желонкина Н. И., Сесекин А. Н., Сорокин С. П.* Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы и запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 1. С.40-46.
8. *Сесекин А. Н.*. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. / Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 2. С.497-514.

THE STABILITY OF LINEAR SYSTEM WITH IMPULSE ACTION IN THE SYSTEMS MATRIX

Zhelonkina Natalia I.

Ural Federal University, Russia, 620002, Ekaterinburg, Mira st., 19

Sesekin Alexander N.

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, 620990, Ekaterinburg, Sofyi Kovalevskoy st., 16, **e**-mail: sesekin@list.ru

УДК 517.977.1, 517.926

О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ ХЕССЕНБЕРГА[1]

Зайцев Василий Александрович

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, verba@udm.ru

Рассмотрим линейную нестационарную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \tag{1}$$

с измеримыми, локально суммируемыми коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$. Пусть управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, где $U : R \to M_{m,n}$ – измеримая, ограниченная функция. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \qquad t \in R, \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Исследуются задачи о глобальном управлении асимптотическими инвариантами системы (2).

Показатели Ляпунова линейной системы (2) называются *глобально управляемыми* [1, с. 184], если для всякого набора чисел $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_n$ существует измеримое, ограниченное управление $\hat{U}(t)$, $t \in R$, такое, что $\lambda_j(A + B\hat{U}) = \alpha_j$, $j = \overline{1,n}$, где $\lambda_1(A + B\hat{U}) \le \ldots \le \lambda_n(A + B\hat{U})$ – полный спектр показателей Ляпунова системы (2) при $U = \hat{U}$. Говорят [1, § 25, § 30], что система (2) с измеримыми, интегрально ограниченными коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$:

(a) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости* [(b) называется *глобально скаляризуемой*], если для любой системы

$$\dot{z} = F(t)z, \quad t \in R, \quad z \in R^n, \tag{3}$$

с измеримой, интегрально ограниченной матрицей $F(\cdot)$ [вида $F(t) = p(t)I$, $p : R \to R$] найдется измеримое и ограниченное управление $\hat{U}(t)$, $t \in R$, такое, что система (2) с $U = \hat{U}$ асимптотически эквивалентна (по Богданову) системе (3), то есть существует преобразование Ляпунова, связывающее эти системы.

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект №16-01-00346) и Минобрнауки РФ в рамках базовой части (проект № 2003).
© Зайцев В. А., 2016 г.

Предположим, что коэффициенты системы (1) имеют следующий вид: $m=1$,

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(t) & \dots & \dots & \dots & b_{n-1}(t) \\ a_{n1}(t) & \dots & \dots & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

Система (1) с коэффициентами вида (4) называется системой в (нижней) форме Хессенберга. Для систем в форме Хессенберга установлены новые достаточные условия в задачах о глобальном управлении асимптотическими инвариантами.

Теорема 1. Пусть система (1) имеет форму Хессенберга (4) и выполнены следующие условия:

(a) матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ измеримые и ограниченные на R;

(b) $|b_i(t)|\geq\kappa>0$, $t\in R$, для всех $i=\overline{1,n}$;

(c) $b_i, a_{ij}\in\Theta^{(n-i)}(R)$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,i}$;

Тогда система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

Запись $f\in\Theta^{(k)}(R)$ означает, что функция $f:R\to R$ ограничена на R, имеет локально абсолютно непрерывные на R и ограниченные на R производные до порядка $(k-1)$ и измеримую, ограниченную (п.в. на R) производную порядка k.

Будем говорить, что локально суммируемая функция $b:R\to R$ удовлетворяет условию Y_1, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\tau\in R\ \forall h\ (0<h<\delta\Rightarrow\int_\tau^{\tau+1}|b(t+h)-b(t)|\,dt<\varepsilon)$.

Теорема 2 [2] Пусть система (1) имеет форму Хессенберга (4), и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

(a) функция $\int_0^t|A(s)|ds$ равномерно непрерывна на R;

(b) $b_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n-1}$, удовлетворяют условию Y_1;

(c) $b_n(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна и ограничена на R;

(d) $|b_i(t)|\geq\kappa>0$, $t\in R$, для всех $i=\overline{1,n}$.

Тогда:

(A) система (2) глобально скаляризуема;

(B) показатели Ляпунова системы (2) глобально управляемы.

Теорема 3 [2] Пусть система (1) имеет форму Хессенберга (4), и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

(a) $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – ω-периодические функции $(\omega > 0)$;

(b) $A(\cdot)$ – измеримая, локально суммируемая;

(c) $b_n(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на R;

(d) существует промежуток $\Delta = (t_0, t_1)$ такой, что $b_i(t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, для п.в. $t \in \Delta$.

Тогда система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

Библиографический список

1. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012.
2. *Зайцев В.А.* Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, № 3. С. 318-337.

ON GLOBAL CONTROL OVER ASYMPTOTIC INVARIANTS OF LINEAR SYSTEMS IN THE HESSENBERG FORM

Zaitsev Vasilii A.

Udmurt State University, 1 Universitetskaya st., Izhevsk, Russia, 426034, verba@udm.ru

УДК 517.968.74

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Искандаров Самандар

Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики, 720071, г. Бишкек, пр. Чуй 265-А, mrmacintosh@list.ru

Халилова Гулжан Ташполотовна

Кыргызско-Российская академия образования, 720009, г. Бишкек, ул. Л. Толстого, 210, g.khalilova@bk.ru

Все фигурирующие в работе функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ- интегро-дифференциальное уравнение; ДУ- дифференциальное уравнение.

Как известно, изучение оценок снизу решений и их производных ИДУ высоких порядков типа Вольтерра является одним из трудных вопросов асимптотической теории таких уравнений на полуоси. Нами же показана принципиальная возможность исследования этого вопроса на примере ИДУ четвертого порядка, а именно рассматривается следующая

Задача. Установить достаточные условия, обеспечивающие оценки снизу и стремления к бесконечности при $t \to \infty$ решений и их производных до третьего порядка включительно линейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) +$$
$$+Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)]d\tau = f(t), \quad t \ge t_0. \tag{1}$$

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^4(J, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1,2,3)$. Каждое такое решение существует и единственно.

Насколько нам известно, сформулированная нами задача ранее никем не изучена. Эта задача имеет непосредственную связь с вопросом о неустойчивости (по Ляпунову) и неосцилляцией решений ИДУ вида (1) и некоторых систем ИДУ типа Вольтерра.

© Искандаров С., Халилова Г.Т., 2016 г.

Заметим, что достаточные условия неустойчивости решений систем линейных и нелинейных ИДУ типа Вольтерра установлены методом сравнения с решениями соответствующих невозмущенных систем линейных ДУ в работах М.И. Иманалиева и Ю.А. Ведь (1971-1973); систем линейных ИДУ типа Вольтерра первым методом Ляпунова в работе В.С. Сергеева (1998), методом матричных весовых и срезывающих функций в работе С. Искандарова (1999). Вопросы оценок снизу решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений исследованы в работах Н.В. Азбелева, З.Б. Цалюка (1965), Ю.Н. Смолина (1979), T.A. Burton's (1983), R.P. Agarwal's, L. Berezansky, E.Braverman's, A.Domoshnitsky (2012).

Для решения поставленной задачи развивается метод, основанный на идеях метода нестандартного сведения к системе С. Искандарова (2010), метода преобразования уравнений В. Вольтерра (1928), метода срезывающих функций С. Искандарова (1980), метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973), метода априорных оценок Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова (1991, 2001), метода Лагранжа для интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка и метода оценки снизу решений Ю.А. Ведь, Л.Н. Китаевой (1965).

Схема исследования такова: сначала устанавливаются априорные оценки на полуоси для решений и их производных до третьего порядка включительно, затем производятся оценки снизу, используя отдельно интегральные представления для решений и их первых, вторых, третьих производных, при этом образуются четыре многообразия для начальных данных. Приведем суть метода нестандартного сведения к системе. Согласно работам авторов [1, 2] в ИДУ (1) делаются следующие замены:

$$x'(t) = \delta\, x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \tag{3}$$

где $0<\delta$, λ – некоторые вспомогательные параметры; $0<W_k(t)$ $(k=1,2)$ – некоторые весовые функции; $y(t), z(t)$ – новые неизвестные функции.

Тогда ИДУ четвертого порядка (1) сводится с следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) = \delta\, x(t) + W_1(t)y(t), \\ y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \\ z''(t) + b_3(t)z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \\ +\int\limits_{t_0}^{t} [P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + P_2(t,\tau)z(\tau) + K(t,\tau)z'(\tau)]d\tau = F(t), \quad t \ge t_0, \end{cases} \tag{4}$$

где $b_3(t) \equiv a_3(t) + A_5(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$, $b_2(t) \equiv a_2(t) + [a_3(t)A_2(t) + A_4(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$,

$$b_1(t) \equiv a_1(t)(W_2(t))^{-1} + [a_2(t)W(t) + a_3(t)A_1(t) + A_3(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1},$$

$$b_0(t) \equiv [a_0(t) + \delta a_1(t) + \delta^2 a_2(t) + \delta^3 a_3(t) + \delta^4](W_1(t)W_2(t))^{-1} \quad , \quad A_5(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))' + A_2(t) \quad ,$$

$$A_2(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))' + W(t)W_2(t), \;\; W(t) \equiv W_1'(t) - \lambda W_1(t) + \delta W_1(t); \;\; A_4(t) \equiv A_2'(t) + A_1(t)W_2(t),$$

$$A_1(t) \equiv W'(t) + \delta^2 W_1(t) - \lambda W(t), \qquad\qquad A_3(t) \equiv A_1'(t) - \lambda A_1(t) + \delta^3 W_1(t),$$

$$P_0(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) + \delta Q_1(t,\tau) + \delta^2 Q_2(t,\tau) + \delta^3 Q_3(t,\tau)],$$

$$P_1(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W(\tau) + Q_3(t,\tau)A_1(\tau)],$$

$$P_2(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau) + Q_3(t,\tau)A_2(\tau)],$$

$$K(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)\,, \;\; F(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1} f(t)\,.$$

Отметим, что по сравнению с исходным ИДУ четвертого порядка (1) полученная система (4) легко исследуется, так как мы заданное ИДУ (1) расщепили на систему из трех простейших уравнений. Идея получения простейшей системы (4) вместо сложного ИДУ четвертого порядка (1) заимствована из идей методов расщепления операторов из монографии академика Г.И. Марчука [3]. Отметим также, что идея введения некоторой весовой функции типа $W(t)$ для исследования устойчивости решений ДУ с последействием содержится в монографии академика Н.Н. Красовского [4, с. 199] и в монографии Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной [5, с. 96-99].

Библиографический список

1. *Искандаров С.* Метод нестандартного сведения к системе и экспоненциальная устойчивость линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, №6. С. 898-899. (О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете).
2. *Искандаров С., Халилова Г.Т.* Оценки снизу решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Бишкек: КНУ, 2011. Спец. вып. С. 61-65.
3. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
5. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.:Наука,1991. 280 с.

LOWER ESTIMATES OF SOLUTIONS AND THEIR DERIVATIVES OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Iskandarov Samandar

Institute of Theoretical and Applied Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 720071, Bishkek, Chui Avenue 265-A, mrmacintosh@list.ru.

Khalilova Guljan T.

Kyrgyz-Russian Academy of Education, 720009, Bishkek, L.Tolstoy street, 210, g.khalilova@bk.ru.

УДК 517.968.74

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Искандаров Самандар

Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики, 720071, г. Бишкек, пр. Чуй 265-А, mrmacintosh@list.ru

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ шестого порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их производных до пятого порядка включительно.

Задача. Получить достаточные условия асимптотической устойчивости любого решения линейного однородного ИДУ шестого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(6)}(t) - a_5(t)x^{(5)}(t) + a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau) + Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau) +\right.$$
$$\left. + Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)\right]d\tau = 0, \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

при условии

$$a_5(t) \geq 0, \tag{a_5}$$

т.е. в случае, когда любое ненулевое решение дифференциального уравнения:

$$x^{(6)}(t) - a_5(t)x^{(5)}(t) + a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, \tag{1_0}$$

$t \geq t_0$ не является АУ, что следует из формулы Остроградского-Лиувилля.

Такая задача называется специфической и ранее никем не изучена.

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^6(J, R)$ с любыми начальными данными $x^k(t_0)$ $(k = 0,1,2,3,4,5)$. Каждое такое решение существует и единственно.

© Искандаров С. – 2016 г.

Для решения поставленной задачи разработан метод, суть которого состоит в следующем. В ИДУ (1) делается нестандартная замена автора [1]:

$$x^{(4)}(t)+p_3x'''(t)+p_2x''(t)+p_1x'(t)+p_0x(t)=W(t)y(t), \tag{2}$$

где p_k - некоторые вспомогательные параметры, причем $p_k>0 \quad (k=0,1,2,3)$; $0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ (1) приводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)+p_3x'''(t)+p_2x''(t)+p_1x'(t)+p_0x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)-b_5(t)y'(t)+b_4(t)y(t)+b_3(t)x'''(t)+b_2(t)x''(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)x'(\tau)+P_2(t,\tau)x''(\tau)+P_3(t,\tau)x'''(\tau)+P_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)+ \\ +K(t,\tau)y(\tau)]d\tau=0, \quad t\ge t_0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$b_5(t)\equiv a_5(t)+p_3-2W'(t)(W(t))^{-1}$,

$b_4(t)\equiv a_4(t)+[p_3-W'(t)(W_1(t))^{-1}]a_5(t)+p_3^2-p_2+[W''(t)-p_3W'(t)](W(t))^{-1}$,

$b_3(t)\equiv[a_3(t)-p_3a_4(t)+(p_2-p_3^2)a_5(t)+p_2p_3-p_1-p_3(p_3^2-p_2)](W(t))^{-1}$,

$b_2(t)\equiv[a_2(t)-p_2a_4(t)+(p_1-p_2p_3)a_5(t)+p_1p_3-p_0-p_2(p_3^2-p_2)](W(t))^{-1}$,

$b_1(t)\equiv[a_1(t)-p_1a_4(t)+(p_0-p_1p_3)a_5(t)+p_0p_3-p_1(p_3^2-p_2)](W(t))^{-1}$,

$b_0(t)\equiv[a_0(t)-p_0a_4(t)-p_0p_3a_5(t)-p_0(p_3^2-p_2)](W(t))^{-1}$,

$P_0(t,\tau)\equiv[Q_0(t,\tau)-p_0Q_4(t,\tau)+p_0p_3Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}$,

$P_1(t,\tau)\equiv[Q_1(t,\tau)-p_1Q_4(t,\tau)+(p_1p_3-p_0)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}$,

$P_2(t,\tau)\equiv[Q_2(t,\tau)-p_2Q_4(t,\tau)+(p_2p_3-p_1)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}$,

$P_3(t,\tau)\equiv[Q_3(t,\tau)-p_3Q_4(t,\tau)+(p_3^2-p_2)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}$,

$P_4(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}[Q_4(t,\tau)W(\tau)+Q_5(t,\tau)(W'(\tau)-p_3W(\tau))]$,

$K(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}Q_5(t,\tau)W(\tau)$,

Далее для произвольно фиксированного решения ($x(t)$, $y(t)$) обе части первого уравнения системы (3) возводим в квадрат [1;2, с. 28], второе уравнение системы (3) умножаем на $y'(t)$ [2, с. 25-27], сложим полученные соотношения, затем проводим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом аналогично [1], вводим функции $\psi(t)$, $R(t,\tau)$, делаем преобразования аналогичные преобразованиям (3. 108) - (3.113) из [2, с. 149-151] или преобразованиям (9) – (12) из [3], к полученному интегральному неравенству используем лемму 1 [4] об интегральном неравенстве, затем применим лемму Люстерника - Соболева [5, с. 393-394;6] (Лемма Люстерника - Соболева. Если $x^{(k)}(t) \in L^2(J,R)$ $(k=0,1)$, то $x(t) \to 0,\ t \to \infty$).

Построен иллюстративный пример, показывающий естественность полученных достаточных условий.

Библиографический список

1. *Искандаров С.* О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2014. Вып. 46. С.41-48.
2. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
3. *Иманалиев М.И., Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка // Докл. Российск. Акад. наук. 2009. Т. 425, №4. С. 447 - 451.
4. *Ведь Ю.А., Пахыров З.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып.9. С. 68-103.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44. С.44-51.

ABOUT THE METHOD OF INVESTIGATION OF A SPECIFIC ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SIXTH ORDER

Iskandarov Samandar

Institute of Theoretical and Applied Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 720071, Bishkek, Chui Avenue 265-A, mrmacintosh@list.ru.

УДК 517.929

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГРАММЫ ИЗУЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ СТАНДАРТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ[1]

Кипнис Михаил Мордкович

Челябинский государственный педагогический университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 69, mmkipnis@gmail.com

Иванов Сергей Александрович, Хохлова Татьяна Наилевна

Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, saivanov@susu.ru, khokhlovatn@gmail.com

Программа, указанная в заголовке, была начата в 2011 г. после появления эффективных алгоритмов, использующих конусы и овалы устойчивости, для проверки устойчивости дифференциальных [1] и разностных [2] матричных линейных уравнений с запаздываниями. Мы поставили следующие вопросы и дали на них частичные или полные ответы.

1) Можно ли указать непустую область параметров, гарантирующую устойчивость нейронной сети при неограниченном увеличении количества нейронов в сети с сохранением их конфигурации.

2) Способствуют ли устойчивости разрывы связей между нейронами в кольцевых сетях.

3) Если сеть образована большим количеством нейронов с преимущественно кольцевыми связями, то выгодно ли для устойчивости часть этих связей рандомизировать (переключить с одних нейронов на случайно выбранные другие нейроны). Последний вопрос связан с системами типа «мир тесен» и так называемой теорией шести рукопожатий.

Непрерывной моделью нейронной сети является дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + Bx(t-\tau), \qquad t > 0.$$

Здесь $x(t)$ m-мерный вектор состояния нейронной сети, $\gamma > 0$ коэффициент затухания собственных колебаний нейрона, τ запаздывание во взаимодействии нейронов. Матрица B размера $m \times m$ определяет систему связей в сети. Например, для кольцевой сети это циркулянтная матрица, а для линейной сети трехдиагональная матрица. Элементы матрицы B характеризуют силы взаимодействий между нейронами. В сходных дискретных моделях имеют место сходные результаты.

Мы получили следующие ответы на поставленные вопросы.

---

[1] Работа выполнена по госзаданию Министерства образования и науки, проект № 2807.

© Кипнис М.М., Иванов С.А., Хохлова Т.Н., 2016 г.

1) Для кольцевой и линейной конфигурации при фиксации параметров γ, τ и некоторых ненулевых сил взаимодействий система может сохранять устойчивость, даже если количество нейронов в сети неограниченно возрастает [3-5]. То же верно для цилиндрической конфигурации, для тора и других декартовых произведений кольцевой и линейной конфигураций в произвольном порядке и количестве. Однако это свойство неверно для звездной, плоской решетчатой, многослойной конфигураций и для многомерных кубов.

2) Разрывы связей в кольцевых конфигурациях нейронных сетей в общем способствуют устойчивости. Однако существуют некоторые области параметров, в которых, наоборот, при разрыве связей возникает неустойчивость [3-6]. Мы назвали такие области парадоксальными. Мы рискнули предположить [6], что описанные явления дают объяснение подъему и спаду распространения операции лоботомии.

3) В основном положительный ответ на третий вопрос получен посредством многократных численных экспериментов [7]. В нашей модели нейронные сети типа «мир тесен» со случайными вставками связей между нейронами оказались, как правило, устойчивее, чем регулярные кольцевые сети с той же плотностью связей. Исключением являются сети со строгой симметрией силы связей между нейронами.

Библиографический список

1. *Khokhlova T.N., Kipnis M.M., Malygina V.V.* The stability cone for a delay differential matrix equation // Applied Math. Letters. 2011. V. 24. P. 742-745.
2. Ivanov *S.A., Kipnis M.M., V.V. Malygina V.V.* The stability cone for a matrix difference equation with two delays // ISRN Applied Mathematics. 2011. ID 910936. P. 1-19.
3. *Ivanov S.A., Kipnis M.M.* Stability analysis of discrete-time neural networks with delayed interactions: torus, ring, grid, line // International J. of Pure and Applied Mathematics. 2012. V. 78. No. 5. P. 691-709.
4. *Khokhlova T.N., Kipnis M.M.* Numerical and qualitative stability analysis of ring and linear neural neural networks with a large number of neurons // International J. of Pure and Applied Mathematics. 2012. V. 76. No. 3. P. 402-419.
5. *Ivanov S.A., Kipnis M.M., Medina R.* On the stability of the Cartesian product of a neural ring and an arbitrary neural network // Advances in Difference Equations. 2014. P. 1-7.
6. *Khokhlova T.N., Kipnis M.M.* The breaking of a delayed ring neural network contributes to stability: The rule and exceptions // Neural Networks. 2013. V. 48. P. 148-152.

7. *Ivanov S.A., Kipnis M.M.* On the stability of a neural network with links based on the Watts-Strogatz model // International J. of Pure and Applied Mathematics. 2015. V. 105. No. 3. P. 431-438.

THE RESULTS OF A PROGRAM TO EXAMINE THE STABILITY OF STANDARD CONFIGURATIONS OF NEURAL NETWORKS

Kipnis Mikhail M.

Chelyabinsk State Pedagogical University, 69 Lenin Ave., Chelyabinsk, Russia, 454080, mmkipnis@gmail.com

Ivanov Sergey A., Khokhlova Tatyana N.

South Ural State University, 76 Lenin Ave., Chelyabinsk, Russia, 454080, saivanov@susu.ru, khokhlovatn@gmail.com

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Колпаков Илья Юрьевич

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, kolpakov.ilia@mail.ru

Рассмотрим нелинейную периодическую задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \dot{x}), \\ x(0) = x(T), t \in [0;T], \end{cases} \tag{1}$$

где функция $f:[0;T]\times R\times R\to R$ удовлетворяет условию Каратеодори.

Пусть L_p – пространство суммируемых в степени p на отрезке $[0;T]$ функций, D_p - пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0;T]$ функций с нормой $\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_p}$. Под решением понимается такой элемент пространства D_p, который почти всюду на отрезке $[0;T]$ удовлетворяет уравнению и краевому условию задачи (1).

Обычно при исследовании нелинейных задач, в том числе и задачи (1), используется явная [1] или неявная линеаризация [2]. В работе для получения условий разрешимости задачи (1) применяется подход [3]. Для этого задача (1) записывается в виде операторного уравнения

$$Lx = Fx \tag{2}$$

в пространстве $X = \{x \in D_p[0;T] \,|\, x(0) = x(T)\}$, где операторы $L, F: X \to Y = L_p[0;T]$ определены равенствами $Lx = \dot{x}$, $Fx = f(t, x, \dot{x})$. Отметим, что краевая задача (1) является резонансной, так как оператор $L: X \to Y$ не обратим.

Обозначим ядро и образ линейного оператора L через $\ker L$ и $R(L)$ соответственно. Тогда с учетом нетеровости оператора L, пространство X представимо в виде $X = X_0 \oplus \ker L$, где подпространство $X_0 = \{ x \in X \,|\, x(0) = 0\}$.

© Колпаков И.Ю., 2016 г.

Так как оператор L не обратим ($R(L)\neq Y$), то доказывается существование множества M и непрерывного оператора $N:X_0\to\ker L$ таких, что оператор $F(I+N)$ переводит это множество в образ оператора L, т.е. $F(I+N)(M)\subset R(L)$. Затем, на найденном множестве M доказывается существование решения операторного уравнения $x=KF(I+N)x$ (где $K:R(L)\to X_0$ - обобщенно обратный оператор к линейному оператору $L:X\to Y$, ассоциированный с проектором $P:X\to X$ на $\ker L$), откуда следует разрешимость уравнения (2).

Приведем условия разрешимости краевой задачи (1):

Теорема. Пусть функция $f(t,x,v)$ удовлетворяет условию Каратеодори и вместе со своей частной производной по x удовлетворяют условиям Липшица:

$$\left|f(t,x_1,v_1)-f(t,x_2,v_2)\right|\le k_1|x_1-x_2|+k_2|v_1-v_2|,\quad \left|f_2'(t,x_1,v_1)-f_2'(t,x_2,v_2)\right|\le c_1|x_1-x_2|+c_2|v_1-v_2|.$$

Тогда если $f_2'(t,x,v)$ непрерывна в точке $x=0$, $T^{1+\frac{1}{p}}\left|\int\limits_0^T f_2'(s,0,0)ds\right|^{-1}=m$ и выполнены условия: $\int\limits_0^T f(s,0,0)ds=0$, $\left|f(t,x,v)\right|\le a_0+b_0|x|+b_1|v|$, $bT^{1/q}<1$,

$$\frac{T^{1/q}\left(a_0T^{1/p}+b\rho\right)}{1-bT^{1/q}}\le\frac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)^2},$$ где $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\ (p>1)$, $\rho=\frac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)}$,

$b=\max\left(b_0T^{1/p};b_0T+b_1\right), c=\max\left(c_1T^{1/p},c_1T+c_2\right),\ k=\max\left(k_1T^{1/p},k_1T+k_2\right),$

то существует решение задачи (1) на шаре $\overline{S_R(0)}\subset D_p[0;T]$ с центром в точке $x=0$ и радиусом $R=\frac{T^{1/q}\left(a_0T^{1/p}+b\rho\right)}{1-bT^{1/q}}$.

Библиографический список

1. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968. 184 с.
2. *Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // УМН,1977. т.32, №4. С.3-54.
3. *Колпаков И.Ю.* О разрешимости квазилинейных операторных уравнений // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. Пермь 2002, с. 21-27.

ABOUT SOLVABILITY OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WHICH HASN'T BEEN RESOLVED BY RATHER DERIVATIVE

Kolpakov Ilia Yu.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614990, kolpakov.ilia@mail.ru

УДК: 517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Куликов Андрей Юрьевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, stphn@mail.ru

Введем обозначения $N_0 = N \cup 0$, $\Delta = \left\{(n,m) \in N_0^2 : n \geq m\right\}$, $R_+ = [0,\infty)$. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{k=1}^{L} a_k(n) x(n - g_k(n)) = f(n), \quad n \in N_0, \qquad (1)$$

где $a_k : N_0 \to R_+$, $g_k : N_0 \to N_0$. Коэффициенты a_k и запаздывания g_k предполагаются ограниченными, то есть найдутся $a^* > 0$ такое, что $\sum_{k=1}^{L} a_k(n) \leq a^*$ при всех $n \in N_0$ и $\omega_k \in N_0$ такие, что $g_k(n) \leq \omega_k$ при всех $k \in 1,2,...L$, $n \in N_0$. Положим $\omega = \max \omega_k$, введем функцию $a : N_0 \to R_+$, положив $a(n) = \sum_{k=1}^{L} a_k(n)$. Функцию x будем доопределять при целых неположительных значениях аргумента некоторой начальной функцией ξ. Решением уравнения (1), будем называть функцию $x : N_0 \to R$, удовлетворяющую ему при всех $n \in N_0$.

Функция $K : \Delta \to \mathrm{R}$, которая при каждом фиксированном $m \in N_0$ является решением задачи

$$\begin{cases} K(n+1,m) - K(n,m) + \sum_{k=1}^{L} a_k(n) K(n - g_k(n), m) = 0, \quad n \geq m, \\ K(m,m) = 1, \quad K(n,m) = 0, \quad n < m, \end{cases}$$

называется [1], [2] функцией Коши уравнения (1). Через функцию Коши задается представление любого решения уравнения (1) . Поэтому асимптотическое поведение и, в частности, устойчивость решений уравнения (1) полностью определяется ее свойствами. В работе [3], показано, что классические определения устойчивости эквивалентны соответствующим оценкам или предельным соотношениям функции Коши.

© Куликов А.Ю., 2016 г.

Определение 1. Уравнение (1) называется

равномерно устойчивым, если найдется $M > 0$ такое, что $\sup\limits_{(n,m)\in\Delta} |K(n,m)| \le M$.

асимптотически устойчивым, если при каждом m имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |K(n,m)| = 0$

экспоненциально устойчивым, если найдутся $M, \gamma > 0$ такие, что при всех $(n,m)\in\Delta$ выполнена оценка $|K(n,m)| \le M \exp(-\gamma(n-m))$.

Зафиксируем наборы параметров $\overline{a}_{\min} = (a_1^{\min}, a_2^{\min}, ..., a_L^{\min})$, $\overline{a}_{\max} = (a_1^{\max}, a_2^{\max}, ..., a_L^{\max})$, $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L)$, где $a_k^{\min} \ge 0$, $a_k^{\max} > 0$, $\omega_k \in N_0$ при всех $k \in 1,2,...L$. Класс уравнений вида (1), состоящий из уравнений со всевозможными коэффициентами, удовлетворяющими условиям $a_k^{\min} \le a_k(n) \le a_k^{\max}$, и всевозможными запаздываниями, удовлетворяющими условиям $g_k(n) \le \omega_k$ будем называть *семейством* уравнений вида (1), соответствующим данному набору параметров. Будем обозначать это семейство $G_{(1)}$. Целью нашего исследования является получение *необходимых и достаточных* условий устойчивости семейства $G_{(1)}$.

Определение 2. Назовем семейство $G_{(1)}$ *(равномерно, асимптотически, экспоненциально)* устойчивым, если все уравнения этого семейства устойчивы (в смысле соответствующего пункта определения 1.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} z(n+1) - z(n) + \sum\limits_{k=1}^{L} b_k(n) z(n-\omega_k) = 0, & n \in N_0, \\ z(j) = 1, & j \le 0, \end{cases},$$

с коэффициентами, заданными следующим образом:

$$b_k(n) = \begin{cases} a_k^{\max}, & n - \omega_k \le n_* \\ a_k^{\min}, & n - \omega_k > n_*, \end{cases}$$

где точка n_* такова, что $z(n) > 0$ при всех $n \le n_*$ а $z(n) \le 0$. Если $z(n) > 0$ при всех $n \in N_0$, то полагаем $n_* = \infty$. Эту задачу будем называть *test-задачей* для уравнения (1). Понятие тест задачи для разностных уравнений было впервые введено в работе [4].

Важными характеристиками test-задачи являются первая точка минимума ее решения l: $l = \min\{n \in N_0 : z(n+1) - z(n) \ge 0\}$ и значение решения test-задачи в точке первого минимума $z(l)$. Заметим, что $l = n_* + \omega + 1$. Положим $h = -z(l)$. В случае $n_* = \infty$ будем полагать $l = \infty$ и $h = 0$.

Теорема 1. Для равномерной устойчивости семейства $G_{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условия $h \le 1$.

Теорема 2. Для экспоненциальной устойчивости семейства $G_{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условия $h < 1$

Библиографический список

1. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием. // Известия вузов. Математика. 1993. №5. С. 3–10.
2. *Elaydi S.N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verlag, Inc. 1999. 381 стр.
3. *Куликов А.Ю., Малыгина В.В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения. // Известия вузов. Математика. 2011. №12. С. 30–41.
4. *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздыванями. // Известия вузов. Математика. 2016. №7.

STABILITY OF LINEAR NONAUTONOMOUS DIFFERENCE EQUATIONS WITH RESTRICTED SETTINGS

Kulikov A.Y.

Perm State University, 15 Bukireva st., Perm, Russia, 614990, ivanov@email.ru

УДК 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ИНФЛЯЦИИ

А.В.Кунгурцева, Т.А. Осечкина

Южно-Уральский государственный университет
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Следуя [1], на основе уравнения денежного равновесия $Mv = CP$, констатирующего, что количество денег, израсходованных на покупку произведенной продукции (произведение индекса цен *P* на уровень реального потребления *C*), равно количеству находящихся в обращении денег *M*, умноженному на скорость их обращения *v* (число оборотов в год); структуры внутреннего валового продукта (ВВП) *Y*

$$Y = C + I + G + X,$$

где I – инвестиции в производство, G – государственные расходы, $X = Ex - \mathrm{Im}$ – чистый экспорт, равный разности реального экспорта и импорта; связь ВВП и уровня совокупной зарплаты *W*

$$Y = bW,$$

получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -k_1\left(p - \dfrac{1+m}{(\alpha(1+y) + \beta i + \gamma g + \varphi x)(\tilde{\pi}'\mu + 1)}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2\left(y + 1 - \dfrac{1}{1-\lambda\tilde{\pi}}\left(\dfrac{md}{p} + 1\right)\right). \end{cases}$$

Здесь $\tilde{\pi}$ – функция инфляционных ожиданий, $\alpha = \left(1 - \dfrac{I_0 + G_0 + X_0}{Y_0}\right)^{-1}$, $\beta = \left(1 - \dfrac{Y_0 - G_0 - X_0}{I_0}\right)^{-1}$, $\gamma = \left(1 - \dfrac{Y_0 - I_0 - X_0}{G_0}\right)^{-1}$, $\varphi = \left(1 - \dfrac{Y_0 - I_0 - G_0}{X_0}\right)^{-1}$, коэффициент λ ($\lambda < 1$) отражает эффективность действий профсоюзов или отдельных групп граждан по поднятию зарплаты в соответствии с ожидаемым уровнем инфляции, $m(t) = \Delta M(t)/M_0$ – безразмерная функция эмиссии, а $d = \delta M_0 / P_0 W_0$ - безразмерный параметр эластичности отдачи по заработной плате.

© Кунгуцева А.В., Осечкина Т.А., 2016 г.

Функцию $\tilde{\pi}(t)$, описывающую изменение инфляционных ожиданий с течением времени, можно определить статистически по временному ряду индекса потребительских цен.

Так, статистические значения индекса потребительских цен (ИПЦ) в Российской Федерации за 2009-2015гг. можно аппроксимировать полиномом

$$p(t) = -0{,}002\,t^3 + 0{,}090\,t^2 - 0{,}849\,t + 102{,}7 .$$

Тогда по определению:

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{p}\frac{dp(t)}{dt} = \frac{-0{,}006\,t^2 + 0{,}18t - 0{,}849}{-0{,}002\,t^3 + 0{,}090\,t^2 - 0{,}849\,t + 102{,}7}.$$

Полученная система решается численно после оценки коэффициентов α, β, γ, φ и параметров *i*, *g*, *x* на основе статистических данных. За Y_0, I_0, G_0 *и* X_0 принимаем статистические данные за 2011г.

Решение системы выявляет отсутствие в России эффекта «гонки за зарплатой», что можно объяснить слабым институтом профсоюзов.

В заключение хочется отметить, что возможны альтернативные варианты модели с другой функцией инфляционных ожиданий или в контексте более сложной эмиссионной политики, выраженной функцией *m(t).*

Библиографический список

1. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.*: Кинетическая модель инфляции// Экономика и математические методы. – 2004. – том 40, №1 – с. 129-134.

УДК 517.977

ОБ ОЦЕНКАХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ И СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Ларина Яна Юрьевна, Родина Людмила Ивановна

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1, LRodina67@mail.ru

Пусть подмножество $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ задано функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа и для каждого $t \in \mathbb{R}$ множество $M(t)$ выпукло, компактно и имеет непустую внутренность.

Определение 1. Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *верхнюю относительную частоту* попадания ее графика в множество $\mathfrak{M}$ определим равенством

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes − мера Лебега на числовой прямой. *Нижнюю* относительную частоту $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ определим тем же равенством, но с заменой в нем верхнего предела нижним, а если эти пределы совпадают $\operatorname{freq}^*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\varphi)$, то общий предел обозначим

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

и назовем *относительной частотой попадания функции* φ в множество $\mathfrak{M}$.

Обозначим через ∂M границу множества M, через $\operatorname{int} M$ − внутренность данного множества, $\rho(x,M) \doteq \inf_{y \in M} |x-y|$ − расстояние от точки x до множества M. Введем в рассмотрение функцию $R_\varphi(t) = \rho(\varphi(t), \partial M(t))$, если $\varphi(t) \notin M(t)$ и $R_\varphi(t) = -\rho(\varphi(t), \partial M(t))$, если $\varphi(t) \in M(t)$. Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ − сигма-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Определим для каждого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ функции

$$\mu^*(B) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta},$$

$$\mu_*(B) \doteq \underline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta}.$$

---

[1] Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).
© Ларина Я.Ю., Родина Л.И., 2016 г.

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *таковы, что* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{*}([-\varepsilon,\varepsilon]) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:|R_{\varphi}(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}=0. \tag{1}$$

Тогда $\operatorname{freq}_{*}(\varphi)=\operatorname{freq}_{*}(\psi)\leqslant\operatorname{freq}^{*}(\psi)=\operatorname{freq}^{*}(\varphi)$. *Следовательно, если один из пределов* $\operatorname{freq}(\varphi)$ *или* $\operatorname{freq}(\psi)$ *существует, то другой предел также существует и* $\operatorname{freq}(\varphi)=\operatorname{freq}(\psi)$.

Пример 1. Покажем, что если равенство (1) не верно, то утверждение теоремы 1 может быть не выполнено. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{2}:x\in[0,1]\}$ и функции

$$\varphi(t)=1+e^{-t},\quad \psi(t)=1-e^{-t}.$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$, но $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu^{*}([-\varepsilon,\varepsilon])=1$. График функции $\varphi(t)$ не пересекается с множеством $\mathfrak{M}$, поэтому $\operatorname{freq}(\varphi)=0$; график $\psi(t)$ содержится в $\mathfrak{M}$ при $t\geqslant 0$, поэтому $\operatorname{freq}(\psi)=1$.

Следствие 1. *Пусть функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *таковы, что* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$ *и функция* $R_{\varphi}(t)$ *периодическая с периодом* $T>0$. *Тогда, если* $\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:R_{\varphi}(t)=0\}=0$, *то*

$$\operatorname{freq}(\psi)=\operatorname{freq}(\varphi)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\varphi(t)\in M(t)\}}{T}.$$

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad (t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m} \tag{2}$$

и отвечающее ей дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(t,x),\quad F(t,x)=\operatorname{co}H(t,x), \tag{3}$$

где $H(t,x)$ является множеством всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,U(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i)\to(t,x)$, $\operatorname{co}H(t,x)$ − замыканием выпуклой оболочки множества $H(t,x)$. Предполагаем, что множество $H(t,x)$ непусто и компактно, функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху. Под решением включения (3) на интервале $J\subset\mathbb{R}$ будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi:J\to\mathbb{R}^{n}$, которая при почти всех $t\in J$ удовлетворяет данному включению.

Определение 2 (см. [2, 3]). Множество $\mathfrak{M}=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n}:x\in M(t)\}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (2), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ включения (3), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \,\mathrm{B}\, \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

Следствие 2. *Предположим, что существуют решения* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *включения* (3) *такие, что* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ *и выполнено равенство* (1). *Тогда*

$$\operatorname{freq}_*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\psi) \leqslant \operatorname{freq}^*(\psi) = \operatorname{freq}^*(\varphi).$$

Теорема 2 (см. [1]). *Пусть для любой точки* $x \in M(0)$ *существует решение* $\psi(t)$ *включения* (3), *удовлетворяющее начальному условию* $\psi(0) = x$ *и равенству* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0,$ *где* $\varphi(t)$ − *решение данного включения, для которого*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*((-\infty, -\varepsilon)) = 1.$$

Тогда множество M *статистически слабо инвариантно относительно системы* (2).

Библиографический список

1. *Ларина Я.Ю., Родина Л.И.* Статистические характеристики непрерывных функций и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы // Известия вузов. Математика. 2016. В печати.
2. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265−288.
3. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67−86.

ABOUT ESTIMATIONS OF RELATIVE FREQUENCIES AND STATISTICALLY WEAK INVARIANT SETS OF CONTROL SYSTEMS.

Larina Yana Y., Rodina Ludmila I.

Udmurt State University, st. Universitetskaya, 1, Izhevsk, Russia, 426034,
LRodina67@mail.ru

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ларионов Александр Степанович

Братский государственный университет, 665709, Россия,
г. Братск, ул.Макаренко, 40, larios84@yandex.ru

Рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом

$$(\Lambda y)(t) \equiv y'(t) - q(t)\dot{y}[g(t)] + \gamma(t)y[h(t)] = f[t, h(t)],\ t \in [a, b] \qquad (1)$$

$$y(\xi) = \dot{y}(\xi) = 0, \text{ если } \xi \notin [a, b],$$

где $q:[a,b] \to R$ - ограниченная в существенном функция; $\gamma:[a, b] \to R$ – суммируемая на $[a, b]$ функция; h, g:$[a, b] \to R$ - измеримые функции, $g(t) \le t,\ h(t) \le t$ при почти всех $t \in [a, b]$; функция $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

При естественных предположениях относительно параметров уравнения (1) его общее решение можно представить в виде формулы Коши

$$y(t) = C(t,a)y(a) + \int_a^t C(t, s)\, f(s, h(s))ds,$$

где $C(t, s)$ – функция Коши соответствующего линейного однородного уравнения $(\Lambda y)(t) = 0$. Если функция Коши сохраняет знак в области $\Delta=\{(t, s): a \le s \le t \le b\}$, то, используя метод монотонных операторов, получаем утверждение о существовании ограниченного решения (1) с начальным условием $y(a) = \alpha,\ \alpha \in R$.

Замечание. Уравнение (1) является обобщением дифференциально- разностного уравнения, рассматриваемого в книге [1] в связи с исследованием циклов в судостроительной промышленности.

Библиографический список

1. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения: / – М.: Изд–во иностранной литературы, 1961.

© Ларионов А.С., 2016 г.

ON A DIFFRENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WITH A DELAY

Larionov Alexander S.

Bratsk State University, 40 Makharenko st., Bratsk, Russia, 665709, larios84@yandex.ru

УДК 517.977

МЕТОД ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Максимов Вячеслав Иванович

Институт математики и механики УрО РАН 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16, e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Доклад посвящен приложению одного из основополагающих методов теории гарантированного управления — метода экстремального сдвига — к некоторым задачам динамической теории обращения, а также теории управления системами, описываемыми функционально-дифференциальными уравнениями. В созданной Н.Н. Красовским и его последователями теории гарантированного управления указанный метод играет исключительную роль. Метод экстремального сдвига, представляющий собой принцип мгновенного управления с учетом обратной связи, лежит в основе позиционных решений антогонистических дифференциальных игр, определяет структуру оптимальных гарантирующих законов управления, составляет базу регуляризованной процедуры управления с поводырем. Идея экстремального сдвига является эффективной и при решении задач динамического обращения, а также таких «классических» задач теории управления, какими являются задачи слежения. Обсуждаемые нами постановки задач динамического обращения, а также слежения характеризует одна особенность. Именно, мы полагаем, что фазовые состояния системы измеряются неточно. Поэтому точное решение задач не возможно, вследствие чего мы допускаем приближенное решение. Для того, чтобы обеспечить свойства динамического обращения или приближенного слежения мы привлекаем стабилизирующие управления с обратной связью, использующие сглаживающий функционал. При выборе этих управлений мы опираемся на метод экстремального сдвига, локально регуляризованный с помощью сглаживающего функционала. Приведем одну из задач, обсуждаемых в настоящем сообщении.

Рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) = L(y_t) + B_0 u(t) + F(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

$$L(y_t) = \sum_{j=0}^{l} A_j y(t - \nu_j) + \int_{-\nu_l}^{0} A_*(s) y(t+s)\, ds,$$

с начальным условием $y(t_0) = \varphi^0, \quad y(t_0 + s) = \varphi^1(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$.

Здесь $t_0 < \vartheta < +\infty$, $y(t) \in R^n$, $u(t) \in R^N$, $\varphi^0 \in R^n$, $\varphi^1(\cdot) \in L_2([-\nu_l, 0]; R^n)$, $0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_l < +\infty$, $y_t : s \to y(t+s)$, $-\nu_l \le s \le 0$, A_j, $j \in [0 : l]$ — $n \times n$-матрицы, B_0 — матрица размерности $n \times N$, элементы матричной функции $s \to A_*(s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, суммируемы с квадратом, $F(\cdot) \in L_2(T; R^n)$ — заданная функция.

© Максимов В.И., 2016 г.

Наряду с системой (1) имеется еще одна система того же вида

$$\dot{q}(t) = L(q_t) + B_0 v(t) + F(t), \quad t \in T \tag{2}$$

с начальным условием $q(t_0) = q^0$, $q(t_0 + s) = q^1(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$. Здесь $q(t) \in R^n$, $v(t) \in R^N$, $q^0 \in R^n$, $q^1 \in L_2([-\nu_l, 0]; R^n)$. Эта система (назовем ее в дальнейшем эталонной) подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; R^N)$. Последнее, а также отвечающая этому возмущению траектория $q(\cdot) = q(\cdot; t_0, q_0(s), v(\cdot))$, ($q_0(s) \in X$, $q_0(0) = q^0$, $q_0(s) = q^1(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$), системы (2) заранее неизвестны. Здесь $X = R^n \times L_2([-\nu_l, 0]; R^n)$ гильбертово пространство пар со скалярным произведением $(x, y)_X = (x^0, y^0)_n + \int\limits_{-\nu_l}^{0} (x^1(s), y^1(s))_n\, ds$, $x = \{x^0, x^1(s)\}$, $y = \{y^0, y^1(s)\}$ и нормой $|\cdot|_X$, символ $(\cdot,\cdot)_n$ означает скалярное произведение в пространстве R^n.

Суть задачи слежения состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ $(\tau_0 = t_0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$ измеряются состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i; t_0, y_0(s), u(\cdot))$ системы (1), а также состояния $q(\tau_i)$ эталонной системы (2). Здесь $y_0(s) \in X$ — начальное состояние (1): $y_0(0) = \varphi^0$, $y_0(s) = \varphi^1(s)$ при п.в. $s \in [-\nu_l, 0]$. Состояния $y(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in R^n$ — удовлетворяют неравенствам $|y(\tau_i) - \xi_i^h|_n \le h.$ Величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Символ $|x|_n$ означает евклидову норму вектора $x \in R^n$. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в системе (1), позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять отслеживание траекторией $y(\cdot)$ этой системы траектории $q(\cdot)$ эталонной системы.

Пусть взято семейство разбиений отрезка T: $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$, $\delta(h) \in (0,1)$, также некоторая функция $\alpha(h) \in (0,1)$, $h \in (0,1)$. До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$ и разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ ($m = m_h$) однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i, вычисляется вектор $u_i^h = \alpha^{-1} \exp(-\omega \tau_{i+1}) B_0 (q(\tau_i) - \xi_i^h)$, где $\alpha = \alpha(h)$, $\omega = \frac{l+1}{2} + |A_0| + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} |A_j|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{-\nu_l}^{0} |A_*(\tau)|^2\, d\tau.$ Здесь штрих – транспонирование, символ $|A|$ – евклидова норма матрицы A. Затем на вход системы (1) подается управление $u^h(t) = u_i^h$, $t \in \delta_i$. Под действием этого управления система (1) переходит из состояния $y^h(\tau_i + s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, в состояние $y^h(\tau_{i+1} + s) = y(\tau_{i+1} + s; \tau_i, y^h(\tau_i + s), u_i^h)$, $s \in [-\nu_l, 0]$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ. Пусть семейство разбиений Δ_h, $h \in (0,1)$, отрезка T и функция $\alpha(h)$ обладают следующими свойствами $h\delta^{-1}(h) \le C_0, \delta(h)\alpha^{-2}(h) \le C_*,\ \alpha(h) \to 0, \delta(h) \to 0$ при $h \to 0+$. Здесь C_0 и C_* — постоянные, не зависящие от h. Имеет место

Теорема. Пусть $|y_0(s) - q_0(s)|_X \le Ch,$ где $C = const > 0$. Тогда равномерно по всем $h \in (0,1)$ верно неравенство $|y^h(t) - q(t)|_n^2 \le d_1(h + \alpha + \delta)\ \forall t \in T,$ где $d_1 = const > 0$ — постоянная, не зависящая от $h \in (0,1)$, $\alpha = \alpha(h) \in (0,1)$ и $\delta = \delta(h) \in (0,1)$.

EXTREMAL SHIFT METHOD FOR DELAY SYSTEM

Maksimov Vyacheslav I.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul.S.Kovalevskoi 16, Yekaterinburg, 620990 Russia, email: maksimov@imm.uran.ru

УДК 517.929+330.4

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Максимов Владимир Петрович

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, maksimov@econ.psu.ru

Результаты общей теории функционально-дифференциальных уравнений [1] о структуре множества решений линейных систем с фредгольмовой главной частью и представлении решений таких систем дают основу для разработки и развития конструктивных методов исследования различных задач, представляющих не только теоретический, но и прикладной интерес. К таким задачам относятся краевые и вариационные задачи, задачи управления, задачи устойчивости и стабилизации. При этом теоретические результаты позволяют в рамках единого подхода использовать возможность широкого выбора пространств для траекторных и управляющих переменных. Результаты о разрешимости для упомянутых классов задач в рамках конструктивного подхода формулируются в виде теорем, выполнение условий которых может быть проверено с применением компьютера и специальных вычислительных технологий, разработанных в рамках теории доказательного вычислительного эксперимента.

В докладе предлагается обзор результатов участников Пермского семинара «Функционально-дифференциальные уравнения» по конструктивному исследованию следующих задач:

1. Линейные краевые задачи с общими краевыми условиями в пространствах абсолютно непрерывных функций и кусочно абсолютно непрерывных функций для систем с последействием [2].

2. Линейные краевые задачи с общими краевыми условиями для систем с непрерывным и дискретным временем (гибридные системы с последействием) [3].

3. Задачи управления относительно произвольной конечной системы линейных целевых функционалов с использованием импульсных и смешанных управлений [4].

4. Задачи управления для линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием [4, 5].

© Максимов В.П., 2016 г.

5. Вариационные задачи с квадратичным функционалом и нелокальным интегрантом [6].

6. Задачи об устойчивости и стабилизации решений линейных систем с последействием и периодическими параметрами [7].

Приводятся примеры исследования ряда прикладных задач для экономико-математических динамических моделей (модели региональных эколого-экономических систем, модели процессов управления финансовыми ресурсами коммерческого банка и др.).

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахмутуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Румянцев А.Н.* Вычислительный эксперимент в исследовании функционально-дифференциальных моделей: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. Казань, 1999. 35 с.
3. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Сер.: Экономика. 2011. Вып. 2(9). С. 13-23.
4. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16, No 3. P. 517-527.
5. *Максимов В.П.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. 2012. №9. С. 72-76.
6. *Шишкин В.А.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании вариационных задач для квадратичных функционалов: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Екатеринбург, 2000. 21 с.
7. *Мунембе Ж.С.П.* Конструктивное исследование асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Пермь, 2000. 19 с.

RELIABLE COMPUTING EXPERIMENT IN THE STUDY OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS: THEORY AND APPLICATIONS

Maksimov Vladimir P.

Perm State University, 15, Bukireva st., Perm, Russia, 614990, maksimov@econ.psu.ru

УДК 517.929

ОБ УСЛОВИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Малыгина Вера Владимировна, Чудинов Кирилл Михайлович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, cyril@list.ru

В работах [1] и [2] был впервые получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $r>0$, $a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ и $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{t-r}^{t} a(s)\,ds>1$. Тогда все решения уравнения

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t-r),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

являются осциллирующими.

За последующие 30 лет этот результат был обобщен на уравнения с переменным запаздыванием, с несколькими сосредоточенными запаздываниями, с распределенным запаздыванием. Почти все такие обобщения предполагают, что запаздывания являются неубывающими. Это означает, что для уравнения с одним переменным сосредоточенным запаздыванием все эти обобщения сводятся к следующему результату.

Теорема 2. Пусть $a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $h(t)\le t$, $h(t)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=+\infty$ и $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds>1$. Тогда все решения уравнения $\dot{x}(t)=a(t)x(h(t)),\ t\in\mathbb{R}_+$, являются осциллирующими.

Обобщение теоремы 2 на случай произвольной измеримой функции h получено в недавней работе [3].

С 80-х гг. XX века начал быстро расти интерес исследователей к разностным уравнениям с последействием. Обозначим $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$. В работе [4] получен аналог теоремы 1 для разностного уравнения $\Delta x(n)=a(n)x(n-c)$, в работе [5] – аналог теоремы 2 для уравнения $\Delta x(n)=a(n)x(h(n))$ с неубывающим на дискретной оси $\mathbb{Z}$ запаздыванием $h(n)$.

В данной работе приведем разностные аналоги основных результатов из [3].

© Малыгина В.В., Чудинов К.М., 2016 г.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta x(n)+\sum_{k=1}^{N} a_k(n)x(h_k(t))=0, \quad n\in\square . \qquad (1)$$

Обозначим $E_k(n)=\{m\in\square : h_k(m)\le n\le m\}$, $m\in\square$, $k=\overline{1,N}$.

Теорема 3. Пусть $a_k:\square\to\square_+$, $h_k:\square\to\square$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n)=+\infty$, $k=\overline{1,N}$. Если

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m\in E_k(n)} a(m)>1,$$

то все решения уравнения (1) являются осциллирующими.

В частности, для уравнения с одним запаздыванием

$$\Delta x(n)+a(n)x(h(n)), \quad n\in\square , \qquad (2)$$

получаем следующий результат.

Следствие. Пусть $a:\square\to\square_+$, $h:\square\to\square$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n)=+\infty$, $E(n)=\{m\in\square : h(m)\le n\le m\}$ и $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sum\limits_{m\in E(n)} a(m)>1$. Тогда все решения уравнения (2) являются осциллирующими.

Библиографический список

1. *Ladas G., Lakshmikantham V., Papadakis J.S.* Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument // Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972) / N.Y.: Academic Press, 1972. P. 219–231.
2. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1975. №3. С. 92-96.
3. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electron. J. Qual. Theory Diff. Eq. 2016. No 2. P. 1-10.
4. *Erbe L.H., Zhang B. G.* Oscillation of discrete analogues of delay equations // Differential Integral Equations. 1989. Vol. 2. P. 300–309.
5. *Chatzarakis G. E., Koplatadze R., Stavroulakis I.P.* Oscillation criteria of first order linear difference equations with delay argument // Nonlinear Anal. 2008. Vol. 68. P. 994–1005.

ON OSCILLATION CONDITIONS FOR SOLUTIONS TO DIFFERENCE EQATIONS WITH SEVERAL DELAYS

Malygina Vera V., Chudinov Kirill M.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomol’skii Ave 29, Perm, Russia, 614990, cyril@list.ru

УДК 517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО ТРЁХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КВАЗИПОЛИНОМА

Мулюков Михаил Вадимович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29, mulykoff@gmail.ru

В данной работе найден критерий устойчивости (то есть отрицательности вещественных частей всех корней) квазиполинома с вещественными коэффициентами

$$F(z) = \gamma e^{-2z} + \mu z + \nu z e^{-z} + z^2. \qquad (1)$$

Этот квазиполином является характеристической функцией системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = 0, \ t > 0, \\ x(t) = \psi(t), \ t \in (-h, 0], \end{cases}$$

где ψ – суммируемая вектор-функция, A, B – вещественные 2×2 матрицы, такие, что $\det A = \det(A+B) = 0$. При этом $\gamma = h^2 \det B,\ \mu = h \operatorname{Sp} A,\ \nu = h \operatorname{Sp} B,$ а устойчивость (1) эквивалентна асимптотической устойчивости системы [1, с.209].

Поиску условий устойчивости квазиполиномов различного типа посвящена обширная литература. В ряде случаев авторы исследуют частные случаи [2], находят достаточные условия [3] или получают интервальные оценки на величину запаздывания [4], но особую роль играют работы, в которых найден критерий устойчивости в терминах коэффициентов квазиполинома и дана его геометрическая интерпретация [5].

Теорема 1[6]. Пусть $\mu = 0$. Квазиполином (1) устойчив тогда и только тогда, когда $0 < \gamma < \pi^2/4$ и $2\sqrt{\gamma}\sin\sqrt{\gamma} < \nu < \pi/2 + 2\gamma/\pi$.

Рассмотрим семейство параметрически заданных кривых C_n, $n \in \mathbb{N}_0$, каждая из которых описывается системой

$$\begin{cases} \gamma = \varphi^2 + \mu\varphi \operatorname{tg}\varphi, \\ \nu = 2\sin\varphi - \mu\cos 2\varphi / \cos\varphi, \end{cases}$$

при $\varphi \in \mathbb{R}_+ \cap \big(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)\big)$.

Кривые C_n не имеют точек самопересечения и при $\mu \neq 0$ разделяют полуплоскость $\gamma > 0$ на две области: ту из них, которая содержит начало координат, обозначим через D_n^{μ}, а ее дополнение через G_n^{μ}.

Теорема 2. Пусть $\mu > 0$. Квазиполином (1) устойчив тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$ и точка (γ, ν) принадлежит области $D_0^{\mu} \cap D_1^{\mu}$.

Теорема 3. Пусть $\mu < 0$. Квазиполином (1) устойчив тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$ и точка (γ, ν) принадлежит области G_0^{μ}.

© Мулюков М.В, 2016 г.

Библиографический список

1. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Cahlon B., Schmidt D.* Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2004. №170. P. 79-102.
3. *Вагина М. Ю., Кипнис М. М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Матем. заметки. 2003. Т. 74, вып. 5, С. 786-789. .
4. *Malakhovski E., Mirkin L.* On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay // Automatica. 2006. №42. P. 1041-1047.
5. *Hsu C.S., Bhatt S.J.* Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. 1966. №33 (1), P. 113-118.
6. *Мулюков М.В.* О факторизации характеристического квазиполинома системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2013, №9, С. 38-44.

ON STABILITY OF THREE-PARAMETER QUASIPOLINOMIAL

Mulyukov Mikhail V.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000, mulykoff@gmail.ru

УДК 51-76

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЙРОФИЗИКЕ[1]

Олейник Анна Алексеевна, Поносов Аркадий Владимирович

Норвежский университет естественных наук, 1432, Норвегия, г. Ос, Дрёбаквайен, 31, anna.oleynik@nmbu.no, arkadi@nmbu.no

Изучение динамики нейронной активности в подкорке головного мозга является бурно развивающейся областью математической биологии. Со времени пионерских работ Уилсона и Кована [1, 2], а также Амари [3, 4] модели нейронных полей использовались для описания нелинейных взаимодействий между популяциями нейронов. Модели нейронных полей являются специальным подклассом моделей, где слои нейронов интерпретируются как непрерывная структура и математически описываются интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями. Например, модель Амари одной популяции нейронов описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением типа Гаммерштейна

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -u(x,t) + \int\limits_R \omega(x-y) f(u(y,t))dy. \qquad 1)$$

Здесь $u(x,t)$ и $f(u(x,t))$ задают соответственно средную локальную активность (например, напряжение) и функцию активации нейронов в точке $x \in R$ и в момент времени *t*. Функция $\omega(x-y)$ описывает взаимодействие между нейронами в точках *x* и *y*. Обобщения этой модели включают эффекты адаптации резонансных частот, пространственно-временных запаздываний, а также увеличение количества переменных и нейронных популяций [5, 6, 7].

Тем не менее, существует много чисто математических проблем, которые не полностью изучены даже для самой простой модели (1). В докладе мы обсудим одну из этих проблем, а именно, аппроксимацию гладкой сигмоидальной функции *f* разрывной функцией Хевисайда *H*, см. [8, 9].

Пусть $f(u) = S(\beta, u)$, где $S(\beta,u) \to H(u)$ при $\beta \to \infty$. В предельном случае $f = H$ стационарные решения уравнения (1) можно получить аналитически, см., например, [3] или гл. 3 в монографии [10]. С другой стороны, этот случай является всего лишь упрощением более реалистичной модели, где $S(\beta,u)$, $0 < \beta < \infty$ является быстро растущей, но всё-таки гладкой функцией. В этом случае аналитические методы не работают, а

[1] Публикация подготовлена при частичной финансовой поддержке Норвежского Научного Фонда (грант № 239070).
© Олейник А.А., Поносов А.В., 2016 г.

существование решений и их непрерывная зависимость от параметра β при $\beta \to \infty$, как правило, основываются на численных алгоритмах, см., например, [6]. Устойчивость по Ляпунову таких решений обычно изучается в первом приближении, причём также в предположении, что $f = H$. Так как функция Хевисайда H не только не является гладкой, но даже и разрывной, полученные таким образом результаты по устойчивости не являются математически доказанными. Необходимость обоснования этой техники, поэтому, крайне важна для достоверности этих результатов. Основной трудностью является здесь переход от случая $\beta < \infty$ к предельному случаю $\beta = \infty$, поскольку разрывность функции H приводит к разрывности соответствующего интегрального оператора в любом стандартном функциональном пространстве.

В настоящем докладе представлены результаты, полученные для специального класса стационарных решений, локализованных в пространстве. Результаты иллюстрируются численными примерами.

Библиографический список

1. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophysical journal. 1972. №12. P. 1-24.
2. *Wilson H.R., Cowan J.D.* A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue // Kybernetic. 1973. №12. P. 55-80.
3. *Amari S.* Homogeneous nets of neuron-like elements // Biological Cybernetics. 1975. № 17. P. 211-220.
4. *Amari S.* Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields // Biological Cybernetics. 1977. №27. P. 77-87.
5. *Bressloff P.C.* Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. №45. 033001. 109 pp.
6. *Coombes S.* Waves, bumps, and patterns in neural field theories // Biol.Cybernet. 2005. №93. P. 91-108.
7. *Oleynik, A., Wyller, J., Tetzlaff, T., Einevoll, G.,T.,* Stability of bumps in a two-population neural-field model with quasi-power temporal kernels // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2011. №12. P.3073-3094.
8. *Oleynik, A., Ponosov, A., Wyller, J.,* On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models // J. Math. Anal. Appl., 2013. №398. P. 335-351.
9. *Oleynik, A., Ponosov, A., Kostrykin,V., Sobolev, A.,* Spatially localized solutions of the Hammerstein equation with sigmoid type of nonlinearity // arXiv:1511.06364.

10. *Coombes, S., beim Graben, P., Potthast, R., Wright, J*. Neural Fields: Theory and Applications, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.

MATHEMATICAL METHODS IN NEUROPHYSICS

Oleynik Anna A., Ponosov Arcady V.

Norwegian University of Life Sciences, Drøbakveien 31, 1432 Ås, Norway,
anna.oleynik@nmbu.no, arkadi@nmbu.no

УДК 519.633

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Омуралиев Асан Сыдыгалиевич

Кыргызско-Турецкий университет “Манас”, 720044, Кыргызская республика г.Бишкек, пр.Мира 56, asan.omuraliev@mail.ru

Кулманбетова Сагын

Нарынский государственный университет, Кыргызская республика г.Нарын, ул.Чоробаева 6

Рассмотрим первую краевую задачу для систем сингулярно возмущенных параболических уравнений

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u - A(t)u = f(x,t),\ (x,t)\in\Omega,$$
$$u|_{t=0} = 0,\ \ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \qquad (1)$$

где e>0 – малый параметр, $\Omega = \{(x,t): x\in(0,1), t\in(0,T]\}$. Задача (1) изучается при следующих предположениях:

1. $0 < a(x) \in C^\infty[0,1]$, $A(t)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}^{m^2}\right),\ f\in C^\infty\left(\overline{\Omega},\mathbb{C}^m\right)$;
2. $m\times m$ матрица *A(t)* имеет *m* простых собственных значений $\{\lambda_i(t)\}$ удовлетворяющих условиям *a)* $\lambda_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,\dots,k), b)\ Re\,\lambda_i(t)\le 0\ (i=k+1,\dots m),\ c)\ \lambda_i(t)\ne\lambda_j(t)\ \forall i\ne j,\quad i,j=\overline{(k+1,m}$;
3. $\lambda_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,\dots,k)$ соответствует *k* линейно независимых собственных векторов $\{b_i(t)\}, i=\overline{1,k}$.

Будет построена регуляризованная асимптотика [1] решения поставленной задачи. Задача аналогичная изучена в [2], однако там получена асимптотика типа пограничного слоя.

Следуя [1], произведем регуляризацию задачу (1), для чего введем регуляризующие переменные [1], [3]

$$\tau=\frac{t}{\varepsilon^2},\quad \mu_i=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_i(s)ds\equiv\frac{\psi_i(t)}{\varepsilon},\qquad i=k+1,\dots,m,\qquad \xi_l=\frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \eta_l=\frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}},$$

© Омуралиев А. С., Кулманбетова С., 2016 г.

$$\varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad l = 1{,}2 \tag{2}$$

и расширенную функцию

$\tilde{u}(M,\varepsilon),\ \ M = (x,t,\eta,\xi,\tau,\mu), \xi = (\xi_1,\xi_2),\ \eta = (\eta_1,\eta_2),\ \mu = (\mu_{k+1},\mu_{k+2},\dots,\mu_m)$ такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon),\ \ \theta = (\eta,\xi,\tau,\mu),\ \ \gamma(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}},\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{\psi_i(t)}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Тогда, на основании (1), (2), (3), относительно расширенной функции получим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + T_1\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\eta\tilde{u} + T_2\tilde{u} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}L_\xi\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,t),$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau=\mu=0} = 0,\ \ \tilde{u}|_{x=0,\xi_1=\eta_1=0} = \tilde{u}|_{x=1,\xi_2=\eta_2=0} = 0. \tag{4}$$

Расширенная задача (4) регулярна по *е* при *е→0,* ибо справедлива тождество

$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon)$

Решение задачи (4) будем определять в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M). \tag{5}$$

Введем классы функций в котором будут решатся итерационные задачи

$$U_1 = \left\{V_1(x,t): V_1(x,t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(x,t)b_i(t),\ \ v_i(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\},$$

$$U_2 = \left\{V_2(N_1): V_2(N_1) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(N_1)b_i(t),\ \ |Y_i(N_1)| < c\,exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right),\ \ |\eta| = \sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}\right\},$$

$$U_3 = \left\{V_3(N_2): V_3(N_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=k+1}^{m}\left[c_{i,j}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^{l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\exp(\mu_j)\,b_i(t),\ \right\}$$

$c_{i,j}(x,t), \omega_{i,j}^{l}(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \ N_1 = (x,t,\eta,\tau), N_2 = (x,t,\xi,\mu), \eta = (\eta_1,\eta_2), \xi = (\xi_1,\xi_2).$

Из этих классов построим новый класс, как прямую сумму $U = \bigoplus_{k=1}^{3} U_k$,

тогда произвольный элемент $u_\nu(M) \in U$ этого класса запишется

$$u_\nu(M) = \sum_{i=1}^{m}\{v_{\nu,i}(x,t) + Y_{\nu,i}(N_1) +$$

$$\sum_{j=k+1}^{m}\left[c_{i,j}^{\nu}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^{\nu,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\exp(\mu_j)\}b_i(t).$$

Показано, что сужение частичной суммы ряда (5), посредством регуляризующих функций, является формальным асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. доказана

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда сужение частичной суммы при $\theta = \gamma(x,t,\varepsilon)$, полученного вышеописанным методом, является асимптотическим решением задачи (1), т.е. при достаточно малых e и n=-2,-1,0,1,… справедлива оценка

$$\left\| u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,n}\big(x,t,\gamma(x,t,\varepsilon)\big) \right\| < c\,\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Библиографический список

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981-400 с.
2. *Бутузов В.Ф., Калачев Л. В.* Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае // Матем. заметки. 1986. Т.89, вып. 6. – С.819-830.
3. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи //Журн. вычисл. матем. и матем.физ., 2006 т.46 №8-С.1423-1432.

SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATIONS IN THE CRITICAL CASE

Omuraliev Asan S.

Kyrgyz Turkish Manas University, 720044, pr. Mira 56, Kyrgyz Republic, Bishkek, asan.omuraliev@mail.ru

Kulmanbetova Sagin

Naryn State University, Chorobaev 6, Kyrgyz Republic, Naryn

УДК 523.11

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ МЕТРИКИ ТИПА VIII ПО БЬЯНКИ С УЧЕТОМ ПЕРВОЙ ИНФЛЯЦИИ

Панов Вячеслав Федорович, Сандакова Ольга Васильевна, Янишевский Даниил Михайлович, Черемных Марина Рамзеевна

Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15

В рамках общей теории относительности построена анизотропная космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки [1]. Будем моделировать эволюцию Вселенной на разных этапах ее развития, на основе решений систем дифференциальных уравнений, считая, что каждому этапу соответствует доминирование того или иного источника гравитации.

Источниками гравитации являются скалярное поле и 3 жидкости с соответствующими уравнениями состояния. При этом пылевидное вещество и ультрарелятивистская материя моделируются идеальными жидкостями с разными уравнениями состояния, а тёмная энергия – анизотропной жидкостью [2].

Мы получили зависимости плотности энергии различных видов материи и масштабного фактора от времени, а также найдены значения компонент давления на каждом из этапов эволюции Вселенной. Выяснено, что при $t \to \infty$ анизотропная жидкость вакуумоподобна и асимптотически изотропизируется.

Вид кинематических параметров анизотропной жидкости: $\Theta = 3\dot{R}/R$ - расширение, $A = \dot{R}/bR$ - ускорение, $\omega = 1/2a^2R$ - вращение, сдвиг отсутствует.

На всех этапах эволюции, на которых имеется один энергетически доминирующий материальный агент, зависимости масштабного фактора от времени совпадают с аналогичными во фридмановской космологии.

© Панов В.Ф., Сандакова О. В., Янишевский Д.М., Черемных М. Р., 2016 г.

Библиографический список

1. *Кувшинова Е.В., Павелкин В.Н., Панов В.Ф., Сандакова О.В.* Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy //Gravitation and Cosmology 2, г. Москва, 2014г., с. 141-143.
2. *Кувшинова Е.В., Панов В.Ф., Сандакова О.В.* Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observation // Gravitation and Cosmology 2, г. Москва, 2014г., с. 138-140.

УДК 517.977

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

Петров Николай Никандрович, Соловьева Надежда Александровна

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1, kma3@list.ru

Представлены [1-4] достаточные условия разрешимости задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных нестационарных дифференциальных играх с равными возможностями всех участников.

В пространстве $R^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n,m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,..., P_n$ и m убегающих $E_1,..., E_m$ с законами движения и начальными условиями

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ x_i(t_0) = x_i^0,\ u_i \in V,$$

$$\dot{y}_j(t) = A(t)y_j + v_j,\ y_j(t_0) = y_j^0,\ v_j \in V,$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in R^k$, $A(t) -$ непрерывная матричная функция, $V -$ строго выпуклый компакт с гладкой границей. Условие поимки преследователем P_i убегающего E_j – $x_i(T) = y_j(T)$ при некотором $T > t_0$.

Определение 1. Функция $f : R \to R^n$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in R^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$ для которого справедливо неравенство $\| f(t + \tau(t)) - f(t) \| < \varepsilon.$

Предположение 1. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы $\dot{w} = A(t)w,$ $\Phi(t_0) = E$ является рекуррентной на $[t_0, \infty)$, а $\dot{\Phi}(t)$ равномерно ограничена на $[t_0, +\infty)$.

Обозначим через $\mathrm{Int} A,$ $\mathrm{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $A.$

Теорема 1. Пусть $m = 1$, выполнено предположение 1 и $y_1^0 \in \mathrm{Intco}\{x_1^0,..., x_n^0\}$. Тогда в игре $\Gamma(n,1)$ происходит поимка.

---

[1] Публикация была подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №16-01-00346 и Минобрнауки РФ в рамках базовой части, проект 2003.
© *Петров Н. Н., Соловьева Н. А., 2016 г.*

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 1, все убегающие используют одно и то же управление и

$$\mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{x_1^0,\ldots,x_n^0\}\cap \mathrm{co}\{y_1^0,\ldots,y_m^0\}\neq\varnothing.$$

Тогда в игре $\Gamma(n,m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Теорема 3. Пусть убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, выполнены предположение 1 и следующее условие: для каждого $s\in\{1,\ldots,q-1\}$ верно следующее: для любого множества $N\subset\{1,\ldots,n\}, |N|=n-s$ найдется такое множество $M\subset\{1,\ldots,m\}, |M|=q-s,$ что для всех $\beta\in M$

$$0\in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{x_\alpha^0-y_\beta^0,\alpha\in N\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n,m)$ происходит поимка не менее q убегающих. Определим функцию $f:N\to N$ вида

$$f(n)=\min\{m: \text{в игре } \Gamma(n,m) \text{ происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего из любых начальных позиций}\}.$$

Теорема 4. Пусть выполнено предположение 1. Тогда существуют константы $C_1,C_2>0$ такие, что для всех натуральных $n\neq1$ справедливо неравенство

$$C_1 n\ln n\leq f(n)\leq C_2 n\ln n.$$

Библиографический список

1. *Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных дифференциальных играх//Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. №6. С.29-37.
2. *Petrov N.N., Solov'eva N.A.* Group pursuit with phase constraints in recurrent Pontryagin's example//International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. V.100. No 2. P.263-278.
3. *Банников А.С., Петров Н.Н.* Линейные нестационарные дифференциальные игры преследования с несколькими убегающими// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 3-12.
4. *Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.

GROUP PURSUIT IN RECURRENT DIFFERENTIAL GAMES

Petrov Nikolai N., Solov'eva Nadezhda A.

Udmurt State University, 1, Universitetskaya st., Izhevsk, Russia, 426034, kma3@list.ru

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ[1]

Пименов Владимир Германович

Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Дробные дифференциальные уравнения в последние десятилетия вызывают огромный интерес у прикладников в связи с большой точностью моделей во многих областях науки. В частности, имеется большое число работ по конструированию и исследованию численных алгоритмов решения уравнений с частными производными дробных порядков, как по пространственным, так и по временной переменным [1]. Во многих моделях уравнения осложнены эффектом наследственности – функционального запаздывания по времени, который близок по сути к эффекту, создающему дробными производными по времени, оба эти эффекта можно считать частными случаями свойства вольтерровости. Однако, уже ставшая традиционной методика исследования численных методов для систем с наследственностью с помощью вложения в общую схему [1], в данном случае оказывается неприменимой. Настоящая работа существенно опирается на результаты статьи [2].

Рассмотрим начально-граничную задачу для уравнения адвекции-диффузии с производными дробного порядка по времени и состоянию с эффектом функционального запаздывания $\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + D(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}) \frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha} + f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)),$

где $x \in [a,b],$ $t \in [t_0, T]$, $u_t(x,\cdot) = \{u(x, t+s), -\tau,, s < 0\}$ - предыстория функции, $\tau > 0$ - величина запаздывания. Предполагаем, что $\beta \geq 0,$ $-1 \leq q \leq 1,$ $V > 0,$ $D > 0,$ $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \gamma \leq 2.$ Производная $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ понимается в смысле Капуто; производные $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ и $\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}$, соответственно левосторонняя и правосторонняя производные, понимаются в смысле Римана-Лиувилля. Пусть заданы также граничные условия и начальные условия.

---

[1] Исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и проектом РНФ 14-35-00005.

© Пименов В.Г., 2016.г

Проведем дискретизацию задачи. Пусть $h=(b-a)/N$, $\Delta=(T-t_0)/M$, где N, M - положительные целые числа, введем $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,N$, и $t_j=t_0+j\Delta$, $j=0,\dots,M$. Обозначим через u_j^i приближения значений функции $u(x_i,t_j)$ в узлах. Пусть $\Delta/\tau=m$ - целое, для каждого фиксированного $i=0,\dots,N$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_j , $j=0,\dots,M$: $\{u_k^i\}_j=\{u_k^i,\ j-m,,\ k,,\ j\}$. Отображение I: $\{u_k^i\}_j\to v^i(t)$, $t\in[t_j-\tau,t_j+\Delta]$ будем называть оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Так как мы будем строить неявный метод первого порядка по времени, то будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением.

Для аппроксимации дробных производных по пространству будем использовать сдвинутые формулы Грюнвальда-Летникова

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1})+O(h^p),$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial(-x)^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1})+O(h^p).$$

Коэффициенты ω_j^α определяются неоднозначно, мы положим $\omega_j^\alpha=(-1)^j\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$, $j=0,1,\dots,$ тогда $p=1$.

Для аппроксимации производных Капуто по времени будем использовать $L1$-алгоритм

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}u(x,t_{k+1})=\frac{1}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u(x,t_{k+1-j}-u(x,t_{k-j})]+O(\Delta^{2-\gamma}),\ \text{где}\ b_j^\gamma=(j+1)^{1-\gamma}-j^{1-\gamma}.$$

Используем формулы численного дифференцирования для $\dfrac{\partial}{\partial x}u(x_i,t_{k+1})$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x_i,t_{k+1})$, тогда получаем следующую неявную разностную схему

$$\frac{u_{k+1}^i-u_k^i}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u_{k+1-j}^i-u_{k-j}^i]=-V\frac{u_{k+1}^i-u_{k+1}^{i-1}}{h}+$$

$$+(\frac{1}{2}+\frac{q}{2})\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j}+(\frac{1}{2}-\frac{q}{2})\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j}+f(x_i,t_{j+1},v^i(t_j+\Delta),v_{t_j+\Delta}^i(\cdot)),\qquad(1)$$

Лемма [1]. Система (1) имеет единственное решение.

Обозначим через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует постоянная C, не зависящая от h и Δ, такая, что $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0,1,\cdots,N$ и $j = 0,1,\cdots,M$.

Методами, комбинирующими техники исследования численных алгоритмов систем с наследственностью [2] и численных алгоритмов для дробных уравнений [1] получаем основной результат.

Теорема сходимости. При условиях гладкости точного решения метод (1) с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком $\Delta + h$.

Библиографический список

1. *Liu F., Zhuang P., Burrage K.* Numerical methods and analysis for a class of fractional advection-dispersion models // Computers and Mathematics with Applications. 2012. V. 64. P. 2990-3007.
2. *Пименов В.Г.* Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд. Уральского университета. 2014.

NUMERICAL METHOD FOR FRACTIONAL ADVECTION-DIFFUSION EQUATIONS WITH HEREDITY

Pimenov Vladimir G.

Ural Federal University, Lenina Av. 51, Ekaterinburg, Russia, 620000, v.g.pimenov@urfu.ru

УДК 517.929

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Плаксина Вера Павловна, Плаксина Ирина Михайловна, Плехова Эльвира Валентиновна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, impl@list.ru

В предлагаемой работе получены условия разрешимости полуоднородной двухточечной краевой задачи для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}(t)+\frac{m}{t^2(1-t)^2}x(t)=f\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right), \qquad t\in[0,1], \tag{1}$$

$$x(0)=0, \qquad x(1)=0, \qquad \dot{x}(0)=0, \qquad \dot{x}(1)=0. \tag{2}$$

Здесь $m\in R$, функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Уравнение (1) содержит несуммируемый на отрезке [0,1] коэффициент $\frac{m}{t^2(1-t)^2}$ и является сингулярным по независимой переменной, причем сингулярность сосредоточена на концах отрезка $[0,1]$. Кроме того, формально задача является переопределенной.

В качестве вспомогательного результата построен оператор Грина соответствующей линейной задачи. Доказана его ограниченность, получена оценка сверху его нормы. Условия существования решения исходной задачи получены методами теории абстрактных функционально-дифференциальных уравнений [1] из условий разрешимости вспомогательного операторного уравнения.

Предлагаемая работа является продолжением работы [2], в которой получены условия разрешимости полуоднородной задачи Коши для уравнения $\ddot{x}(t)+\frac{m}{t^2}x(t)=f\left(t,x(t)\right)$, и работы [3], посвященной уравнению с линейным отклонением аргумента в сингулярном слагаемом.

Будем полагать, что $1<p<\infty$ и $p'=\frac{p}{p-1}$.

---

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №14-01-00338.

© Плаксина В. П., Плаксина И. М., Плехова Э. В., 2016 г.

Пусть $L^p[0,1] = L^p$ – пространство измеримых функций $z:[0,1]\to R$, удовлетворяющих условию $\|z\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |z(s)|^p\, ds\right)^{1/p} < \infty$. Пусть, далее, $W_0^{2,p}[0,1] = W_0^{2,p}$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,1]\to R$, имеющих принадлежащую пространству L^p вторую производную и удовлетворяющих условиям (2). Норму в пространстве $W^{2,p}$ определим равенством $\|x\|_{W_0^{2,p}} = \|\ddot{x}\|_{L^p}$.

Решением задачи (1)–(2) будем называть функцию $x \in W_0^{2,p}$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду на отрезке $[0,1]$.Будем рассматривать случай $m \le -2$. Также определим константу $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$. Тогда $m = \gamma - \gamma^2$ и $\gamma \ge 2$.

Определим оператор $\delta : W_0^{2,p} \to L^p$ равенством $(\delta x)(t) = \ddot{x}(t) + \dfrac{m}{t^2(1-t)^2}x(t)$. Также определим на пространстве L^p линейный интегральный оператор Λ с ядром

$$\Lambda(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)t}{1-2\gamma}\left(\dfrac{1-t}{t}\dfrac{s}{1-s}\right)^{\gamma}, \textit{ если } 0 \le s \le t \le 1, \\ \dfrac{(1-t)\,s}{1-2\gamma}\left(\dfrac{t}{1-t}\dfrac{1-s}{s}\right)^{\gamma}, \textit{ если } 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Теорема 1. Оператор Λ действует в пространство $W_0^{2,p}$.

Замечание. Фактически теорема 1 содержит утверждение о том, что для любого элемента $z \in L^p$ соответствующий элемент $x = \Lambda z$ принадлежит пространству $W_0^{2,p}$.

Следствие. Оператор $\Lambda : L^p \to W_0^{2,p}$ ограничен, причем его норма не превышает величины $1 + \dfrac{\gamma^2 - \gamma}{2\gamma - 1}4p$.

Теорема 2. Оператор Λ является обратным к оператору δ.

Теорема 3. Пусть $m \le -2$ и справедливы следующие условия:

а) для почти всех $t \in [0,1]$ и любых $u, v \in R$ выполняется неравенство $|f(t,u,v)| < a(t) + b_1|u| + b_2|v|$, где функция $a(\cdot)$ суммируема со степенью p, b_1 и b_2 – неотрицательные константы.

б) $\left(1 - \dfrac{4pm}{\sqrt{1-4m}}\right)\left(\dfrac{b_1}{p^{1/p}} + \dfrac{b_2}{p^{2/p}}\right) < 1$.

Тогда задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение в пространстве $W_0^{2,p}$.

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
2. *Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В.* О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33–37.
3. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* О разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Изв. вузов. Матем. 2016. № 2. С. 54–61.

SUFFICIENT SOLVABILITY CONDITIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE SECOND-ORDER QUASI-LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUAITON

Plaksina Vera P., Plaksina Irina M., Plekhova Elvira V.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614990, impl@list.ru

УДК 517.929.2

СПЕКТРАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

Попова Светлана Николаевна

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ps@uni.udm.ru

Банщикова Ирина Николаевна

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11, banshhikova.irina@mail.ru

Рассмотрим линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(m+1)=A(m)x(m), \tag{1}$$

где m пробегает множество $\mathbf{Z}$ целых чисел, $x(m)$ – n-мерный вещественный вектор. Будем предполагать, что матричная функция $A(m)$ вполне ограничена на $\mathbf{Z}$ (см. [1]), то есть $A(m)$ ограничена на $\mathbf{Z}$, при каждом m матрица $A(m)$ обратима, и обратная к A матрица также ограничена на $\mathbf{Z}$. При указанном условии на коэффициенты система (1) обладает полным спектром показателей Ляпунова [2, с. 57], состоящим из n упорядоченных по возрастанию вещественных чисел. Будем обозначать полный спектр показателей Ляпунова системы (1) через $\lambda(A)$.

Определение 1. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов A системы (1). Спектральным множеством этой системы, отвечающим заданному классу возмущений, будем называть совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают заданный класс.

Рассмотрим класс $\mathfrak{R}$ возмущенных систем вида

$$y(m+1)=A(m)R(m)y(m), \tag{2}$$

где мультипликативные возмущения $R(m)$ коэффициентов системы (1) – это вполне ограниченные на $\mathbf{Z}$ матрицы размерами $n\times n$. Пусть $\lambda(\mathfrak{R})$ – спектральное множество системы (1), отвечающее этому классу возмущений. Для произвольного $\delta>0$ через $\mathfrak{R}(\delta)$

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №16-01-00346.
© Попова С. Н., Банщикова И. Н., 2016 г.

обозначим класс возмущенных систем вида (2), для которых мультипликативные возмущения $R(m)$ удовлетворяют оценке $\|R(m)-E\|<\delta$ при всех целых m. Спектральное множество класса $\Re(\delta)$ обозначим $\lambda(\Re(\delta))$.

Теорема 1. Пусть выполнено хотя бы одно из условий:

1. Система (1) правильна [2, с. 63];
2. Система (1) диагонализируема, то есть приводима преобразованием Ляпунова [2, с. 100] к диагональному виду;
3. Показатели Ляпунова системы (1) устойчивы, то есть для любого $\alpha>0$ найдется такое $\delta>0$, что спектральное множество $\lambda(\Re(\delta))$ содержится в α-окрестности полного спектра $\lambda(A)$ невозмущенной системы (1).

Тогда спектральное множество $\lambda(\Re)$ совпадает с множеством всех упорядоченных по возрастанию наборов n чисел, при этом для каждого $\Delta>0$ найдется такое $l(\Delta)>0$, что для произвольного $0<\delta<\Delta$ спектральное множество $\lambda(\Re(l\delta))$ содержит в себе δ-окрестность полного спектра $\lambda(A)$ невозмущенной системы (1).

Библиографический список

1. *Демидович В.Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

SPECTRAL SET OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEM

Popova Svetlana N.

Udmurt State University, 1 Universitetskaya st., Izhevsk, Russia, 426034; N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevskaya st., Yekaterinburg, Russia, 620990, ps@uni.udm.ru

Banshchikova Irina N.

Udmurt State University, 1 Universitetskaya st., Izhevsk, Russia, 426034; Izhevsk State Agricultural Academy, 11 Studencheskaya st., Izhevsk, Russia, 426069, banshhikova.irina@mail.ru

УДК 517.935, 517.938

О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ЦИКЛОВ И ХАОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Родина Людмила Ивановна, Тютеев Илья Индусович

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1, LRodina67@mail.ru

Объектом исследования в данной работе является разностное уравнение

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \ (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [a, b], \ n = 0, 1, \dots, \qquad (1)$$

правая часть которого в каждый момент времени n зависит не только от значения $x_n \in [a, b]$, но и от случайного параметра ω_n, принадлежащего заданному множеству Ω. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \to f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Пусть задано множество Ω с сигма-алгеброй подмножеств A_0, на которой определена вероятностная мера μ_0. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathrm{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств A является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n = \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_n \in \Omega_n\}, \ \text{где} \ \Omega_j \in \mathrm{A}_0, \ j = 0, \dots, n,$$

и определим меру $\mu_0(D_n) = \mu_0(\Omega_0)\cdot\mu_0(\Omega_1)\cdot \dots \cdot\mu_0(\Omega_n)$. Тогда на измеримом пространстве (Σ, A) существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры μ_0 на сигма-алгебру A.

Для каждого $n \in \mathrm{N}$ обозначим

$$\sigma^n = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}), \quad f_n(\sigma^n, x) = f(\omega_{n-1}, \dots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))).$$

Будем также пользоваться обозначениями $f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x)$ и $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x)$.

Определение 1. Точки $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода* $k > 1$ для уравнения (1), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0, \ \ f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m, \quad m = 1, \dots, k-1$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода.

© Родина Л.И., Тютеев И.И., 2016 г.

Определение 2. Цикл B называется *отталкивающим циклом* уравнения (1), если существует его окрестность U, которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время.

Цикл B назовем *отталкивающим с вероятностью единица,* если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла, такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть уравнение* (1) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$. *Если*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \varliminf_{x\to\beta_i} \inf_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1,$$

то цикл B *является отталкивающим циклом уравнения* (1). Далее буквой M обозначено математическое ожидание случайной величины.

Теорема 2 (см. [1]). *Пусть уравнение* (1) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$. *Если существует окрестность* U *цикла* B *такая, что*

$$M\left(\ln \inf_{x\in U} \left|\left(f^k(\sigma, x)\right)'_x\right|\right) > 0,$$

то цикл является отталкивающим с вероятностью единица.

Определение 3. Решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (1) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathrm{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует. Точку $x_0 \in [a, b]$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (1), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические.

Так же, как в работе [2], точку y назовем *со временем периодической* точкой уравнения (1), если существует $m \in \mathrm{N}$ такое, что для любых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geq 1$.

Условие 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \dots, v_r\}$, где $r \geq 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, и каждая из функций $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = 1$ $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathrm{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $[a, b]$.

Теорема 3 (см. [1]). *Предположим, что выполнено условие* 1 *и уравнение* (1) *либо не имеет ни одного цикла* (*периода* $k \geq 1$), *либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть Y — множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка* $x_0 \in [a, b] \setminus Y$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Рассмотрим задачу о сосуществовании стохастических циклов различного периода. Покажем, что решение этой задачи существенно отличается от известного результата А.Н. Шарковского [3] для детерминированного уравнения

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,\ n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

а именно — при определенных условиях из существования стохастического цикла длины k следует существование цикла любой длины $l > k$.

Определение 4. Точку $\alpha_0 \in I$ назовем *стохастически периодической точкой периода* $k \in \mathrm{N}$ для уравнения (1), если существуют $\omega_{i0}, \ldots, \omega_{i,k-1} \in \Omega$ такие, что $x_k(\sigma, \alpha_0) = \alpha_0$ и $x_m(\sigma, \alpha_0) \neq \alpha_0$ при $m = 1, \ldots, k-1$, $\sigma = (\omega_{i0}, \ldots, \omega_{i,k-1}, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots)$.

Утверждение 1 (см. [4]). *Пусть существуют* $v_i \neq v_j \in \Omega$ *такие, что:*

а) $f(v_i, a) = f(v_i, b) = f(v_j, a) = f(v_j, b) = a$;

б) существует $c_1 \in (a, b)$ *такое, что функция* $f(v_i, x)$ *возрастает на интервале* (a, c_1), $f(v_i, c_1) = b$ *и* $f(v_i, x) > x$ *для всех* $x \in (a, c_1]$.

Тогда выполнены следующие свойства:

1) *если в интервале* (a, b) *содержится точка* x_1 *такая, что* $f(v_j, x_1) = x_1$, *то для любого* $l > 1$ *существует стохастически периодическая точка периода* l;

2) *если для некоторого* $k > 1$ *в интервале* (a, b) *содержится стохастически периодическая точка* x_k *периода* k *при* $\omega_{i,0} = v_j$, $\omega_{i1} = \ldots = \omega_{i,k-1} = v_i$, *то для любого* $l > k$ *существует стохастически периодическая точка периода* l.

Библиографический список

1. *Родина Л.И.* Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. В печати.

2. *Tien-Yien Li, James A. Yorke.* Period Three Implies Chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. v.82. №10. P.985-992.
3. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. матем. журнал. 1964. Т.16. №1. С.61-71.
4. *Родина Л.И., Тютеев И.И.* Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т.26. Вып.1. С. 79-86.

ABOUT COEXISTENCE OF CYCLES AND CHAOTIC SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH RANDOM PARAMETERS

Rodina Ludmila I., Tyuteev Ilya I.

Udmurt State University, st. Universitetskaya, 1, Izhevsk, Russia, 426034, LRodina67@mail.ru

УДК 519, 51-76

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И МОДЕЛЬ НЕЙРОНА

Розов Николай Христович

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, ФПО МГУ, fpo.mgu@mail.ru

Релаксационным колебанием называют периодический по времени процесс, при котором плавное, медленное, непрерывное изменение состояния объекта чередуется со скачкообразным, быстрым, практически разрывным. Такие процессы наблюдаются в реальных ситуациях в механике, технике, радиофизике, химии, биологии.

Этот феномен впервые описал Б. ван дер Поль [1] на примере дифференциального уравнения с большим параметром $\lambda > 0$:

$$\ddot{z} - \lambda(1 - z^2)\dot{z} + z = 0.$$

Позже оказалось, что более удобной моделью релаксационных колебаний является сингулярно возмущённая система 2-го порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \ \ \dot{y} = g(x, y). \tag{1}$$

При ряде предположений «быстрая» компонента $x = x(t,\varepsilon)$ её решения представляет собой «почти разрывную» ограниченную функцию времени, причем «время перехода» с одного «плавного» участка этой функции на другой неограниченно мало при $\varepsilon \to 0$, а движение по «плавным» участкам занимает конечное время (рис. 1). «Медленная»

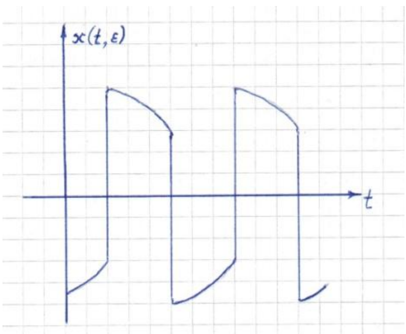


Рисунок 1

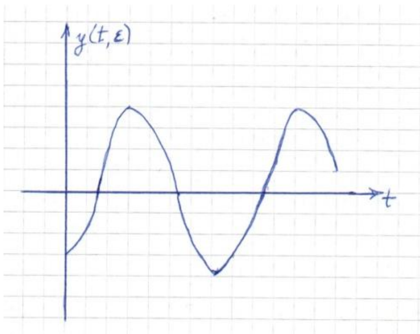


Рисунок 2

компоненты её решения $y = y(t,\varepsilon)$ изменяется с конечной скоростью и является непрерывной ограниченной функцией времени (рис. 2).

© Розов Н. Х., 2016 г.

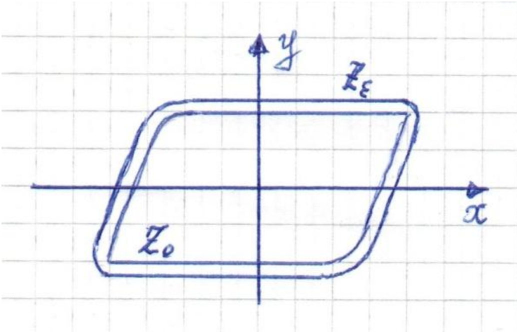


Рисунок 3

Такому «классическому» релаксационному колебанию системы (1) отвечает предельный цикл Z_ε на фазовой плоскости (x, y), при $\varepsilon \to 0$ приближающийся к замкнутой кривой Z_0 (рис. 3) [2].

Оказывается, что в системах вида (1) возможно и качественно иное, «неклассическое» релаксационное колебание: его «медленная» компонента $y = y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ приближается к разрывной ограниченной функции времени, а «быстрая» компонента $x = x(t,\varepsilon)$ является δ-образной [3]. Именно такое колебание имеет место в предлагаемой модели функционирования нейрона.

Модель функционирования отдельного нейрона ФитцХью – Нагумо [4] имеет вид

$$\varepsilon\dot{x} = y + x - x^3/3 + c, \quad \dot{y} = a - x - by, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $a,b = \text{const} > 0$, $c = cont$. В этой системе реализуется классическое релаксационное колебание, причём компонента $x = x(t,\varepsilon)$ должна была бы отражать поведение во времени мембранного потенциала нейрона. Но описанное выше изменение быстрой компоненты решения системы (2) (см. рис. 1) не соответствует наблюдаемому в действительности поведению мембранного потенциала реального нейрона, для которого характерно периодическое чередование кратковременных, «почти мгновенных», значительных по высоте «всплесков» и участков «плавного» изменения. Поэтому возникает задача модификации модели (2), чтобы добиться нужного поведения компоненты $x = x(t,\varepsilon)$.

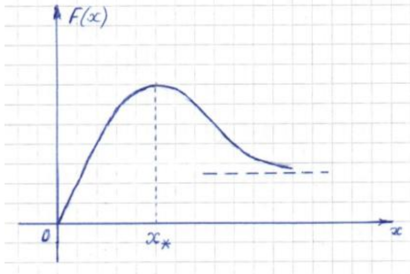


Рисунок 4

Опустим феноменологические соображения конструирования новой модели функционирования отдельного нейрона и рассмотрим саму эту модель (она остаётся в классе сингулярно возмущённых систем вида (1)):

$$\varepsilon\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = a - x - y, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $a = \text{const} > 0$. Эскиз графика функции $F(x)$ см. на рис. 4, а её существенные для дальнейшего свойства таковы:

1. $F(x) \in C^{\infty}(\mathrm{R})$.

2. Существует такое значение $x = x_* > 0$, что

$$F(0) = 0, \qquad F'(x) > 0 \quad при \quad x \in (-\infty, x_*), \qquad F'(x) < 0 \quad при \quad x \in (x_*, +\infty),$$
$$F'(x_*) = 0, \qquad F''(x_*) < 0, \qquad a - x_* - F(x_*) > 0.$$

3. Справедливо асимптотическое представление при $x \to +\infty$:

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{x^k}, \qquad \alpha_0 > 0,$$

сохраняющее силу при дифференцировании по x любое число раз.

Неклассическим релаксационным циклом на фазовой плоскости (x, y) системы (3) назовём замкнутую кривую $W_\varepsilon = (x = x^*(t, \varepsilon), y = y^*(t, \varepsilon))$, где x^* и y^* – $T^*(\varepsilon)$ - периодические функции времени t, такую, что при $\varepsilon \to 0$:

– величина $T^*(\varepsilon)$ стремится к конечному пределу $T^* > 0$;

– медленная компонента $y^*(t, \varepsilon)$ сходится поточечно к некоторой разрывной ограниченной функции времени;

– быстрая компонента $x^*(t, \varepsilon)$ представляет собой δ -образную функцию времени, причём её «всплески» неограниченно растут.

Обозначим через $x = \varphi(y), y \in (-\infty, F(x_*))$, (единственную) функцию, обратную функции $y = F(x), x \in (-\infty, x_*)$, и введём (положительную) константу

$$T^* = \int_{\varphi(2\alpha_0 - F(x_*))}^{x_*} \frac{F'(x)dx}{a - x - F(x)}.$$

Определим функцию $y^*(t)$ как решение задачи Коши

$$\dot{y} = a - \varphi(y) - y, \qquad y|_{t=0} = 2\alpha_0 - F(x_*),$$

и пусть $x^*(t) = \varphi(F(y^*(t)))$. Две последние функции продолжим с отрезка $0 \le t \le T^*$ на всю ось t по закону T^* -периодичности; эти продолжения оказываются разрывными в каждой точке $t = kT^*, \ k \in \mathrm{Z}$.

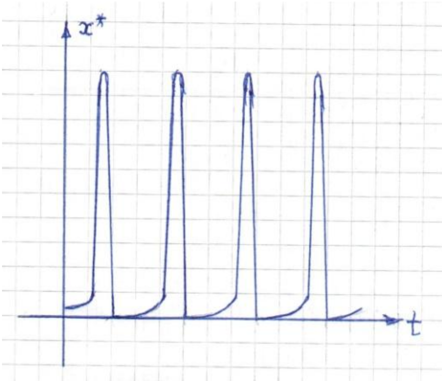


Рисунок 5

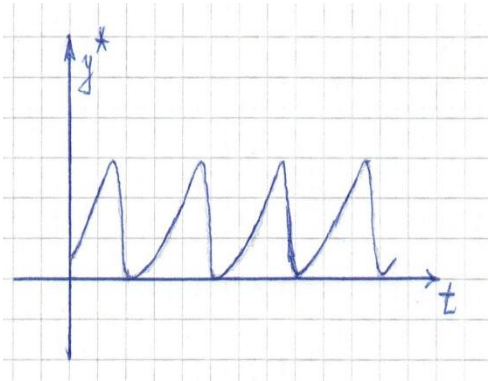


Рисунок 6

Теорема. Пусть выполнены условия 1 – 3. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ у системы (3) существует единственный экспоненциально орбитально устойчивый неклассический релаксационный цикл

$$W_\varepsilon = \{(x, y) : x = x^*(t,\varepsilon), y = y^*(t,\varepsilon), 0 \le t \le T^*(\varepsilon)\}$$

периода $T^*(\varepsilon)$, причем:

$$x^*(0,\varepsilon) \equiv x_* + 1;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T^*(\varepsilon) = T^*;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t_*(\varepsilon)} x^*(t,\varepsilon)dt = 2F(x_*) - 2\alpha_0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \max_t(\sqrt{\varepsilon}\, x^*(t,\varepsilon)) = F(x_*) - \alpha_0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{\delta_1 \le t \le T^*(\varepsilon) - \delta_2} (|\, x^*(t,\varepsilon) - x^*(t)\,| + |\, y^*(t,\varepsilon) - y^*(t)\,|) = 0.$$

Здесь $t_*(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ – первый положительный корень уравнения $x^*(t,\varepsilon) = x_* + 1$, а константы $\delta_1, \delta_2 \in (0, T^*/2)$ фиксированы произвольным образом [5].

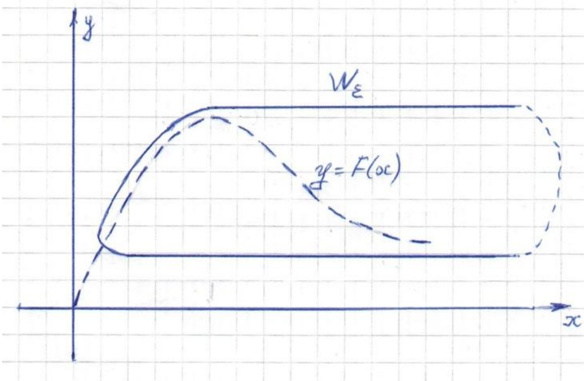


Рисунок 7

Наглядное представление о неклассическом релаксационном колебания дают рис. 5 и 6, где приведены эскизы графиков зависимости от времени его компонент, а сам неклассический релаксационный цикл на фазовой плоскости изображён на рис. 7.

Библиографический список

1. *van der Pol B.* On relaxation oscillations // Philos. Mag. 1926. (7) V. 2. № 11. P. 978-992.
2. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975.
3. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
4. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445-466.
5. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Об одной модификации нейронной модели ФитцХью – Нагумо // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 430-449.

УДК 517.929

ОБ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Сабатулина Татьяна Леонидовна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, TSabatulina@gmail.com

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с ограниченным последействием

$$\dot{x}(t)+\int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s)=0,\ t\in R_+, \tag{1}$$

где $\omega>0$, функция $r:[0,\omega]\to R$ имеет ограниченную вариацию, $r(0)=0$. При отрицательных значениях аргумента полагаем $x(\xi)=\varphi(\xi)$. Под решением будем понимать (см. [1]) непрерывное продолжение начальной функции φ, обращающее (1) в тождество.

Будем говорить, что решение уравнения (1) осциллирует, если оно имеет на R_+ неограниченную последовательность нулей.

Для автономного дифференциального уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями получен (см. [2]) критерий осцилляции любого решения в терминах корней характеристической функции. Аналогичный результат справедлив и для уравнения (1).

Теорема. *Все решения уравнения* (1) *осциллируют тогда и только тогда, когда функция*

$$g(p)=p+\int_0^{\omega} e^{-p\xi}\,dr(\xi),\ p\in C,$$

не имеет вещественных корней.

С помощью данной теоремы получим в терминах коэффициентов и запаздываний критерий осцилляции любого решения уравнения

$$\dot{x}(t)+bx(t-r)+c\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds=0,\ t\in R_+, \tag{2}$$

где $b,c\in R$, $r,h>0$.

На плоскости Ouv зададим кривую

$$\Gamma(r,h)=\left\{u=-\frac{e^{h\zeta}\zeta\left(2-2e^{r\zeta}+r\zeta\right)}{1+(r-h)\zeta+e^{r\zeta}(h\zeta-1)},\ v=-\frac{e^{r\zeta}\zeta^2(1+h\zeta)}{1+(r-h)\zeta+e^{r\zeta}(h\zeta-1)},\ \zeta\in\Omega\right\},$$

---

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2014/152, проект № 1890).

© Сабатулина Т.Л., 2016 г.

где

$$\Omega=\begin{cases}\left[-\frac{1}{h},\frac{\theta_1}{r}\right), \text{ если } r>2h, & -\frac{1}{h}, \text{ если } r=\alpha h,\\ \left[-\frac{1}{h},0\right), \text{ если } r=2h, & \left(\frac{\theta_2}{r},\zeta_1\right]\cup\left[\zeta_2,-\frac{1}{h}\right], \text{ если } h<r<\alpha h,\\ \left[-\frac{1}{h},\frac{\theta_2}{r}\right), \text{ если } \alpha h<r<2h, & \left[-\frac{\alpha}{r},+\infty\right), \text{ если } r\le h,\end{cases}$$

θ_1 и θ_2 – соответственно положительный и отрицательный корни уравнения $e^{\theta}=1+\frac{\theta}{1-\frac{h}{r}\theta}$, α – положительный корень уравнения $e^{-\theta}=1-\frac{\theta}{2}$, $\alpha\approx 1.59$. Кроме того, при $h<r<\alpha h$ кривая $\Gamma(r,h)$ может иметь одно самопересечение, значения $\zeta=\zeta_1$ и $\zeta=\zeta_2$ определяют точку самопересечения.

Определим область $D(r,h)$ следующим образом. При $r\le h$ к области $D(r,h)$ отнесём все точки (b,c), лежащие выше кривой $\Gamma(r,h)$, причём $b\ge 0$. При $r>h$ к области $D(r,h)$ отнесём все точки (b,c), лежащие выше кривой $\Gamma(r,h)$, причём $c\ge 0$.

Итак, все решения уравнения (2) осциллируют тогда и только тогда, когда точка (b,c) принадлежит области $D(r,h)$.

На рис. 1 изображены два сечения области D.

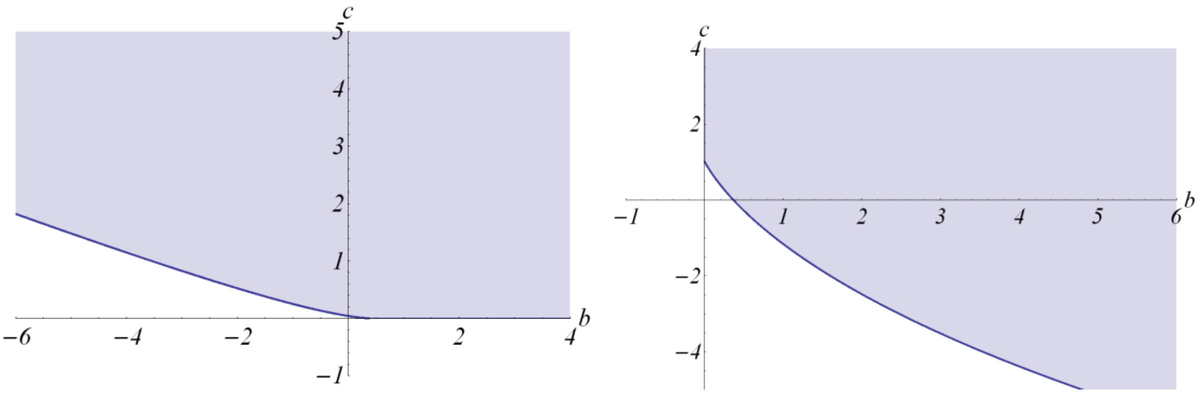


Рис. 1. Область $D(r,h)$ при $h=1$, $r=4$ (слева) и при $h=0.8$, $r=1$ (справа).

Библиографический список

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
2. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1975. №3. С. 92-96.

ON THE OSCILLATION OF SOLUTIONS FOR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Sabatulina Tatyana L.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000,
TSabatulina@gmail.com

УДК 519.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Седова Светлана Михайловна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, sedovasm@yandex.ru

Продолжены исследования по вопросу устойчивости дифференциально-разностных уравнений по направлениям в [1],[2],[3],[4],[5].

Для уравнения

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + b_0 x(t-\omega), t > 0, \qquad (1)$$
$$x(\xi) = 0, \xi < 0; x(0) = 1,$$

в случае $a_0, b_0 \in R, \omega = const > 0$ методом, развиваемым автором [6], построена известная [7, с. 126] область асимптотической устойчивости S на плоскости параметров уравнения (1) $0ab$, где $a = a_0\omega, b = b_0\omega$ −параметры уравнения (1).

Введем обозначения

$$S_1 = \{(a,b) \in 0ab: b < -a\},$$
$$S_2 = \{(a,b) \in 0ab: \text{точки выше линии, заданной параметрически } a = -b\cos\varphi, b = -\varphi/\sin\varphi\ , \varphi \in (0,\pi)\}$$

.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Область асимптотической устойчивости $S \subset 0ab$ уравнения (1) имеет вид: $S = S_1 \cap S_2$.

Замечание. Для области неустойчивости H выполнено: $0ab\backslash\overline{S_1 \cap S_2} \subset H$. Остается неизвестной принадлежность границы области S области H .

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт комтьютерных исследований, 2002.
2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Издательство ПГУ, 2001.

© Седова С. М., 2016 г.

3. *Рехлицкий З.И.* Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Известия АН СССР. 1966. Т. 30, вып.5. С. 971-974.
4. *Малыгина В.В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений: дис. … канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1983. 101 с.
5. *Седова С.М.* Устойчивость линейных дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами: дис. … канд. физ.-мат. наук. Пермь, 2000. 130 с.
6. *Седова С.М.* О критерии устойчивости дифференциально-разностных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 3(7). С. 6–11.
7. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

THE STABILITY OF ONE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION WITH ONE DELAY AND WITH THE CONSTANT COEFFICIENTS

Sedova Svetlana M.

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000,
sedovasm@yandex.ru

УДК 517.926

КОЛЕБЛЕМОСТЬ И БЛУЖДАЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Сергеев Игорь Николаевич

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия,
г. Москва, Ленинские горы, д. 1, igniserg@gmail.com

Обсуждаются введённые автором характеристики решений дифференциальных систем, имеющие ляпуновский тип и отвечающие за их колеблемость, блуждаемость и вращаемость. Подробно рассматриваются значения этих характеристик на решениях линейных систем с постоянными и кусочно постоянными коэффициентами. Указаны классы систем, для которых обнаруживается тесная связь обсуждаемых характеристик с мнимыми частями собственных значений матрицы системы, а также классы систем, для которых эта связь совершенно отсутствует.

Для заданного натурального $n > 1$ обозначим через M^n множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

задаваемых кусочно непрерывными операторными (или матричными) функциями $A : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ (отождествляемыми с самими системами), а через $\mathrm{S}(A)$ и S — множества ненулевых решений конкретной системы $A \in \mathrm{M}^n$ и, соответственно, ненулевых решений всех таких систем.

Основные определения

Для описанных решений рассмотрим показатели ляпуновского типа, которые призваны отвечать не за рост их нормы, но за их колеблемость, блуждаемость и вращаемость. В определениях 1 и 2 ниже введены именно такие показатели (см. работы [1–6], где использованы несколько иные обозначения и названия).

Определение 1. Для заданного *функционала* $\mathrm{K} : \mathrm{S} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ определим:

1) *сильный* и *слабый нижние* показатели решения $x \in \mathrm{S}$ соответственно формулами

$$\check{\nu}^{\bullet}(x) = \inf_{L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \mathrm{K}(Lx, t), \quad \check{\nu}^{\circ}(x) = \varliminf_{t \to \infty} \inf_{L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \mathrm{K}(Lx, t);$$

2) одноименные *верхние* показатели $\hat{\nu}^{\bullet}(x)$ и $\hat{\nu}^{\circ}(x)$ — теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов верхними;

© Сергеев И.Н. – 2016 г.

3) в случае совпадения верхних показателей с нижними будем называть их *точными*, опуская в их обозначениях дужки, а в случае совпадения сильных со слабыми будем называть их *абсолютными*, опуская кружочки.

Определение 2. Следуя определению 1, по конкретным вводимым ниже функционалам $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \mathrm{P}, \Theta, \Omega, \Gamma$ построим показатели ù $= \nu, \rho, \theta, \omega, \gamma$ *колеблемости*, *блуждаемости* и, соответственно, *ориентированной*, *неориентированной или частотной вращаемости*. Для этого, обозначив через P_1 и P_2 ортогональные проекторы на некоторые фиксированные прямую и ориентированную плоскость $g \subset G \subset \mathbb{R}^n$, определим для решения $x \in \mathrm{S}$ и числа $t > 0$ следующие величины:

а) $\mathrm{N}(x,t)$ — *нормированное*, т.е. умноженное на π, *число нулей* на промежутке $(0;t]$ проекции $P_1 x(\tau)$, причём если хотя бы один нуль этой проекции при $\tau \in [0;t]$ кратен, то считаем $\mathrm{N}(x,t) = \infty$;

б) $\mathrm{P}(x,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{(x(\tau)}{|\, x(\tau)\,|} \right| d\tau$ — *вариация следа* (на единичной сфере) функции x за время от 0 до t;

в) $\Theta(x,t) \equiv |\, \varphi(P_2 x, t)\,|$ — *модуль* непрерывного ориентированного *угла* $\varphi(P_2 x, t)$ между проекцией $P_2 x(t)$ и начальной проекцией $P_2 x(0)$ при условии $\varphi(P_2 x, 0) = 0$, причём если функция $P_2 x(\tau)$ имеет при $\tau \in [0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Theta(x,t) = \infty$;

г) $\Omega(x,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial \varphi(P_2 x, \tau)}{\partial \tau} \right| d\tau$ — *вариация угла* $\varphi(P_2 x, t)$ за время от 0 до t, причём если функция $P_2 x(\tau)$ имеет при $\tau \in [0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Omega(x,t) = \infty$;

д) $\Gamma(x,t) \equiv \mathrm{P}(P_2 x, t) + \mathrm{N}(x,t)$ — *частотная вариация следа* проекции $P_2 x(\tau)$ за время от 0 до t.

Заметим, что значения введённых в определении 2 показателей не зависят от выбора прямой g и содержащей её ориентированной плоскости G.

Определение 3. Назовём *спектром* показателя ù системы $A \in \mathrm{M}^n$ множество $\mathrm{Sp}_{ù}(A) \equiv ù(\mathrm{S}(A))$ всех его значений $ù(x)$ на решениях $x \in \mathrm{S}(A)$, а для оператора $A \in \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathrm{Sp}_{|\mathrm{Im}\lambda|}(A)$ множество *модулей мнимых частей* всех собственных значений оператора A.

Спектры стационарных систем

Теорема 1. *Спектр любого из точных и абсолютных показателей* $\text{ù} = \nu, \rho, \theta, \omega, \gamma$ *любой автономной системы* $A \in \mathrm{M}^n$ *удовлетворяет включению*

$$\mathrm{Sp}_{\text{ù}}(A) \supset \mathrm{Sp}_{|\mathrm{Im}\lambda|}(A).$$

В работах [2, 4, 7] доказано, что для любых ненулевых решений автономных систем показатель ν является точным и абсолютным, а показатели $\rho^{\circ}, \rho^{\bullet}$ — точными, причём выполнено равенство $\nu = \rho^{\circ}$ и справедлива

Теорема 2. *Для каждого из показателей* $\text{ù} = \nu, \rho^{\circ}, \rho^{\bullet}$ *и любой автономной системы* $A \in \mathrm{M}^n$ *верно равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\text{ù}}(A) = \mathrm{Sp}_{|\mathrm{Im}\lambda|}(A).$$

Распределение этих показателей по решениям автономной системы описывает

Теорема 3. *Для каждого из показателей* $\text{ù} = \nu, \rho^{\circ}, \rho^{\bullet}$ *в пространстве* $\mathrm{S}(A)$ *решений любой автономной системы* $A \in \mathrm{M}^n$ *существует флаг подпространств*

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n, \quad \dim S_i = i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющий равенствам

$$\text{ù}(x) = |\mathrm{Im}\,\lambda_i(A)|, \quad x \in S_i \subset S_{i-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где собственные значения $\lambda_i(A)$ *оператора* A *в случае* $\text{ù} = \nu, \rho^{\circ}$ *упорядочены по нестрогому убыванию модулей мнимых частей, а в случае* $\text{ù} = \rho^{\bullet}$ *— по нестрогому убыванию ведущей частоты, т.е. по возрастанию действительных частей собственных значений, а при их совпадении — по возрастанию номеров в жордановых клетках, а ещё и при их совпадении — по убыванию модулей мнимых частей.*

По меньшей мере, для одного из перечисленных в определении 2 показателей утверждаемое в теореме 1 включение, вообще говоря, не обращается, в равенство, о чём свидетельствует

Теорема 4. Для некоторой автономной системы $A \in \mathrm{M}^4$ выполнено условие

$$\mathrm{Sp}_{\theta}(A) \not\subset \mathrm{Sp}_{|\mathrm{Im}\lambda|}(A).$$

Спектры нестационарных систем

Если оператор двумерной системы в каждый момент времени в некотором ортогональном базисе записывается в виде фиксированной диагональной матрицы $S = \mathrm{diag}\{1, -1\}$, то все мнимые части его собственных значений равны 0. Тем не менее, у такой системы сразу все описанные в определении 2 показатели всех ненулевых решений могут оказаться равными 1, что и утверждает следующая

Теорема 5. *Существует такая система* $A \in \mathrm{M}^2$, *что при каждом* $t \in \mathbb{R}^+$ *матрица* $A(t)$ *симметрична и её собственные значения равны* ± 1, *но для любого её решения* $x \in \mathrm{S}(A)$ *выполнены равенства*

$$\theta(x) = \nu(x) = \rho(x) = \omega(x) = \gamma(x) = 1.$$

Об отсутствии явной связи между введёнными показателями и мнимыми частями собственных значений периодической кусочно постоянной системы говорит

Теорема 6. *Для каждого значения* $\omega \in [0,1]$ *и любой двумерной матрицы A, у которой мнимые части собственных значений по модулю равны 1, существует такая двумерная периодическая кусочно постоянная система* $A_\omega \in \mathrm{M}^2$ *с одинаковыми по длине участками постоянства, что задающая её матричная функция принимает ровно два значения* $\pm A$, *а для любого её решения* $x \in \mathrm{S}(A_\omega)$ *выполнены соотношения*

$$0 = \theta(x) \le \nu(x) = \rho(x) = \omega(x) = \gamma(x) = \omega.$$

Однако в случае неограниченного роста участков постоянства системы упомянутая выше связь обнаруживается, а именно, справедлива

Теорема 7. *Если двумерная кусочно постоянная система* $A \in \mathrm{M}^2$ *такова, что при каждом* $t \in \mathbb{R}^+$ *мнимые части собственных значений матрицы* $A(t)$ *по модулю равны 1 и промежутки знакопостоянства функции* $A(t)$ *стремятся к бесконечности при* $t \to \infty$, *то для любого решения* $x \in \mathrm{S}(A)$ *выполнены равенства*

$$\nu(x) = \rho(x) = \omega(x) = \gamma(x) = 1.$$

Библиографический список

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
3. *Сергеев И.Н.* Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.
4. *Сергеев И.Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138.

5. *Сергеев И.Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №10. С.1353–1361.
6. *Сергеев И.Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 732–751.
7. *Бурлаков Д.С., Цой С.В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.

VARIABILITY AND BLOGDEST SOLUTIONS STATIONARY AND NON-STATIONARY DIFFERENTIAL SYSTEMS

Sergeev Igor N.

Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991, igniserg@gmail.com

УДК 517.977

ТЕОРЕМА БОЛЯ – ПЕРРОНА ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Симонов Пётр Михайлович

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, simpm@mail.ru

Систематическое развитие теории устойчивости дифференциальных уравнений с последействием ведется с середины XX века. При этом возникли основные методы исследований: функционалы Ляпунова – Красовского, функции Разумихина, интегральные и дифференциальные неравенства, монотонные операторы, производящие функции с параметром, W-метод Азбелева. В последние десять лет началось исследование гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). Источником послужили работы E. Fridman, J.-J. Loiseau, M. Cardelli, X. Dusser, K. Gu, V.I. Kharitonov, J. Chen, C. Bonnet, J. Partington, R. Rabah, G.M. Sklyar, A.V. Rezounenko, S.I. Niculescu, P. Fu, В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо.

Исследование по устойчивости решений ГФДСП достаточно мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных гибридных дифференциально-разностных систем. Получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости этих систем.

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [2–5] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе, свойства устойчивости решений. В то же время, широкие и актуальные для приложений классы систем ГФДСП, а именно, гибридных линейные функционально-дифференциальных уравнений с последействием, формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. В статьях [6-8] предложены гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости. Здесь мы предлагаем теорему Боля – Перрона для линейных ГФДСП.

[1] Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».
© Симонов П.М., 2016 г.

Библиографический список

1. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнение. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.
2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М***.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
3. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В***.** Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555-562.
4. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В***.** Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1659-1668.
5. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196-204.
6. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2013. Т. 13, № 4. С. 34-37.
7. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2014. Т. 14, № 5. С. 38-45.
8. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). III // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». 2015. Т. 15, № 3. С. 63-69.

TEOREM OF BOHL – PERRON OF HYBRID LINEAR SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

Simonov Pyotr M.

Perm State University, st. Bukireva,15 , Perm, Russia, 614990, simpm@mail.ru

УДК 517.983.5

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Фалалеев Михаил Валентинович

Иркутский государственный университет, 664003, Россия, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, mvfalaleev@gmail.com

Одним из средств математического моделирования эволюции физических явлений и процессов, на текущее состояние которых усредненно влияет вся предыстория наблюдений, является аппарат интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В этом классе проблем выделяются начально-краевые задачи с необратимым оператором при старшей по времени производной, такие как, например, описывающие колебательные процессы в вязкоупругих средах [1]. В наиболее общей постановке такие задачи можно решать путем их редукции к вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах.

В данном докладе рассматривается задача Коши вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t), \tag{1}$$

$$u^{(i)}(0) = u_i, \qquad i = 0,1,\dots,N-1, \tag{2}$$

здесь $B, A, K(t)$ -- замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из E_1 в E_2, E_1, E_2, -- банаховы пространства, оператор B -- фредгольмов [2]. Ранее в цикле работ автора см. [3] и библиографию там же исследовалась задача (1)-(2), в которой ядро интегрального оператора $K(t)$ является линейной комбинацией операторов дифференциальной части, т.е. имеет специальный вид $K(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$. В данном докладе рассмотрен общий случай, с ограничениями на порядок нуля оператор-функции $K(t)$.

Пусть выполнены условия:

$A)$ $D(B) \subset D(A)$, $D(K(t)) = D(K) \subset D(B)$, $D(K)$ -- не зависит от t, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = D(K)$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \ge 1$.

© Фалалеев М.В., 2016 г.

Обозначим через $\{\varphi_i\} \in E_1$ базис ядра $N(B)$ оператора B, $\{\phi_i\} \in E_2^*$ базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора $B^*, i = 1,\dots,n$, $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ и $\{z_i\} \in E_2$ -- соответствующие им биортогональные системы элементов, тогда в силу условия $\overline{R(B)} = R(B)$ существует [2] ограниченный оператор $\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i\right)^{-1} \in L(E_2, E_1)$ -- называемый оператором Треногина-Шмидта. Далее через $\{\varphi_i^{(j)}\} \in E_1$ будем обозначать полный A-жорданов набор оператора B см. [2], а $\{\phi_i^{(j)}\} \in E_2^*$ полный A^*-жорданов набор оператора $B^*, i = 1,\dots n$, $j = 1,\dots, p_i$, введем обозначения для проектора

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i + 1 - j)}$$

и оператор-функций $U_N(A\Gamma t) = \sum_{i-1}^{\infty} (A\Gamma)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$ и $R(t)$ -- резольвенты ядра

$$K(t)\theta(t) * \Gamma U_N(A\Gamma t)[I - Q]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle K^{(N \cdot k)}(t) \varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \right\} \right] \theta(t)$$

Относительно ядра интегрального оператора $K(t)$ будем предполагать выполненными соотношения:

$$B) \quad K^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0,1,\dots, N \cdot (p-1) - 1,\ p \ge 1; \quad \nu = 0,\ p = 1; \quad p = \max\ p_i .$$

Известно, что в случаях вырожденности оператора B задача Коши (1)-(2) разрешима в классе функций конечной гладкости лишь при выполнении жестких условий связи между начальными условиями (2) и функцией $f(t)$. Поэтому естественным представляется строить обобщенные решения в пространстве распределений $K_+^{'}(E_1)$ с носителем на положительной полуоси, а такую задачу эффективно можно решить с помощью фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения) для интегро-дифференциального оператора уравнения (1). А именно, справедлива следующая

Теорема. Если выполнено условие А), фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор и выполнены соотношения В), то интегро-дифференциальный оператор $L_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$ (соответствующий уравнению (1)) имеет на классе распределений $K_+^{'}(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$E_N(t) = \left(\Gamma U_N(A\Gamma t)[I - Q]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \right\} \delta^{(N \cdot k)}(t) \right] \right) * (I\delta(t) - R(t)\theta(t)).$$

В условиях сформулированной теоремы единственным решением задачи Коши (1)-(2) в классе $K_{+}^{'}(E_1)$ является функция

$$u(t) = E_N(t) * \left(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t) \right),$$

анализируя далее это представление для обобщенного решения можно получить утверждения о разрешимости задачи Коши (1)-(2) в классах функций конечной гладкости.

Библиографический список

1. *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.* Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equations with Strong Damping // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. V. 24. P. 1043–1053.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
3. *Фалалеев М.В.* Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т. 6. № 4. С. 128–137.

FUNDAMENTAL OPERATOR-FUNCTIONS OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS IN BANACH SPACES

Falaleev Mikhail V.

Irkutsk State University, 1 K.Marx st., Irkutsk, Russia, 664003, mvfalaleev@gmail.com

УДК 517.958 + 530.145.6

ОБ ОЦЕНКЕ И ВЫЧИСЛЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЧАСТОТ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Хаммади Алаа Хуссейн

Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская,1, aliiraqmath@Gmail.com

Данная работа является продолжением исследований Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова, в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в исследовании множеств, которые не являются инвариантными в *классическом* смысле, но обладают свойством статистической инвариантности, а также в изучении статистических характеристик множества достижимости управляемой системы. Здесь рассматриваются характеристики управляемой системы, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости системы в заданном множестве $M = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times R^n : x \in M(t)\}$ на конечном промежутке времени. Доказаны теоремы об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций, получены оценки различных характеристик. Приведен пример вычисления характеристик множества достижимости для управляемой системы первого порядка. Изучаются характеристики, связанные с инвариантностью или слабой инвариантностью заданного множества

Здесь изучаются характеристики, которые отображают свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times R^n \times R^m, \tag{1}$$

в заданном множестве $M = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times R^n : x \in M(t)\}$.

Предполагаем, что функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset R^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times R^n$.

Пусть множество M задано функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа и для каждого $t \in [0,+\infty)$ множество $M(t)$ не пусто и компактно.

© Хаммади А.Х., 2016 г.

Обозначим через $D(t,X)$ множество достижимости системы (1) в момент времени t из начального множества X. Для определения характеристик множества достижимости для любых $\tau \geq 0$, $\vartheta > 0$ и любого компактного множества $X \subset R^n$ введем в рассмотрение множество $\alpha(\tau,\vartheta,X) = \{\, t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t) \,\}$, которое измеримо по Лебегу (см. [1]).

Определение 1 (см. [1]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ системы (1) множеством M называется следующий предел

$$freq(D,M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{mes\,\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{mes\{\, t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t) \,\}}{\vartheta} \qquad (2)$$

где $mes-$ мера Лебега на числовой прямой.

Если предел (2) не существует, то характеристики

$$freq_*(D,M) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{mes\,\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta}, \qquad freq^*(D,M) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{mes\,\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} \qquad (3)$$

называются соответственно *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $D(t,X)$ системы (1) множеством M.

Определение 2 (см. [2]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ системы (1) множеством M на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ называется характеристика

$$freq_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{mes\,\alpha(\tau,\vartheta,X)}{\vartheta} = \frac{mes\{\, t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t) \,\}}{\vartheta}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $freq_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ для любого момента времени $\tau \geq 0$, поэтому естественно для заданного $\vartheta > 0$ определить характеристику

$$freq_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau\geq 0} freq_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) = \inf_{\tau\geq 0} \frac{mes\{\, t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t) \,\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от пределов (2), (3) тем, что она отражает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве M на отрезке заданной длины.

Теорема 1 (см. [3]) . Имеют *место следующие свойства:*

1) *Для любого* $\vartheta > 0$ *выполнено неравенство*

$$freq_{\vartheta}(D,M) \leq freq_*(D,M);$$

2) *если функции* $t \mapsto D(t)$ *и* $t \mapsto M(t)$ *периодические с периодом* $T > 0$, *то предел* $freq_*(D,M)$ *существует и*

$$freq_T(D,M) = freq(D,M) = \frac{mes\{\, t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\,\}}{\vartheta};$$

3) *если функция* $t\mapsto M(t)$ *периодическая с периодом* $T>0$ *и для всех* $t\geq 0$ *имеет место включение* $D(t+T,X)\subseteq D(t,X)$ *то*

$$freq_T(D,M) = \frac{mes\{\, t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\,\}}{\vartheta}.$$

Теорема 2 (см. [3]). *Пусть функции* $M(t)$, $\tilde{D}(t)$ *периодические с периодом* $T>0$ *и непрерывные в метрике Хаусдорфа. Тогда, если* $\lim\limits_{t\to+\infty} dist(D(t),\tilde{D}(t)) = 0,$ *то выполнены следующие свойства:*

1) $freq_T(D,M) \leq freq_T(\tilde{D},M) = \dfrac{mes\{t\in[0,T]: \tilde{D}(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta};$

2) *если* $D(t)\subseteq \tilde{D}(t)$ *для всех* $t\geq 0$*, то*

$$freq_T(D,M) = freq_T(\tilde{D},M).$$

Пример 1. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = -x + (\cos t + 1)u, \qquad (t,x)\in[0,+\infty)\times R, \qquad (4)$$

где $u\in[-1,1]$ и множество $M = \{(t,x)\in[0,+\infty)\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$.

Если $X = \tilde{X} = [-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$, то многозначная функция

$$t\mapsto D(t,\tilde{X}) = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(t+\frac{\pi}{4})+1)u, \quad u\in U\}$$

периодическая с периодом $2\pi>0$, тогда в силу теоремы 1 выполнено равенство

$$freq_{2\pi}(D,M) = \frac{1}{4}.$$

Если $\tilde{X}\subseteq X$, то $D(t+2\pi,X)\subseteq D(t,X)$, поэтому

$$freq_{2\pi}(D,M) = \frac{mes\{\, t\in[0,2\pi]: D(t,X)\subseteq M(t)\,\}}{2\pi}.$$

Если $X\subseteq\tilde{X}$, то $D(t,X)\subseteq D(t,\tilde{X})$ для всех $t\geq 0$. Далее

$$\lim_{t\to+\infty} dist(D(t,X), D(t,\tilde{X})) = 0,$$

поэтому в силу теоремы 2 выполнено равенство

$$freq_{2\pi}(D,M) = freq_{2\pi}(\widetilde{D},M) = \frac{1}{4}.$$

Библиографический список

1. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265 - 288.
2. *Родина Л.И., Хаммади А.Х.* Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35-48.
3. *Хаммади А.Х.* О свойствах характеристик множества достижимости управляемой системы // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2015. Вып. 2 (46). С. 216-227.

ABOUT ESTIMATION AND CALCULATION OF RELATIVE FREQUENCIES FOR SOME CLASSES OF MULTIVALUED FUNCTIONS

Hammadi Alaa H.

Udmurt State University, st. Universitetskaya, 1, Izhevsk, Russia, 426034, aliiraqmath@Gmail.com

УДК 519.6

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ[1]

Ченцов Александр Георгиевич

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д.16, chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается один из методов построения множества позиционного поглощения в дифференциальной игре (ДИ) сближения-уклонения, а именно: метод программных итераций (МПИ). С применением МПИ исследуются топологические свойства множества позиционного поглощения (МПП), отвечающего альтернативе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина (см. [1, 2]). Предполагается, что конфликтно-управляемая система удовлетворяет условию обобщенной единственности, используемому А.В. Кряжимским [3] при распространении альтернативы Н.Н. Красовского, А.И. Субботина на системы, не удовлетворяющие условию Липшица по фазовой переменной. Относительно множества, определяющего фазовые ограничения в ДИ сближения-уклонения, не предполагается выполненным традиционное условие замкнутости в обычной топологии покоординатной сходимости, а постулируется лишь замкнутость сечений, получающихся при фиксации соответствующего момента времени. При упомянутых условиях исследуется связь конструкций на основе МПИ и решения ДИ в классе квазистратегий. Последние определяются в виде мультифункций, действующих в пространствах управлений-мер. Известно [4], что в упомянутых квазистратегиях при стандартных [1, 2, 3] условиях на параметры ДИ реализуется альтернатива, эквивалентная позиционной. Для позиций, успешных для игрока,заинтересованного в наведении на целевое множество при соблюдении фазовых ограничений, многозначная квазистратегия, реализующая упомянутое наведение, определяется конструктивно. Более того, такая, определяемая посредством МПИ, квазистратегия (именуемая в [5] квазипрограммой) является наибольшим элементом множества квазистратегий, гарантирующих наведение, в смысле поточечно реализуемой упорядоченности по включению (см. [5, теорема 5.3]). Вопросы, связанные с реализацией

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 16-01-00649, 16-01-00505.
© Ченцов А. Г., 2016 г.

идеализированных процедур-квазистратегий в схемах пошагового управления с поводырём [2] (моделью) исследовались в [6].

С использованием МПИ устанавливаются свойства, имеющие смысл «непрерывности сверху» МПП при изменении целевого множества и множества, определяющего фазовые ограничения. При этом "обычной" непрерывностью при изменении упомянутых параметров МПП, вообще говоря, не обладают.

Настоящая работа продолжает исследования [5, 6, 7, 8] (в связи с исследованиями в области МПИ отметим также [9, 10]). Для построения МПП привлекается оператор программного поглощения, определяемый для заданного целевого множества и действующий в семействе подмножеств множества, сечения которого определяют исходные фазовые ограничения. Итерационная процедура реализует последовательное сжатие упомянутых ограничений: построенное на первом этапе множество программного поглощения в классе обобщенных управлений-мер формирует новые фазовые ограничения в виде сечений множества в пространстве позиций, на которое снова действует оператор программного поглощения и так далее. Возникающее в пределе множество оказывается неподвижной точкой оператора программного поглощения и совпадает с МПП; данные свойства получены при условиях, когда целевое множество замкнуто, а множество, формирующее фазовые ограничения исходной задачи, обладает замкнутыми сечениями. Установлено также, что МПП замкнуто в топологии последнего множества, индуцированной из пространства позиций в обычной топологии покоординатной сходимости (данное свойство анонсировано в [5]).

Библиографический список

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения// Прикл. математика и механика. 1970. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Кряжимский А. В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения// ДАН СССР, 1978, 239, № 4. С. 779–782.
4. *Ченцов А Г.* Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциаль-ной игры сближения-уклонения // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. XVI № 10. С. 1801–1808.

5. *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения// ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 103 с. Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79.
6. *Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.* О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения// ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 72 с. Деп. В ВИНИТИ, № 1729-80.
7. *Ченцов А. Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
8. *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций и множества позиционного поглощения // Доклады Академии Наук. 2016. Т. 467, № 2. С. 144–148.
9. *Ухоботов В. И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
10. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования// ПММ, 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.

THE PROGRAMMED ITERATIONS METHOD FOR SOLUTION OF THE GAME GUIDANCE PROBLEM

Chentsov Alexander G.

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevsky st., Yekaterinburg, Russia, 620990, chentsov@imm.uran.ru

УДК 517.929

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Черепенников Валерий Борисович

Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, 614990, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, vbcher@mail.ru

В настоящей работе излагаются результаты исследования уравнения $\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t), \quad q > 1.$ скалярного линейного функционально-дифференциального запаздывающего типа. Основное внимание уделяется начальной задаче с начальной функцией, когда начальное условие задается на начальном множестве. В качестве метода исследования применяется метод полиномиальных квазирешений, который основан на представлении неизвестной функции $x(t)$ в виде полинома степени N. При подстановке этой функции в исходное уравнение возникает невязка $\Delta(t) = O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Тогда под полиномиальным квазирешением понимается точное решение в виде полинома степени N возмущенной на невязку исходной начальной задачи. Доказано, что если для исследуемой начальной задачи выбрать в качестве начальной функции полиномиальное квазирешение степени N, то порождаемое решение будет иметь в точках стыковки решений гладкость не ниже N.

При исследовании математическими методами процессов, происходящих в различных областях науки и техники, во многих случаях в качестве математических моделей таких процессов используются функционально-дифференциальные уравнения. Наиболее исследованными являются линейные функционально-дифференциальные уравнения (ЛФДУ). При изучении решений начальной задачи для таких уравнений широкое распространение получил метод последовательного интегрирования (метод шагов), при котором на начальном множестве, равном запаздыванию, тем или иным способом задается начальная функция. С другой стороны известно, что, как правило, в точках стыковки решений, т.е. в точках, кратных запаздыванию, решение имеет разрывную производную. Показано, что если для ЛФДУ запаздывающего типа гладкость решения в последующих точках стыковки возрастает, то для ЛФДУ нейтрального типа разрыв производных сохраняется во всех следующих точках стыковки. Это свойство нарушения гладкости решений в точках, кратных запаздыванию, является специфической особенностью ЛФДУ. В связи с этим достаточно важной является задача изучения класса начальных функций, которые порождают решения исследуемого ЛФДУ, обладающего в точках,

© Черепенников В. Б., 2016 г.

кратных запаздыванию, необходимой гладкостью. В свою очередь это позволит корректировать начальную функцию, которая для конкретной прикладной задачи выбирается исходя из априорной информации или находится экспериментальным путем и не является достаточно точной, так, чтобы решение в точках стыковки имело необходимую гладкость. С этой целью в данной работе применяется метод полиномиальных квазирешений [1-3], который был разработан для исследования начальной задачи с начальной точкой для ЛФДУ различных типов.

Библиографический список

1. *Черепенников В. Б.* Полиномиальные квазирешения линейных систем дифференциально-разностных уравнений // Изв. ВУЗов, сер. Математика. 1999. № 10. С. 49 - 58.
2. *Cherepennikov V. B., Ermolaeva P. G.* Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations // Opuscula Mathematica, 2006. 26/3. P. 431 - 443.
3. *Черепенников В. Б.* Численно-аналитический метод исследования некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений. уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. Новосибирск, 2013. Т. 16, № 3. С. 275-285.

SMOOTH SOLUTIONS OF SOME LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Cherepennikov Valery B.

Melentiev Energy System Institute SB RAS, Irkutsk, Lermontov St. 130, Irkutsk, Russia, 664033, vbcher@mail.ru

УДК 517.2; 330.4

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Чечулин Виктор Львович

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, chechulinvl@mail.ru

Предметная область экономико-математического моделирования — экономика, содержит и самого человека, свободы которого неформализуемы (иначе они не были бы свободами), поэтому очевидно, что формализованные (математические) описания экономики имеют ограничения; в это статье остановились на ограничениях математического аппарата, использующего дифференциальные уравнения. При этом ограничения в данном случае, как известно из [1]: а) недостаточная абстрактность 4-го уровня (функционально-интегрально-дифференциального описания) для описания экономических структур,— гносеологические ограничения, и б) онтологические ограничения — невместимость экономических категорий в нижние онтологические уровни. Ниже это описано подробнее.

Как известно [1], [2], функционально-интегрально-дифференциальное описание действительности появляется на четвёртом уровне абстракции (в 4-м историческом периоде развития математики с XVII в.). Функциями описываемы процессы внешней по отношению к человеку действительности. Однако свойства функции таковы, что она не может быть своим аргументом, например, запись f(x)=f(f(x)) приводит при подстановке вместо аргумента f(x) в правой части всей правой части f(f(x)) к бесконечной вложенности f(x)=f(f(f(f(….f(x))))) и неопределённости такой функции. Это означает что функциями (и дифференциальными уравнениями, их использующими) невозможно описать самоприменимые процессы, с высокой степенью самоприменимости. А процессы экономические являются самоприменимыми, т. к. человек пользуется в конечном итоге долей своего (а не только чужого) труда. С другой стороны, следующие уровни абстракции (формальные системы и непредикативные, самоприменимые, конструкции [1]), используемые для описания экономических систем [3–5], не сводимы к функциям. Таким образом, недостаточность только функционально-интегрально-дифференциального описания экономики в 1-м приближении показана.

© Чечулин В. Л., 2016 г.

Как уже говорилось ранее, при рассмотрении содержательных ограничений математики в [6, с. 7–8], онтологическая структура действительности имеет вид:

iii. Сознание, социальные структуры (↓между сознанием и логическими рассуждениями во времени — естественный язык),

ii. Время (↓между логическими рассуждениями во времени (математикой) и материей — информация).

i. Материя.

В этой структуре уровни не сводимы один к другому, а математика рассматривается как искусственный язык, описывающий не только собственно формально-логические понятия, но и процессы и явления материального мира.

Если ограничивались в описании экономики только процессами, происходящими во времени, то получалось, что экономические субъекты (как например, в теории игр [1]) — это бессмертные образования, которым нет нужды заботиться о воспитании следующих поколений, а остаётся максимизировать потребление (удовольствие). В этом случае общий пласт ценностей (наличествующий у человека ввиду конечности жизни и необходимости творения и воспроизводства следующих поколений), для описания которого необходимо описание более сложных, чем функции структур, остаётся вне области внимания функционального описания.

С другой стороны и теоремы о единственности и существовании решения дифуравнений (теоремы Коши) малосогласуются с наличием свободной воли у человека, которая недетерминирована столь жёстко. Поскольку обход ограничений функционально-интегрально-дифференциального описания подробно описан в работах [3], [4], [5], то здесь упоминаема лишь общая идея этого обхода.

10-частная структура (ценностей) потребностей имеет частью своей заботу о свободном воспроизводстве следующих поколений (на каковое тратиться примерно треть ресурсов), значит и структура экономического оборота ресурсов (в том числе общественно-необходимого времени) учитывает наличие воспроизводства поколений. свободы человека неформализуемы, но реализуются в условиях недетерминированности (неопределённости), приравнивание мер неопределённостей двух свобод (свободы труда и свободы пользования результатами труда) даёт основное уравнение модели экономики, которое однако недифференцируемо по параметру состояния экономики, см. подробнее [3], [4], [5].

Таким образом, из соображений о прикладной области экономико-математического моделирования показана недостаточность (онтологическая неполнота) функционально-интегрально-дифференциального описания экономики. С другой стороны дано указание на работы в которых указанные ограничения обойдены при структурном (а не функциональном) описании экономки.

Библиографический список

1. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011. – 112 с.
2. *Чечулин В. Л.* Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.– 112 с.
3. *Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р.* Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала: монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. – 162 с.
4. *Чечулин В. Л.* История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования): монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013.— 166 с.
5. *Чечулин В. Л.* История математики и её методологии (структуры и ограничения): монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. – 154 с.
6. *Нейман фон Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука. 1970.— 708 с.
7. *Чечулин В. Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Изд. 2-е, испр. и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012. — 126 с.

ABOUT RESTRICTIONS OF APPLICATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ECONOMIC MODELS

Chechulin V. L.

Perm State University, st. Bukireva,15 , Perm, Russia, 614990, chechulinvl@mail.ru

УДК 517.9

О РЕШЕНИИ АВТОНОМНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСТИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ[1]

Чуйко Сергей Михайлович

Донбасский государственный педагогический университет, 84 112, Украина, г. Славянск, ул. Лозановича, д. 14, кв. 31, e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Несмелова (Старкова) Ольга Владимировна

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, 84 112, Украина, г. Славянск, Розы Люксембург, 74

Исследована задача о построении решений $z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon)\in \mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)],\ z(t,\cdot)\in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ автономной краевой задачи [1 – 3].

$$z' = Az + f + \varepsilon Z(z,z',\varepsilon), \quad (\ell z)(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решения нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) ищем в окрестности решения $z_0(t)\in \mathbb{C}^1[a,b^*],\ b^* := \mathrm{b}(0)$ порождающей задачи

$$z_0' = Az_0 + f, \quad A\in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f\in \mathbb{R}^n, \quad (\ell z_0)(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

и его производной. Здесь $Z(z,z',\varepsilon)$ – нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения $z_0(t)$ порождающей задачи и его производной, а также непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $(\ell z)(\cdot,\varepsilon)$ – линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелинейный векторный функционалы:

$$(\ell z)(\cdot,\varepsilon),\ \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon):\ \mathbb{C}[a,b]\to \mathbb{R}^m,\ \mathrm{b}(\varepsilon)\in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

причем второй функционал непрерывно-дифференцируем по неизвестной z, z' и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.
© Чуйко С. М., Несмелова (Старкова) О. В., 2016 г.

В критическом случае $(P_{Q^*}) \neq 0$, при условии $P_{Q^*}\{\alpha - \ell(Kf)(\cdot)\} = 0$ задача (2) имеет [1 – 5] семейство решений $z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G(f;\alpha)(t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $Q := (\ell X)(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – постоянная матрица, $\operatorname{rank} Q := n_1,\ r{:=}n - n_1,$ $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – матрица-ортопроектор $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$, $X(t)$ – нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, матрица P_{Q_r} составлена из r линейно-независимых столбцов ортопроектора $P_Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$, $G(f;\alpha)(t) := X(t)Q^+\left[\alpha - \ell(Kf)(\cdot)\right] + (Kf)(t)$ – обобщенный оператор Грина порождающей задачи (2), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1,2], $(Kf)(t)$ – оператор Грина задачи Коши для системы (2).

В критическом случае правый конец $b(\varepsilon) := b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon),\quad \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],\ \ \beta(0) := \beta^*$

промежутка $[a, b(\varepsilon)]$ неизвестен [1 – 3]. Обозначим

$$\varphi_0(c^*) := \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0),\ z_0'(\cdot, c_r^*), 0),\quad f_0(s, c_0^*) := \beta^*\left[Az_0(s, c_r^*) + f\right] + Z(z_0(s, c_r^*), z_0'(s, c_r^*), 0).$$

Теорема. *Если краевая задача (1) в критическом случае* $(P_{Q^*}) \neq 0$ *имеет решение* $z(t, \varepsilon)$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$, *то вектор* $c_0^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c_0) := P_{Q^*}\left[\varphi(c_0) - \ell(Kf_0)(\cdot, c_0)\right] = 0,\quad \mathrm{c}_0{:} = \operatorname{col}(c_r, \beta) \in \mathbb{R}^{r+1}. \tag{3}$$

Для каждого простого корня уравнения (3) краевая задача (1) имеет решение $z(t, \varepsilon)$, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t, c_r^*)$. В случае кратных корней уравнения (3) нами найдены достаточные условия разрешимости задачи (1). Для построения решений краевой задачи (1) нами предложены сходящиеся итерационные схемы, построенные с использованием техники наименьших квадратов [4,5]. В качестве примера применения полученных необходимых и достаточных условий существования и построенной итерационной схемы, исследована задача о нахождении периодических решений нелинейной системы уравнений Лотка-Вольтерра, которое в малой окрестности положения равновесия приведено к автономной периодической задаче для скалярного слабонелинейного уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной.

Библиографический список

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004.
2. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 10. – С. 1668 – 1674.
3. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* On the approximate solution of autonomous boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations – **12**. – 2009. № 4. pp. 556-573.
4. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. – 2009. – **2**7, С. 127 – 142.
5. *Чуйко С.М., Чуйко А.С.* О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов // Динамические системы. – 2011. – **29**, С. 103-111.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF AUTONOMOUS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ARE NOT SOLVED FOR THE DERIVATIVE BY THE LEAST-SQUARES METHOD

Chuiko Sergey M.

Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine, *chujko-slav@inbox.ru*

Nesmelova (Starkova) Olga V.

Ukraine Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS , Slavyansk, Ukraine

УДК 517.9

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ МАТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Чуйко Сергей Михайлович

Донбасский государственный педагогический университет, 84 112, Украина, г. Славянск, ул. Лозановича, д. 14, кв. 31, e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Исследуем задачу о построении решений $Z(t) \in B_{\alpha\times\beta}[a,b] := B[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ матричной краевой задачи

$$(LZ)(t) = F(t), \quad F(t) \in B_{\gamma \times \delta}[a,b], \ \Lambda Z(\cdot) = \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu} \tag{1}$$

Здесь $B[a,b]$ и $\overline{B}[a,b]$ – банаховы пространства [1,2] $z(t):\ [a,b] \to \mathbb{R}^1, \quad -\infty < a \le t \le b < +\infty$, $L:\ B_{\alpha \times \beta}[a,b] \to \overline{B}_{\gamma \times \delta}[a,b]$ – линейный ограниченный оператор и $\Lambda:\ B_{\alpha \times \beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}$ – линейный ограниченный матричный функционал. Задача (1), (2) является обобщением краевых задач, исследованных в монографиях Н.В. Азбелева, А.М. Самойленко и А.А. Бойчука [1,2].

Определим оператор $M[A]:\ \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $B := M[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор $M^{-1}[B]:\ \mathbb{R}^{m \cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ [5]. Линейный матричный оператор $(\ell z)(t) := (ML)(t)$ в силу ограниченности оператора L представляет собой линейный ограниченный оператор. Предположим, что оператор $(\ell z)(t):\ B_{\alpha \times \beta}[a,b] \to \overline{B}_{\gamma \cdot \delta}[a,b]$ нетеров [1,2]: $\dim \mathcal{N}(\ell) - \dim \mathcal{N}(\ell^*) = s - k < \infty$.

Обозначим функцию $\varphi(t) := (MF)(t):\ [a,b] \to \overline{B}_{\gamma\cdot\delta}[a,b]$. Таким образом, задача о построении решений $Z(t) \in B_{\alpha \times \beta}[a,b]$ матричного уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t) := (MZ)(t) \in B_{\alpha\cdot\beta}[a,b]$ операторного уравнения $(\ell z)(t) = \varphi(t)$. (2).
Как известно, [2, с. 97], нетерово операторное уравнение (2) разрешимо для тех и только тех правых частей $\varphi(t)$, которые удовлетворяют условию $(P_{\ell^*}\varphi)(t) = 0,$ при этом общее решение

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.
© Чуйко С.М., 2016 г.

уравнения (2) имеет вид $z(t,c) = X(t)c + (\ell^{-}\varphi)(t), \quad s := \dim \mathbb{N}(\ell)$. Здесь $X(t)$ – матрица, составленная из полной системы s линейно-независимых векторов нуль-пространства оператора ℓ; $(\ell^{-}z)(t)\colon\ \overline{B}_{\gamma\cdot\delta}[a,b] \to B_{\alpha\cdot\beta}[a,b]$ – ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору ℓ, кроме того, $P_{\ell^*}\colon \overline{B}_{\gamma\cdot\delta}[a,b] \to \mathbb{N}(\ell^*)$ – проектор на нуль-пространство оператора ℓ^*. Общее решение уравнения (1) $Z(t,c) = W(t,c) + (KF)(t)$ состоит из суммы $W(t,c) := M^{-1}(X(t)c)(t)$ – общего решения однородной части операторного уравнения (1) и $(KF)(t) := M^{-1}(\ell^{-1}\varphi)(t)$ – частного решения неоднородного матричного уравнения (1). Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, j=1, 2, ... , $\alpha\cdot\beta$ – естественный базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Подставляя общее решение уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к алгебраическому уравнению вида [3], разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}[\mathrm{A} - \Lambda(KF)(\cdot)] = 0, \quad Q := [\ MQ^{(1)}\ MQ^{(2)}\ \dots\ MQ^{(\alpha\beta)}] \in \mathbb{R}^{\lambda\mu\times\alpha\beta}. \tag{3}$$

Здесь $Q^{(j)} := \Lambda\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, j=1, 2, ... , $\alpha\beta$, P_{Q^*} – ортопроектор: $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu} \to \mathbb{N}(Q^*)$, матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}. При условии (3) и только при нем общее решение матричной краевой задачи (1) имеет вид [5]

$$Z(t,c_r) = W(t,c_r) + G(F;\mathrm{A})(t), \quad W(t,c_r) := M^{-1}(X(t)P_{Q_r}c_r)(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^{r}. \tag{4}$$

Здесь P_Q – ортопроектор: $P_Q\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(Q)$, матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q, Q^{+} – псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица.

Теорема. *Пусть* $L\colon B_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \overline{B}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ – *линейный ограниченный оператор и* $\Lambda\colon B_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$ – *линейный ограниченный матричный функционал. Предположим, что оператор* $(\ell z)(t)\colon B_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \overline{B}_{\gamma\cdot\delta}[a,b]$ *нетеров. Краевая задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (3); при этом общее решение (4) краевой задачи (1) определяет* $G(F;\mathrm{A})(t) := W\{t, M^{-1}\{Q^{+}[\mathrm{A} - \Lambda(KF)(\cdot)]\}\} + (KF)(t).$ *обобщенный оператор Грина.*

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004.

3. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. 2015. V. 16, вып. 1. – С. 52 – 66.
4. *Бояринцев Ю.Е.,* Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск. – Наука: 1998.
5. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. V. 56, № 4. pp. 752 – 760.

CRITERION OF SOLVABILITY OF MATRIX BOUNDARY VALUE PROBLEM

Chuiko Sergey M.

Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine, 84 116, chujko-slav@inbox.ru

УДК 519.532.

МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ АСИМПТОТИК В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

Шатров Анатолий Викторович

Вятский государственный университет, 610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36.

В предметном пространстве асимптотические методы используются как инструмент для решения задач и находятся в подчиненном положении. В пространстве методов они самоценны и определяют целостную систему математического моделирования в предельных случаях. Складываясь в недрах механики, математической физики, где встречается множество процессов, имеющих *асимптотический* характер, они, с одной стороны, обогатились широким спектром приложений, приемов, с другой – избежали строгостей дефиниций, свойственных парадигме классической математики. Несмотря на строгое определение асимптотического ряда (разложения), данное А.Пуанкаре, роль и место асимптотических методов в классической математике оставались маргинальными отчасти потому, что арсенал этих методов велик и неформален и, как следствие, несовместим с принятыми методами классического математического анализа. Крупнейшие математики современности определяют специфику асимптотических методов в несвойственных терминах: “*асимптотология, асимптотический анализ* - это искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях, …искусство в том, чтобы знать, когда можно быть небрежным, а когда требуется точность” [1, 2]. Следуя Р.Г. Баранцеву, определим место асимптотических методов в методологическом пространстве методов математического моделирования. Исходя из критерия адекватности реальным объектам и моделируемым процессам, примем триадическую структуру дефиниции, содержащую аналитический (рациональный), качественный (эвристический) и субстанциональный (интуитивный) аспекты [1]. Отличие асимптотических методов от методов классической математики состоит в том, что уровень точности в них конкурирует с размерами области действия. Рассмотрим асимптотическое разложение функции $f(x)$ по последовательности функций $\varphi_n(x)$:

[1]Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки (базовая часть государственного задания по научным исследованиям высших учебных заведений № 2014/66, код проекта 1281, рег. № 114123040133).
© Шатров А.В., 2016 г.

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x), \quad N = 0,1,2,... \tag{1}$$

При $x \to 0$ величина

$$\Delta = \left| f(x) - \sum a_n \varphi_n(x) \right| \tag{2}$$

характеризует *точность, $x-$локальность, $N-$простоту*, образуя системную триаду. Каждая пара из этих параметров находится в отношении дополнительности, а третий – задает меру совмещения. В классической математике x фиксировано, $N \to \infty$, и исследуется *сходимость* Δ. В асимптотической математике N фиксировано, $x \to 0$, и говорится об эффективности *приближения* Δ. Совмещая в себе простоту эвристических представлений с точностью аналитических оценок, асимптотические методы не вырождаются в «золотую середину», а занимают особое место, замыкая системную триаду.

Принципиальной особенностью асимптотических методов является *локальность* получаемых с их помощью решений. При этом в сложных задачах зависимость от малого параметра редко бывает линейной. Источники нелинейности, как правило, локализованы. Места концентрации сильных нелинейных эффектов усиленно изучаются в теории разрушения, гидродинамике обтекаемых тел, гиперзвуковой аэродинамике и других областях прикладной математики. Неравномерность асимптотических разложений в окрестности таких мест значительно затрудняет оценку и анализ локально-нелинейных асимптотик.

Использование асимптотического ряда в качестве приближения в окрестностях особенностей всегда приводит к необходимости определения числа членов разложения адекватно приближающих искомое решение. Отсюда недостаток асимптотических методов или методов возмущений определяется локальным свойством основанных на них решений. Поскольку методы асимптотического суммирования широко распространены, проблемы устранения локальности, продолжения локальных асимптотик крайне актуальны.

Существует много подходов к этим задачам [3]. Метод аналитического продолжения (например, преобразование Эйлера $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$, или растяжения координат в локальной области) требует знания области единственности разложения искомой функции малого параметра ε. Эти методы полезно применять, когда известно большое количество членов ряда разложения. Тогда становится возможным выполнить, зная области единственности разложения, аналитическое продолжение, пользуясь, например диаграммой Домба-Сайкса [3]. Для применения методов обобщенного суммирования [3] необходимо также знать значительное количество членов ряда разложения. На практике в этих рядах обычно известны 3-5 компонентов и именно из этого сегмента ряда приходится извлекать имеющуюся информацию.

Для этой цели может быть очень полезен метод Паде-аппроксимант [4 – 6]. Пусть задано разложение функции $F(\varepsilon)$ степенным рядом по малому параметру ε

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i \tag{3}$$

тогда дробно-рациональная функция

$$F_{mn}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varepsilon^i / \sum_{i=0}^{n} b_i \varepsilon^i \tag{4}$$

называется Паде-аппроксимантой (PA), где коэффициенты a_i, b_i определяются из следующего условия: первые компоненты *(m+n)* разложения дробно-рациональной функции (4) в ряд Маклорена совпадают с первыми компонентами *(m+n+1)* ряда (3).

Таким образом, Паде-аппроксиманта выполняет мероморфное продолжение функции, заданной в виде степенного ряда и по этой причине позволяет достичь успеха в случаях, когда аналитическое продолжение применить нельзя. Если PA сходится к заданной функции, то корни в его знаменателе стремятся к сингулярным точкам.

В математической литературе исследовались, главным образом, одноточечные дробно-рациональные аппроксимации типа Паде. Двухточечные аппроксимации Паде, соединяющие асимптотики в переходных слоях использовались лишь в отдельных прикладных задачах [5,7,8]. Ранее в работах [9,10] был предложен и эффективно применен на примерах функций Эйри и Блазиуса метод соединения внутренней и внешней асимптотик с помощью кусочно-монотонной интерполяции [11] и с условиями гладкости в переходной области [12]. Затем в работах [13,14] данный метод был использован для немонотонной интерполяции, в качестве которой применяется Паде-аппроксиманта с условием тривиальности для кривизны в точке максимума. В настоящей работе систематизируется и методологически обосновывается процедура применения соединения асимптотических разложений в задачах математической физики и обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком реагирующего газа.

Библиографический список

1. *Баранцев Р.Г.* Дефиниция асимптотики и системные триады.// Асимптотические методы в теории систем. Иркутск. 1980. - с.70-81.

2. *Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. М.: Мир. 1998.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967.
4. *Алексеева Е.А., Баранцев Р.Г., Шатров А.В.* Соединение температурных асимптотик в пограничном слое. // Вестник СПбГУ. 1996. сер. 1, № 8. С. 96-99.
5. *Андрианов И.В., Шапиро Г. Д.* Обращение преобразований Лапласа с помощью двухточечных Паде-аппроксимант // Проблемы машиностроения. 1990. № 34. С. 58-60.
6. *Andrianov I.V.* Application of Pade Approximants in Perturbation Methods // Advences in Mechs. Vol. 14, No 2. 1991. pp.3-15.
7. *Andrianov I.V., Yu. V. Mikhlin, S. Tokarzhewsky* Two-Point Pade Approximants and Their Applications to Solving Mechanical Problems.// J. Theor. And Appl. Mech. – Vol. 35, No 3. 1997. p. 577-606.
8. *Avrejcevicz T., Andrianov I.V., Manevich I.I.* Asymptotic Approach in Nonlinear Dynamics. Berlin. 1998.
9. *Баранцев Р.Г.*Асимптотическое исследование теплообмена к горячей стенке в высокоскоростном потоке/ Р.Г. Баранцев, Е.В. Майоров, И.В. Прохоров // Тепломассообмен-ММФ-92. Минск. 1992.Т.1. С. 86-89.
10. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А.* Соединение асимптотик в переходном слое // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск. 1994. С. 67-70.
11. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А., Шатров А.В.* Теплоперенос в пограничном слое реагирующего газа // Тепломассообмен-2000 (MIF-2000).- Минск: 2000. С.185-188.
12. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А., Шатров А.В.* Соединение асимптотик в пограничном слое с помощью Паде-аппроксимант // 10 Зимняя школа по механике сплошных сред.. Тезисы докладов. Екатеринбург: 1995. С. 24-25.
13. *Шатров А.В.* Использование Паде-аппроксимант при соединении асимптотических решений в гидродинамике // «Математика. Компьютер. Образование». - вып. 6, ч.2. - М.: Прогресс-Традиция. 1999. С. 305-312.
14. *Шатров А.В.* Соединение внутренних и внешних асимптотик в переходных слоях вязкой жидкости и газа //VIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. (Пермь, 23-29 августа 2001 г.). Екатеринбург: УрО РАН. 2001. с. 602-603.

COMBINATION OF INNER AND EXTERNAL ASYMPTOTICS FOR MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEMS

Shatrov Anatoly V.

Vyatka State University, st. Moskovskaya, 36, Kirov, Russia, 610000, shatrov@vyatsu.ru

УДК 532.517.2

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ КРУПНОМАСШТАБНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Шварц Константин Григорьевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15, kosch@email.ru

В современных моделях, описывающих океаническую циркуляцию, на верхней границе слоя для скорости задается величина тангенциальных напряжений внешней силы (ветра). При этом поперек слоя формируется крупномасштабное пограничное течение экмановского типа [3-5]. Подобные течения, описанные аналитически в бесконечном горизонтальном слое вращающейся жидкости со свободной верхней границей, используются для исследования нелинейных эффектов экмановского слоя [6] и для получения моделей двумерного вихревого движения жидкости в рамках теории мелкой воды [7–10].

В данной работе описывается комбинированное крупномасштабное течение, возникающее во вращающемся горизонтальном слое жидкости, нижняя граница которого твердая и теплоизолированная, а верхняя – свободная. На ней задается постоянное тангенциальное напряжение внешней силы и задано линейное распределение температуры.

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твердыми границами $z = \pm h$, который вращается с постоянной угловой скоростью Ω_0. Ось вращения сонаправлена с вертикальной осью координат Oz. Нижняя граница ($z = -h$) твердая и теплоизолированная

$$\vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad ,$$

(1)

где $\vec{v}(t, x, y, z) = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости, $T(t, x, y, z)$ – температура жидкости. На свободной верхней границе ($z = h$) задано постоянное тангенциальное напряжение некоторой внешней силы, условие «жесткой крышки» для вертикальной компоненты скорости [14,15], а температура, линейно меняется с горизонтальной координатой x

© Шварц К. Г., 2016 г.

$$\rho_0 \nu \frac{\partial v_{x,y}}{\partial z} = \tau_{x,y}, \; v_z = 0, \; \frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma_A (T - Ax) \; (A = const), \tag{2}$$

где $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ – вектор тангенциальных напряжений, ρ_0 – средняя плотность жидкости, ν – вязкость, γ_A – эмпирический коэффициент теплообмена [17], Ax – температура внешней среды над верхней границей слоя. Задано условие замкнутости потока

$$\int_{-h}^{h} v_x dz = 0, \; \int_{-h}^{h} v_y dz = 0. \tag{3}$$

Исследование течений будем проводить на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчета с использованием декартовых координат [16]. Отношение конвективной силы, возникающей за счет неоднородности плотности в центробежном поле, к конвективной силе в поле тяжести определяется числом Фруда Fr [16]. Рассмотрим случай, когда $Fr = \Omega_0^2 l / g << 1$, здесь l – характерный горизонтальный масштаб, g – ускорение силы тяжести. В этом случае влияние поля тяжести существенно и можно пренебречь влиянием центробежной силы.

Выбрав в качестве единиц измерения длины $x.y,z$, времени t, скорости v_x, v_y, v_z. температуры T и давления P соответственно h, h^2/ν, ν/h, Ah и $\rho_0 \nu^2 / h^2$ (где $\tau_0 = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$), получим уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \sqrt{Ta} \cdot v_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta v_x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \sqrt{Ta} \cdot v_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \Delta v_y, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \Delta v_z + GrT, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\Pr} \Delta T. \tag{8}$$

Здесь $Ta = (2\Omega_0 h^2 / \nu)^2$ – число Тейлора, $R = \tau_0 h^2 / \rho_0 \nu^2$ – число Рейнольдса, $Gr = \frac{g\beta A h^4}{\nu^2}$ – число Грасгофа, $\Pr = \nu / \chi$ – число Прандтля, β – коэффициент теплового расширения [14], χ – коэффициент температуропроводности, оператор Лапласа $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Граничные условия для безразмерной скорости и температуры примут следующий вид:

при $z = 1$ $\frac{\partial v_x}{\partial z} = R\cos\alpha$, $\frac{\partial v_y}{\partial z} = R\sin\alpha$, $v_z = 0$, $\frac{\partial T}{\partial z} = -Bi(T - Ax)$, (9)

при $z = -1$ $v_x = v_y = v_z = 0$, $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, (10)

где $\cos\alpha = \tau_x \Big/ \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$, $\sin\alpha = \tau_y \Big/ \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$. Угол α определяет направление вектора тангенциальных напряжений в заданной системе координат, $Bi = \gamma_A h$ – число Био.

Учитывая граничные условия (9)–(10) и условие несжимаемости жидкости (7), точное решение системы (4)–(8) будем искать в следующем виде:

$v_x = u_0(z)$, $v_y = v_0(z)$, $v_z = 0$, $T = x + \theta_0(z)$, $P = p_0(x, y, z)$. (11)

Подставив формулы (11) в систему (4)–(8), получим систему уравнений для скорости, температуры и давления. Введем комплексную функцию скорости $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$, $i = \sqrt{-1}$, обозначим $\lambda = \sqrt[4]{\frac{Ta}{4}}(1+i)$. Избавившись от давления, получим краевую задачу для скорости

$M'''(z) - \lambda^2 M'(z) = Gr$, $M(-1) = 0, M'(1) = R \cdot e^{i\alpha}$, $\int_{-1}^{1} M(z) dz = 0$ (12)

Решение задачи (12) имеет следующий вид

$M(z) = \frac{Gr}{\lambda^2}[f_1(z) - f_2(z) - z] + R \cdot e^{i\alpha} f_1(z)$, (13)

где $f_1(z) = \frac{sh(\lambda(z+1)) - (sh\lambda + sh(\lambda z))sh\lambda/\lambda}{\lambda ch(2\lambda) - sh(2\lambda)/2}$, $f_2(z) = \frac{\lambda ch(\lambda(z-1)) - sh(2\lambda)/2}{\lambda ch(2\lambda) - sh(2\lambda)/2}$.

$u_0(z) = \operatorname{Re} M(z)$, $v_0(z) = \operatorname{Im} M(z)$. (14)

Решение (13) параметрическое, профиль скорости зависит от числа Тейлора (т.е. от интенсивности вращения), первое слагаемое описывает влияние адвекции, а второе слагаемое – воздействие тангенциальных напряжений на профиль скорости течения жидкости. Температура также является решением краевой задачи

$\theta_0(z) = \left(\Pr/\sqrt{Ta}\right)\left(\operatorname{Im} C_3 \cdot f_3(z) + f_4(z)\right)$, (15)

где $f_3(z) = (3 - 2z - z^2)/2$, $f_4(z) = v_0(z) - v_0(1) - v_0'(-1)(z - 1 - 1/Bi) - (R/Bi)\sin\alpha$.

При $Ta = 0$ (отсутствие вращения) математическое описание скорости и температуры упрощается:

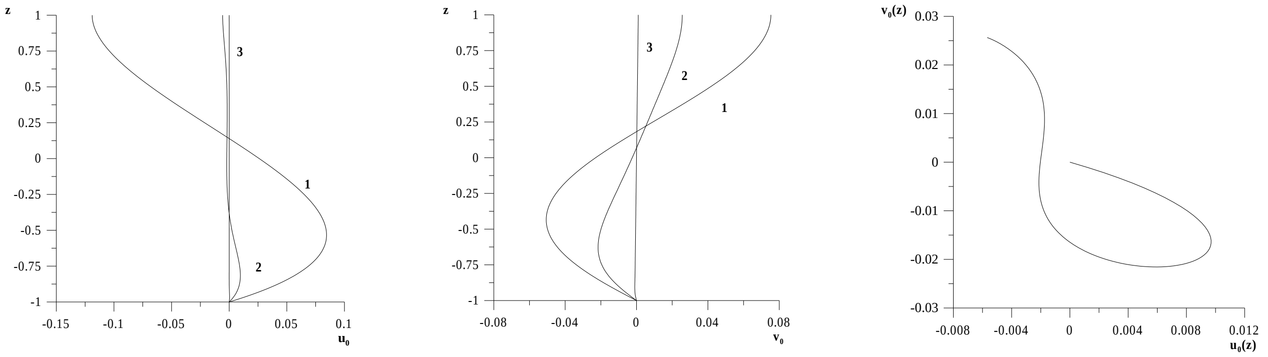
$u_0(z) = Gr\frac{1 - 6z - 3z^2 + 4z^3}{24} + R\cos\alpha\frac{-1 + 2z + 3z^2}{8}$, $v_0(z) = R\sin\alpha\frac{-1 + 2z + 3z^2}{8}$, (16)

$$\theta_0(z) = \Pr Gr\,\frac{4z^5 - 5z^4 - 20z^3 + 10z^2 + 40z - 29}{96} + \Pr R\cos\alpha\,\frac{3z^4 + 4z^3 - 6z^2 - 12z + 11}{480}. \qquad (17)$$

В изотермическом случае ($Gr = 0$) скорость имеет параболический профиль. Минимальное значение скорость принимает при $z = -1/3$, максимальное – при $z = 1$, скорость меняет направление при $z = 1/3$. Температура $\theta_0(z)$ положительна. В случае отсутствия тангенциальных напряжений на верхней границе ($R = 0$) профиль скорости кубический, жидкость движется в противоположном направлении по сравнению с изотермическим случаем, температура $\theta_0(z)$ отрицательна. Расчеты, сделанные при $\alpha = 0$, показали, что с ростом числа Грасгофа профиль скорости течения меняется. При $Gr/R \le 1{,}01$ в верхней части слоя жидкость движется вправо, а в нижней части − влево. При $Gr/R > 1{,}01$ в слое формируются три струи, а при $Gr/R \ge 3$ их снова две. Температура разных знаков становится при $Gr/R > 5/3$ и становится отрицательной при $Gr/R \ge 3$.

В изотермическом случае ($Gr = 0$) течение, возникающее во вращающемся слое, будет меняться в зависимости от числа Тейлора и направления вектора $\vec{\tau}$ на свободной поверхности. При всех значениях Ta профили скорости $u_0(z)$ и $v_0(z)$ описывают спиралевидное движение. Скорость принимает максимальные значения вблизи верхней границы или непосредственно на ней. С ростом числа Тейлора влияние тангенциальных напряжений на скорость течения падает, максимум скорости уменьшается, движение локализуется вблизи свободной границы. Вторая компонента скорости при $0 \le Ta \le 35$ монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Представляет интерес зависимость угла α от числа Тейлора *Ta*, когда *x*–вая компонента скорости на верхней границе при $z = 1$ принимает максимальное по модулю значение, а вторая компонента скорости там же равна нулю. Эта зависимость определяется из (2.11) по формуле $tg\alpha = -\operatorname{Im} f_1(1)/\operatorname{Re} f_1(1)$. С ростом числа Тейлора угол растет от нуля градусов при *Ta=0*, а при $Ta >> 1$ угол стремится к 45^o .

Для неизотермического случая при $R = 0$ скорость чисто адвективного течения также принимает максимальные значения вблизи верхней границы. Вторая компонента скорости при $0 \le Ta \le 24$ монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Движение спиральное (рис. 1), но направление спирали противоположное.



(а) (б) (в)

Рис.1. Зависимость компонент скорости $u_0(z)$ (а) и $v_0(z)$ (б) для $\alpha=0$ и $R=0$ при 1 – $Ta=10$, 2 – $Ta=10^3$,3 – $Ta=10^6$, (в) годограф вектора скорости чисто адвективного течения при $Ta=10^3$ и $\alpha=0$

В общем случае течение является комбинацией ветрового и адвективного течения и является спиральным. Таким образом, адвекция формирует спиральное движение, накладывающееся на спиральное течение, возникающее под воздействием ветрового напряжения на верхней свободной границе.

Библиографический список

1. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика: В 2-х томах. М.: Мир, 1981. 396с.
2. *Haeusser T.M., Leibovich S.* Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer // J. Fluid Mech. 2003. Vol.479. P.125–144. DOI: 10.1017/S0022112002003415
3. *Шварц К.Г.* Об устойчивости течения, возникающего под действием тангенциальных напряжений на верхней границе вращающегося слоя жидкости // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3–х частях. Часть 3. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 266–269.
4. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в мелкой воде // ПМТФ, 1991. №2. С.49–54.
5. *Аристов С..Н., Шварц К.Г.* Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане // Океанология, 1990. Т.30, вып.4. С.562–566.
6. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin // Soviet journal of physical oceanography, 1991. Vol.2, No.4. P.293-298. DOI 10.1007/BF02346081
7. *Aristov S.N., Schwarz K.G.* New two-dimensional model of large- scale oceanic circulation.- Proc. of 2nd International Conference of Computer Modelling in Ocean Engineering'91, Barcelona/30 September- 4 October 1991/- 1991,Balkema, Rotterdam. P.49–54.

8. *Козлов В.Ф.* Модель двумерного вихревого жвижения жидкости с механизмом вовлечения // Изв. РАН. МЖГ. 1992. N6. С.49–56.
9. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207с.
10. *Шварц К.Г.* Модели геофизической гидродинамики: Учеб. пособие по спецкурсу. – Изд. 2-е, доп. и испр. / К.Г. Шварц; Перм. ун-т. – Пермь, 2006. – 66с.
11. *Сеидов Д.Г.* Моделирование синоптической и климатической изменчивости океана. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1985. 208с.
12. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

THE EXACT SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS DESCRIBING LARGE-SCALE NON-ISOTHERMAL FLOW IN A ROTATING LAYER OF FLUID WITH A FREE UPPER BOUNDARY

Shvarts Konstantin G.

Perm State University, st. Bukireva, 15, Perm, Russia, 614990, kosch@psu.ru

УДК 519.83

МИНИМАКСНОЕ ПРОГРАММНОЕ ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДВУХУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Шориков Андрей Федорович

Уральский федеральный университете им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, afshorikov@mail.ru

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0,1,\ldots,T\}$ $(T > 0)$ рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из $(n+1)$ -го управляемого объекта ($n \in \mathbf{N}$; здесь и далее, $\mathbf{N}$ − множество всех натуральных чисел). Динамика объекта I (основного объекта динамической системы), управляемого доминирующим игроком P описывается векторным линейным дискретным рекуррентным уравнением вида

$$y(t+1) = f(t, y(t), u(t), v(t), w(t)), \tag{1}$$

динамика объекта II_i (i-го вспомогательного объекта динамической системы), управляемого подчиненным игроком E_i ($i \in \overline{1,n}$), описывается следующим уравнением

$$z^{(i)}(t+1) = f^{(i)}(t, z^{(i)}(t), u(t), v^{(i)}(t), w^{(i)}(t)),\ \ y(0) = y_0, \tag{2}$$

где $t \in \overline{0,T-1}$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_r(t))' \in \mathbf{R}^r$ – фазовый вектор объекта I в момент времени t; для $k \in \mathbf{N}$ (здесь и далее $\mathbf{R}^k$ − k-мерное векторное пространство векторов-столбцов, даже если из экономии места они записаны в строку); $z^{(i)}(t) = (z_1^{(i)}(t), z_2^{(i)}(t), \ldots, z_{s_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{s_i}$ – фазовый вектор объекта II_i ($i \in \overline{1,n}$) в момент времени t; $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t))' \in \mathbf{R}^p$ – вектор управляющего воздействия (управления) доминирующего игрока P в период времени t $(t \in \overline{0,T})$ удовлетворяющий заданному ограничению: $u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t) \subset \mathbf{R}^p$ (3) где $\boldsymbol{U}_1(t)$, для каждого $t \in \overline{0,T-1}$ есть набор из N_t ($N_t \in \mathbf{N}$) векторов в $\mathbf{R}^p$ ($p \in \mathbf{N}$); $v^{(i)}(t) = (v_1^{(i)}(t), v_2^{(i)}(t), \ldots,\ v_{q_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{q_i}$ – вектор управляющего воздействия (управления) подчиненного игрока E_i ($i \in \overline{1,n}$) в период времени t $(t \in \overline{0,T-1})$, который зависит от

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15 – 01 -02368).
© Шориков А. Ф., 2016 г.

допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$, удовлетворяющий заданному ограничению:

$$v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) \subset \mathbf{R}^{q_i} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ для каждого момента времени $(t \in \overline{0,T-1})$ и управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P есть конечный набор из $Q_t^{(i)}(j)$ ($Q_t^{(i)}(j) \in \mathbf{N}$, $(j \in \overline{1, N_t})$ векторов в $\mathbf{R}^{q_i}$; $v(t) = (v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), ..., v^{(n)}(t))' \in \mathbf{R}^q$ – вектор управления обобщенного подчиненного игрока E, объединяющего всех подчиненных игроков E_i , $i \in \overline{1, n}$ ($q = \sum_{i=1}^{n} q_i \in \mathbf{N}$).; $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ – вектор помехи (погрешности моделирования) в уравнении (1), который в каждый период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$ зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$ и удовлетворяет ограничению

$$w(t) \in \boldsymbol{W}_1(u^{(j)}(t)) \subset \mathbf{R}^m, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{W}_1(u^{(j)}(t))$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник пространства $\mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$; $w^{(i)}(t) = (w_1^{(i)}(t), w_2^{(i)}(t), \ldots, w_{m_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{m_i}$ – вектор помехи (погрешности моделирования) в уравнении (2), который в каждый период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$ зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$, от допустимой реализации управления $v^{(i,k)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ игрока E_i , $(j \in \overline{1, N_t}$; $k \in \overline{1, Q_t^{(i)}(j)}$) и удовлетворяет ограничению: $w^{(i)}(t) \in \boldsymbol{W}_1^{(i)}(u^{(j)}, v^{(i,k)}(t)) \subset \mathbf{R}^{m_i}$ (6)

Предполагается, что для каждого $t \in \overline{0, T-1}$ и $i \in \overline{1, n}$ вектор-функции $f : \overline{0, T-1} \times \mathbf{R}^r \times \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^r$ и $f^{(i)} : \overline{0, T-1} \times \mathbf{R}^{s_i} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q_i} \times \mathbf{R}^{m_i} \to \mathbf{R}^{s_i}$, определяющие правые части уравнений (1) и (2) соответственно, удовлетворяют заданным условиям, обеспечивающим выпуклость, порождаемых ими (при вариации переменных) множеств в пространствах $\mathbf{R}^r$ и $\mathbf{R}^{s_i}$ соответственно.

Для субъектов управления дискретной динамической системой (1)–(6) формируются два уровня принятия управленческих решений – доминирующий (первый уровень) и подчиненный (второй уровень), которые объединены между собой априори определенными информационными и управляющими связями. Качество управления рассматриваемыми динамическими объектами на каждом уровне управления оценивается соответствующими им выпуклыми функционалами, которые определены на их терминальных (финальных) фазовых состояниях и удовлетворяют соответствующим условиям Липшица. Для исследуемой динамической системы (1)–(6) в данной работе предлагается математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного терминального управления и предложена общая схема ее решения. Полученные в работе результаты основываются на исследованиях [1-3] и могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для сложных динамических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности.

Библиографический список

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
3. *Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи ε-оптимального программного терминального управления для дискретной динамической системы // Теория управления и теория обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби: тр. Междунар. семинара, посв. 60-летию акад. А.И. Субботина: в 2 т. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, Т. 2. С. 190-196.

УДК 517.91

О ПОСТРОЕНИИ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Юмагулов Марат Гаязович, Фанина Ильмира Жаватовна

Башкирский государственный университет,
Россия, 450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32,yum_mg@mail.ru

Ибрагимова Лилия Сунагатовна

Башкирский государственный аграрный университет,
Россия, 450001, г. Уфа, ул.50-летия Октября, 34, lilibr@mail.ru

В статье рассматривается вопрос о построении областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Основными объектами исследования являются зависящие от параметров и автономные и неавтономные периодические уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta)x + a(x,\alpha,\beta),\ x \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta),\ x \qquad (2)$$

Предполагается, что правые части этих уравнений являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных, A(α, β) и $A(t$, α, β) – это квадратные матрицы, нелинейности $a(x$, α, β) и $a(x,t$, α, β) начинаются с квадратичных по χ слагаемых. Наконец, матрица $A(t$, α, β) и функция $a(x,t$,α, β) являются Т -периодическими по t.

Уравнения (1) и (2) при всех значениях параметров α и β имеют точку равновесия χ=0, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой, а при других – неустойчивой. Связное множество G_B в плоскости параметров (α, β) будем называть областью устойчивости (областью неустойчивости) точки равновесия χ=0 системы (1) или (2),

© Юмагулов М.Г., Фанина И.Ж., Ибрагимова Л.С., 2016 г.

если для любого (α, β) из G точка равновесия χ=0 является устойчивой (неустойчивой).

Границы соседних областей устойчивости G_S и неустойчивости G_n как правило, представляют собой некоторые кривые γ, при переходе через которые в окрестности точки равновесия χ=0 систем (1) или (2) возможны различные бифуркационные явления.

Задача о построении областей устойчивости и неустойчивости и границ между ними является одной из важных и интересных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например,[1–4] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей статье предлагается новый общий подход, позволяющий получать приближенные формулы в задаче построения границ областей устойчивости G систем (1) и (2). Подход основан на модификации метода М. Розо [5] и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов [6].

Ограничимся рассмотрением автономного уравнения (1). Предполагается, что при некоторых $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$ матрица $A_0 = A(\alpha_0, \beta_0)$ удовлетворяет одному из условий:

1^0.A_0 имеет простое собственное значение 0, а другое ее собственное значение является отрицательным;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega$ где $\omega_0 > 0$.

Приведем один из результатов, относящихся к случаю 1^0.. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Положим $\zeta_1 = (A'_\alpha e, g)$ и $\zeta_2 = (A'_\beta e, g)$ здесь A'_α и A'_β – производные матрицы $A(\alpha,\beta)$ вычисленные в точке (α_0, β_0) Будем предполагать, что $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$, Тогда уравнение

$$\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0 \quad (3)$$

имеет на промежутке $0 \le \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$ и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 1. Пусть выполнены условие 1^0. Тогда:

– через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_S и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (1);

– параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*$, $\beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$ является касательной к кривой γ_0, Аналогичные результаты получены для случая 2^0., а также для неавтономного уравнения (2).

Библиографический список

1. *Chiang H. D., Alberto L. F.* Stability regions of nonlinear dynamical systems: theory, estimation, and applications. Cambridge University Press. 2015. 484p.
2. *Якубович В. А.,Старжинский В. М.*Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.
3. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1964. 477с.
4. *Amaral F. M., Alberto L. F. C.* Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systemsin the Presence of a Saddle Node Equilibrium Point. // Tend. Mat. Apl. Comput. V. 13. № 2. 2012. P. 143–154.
5. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. 1971. 288с.
6. *Красносельский М. А., Юмагулов М. Г.* Методфункционализации параметра в проблеме собственных значений.// ДАН России. Том 365. № 2. 1999. С.162–164.

ABOUT CONSTRUCTION STABILITYREGIONS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS DEPENDING ON PARAMETERS

Yumagulov M. G., Fanina I. G.

Bashkir State University, 450074, Russia, Ufa, Z. Validy str., 32

Ibragimova L. S.

Bashkir State Agrarian University, 450001, Russia, Ufa, 50- anniversary of October str., 34

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СТО ЛЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ УРАЛА

Материалы симпозиума, проводимого в рамках форума
«Математика и глобальные вызовы XXI века»
и посвященного столетию Пермского государственного
национального исследовательского университета

(г. Пермь, 16-21 мая 2016 года)

Издается в авторской редакции

Техническая подготовка и обработка материалов И. А. Горяева, Д. Н. Мухутдинова

Подписано к использованию 13.05.2016 г.

Объем данных 6 Мб. Тираж 50 экз.

Экземпляр электронного издания включает в себя

1 CD-R, 1 пластиковый бокс, 1 вкладыш в пластиковый бокс

Издательский центр

Пермского государственного

национального исследовательского университета

614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Организаторы:

При поддержке:

Министерство культуры, молодежной политики и массовых коммуникация Пермского края

Министерство образования и науки Пермского края

Министерство информационного развития и связи

Спонсоры и партнеры: