Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Российский университет дружбы народов

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXVII
(3–9 мая 2016 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 16–31–10108 мол_г

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXVII» (3–9 мая 2016 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Российский университет дружбы народов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 309 с.

ISBN 978-5-9273-2305–0

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы. Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-2305–0

О ПОТОКАХ В ДВУХРЕСУРСНЫХ СЕТЯХ

Х. Абдулрахман, Я.М. Ерусалимский,
В.А. Скороходов (Ростов-на-Дону)
abdulrahm.haidar@mail.ru, erusim@mail.ru, pdvaskor@yandex.ru

Рассмотрим ресурсные сети (см. [1]), вершинам v_i которых приписаны неотрицательные числа q_i^1 и q_i^2, изменяющиеся в дискретном времени и называемые величинами соответственно первого и второго ресурса в вершине v_i. Состоянием сети в момент времени t называется вектор

$$Q(t) = \left(\begin{pmatrix} q_1^1(t) \\ q_1^2(t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_2^1(t) \\ q_2^2(t) \end{pmatrix}; \ldots; \begin{pmatrix} q_n^1(t) \\ q_n^2(t) \end{pmatrix} \right)$$

Правила функционирования сети:

$$q_i^k(t+1) = q_i^k(t+1) - \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^k(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ji}^k(t) \quad i \in [1;n]_Z, k \in \{1,2\},$$

где $F_{ij}(t)$ – величины ресурсного потока, выходящего по дуге (v_i, v_j) в момент времени t определяются следующим образом:

– $F_{ij}^1(t) = r_{ij}$ и $F_{ij}^2(t) = 0$, если $q_i^1(t) \geqslant R_i = \sum\limits_{p=1}^{n} r_{ip}$;

– $F_{ij}^1(t) = \frac{q_i^1}{R_i}$ и $F_{ij}^2(t) = r_{ij} - F_{ij}^1(t)$, если $q_i(t) < R_i$ и $q_i^1(t) + q_i^2(t) \geqslant$ $\geqslant R_i$;

– $F_{ij}^1(t) = \frac{q_i^1}{R_i}$ и $F_{ij}^2(t) = \frac{q_i^2}{R_i}$ единиц второго ресурса, если $q_i^1(t) +$ $+ q_i^2(t) < R_i$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Для однородной двусторонней полной сети с двумя ресурсами и для любого суммарного ресурса $W = W_1 + W_2$ если последний меньше либо равен суммарной пропускной способности в сети, тогда при любом начальном состоянии, первый и второй ресурс равномерно распределяются в вершинах сети. Их величины для каждой вершины соответственно равны $\dfrac{W_1}{n}$ и $\dfrac{W_2}{n}$. В противном случае при любом начальном состоянии сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание ресурсов не происходит.*

Теорема 2. *В несимметричной двусторонней полной сети с петлями, двумя ресурсами и одной пропускной способностью для любого начального состояния и любого суммарного ресурса $W = W_1 + W_2$, существует такой момент времени, после которого выполняются, что сумма первого и второго ресурса ($q_i = q_i^1 + q_i^2$) меньше, чем сумма входной пропускной способности для каждой вершины v_i некоторого подмножества вершин сети.*

Разработаны методы распределения ресурсов:

– в однородных двусторонних полных сетях с двумя ресурсами;

– в несимметричных двусторонних полных сетях с петлями, двумя ресурсами и двумя пропускными способностями.

Разработаны методы нахождения порогового значения T и предельного состояния Q^* в несимметричных двусторонних полных сетях с петлями, двумя ресурсами и двумя пропускными способностями, где пороговое значение является суммарным количеством первого ресурса, для которого оба ресурса распределяются независимо друг от друга.

Литература

1. Жилякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. — 2013. — № 43. — С. 34–54.

2. Кузнецов О. П. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель / О. П. Кузнецов, Л. Ю. Жилякова // Доклады АН. — 2010. — Т. 433, № 5. — С. 609–612.

3. Скороходов В. А. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 55–74.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ КРИВОЙ

Г.Н. Аверьянов, А.П. Солдатов (Белгород)

AveryanovGN@gmail.com

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения для аналитических функций

$$\varphi^+ - G\varphi^- = f \qquad (1)$$

на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств C^{μ}_{λ}, элементы φ которых допускают поведение $\varphi(z) = O(1)(z-\tau)^{\lambda_\tau}$ при $z \to \tau \in F$, где $F \subseteq \Gamma$ – конечное множество, содержащее все угловые точки кривой. Эта задача хорошо изучена [1] как в пространствах Гельдера, так и в весовых гельдеровых пространствах функций при $-1 < \lambda_\tau < 0$.

В работе описана степенно-логарифмическая асимптотика в точках $\tau \in F$ решений задачи (1) при условии, что аналогичное поведение имеет ее правая часть. Пусть гладкая дуга Γ_0 с концами $\tau \neq \tau'$ ориентирована от τ к τ', задана простая область $D_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$, причем $\Gamma_0 \cap \partial D_0$ является дугой с концами τ и $\tau'_1 \neq \tau'$. Рассмотрим поведение интеграла типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_0,$$

при $z \to \tau$ в ситуации, когда функция $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda-0}(\Gamma_0, \tau)$ допускает степенно логарифмическую асимптотику вида

$$\varphi(t) = (t-\tau)^{\zeta} q[\ln(t-\tau)] + \varphi_0(t), \quad \varphi_0 \in C^{\mu}_{\nu}(\Gamma_0, \tau),$$

с некоторым многочленом $q \in P_n$ и $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$.

Теорема. *Пусть* $-1 < \operatorname{Re}\zeta = \lambda < \nu < 0$. *Тогда*

$$\varphi(z) = (z-\tau)^{\zeta} p[\ln(z-\tau)] + \varphi_0(z), \ \varphi_0 \in C^{\mu}_{\nu}(\overline{D}_0, \tau),$$

где многочлен p *также принадлежит* P_n *и однозначно определяется из уравнения* $p(u) - e^{2\pi i\zeta} p(u+2\pi i) = q(u)$.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ

Л.Г. Авраменко (Киев)

yuragoco@mail.ru

На ВВМШ в 2014 г. автором обсуждалось введение метрики в первом семестре сразу после элементов теории множеств и отношений. Особую роль в этом играли примеры метрик, заданных на множествах, не являющихся векторными пространствами Были предложены три примера: расстояние на поверхности Земли, дискретная метрика в множестве пользователей мобильного оператора и метрика Хемминга в множестве двоичных слов фиксированной длины. Первые два примера не вызвали вопросов. Сама метрика Хемминга также усваивается хорошо. А вот обещанные автором в 2014 г. 15 минут на изложение оказались явной недооценкой.

Напомним.

В множестве n-значных двоичных чисел Хемминг определил расстояние между двумя числами как количество позиций, в которых у чисел стоят различные символы (например, $\rho(1010;1110) = 1$). Такой способ измерения расстояний играет важную роль в теории кодов с исправлением ошибок. Поэтому автор рассказала о контроле четности, который позволяет за счет добавления еще одного разряда к сообщению сделать заключение о безошибочной передаче сообщения или наличии единичной ошибки в нем. И о геометрической интерпретации этой процедуры — областях Дирихле. На этом, собственно, 15 минут и закончились.

Попытка рассказать о кодах с исправлением ошибок столкнулась со следующими недостатками школьных программ:

1. Первокурсники не знают, что такое мантисса и характеристика десятичного логарифма. Отсюда чисто механическое восприятие порядка числа (применение в физике) и арифметики с плавающей запятой (типы переменных в информатике).

2. Первокурсники не в состоянии вычислить сколько десятичных чисел необходимо для десятичной записи числа 2^n и наоборот: сколько знаков содержится в двоичной записи десятичного числа.

Рассказ о кодах Хемминга занимает пару, на которой излагается тема — логарифмические функции и их приложения. Если Вы не обладаете запасной лекцией, то остановитесь на контроле четности.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО КРИВЫЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДЛИННОЙ, РАВНОЙ ДЛИНЕ ЭЛЛИПСА И ВПИСАННЫЕ В НЕГО

Ю.Я. Агранович, А.В. Ляшенко,
В.М. Галиакбаров (Воронеж)
agyryayy@ya.ru, lyashenkoav92@gmail.com, galiakbarov36@gmail.com

Постановку задачи о кривых четвертого порядка из заданного семейства, вписанные в эллипс см. в [1,2].

Такие кривые можно представить в алгебраической форме

$$c^2y^2\left(y-y_0\right)^2+c^2y^2\left(x-x_0\right)^2-b^2c^2\left(y-y_0\right)^2+b^2\left(xy_0-x_0y\right)^2=0. \tag{1}$$

Следовательно, семейство кривых параметризовано точками (x_0, y_0).

Предметом исследования в данной работе являются кривые, параметризованные точками, лежащими на оси ординат внутри эллипса, то есть имеющих вид $(0; y_0)$, где $y_0 < b$. Получим алгебраическое уравнение кривой для рассматриваемого центрального случая. В уравнении (1) примем $x_0 = 0$. Получим уравнение, задающее кривую

$$c^2y^2\left(y-y_0\right)^2+c^2y^2x^2-b^2c^2\left(y-y_0\right)^2+b^2x^2y_0^2=0. \tag{2}$$

Преобразовав это уравнение кривой, получим зависимость квадрата координаты x от координаты y и сопутствующих параметров b, y_0 и c.

$$x^2=\frac{b^2c^2\left(y-y_0\right)^2-c^2y^2\left(y-y_0\right)^2}{c^2y^2+b^2y_0^2}. \tag{3}$$

Если построить центральные кривые для различных эллипсов и проанализировать их, то можно сделать несколько предположений, затрагивающих тему длин кривых семейства:

— функция длины кривой $L\left(y_0\right)$ убывает на промежутке $(0; b)$;

— значение супремума длин кривых, построенных для всех возможных значений параметра y_0 определяется выражением

$$\sup|L|=\lim_{y_0\to 0}L\left(y_0\right)=4a+2\pi b. \tag{4}$$

Также замечаем очевидный факт, что длина кривой является ничем иным, как суммой длин двух симметричных друг к другу относительно оси ординат функций $x(y)$, которые задаются уравнениями, полученными из (3)

$$x = -c \cdot (y - y_0) \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{c^2 y^2 + b^2 y_0^2}}, \tag{5}$$

$$x = c \cdot (y - y_0) \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{c^2 y^2 + b^2 y_0^2}}. \tag{6}$$

Форма уравнения кривой, которая была получена из (3), дает возможность получить функцию длины с помощью соотношения

$$L(y_0) = 2 \int\limits_{-b}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \tag{7}$$

Соответственно, при помощи ряда преобразований, можно получить значение $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

$$\frac{d\left(b^2 c^2 (y - y_0)^2 - c^2 y^2 (y - y_0)^2\right)}{dy} =$$

$$= 2c^2 (y - y_0) \left(b^2 - y (y - y_0) - y^2\right), \tag{8}$$

$$\frac{d\left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right)}{dy} = 2c^2 y, \tag{9}$$

$$2x \frac{dx}{dy} = \frac{2c^2 (y - y_0) \left(b^2 - y (y - y_0) - y^2\right) \left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right)}{\left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right)^2} -$$

$$- \frac{2c^2 y \left(b^2 c^2 (y - y_0)^2 - c^2 y^2 (y - y_0)^2\right)}{\left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right)^2}, \tag{10}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 =$$

$$= \frac{c^4 (y - y_0)^2 \left(\left(b^2 - y^2\right)\left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right) - b^2 y (y - y_0)\left(y_0^2 + c^2\right)\right)^2}{\frac{b^2 c^2 (y - y_0)^2 - c^2 y^2 (y - y_0)^2}{c^2 y^2 + b^2 y_0^2} \cdot \left(c^2 y^2 + b^2 y_0^2\right)^4} =$$

$$= \frac{c^2\left(\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)-b^2y\left(y-y_0\right)\left(y_0^2+c^2\right)\right)^2}{\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)^3}. \qquad (11)$$

Исходя из этого, функция длины рассматриваемой кривой будет выглядеть следующим образом

$$L\left(y_0\right) =$$

$$= 2\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{c^2\left(\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)-b^2y\left(y-y_0\right)\left(y_0^2+c^2\right)\right)^2}{\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)^3}}dy. \qquad (12)$$

Численное решение задачи о длинах вписанных кривых позволяет рассмотреть также задачу о нахождении точек, при параметризации кривой которыми длина кривой равна длине эллипса, для которого построена кривая. Иными словами, требуется найти решение уравнения

$$2\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{c^2\left(\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)-b^2y\left(y-y_0\right)\left(y_0^2+c^2\right)\right)^2}{\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)^3}}dy =$$

$$= 4aE\left(\varepsilon\right). \qquad (13)$$

$$\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{c^2\left(\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)-b^2y\left(y-y_0\right)\left(y_0^2+c^2\right)\right)^2}{\left(b^2-y^2\right)\left(c^2y^2+b^2y_0^2\right)^3}}dy =$$

$$= 2aE\left(\varepsilon\right). \qquad (14)$$

$E\left(\varepsilon\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}d\varphi$ – полный эллиптический интеграл второго рода;

ε – эксцентриситет эллипса.

Решением данного уравнения будет функция $y_e\left(b/a\right)$, которая показывает зависимость параметра y_0, при котором длина кривой равна длине эллипса от соотношения малой и большой полуоси эллипса.

Так как функция $L\left(y_0\right)$ убывает на промежутке $(0; b)$, поиск точки y_e для заданного эллипса рационально производить с помощью метода двоичных сечений. Итог проведенного численного эксперимента, в графическом виде, представлен на рис. 1.

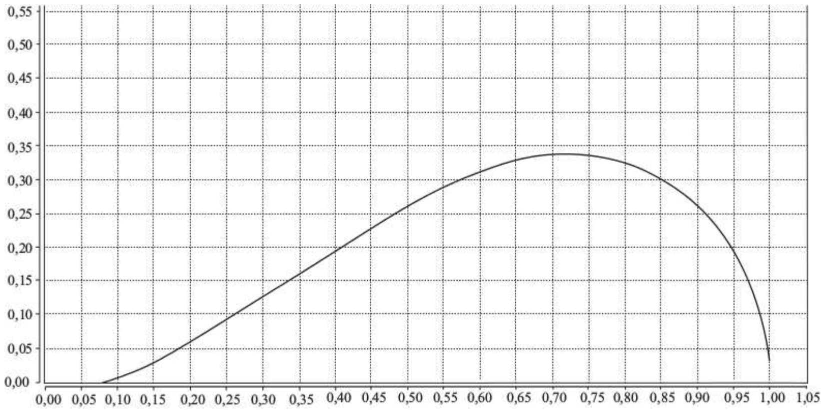


Рис. 1. Решение уравнения (14) с соотношением b/a в качестве аргумента

Результаты проведенного численного эксперимента свидетельствуют о том, что для всякого эллипса существует центральная кривая с длиной, большей или равной длине эллипса.

Литература

1. Агранович Ю.Я. К задаче о наибольшей алгебраической кривой 4-го порядка, вписанной в эллипс / Ю.Я. Агранович, А.В. Ляшенко // Современные методы теории краевых задач : Воронежская весенняя математическая школа : материалы Междунар. конф. (3–9 мая 2015 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 15–16.

2. Агранович Ю.Я. Сингулярные точки соприкосновения для одного семейства алгебраических кривых, вписанных в эллипс / Ю.Я. Агранович, И.Н. Стариков // Современные методы теории краевых задач : Воронежская весенняя математическая школа : материалы Междунар. конф. (3–9 мая 2015 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 16–18.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.И. Аристов (Москва)
ai_aristov@mail.ru

В [1] и [2] обсуждались следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\right)+\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(u-u^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (2)$$

которые описывают взрывную неустойчивость в автоколебательной системе, в частности, на основе туннельного диода. В [3, с. 296 и 316–322] изучались начально-краевые задачи для этих уравнений. Было показано, что если задачи однозначно разрешимы в пространствах $X_T = C^2[0;T;S)$, где $T \in (0;\infty]$, S — соболевское пространство, причем начальные данные удовлетворяют некоторым неравенствам, то происходит разрушение решения путем опрокидывания. Пояним, что под разрушением подразумевалась разрешимость задачи в некотором классе X_T $(T < \infty)$, но не в X_∞, а под опрокидыванием — соотношение

$$\lim_{t\to T-}\|u(x,t)\|_S=\infty.$$

Однозначная разрешимость задачи, соответствующей (2), была обоснована с помощью принципа сжимающих отображений, тогда как для задачи, соответствующей (1), она только предполагалась.

В связи с этим интересен вопрос построения точных решений уравнений (1) и (2). Автором установлены следующие результаты.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (3)$$

которое получается из (2) с помощью линейной замены переменной.

Теорема 1. *Существуют решения уравнений (1) и (3), которые представляют собой элементарные функции и имеют следующие типы качественного поведения:*

1. *обращение в бесконечность за конечное время;*

2. *глобальная по времени ограниченность при фиксированных x;*

3. *смешанный тип, т. е. обращение в бесконечность за конечное время при одних x и глобальная по времени ограниченность при других x.*

Кроме того, построены решения (1), выражаемые через функции Бесселя, и семейство решений, содержащее произвольную гладкую функцию одного аргумента. Всего получено 8 семейств решений (1) и 11 семейств решений (3). Решения были получены методами бегущей волны, дифференциальных связей и путем поиска решений специального вида.

Результаты, относящиеся к уравнению (1), опубликованы в статье [4], кроме того, им был посвящен доклад на конеференции [5].

Литература

1. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков — М. : Наука, 1984.

2. Рабинович М. И. Автоколебания распределенных систем / М. И. Рабинович // Известия вузов. Радиофизика. — 1974. — Т. 17, № 4. — С. 477–510.

3. Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов — М. : URSS, 2010.

4. Аристов А. И. О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных / А. И. Аристов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 11. — С. 1870–1875.

5. Аристов А. И. Точные решения одного неклассического уравнения в частных производных / А. И. Аристов // Тихоновские чтения : тезисы докладов. — Москва : Макс-Пресс, 2015. — С. 88.

6. Полянин А. Д. Методы решений нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. — М.: Физматлит, 2005.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА

Р.В. Арутюнян (Москва)
rob57@mail.ru

Применение лазеров предоставляет уникальные возможности в области передовых технологий, в том числе для получения новых материалов, при обработке материалов, сварке и т.д. [1–3]. В докладе результаты [там же] развиваются на основе учета нелинейности характеристик материала, фазовых переходов, радиационного и конвективного охлаждения.

Предполагается, что поглощение лазерного излучения в веществе происходит по закону Бугера-Ламберта. Решается многофазная задача Стефана с учетом плавления, испарения, радиационного и конвективного охлаждения. Скорость фронта испарения в вакуум, определялась уравнением Герца-Кнудсена. Для вычислений применялся метод сквозного счета [2,3], основанный на преобразовании задачи Стефана к энтальпийному виду с сосредоточенной теплоемкостью. Размер области по пространственной координате, значения шагов интегрирования выбираются исходя из требований точности конечно-разностного решения. Конечно-разностный метод является неявным и характеризуется высокой устойчивостью. На каждом временном слое система конечно-разностных уравнений решалась методом Зейделя. Для каждого внутреннего узла сетки система решалась методом Ньютона относительно сеточного значения энтальпии. Выражение краевого условия представлялось линейной частью соответствующего ряда Тейлора в окрестности решения на предшествующем шаге так, чтобы обеспечить устойчивость конечно-разностного метода при достаточно высокой точности аппроксимации. Контроль погрешности численного решения осуществлялся на основе сравнения с аналитическим решением для максимальных температур и по значениям теплового баланса (погрешности порядка 1%). В качестве основного объекта исследования рассмотрено железо, которое характеризуется сильной нелинейностью теплофизических характеристик. С целью исследования характера влияния свойств материала рассмотрено 6 расчетных вариантов задания теплофизических коэффициентов: 1. Постоянные коэффициенты (линейная задача №1). 2. Постоянные коэффициенты, полученные усреднением (линейная задача №2). 3. Постоянные коэффициенты, но с учетом фазовых переходов (нелинейная задача №1). 4. Постоянные коэффициенты, полученные усреднением, но с учетом фазовых переходов (нелинейная задача №2). 5. Переменные коэффициенты, но без учета фазовых переходов (нелинейная задача №3). 6. Переменные коэффициенты с учетом фазовых переходов (нелинейная задача №4). Характерный размер расчетной области, длительность и мощность импульса были выбраны в соответствии с данными исследований [1]. Параметры конечно-разностного метода выбирались в соответствии с требованиями точности на основе сравнения с аналитическим решением. Результаты показывают высокую степень совпадения аналитического и конечно-разностного решения (погрешности порядка 1%). Усреднение коэффициентов приводит к увеличению расчетного значения максимальной температуры. Этот же эффект наблюдается для случая вариантов № 3 и 4 с учетом фазовых переходов, но при постоянных теплофизических параметрах. Учет фазовых переходов приводит к уменьшению расчетного значения максимальной температуры. Для вариантов №5 и 6 расчет с переменными теплофизическими параметрами, но без учета фазовых переходов приводит к наибольшим значениям расчетной максимальной температуры. Для нелинейной задачи крутизна кривых для небольших значений координаты значительно больше, что связано с затратами энергии на фазовые переходы вблизи поверхности. Потери на радиационное излучение и конвективное охлаждение порядка 1% и являются пренебрежимыми.

Литература

1. Руденко В. Н. Изменение температуры среды под действием лазерного импульса / В. Н. Руденко // Оптика и спектроскопия. — 1965. — Т. 20. — С. 370–371.

2. Гусаров А. В. Физические модели воздействия лазерного излучения на конденсированные вещества в лазерной технологии получения материалов : автореф. дис. … д–ра физ.-мат. наук. / А. В. Гусаров. — М., 2011. — 44 с.

3. Самарский А. А. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана / А. А. Самарский, Б. Д. Моисеенко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 816–827.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ В БЕСКОНЕЧНОСТИ КНЕЗЕРОВСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Асташова (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Для $\lambda < 1$, $(-1)^{(n)}\,p(x) \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = p(x)\,|y(x)|^{\lambda}\operatorname{sign} y(x). \tag{1}$$

Определение ([1, с.109, 283]). Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *исчезающим в бесконечности кнезеровским решением*, если

$$(-1)^{(i)}\,y^{(i)}(x) > 0, \quad |y^{(i-1)}(x)| \downarrow 0, \;\; x \to \infty, \tag{2}$$

при $i = 1, 2, ..., n$.

Уравнение (1) при $\lambda < 1$ является сингулярным нелинейным уравнением. Условия существования решений, обладающих различными специальными свойствами, для таких уравнений различных порядков при $0 < \lambda < 1$ исследовались в [1, §16, §19], [2, глава 7 (7.3), 8], [3]–[5]. Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения вида (1) третьего порядка при $0 < \lambda < 1$ приведена в [6], [9], четвертого порядка при $p(x) = \mathrm{const}$ — в [7]–[9]. Краевые задачи для таких уравнений исследовались в [10, 11].

1. Приведем достаточные условия существования положительных решений, стремящихся к нулю при $x \to \infty$, уравнения (1) при $n = 2$, $\lambda < 0$, где $p(x)$ — положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} xp(x)dx < \infty. \tag{3}$$

Заметим, что из условия (3) следует, что функция

$$q(x) = \int\limits_{x}^{\infty} d\xi \int\limits_{\xi}^{\infty} p(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

корректно определена и вместе со своей производной монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ — положительная функция класса $\mathcal{C}^2$, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$, и для любого $\beta > 0$ функция $q(x)^\beta$ имеет монотонную производную. Тогда уравнение (1), в котором $n = 2$, $\lambda < 0$ и $p(x) = q''(x)$, имеет исчезающее на бесконечности положительное решение.*

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 были получены оценки кнезеровских решений, стремящихся к положительному пределу на бесконечности.

Замечание 2. Другие достаточные условия существования исчезающих в бесконечности кнезеровских решений уравнения (1) а также необходимые и достаточные условия существования кнезеровских решений, стремящихся к положительному пределу на бесконечности, получены в [12, 13].

2. Приведем достаточные условия существования исчезающих в бесконечности кнезеровских решений уравнения (1) в случае положительной сингулярной нелинейности $0 < \lambda < 1$.

Теорема 2. *Пусть $n = 2$ или $n = 3$ и $0 < \lambda < 1$. Тогда для любого $\mu > \frac{1}{(n-1)\lambda+1}$ и любой непрерывной положительной функции $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, существует такая гладкая функция $p(x)$, удовлетворяющая условиям $(-1)^n\, p(x) > 0$ и*

$$\int_0^{+\infty} |p(\tau)|^\mu \, \varphi(\tau)\, d\tau = \infty, \tag{5}$$

что уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям (2).

Литература

1. Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. — М. : Наука, 1990. — 432 с.

2. Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И. В. Асташовой, М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 22–288.

3. Изобов Н. А. О кнезеровских решениях / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 4. — С. 581–588.

4. Квиникадзе Г. Г. О монотонных правильных и сингулярных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений /

Г. Г. Квиникадзе // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 360–361.

5. Асташова И. В. О задаче Н. А. Изобова для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка / И. В. Асташова // Дифференц.уравнения. — 2012. — Т. 48, № 6. — С. 898–899.

6. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью / И. В. Асташова // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 11. — С. 847–848.

7. Асташова И. В. Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом / И. В. Асташова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 827–828.

8. Асташова И. В. Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера четвертого порядка с постоянным отрицательным потенциалом / И. В. Асташова // Дифференц.уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1546–1547.

9. I.Astashova On asymptotic classification of solutions to the singular third and fourth-order Emden–Fowler equations. Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. 2015 (WBVP 2015). P. 1–5. http://users.math.cas.cz/ sremr/wbvp2015/abstracts/astashova.pdf

10. S. Taliaferro A nonlinear singular boundary value problem. Nonlinear Anal. TMA. 1979, 3, 897–904.

11. J. A. Gatica, V. Oliker, P. Waltman Singular Nonlinear Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations. Journal Of Differential Equations, 1989, 79, 62–78.

12. Kiguradze I. On Kneser solutions of the Emden – Fowler differential equation with a negative exponent. Trudy Inst. Math.NAN Belarus. 2000. С. 69–77.

13. N. Partsvania, B. Puza The nonlinear Kneser problem for singular in phase variables second-order differential equations. Boundary Value Problems 2014, 2014:147

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППАРАТА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Ю.В. Афанасенкова, Ю.А. Гладышев (Калуга)
dvoryanchikova_ y@mail.ru

При решении задач теории переноса в твердых телах, как стационарных, так и нестационарных, возникает необходимость найти базисные решения для уравнения вида

$$\alpha_2(x)\frac{d}{dx}(\alpha_1(x)\frac{df}{dx}) - m^2 f = 0, \tag{1}$$

где функции $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ могут иметь конечное число точек разрыва первого рода (многослойная среда).

К уравнению (1) применим аппарат обобщенных степеней Берса (ОСБ) [1]. Поэтому далее [1] используем операторы

$$D_1 = \alpha_1(x)\frac{d}{dx}, D_2 = \alpha_2(x)\frac{d}{dx}$$

и их правые обратные

$$I_1 = \int \frac{d\xi}{\alpha_1(\xi)} \ldots, I_2 = \int \frac{d\xi}{\alpha_2(\xi)}.$$

Обобщенные степени $X^{(n)}(x,x_0), X^{(n)}(x,x_0)$ введенные впервые Л. Берсом [1] строятся последовательным применением интегральных операторов I_1, I_2 к константам c_1, c_2

$$X^{(n)}(x,x_0) = n! \begin{cases} (I_1, I_2)\rho c_1, n = 2\rho, \\ I_1(I_2, I_1)\rho c_2, n = 2\rho + 1. \end{cases}$$

Присоединенные степени $X(x,x_1)$ строятся аналогично с заменой $I_1 \to I_2, I_2 \to I_1$.

Конкретное вычисление ОСБ затруднено необходимостью взятие последовательных интегралов с переменным верхним пределом. В аналитической форме оно может быть проведено только в особых, но важных для приложения случаях [2]. Наличие точек разрыва первого рода не вызывает принципиальных трудностей и они непрерывны и имеют непрерывную D_1-производную. Это соответствует их области приложения в теории переноса. Вычислительные трудности связаны с необходимостью отдельно выписывать ОС на каждом промежутке непрерывности α_1, α_2.

Рассмотрим постановку задачи более подробно. Предположим, что в некотором интервале оси x имеем n точек разрыв функций α_1, α_2. в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно.

Необходимо найти функцию $f(x)$, которая на каждом промежутке x_i, x_{i+1} удовлетворяет уравнению

$$D_2^{(i)}, D_1^{(i)} f^{(i)} - m^2 f^{(i)} = 0, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

где $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$ сужения операторов D_1, D_2 на $[x_i, x_{i+1}]$, а $f^{(i)}$ сужение $f(x)$.

Функция $f^{(i)}$ должна удовлетворять условиям Коши

$$f^{(i)}(x_1) = C_1, (D_1 f^{(i)})|_{x_1} = C_2$$

и условием согласования

$$f^{(i-1)}(x_i) = f^{(i)}(x_i), D_1^{(i-1)} f^{(i-1)}|_{x_i} = D_1^{(i)} f^{(i)}|_{x_i}.$$

В работе [3] был приведен эффективный метод вычисления ОСБ. Для того, чтобы выполнить условия согласования было использовано решение задачи Коши и матричная форма ОСБ. Это открывает возможности для вычисления базисных функций $\operatorname{ch} mX_a(x, x_1)$, $\operatorname{sh} mX_a(x, x_1)$ предоставленных рядами

$$\operatorname{ch} mX_a(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} X_a^{(2i)}(x, x_1) \frac{1}{(2i)!},$$

$$\operatorname{sh} mX_a(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} X_a^{(2i+1)}(x, x_1) \frac{1}{(2i+1)!}. \tag{2}$$

Индекс при X_a означает, что степень рассматривается на всем отрезке x_1, x_{n+1} как единая функция. Рассмотрение решений как единая функция, учитывающие условия согласования с теоретической точки зрения представляется целесообразным. Однако, на данный момент отсутствует оценка сходимости. Поэтому, а также исходя из приложения к решению прикладных задач, дадим другой способ построения (2).

Обозначим сужение $\operatorname{ch} mX_a(x, x_1)$ на промежуток $[x_i, x_{i+1}]$ как $\{\operatorname{ch} mX_a(x, x_1)\}_i$. Поставим задачу Коши на этом промежутке

$$f^{(i)}|_{x_i} = C_1^{(i)}, D_1 f^{(i)}|_{x_i} = C_2^{(i)}.$$

Ее решение в аппарате ОСБ можно представить в виде

$$\begin{cases} f_1^{(i)}(x) = \operatorname{ch} mX_i(x, x_i)C_1^{(i)} + \frac{1}{m} \operatorname{sh} mX_i(x, x_i)C_2^{(i)}, \\ f_2^{(i)}(x) = D_1 f_1 = m \operatorname{sh} m\tilde{X}_i(x, x_i)C_1^{(i)} + \operatorname{ch} m\tilde{X}_i(x, x_i)C_2^{(i)}. \end{cases} \tag{3}$$

Если константы $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}$ подчинить условиям согласования

$$f_1^{(i-1)}(x_i) = C_1^{(i)}, f_2^{(i-1)}(x_i) = C_2^{(i)}, i = 2, \dots, n,$$

то легко видеть, что (10) при $C_1^{(i)} = 1, C_2^{(i)} = 0$ определяет $\operatorname{ch} mX_a(x, x_1)$, а при $C_1^{(i)} = 0, C_2^{(i)} = 1$ имеем $\operatorname{sh} mX_a(x, x_1)$.

Для проведения вычислений целесообразно ввести вектор-столбцы $V^{(i)}(1), V^{(i)}$ и матрицу $K^{(i)}(x, x_i)$

$$V(i) = \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ c_1^{(i)} \end{pmatrix}, V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} \\ f_1^{(i)} \end{pmatrix}, K(x, x_i) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

где $k_{11} = \operatorname{ch} mX_i(x, x_i), k_{12} = \frac{1}{m} \operatorname{sh} mX_i(x, x_i)$,
$k_{21} = m \operatorname{sh} m\tilde{X}_i(x, x_i), k_{22} = \operatorname{ch} m\tilde{X}_i(x, x_i)$.

В матричной форме (3) запишем

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)V^{(i)}(i), x = 1, \dots, n$$

Используя выражение последовательно, начиная с $i = 1$ запишем

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1}) \dots K^{(1)}(x_2, x_1)V^{(i)}(1).$$

Вычисления искомых функций сведено к вычислению функций $\operatorname{ch} mX_i(x, x_i)$, $\operatorname{sh} mX_i(x, x_i)$ на каждом промежутке и матричному умножению, а вопрос о сходимости $\operatorname{ch} mX_a, \operatorname{sh} mX_a$ сведен к сходимости функций на промежутках, где функции $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}$ непрерывен.

Литература

1. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua. Quart. Appl. Mart. 1. 1943, С. 168-189;

2. Афанасенкова Ю.В. Краевые задачи двумерной модели процессов переноса в многослойных средах / Ю.В. Афанасенкова,

Ю.А. Гладышев, А.Н. Куликов // Вестник Калужского университета. — 2013. — № 3–4. — С. 7–11.

3. Гладышев Ю. А. Использование решения краевой задачи Коши при вычислении обобщенных степеней Берса / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович // VI Богдановские чтения. Ч. 2. — Минск, 2015. — С. 38–42.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН[1]

И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, М.В. Макаров (Казань)
Ildar.Badriev1@mail.ru, Victor.Banderov@kpfu.ru

В настоящей работе изучается геометрически линейная и физически нелинейная задача о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем [1]. Задача рассматривается при ограничении, соответствующем идеальной упруго-пластической модели для заполнителя. Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде седловой задачи относительно перемещений (прогибов и осевых смещений точек срединной повехности) несущих слоев и касательных напряжений в заполнителе. Доказана теорема существования и единственности решения [2]. Для решения задачи использован двухслойный итерационный процесс, каждый шаг которого сводится к решению линейной задачи теории упругости и к проектированию на выпуклое замкнутое множество. Исследована сходимость метода на основе результатов [3]. Итерационный процесс был реализован в среде Matlab, проведены численные эксперименты. Получены результаты как для задачи без ограничений, так и для задачи с ограничениями при одних и тех же характеристиках материала. Результаты соответствуют физической картине.

Литература

1. Paimushin V. N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms / V. N. Paimushin, S. N. Bobrov // Mechanics of Composite Materials. — 2000. — V. 36, №1. — P. 59–66.

2. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем /

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10299).

И. Б. Бадриев [и др.] // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. — 2015. — Т. 157, кн. 1. — С. 15–24.

3. Badriev I. B. On the Solving of Variational Inequalities of Stationary Problems of Two-Phase Flow in Porous Media / I. B. Badriev // Applied Mechanics and Materials. — 2013. — V. 392. — P. 183–187.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН[1]

И.Б. Бадриев, М.В. Макаров, О.П. Мартынова, В.Н. Паймушин (Казань)

Ildar.Badriev1@mail.ru, makarovmaksim@mail.ru

В настоящей работе рассматривается геометрически нелинейная задача об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем [1]. По аналогии с [2] установлено, что среди перемещений точек срединной поверхности U и касательных напряжений в заполнителе q в состоянии равновесия имеют место только те, для которых функционал Лагранжа имеет стационарные значения. При этом возникает нелинейная система дифференциальных уравнений относительно U и q. Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения. Доказаны теорема существования задачи, а также теорема сходимости предложенного в [3] двухслойного итерационного процесса на основе развитой в [4] техники.

Литература

1. Paimushin V. N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms / V. N. Paimushin, S. N. Bobrov // Mechanics of Composite Materials. — 2000. — V. 36, №1. — P. 59–66.

2. Паймушин В. Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек / В. Н. Паймушин // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 2. — С. 171–180.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00755, 15-01-05686, 16-38-00788).

3. Badriev I.B. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate / I. B. Badriev, V. V. Banderov, M. V. Makarov, V. N. Paimushin // Applied Mathematical Sciences. — 2015. — V. 9, № 78. — P. 3887–3895.

4. Badriev I. B. On the Solving of Variational Inequalities of Stationary Problems of Two-Phase Flow in Porous Media / I. B. Badriev // Applied Mechanics and Materials. — 2013. — V. 392. — P. 183–187.

ТЕОРЕМЫ О КОММУТАЦИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ И ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

А.Д. Баев, П.А. Кобылинский, С.А. Чечина (Воронеж)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in {R_+}^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty({R_+}^1)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №14-01-00867 и гранта Российского научного фонда №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете.

F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2({R_+}^1)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty({\bar{R}_+}^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1} F_{x_2\to\xi_2} ... F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $P(D_x, D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $P(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[p(t,\xi,\eta) F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$, где символ $p(t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset {\bar{R}_+}^1$ (открытое множество), если функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки $\left|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi|^+ |\eta|)^{\sigma-\rho l}$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ —- произвольный отрезок. Здесь σ - действительное число, $\rho \in (0;1]$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}({R_+}^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2({R_+}^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}^2 = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta \quad .$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}({R_+}^n)$ ($s \geqslant 0,\ q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}({R_+}^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v]] \right\|_{L_2({R_+}^n)}^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma+1, \sigma+\frac{l}{2}\}$, $l = 1, 2, ...$, σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Справедлива следующая теоремы.

Теорема 1. Пусть символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $\mathrm{K}^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}_+{}^1$, $\sigma \in R^1$, $\rho \in (0;1]$. Пусть $v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+{}^n)$, $\partial_t^l v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+{}^n)$, $l = 1, 2....$ Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma} = \partial_t^l K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})\,\partial_t^l \qquad (2)$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma,\alpha})$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v.

Теорема 2. Пусть $q > 1$, $s \geqslant 0$ — действительные числа $v(x,t) \in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R_+{}^n)$. Пусть символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{q}_{\alpha,\rho}(\Omega)$ $\Omega \subset \bar{R}_+{}^1$, $\rho \in (0;1]$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = s+q$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, определенного в (2) при $\sigma = q$, справедлива оценка $\|M_{l,q}v\|_{s,\alpha,q} \leqslant c\,\|v\|_{s+(l+1)q-1,\alpha,q}$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от v.

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^{m}_{\alpha,\rho}(\Omega)$ доказаны в [4]–[8].

Литература

1. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев// Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014, № 4. — С. 102–108.

6. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестник Воронежского государственного университета Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

О СОПРЯЖЕННОМ ОПЕРАТОРЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕНИЕМ, СИМВОЛ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА[1]

А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский, С.А. Чечина (Воронеж)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$при$t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\in fty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\in fty(R^1_+)$. Свойства этого преобразования доказаны в [1], [2], [3]. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. В [1] показано, что на функциях $u(t) \in C_0^\in fty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p. Этот оператор определен формулой $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})\, v(x, t) = F^{-1}_{\xi\to x} F_\alpha^{-1}\left[\lambda(p, t, \xi, \eta)\, F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x, t)\right]\right]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ открытое множество,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №14-01-00867 и гранта Российского научного фонда №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете.

$p \in Q$, где Q- некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ — действительное число, если функция $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(p, t, \xi, \eta) \right| \leqslant c_{m,l} \left(|p| + |\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Определение 2. Сопряженным оператором к весовому пчсендодифференциальному оператору $K(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ назовем оператор $K^*(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$, удовлетворяющий равенству

$$(K(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) u(x, t), v(x, t))_{L_2(R^n_+)} =$$

$$= (u(x, t), K^*(p, t, D_x, D_{\alpha,t}) v(x, t))_{L_2(R^n_+)}$$

для всех $v(x, t) \in L_2(R^n_+)$, $u(x, t) \in L_2(R^n_+)$ таких, что $P(t, D_x, D_{\alpha,t}) u(x, t) \in L_2(R^n_+)$.

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\lambda(p, t, \xi, \eta) \in S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in R^1$. Тогда оператор $K^*(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ с символом $\lambda(p, t, \xi, \eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $\lambda^*(p, t, \xi, \eta) \in S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$. Причём справедливо соотношение

$$\lambda^*(p, t, \xi, \eta) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!} (\alpha(t)\partial_t)^j \partial^j_\eta \overline{\lambda}(p, t, \xi, \eta) \in S^{\sigma - N}_{\alpha,p}(\Omega)$$

для любых $N = 1, 2, ...$

Некоторые свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^m_{\alpha,p}(\Omega)$ содержатся в [4]–[8].

Литература

1. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 7–10.

4. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский// Вестник Воронежского государственного университета Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

5. Баев А.Д. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 461, № 1. — С. 1–3.

6. Баев А.Д. Об одном классе весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2009. — № 2. — С. 16–20.

7. Баев А.Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

8. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А.Д. Баев, В.В. Панков, С.А. Чечина (Воронеж)

Процессы с вырождением – это модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №14-01-00867 и гранта Российского научного фонда №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете.

как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. Подобные уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле , при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева, В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки общей краевой задачи для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]-[7].

В настоящей работе получены априорные оценки решений одной краевой задачи для уравнения, частным случаем которого является уравнение, рассмотренное в [2].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$. Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F^{-1}_α обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F^{-1}_\alpha[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

В полосе $R^n_d = \{0 < t < d,\ x \in R^{n-1}\}$ рассматривается задача

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t})v - L_{2,2}(D_x, \partial_t^)v = F(x,t), \quad (1)$$

где

$$L_{2m,1}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{1,\tau,j} D^\tau_x D^j_{\alpha,t}, \quad L_{2,2}(D_x, \partial_t) = b_2\partial_t^2 + b_1\partial_t,$$

b_1, b_2, $a_{k,\tau,j}$, $k = 1; 2$, — комплексные числа. $Im\,\bar{b}_2 a_{1,0,2m} = 0$.

На границе $t = 0$ полосы R^n_d задается условие

$$v|_{t=0} = G(x) \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau l}$.

На границе $t = d$ полосы R^n_d заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливы неравенства $Re\bar{b}_2 L_{1,2m}(\xi, \eta) \geqslant c_1(1 + |\xi|^+ |\eta|)^{2m}$, где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$

$$=\{ \sum_{l=0}^{[sm^{-1}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-ml)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|^2_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[sm^{-1}]$ — целая часть числа sm^{-1}.

Если s — целое неотрицательное число, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+ml\leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $s \geqslant 2m$ — целое число и выполнены условия 1–2. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$.

Литература

1. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

2. Баев А. Д. Корректная разрешимость общих краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев, В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 60 с. — Деп. в ВИНИТИ 9.02.79, № 536–79.

3. Баев А.Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестник Воронежского государственного университета Серия: Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

4. Баев А.Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады академии наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

5. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

6. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

О ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ СПЕКТРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПУЧКОВ[1]

А.И. Барсуков (Воронеж)
a.barsoukov@mail.ru

Пусть задан пучок степени $n \geqslant 2$

$$L(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + ... + \lambda A_1 + A_0,$$

коэффициентами которого являются эрмитовы матрицы размера $k \times k$. Пучок L называется гиперболическим, если для любого ненулевого вектора $f \in \mathbb{C}^k$ все корни многочлена $p_f(\lambda) = (L(\lambda)f, f)$ вещественны и различны. Собственным значением пучка L называется каждое решение уравнения $\det L(\lambda) = 0$. Множество всех собственных значений пучка L называется спектром этого пучка и обозначается $\sigma(L)$. Кратностью собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(L)$ является кратность числа λ_0 как корня алгебраического уравнения $\det L(\lambda) = 0$.

Рассмотрим пучок $L_e(\lambda) = P_e L(\lambda)|_{\operatorname{ran} P_e}$, где P_e — ортогональный проектор на подпространство $\{\alpha e : \alpha \in \mathbb{C}\}^\perp$, $\operatorname{ran} P_e = P_e \mathbb{C}^k$.

Множество T_{nk}, состоящее из $n \times k$ различных вещественных чисел запишем в виде $T_{nk} = \{\alpha_{ij} : i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k\}$:

$$\alpha_{nk} < ... < \alpha_{n1} < \alpha_{n-1,k} < ... < \alpha_{n-1,1} < ... < \alpha_{1k} < ... < \alpha_{11}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-05315-а).

Говорят, что множества $T_{nk} = \{\alpha_{ij} : i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,k\}$ и $T_{n,k-1} = \{\beta_{ij} : i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,k-1\}$ блочно перемежаются, если выполнены неравенства

$$\alpha_{ik} < \beta_{i,k-1} < \alpha_{i,k-1} < \dots < \alpha_{i2} < \beta_{i1} < \alpha_{i1},\ i = 1,2,\dots,n.$$

Теорема 1. *Пусть $L = L(\lambda)$ — гиперболический матричный пучок степени $n \geqslant 2$ и e — произвольный единичный вектор из $\mathbb{C}^k$.*

Предположим, что выполняются условия:
1) *$\sigma(L)$ состоит из $n \times k$ различных вещественных чисел;*
2) *$f_e(\lambda) = \big(L^{-1}(\lambda)e, e\big)$ имеет полюс в каждой точке $\lambda_0 \in \sigma(L)$.*

Тогда спектр $\sigma(L_e)$ пучка L_e состоит из $n \times (k-1)$ различных вещественных чисел и множества $\sigma(L)$ и $\sigma(L_e)$ блочно перемежается.

Если e является k-тым единичным ортом, то L_e получается из L вычеркиванием k-ой строки и k-го столбца. Таким образом, полученная теорема обобщает известные результаты о перемежаемости спектров эрмитовой матрицы A и матрицы, полученной из A вычеркиванием строки и столбца с одинаковыми номерами. Для $n = 2$ сформулированный результат был получен в работе [1].

Литература

1. Azizov T. Ya. Quadratic (weakly) hyperbolic matrix polynomials: direct and inverse spectral problems / T. Ya. Azizov, A. Dijksma, K.-H. Förster and P. Jonas // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2009. — v. 198. — P. 11-40.

О БЕГУЩИХ И КВАЗИБЕГУЩИХ ВОЛНАХ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ[1]

Л.А. Бекларян (Москва)
beklar@cemi.rssi.ru

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \varphi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где потенциал $\varphi(\cdot)$ задается гладкой периодической функцией. Уравнение (1) является системой с потенциалом Френкеля–Конторовой [1]. Такие системы моделируют поведение счетного числа

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00110).

шаров массы m, помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной. Изучение таких систем с различными потенциалами является одним из интенсивно развивающихся направлений в теории динамических систем [2]. Для них центральной задачей является изучение решений типа бегущей волны, как одного из наблюдаемых классов волн. Система (1) является конечноразностным аналогом нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение волн в однородном бесконечном стержне.

Определение 1. *Решением системы (1) является всякая последовательность функций $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$, для которой последовательность производных $\{\dot{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ состоит из непрерывных функций, а последовательность вторых производных $\{\ddot{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ состоит из абсолютно непрерывных функций, и такая последовательность удовлетворяет системе уравнений (1).* ■

Определение 2. *Будем говорить, что решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы (1), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет тип бегущей волны, если существует $\tau > 0$, не зависящая от t и i, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t). \tag{2}$$

Константу τ называется характеристикой бегущей волны. ■

В докладе предлагается подход, при котором решения типа бегущей волны для системы (1) реализуются как решения однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа [3]-[5]. При этом, систему (1) удается исследовать при общих предположениях на потенциал $\varphi(\cdot)$ в виде условия Липщица с константой L. В рамках предложенного формализма удается описать все пространство решений типа бегущей волны с характеристиками, ограниченными некоторой величиной. Удается описать возможный рост таких решений, где рост также связан с величиной характеристики бегущей волны.

В нашем подходе мы будем изучать решения имеющие заданный рост (экспоненциальный) как по времени, так и по пространству. Для этого определим семейства банаховых пространств функций с весами

$$\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) = \Big\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right),$$
$$\max_{0 \leqslant r \leqslant k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \Big\}, \mu \in]0,1[.$$

а также векторное пространство

$$K^n = \overline{\prod_{i\in\mathbb{Z}}} R_i^n, \quad R_i^n = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (\varkappa \in K^n, \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty})$$

со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство).

В пространстве K^n определим семейство банаховых подпространств $K^n_{\infty\mu}, \mu \in (0,1]$

$$K^n_{\infty\mu} = \{\varkappa : \sup_{i\in Z} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|} < +\infty\}, \quad \|\varkappa\|_{\infty\mu} = \sup_{i\in Z} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|}$$

и семейство гильбертовых подпространств $K^n_{2\mu}, \mu \in (0,1)$

$$K^n_{2\mu} = \left\{\varkappa : \, \varkappa \in K^n; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n} \mu^{2|i|} < +\infty \right\},$$

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = [\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n} \mu^{2|i|}]^{\frac{1}{2}}.$$

Будем полагать, что массы шаров удовлетворяют условию

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}, \quad \text{то есть} \quad \sup_{i\in\mathbb{Z}} m_i^{-1} < +\infty.$$

Рассмотрим уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0,+\infty)$ и $\mu \in (0,1)$

$$C\tau \left[2\mu^{-1} + 1\right] = \ln \mu^{-1}, \quad C = \max\{1; [L+2] \sup_{i\in\mathbb{Z}} m_i^{-1}\}. \qquad (3)$$

Множество решений уравнения (3) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на рис. 1. Имеет место равенство $\hat{\mu} = 2C\hat{\tau}$. Так как $0 < \hat{\mu} < 1$, то для величины $\hat{\tau}$ имеется некоторая абсолютная оценка $\hat{\tau} < (2C)^{-1}$. Для случая равных масс сформулируем теорему существования и единственности решения типа бегущей волны.

Теорема 1. *При любых начальных данных $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (1) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ такое, что оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$, при любом параметре $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$

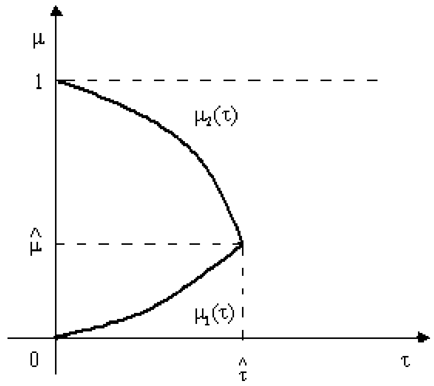


Рис. 1. Графики функций $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$.

вектор-функция $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $K_{2\mu}^2$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$, *а функция* $\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(1)}(\mathbb{R})$. *Такое решение непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Теорема 1 не только гарантирует существование решения, но и задает ограничение его возможного роста как по времени t, так и по координатам $i \in \mathbb{Z}$ (по пространству).

Предлагаемый подход позволяет исследовать распространение волн и в случае неоднородного бесконечного стержня, конечноразностный аналог которого описывается системой (1) с произвольными массами шаров

$$m_i \ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \varphi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Показано, что для систем с различными массами шаров не существует решений типа бегущей волны отличных от стационарных, либо прямолинейных равномерных движений. В связи с этим, определяется новый класс решений в виде решений типа квазибегущей волны. Решение типа квазибегущей волны является "правильным" расширением понятия решения типа бегущей волны и совпадают с ним в случае равных масс. Сами решения типа квазибегущей волны могут быть реализованы как импульсные решения однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Для случая равных масс сформулируем теорему существования решения типа квазибегущей волны.

Теорема 2. *При любых начальных данных $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

и масссах шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$ существует решение $\{\hat{y}_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа квазибегущей волны с характеристикой τ, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$. Для любого значения параметра $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ вектор-функция $\omega(t) = \{(y_i(t),\, \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $K_{2\mu}^2$ при любом $t \in \mathbb{R}$, функция $\rho(t) = = \|\omega(t)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(1)}(\mathbb{R})$. Более того, в каждой точке, заданной значениями параметров a, b, $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ с равными массами $m_i = m, i \in \mathbb{Z}$, решение типа квазибегущей волны является решением типа бегущей волны и непрерывно зависит от начальных данных a, b, и массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$.
■

В отличии от теоремы 1 о существовании и единственности решения типа бегущей волны с заданными начальными данными и характеристикой, в теореме 2 отсутствует утверждение о единственности решения типа квазибегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ. Единственностьрешения типа квазибегущей волны гарантируется только в случае равных масс $m_i = m, i \in \mathbb{Z}$, когда квазирешения типа бегущей волны становятся решениями типа бегущей волны.

Литература

1. Френкель Я. И. О теории пластической деформации и двойственности / Я. И. Френкель, Т. А. Конторова // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 89–97.

2. Пустыльников Л. Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ / Л. Д. Пустыльников // УМН. — 1997. — Т. 52, вып. 3. — С. 106–158.

3. Бекларян Л. А. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты / Л. А. Бекларян // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. — 1999. — Т. 67. — С. 161–182.

4. Бекларян Л. А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход / Л. А. Бекларян. — М. : Факториал Пресс, 2007. — 288 с.

5. Бекларян Л. А. О квазибегущих волнах / Л. А. Бекларян // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, вып. 12. — С. 21–68.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФУРЬЕ[1]

Ф.А. Белоусов (Москва)

sky_ tt@list.ru

Рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где правая часть $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической по времени функцией, удовлетворяющая условию Липшица с положительной константой L_g, т.е. для любых t, x_j и $\overline{x}_j$, $j \in \{1, ..., s\}$ из $\mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}. \tag{2}$$

В силу 2π–периодичности правой части (1), не ограничивая общности будем считать, что отклонения τ_j, $j \in \{1, .., s\}$ лежат в пределах $[0, 2\pi)$. Кроме этого предполагается, что отклонения соизмеримы, т. е. для любых τ_i и τ_j, $i, j \in \{1, .., s\}$ должны существовать n_1 и n_2 из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $n_1 + n_2 \neq 0$ и $n_1|\tau_i| = n_2|\tau_j|$.

Такой тип функционально-дифференциальных уравнений исследовался в работах Л. А. Бекларяна [1]. В работе приведены условия, обеспечивающие существование и единственность решения из специального класса функций для соответствующей задачи Коши. Всюду далее будет считаться, что эти условия выполнены.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00110).

Выделяется линейная часть правой части функционально-дифференциального уравнения (1) в следующем виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j) + f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_n)), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

где $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s}; \mathbb{R}^n)$ - 2π-периодическая по времени функция ($f(\cdot) = g(\cdot) - \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j)$) со своей константой Липшица L_f. Значения параметров $(a_1, ..., a_s, \tau_1, ..., \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ выбираются такими, чтобы для них было выполнено условие отсутствия резонансности

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \; |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Определим пространства

$$\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} = \{\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)| \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(\omega)\},$$

$$\mathbb{C}_{\omega}^{(1),n} = \{\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)| \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(\omega), \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{\tilde{x}}(\omega)\}$$

с нормами как в пространствах $\mathbb{C}^{(0)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}^{(1)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, соответственно.

Вводится оператор $\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$ по следующему правилу $\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}((t+\tau_1)(mod\, 2\pi)), \cdots, \hat{x}((t+\tau_n)(mod\, 2\pi)))$, оператор естественного вложения $\mathbb{J} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$ и оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$, который корректно определен в случае выполнения условий отсутствия резонансности (4).

Введем обозначения

$$\mathbb{A}^2 = \frac{1}{(\sum_{j=1}^{s} a_j)^2}, \quad \mathbb{D}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k},$$

где $\det A_k = \Big(\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j \Big)^2 + \Big(k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j \Big)^2, \quad k = 1, 2, ...$

Теорема. *Пусть:*
в нелинейном уравнении (1) функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической функцией и удовлетворяет условию Липшица (2), а L_f, соответственно, константа Липшица функции

$f(\cdot)$;
для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$M\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|\tau_j|} < \ln\mu^{-1}, \quad M = \max_{1\leqslant j\leqslant s}|a_j|;$$

и для $(a_1,...,a_s,\tau_1,...,\tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0,2\pi) \times ... \times [0,2\pi)$ справедливы условия отсутствия резонансности (4).
Если выполнено условие

$$sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1,$$

то для уравнения (1) существует 2π-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Более того, для любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к единственной функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$, и справедлива оценка сходимости:

$$\|(\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leqslant \left(sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}\right)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}$$

Периодическое решение $x(\cdot)$ уравнения (1) индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем продолжения ее по периодичности 2π на всю числовую ось $\mathbb{R}$. ■

Литература

1. Бекларян Л. А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход / Л. А. Бекларян. — М. : Факториал Пресс, 2007. — 288 с. — (Методы современной математики; Вып. 5).

2. Бекларян Л. А. Периодические решения для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа / Л. А. Бекларян, Ф. А. Белоусов // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1565–1579.

3. Полякова Л. А. Периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений / Л. А. Полякова // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2006. — № 11. — С. 179–182.

4. Полякова Л. А. Общий принцип сжимающих отображений и периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений : дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02, РГР ОД, 61:07-1/387. / Воронеж, 2006. — 126 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Е.С. Белякова (Москва)
esbelyakova@hotmail.com

Целью исследования является получение достаточных условий существования равновесия в модели "спрос – предложение" для различных типов функции полезности потребителя и производственных функций.

Рассматривается задача оптимального выбора покупателя, решаемая как задача нахождения условного экстремума функции полезности, и задача максимизации прибыли производителя.

Получены достаточные условия существования вектора равновесных цен в используемых моделях. Также доказана теорема о сходимости вектора равновесных цен в последовательности моделей рынка к вектору равновесных цен исследуемой модели.

Достаточные условия существования вектора равновесных цен получены как следствия теорем о точках совпадения, в частности, использованы результаты, полученные в [1].

Литература

1. Арутюнов, А.В. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений / А.В. Арутюнов, С.Е. Жуковский, Н.Г. Павлова // Журнал выч. математики и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 225–237.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ БАКЛЕЯ–ЛЕВЕРЕТТА[1]

П.В. Бибиков (Москва)
tsdtp4u@proc.ru

Целью данной работы является групповая классификация систем дифференциальных уравнений Баклея–Леверетта, т.е. систем вида

$$\begin{cases} s_t + \operatorname{div}(A(s)\operatorname{grad} p) = 0, \\ \operatorname{div}(B(s)\operatorname{grad} p) = 0. \end{cases}$$

Здесь $s = s(t, x, y)$ и $p = p(t, x, y)$ — неизвестные функции, зависящие от времени t и двух пространственных координат x, y, а A, B — заданные функции.

Данная система уравнений имеет большое значение для описания движения двух несмешиваемых жидкостей в пористой среде, что в свою очередь необходимо для вопросов добычи нефти. Более точно, система Баклея–Леверетта описывает процесс распространения фронта вытеснения нефти водой при разработке нефтяных месторождений (подробнее см. [2]). В системе Баклея–Леверетта s является функцией насыщенности, а p — функцией давления.

Отметим, что при изучении движения нефти функции A и B априори неизвестны и подбираются эмпирически. Поэтому любая информация, связанная с этими функциями, которая может быть использована для изучения системы Баклея–Леверетта, представляет интерес.

В данной работе мы вычислим алгебры симметрий системы Баклея–Леверетта, укажем соотношения между функциями A и B, при которых эти алгебры имеют тот или иной вид, а также вычислим дифференциальные инварианты первого порядка алгебр симметрий системы Баклея–Леверетта общего положения (необходимые определения можно найти в [1]).

Теорема 1. *Пусть*

$$B \cdot \left(\frac{A'}{B}\right)' = A \cdot \left(\frac{B'}{B}\right)'.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-19-00275).

Тогда алгебра симметрий системы Баклея–Леверетта состоит из векторных полей вида

$$T(t)\partial_t + (ax + by + c)\partial_x + (-bx + ay + d)\partial_y + \\ + e\big(\ln Q\big)'\partial_s + \big((2a - T'(t))p + G(t)\big)\partial_p.$$

Теорема 2. *1. Если функции A и B не удовлетворяют соотношению из теоремы 1, то алгебра симметрий системы Баклея–Леверетта состоит из векторных полей вида*

$$T(t)\partial_t + (ax + by + c)\partial_x + (-bx + ay + d)\partial_y + \big((2a - T'(t))p + G(t)\big)\partial_p.$$

2. Дифференциальные инварианты первого порядка таких систем имеют следующий вид:

$$I_1 := s, \quad I_2 := \frac{p_x s_y - p_y s_x}{s_t}, \quad I_2 := \frac{(s_x^2 + s_y^2)(p_x^2 + p_y^2)}{s_t^2}.$$

Литература

1. Алексеевский Д. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин. — М. : ВИНИТИ, 1988. — № 28. — 289 с.

2. Ентов В. М. Гидродинамическая теория методов повышения нефтеотдачи / В. М. Ентов, А. Ф. Зазовский. — М. : Недра, 1989. — 232 с.

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА И МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко (Казань)

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

1. Рассматриваются задачи математического моделирования аэротермодинамики цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке ионизированного газа. Имеются три возможности управления ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа: *вдув газа–охладителя* (в

случае проницаемой поверхности), *температурный фактор* (степень предварительной охлаждённости поверхности – поддержание температуры внешней поверхности стенки за счёт *внутреннего* охлаждения [1]) и *наложение магнитного поля.* Исследованы различные варианты сочетаний управляющих параметров в широком диапазоне изменения их значений.

Температурный фактор $\tau_w = T_w/T_{e0}$ (где T_w – температура стенки, а T_{e0} – температура в точке торможения потока) и магнитное поле σB_0^2 предполагаются постоянными по длине участка теплообмена. Обсуждаются результаты для τ_w от $0,1$ до $0,9$ и σB_0^2 от 0 до $5 \cdot 10^4$ [Тл/Ом · м].

Проводится сравнение результатов многочисленных вычислительных экспериментов с [2–4].

2. На основании проведённых исследований сделаны следующие выводы.

1) В отсутствии вдува и магнитного поля с увеличением температурного фактора τ_w интенсивность поглощения тепла стенкой уменьшается, а локальное напряжение трения возрастает.

2) В отсутствии вдува влияние магнитного поля, проявляющееся начиная со значений $\sigma B_0^2 \approx 10^4$ [Тл/Ом · м], приводит к следующим результатам:

а) локальный тепловой поток для сильно охлаждаемой поверхности снижается на всём участке теплообмена;

б) для умеренно и слабо охлаждаемых поверхностей, начиная с некоторой точки x_{sep} участка теплообмена, зависящей от конкретного сочетания параметров τ_w и σB_0^2, наблюдается повышение локального теплового потока;

в) для любого τ_w происходит снижение локального напряжения трения;

г) существуют *разделяющее значение* τ_{sep} температурного фактора и малое значение $\delta > 0$ такие, что

при $\tau_w < \tau_{sep} - \delta$ приложение магнитного поля приводит к снижению интегрального теплового потока Q,

при $\tau_w > \tau_{sep} + \delta$ – к его увеличению,

при $\tau_w \in [\tau_{sep} - \delta; \tau_{sep} + \delta]$ величина Q почти не зависит от σB_0^2.

Так, для высоты полёта $H = 10$ [км], радиуса тела $R = 0,1$ [м], при числе Маха $M_\infty = 10$, разделяющие значения $\tau_{sep}^{cyl} \approx 0,8$ и $\tau_{sep}^{sph} \approx 0,7$.

3) Применение магнитного поля в качестве дополнительного средства управления ламинарным пограничным слоем электропро-

водящего газа для сильно охлаждаемой поверхности позволяет добиться дополнительного снижения локальных теплового потока и напряжения трения как в случае постоянного, так и в случае оптимального вдува (или законов управления, близких к оптимальным).

Литература

1. Дракин И. И. Аэродинамический и лучистый нагрев в полёте / И. И. Дракин. — М. : Оборонгиз, 1961. — 96 с.

2. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун–та. Сер. : Физика и математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

3. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун–та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

4. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун–та. Сер. : Физика и математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОТ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПОТОКА

Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко (Казань)

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

1. В рамках решения актуальной задачи построения эффективной активной тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов рассмотрены математические модели управления ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа на цилиндрических и сферических поверхностях.

Задачу *оптимального* теплового проектирования можно рассматривать как *обратную* задачу тепломассообмена в экстремальной постановке, когда по известным условиям, определяющим тепловое состояние системы, требуется найти параметры управления, удовлетворяющие этому состоянию и выбранному критерию оптимальности.

Исследованы различные варианты сочетаний *управляющих* параметров: *вдува* $m(x)$ газа–охладителя (в случае проницаемой поверхности), *температурного фактора* $\tau_w(x) = T_w/T_{e0}$ (где $T_w(x)$ – температура стенки, а T_{e0} – температура в точке торможения потока) и приложения *магнитного поля* $\sigma B_0^2(x)$. Здесь x – безразмерная переменная, изменяющаяся вдоль контура тела.

Обсуждаются границы применимости используемых математических моделей.

2. Пусть фиксированы значения *неизменяемых* параметров: число Маха $M_\infty \in [10; 40]$, высота полёта $H \in [10; 30]$ [км], радиус тела $R \in [0,1; 1]$ [м], а диапазоны изменения управляющих параметров в точке торможения ограничены следующим образом: $m_0 = m(0) \in [0; 1]$, $\tau_0 = \tau_w(0) \in [0,1; 0,9]$, $s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4]$ [Тл/Ом $\cdot$ м].

Тогда для функций $\overline{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$, $\overline{\theta}_1(\ldots)$, $\overline{\omega}_0(\ldots)$, $\overline{\omega}_1(\ldots)$, представляющих собой решения алгебраических систем из работы [1] (системы (15) – для цилиндрических и (31) – для сферических поверхностей соответственно) и определяющих параметры пограничного слоя в малой окрестности точки торможения потока, установлены следующие свойства.

Утверждение 1. *Для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0, s_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ строго монотонно возрастают по m_0.*

Утверждение 2. *Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, s_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ строго монотонно убывают по τ_0.*

Утверждение 3. *Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, τ_0 функции $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ строго монотонно возрастают по s_0.*

Из установленных утверждений следует, что определяющие локальные значения теплового потока и трения функции $\overline{q}(m_0, \tau_0, s_0)$, $\overline{f}(\ldots)$ в окрестности точки торможения являются
однозначными функциями m_0 в условиях Утверждения 1,
однозначными функциями τ_0 в условиях Утверждения 2,
однозначными функциями s_0 в условиях Утверждения 3.

3. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие возможности определения значений управляю-

щих параметров. В программной реализации использованы метод деления отрезка пополам и метод секущих.

4. Установленный в Утверждениях 1–3 монотонный характер зависимости решения алгебраических систем [1] от величин параметров управления позволяет решать обратные задачи тепломассообмена (аналогичные рассмотренной в [2]) – о «восстановлении» управления по локальным характеристикам пограничного слоя (по локальному тепловому потоку q или по локальному трению f).

5. Рассмотрена возможность определения параметров в случае, когда из трёх величин m_0, τ_0, s_0 фиксирована только одна.

Литература

1. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун–та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1.

2. Бильченко Г. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016» : материалы науч. конф. — СПб. : Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. — С. 45–49.

О КОМПЕТЕНТНОСТИ И КОМПЕТЕНЦИЯХ

А.В. Боровских (Москва)
bor.bor@mail.ru

Компетентностный подход вызывает у одних (не будем показывать пальцем, у кого) бурный энтузиазм и немерянную активность, у других – жёсткое неприятие и негодование, у третьих (которых большинство) – ощущение какого-то театра абсурда. В лекции будут представлены основные факторы, связанные с появлением компетентностного подхода и превращением его в то, что мы наблюдаем сегодня.

Теорема 1. *Компетентностный подход связан с изменением проблемы.*

На смену *проблеме неграмотности* (которая была ведущей в первой половине XX века) и сменившей её *проблеме практического неумения* (которая была ведущей в послевоенные годы) пришла *проблема некомпетентности.*

Определение 1. *Привидением называется понятие, которое собственного содержания не имеет, но которое образовано формальным отрицанием понятия, которое является содержательным.*

Пример: понятие исторической справедливости.

Теорема 2. *Компетентность является привидением.*

Содержательным понятием является именно некомпетентность.

Теорема 3. *Преодоление некомпетентности возможно.*

Один из первоисточников компетентностного подхода [1] описывает, как (по-видимому – впервые) совершён переход от некомпетентности как проблемы к компетентности как содержательному понятию.

Теорема 4. *Компетентность и некомпетентность существуют пока только как феномены.*

Переход от действий наблюдения и диагностики к действиям изменения пока не совершён.

Теорема 5. *Попытки совершения действвия изменения приводят к распаду понятия компетентности и компетентностного подхода.*

При попытке что-то изменить в человеческой компетентности она «разваливается» на целый ряд качеств совершенно различного типа (см., напр., [2-3]), которые и изменяются, и формируются совершенно по-разному (см., напр., [4-5]). Это всё можно и обсуждать, и совершенствовать, но единственное, что бессмысленно – это сохранять за этими качествами термин «компетентность».

Теорема 6. *Для формирования любых качеств имеются разумные методики.*

Литература

1. Спенсер Л. М.-мл. Компетенции на работе : пер. с англ. / Л. М. Спенсер-мл., С. М. Спенсер. — М. : HIPPO, 2005. — 384 с.

2. Боровских А. В. Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика / А. В. Боровских, Н. Х. Розов. — М. : МАКС Пресс, 2010. — 80 с.

3. Боровских А. В. Надпредметное содержание школьного образования / А. В. Боровских, Н. Х. Розов // Педагогика. — 2014. — № 1. — С. 3–14.

4. Гальперин П. Я. О методе поэтапного формирования умственных действий / П. Я. Гальперин // Теории учения : хрестоматия. Ч. I. Отечественные теории учения. — М. : Редакционно-издательский центр «Помощь», 1996. — С. 67–70.

5. Божович Л. И. Личность и ее формирование в детском возрасте / Л. И. Божович — СПб. : Питер, 2009. — 400 с.

О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ

В.М. Брук (Саратов)
vladislavbruk@mail.ru

Пусть $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$ – функция, определенная на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ и принимающая значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [1, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{p}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{p}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее меру $\mathbf{p}$ продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0]$ $(b_0 > b)$, полагая $\mathbf{p}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b,b_0]$. Вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ называется число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup\sum\limits_k \|\mathbf{p}(\Delta_k)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_k \subset \Delta$.

Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi \in [a,b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\|=1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{p}(\Delta) = \int\limits_\Delta \Psi(\xi)d\rho$. Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры и этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов ([1, с. 325]). Функция h со значениями в H интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int\limits_\Delta \Psi(t)h(t)d\rho = \int\limits_\Delta (d\mathbf{p})h(t)$. Пусть h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на $[a,b_0]$. Тогда функция $y(t) = \int\limits_{[t_0,t)} (d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева. Рассмотрим множество функций, измеримых по Борелю, ограниченных на отрезке $[l_1,l_2] \subset [a,b_0]$, непрерывных слева на $(l_1,l_2]$ и принимающих значения в H. Определим норму равенством $\|u\| = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Теорема 1. *Для любой функции $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ существует единственное решение уравнения*

$$y(t) = \int_s^t (d\mathbf{p})y(\xi) + g(t), \quad a \leqslant s < b_0, \tag{1}$$

принадлежащее $\widetilde{C}[s-\delta, b_0]$, где $\delta = \delta(s) > 0$ достаточно мало и $\delta = 0$ при $s = a$; символ $\int\limits_s^t$ обозначает $\int\limits_{[s,t)}$, если $s < t$; $-\int\limits_{[t,s)}$, если $s > t$; и 0, если $s = t$.

Следствие 1. *Если в теореме 1 $s = a$, то существует единственное решение уравнения (1), принадлежащее $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.*

Обозначим через $U(t,s)$ оператор, ставящий в соответствии каждому элементу $x \in H$ значение решения $y(t)$ уравнения (1) при $g(t) = x$. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 + \int_{[a,t)} (d\mathbf{p})y(s) + \int_{[a,t)} (d\mathbf{m})f(s), \quad x_0 \in H, \tag{2}$$

где $\mathbf{m}$ – мера с ограниченной вариацией на $[a, b]$, продолженная на $[a, b_0]$ так же, как мера $\mathbf{p}$; функция f интегрируема по мере $\mathbf{m}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$ – меры с ограниченной вариацией и $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$ не имеют общих одноточечных атомов, т.е. на отрезке $[a, b]$ отсутствуют одноточечные множества $\{\tau\}$, в которых одновременно выполняются неравенства $\mathbf{m}(\{\tau\}) \neq 0$, $\mathbf{p}(\{\tau\}) \neq 0$. Тогда решение уравнения (2) имеет вид*

$$y(t) = U(t,a)x_0 + \int_{[a,t)} U(t,s)d\mathbf{m}(s)f(s).$$

Отметим, что последняя формула установлена во многих работах для уравнения Вольтерра с "обычной" мерой Лебега (т.е. с мерой $\mathbf{m}([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) и с ядром, зависящим от двух переменных (см. обзор [2]).

Литература

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев : Наукова Думка, 1965. — 798 с.

2. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра / З. Б. Цалюк // Итоги науки и техн. Сер. : Мат. анализ. — 1977. — Т. 15. — С. 131–198.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И РАЗНОПОРЯДКОВЫМИ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов (Воронеж, Саратов)
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), x \in [0,1], t \in (-\infty, \infty), \qquad (1)$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \qquad (2)$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \qquad (4)$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)$ и $\varphi(x)$ — комплекснозначные, α, β, α_1, β_1 — комплексные числа. Нетрудно видеть, что (2)-(3) представляют общий случай краевых условий разных порядков. Считаем также выполненным соотношение $1 + \alpha\beta \neq 0$, которое является условием регулярности Биркгофа оператора Штурма-Лиувилля L:

$$\begin{gathered}(Ly)(x) = -y''(x) + q(x)y(x),\\ U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0,\\ U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0,\end{gathered}$$

связанного с методом Фурье для задачи (1)–(4). Известно, что собственные значения оператора L образуют две последовательности $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = {\rho'_n}^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$) с асимптотикой: $\rho_n = 2n\pi + b_1 + \varepsilon_n$, $\rho'_n = 2n\pi + b_2 + \varepsilon'_n$ ($n = n_0, n_0+1, \ldots$), где $b_{1,2} = -i\ln(d \pm \sqrt{d^2-1})$, $d = -(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)^{-1}$, $\varepsilon_n = o(1)$, $\varepsilon'_n = o(1)$. Мы будем рассматривать случай, когда $b_1 = b_2 = b$. Этот случай наиболее трудный (возможны случаи кратных, сколь угодно больших собственных значений и появление присоединенных функций

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00867), второго автора — в рамках выполнения гос. задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014K)).

в любом количестве [1], [2]). В решении задачи методом Фурье мы используем резольвентный подход, впервые предпринятый в [3], и переносим ряд результатов из [4]-[6] на наш случай.

Формальное решение представим в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)(R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t d\lambda, \tag{5}$$

где $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, γ_n — есть образ $\widetilde{\gamma}_n = \big\{\rho\big|\,|\rho - b - 2n\pi| = \delta\big\}$ в λ-плоскости, $\delta > 0$ и достаточно мало, все γ_n при $n \geqslant n_0$ вне $|\lambda| = r$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр).

Теорема 1. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $U_1(\varphi) = U_2(\varphi) = 0$, $L\varphi \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то сумма $u(x,t)$ ряда (5) обладает свойствами: $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и выполнено (2)–(4), т.е. $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(4), когда (1) выполняется почти всюду.*

Теорема 2. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то ряд (5) формального решения по методу Фурье задачи (1)–(4) в случае краевых условий (2)–(3) при $\beta = -1$, $\alpha = 0$ сходится почти всюду по x и t, и для его суммы верно $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду по $x \in [0,1]$. Более того, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$ ($\|\cdot\|_p$ — норма в L_p) при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1)–(4) при $\beta = -1$, $\alpha = 0$ для такой $\varphi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$ ($Q_T = [0,1] \times [-T,T]$).*

Таким образом, $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(4) в случае $\beta = -1$, $\alpha = 0$.

Литература

1. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка / В. А. Ильин // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 12. — С. 2059–2071.

2. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В. А. Ильин // УМН. — 1960. — Т. 15, вып 2 (92). — С. 97–154.

3. Бурлуцкая М. Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журнал вычислитель-

ной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

4. Корнев В. В. Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 7. — С. 1156–1167.

5. Хромов А. П. О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения / А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015 — Т. 15, вып 1. — С. 56–66.

6. Хромов А. П. Поведение формального решения по метод Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом /А. П. Хромов // ДАН — 2016. — Т. 467, № 4. — С. 1–4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ АСПЕКТЫ ОБОБЩЕННОЙ КЛАСТЕРНОЙ ЗАДАЧИ

А.П. Буслаев, А.В. Зернов, И.Ю. Леоненко (Москва)

1. Обобщенная кластерная модель (GCM)

Рассмотрим набор из N одинаковых контуров(окружностей). На каждой окружности введена традиционная координатная система $\varphi \in [0, 2\pi]$. Любые две окружности могут иметь общую точку — узел. Множество узлов зададим матрицей ε размера $N \times N$, где каждая i–строка содержит координаты узла i–окружности и окружности, соответствующий номеру столбца. Положим $\varepsilon_{ij} = -1$ для диагональных элементов и тех пар (i, j), где узел отсутствует. На каждой i–окружности имеется кластер – сектор длины l_i, который в общем состоянии перемещается со скоростью v_i, например, против часовой стрелки. *Основное правило движения* состоит в том, что кластеры i, j не могут одновременно занимать (i, j)–узел. В этом случае действует $FIFO$ – первый подошедший к узлу имеет приоритет, второй ожидает. В случае кратного конфликта с 2 и более числом участников разыгрывается равномерный приоритет.

Необходимо описать состояние системы на большом времени, исследовать средние характеристики в зависимости от параметров. В частных случаях задача рассмотрена в [1], [2], [3].

2. Коллапс, синергия и спектр скоростей

Назовем систему *коллапсирующий*, если не существует ни одного допустимого состояния, т.е. все размещения кластеров на контурах конфликтны, либо для любого допустимого состояния через конечное время все кластеры встают. Например, $\varepsilon_{12} = 0, \varepsilon_{13} = \pi, \varepsilon_{ij} = = \varepsilon_{ji}$

$$l = l_1 = l_2 = l_3 > \frac{3\pi}{2}. \tag{1}$$

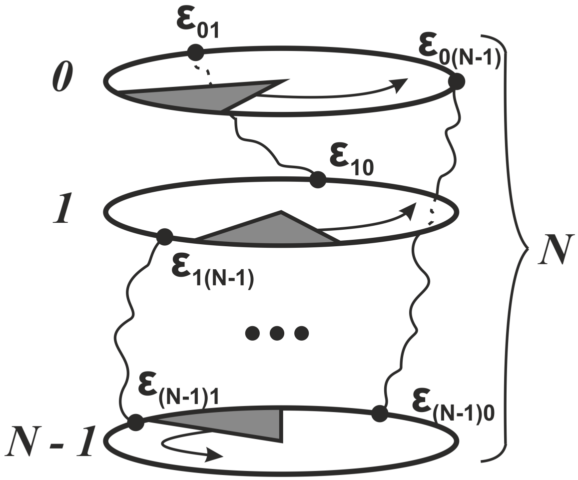


Рис. 1. Обобщенная кластерная модель

С другой стороны, состояние синхронизируется, если для любого допустимого состояния через конечное время какие-либо конфликты не встречаются. Этот эффект будет иметь место, если в предыдущем примере положить $l < \frac{\pi}{2}$. Ограничимся далее однопараметрическим семейством одинаковых кластеров l и одинаковыми скоростями $v_i \equiv 1$. В общем случае следует ожидать, что *существует спектр средних скоростей*, в котором коллапс и синергия являются крайними точками.Предлагается дать обзор по существующим априорным оценкам введенного понятия.

3. Компьютерные аспекты задачи

Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать сети разного типа, задавая количество контуров N и длину секторов l. Во время работы программа выводит значение средней скорости системы.

3.1. Потоки на сети из контуров с одним узлом (цветок). Цветок — представляет собой сеть, состоящую из N колец длины

$D = 2\pi$, с одной общей точкой (узлом) F — северный полюс. На кольце кластеры представлены в виде секторов. На каждом контуре расположен один сектор длины l. В результате моделирования для разных длин секторов l и разного количества колец N, получен следующий экспериментальный результат:*независимо от количества колец N, при $l \cdot N \leqslant 2\pi$ за время, не превышающее время прохождения сектором расстояния 3π, установится синергия.*

3.2. Потоки на торе. Задана сеть размером $N = 2m \times 2n$, состоящая из равных пересекающихся колец. Каждое кольцо имеет 4 точки пересечения с соседними кольцами. По кольцу сонаправлено перемещаются кластеры с одинаковой скоростью и одинаковой длиной l, по одному на каждом кольце.

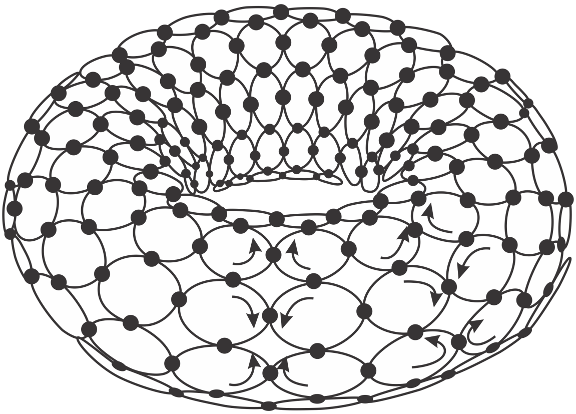


Рис. 2. Кольчуга на торе

По результатам компьютерного моделирования получен следующий экспериментальный результат: *если $l < \frac{\pi}{2}$, то за конечное время система приходит в состояние синергии*

Литература

1. Bugaev A.S, Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V., Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling, 14th International IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC-2011), Washington, USA, pp 477-481.

2. Buslaev A.P., Yashina M.V., Cluster flow of totally-connected flow with local information, International conference on computational

and mathematical methods in science and engineer-ing (CMMSE), Vol. 1, 2012, pp 225-232.

3. Buslaev A.P., Strusinskiy P.M., Computer simulation analysis of cluster model of totally-connected flows on the chain mail, New results in dependability and computer systems, Springer, 8^{th} DepCoS-RELCOMEX 2013, pp 63-71.

4. Бугаев А.С. Моделирование трафика: монотонное случайное блуждание по сети / А.С. Бугаев [и др.] // Математическое моделирование, 25:8 (2013). — С. 3–21.

5. Carlos F. Daganzo, Problem Sets: Fundamentals of Transportation and Traffic Operations, Institute of Transportation Studies, University California at Berkeley, 1998.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СВЕРТОК[1]

А.В. Васильев (Белгород)

alexvassel@gmail.com

Пусть $K(x)$ – ядро Кальдерона–Зигмунда [1], порождающее многомерный сингулярный интегральный оператор. По ядру $K(x)$ строится дискретный оператор [2]

$$(K_d u_d)(\tilde{x}) \equiv \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} K_d(\tilde{x}-\tilde{y}) u_d(\tilde{y}) h^m, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, \tag{1}$$

в пространстве $L_2(h\mathbb{Z}^m) \equiv l^2$ функций u_d дискретной переменной $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$, в предположении, что ядро $K(x)$ дифференцируемо на единичной сфере в $\mathbb{R}^m, K(0) \equiv 0$, и K_d обозначает дискретное ядро, полученное сужением ядра K на точки решетки $h\mathbb{Z}^m$.

По дискретному ядру $K_d(\tilde{x})$ построим ядро $K_{d,N}(\tilde{x})$ следующим образом. Обозначим

$$Q_N = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m), \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k| \leqslant N\},\ Q_N^h \equiv h\mathbb{Z}^m \cap Q_N,$$

определяем сужение ядра $K_d(\tilde{x})$ на Q_N^h и периодически продолжаем его на все $h\mathbb{Z}^m$. Полученное так ядро обозначим $K_{d,N}(\tilde{x})$, после чего вводим дискретный оператор $K_{d,N}$ формулой

$$(K_{d,N} u_{d,N})(\tilde{x}) \equiv \sum_{\tilde{y} Q_N^h} K_{d,N}(\tilde{x}-\tilde{y}) u_{d,N}(\tilde{y}) h^m,\ \tilde{x} \in Q_N^h \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Липецкой области (проект № 14-41-03595-р-центр-а).

Обозначим P_N оператор сужения $h\mathbb{Z}^m \longrightarrow Q_N^h$, конечномерное пространство $L_2(Q_N^h)$ обозначим l_N^2, так что P_N является проектором $l^2 \to l_N^2$.

Под величиной близости операторов K_d и $K_{d,N}$ понимается следующая операторная норма

$$||K_{d,N}P_N - P_N K_d||_{l^2 \to l_N^2}. \tag{3}$$

Оценка близости операторов (1) и (2) будет дана на конкретном элементе u_d в предположении, что $u_d(\tilde{x}) = o(|\tilde{x}|), |\tilde{x}| \to \infty$.

Теорема 1. *Для операторов K_d и $K_{d,N}$ справедлива следующая оценка*

$$||K_{d,N}P_N u_d - P_N K_d u_d||_{l_N^2} \leqslant C(h) \cdot N^{-1},$$

где $C(h) = O(1)$.

Оценки близости дискретного оператора (1) и интегрального оператора были получены ранее [3].

Если рассмотреть точное уравнение

$$a + K_d u_d = v_d \tag{4}$$

в пространстве l^2 и приближенное

$$a + K_{d,N} u_{d,N} = P_N v_d \tag{5}$$

в пространстве l_N^2,то для оценки близости решений (4) и(5) можно получить оценку (3).

Теорема 2. *Для решений уравнений* (4) *и* (5) *справедлива оценка*

$$||P_N u_d - u_{d,N}||_{l_N^2} \leqslant C(h) \cdot N^{-1}.$$

Отметим, что вопросы разрешимости уравнения (4) исследовались в [2]. Кроме этого, имеет место

Теорема 3. *Если уравнение* (4) *однозначно разрешимо для любой правой части $v_d \in l^2$, то для достаточно больших N уравнение* (5) *однозначно разрешимо для любой правой части из l_N^2.*

Литература

1. Mikhlin S. G. Singular integral operators / S. G. Mikhlin, S. Prößdorf. — Berlin, Akademie-Verlag, 1986. —528 p.

2. Vasilyev A. V. Discrete singular operators and equations in a half-space / A. V. Vasilyev, V. B. Vasilyev // Azerb. J. Math. — 2013. — V. 3, no. 1. — P. 84–93.

3. Васильев А. В. Приближенные решения многомерных сингулярных интегральных уравнений и быстрые алгоритмы их нахождения / А. В. Васильев, В. Б. Васильев // Владикавказский матем. журн. — 2014. — Т. 16, вып. 1. — С. 3–11.

О МНОГОМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА[1]

В.Б. Васильев (Липецк)
vbv57@inbox.ru

0. В работе [1] рассматривался многомерный аналог классической краевой задачи Римана для верхней и нижней комплексной полуплоскости. Решение этой задачи предлагалось в терминах волновой факторизации [1,2], которая связана с выходом в радиальные трубчатые области над конусами. Недавно было обнаружено [3], что существует периодический аналог классической краевой задачи Римана. Целью этого доклада является описание многомерного периодического аналога упомянутой многомерной задачи Римана.

1. Пусть C^m – острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $T_{per}(C^m)$
$\subset \mathbb{C}^m$ множество точек вида $z = x+iy, x \in \mathbb{T}^m, y \in C^m$. Введем пространство $A_+(\mathbb{T}^m)$ как подпространство $L^2(\mathbb{T}^m)$, состоящее из граничных значений аналитических в $T_{per}(C^m)$ функций, и определим пространство $A_-(\mathbb{T}^m)$ как прямое дополнение $A_+(\mathbb{T}^m)$ в $L^2(\mathbb{T}^m)$, так что $A_+(\mathbb{T}^m) \oplus A_-(\mathbb{T}^m) = L^2(\mathbb{T}^m)$. Формулировка многомерной периодической задачи Римана будет следующей: найти пару функций $\Phi^{\pm} \in A_{\pm}(\mathbb{T}^m)$, связанных почти всюду линейным соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}^m, \tag{1}$$

где $G(t), g(t)$ – заданные на $\mathbb{T}^m$ функции.

2. Пусть $G(t) \equiv 1$ (задача скачка).

Теорема 1. *Задача скачка имеет единственное решение для любой правой части $g \in L^2(\mathbb{T}^m)$.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Липецкой области (проект № 14-41-03595-р-центр-а).

Пример 1. В случае $m = 2$ и C^2_+ – первый квадрант на плоскости, решение задачи скачка дается формулами

$$\Phi^+(t) = \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 + i\tau_1 - t_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 + i\tau_2 - t_2}{2} g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$\Phi^-(t) = \Phi^+(t) - g(t), \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in C^2_+.$$

3. Обозначим $\pm C^m \equiv C^m_\pm$ и назовем *периодической волновой факторизацией* функции $G(t)$ ее представление в виде

$$G(t) = G_{\neq}(t) G_{=}(t),$$

где функции $G_{\neq}, G_{=}$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в $T_{per}(C^m_+)$, $T_{per}(C^m_-)$ соответственно.

Пример 2. Пусть $m = 2$ и C^2 – первый квадрант на плоскости. Если f – произвольная функция дискретного аргумента, определенная на решетке $\mathbb{Z}^2$, $f \in L^2(\mathbb{Z}^2)$, $supp\, f \subset C^m_+ \cup C^m_-$, то, очевидно,

$$f = \chi_+ f + \chi_- f,$$

где $\chi_\pm$ – характеристическая функция $C^m_\pm$. Применяя дискретное преобразование Фурье

$$f(\tilde{x}) \longmapsto \tilde{f}(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} f(\tilde{x}), \quad \xi \in \mathbb{T}^m,$$

мы получим представление $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$, причем $\tilde{f}_\pm$ допускают аналитическое продолжение в $T_{per}(C^m_\pm)$. Далее можно записать $\exp \tilde{f} = \exp \tilde{f}_+ \cdot \exp \tilde{f}_-$, и для функции $\exp \tilde{f}$ получена периодическая волновая факторизация.

4. Здесь будет приведен основной результат о разрешимости задачи (1).

Теорема 2. *Пусть* $G \in C(\mathbb{T}^m), G(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}^m$. *Если существует периодическая волновая факторизации функции* $G(t)$, *то задача* (1) *имеет единственное решение для произвольной* $g \in$ $\in L^2(\mathbb{T}^m)$.

Литература

1. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях / В. Б. Васильев // Труды ММО. — 1998. — Т. 59. — С. 73–105.

2. Васильев В. Б. Волновая факторизация эллиптических символов / В. Б. Васильев // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, вып. 5. — С. 653–667.

3. Васильев А. В. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках / А. В. Васильев, В. Б. Васильев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, вып. 5. — С. 642–649.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА[1]

Н.Д. Вервейко, М.В. Егоров (Воронеж)
ver38@mail.ru, egorovmv89@mail.ru

Уравнения динамического деформирования оболочек вращения из упруговязкопластического материала при переменном радиусе срединной поверхности представляются в виде [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial z} + c_1^2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} v \frac{\partial v}{\partial z} - 2\mu \frac{1}{\rho c} \epsilon_{zz}^p; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{12 c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12 c_2^2 k^2 \psi}{h^2} - \frac{2 c_1^2 \nu v}{R^3} \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2 v}{R^2} - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} \frac{\partial v}{\partial z}^2 + \\ + \frac{c_1^2 \nu v}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3 c_2^2}{2R^3} v^2 - 2\mu \frac{1}{\rho c} \epsilon_{rz}^p. \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1) описывает динамическое деформирование оболочки вращения из упруговязкопластического материала, где u, ψ, v — продольное перемещение, угол поворота срединной поверхности, поперечное перемещение. ϵ_{ij}^p — тензор скорости вязкопластической деформации, c — ее скорость распространения, ρ — плотность материала, μ — модуль упругости материала.

Построение уравнения переноса интенсивностей скачков функций системы (1) производятся путем перехода к подвижной системе координат $z = n - ct$ и вводятся следующие обозначения[2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - c\frac{\partial}{\partial z}; \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{\partial f}{\partial n} dn = [f]. \tag{2}$$

Последние выражения показывают связь между производной в неподвижной и подвижной(перемещающейся со скоростью c) системой координат, а также введение скачка функции в 2Δ окрестности волнового фронта.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

Система уравнений (1) представится в виде:

$$
\begin{cases}
\frac{\delta^2[u]}{\delta t^2} - 2c\frac{\delta[u_{,n}]}{\delta t} + c^2\frac{\partial^2[u_{,nn}]}{\partial z^2} = c_1^2[u_{,nn}] + \frac{c_1^2\nu}{R}[v_{,n}] - \\
-\frac{8\mu^2}{3\rho c\eta}[u_{,n}](1 - \frac{K}{\mu\sqrt{4/3[u_{,n}]^2+[v_{,n}]^2}}); \\
\frac{\delta^2[\psi]}{\delta t^2} - 2c\frac{\delta[\psi_{,n}]}{\delta t} + c^2\frac{\partial^2[\psi_{,nn}]}{\partial z^2} = c_1^2[\psi_{,nn}] - \frac{12c_2^2k^2[v_{,n}]}{h^2}; \\
\frac{\delta^2[v]}{\delta t^2} - 2c\frac{\delta[v_{,n}]}{\delta t} + c^2\frac{\partial^2[v_{,nn}]}{\partial z^2} = c_2^2k^2[v_{,nn}] + c_2^2k^2[\psi_{,n}] - \\
-\frac{c_1^2\nu}{R}[u_{,n}] + +\frac{c_1^2\nu}{2R}[v_{,n}]^2 - \\
-\frac{2\mu}{\rho c\eta}(1/3\mu[v_{,n}] - \lambda[u_{,n}])(1 - \frac{K}{\mu\sqrt{4/3[u_{,n}]^2+[v_{,n}^2]}}).
\end{cases}
\qquad (3)
$$

Последовательное рассмотрение уравнений (3) на поверхностях Σ_1 $z = c_1t + const$ b $z = c_2t + const$ и дифференцирование системы уравнений (3) приводят задачу к последовательности обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка различающихся только правой частью. Решение соответствующих уравнений позволяет построить решение для продольного, сдвигового перемещения и угла поворота срединного сечения в виде степенного ряда Тейлора с точностью до третьего порядка:

$$y = y_0 + y^{'}n + y^{''}\frac{n^2}{2} + y^{'''}\frac{n^3}{6}. \qquad (4)$$

Литература

1. Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах / А. Я. Сагосонян. — М. : Наука, 1985. — 416 с.

2. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко // ВГУ. — 1997. — 204 с.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЕГЭ В УДМУРТСКОМ ГОСУНИВЕРСИТЕТЕ

Ю.Г. Галиакберова, Н.В. Латыпова (Ижевск)

yiliana17@mail.ru

Цель данной работы — провести статистический анализ результатов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в Институт математики, информационных технологий и физики Удмуртского госуниверститета в 2015 году. Для статистической обработки данных используется коэффициент корреляции Пирсона. Формула коэффициента корреляции Пирсона для двух выборок имеет вид:

$$r_{XY} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}},$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — выборки, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

В 2015 году прием в ИМИТиФ осуществлялся по результатам ЕГЭ по таким предметам, как математика, русский язык и третий экзамен в зависимости от направления подготовки: физика (46%) от общего числа зачисленных, или информатика и ИКТ (35%), или химия (9%), или обществознание (10%).

Был проведен статистический анализ результатов ЕГЭ по каждому направлению по отдельности с помощью коэффициента Пирсона. Но разброс полученных значений коэффициента Пирсона достаточно большой, чтобы сделать определенные и однозначные выводы. Видимо, здесь необходим дополнительный аппарат для исследования. Если провести соответствующий анализ по всем студентам института в зависимости от третьего экзамена, то получаются следующие результаты, представленные в таблицах ниже.

	Математика	Русский язык	Физика
Математика	—	0.355	0.510
Русский язык	0.355	—	0.409
Физика	0.510	0.409	—

	Математика	Русский язык	Информатика
Математика	—	0.580	0.555
Русский язык	0.580	—	0.450
Информатика	0.555	0.450	—

	Математика	Русский язык	Химия
Математика	—	0.030	0.298
Русский язык	0.030	—	0.195
Химия	0.298	0.195	—

	Математика	Русский язык	Обществознание
Математика	—	-0.271	-0.240
Русский язык	-0.271	—	0.079
Обществознание	-0.240	0.079	—

Все представленные результаты статистически значимы. Общая классификация корреляционных связей r имеет вид: при $|r| > 0.70$ — сильная или тесная связь; $0.50 < |r| < 0.69$ — средняя связь; $0.30 < |r| < 0.49$ — умеренная связь; $0.20 < |r| < 0.29$ — слабая связь; $|r| < 0.19$ — очень слабая связь. Заметим, что r измеряется в интервале от -1 до $+1$. Знак r означает, увеличивается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (положительный r), или уменьшается ли одна переменная по мере того, как увеличивается другая (отрицательный r). Результаты по математике теснее связаны с результатами по информатике или физике (средняя связь). Если сравнивать результаты по математике и русскому языку, то наибольший коэффициент Пирсона получился у той выборки, где третий экзамен был информатика.

Общий вывод можно сделать следующий: чем выше средний и проходной баллы у направления, тем больше коэффициент Пирсона. Другими словами, тот, кто привык учиться хорошо, он успешен, как правило, по большинству предметов, и мотивирован был сдать ЕГЭ как можно лучше.

Литература

1. Асанов М. О. Статистическая обработка данных результатов ЕГЭ и первой сессии в институте математики и компьютерных наук УрФУ / М. О. Асанов, Л. И. Бродская, А. Ю. Коврижных // Математика и информационные технологии в естественно-научном образовании : сб. научных трудов. — Тюмень : Изд-во ТюмГУ, 2014. — С. 25–29.

ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕИ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Р.Т. Галусарьян (Обнинск)

galusarian@iate.obninsk.ru

Вычислять предел отношения двух бесконечно больших многочленов целых степеней не сложно и, как правило, большинство студентов успешно справляются с этой задачей. Однако при вычислении предела отношения бесконечно больших многочленов с иррациональными слагаемыми (будем называть их многочленами с дробными степенями) у большинства студентов возникают осложнения, так как в этом случае требуется высокая техника преобразования иррациональных выражений, которой они не владеют. В этой статье рассматривается метод, с помощью которого можно вычислять предел отношения многочленов с дробными степенями почти так же легко, как и предел отношения многочленов с целыми степенями.

Рассмотрим этот метод.

1. *Предел отношения многочленов целых степеней* Рассмотрим два многочлена от $\boldsymbol{x}$ степени $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно, т.е.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$,

$Q_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k$.

Будем рассматривать предел отношения этих многочленов при $x \to \infty$.

Теорема 1.*Предел отношения двух бесконечно больших многочленов равен пределу отношения их главных членов, т.е.*:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} == \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^k} = \frac{a_0}{b_0} \lim_{x\to\infty} x^{n-k}. \tag{1}$$

Главный член-слагаемое с большим показателем степени.

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^k(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_k}{x^k})} = \frac{a_0}{b_0} \lim_{x\to\infty} x^{n-k},$$

что и требовалось.

Из теоремы 1 следует:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n < k, \\ sgn(\infty)\frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n > k. \end{cases} \tag{2}$$

Применим доказанную теорему и выведенные формулы (1) и (2) при вычислении пределов

Пример 1. Найти пределы:

$$a) \lim_{x\to\infty} \frac{5x + x^2 - 3x^3 + 2}{4x^3 + x + 5}, b) \lim_{x\to\infty} \frac{x - 5x^2 + 4}{x^3 + 3}, c) \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 2x^3 + 5}.$$

Решение. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+x^2-3x^3+2}{4x^3+x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3}{4x^3}=-\frac{3}{4}.$

$b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-5x^2+4}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2}{x^3}=0,$

$c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{x^2-2x^3+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{-2x^3}=-\infty\,.$

Напомним, что обычно эти пределы вычисляются так.

В числителе и в знаменателе выносят $\boldsymbol{x}$ в наивысшей степени и после соответствующего сокращения находят предел. Можно также все члены числителя и знаменателя разделить на $\boldsymbol{x}$ в наивысшей степени. Вычислим эти пределы традиционным методом.

Пример 1a. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+x^2-3x^3+2}{4x^3+x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}-3+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(4+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=-\frac{3}{4},$$

т.к. x^3 сокращается, а слагаемые $\frac{5}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ стремятся к нулю.

Сравнение показывает, что традиционный способ более громоздкий даже при вычислении сравнительно легких пределов. Преимущество нового метода еще более значительно при вычислении предела отношения многочленов с дробными степенями.

2. *Отношения многочленов с дробными степенями*

Следует отметить, что формулы (1) и (2) справедливы не только для многочленов целой степени, но и для многочленов дробной степени, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^a}=0$ для любого $a>0$.

Идея вычисления предела здесь такая же. Необходимо определить степень (целую или дробную) каждого слагаемого в числителе и в знаменателе и оставить в числителе и в знаменателе главные члены, которые содержат $\boldsymbol{x}$ в наивысшей степени.

Посмотрим, как это делается на примерах.

Пример 2. Найти пределы.

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^6+1}-\sqrt[3]{8x^2+5}+\sqrt{x+4}}{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt{25x^3+7}},\text{б)}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^3+1}}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+5}},$$

$$\text{в)}\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^{x-1}-7\cdot 5^{x-1}}{8\cdot 5^x+3\cdot 4^{x-2}},\text{г)}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+2x+1)}{\ln(x^8+4x^5+3)}.$$

Решение:

а) Определяем степень каждого слагаемого в числителе и в знаменателе. В числителе три слагаемых соответственно степени: $\frac{6}{4}=$ $=\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}$. Следовательно, степень числителя равна $\frac{3}{2}$, а главный член в числителе равен

$\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}} = 2x^{\frac{3}{2}}$. Аналогично, главный член в знаменателе $-\left(25x^3\right)^{\frac{1}{2}} = -5x^{\frac{3}{2}}$. Имеем по формулам (1) и (2):

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16x^6+1} - \sqrt[3]{8x^2+5} + \sqrt{x+4}}{\sqrt[4]{x^5+2} - \sqrt{25x^3+7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{-5x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{5},$$

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^3+1}}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{-x^{\frac{2}{3}}} = -\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{12}} = -\infty.$$

Вычисление последних двух пределов отношений многочленов с дробными степенями мы выполнили с помощью формул (1) и (2) почти так же легко, как и вычисляли пределы из ***Примера 1.*** для отношения многочленов с целыми показателями.

Чтобы окончательно убедиться в преимуществе предложенного метода, следует вычислить хотя бы один из рассмотренных пределов обычным традиционным методом .

Решим традиционным методом ***Пример 1а.***

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16x^6+1} - \sqrt[3]{8x^2+5} + \sqrt{x+4}}{\sqrt[4]{x^5+2} - \sqrt{25x^3+7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^6}} - 2x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{8x^2}} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{x^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^5}} - 5x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{7}{25x^3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(2\sqrt[4]{1+\frac{1}{16x^6}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{6}}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{8x^2}} + \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^5}} - 5\sqrt{1+\frac{7}{25x^3}}\right)} = -\frac{2}{5},$$

т.к. вынесенные множители сокращаются, а второе и третье слагаемые в числителе и первое слагаемое в знаменателе$\to 0$.

Безусловно, такое решение следует сопровождать более подробным пояснением, чтобы большинство студентов могло понять это решение.

Рассмотренный пример, думается, убедительно доказывает преимущество нового метода.

Теперь перейдем к решению оставшихся двух пределов.

Для решения примера в) докажем теорему о пределе отношения линейных комбинаций показательных функций.

Теорема 2. *Предел отношения линейных комбинаций показательных функций при $x \to \infty$ равен пределу отношения их главных членов, то есть:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_1 a_1^x+\alpha_2 a_2^x+...+\alpha_n a_n^x}{\beta_1 b_1^x+\beta_2 b_2^x+\cdots+\beta_k b_k^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha a^x}{\beta b^x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x$$

где $a=\max a_i, b=\max b_i$. Здесь $\alpha,\beta-$коэффициенты соответствующих членов, все $a_i>1, b_i>1$.
Доказательство. Для простоты будем считать, что $a=a_1, b=b_1$.
Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_1 a_1^x+\alpha_2 a_2^x+\cdots+\alpha_n a_n^x}{\beta_1 b_1^x+\beta_2 b_2^x+\cdots+\beta_k b_k^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_1 a_1^x\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x+\cdots+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\cdot\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^x\right)}{\beta_1 b_1^x\left(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^x+\cdots+\frac{\beta_k}{\beta_1}\cdot\left(\frac{b_k}{b_1}\right)^x\right)}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x.$$

Т.к. $a_2<a_1,\cdots,a_n<a_1, b_2<b_1,\cdots,b_k<b_1$,
то все функции $\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^x$ и $\left(\frac{b_i}{b_1}\right)^x$ стремятся к нулю при $x\to\infty$.Теорема доказана.
Из теоремы следует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_1 a_1^x+\alpha_2 a_2^x+\cdots+\alpha_n a_n^x}{\beta_1 b_1^x+\beta_2 b_2^x+\cdots+\beta_k b_k^x}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x=$$

$$=\begin{cases}0,\text{если } a_1<b_1\\ \frac{\alpha_1}{\beta_1},\text{если } a_1=b_1\\ \infty,\ \text{если } a_1>b_1\end{cases}$$

Теперь решим ***Пример 2в.*** с помощью теоремы 2.
Имеем:

$$\text{в)}\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^{x-1}-7\cdot 5^{x+1}}{8\cdot 5^x+3\cdot 4^{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7\cdot 5^{x+1}}{8\cdot 5^x}=-\frac{35}{8}.$$

Обычно этот пример решают так:

$$\text{в)}\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 3^{x-1}-7\cdot 5^{x+1}}{8\cdot 5^x+3\cdot 4^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\cdot\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}-7\cdot 5\right)}{5^x\cdot\left(8+3\cdot 4^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)}=-\frac{35}{8},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0.$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+2x+1)}{\ln(x^8+4x^5+3)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x^3}{\ln x^8} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\ln x}{8\ln x} = \frac{3}{8}$.
Как видите, идея о главном старшем члене здесь также дает быстрое решение. Обычно этот предел находят так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+2x+1)}{\ln(x^8+4x^5+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{8\ln x + \ln\left(1+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^8}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\ln x}\right)\ln x}{\left(8+\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^8}\right)}{\ln x}\right)\ln x} = \frac{3}{8}.$$

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ДВУХ СВЯЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

А.В. Глушко, А.С. Рябенко, А.С. Черникова (Воронеж)
mail@angl.ru, alexr-83@yandex.ru, chernikova-an@mail.ru

На протяжении последних лет ведется активное исследование тепловых процессов в материалах с трещинами. К работам в этом направлении относятся статьи [1]-[4], в которых асимптотическими методами изучается температурное поле и распределение тепловых потоков в окрестности трещин. В настоящей работе рассматривается задача трансмиссии о стационарном распределении температуры в плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, заполненных различными материалами с экспоненциальными коэффициентами внутренней теплопроводности. Граничные условия моделируют наличие конечной трещины на стыке полуплоскостей. Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_2^2} + k_p\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x\in\mathbb{R}^2_{sgn\,(3-2p)},\ p=1;2, \quad (1)$$

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}, \quad (3)$$

где k_1, k_2 – произвольные положительные константы, функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, финитны с носителями, содержащимися в отрезке $[-1;1]$, и удовлетворяют равенствам $q_p(-1) = q_p(1) = q_p'(-1) = q_p'(1) = 0$, $p = 0;1$.

Определение. Решением задачи (1)-(3) назовем пару функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданных соответственно на $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ и $\overline{\mathbb{R}^2_-}$, таких что $u_1(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^2_+\right) \cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$, $u_2(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^2_-\right) \cap C^1\left(\overline{\mathbb{R}^2_-}\right)$, которые в обычном смысле удовлетворяют уравнениям (1), условиям (2) и (3), и такие, что функции $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$ ограничены на $\mathbb{R}^2_+$, функции $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}$ – на $\mathbb{R}^2_-$, функции $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_1x_2}\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2 \geqslant \delta > 0$, функции $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}$, $e^{0,5k_2x_2}\dfrac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}$ – при $x_2 \leqslant -\delta < 0$, функция $e^{0,5k_1x_2}u_1(x)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2_+)$, функция $e^{0,5k_2x_2}u_2(x)$ – пространству $L_1(\mathbb{R}^2_-)$, а функции $u_1(x_1,+0)$, $u_2(x_1,-0)$, $\dfrac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}$ существуют и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, где δ – произвольная константа.

В работе [5] было построено явное представление решения задачи (1)-(3), однако, вопрос единственности решения не был рассмотрен. Последним результатом изучения задачи (1)-(3) стало доказательство следующей теоремы.

Теорема. Решение задачи (1)-(3) единственно.

Литература

1. Глушко А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

2. Черникова А. С. Об асимптотике вблизи границ решения задачи о стационарном распределении тепла в плоскости с крестообразной трещиной / А. С. Черникова // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весенней матем. школы «Понтрягинские чтения – XXII». — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. — С. 205–207.

3. Рябенко А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с тре-

щиной / А. С. Рябенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 187–194.

4. Глушко А. В. Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова, А. С. Рябенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — Москва, 2015. — Т. 55, № 4. — С. 695–703.

5. Глушко А. В. О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 111–134.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ И НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф.В. Голованева, О.М. Родионова (Воронеж)

gfainav@mail.ru

В работе обсуждается разрешимость нелинейной краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = F'_\sigma(x,u); \\ u(0) = 0; \\ u'(\ell) + u(\ell)|u(\ell)|^p = 0, \quad (p > 1). \end{cases} \tag{1}$$

Получены достаточные условия разрешимости (1).

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой $\varrho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x,u)$ σ-абсолютно непрерывны (при каждом фиксированном u) на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x \in \overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$. Решение (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

В точках $\xi \in S(\sigma)$ уравнение понимается следующим образом:

$$-\Delta(pu')(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta v(\xi)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Отметим, что нелинейные уравнения с производными по мере изучались в работах [1; 2]. После выхода работы Ю.В. Покорного [3] в 1999 году, качественная теории краевых задач с негладкими решениями получила толчок к бурному развитию (см., например, работы [3]–[7]).

Литература

1. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

2. Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

3. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

4. Pokornyi Yu.V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

5. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

7. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

ОБ ОДНОЙ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Н.И. Головко, М.Б. Давыдова (Воронеж)
nadushka1991@mail.ru

В работе используется метод поточечной трактовки уравнения с использованием производных по мере, который был предложенный в [1], и показавший свою эффективность: для линейных краевых задач второго порядка построена точная параллель классической теории ОДУ [2], [3], для нелинейных уравнений доказаны нелинейные теоремы сравнения [4], для нелинейных краевых задач — достаточные условия существования ненулевого решения [5], изучению уравнений четвертого порядка посвящены работы [6], [7]. В данной работе мы применяем этот подход к изучению математической модели, возникающей при описании малых свободных колебаний системы, состоящей из стержня, один конец которого имеет упругое закрепление и на нем закреплена пружина, реагирующая исключительно на поворот, а к другому припаяна натянутая струна. Второй конец струны имеем упругое закрепление. Вся система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ; на системе распределена масса (допускаются сосредоточенные массы). Кроме того, учитывается трение. Подобные системы изучались в работе [8].

Через $[0;l]$ обозначим отрезок вдоль которого расположена система; ξ — точка соединения стержня и струны. Будем предполагать, что колебания происходят в одной плоскости, перпендикулярно положению равновесия. Если $u(x,t)$ означает отклонение точки x от положения равновесия в момент времени t, то малые колебания описываются математической моделью

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)u''_{tt} - hu'_t(x,t) = (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma, \\ -pu''(0,t) + \gamma_1 u'(0,t) = 0, \\ (pu'')'(0,t) - ru'(0,t) + \gamma_2 u(0,t) = 0, \\ ru'(l,t) + \gamma_3 u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x),\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \qquad (1)$$

где $M(x)$ – это масса участка $[0;x)$; σ – мера, порождаемая строго возрастающей функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности рассматриваемой системы — точки, в которых имеются сосредоточенные массы, локализованные особенности (типа пружин) у внешней среды; коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого сделан стержень, и равен нулю при $x \geqslant \xi$; $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x при $\geqslant \xi$, и сила натяжения стержня при $x < \xi$, положителен на $[0;l]$; σ-производная функции $\Psi(x)$ понимается следующим образом: функция $\psi(x)$ – σ-производная функции $\Psi(x)$, если для всех $x \in [0;l]\backslash S(\sigma)$ справедливо равенство $\Psi(x) - \Psi(0) = \int\limits_0^x \psi(s)d\sigma$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$; функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальные отклонение и скорость соответственно.

Решение модели (1) мы ищем в E — классе непрерывных на прямоугольнике $[0;l] \times [0;T]$ функций, каждая из которых дважды непрерывно дифференцируема по переменной t при каждом фиксированном x; абсолютно непрерывна на $[0;l]$ для постоянного t; производная u'_x — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi;l]$, абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$; u''_{xx} и $(pu''_{xx})'_x$ — абсолютно непрерывны и σ-абсолютно непрерывны на $[0;\xi]$ соответственно.

Пусть выполнены следующие вполне физические условия: $M(x), r(x)$ и $Q(x)$ – σ-абсолютно непрерывны на $[0;l]$ и $p(x)$ - абсолютно непрерывна на $[0;l]$, $M'_\sigma(x) > 0$ и $Q'_\sigma(x) \geqslant 0$.

В точках разрыва ξ_i функции $\sigma(x)$, которые лежат левее точки ξ, уравнение интерпретируется как равенства $u(\xi_i - 0, t) = u(\xi_i + 0, t), u'_x(\xi_i - 0, t) = u'_x(\xi_i + 0, t), (pu''_{xx})(\xi_i - 0, t) = (pu''_{xx})(\xi_i + 0, t)$ и $\Delta M(\xi_i)u''_{tt}(\xi_i, t) - hu'_t(\xi_i, t) = \Delta(pu''_{xx})'_x(\xi_i, t) - \Delta(ru'_x)(\xi_i, t) + u(\xi_i, t)\Delta Q(\xi_i)$, в точках $\xi_i > \xi$ – $u(\xi_i - 0, t) = u(\xi_i + 0, t)$, $\Delta M(\xi_i)u''_{tt}(\xi_i, t) = -\Delta(ru'_x)(\xi_i, t) + u(\xi_i, t)\Delta Q(\xi_i)$, в самой точке ξ – $u(\xi_i - 0, t) = u(\xi_i + 0, t)$, $(pu''_{xx})(\xi) = 0$, $\Delta M(\xi)u''_{tt}(\xi, t) = -(pu''_{xx})'_x(\xi - 0, t) - (ru'_x)(\xi + 0, t) + u(\xi, t)\Delta Q(\xi)$, где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Для математической модели (1) удалось получить достаточные условия однозначной разрешимости.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный Ю.В. осцилляционная теория Штурма–лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishchenko // Mathematical Notes. — 2007. — V. 82, No. 3–4. — P. 518–521.

4. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

5. Баев А.Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А.Д. Баев, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

6. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

7. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

8. Иванникова Т.А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

БИФУРКАЦИИ НЕТРИВИАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.О. Голубенец (Ярославль)
golubenets2010@yandex.ru

Логистическое уравнение с запаздыванием (уравнение Хатчинсона) играет важную роль в математической биологии при моделировании динамики популяций животных. В работе рассматривается уравнение Хатчинсона с запаздыванием, зависящим от искомой функции:

$$\dot{N} = rN\left[1 - N(t - T(N(t)))\right]. \tag{1}$$

Здесь $r > 0$ – параметр. Предполагается ограниченность рассматриваемых решений $N(t)$ при $t \geqslant 0$ некоторой константой $M > 0$, положительность и ограниченность сверху константой $T_1 > 0$ во всей области определения аналитической функции $T(N)$. Также без ограничения общности предполагается, что $T(1) = 1$. Класс функций

$$C_M(X) = \{\psi(t)| \quad \psi(t) \in C(X), \quad |\psi| \leqslant M\},$$

где $X = [-T_1, 0]$, рассматривается в качестве фазового пространства уравнения (1).

Уравнение (1) имеет два состояния равновесия: $N_0 \equiv 0$ и $N_* \equiv 1$. Также решения $N(t)$ этого уравнения обладают важным свойством: если $N(0) > 0$, то $N(t) > 0$ при всех $t > 0$. В статье [1] подробно изучена локальная динамика этого уравнения. Показано, что при переходе параметра r через критическое значение $\pi/2$ положительное состояние равновесия теряет устойчивость. Характер потери устойчивости зависит от свойств функции $T(N)$. Найдено необходимое и достаточное условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в окрестности состояния равновесия N_* и показано что в случае, если это условие не выполнено, происходит жесткая потеря устойчивости. Также полученные резльтаты распространены на более общее нелинейное уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции.

В настоящей работе исследуется случай жесткой потери устойчивости. В качетсве запаздывания $T(N)$ выбрана следующая функция:

$$T(N) = \frac{1+\mu}{\mu+N}, \quad 0 < \mu \ll 1. \tag{2}$$

В силу выше отмеченного свойства о положительности решений уравнения (1) так выбранная функция $T(N)$ положительна и ограничена. Доказано, что при всех достаточно малых значениях параметра μ эта функция не удовлетворяет условию реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в (1). Таким образом в уравнении (1) с запаздыванием вида (2) может происходить только жесткая потеря устойчивости при переходе параметра r через критическое значение $\pi/2$.

С помощью численного моделирования выявлена возможность существования при $r > \pi/2$ у уравнения (1) устойчивого периодического нелокального решения релаксационного типа.

Для аналитического изучения данной ситуации исходное уравнение посредством перенормировок времени и замен переменных сведено к виду

$$\dot{N} = \lambda \left[1 - \mu N \left(t - \frac{1+\mu}{1+N} \right) \right], \tag{3}$$

где $\lambda = r/\mu$ – большой параметр. Для исследования уравнения (3) применяется метод большого параметра (см., например, [2]).

Литература

1. Голубенец В. О. Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В. О. Голубенец // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, № 5. — С. 711–722.

2. Кащенко С. А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона / С. А. Кащенко // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 32–61.

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЯКОБИ[1]

Д.В. Горбачев, В.И. Иванов (Тула)

dvgmail@mail.ru, ivaleryi@mail.ru

Пусть $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$, $\alpha > -1/2$, $\rho = \alpha + \beta + 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\Delta(t) = 2^{2\rho}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}$ — гиперболический вес, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(a,b,c;z) = {}_2F_1(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho+i\lambda}{2}, \frac{\rho-i\lambda}{2}; \alpha+1; -(\operatorname{sh} t)^2\Big)$$

— функция Якоби, являющаяся собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d}{dt}\Big(\Delta(t)\,\frac{d}{dt}\,\varphi_\lambda(t)\Big) + (\lambda^2+\rho^2)\Delta(t)\varphi_\lambda(t) = 0,\ \varphi_\lambda(0) = 1,\ \frac{d}{dt}\,\varphi_\lambda(0) = 0,$$

$$c(\lambda) = \frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1}|c(\lambda)|^{-2},$$

$$d\mu(t) = \Delta(t)\,dt, \quad d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda.$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00308) и Минобрнауки России (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

Прямое и обратное преобразования Якоби задаются равенствами

$$Jf(\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi_\lambda(t)\,d\mu(t),\quad J^{-1}g(t)=\int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\,d\sigma(\lambda).$$

Пусть θ, $r>0$, $\lambda(f)=\sup\{t>0\colon f(t)>0\}$. Мы решаем следующие экстремальные задачи для преобразования Якоби:

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$\Lambda_D(\theta,r)=\sup J^{-1}g(0),$$

если $g\in L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C(\mathbb{R}_+)$, $g(0)=1$, $g(\lambda)\leqslant 0$ $(\lambda\geqslant r)$, $\operatorname{supp}J^{-1}g\subset[0,\theta]$, $J^{-1}g\geqslant 0$.

Задача Дельсарта решена только при некотором дополнительном соотношении между параметрами θ и r.

Задача Логана I. Для действительных функций вычислить величину

$$\Lambda_L^1(\theta)=\inf\lambda(g),$$

если $g\in L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C(\mathbb{R}_+)$, $g\not\equiv 0$, $J^{-1}g\geqslant 0$, $\operatorname{supp}J^{-1}g\subset[0,\theta]$.

Задача Логана II. Для действительных функций вычислить величину

$$\Lambda_L^2(\theta)=\inf\lambda(g),$$

если $g\in L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C(\mathbb{R}_+)$, $g\not\equiv 0$, $J^{-1}g\geqslant 0$, $J^{-1}g(0)=0$, $\operatorname{supp}J^{-1}g\subset[0,\theta]$.

Задача Бомана. Вычислить величину

$$\Lambda_B(\theta)=\inf\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если $\lambda^2 g\in L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma)$, $g\in C(\mathbb{R}_+)$, $g\geqslant 0$, $\operatorname{supp}J^{-1}g\subset[0,\theta]$ и $J^{-1}g(0)=1$.

Все задачи являются экстремальными задачами для целых функций экспоненциального типа. Общие оценки в них получаются с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функции Якоби, точных для целых функций экспоненциального типа. Экстремальные функции строятся с помощью задачи Штурма–Лиувилля и оператора обобщенного сдвига на полупрямой с гиперболическим весом.

Ранее аналогичные экстремальные задачи были решены нами для преобразования Ганкеля.

Литература

1. Горбачев Д.В. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа / Д.В. Горбачев, В.И. Иванов // Матем. сборник. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 63–98.

О МОДЕЛЯХ АКУСТИКИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

С.А. Гриценко (Белгород)

sv.a.gritsenko@gmail.com

Исследуются модели акустических процессов в неоднородных средах для трех различных конфигураций. В каждой конфигурации рассматриваемая область состоит из двух компонент. В первой конфигурации композитная среда Q состоит из некоторого упругого тела $\Omega^{(s)}$ и пороупругой области Ω. Во второй конфигурации композитная среда Q состоит из некоторой жидкой области $\Omega^{(f)}$ и пороупругой области Ω. И, наконец, в третьей конфигурации рассматриваются две различные пороупругие области Ω и G. Рассматриваемая область Q представляет собой единичный куб, пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1)\times(0,1)\times(0,a),\ 0 < a < 1$, упругое тело $\Omega^{(s)}$ ($\Omega^{(f)}$, или G) есть открытое дополнение к Ω: $Q = \Omega\cup\Omega^{(s)}\cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega\cap\partial\Omega^{(s)}$, или $Q = \Omega\cup\Omega^{(f)}\cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega\cap\partial\Omega^{(f)}$, или $Q = \Omega\cup G\cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega\cap\partial G$.

Все модели основаны на классических аксиомах механики сплошной среды и являются достаточно точными, однако содержат быстро осциллирующие коэффициенты. Например, для третьей конфигурации движение смеси в области Ω описывается системой уравнений:

$$\Big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\Big)\, p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

$$\big(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbb{P} + \varrho^\varepsilon\mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}\big(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\big) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}. \tag{3}$$

Движение смеси в области G описывается системой уравнений:

$$\Big(\frac{\chi_0^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi_0^\varepsilon}{\big(\bar{c}_s^{(0)}\big)^2}\Big)\, p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{10}$$

$$\left(\varrho_f \chi_0^\varepsilon + (1-\chi_0^\varepsilon)\varrho_s^{(0)}\right)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^{(0)} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \qquad (11)$$

$$\mathbb{P}^{(0)} = \chi_0^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\big) + (1-\chi_0^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}, \qquad (12)$$

где χ_0^ε – характеристическая функция жидкой части G_f^ε in в пороупругой области G:

$$\chi_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_0\big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\big).$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются обычные условия непрерывности перемещений и нормальных компонент моментов.

Задача завершается однородными условиями на границе $S = \partial Q$ и однородными начальными условиями.

Во всех конфигурациях исследуется разрешимость начально-краевой задачи и выводятся усредненные модели, не содержащие быстро осциллирующих коэффициентов. Вывод усредненных уравнений проводится на основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга. Используется предположение о периодичности структуры среды. Для каждой отдельной компоненты предельные режимы уже известны, результаты изложены, например, в работах [1], [2]. Основная проблема состоит в условиях на общей границе между двумя различными компонентами. В статье [3] выводятся усредненные модели для конфигурации "упругое тело – пороупругая среда". Работы [4], [5] посвящены выводу усредненных моделей для конфигурации "жидкость – пороупругая среда".

Литература

1. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization.// SIAM J. Math. Anal., 2008, 40, N3, P. 1272–1289.

2. Meirmanov, A. Acoustics equations in elastic porous media // Siberian journal of industrial mathematics, 2010, XIII, 2, P. 98–110.

3. Герус А. А. Модель акустики в конфигурации упругое тело – пороупругая среда / А. А. Герус, С. А. Гриценко // Научные ведомости БелГУ. Серия : Математика. Физика. — 2014. — № 25 (196). Вып. 37. — С. 68–75.

4. Герус А. А. Усреднение математической модели акустики / А. А. Герус,С. А. Гриценко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 3. — С. 264–272.

5. Мейрманов А. М. Усредненные модели изотермической акустики в конфигурации «жидкость–пороупругая среда» /

А. М. Мейрманов, С. А Гриценко, А. А. Герус // Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Вып. 13. — С. 49–74. DOI: 10.17377/semi.2016.12.005 http://mi.mathnet.ru/semr656.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

И.А. Губанова (Воронеж)
irinagubanowa@mail.ru

Рассматривается управляемая система в банаховом пространстве E вида

$$x^{'}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), u(t)) \qquad (1)$$

при предположениях:

1. $A : D(A) \subseteq E \to E$ замкнутый линейный оператор, порождающий сильно непрерывную полугруппу непрерывных операторов e^{At}.

2. Функция $f(\cdot, x, u) : [0, T] \to E$ измерима для любого $(x, u) \in \in E \times E_1$, где E_1 -банахово пространство управлений.

3. $\|f(t, x_1, u) - f(t, x_0, u)\| \leqslant k(t) \|x_1 - x_0\|$ для любого $x_0, x_1 \in \in E, u \in E_1$, где $k \in L^1_0([0, T])$.

4. Отображение $f(t, \cdot, \cdot) : E \times E_1 \to E$, непрерывно для почти всех $t \in [0, T]$.

Траекторией данной управляемой системы называется функция вида:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s), u(s))ds,$$

где $u(s) \in U(s, x(s))$ для почти всех $s \in [0, T]$ и $U : [0, T] \times E \multimap E_1$ — многозначное отображение обратной связи.

Для заданной управляемой системы рассматривается следующая задача оптимального быстродействия. Пусть заданы компактное множество $M \subset E$ начальных состояний системы и задана многозначная целевая функция $\Omega : [0, T] \multimap E$.

Теорема 1. Пусть существует хотя бы один момент времени $t^{'} \in [0, T]$, в который некоторая траектория $x(t)$, выходящая из множества M достигнет целевую функцию $x(t^{'}) \in \Omega(t^{'})$. Тогда существует такая траектория $\tilde{x}(t)$ системы (1), выходящая из множества M, для которой $\tilde{x}(t_*) \in \Omega(t_*)$, где $t_* = infQ$, $Q \in [0, T]$ — множество всех моментов достижимости из множества M.

Литература

1. *Kamenskii M., Obukhovskii V. and Zecca P.*, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin — New-York, 2001.

О ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ (РОСТЕ) РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ[1]

В.Н. Денисов (Москва)

vdenisov2008@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши в $\overline{D} = R^N \times [0, \infty)$

$$\Delta u + c_\alpha(x)u - u_t = 0, \quad \text{в} \quad D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$c_\alpha(x) \geqslant 0, x \in R^N, \tag{3}$$

$u_0(x)$ заданная начальная функция из класса единственности решений задачи Коши (1), (2).

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) дестабилизируется, если существует предел

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = +\infty, \tag{4}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N

Существование предела (4) существенно зависит от младшего коэффициента параболического уравнения и от начальной функции.

Обзор ряда работ по дестабилизации от решений параболических уравнений содержится в работе [1].

В случае наличия неограниченных младших коэффициентов у параболических уравнений второго порядка, дестабилизация изучалась в работах M.Krzyzanski [2], P.Besala, P.Fife [3], T.Kuzano [4], T.Kuroda, Lu-San-Chen [5].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-00471)

Теорема 1. *Если $N = 1$ или $N = 2$, и $c_\alpha(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$c_\alpha(x) \geqslant \alpha^2 \max(0, \mathrm{sgn}(1 - |x|), \alpha \neq 0, \tag{5}$$

то для любой неотрицательной, ограниченной и непрерывной функции $u_0(x)$, решение задачи (1), (2) дестабилизируется.

Пусть коэффициент $c_\alpha(x)$ определен по формуле

$$c_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^2 \min(1, r^{-2}) \text{ при } N = 1, \\ \alpha^2 \min(e^{-2}, r^{-2}(\ln r)^{-2}) \text{ при } N = 2, r = |x|. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 2. *Если для коэффициента $c_\alpha(x)$ выполнено неравенство*

$$\alpha^2 > \frac{1}{4}, \tag{7}$$

то при любой непрерывной, ограниченной, неотрицательной функции $u_0(x)$ решение задачи (1), (2) является дестабилизирующим.

Теорема 3. *Пусть $N = 1$ и коэффициент $c_\alpha(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$c_\alpha(x) \geqslant \begin{cases} \alpha^2, r \leqslant 1, \alpha \geqslant \alpha_0 > 0 \\ \frac{\alpha^2}{r^\lambda}, r > 1, 0 < \lambda < 2 \end{cases} \tag{8}$$

тогда решение задачи (1), (2) при любой непрерывной, ограниченной неотрицательной функции $u_0(x)$ является дестабилизирующимся.

Теорема 4. *Если $N \geqslant 3$ и коэффициент $c_\alpha(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$c_\alpha(x) \geqslant \alpha^2 \min(1, r^{-2}) \text{ при } \alpha^2 > \left(\frac{N-2}{2}\right)^2, \tag{9}$$

то при любой непрерывной, ограниченной, неотрицательной функции $u_0(x)$ решение задачи (1), (2) дестабилизируется.

Замечание. Теоремы 1-4 переносятся на случай суперпараболических задач вида

$$\Delta v + q(x,t)v - v_t \leqslant 0, (x,t) \in D, \tag{10}$$

$$v(x, 0) = u_0(x). \tag{11}$$

если коэффициент $q(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$q(x,t) \geqslant c_\alpha(x), \tag{12}$$

где для $c_\alpha(x)$ и $u_0(x)$ выполнены соответствующие условия теорем 1-4.

Литература

1. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени / В. Н. Денисов // УМН. — 2005. — Т. 60, № 4. — С. 145–212.

2. Krzyzanski M. // Ann. Polon. Math. —1962. — V. 12. – P. 209–214.

3. Besala P. and Fife P. // Annali. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1966. — V. 20. — P. 719–732.

4. Kusano T. // Funcialaj Ekvacioj. —1968. — V. 11. — P. 169–174.

5. Kuroda T. and Lu-San-Shen // Annali. Polon. Math. — 1970. — V. 23. — P. 57–64.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ СПЕКТРА ИНДЕФИНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

М.С. Денисов (Воронеж)

denisov.m.1981@gmail.com

В работе рассматриваются линейные операторы, связанные с индефинитным дифференциальным выражением: $\mathcal{L} = \frac{1}{w}l$, где вещественная, локально интегрируемая функция $w \neq 0$ принимает значения разных знаков. Дифференциальное выражение l может иметь следующий вид:

$$l = -\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$$

$$l = -\sum_{n}^{j,k=1} \frac{d}{dx_j}a_{jk}\frac{d}{dx_k} + a$$

и действует на интервале вещественной оси или на области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, соответственно. В первом случае функции p^{-1} и q вещественны и локально интегрируемы. Во втором случае вещественнозначная функция $a \in L^\infty(\Omega)$, а коэффициенты $a_{jk} \in C^\infty$ такие, что выражение l формально симметрическое и равномерно эллиптическое на Ω, функция w и ее обратная существенно ограничены.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-05315-а).

Некоторые виды граничных условий вместе с дифференциальным выражением $\mathcal{L}$ порождают индефинитный дифференциальный оператор A, самосопряженный в пространстве Крейна. В работе получены критерии вещественности спектра оператора A, выраженные в условиях на коэффициенты соответствующих дифференциальных выражений l.

Литература

1. Азизов Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов. — М. : Наука, 1986. — 424 с.

2. Костенко А. С. Спектральный анализ индефинитных операторов Штурма–Лиувилля / А. С. Костенко // Функц. анализ и его прил., 48:3 (2014). — С. 88–92.

3. Behrndt J. Bounds on the non-real spectrum of differential operators with indefinite weights/ J. Behrndt, F. Philipp, C. Trunk // Mathematische Annalen, Volume 357, Issue 1, pp. 185-213.

О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА-ФАВАРА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ[1]

Е.Е. Дикарев (Воронеж)

heiligenkreuz@gmail.com

В 1935 году Х. Бором [1] было доказано неравенство (оценка нормы интегрального оператора) $\|Jx\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2n}\|x\|_\infty = \frac{\pi}{2n}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\big|x(t)\big|$ для любой непрерывной 2π–периодической функции с рядом Фурье вида $x(t) \sim \sum\limits_{|k|\geqslant n} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$, и интеграла $Jx = J_n x = \sum\limits_{|k|\geqslant n} \frac{1}{\mathrm{i}k} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, получена оценка нормы $\|J_n\|$ оператора интегрирования в подпространстве $\mathrm{C}_{2\pi,n}(\mathbb{R})$ банахова пространства $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ периодических периода 2π функций, спектр которых лежит вне интервала $(-n, n)$. Полученная оценка является точной, т. е. $\|J_n\| = \frac{\pi}{2n}$. Затем эта оценка была распространена Ж. Фаваром [2] и Б. М. Левитаном [3] на почти периодические функции.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 1110).

в $\mathcal{X}$, и $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление (изометрическая группа операторов), генератором которой является оператор $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

В работе [4] была получена оценка

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\pi}{2\operatorname{dist}\bigl(0, \sigma(A)\bigr)},$$

которая является неулучшаемой в классе всех сильно непрерывных изометрических представлений.

Рассматривается сильно непрерывное представление $T\colon \mathbb{R} \to \to \operatorname{End}\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, с генератором $\mathrm{i}A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Определение 1. *Спектром Бёрлинга вектора* x из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathcal{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(\mathcal{X})$ банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля $(\mathcal{X}, T)$ представим в виде $\Lambda(\mathcal{X}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$ непересекающихся замкнутых множеств σ_0 и σ_1, где σ_0 — компактное множество. Тогда $\mathcal{X}$ представимо в виде $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\sigma_0) \oplus \mathcal{X}(\sigma_1)$. Это разложение осуществляют проекторы P_0, $P_1 = I - P_0$ (т. е. $\operatorname{Im} P_k = \mathcal{X}(\sigma_k)$, $k = 0, 1$), где проектор P_0 определяется формулой $P_0 x = f_0 x$, $x \in \mathcal{X}$, т. е. $P_0 = T(f_0)$, где f_0 — любая функция из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством: $\widehat{f_0} = 1$ в некоторой окрестности σ_0 и $\widehat{f_0} = 0$ в некоторой окрестности σ_1, причём $\|P_0\| \leqslant \inf\limits_f \|f\|$, где инфимум берётся по всем функциям f с указанным свойством для f_0.*

Оценка из пункта 4 следующей теоремы является аналогом неравенства Бора-Фавара:

Теорема 2. *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(y)$ вектора y из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ – модуля (X, T) не содержит нуля. Тогда существует единственный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$ такой, что: 1) $\Lambda(x) \subset \Lambda(y)$; 2) $x \in \mathrm{D}(A)$; 3) $Ax = y$; 4) $\|x\| \leqslant \dfrac{\pi}{2\operatorname{dist}\bigl(0, \Lambda(y)\bigr)}\|y\|$.*

Литература

1. Bohr H. Ein allgemeinerung Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynomials / H. Bohr // Prace Math. Fiz. – 1935. – V. 43. – P. 273–288.

2. Favard J. Application de la formule sommatoire d'Euler á la démonsration de quclques propertietés extrémales des intégrales des fonctions péeriodiques on presque-périodiques / J. Favard // Mat. Tidskr. — 1936. — P. 81–95.

3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — 205 с.

4. Баскаков А. Г. О неравенствах Бора-–Фавара для операторов / А. Г. Баскаков, К. А. Синтяева // Изв. вузов. Матем. — 2009. — № 12. — С. 14–21.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ РАНГА ДВА

Р.О. Дронов, А.В. Авилов (Воронеж)

dronov.r96@gmail.com

Пусть $A : X \longrightarrow X$ – линейный оператор ранга два, действующий в конечномерном линейном пространстве X. Тогда он представим в виде $Ax = \xi_1(x)c + \xi_2(x)d$, для любого вектора $x \in X$, где $c, d \in X, \xi_1, \xi_2 \in X^*$ – линейно независимые векторы и функционалы. Тогда имеют место следующие утверждения. Они формулируются с использованием матрицы

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \xi_1(c) & \xi_2(c) \\ \xi_1(d) & \xi_2(d) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Ненулевые собственные значения оператора A являются собственными значениями оператора A_0, в частности, они являются корнями характеристического многочлена $\mathcal{P}_0$ матрицы $\mathcal{A}_0$, т. е. многочлена*

$$\mathcal{P}_0(\lambda) = (\xi_1(c) - \lambda)(\xi_2(d) - \lambda) - \xi_2(c)\xi_1(d) = \lambda^2 - (\xi_1(c) + \xi_2(d))\lambda + \\ + \xi_1(c)\xi_2(d) - \xi_2(c)\xi_1(d).$$

Теорема 2. *Спектр оператора $A : X \longrightarrow X$ ранга два включает в себя не более трех собственных значений(см. [1]), причем сумма алгебраических кратностей ненулевых собственных значений не превосходит двух.*

Теорема 3. *Для того, чтобы спектр оператора $A : X \longrightarrow X$ являлся нулевым ($\sigma(A) = \{0\}$), или, что эквивалентно, нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:*

$$\begin{cases} \xi_1(c) + \xi_2(d) = 0, \\ \xi_1(c)\xi_2(d) - \xi_2(c)\xi_1(d) = 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Для того, чтобы спектр оператора* $A : X \longrightarrow \longrightarrow X$ *был двухточечным, необходимо и достаточно, чтобы* $(\xi_1(c) + \xi_2(d))^2 - 4(\xi_1(c)\xi_2(d) - \xi_2(c)\xi_1(d)) = 0$ *и* $\xi_1(c) + \xi_2(d) \neq 0$. *Ненулевое состевенное значение в данном случае будет иметь вид:*

$$\frac{\xi_1(c) + \xi_2(d)}{2}.$$

Теорема 5. *Пусть спектр оператора* A *состоит из трех точек* $(\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\})$. *Тогда он может быть представлен в виде:*

$$A = \lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2,$$

где λ_1, λ_2 *– собственные значения, а* P_1, P_2 *– соответствующие проекторы, определяемые формулами:*

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1(c) + \xi_2(d) + \sqrt{(\xi_1(c) + \xi_2(d))^2 - 4(\xi_1(c)\xi_2(d) - \xi_2(c)\xi_1(d))}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\xi_1(c) + \xi_2(d) - \sqrt{(\xi_1(c) + \xi_2(d))^2 - 4(\xi_1(c)\xi_2(d) - \xi_2(c)\xi_1(d))}}{2},$$

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{A}{\lambda_1}, P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{A}{\lambda_2}.$$

Литература

1. Баскаков А. Г. Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков.— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина (Москва)
sun-ksi@mail.ru, krtaalex@gmail.com

Рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 1, \tag{1}$$

где функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, непрерывна по совокупности переменных и липшицева по последним двум аргументам. В случае $p = p(x)$ классификация решений получена И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурией в работе [1]. Также И.В. Асташовой в [2] получена асимптотическая классификация решений квазилинейных уравнений второго порядка. Асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (1) приведена в [3].

При получении классификации существенным является вопрос о поведении решений на границе области определения.

Определение. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения (1), $a < \infty$ — граничная точка его области определения. Решение $y(x)$ называется *влипающим в* $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to a} |y(x)| = C, \quad -\infty < C < +\infty.$$

С использованием методов, изложенных в работах [4, 5, 6], получено достаточное условие на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при котором все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (1) влипают в $x = a$, где $a < \infty$ — граничная точка области определения. Также получено достаточное условие на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при котором все рассматриваемые решения имеют вертикальную асимптоту.

Лемма 1. *Пусть существует константа $m > 0$, такая, что $p(x,\, u,\, v) \geqslant m$. Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условию $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$ (соответственно, $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$). Тогда существует значение*

x^*, $x_0 < x^* < +\infty$ (соответственно, x_*, $-\infty < x_* < x_0$), для которого

$$\lim_{x\to x^*} |y'(x)| = +\infty \qquad \left(\textit{соответственно},\ \lim_{x\to x_*} |y'(x)| = +\infty\right).$$

Если же $y(x_0)y'(x_0) = 0$, то существуют значения x_* и x^*, $-\infty < x_* < x_0 < x^* < +\infty$, для которых

$$\lim_{x\to x^*} |y'(x)| = \lim_{x\to x_*} |y'(x)| = +\infty.$$

Без ограничения общности исследуем поведение нетривиальных максимально продолженных решений уравнения (1) вблизи правой границы области определения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и существует такая константа $M > 0$, что $p(x, u, v) \leqslant M$ при $x > x_0$, $u > u_0$, $v > v_0$. Тогда прямая $x = x^*$, существование которой утверждается в лемме 1, является вертикальной асимптотой.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и существует такая константа $C_1 > 0$, что $p(x, u, v) \leqslant C_1|v|^2$ при $x > x_0$, $u > u_0$, $v > v_0$. Тогда прямая $x = x^*$, существование которой утверждается в лемме 1, является вертикальной асимптотой.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, и существуют константы $\varepsilon > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что $p(x, u, v) \geqslant C_2|v|^{2+\varepsilon}$ при $x > x_0$, $u > u_0$, $v > v_0$. Тогда любое нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1) является влипающим в прямую $x = x^*$, существование которой утверждается в лемме 1.*

Установленные выше результаты являются достаточными условиями, но не необходимыми.

Пример 1.

$$y'' = (y')^2\, |\ln|y||\, |y|^k \operatorname{sgn} y.$$

Любое максимально продолженное решение уравнения при достаточно больших положительных начальных данных имеет вертикальную асимптоту.

Пример 2.

$$y'' = \frac{|y'|^{2+\varepsilon}}{|\ln|y'||}\, |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad \varepsilon > 0.$$

Любое максимально продолженное решение уравнения при достаточно больших положительных начальных данных является влипающим в прямую $x = x^*$, существование которой утверждается в лемме 1.

Литература

1. Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. — М. : Наука, 1990.

2. I. Astashova On asymptotic behavior of solutions to a quasilinear second order differential equation — Functional Differential equations, Ariel, v .16, No 1, p. 93-115, 2009.

3. Дулина К.М. Асимптотическая классификация решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом / К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2015. — № 6 (128). — С. 50–56.

4. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И. В. Асташовой. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 22–288.

5. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений / И. В. Асташова // Известия РАН. — 2008. — Т. 72, № 6. — С. 103–124.

6. Дулина К.М. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка / К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения. — М. : МЭСИ, 2014. — С. 18–27.

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СИРКАРА–ПАПАНИКОЛАУ[1]

М.М. Дышаев, В.Е.Федоров (Челябинск)
MikhailDyshaev@gmail.com, kar@csu.ru

В последние годы все большее внимание исследователей в теории финансовых рынков привлекают различные обобщения модели Блэка–Шоулса [1], более адекватные реальным процессам, протекающим на финансовых рынках. Одной из наиболее общих моделей этого класса является модель Сиркара–Папаниколау [2]

$$\begin{gathered} C_t + r(xC_x - C) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x))}{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x)) - \rho x C_{xx}}\right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

которая позволяет количественно оценить эффекты обратной связи, возникающей между ценами актива и производных инструментов. Здесь t — время, x — цена акции, C — цена опциона, σ — волатильность акции, ρ — отношение количества хеджируемых опционов к общему числу единиц базового актива в предложении на рынке, V — обратная функция к функции U, которая задает в модели функцию спроса D реферальных трейдеров относительно предложения равенством $U(y^\delta/x) = D(x, y)$ в предположении, что последняя не зависит от t.

В работе проведена групповая классификация уравнения (1) и показано, что оно имеет трехмерную алгебру Ли, которая расширяется до четырехмерной в случаях экспоненциальной и степенной функции V и в случаях, приводимых к названным преобразованиями эквивалентности уравнения (1), которые также вычислены. Для допускаемых однопараметрических групп уравнения (1) вычислены инвариантные решения, которые расширены до некоторых многопараметрических семейств решений, инвариантных относительно всей допускаемой группы уравнения.

Во первых, заметим, что модель (1) при всех V, для которых $V(1 - A\rho) \neq 0$, имеет решение $C(t, x) = Ax + Be^{rt}$, где A и B — произвольные константы.

Уравнение

$$C_t + \frac{\sigma^2 x^2 C_{xx}}{2\left(1 - \beta\rho x C_{xx}\right)^2} + r(xC_x - C) = 0, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

соответствует функции $V(1-\rho C_x) = Ge^{\beta(1-\rho C_x)}$ при постояннх G и $\beta \neq 0$ (иначе мы имеем классическое линейное уравнение Блэка–Шоулса). В этом случае имеем

$$U(z) = \frac{1}{\beta}\ln\frac{z}{G} = \frac{1}{\beta}\ln z + H, \quad D(x,y) = \frac{\delta}{\beta}\ln y - \frac{1}{\beta}\ln x + H,$$

где H — константа, зависящая от произвольной константы G. Тогда вычисленные инвариантные решения принадлежат семейству решений уравнения (2)

$$C(t,x) = Ax + Be^{rt} + Kx\ln|x| - K\left(r + \frac{\sigma^2}{2(1-K\beta\rho)^2}\right)tx,\ K \neq \frac{1}{\beta\rho},$$

с константами A, B, K, инвариантному относительно допускаемой группы уравнения (2).

Функции $V(1-\rho C_x) = G(1-\rho C_x)^\beta$ соответствуют

$$U(z) = \left(\frac{z}{G}\right)^{1/\beta} = Hz^{1/\beta}, \quad D(x,y) = Hy^{\delta/\beta}x^{-1/\beta}$$

и модель

$$C_t + \frac{\sigma^2 x^2 C_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta\rho x C_{xx}}{1-\rho C_x}\right)^2} + r(xC_x - C) = 0.$$

Она имеет точные решения (при $A \neq 0$)

$$C(t,x) = Ae^{rt}\left(\ln|x| + \frac{\sigma^2 t}{2(1-\beta)^2} - rt + B\right) + \frac{1}{\rho}x, \quad \beta \neq 1;$$

$$C(t,x) = Ae^{t\left(\frac{\sigma^2\alpha(1-\alpha)}{2(\beta(\alpha-1)+1)^2} + r(1-\alpha)\right)}|x|^\alpha + Be^{rt} + \frac{1}{\rho}x,\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 - \frac{1}{\beta}.$$

Литература

1. Black F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.

2. Sircar K. R. General Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies / K. R. Sircar, G. Papanicolaou // Applied Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 5. — P. 45–82.

ГРАФ-РЕШЁТКА

Я.М. Ерусалимский (Ростов-на-Дону)
erusim@mail.ru

Рассмотрена задача о количестве путей длины n, выходящих из вершин графа. Доказано, что количество таких путей, выходящих из начала координат, равно $4 \cdot (2^n - 1)$, из остальных вершин, лежащих на координатных осях – $2^{n+1} - 1$, а из вершин, лежащих внутри квадрантов, – 2^n.

Эта же задача рассмотрена в случае ограничений на достижимость двух типов: смешанной и магнитной (см. [1]), когда ограничения порождены либо вертикальными, либо горизонтальными дугами графа-решётки.

Рассмотрена также задача о случайных блужданиях по вершинам графа-решетки без ограничений на достижимость и при наличии ограничений. В первом случае этот процесс является Марковским, а при наличии ограничений на достижимость он таковым не является. Полученные результаты являются развитием результатов работы [2].

Литература

1. Ерусалимский Я. М. Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

2. Ерусалимский Я. М. Случайные блуждания по графу-решётке и комбинаторные тождества (электронный ресурс) / Я. М. Ерусалимский // Инженерный вестник Дона. — 2015. — № 2, ч. 2. — Режим доступа : www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2964

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»

А.А. Ершова (Липецк)
ebox1975@mail.ru

В содержание школьного математического образования по новым ФГОС наряду с традиционными для школы разделами включены два дополнительных раздела: логика и множества, математика в историческом развитии. Поэтому курс математической логики и теории алгоритмов в настоящее время призван не только познакомить будущего учителя математики с основными понятиями и методами математической логики и теории алгоритмов, но и научить оперировать ими в сфере его педагогической деятельности.

Повышение качества подготовки будущего учителя математики связано с организацией контроля и проверки усвоения учебного материала. Одним из основных дидактических средств, активизирующих учебную деятельность (в том числе и самостоятельную), является регулярная проверка знаний, умений. Главная цель этой проверки – приучить студентов к систематическим занятиям, своевременному выполнению всех заданий, выявить пробелы в знаниях, трудности в усвоении материала.

В курсе математической логики и теории алгоритмов проверка проводится на каждом практическом занятии, ей отводится до 20% времени всего занятия. Для проверки используются письменные блиц - опросы, блиц – тесты. Блиц – опросы позволяют проверить усвоение теории и ее использование в школьном курсе. Обычно блиц-опрос содержит два задания: один проверяет теорию, второй – применение этого материала на практике (решение соответствующей задачи из школьного учебника [1], который содержит раздел «Язык и логика»). Каждое задание оценивается в баллах. Все студенты, неудовлетворительно выполнившие задания оперативной проверки, обязаны получить консультацию у преподавателя или консультанта темы, исправить допущенные ошибки.

Наряду с оперативной проверкой в курсе проводится тестирование по завершению каждого раздела. Эти тесты являются рубежными. В них содержатся задания открытого и закрытого типов, задания на соответствия, на установление последовательности. Для того, чтобы пройти рубежное тестирование, студент должен справиться с 90% заданий. Рубежное тестирование позволяет проверить степень овладения учебным материалом.

На занятиях по курсу, кроме современных средств оценивания, используются и традиционные методы контроля, например, аудиторные и домашние самостоятельные и контрольные работы. Из самостоятельных работ используются как индивидуальные, так и групповые. Индивидуальные самостоятельные работы в большей степени ориентированы на оценивание знаний и умений, групповые же самостоятельные работы позволяют формировать и оценивать уровень сформированности компетенций, например, коммуникативную: способность к сотрудничеству и работе в группе.

Для подготовки студентов к рубежному тестированию студентам предлагается индивидуальная самостоятельная работа: выбрать одно из заданий и защитить его в аудитории. Примерами заданий могут служить: создание по разделу кроссворда, шпаргалки, презентации.

По курсу вместо экзамена проводится итоговое тестирование.

Итак, учебный процесс по курсу должен быть построен таким образом, чтобы преподаватель имел возможность систематически контролировать, корректировать и оценивать деятельность студентов.

Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Покорный Ю. В. Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 59, вып. 3. — С. 115–150.

3. Зубова С. П. Решение начальной задачи для уравнения с нетеровым оператором под знаком производной / С. П. Зубова, Е. В. Раецкая // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : Научная книга, 2014. — С. 70–71.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

А.А. Жидков, К.А. Стрижак (Нижний Новгород)
kseniya.blinnicheva@gmail.com

Исследование электромагнитных процессов в атмосфере Земли является в настоящее время актуальной задачей [1], поскольку учёт грозовых явлений позволит существенно уточнить современные климатические модели [2]. Развитие вычислительной техники и появление новых алгоритмов приближённого решения расширяет возможности при построении погодных и климатических моделей и позволяет учесть множество процессов, протекающих в атмосфере Земли. Однако в вопросе применимости той или иной модели важным является доказательство разрешимости (существования и единственности решения) выбранной постановки задачи.

В настоящей работе изучаются математические постановки задачи моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. В данных постановках изучаются квазистационарные электромагнитные процессы в электрическом приближении. В этом случае предполагается, что магнитное поле меняется достаточно медленно [3]. Тогда классическая система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,t)+\frac{4\pi}{c}\Big(\sigma(x)\vec{E}(x,t)+\vec{J}^{\text{ст}}(x,t)\Big)=\mathrm{rot}\vec{H}(x),\quad \mathrm{rot}\vec{E}(x,t)=0.$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – электрическое и магнитное поле, σ – проводимость среды, $\vec{J}^{\text{ст}}$ – вектор напряжённости сторонних токов (известная функция); $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$.

В рассматриваемой постановке область Ω представляет собой шаровой слой в трёхмерном пространстве, граница которого имеет две компоненты связности.

В работе были рассмотрены две постановки задачи для определения скалярного потенциала электрического поля ($\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi$). В первом случае пренебрегается магнитным полем Земли, а граница исследуемой области считается идеально проводящей, то есть

$$\varphi|_{\partial\Omega_1}=\varphi|_{\partial\Omega_2}=0.$$

Во втором случае считается, что центр Земли является эффективным диполем, поэтому могут быть использованы следующие граничные условия:

$$\varphi|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \varphi(x) = \varphi(x^*),\ x, x^* \in \partial\Omega_2,$$

где x, x^* – сопряжённые точки на поверхности $\partial\Omega_2$. Считается, что полные токи, протекающие через сопряжённые точки равны по величине и противоположны по знаку.

В работе для приведённых постановок задач получены интегральные тождества, позволяющие для исследования эффективно использовать аппарат функционального анализа [4]. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения поставленных задач в соответствующих функциональных пространствах.

Литература

1. Мареев Е. А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи / Е. А. Мареев // УФН. — 2010. — Т. 180, № 5. — С. 527–534.

2. Дымников В. П. Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов / В. П. Дымников. — М. : ИВМ РАН, 2007. — 283 с.

3. Hays P. B. A quasi-static model of global atmospheric electricity. Part 1. The lower atmosphere / P. B. Hays, R. G. Roble // J. of Geophys. Research. — 1979. — Vol. 84, No A7. — Pp. 3291–3305.

4. Жидков А. А. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. — 2009. — № 4. — С. 123–129.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А.В. Заборский, А.В. Нестеров (Москва, Обнинск)
andrenesterov@yandex.ru

Настоящая работа является продолжением работ [1],[2],[3], в которых исследовались асимптотики по малому параметру решений сингулярно возмущенных систем уравнений и дифференциально-операторных уравнений в частных производных в критическом случае [4].

Строится асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения

$$\varepsilon^2(U_t + \sum_{i=1}^{N} D_i(p)U_{xi}) = L_pU + \varepsilon F(U,p), \tag{1}$$

$$\|\bar{x}\| < \infty, t > 0, p_1 \leqslant p \leqslant p_2, \tag{2}$$

$$U(\bar{x},0) = U^0(\bar{x},p,\varepsilon) \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ — малый параметр, решение $U(\bar{x},t,p)$ как функция переменной p принадлежит линейному пространству C непрерывных по p на $[p_1,p_2]$ функций со скалярным произведением $(f_1(p),f_2(p))$, $D_i(p)$ непрерывны по p и удовлетворяют условиям $|D_i(p)| \geqslant D_0 > 0$, линейный оператор L_p $\{L_p : C \to C\}$ действует по переменной p. Оператор L_p имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$ с собственной функцией $h_0(p)$, и остальные — с отрицательными вещественными частями $\Re e\lambda < 0$. Сопряженный с L_p оператор L_p^*, очевидно, так же имеет однократное собственное значение $\lambda = 0$ с собственной функцией $h_0^*(p)$. На оператор L_p налагается так же ряд дополнительных условий [3]. Гладкая по U и непрерывная по p функция $F(U,p)$ удовлетворяет условию

$$(F(U,p),h_0^*(p)) = 0. \tag{4}$$

Начальные условия заданы в виде узкой гладкой „шапочки“: $U^0(\bar{x},\varepsilon) = \omega\left(\dfrac{\bar{x}}{\varepsilon}, p\right)$, $|\omega^{(k)}(\bar{z},p)| \leqslant Ce^{-\sigma\|\bar{z}\|^2}$ равномерно по переменной p, $\forall k = 0, 1, \dots,\ \|\bar{z}\| < \infty, \sigma > 0$.

Отметим, что в задаче (1)–(3) при условии (4) выполняется закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{|\bar{x}|<\infty} (U, h_0^*)d\bar{x} = 0. \qquad (5)$$

Отметим, что задача (1)–(3) может возникать при линеаризации различных уравнений (уравнений типа Больцмана, переноса нейтронов и т. д) на известном решениии с учетом квадратичных (по малости отклонения) поправок.

Поведение решения задачи (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$ и конечных (x_i, t): $|x_i|, t \sim O(1)$ эквивалентно поведению решения в дальней зоне (при $|x_i| \to \infty, t \to \infty$) аналогичной задачи без малого параметра.

Асимптотическое разложение по малому параметру (АР) решения задачи (1)–(3) имеет вид

$$U(\bar{x},t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta},t,p) + p_i(\bar{\xi},\tau,p)) + R = U_N + R, \qquad (6)$$

где U_N – АР решения, R – остаточный член, $\bar{\xi} = \bar{x}\varepsilon^{-1}$, $\tau = t\varepsilon^{-2}$, $\zeta_i = \dfrac{x_i - v_i t}{\varepsilon}$, $v_i = (D_i h_0, h_0^*)$.

Старший член АР (6) имеет вид $s_0(\bar{\zeta},t,p) = \varphi_0(\bar{\zeta},t)h_0(p)$, где $\varphi_0(\bar{\zeta},t)$ есть решение задачи Коши

$$\varphi_{0t} = \sum_{i,j=1}^{N} M_{ij}\varphi_{0\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^{N} \left(F_{i,ef}(\varphi_0)\right)_{\zeta_i}, \qquad (7)$$

$$\varphi_0(\bar{\zeta},0) = (\omega\left(\bar{\zeta},p\right), h_0(p)), \qquad (7a)$$

коэффициенты M_{ij} и функции $F_{i,ef}(\varphi_0)$ выражаются через данные задачи. Требуется, чтобы квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n M_{ij}\zeta_i\zeta_j$ была положительно определенной (или полуопределенной). Получены задачи для определения всех членов разложения (6). Доказана равномерная оценка остаточного члена:

Теорема 1. *При наложенных на данные задачи (1)–(3) условиях существуют* $T > 0, \epsilon_0 > 0$*, такие, что для всех* $0 < \epsilon < \epsilon_0$ *решение задачи (1)–(3) существует* $\forall\, \|\bar{x}\| < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T, p_1 \leqslant p \leqslant p_2,$

единственно, представимо в виде (6), в котором остаточный член R удовлетворяет неравенству

$$R = O(\epsilon^{N+1}).$$

Решение задачи (1)-(3) вне зоны погранслоя $t \sim O(1)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ имеет вид:

$$U(\bar{x}, t, \varepsilon) = s_0(\bar{\zeta}, t, p) + O(\varepsilon) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p) + O(\varepsilon), \qquad (8)$$

где $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ есть решение задачи (7),(7a).

При положительно определенной (или полуопределенной) квадратичной форме $\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\zeta_i\zeta_j$ уравнение (7) параболическое (вырожденное параболическое). Соответственно асимптотически эволюция решения в дальней зоне будет иметь „псевдодиффузионный“ характер, обусловленный уравнением (5). Матрица квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\zeta_i\zeta_j$, определяющей тип уравнения (5), может иметь нулевые собственные значения. Вдоль собственных векторов, отвечающих нулевым собственным значениям, „псевдодиффузия“ не происходит.

При квадратичной зависимости $F(U, p)$ по переменной U уравнение (7) имеет вид многомерного уравнения Бюргерса, так как $F_{i,ef}(\varphi_0)$ тоже квадратично зависят от переменной φ_0.

Литература

1. Нестеров А. В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с несколькими пространственными переменными в критическом случае / А. В. Нестеров, Т. В. Павлюк // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 3. — С. 450–462.

2. Заборский А. В. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенного диференциально-операторного уравнения нелинейного уравнения в критическом случае / А. В. Заборский, А. В. Нестеров // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 4. — С. 65–79.

3. Заборский А. В. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенного диференциально-операторного уравнения нелинейного уравнения с переменными коэффициентами / А. В. Заборский, А. В. Нестеров // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 1. — С. 117–131.

4. Васильева А. Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. М. : Изд-во МГУ, 1978. — 262 с.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА[1]

Д.А. Закора (Воронеж, Симферополь)
dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую малые движения вязкоупругого тела, закрепленного на границе (см. [1]):

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \Big(\frac{c_0}{2}\Delta\vec{u} + \big(\widetilde{c}_0 + \frac{c_0}{6}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big) - \\ - \sum_{l=1}^{m}\int_0^t c_{-l}\exp\big(-b_l(t-s)\big)\Big(\frac{1}{2}\Delta\vec{u} + \frac{1}{6}\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big)\,ds - \\ - \sum_{l=1}^{n}\int_0^t \widetilde{c}_{-l}\exp\big(-\widetilde{b}_l(t-s)\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\,ds + \rho\vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x) = \vec{u}^1, \tag{2}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega)$ — поле смещений в вязкоупругом теле, $\rho = \rho(x)$ — плотность тела $(0 < \rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2)$, $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, $\vec{u}^0 = \vec{u}^0(x)$, $\vec{u}^1 = \vec{u}^1(x)$ — начальные смещения и скорости в вязкоупругом теле, c_k, $\widetilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, b_k^{-1}, $\widetilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$c_0, \widetilde{c}_0 > 0, \quad c_{-l}, b_l > 0 \ \ (l = \overline{1,m}), \quad \widetilde{c}_{-l}, \widetilde{b}_l > 0 \ \ (l = \overline{1,n}).$$

Начально-краевая задача (1)-(2) может быть записана в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

порядка в гильбертовом пространстве с весом $H := \vec{L}_2(\Omega, \rho)$:

$$\frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = -A\vec{u}(t) + \sum_{l=1}^{m} \int_0^t c_{-l} e^{-b_l(t-s)} C\vec{u}(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_0^t \widetilde{c}_{-l} e^{-\widetilde{b}_l(t-s)} B^* B\vec{u}(s)\,ds + \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{u}'(0) = \vec{u}^1. \quad (3)$$

Определение. *Сильным решением задачи Коши (1)–(2) назовем такое поле $\vec{u}(t)$, что $\vec{u}(t) \in \mathcal{D}(A)$, $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $A\vec{u}(t)$, $A^{1/2}\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, $\vec{u}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (3) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия.*

1^0. *$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\vec{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$.*

2^0. *Числовые параметры подчинены неравенствам:*

$$\alpha := \frac{1}{2}\Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l}\Big] > 0,$$

$$\beta := \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l}\Big] - \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l} \geqslant 0.$$

Тогда задача Коши (1)–(2) (или задача (3)) имеет единственное сильное решение. Это решение экспоненциально затухает при $\vec{f}(t) \equiv 0$. При этом

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{f}(t) = \vec{f}_0 \implies \lim_{t\to+\infty} \vec{u}(t) = \vec{u}_0,$$

где поле $\vec{u}_0$ является решением следующей стационарной задачи теории упругости:

$$-\big(\alpha\Delta\vec{u}_0 + \beta\nabla\mathrm{div}\vec{u}_0\big) = \rho\vec{f}_0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \vec{u}_0 = \vec{0} \quad (\textit{на } \partial\Omega).$$

Литература

1. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — М. : Наука, 1970. — 280 с.

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМ

Ж.О. Залукаева (Воронеж)
zalukaevajoanna@yandex.ru

Рассмотрим задачу о колебаниях механической системы, состоящей из двух кусков струны единичной длины, натянутых вдоль отрезка $[-1, 1]$, на концах которого расположены пружины жесткости γ_2, прикрепленные к вертикальным спицам, по которым они могут перемещаться (без учета трения). При этом будем предполагать, что струны дополнительно соединены между собой в точке 0 пружиной жесткости γ_1. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение исследуемой системы в точке x от положения равновесия в момент времени t. Математическая модель такой задачи имеет вид

$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}, \quad -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = u'_x(-0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 1 \\ -u'_x(-1, t) + \gamma_2 u(-1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u'_x(1, t) + \gamma_2 u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что $\varphi \in C^2[-1, 0) \cup (0, 1]$, $\psi \in C^1[-1, 0) \cup (0, 1]$, $\mu_i \in C^2[0, T]$; $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(1) = \varphi''(-1) = 0$; $\varphi'(+0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$, $\varphi'(-0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$; $\psi(+0) = \psi(-0)$, $\psi'(+0) = -\psi'(-0)$, $\psi(1) = \psi(-1) = 0$.

Решение задачи (1) может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-\gamma_2(x+t)} \int\limits_0^{x+t-1} e^{\gamma_2(\alpha+1)} \underline{\mu_1}(\alpha)\, d\alpha + \dfrac{\Phi^+(x-t) + \Phi^+(x+t)}{2} + \\ + \dfrac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \Psi^+(s)\, ds, \quad x > 0 \\ e^{\gamma_2(x-t)} \int\limits_0^{-x+t-1} e^{\gamma_2(\alpha+1)} \underline{\mu_2}(\alpha)\, d\alpha + \dfrac{\Phi^-(x-t) + \Phi^-(x+t)}{2} + \\ + \dfrac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \Psi^-(s)\, ds, \quad x < 0, \end{cases}$$

где

$$\underline{\mu_i}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Найденное представление решения позволяет в явном виде выписать функции граничного управления $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, гарантирующие выполнение условий $u(x,T) = \varphi^*(x)$, $u'_t(x,T) = \psi^*(x)$. Начально-краевая задача с условиями 1 рода была ранее изучена в работе [1].

Литература

1. Зверева М.Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М.Б. Зверева, Ф.О. Найдюк, Ж.О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 111–119.

МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Ж.О. Залукаева (Воронеж)

zalukaevajoanna@yandex.ru

Исследуем вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} v''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)v'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - v(x,t)Q'_{[\sigma]}(x), \ x \in [0,\ell] \\ v(x,0) = \varphi(x), \\ v'_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

описывающей колебания разрывной струны с упруго закрепленными концами, в виде ряда Фурье по собственным функциям $\varphi_k(x)$ спектрального уравнения

$$-(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) = \lambda X(x)M'_{[\sigma]}(x), \ x \in [0,\ell]. \tag{2}$$

Заметим, что краевые условия в задачах (1), (2) представляют собой реализацию соответствующих уравнений в точках $x = 0$ и $x = \ell$.

Введем следующее обозначение:

$$LX = -(pX'_\mu)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, а $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Функции $M(x)$, $p(x)$, $Q(x)$ – $[\sigma]$-абсолютно непрерывны $[0,\ell]$. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, производные $\varphi'_\mu(x)$ и $\psi'_\mu(x)$ имеют конечное на $[0,\ell]$ изменение; функция $\dfrac{L(\varphi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ-абсолютно непрерывна и ее производная является функцией ограниченной вариации, а $\dfrac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ – μ-непрерывна на $[0,\ell]$. Тогда функция*

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right) \qquad (3)$$

является решением математической модели (1), *причем ряд* (3) *можно дифференцировать почленно по t дважды и по μ, $[\sigma]$ также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $\overline{[0,\ell]}_\mu\times[0,T]$.*

Случай непрерывных решений был ранее исследован в работе [1].

Литература

1. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

Ж.О. Залукаева (Воронеж)
zalukaevajoanna@yandex.ru

Рассмотрим математическую модель малых вынужденных поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струн, упруго соединенных между собой пружинами), расположенной вдоль отрезка $[0,\ell]$. Пусть струна дополнительно подперта пружинами на левом (в точке $x=0$) и на правом (в точке $x=\ell$)

концах.Через $u(x,t)$ обозначим отклонение изучаемой системы от положения равновесия в точке x в момент времени t.

Исследуемая задача будет иметь вид

$$\begin{cases} u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = \\ \qquad = (p(x)u'_{\mu}(x,t))'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t), x \in [0,\ell] \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

где дифференцирование понимается по "расщепленной" $[\sigma]$-мере, введенной в работе [1]. Заметим, что краевые условия непосредственно следуют из уравнения системы (1).

Решение задачи (1) будем искать в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x,t)$ является μ-абсолютно непрерывной по переменной x, при этом $u'_{\mu}(x,t)$ — функция ограниченной вариации по переменной x; функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t; функции $u'_t(x,t)$ и $u''_{tt}(x,t)$ являются функциями ограниченной вариации по переменной x. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой пары (x,t) такой, что $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ и $|t - t_0| < \delta$, верно $|u(x,t) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $F(x,t)$ – $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, причем $\inf\limits_{(0,\ell)} p > 0$; функция $M(x)$ строго возрастает на $[0,\ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Тогда математическая модель (1) в классе E имеет единственное решение.*

Случай непрерывных решений был ранее исследован в работе [2].

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН НА ГРАФЕ С ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРУЖИНОЙ В УЗЛЕ[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж)
zvereva_ m@math.vsu.ru

Пусть точки U, A_1, A_2,... A_n находятся в одной плоскости. Рассмотрим механическую систему из n струн, которые в положении равновесия совпадают с отрезками A_1U, A_2U,... A_nU. Концы струн жестко закреплены в точках A_1, A_2,... A_n и соединены между собой в узле U. При этом в узле U прикреплена "вязкоупругая" пружина (последовательно закреплены линейный упругий элемент (пружина единичной упругости) и пластичный элемент). Обозначим через $u_i(x,t)$ отклонение i-й струны от положения равновесия в момент времени t, где x — абсцисса рассматриваемой точки струны. Будем предполагать длины всех струн одинаковыми и равными l.

Математическая модель изучаемой задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T(i = 1, 2, ...n) \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(l,t) = u_1(l,t) = u_2(l,t) = ...u_n(l,t) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(l-0,t) = \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) - u'_t(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t) - \eta(t)) \\ u_i(0,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$C(t) = u(l,t) - [-r,r]$. Предполагается, что $\eta(t) \in [-r,r]$. Через $N_C(a)$ обозначен конус нормалей к C в точке a, определяемый как

$$N_C(a) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - a) \leqslant 0] \quad \forall c \in C\}.$$

Таким образом, пока суммарное натяжение струн в узле находится внутри интервала $(-r,r)$, выполняется условие упругой опоры в узле. Если же суммарное натяжение становится равным r, то "срабатывает"пластичный элемент.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00867, № 16-01-00386.

Теорема. *Решение задачи (1) существует, единственно и может быть представлено в виде* $u(x,t) = \dfrac{\Phi(x-t)+\Phi(x+t)}{2}$.

Вынужденные колебания струн с особенностями активно изучаются в различных работах, в частности в статье [1].

Литература

1. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский, С.А. Шабров (Воронеж)
zvereva_m@math.vsu.ru

В работе изучается спектральная задача

$$-pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = \lambda \int\limits_0^x ud[M] - pu'_\mu(0), \tag{1}$$

рассматриваемая на отрезке $[0,l]$, и моделирующая деформации разрывной стилтьесовской струны, упруго закрепленной на концах. Краевые условия непосредственно следуют из уравнения (1) и имеют вид

$$-p(+0)u'_\mu(+0) + u(0)\Delta^+Q(0) = \lambda u(0)\Delta^+M(0),$$

$$p(l-0)u'_\mu(l-0) + u(l)\Delta^-Q(l) = \lambda u(l)\Delta^-M(l).$$

Символами Δ^+, Δ^- обозначены правый и левый скачки в соответствующих точках. Производная u'_μ понимается как производная Стилтьеса, т.е. обращается интегралом Лебега–Стилтьеса. Обрамление $d[]$ функций $Q(x)$, $M(x)$ квадратными скобками подчеркивает, что речь идет не просто об интеграле Стилтьеса, а о его специальном расширении, введенном в работе [1].

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00867, № 16-01-00386

Теорема. *Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0,l]$, а функция $M(x)$ строго возрастает на $[0,l]$. Тогда спектр задачи (1) состоит из простых положительных собственных значений. При перенумерации его точек в порядке возрастания $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ соответствующие собственные функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ обладают следующими свойствами:*

φ_k имеет в $(0,l)$ точно k нулевых точек, являющихся узлами;

при каждом k нулевые точки φ_k и φ_{k+1} перемежаются.

Мы называем точку s нулевой точкой функции ограниченной вариации u, если $u(s-0)u(s+0) \leqslant 0$. Мы говорим, что нулевая точка ξ_1 разрыва функции u_1 лежит левее нулевой точки ξ_2 разрыва функции u_2, если

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi-0) & u_1(\xi+0) \\ u_2(\xi-0) & u_2(\xi+0) \end{vmatrix}}{(u_1(\xi+0)-u_1(\xi-0))\cdot(u_2(\xi+0)-u_2(\xi-0))} > 0.$$

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ[1]

А.В. Звягин (Воронеж)

zvyagin.a@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая задача, описывающая движение земной коры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\,\sigma + \nabla p \in F(v), \tag{1}$$

$$\sigma + \lambda_1\big(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\big) = 2\eta\big(\mathcal{E}(v) + \lambda_2(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i})\big), \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066), выполняемого в Воронежском государственном университете.

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \tag{3}$$

Здесь, $v(t,x)$ — вектор-функция скорости, $p(t,x)$ — функция давления, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij}(u))$ — девиатор тензора напряжений. Дивергенция $\operatorname{Div}\sigma$ тензора σ является вектором с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_j = \sum\limits_{i=1}^{n}(\partial\sigma_{ij}/\partial x_i)$. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v)), \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, обозначим тензор скоростей деформации, $\eta > 0$ — вязкость среды, λ_1 — время релаксации и λ_2 — время запаздывания; v_0 и σ_0 — начальные значения.

Правая часть F многозначное отображение $F : W_1 \multimap L_2(0,T;V')$ $(W_1 = \{u : u \in L_2(0,T;V), u' \in L_1(0,T;V')\})$ — функционал управления, удовлетворяющий следующим условиям: (i_1) F — определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; (i_2) F — полунепрерывно сверху и компактно; (i_3) F — глобально ограничено; (i_4) F — слабо замкнуто.

Определение 1. *Пара функций $v \in W_1$ и $\sigma \in W_2$ ($W_2 = \{u : u \in L_2(0,T;L_2(\Omega)), u' \in L_2(0,T;H^{-2})\}$) называется слабым решением с обратной связью задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальным условиям и выполнены равенства*

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) + (\sigma,\nabla\varphi) - \sum_{i=1}^{\infty}(v_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) = \langle f,\varphi\rangle,$$

$$(\sigma,\Phi) + \lambda_1\frac{d}{dt}(\sigma,\Phi) - \lambda_1\sum_{i=1}^{n}(v_i\sigma, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}) =$$

$$= -2\eta(v,\operatorname{Div}\Phi) - 2\eta\lambda_2\left(\frac{d}{dt}(v,\operatorname{Div}\Phi) + \sum_{i=1}^{n}(v_i\mathcal{E}(v), \frac{\partial\Phi}{\partial x_i})\right),$$

для всех $\varphi \in V$, $\Phi \in C_0^\infty$ и функций f, удовлетворяющих условию обратной связи $f \in F(v)$.

Теорема 1. *Пусть* многозначное отображение F удовлетворяет условиям (i_1)–(i_4). Тогда существует слабое решение с обратной связью задачи (1)–(3).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times W_2$ множество всех слабых решений задачи (1)–(3). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям: (j_1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,\sigma) \geqslant \gamma$ для всех $(v,\sigma) \in \Sigma$. (j_2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1, $\sigma_m \rightharpoonup \sigma_*$ в W_2, то $\Phi(v_*,\sigma_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m,\sigma_m)$.

Теорема 2. *Пусть* выполнены условия Теоремы 1 и пусть функционал Φ удовлетворяет условиям (j_1)–(j_2), тогда задача оптимального управления с обратной связью (1)–(3) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, σ_*) такое, что $\Phi(v_*, \sigma_*) = \inf\limits_{(v,\sigma)\in\Sigma} \Phi(v, \sigma)$.

Данные исследования являются продолжением работ по оптимальному управлению с обратной связью для задач неньютоновской гидродинамики [1]–[4].

Литература

1. Звягин А. В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной / А. В. Звягин // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54, № 4 (320). — С. 807–825.
2. Звягин А. В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 245–249.
3. Zvyagin A. V. Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions / A. V. Zvyagin // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 6. — P. 1157–1168.
4. Zvyagin A. V. Solvability of the stationary mathematical model of a non-Newtonian fluid motion with objective derivative / A. V. Zvyagin // Fixed Point Theory. — 2014. — V. 15, № 2. — P. 623–634.

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА-МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ[1]

А.В. Звягин, Д.М. Поляков (Воронеж)

zvyagin.a@mail.ru, DmitryPolyakow@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости начально- краевой задачи для альфа-модели Джеффриса – Олдройда, описывающей движение земной коры. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i + \nabla p = \operatorname{Div} \sigma + f, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066), выполняемого в Воронежском государственном университете.

$$\sigma + \lambda_1\big(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\big) = 2\eta\big(\mathcal{E}(v) + \lambda_2(\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i})\big), \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \qquad (3)$$

Здесь, $u(t,x)$ — вектор-функция скорости, $p(t,x)$ — функция давления, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij}(u))$ — девиатор тензора напряжений и $v = u - \alpha^2\Delta u$ — отфильтрованная скорость. Дивергенция $\operatorname{Div}\sigma$ тензора σ является вектором с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_j = \sum\limits_{i=1}^n(\partial\sigma_{ij}/\partial x_i)$. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v)), \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$, обозначим тензор скоростей деформации, $\alpha > 0$ — ширина шкалы пространственной фильтрации модели, $\eta > 0$ — вязкость среды, λ_1 — время релаксации и λ_2 — время запаздывания; v_0 и σ_0 — начальные значения.

Через $H^m(\Omega)$ обозначим пространство $W_2^m(\Omega)$. В силу разложения Вейля пространства $L_2(\Omega)$ в ортогональную сумму $L_2(\Omega) = V^0 \oplus \nabla W_2^1(\Omega)$ (V^0 — замыкание множества C_0^∞ — гладких векторных полей, дивергенция которых равна 0 и носители которых содержатся в Ω, по норме $L_2(\Omega)$). Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — ортопроектор. С помощью оператора $A = -\pi\Delta$ введем шкалу пространств V^α. Мы также будем использовать пространство слабо непрерывных функций $C_w([0,T];E)$, где E — банахово пространство. Пусть $W_1 = \{v : v \in L_2(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1}\}$ и $W_2 = \{\sigma : \sigma \in L_2(0,T;L_2(\Omega)) \cap C_w([0,T];H^{-1}(\Omega)), \sigma' \in L_2(0,T;H^{-2})\}$.

Определение 1. *Пара функций $v \in W_1$ и $\sigma \in W_2$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальным условиям и выполнены равенства*

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) + (\sigma,\nabla\varphi) - \sum_{i=1}^\infty(u_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^\infty(v_i\nabla u_i, \varphi) = \langle f,\varphi\rangle,$$

$$(\sigma,\Phi) + \lambda_1\frac{d}{dt}(\sigma,\Phi) - \lambda_1\sum_{i=1}^n(u_i\sigma, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}) =$$
$$= -2\eta(v,\operatorname{Div}\Phi) - 2\eta\lambda_2\left(\frac{d}{dt}(v,\operatorname{Div}\Phi) + \sum_{i=1}^n(u_i\mathcal{E}(v), \frac{\partial\Phi}{\partial x_i})\right),$$

для всех $\varphi \in V^1$, $\Phi \in C_0^\infty$ в смысле распределений на $(0,T)$.

Теорема 1. *Для* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $V_0 \in H$, $\sigma_0 \in H^{-1}(\Omega)$, *существует слабое решение для начально-краевой задачи (1)–(3).*

Данные исследования являются продолжением работы [1], в которой доказано существование диссипативных решений рассматриваемой начально–краевой задачи (1)–(3). При доказательстве данной теоремы использовались результаты работ [2]–[5].

Литература

1. Polyakov D. On dissipative solutions of the Jeffreys-Oldroyt-alpha equation / D. Polyakov, A. Zvyagin // Advancements in Mathematical Sciences, AIP Conf. Proc. — 2015. — V. 1676. — P. 020089-1—020089-7.

2. Звягин А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 147–156.

3. Звягин А. В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А. В. Звягин // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 453, № 6. — С. 599–602.

4. Поляков Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Известия вузов. Математика. — 2015. — Вып. 5. — С. 75–79.

5. Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 3. — С. 417–425.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАМЯТЬЮ[1]

В.Г. Звягин, В.П. Орлов (Воронеж)

zvg_vsu@mail.ru, orlov_vp@mail.ru

Рассмотрим несжимаемую вязкоупругую жидкость с уравнением состояния Олдройда вида $(1+\lambda d/dt)\sigma = 2\nu(1+\nu^{-1}d/dt)\mathcal{E}$. Интегрируя это уравнение вдоль поля скоростей v, выражая σ из данного соотношения и подставляя в уравнение движения среды, получим начально-краевую задачу с интегральным членом, учитывающим память этой системы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14–21–00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t \exp{(s-t)}\,\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds-$$
$$-\mu_0\Delta v+\nabla p=f, \quad (t,x)\in Q_T; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t,x)=0; \quad v(0,x)=v^0(x); \quad v(t,x)|_{(t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega}=0; \qquad (2)$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds, \quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T, \quad x\in\overline{\Omega}. \qquad (3)$$

Слабая разрешимость задачи (1)–(3), в которой v в (3) заменена на ее гладкую регуляризацию, установлена в [1–3]. Причиной регуляризации было отсутствие необходимых результатов по разрешимости задачи Коши (3) при недостаточно гладкой v. Сравнительно недавно была установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков — обобщения понятия классического решения в случае v из пространств Соболева. Это позволило отказаться от регуляризации v в уравнении (3) и, используя теорию степени обобщенно уплотняющих отображений (см. [4], [5]) доказать существование слабых решений задачи (1)–(3).

Сформулируем основной результат

Теорема 1. *Пусть* $f=f_1+f_2$, $f_1\in L_1(0,T;H)$, $f_2\in\in L_2(0,T;V')$, $v^0\in H$. *Тогда существует слабое решение задачи (1)–(3), принадлежащее пространству* $W_1=\{v: v\in\in L_2(0,T;V), v'\in L_1(0,T;V')\}$.

Используя аппарат этой работы, можно также отказаться от условия регуляризации модели и для сильных решений в статье [6]. Также можно отказаться от регуляризации задачи (3) в задаче оптимального управления [7] и в проблеме существования аттракторов для модели с памятью [8].

Литература

1. Звягин В. Г. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 308–311.

2. Звягин В. Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38. — С. 1633–1645.

3. Zvyagin V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications (12), Walter de Gruyter, Berlin-New York. — 2008. — 230 p.

4. Звягин В. Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

5. Звягин В. Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями / В. Г. Звягин // Мат. сборник. — 1991. — Т. 182, № 12. — С. 1740–1768.

6. Дмитриенко В. Т. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой среды / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 9. — С. 24–40.

7. Obukhovskii V. Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid / V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2004. — V. 23, № 2. — P. 323–337.

8. Звягин В. Г. Аттракторы слабых решений регуляризованной системы уравнений движения жидких сред с памятью / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев // Мат. сборник. — 2012. — Т. 203, № 11. — С. 83–104.

ОРИЕНТИРОВАННАЯ СТЕПЕНЬ ЛОКАЛЬНО УПЛОТНЯЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ИНДЕКСА И ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер (Воронеж)

zvg@main.vsu.ru, ratiner@phys.vsu.ru

Пусть $\hat{X}$ — метрическое пространство, $X \subset \hat{X}$ — открытое ограниченное подмножество. Предполагается, что на X имеется структура C^1-гладкого банахова многообразия и задана ориентированная фредгольмова подструктура X_Φ с модельным пространством $E \times R^q$, где E — банахово пространство, а R^q — евклидово q-мерное пространство.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Для отображений $h\colon \bar{X} \to E$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $h\colon \bar{X} \to E$ непрерывно;

2) $h(x) \neq 0$ для $x \in \partial X$;

3) множество $S = h^{-1}(0)$ компактно;

4) отображение h можно представить в виде $h = f - g$, где $f\colon X \to E$ – фредгольмово C^1-гладкое отображение индекса $q > 0$, допустимое относительно структуры X_Φ, $g\colon \bar{X} \to E$ – непрерывное отображение, f-уплотняющее на некоторой окрестности компакта S;

построена топологическая степень $d(f - g, X_\Phi, 0)$, принимающая значения в группе $GL_c(E \times R^q)$-оснащенных бордизмов ориентированной структуры X_Φ.

Построенная степень обладает всеми свойствами степени для аналогичных классов отображений (см. [1-5]).

Достаточное условие f-уплотняемости отображения g в окрестности компактного множества приведено в следующей теореме, которая обобщает результат работы [6] на случай отображений банаховых многообразий.

Теорема 1. *Пусть Q – компактное подмножество в банаховом многообразии X. Пусть $f\colon X \to E$ является C^1-гладким фредгольмовым отображением на некоторой окрестности компактного множества Q, а отображение $g\colon X \to E$ является $k(x)Df(x)$-ограниченным по мере некомпактности Куратовского в каждой точке $x \in Q$ с константой $k(x) < 1$. Тогда g является f-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского в некоторой окрестности компактного множества Q.*

Построенная степень применяется для исследования разрешимости системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с условиями Хопфа на границе.

Литература

1. Звягин В. Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

2. Zvyagin V. G. On the theory of generalized condensing perturbations of continuous mappings // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag. — 1984. —V. 1108. — P. 173–193.

3. Звягин В. Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями / В. Г. Звягин // Матем. сборник. — 1991. — Т. 182, № 12. — С. 1740–1768.

4. Zvyagin V. G. Oriented degree of Fredholm maps of non-negative index, and its applications to global bifurcation of solutions / V. G. Zvyagin, N. M. Ratiner // Lecture Notes in Math. — 1992. — V. 1520. — P. 111-137.

5. Звягин В. Г. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции / В. Г. Звягин, Н. М. Ратинер // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 44. — С. 3–171.

6. Дмитриенко В. Т. Индекс множества решений фредгольмовых уравнений с f-уплотняющими возмущениями и разрешимость периодических краевых задач / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Известия РАЕН. Серия МММИУ. —2000. — Т. 4, № 1–2. — С. 109–143.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ БИНГАМА НА ТОРЕ[1]

В.Г. Звягин, М.В. Турбин (Воронеж)

zvg_vsu@mail.ru, mrmike@math.vsu.ru

Система уравнений движения однородной несжимаемой среды с единичной плотностью имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \ \operatorname{div} u = 0. \qquad (1)$$

Здесь $u(x,t), p(x,t)$ — соответственно вектор скорости жидкости и давление. Система уравнений, описывающая движение среды Бингама, получается добавлением к (1) реологического соотношения между девиатором тензора напряжения $\sigma = (\sigma_{ij})$ и тензором скоростей деформации $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^T u\right)$.

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \tau^* \frac{\varepsilon(u)}{|\,\varepsilon(u)\,|} \text{ для } |\varepsilon(u)| \neq 0 \text{ и } |\sigma| \leqslant \tau^* \text{ для } |\varepsilon(u)| = 0, \quad (2)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

где μ, τ^* — некоторые положительные константы.

Для системы уравнений (1)–(2) на трёхмерном торе Q рассматривается задача с начальным условием

$$u\Big|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in Q. \tag{3}$$

Для системы уравнений (1)-(3) рассматривается задача оптимального управления с обратной связью. Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(u), \tag{4}$$

где Ψ — некоторое заданное мультиотображение.

Обозначим $E_1 = \{v : v \in L_2(0,T;V^1), v' \in L_{\frac{4}{3}}(0,T;V^{-1})\}$. Пусть $a \in V^1$. Будем предполагать, что многозначное отображение $\Psi : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$ имеет непустые, компактные, выпуклые значения; полунепрерывно сверху; глобально ограничено и слабо замкнуто.

Определение 1. *Тройка функций $(u, \sigma, f) \in E_1 \times L_2(Q_T) \times$ $\times L_2(0,T;V^{-1})$ называется слабым решением задачи управления с обратной связью (1)–(4) если она удовлетворяет начальному условию (3), условию обратной связи (4), равенству*

$$\langle u', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi\rangle$$

для любого $\varphi \in V^1$ и соотношению (2).

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times L_2(Q_T) \times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1)-(4). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Существует число γ такое, что $\Phi(v, \sigma, f) \geqslant \gamma$ для $(v, \sigma, f) \in \Sigma$.

2. Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1, $\sigma_m \rightharpoonup \sigma_*$ в $L_2(Q_T)$ и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m, \sigma_m, f_m)$.

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Существует имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, σ_*, f_*) задачи управления с обратной связью (1)–(4), дающее минимум заданному функционалу качества, то есть*

$$\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) = \inf_{(v,\sigma,f)\in\Sigma} \Phi(v, \sigma, f).$$

Литература

1. Zvyagin V. G. Optimal Feedback Control in the Mathematical Model of Low Concentrated Agueous Polymer Solutions / V. G. Zvyagin, M. V. Turbin // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — V. 148, № 1. — P. 146–163.

2. Звягин В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М. : КРАСАНД, 2012. — 416 с.

3. Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В. Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

4. Звягин В. Г. Существование аттрактора для трехмерной модели движения среды Бингама / В. Г. Звягин, С. В. Корнев // Известия вузов. Математика. — 2016. — №. 1. — С. 74–79.

БИЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ РИМАНА И ИНВАРИАНТ ХОПФА КАК ЗНАЧЕНИЯ 2-ИТЕРИРОВАННЫХ ИТЕГРАЛОВ ЧЕНА

И.С. Зубов (Воронеж)

reestr_rr@mail.ru

I. Пусть ω, ω' — голоморфные 1-формы на римановой поверхности S рода g. P_i, P_i' — периоды этих форм. Билинейные соотношения Римана имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{g} \left(P_i \cdot P'_{i+g} - P_{i+g} \cdot P'_i\right) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{g} \left(P_i \cdot \overline{P'_{i+g}} - P_{i+g} \cdot \overline{P'_i}\right) = \int\limits_S \omega \wedge \overline{\omega'}. \tag{2}$$

Представляя поверхность S как гомотопию $c : \pi \to \Omega_{x_0} S$ в пространстве петель $\Omega_{x_0} S$ коммутаторной петлей, которая есть произведение петель. Постоянную петлю обозначим ε_{x_0}.

$$\gamma = \prod_{i=1}^{g} \left[\alpha_i, \alpha_{i+g}\right].$$

Имеет место равенство для значения 2-итерированного интеграла Чена

$$\int\limits_{\gamma} \omega \cdot \omega' - \int\limits_{\varepsilon_{x_0}} \omega \cdot \omega' = \int\limits_{c} d \int \omega \cdot \omega' = \int\limits_{S} \omega \wedge \omega'.$$

Так как $\omega \wedge \omega'$-голоморфная 2-форма, то $\omega \wedge \omega' \equiv 0$ на S

$$\int\limits_{\varepsilon_{x_0}} \omega \cdot \omega' = 0.$$

В силу свойств 2-итерированного интеграла Чена получаем

$$0 = \int\limits_{\gamma} \omega \cdot \omega' = \sum_{i=1}^{g} \left(P_i \cdot P'_{i+g} - P_{i+g} \cdot P'_i\right).$$

Получаем первое билинейное соотношение Римана

$$\sum (\Pi_i \cdot \Pi'_{i+g} - \Pi_{i+g} \cdot \Pi'_i) = 0.$$

Если мы возьмем голоморфную форму ω и антиголоморфную форму $\overline{\omega'}$, то аналогичные рассуждения дают 2-е билинейное соотношение Римана. Причем если $\omega' = \omega$, то значения $\int_S \omega \wedge \overline{\omega}$ с точностью до универсальных постоянных будут положительны.

II. Рассмотрим отображение

$$f : S^3 \to S^2, \tag{3}$$

которое можно рассматривать как отображение двумерной сферы в пространство петель с отмеченной точкой $\tilde{f} : S^2 \to \Omega_{x_0} S^2$.

Пусть ω^2 — форма объема на сфере S^2. Определим 2-итерированный интеграл Чена $\int \omega_2 \cdot \omega_2$, который является 2-формой на пространстве петель $\Omega_{x_0} S^2$. Пусть ψ — 1-форма на S^3 делает форму $f^* \omega^2$ точной, то есть $d\psi = f^* \omega^2$. Затем интегрируя по циклу S^2 и используя свойства 2-итерированного интеграла, получим

$$< \int \omega_2 \cdot \omega_2, S^2 >= \int\limits_{S^3} f^* \omega_2 \wedge \psi = h(f),$$

где $h(f)$ — инвариант Хопфа отображения $f : S^3 \to S^2$.

Литература

1. J.H.C. Wheathead "Elements of Homotopy Theory" Springer-Verlag, 1978.

2. K.T. Chen "Itereted integrals of diffferential forms and loop space homology" Ann. Math. 97(1973), 217–246.

3. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. — М. : Мир, 1982.

4. Спрингер Дж. Введение в теорию Римановых поверхностей / Дж. Спрингер. — М. : Издательство иностранной литературы, 1960.

5. Хатчер А. Алгебраическая топология / А. Хатчер. — М. : Издательство МЦНМО, 2011.

6. Хейн Р.М. Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов / Р.М. Хейн. — М. : Наука, 1988.

7. Лексин В.П. Алгебра и геометрия итерированных интегралов / В.П. Лексин. — Коломна : КГПИ, 2007.

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕОБРАТИМОЙ МАТРИЦЕЙ ПОД ЗНАКОМ ПРОИЗВОДНОЙ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж)

spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система управления

$$\frac{d}{dt}Ax(t) = Bx(t) + Du(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; A, B — матрицы $k \times n$; D — матрица $k \times m$; $t \in [0, T]$.

Систему (1) называют полностью управляемой, если существует управление $u(t)$, под воздействием которого состояние $x(t)$ системы удовлетворяет условиям

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T, \quad \forall x^0, x^T \in R^n. \tag{2}$$

А. В случае $k = n$, то есть в случае квадратных матриц A и B, одним из условий управляемости в M является условие регулярности системы (1), или, что то же самое, условие регулярности пары (A, B) или обратимости матрицы $A - \lambda B$ при малых по модулю отличных от нуля $\lambda \in C$ (обозначаем $\lambda \in \dot{U}(0)$). Критерий полной управляемости регулярной системы (1) получен в работах проф. С.А. Минюк.

Если же система с квадратными матрицами A и B нерегулярная, то под воздействием управления $u(t)$ возможен веер траекторий системы, исходящих из точки $(0, x^0)$. Среди них есть траектории, проходящие через точку (T, x^T), но есть и траектории, следующие мимо этой точки. В силу этого обстоятельства нерегулярная система с квадратными матрицами A и B не является полностью управляемой.

Б. Если $k \neq n$, то есть если матрицы A и B прямоугольные, пара (A, B) не может быть регулярной. В этом случае единственность состояния $x(t)$ при реализующихся управлении $u(t)$ и начальном состоянии $x(0) = x^0$ гарантируется выполнением условия Ker $(A - \lambda B) = \{0\}$ при $\lambda \in \dot{U}(0)$. Пару (A, B) называем в этом случае *псевдорегулярной*, соответственно систему (1) с такими A и B — *псевдорегулярной*.

Доклад предполагается посвятить необходимым и достаточным условиям полной управляемости псевдорегулярной системы (1). В основе исследований лежат свойства нётерова оператора, действующего из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2.

Литература

1. Zubova S. P. Solution of the Cauchy Problem for Two Descriptive Equations with Fredholm Operator / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya // Pleiades Publishing: Doklady Mathematics. — 2014. — V. 90, № 3. — P. 528–532.

2. Zubova S. P. On full controllability criteria of a descriptor system. The polynomial solution of a control problem with checkpoints / S. P. Zubova // Automation and Remote Control. — 2011. — V. 72, № 1. — P. 23–37.

ОБ УСЛОВИЯХ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ И ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

А.И. Иноземцев (Липецк)
inozemcev.a.i@gmail.com

В работе приведены условия фредгольмовости и обратимости оператора $I-K$ с частными интегралами $I-K$, где $K=K_1+K_2$,

$$(K_1x)(t_1,t_2,t_3)=\int_a^b k_1(t_1,t_2,t_3,\tau_1)x(\tau_1,t_2,t_3)\,d\tau_1,$$

$$(K_2x)(t_1,t_2,t_3)=\int_c^d k_2(t_1,t_2,t_3,\tau_2)x(t_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_2.$$

Пусть ядра k_1,k_2 непрерывны, тогда операторы K_1,K_2 действуют в $C(D)=C([a,b]\times[c,d]\times[e,f])$ [1]. Если в $C(D)$ обратимы операторы $I-K_1$ и $I-K_2$, то

$$I-K=(I-K_1)(I-K_2)\left(I-(I-K_2)^{-1}(I-K_1)^{-1}(K_1K_2-K_{12})\right).$$

В этом случае $(I-K_1)^{-1}=I+R_{k_1}$, $(I-K_2)^{-1}=I+R_{k_2}$. Аналогично [2] $I-K=I-H$, где операторы

$$(R_{k_1}x)(t_1,t_2,t_3)=\int_a^b r_{k_1}(t_1,t_2,t_3,\tau_1)x(\tau_1,t_2,t_3)\,d\tau_1,$$

$$(R_{k_2}x)(t_1,t_2,t_3)=\int_c^d r_{k_2}(t_1,t_2,t_3,\tau_2)x(t_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_2$$

с непрерывными ядрами действуют в $C(D)$, $H=K_1K_2+R_{k_2}K_1K_2+$ $+R_{k_1}K_1K_2+R_{k_2}R_{k_1}K_1K_2$ — частично интегральный оператор, оператор $(Hx)(t_1,t_2,t_3)=\int_a^b\int_c^d h(t_1,t_2,t_3,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_1 d\tau_2$ — не компактный, а его ядро определяется равенством

$$h(t_1,t_2,t_3,\tau_1,\tau_2)=k_1(t_1,t_2,t_3,\tau_1)k_2(\tau_1,t_2,t_3,\tau_2)+$$

$$+\int_c^d r_{k_2}(t_1,t_2,t_3,\hat\tau_2)k_1(t_1,\hat\tau_2,t_3,\tau_1)k_2(\tau_1,\hat\tau_2,t_3,\tau_2)\,d\hat\tau_2+$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

$$+\int_a^b r_{k_1}(t_1,t_2,t_3,\hat\tau_1)k_1(\hat\tau_1,t_2,t_3,\tau_1)k_2(\tau_1,t_2,t_3,\tau_2)\,d\hat\tau_1+$$

$$+\int_c^d\int_a^b r_{k_2}(t_1,t_2,t_3,\hat\tau_2)r_{k_1}(t_1,\hat\tau_2,t_3,\hat\tau_1)\times$$

$$\times k_1(\hat\tau_1,\hat\tau_2,t_3,\tau_1)k_2(\tau_1,\hat\tau_2,t_3,\tau_2)d\hat\tau_1 d\hat\tau_2.$$

Так же, как в [2], доказывается, что фредгольмовость оператора $I-H$ с непрерывными ядрами равносильна его обратимости. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *В $C(D)$ фредгольмовость оператора $I-K$ с непрерывными ядрами равносильна его обратимости и обратимости операторов $I-K_1$, $I-K_2$ и $I-H$.*

Заметим, что оператор K принципиально отличается от оператора

$$(\tilde{K}x)(t,s)=\int_T k_1(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau+\int_S k_2(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

рассмотренного в [2, 3], т.к. фредгольмовость в $C(T\times S)$ оператора $I-\tilde{K}$ с непрерывными ядрами и компактными множествами T и S с непрерывными мерами Лебега равносильна обратимости операторов $I-K_1$ и $I-K_2$, где K_1 и K_2 — операторы с ядрами $k_1(t,s,\tau)$ и $k_2(t,s,\sigma)$.

Литература

1. Иноземцев А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами / А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — Вып. 34, № 5 (176). — С. 17–26.

2. Калитвин А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

3. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro–Differential Equations. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ РЕТРАКЦИИ В ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОИСКА КОНТИНУУМА ЭКСТРЕМАЛЕЙ

И.Г. Исмаилов, Ю.О. Кузнецов (Москва)
iig07@mail.ru, yk-mailbox@yandex.ru

В продолжение [1], мы предлагаем достаточные условия, при которых итерационный метод осуществляет *ретракцию* окрестности на критическое множество (множество решений). Обозначения:
E — банахово пространство.
Ω — область в E, $F : \overline{\Omega} \to E$ — некоторое отображение,
$N(F,0) = \{x : F(x) = 0,\ x \in \overline{\Omega}\}$, полагаем $N(F,0) \subset \Omega$.
Задача состоит в приближении $N(F,0)$.

Определим $c_* = \operatorname{diam}\Omega + 1$, Для любого фиксированного $y \in \Omega$ обозначим через $\mathcal{M}(y)$ множество решений $\{x\}$ уравнения с параметром:

$$\lambda F(x) = y - x, \quad x \in \Omega,\ \lambda > 0.$$

Будем говорить, что отображение F, $F : \Omega \to E$ обладает Т-свойством, если существует $\alpha_* > 0$ такое, что для любого $y \in \Omega$, $0 < \|F(y)\| < \alpha_*$ найдется окрестность $\Omega(y) \subset \Omega$, для которой выполнена импликация

$$x \in \mathcal{M}(y) \cap \partial\Omega(y) \Longrightarrow \|F(x)\| > c_*\|F(y)\|,$$

$$\operatorname{diam}\Omega(y) \to 0, \quad \text{при} \quad \|F(y)\| \to 0.$$

Импликация считается справедливой, если $\mathcal{M}(y) \cap \partial\Omega(y) = \varnothing$. Запишем формально дифференциальное уравнение в банаховом пространстве:

$$\dot{x}(t) = \Gamma(x(t);t)(y + 1/t_0 F(y) - x(t)),\ 0 < t \leqslant t_0 \quad x(t_0) = y \qquad (1)$$

$$\Gamma(x;t) = (F'(x) + tI)^{-1}, \quad x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant t_0.$$

Теорема 1. *Пусть непрерывно дифференцируемое по Фреше отображение Лерэ – Шаудера F задано на замыкании области Ω, $\Omega \subset E$. Предположим, что выполнены условия:*
1. *F обладает K-свойством (см. [3], теор. 48.5) на Ω,*
2. $F(x) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$ и $\gamma(F, \partial\Omega) = 1$,
3. $\|(F'(x) + tI)^{-1}\| \leqslant c/t$, $c > 0$, $0 < t \leqslant t_0$, $x \in \Omega$

4. *F обладает Т-свойством.*
Тогда $N = N(F, 0)$ непусто и связно.

Существует число $\alpha_* > 0$, возрастающая на отрезке $[0, \alpha_*]$ функция $\psi(t)$, $\psi(0) = 0$ такие, что для всех $y \in \Omega$, $F(y) \neq 0$, $\|F(y)\| < \alpha_*$ определена итерационная последовательность $\{y_j\}$

$$\begin{cases} \alpha_j = \|F(y_j)\|, \\ s_j = \alpha_j - 1/c_* \psi^{-1}(1/2\psi(\alpha_j)), \\ y_{j+1} = U(y_j, s_j), \quad j = 0, 1, \ldots, \ y_0 = y, \end{cases}$$

где $U(y, s)$ — сдвиг вдоль траекторий дифференциального уравнения (1) с $t_0 = \|F(y)\|$, точнее $U(y, s) = x(\|F(y)\| - s, y)$, $0 \leqslant s < \|F(y)\|$. Последовательность $\{y_j\}$ сходится к некоторой точке $r(y) \in N$, при этом отображение

$$y \to \begin{cases} r(y), & 0 < \|F(y)\| < \alpha_*, \\ y, & F(y) = 0, \end{cases}$$

осуществляет ретракцию окрестности

$$\mathcal{L}_{\alpha_*} \equiv \{x \in \Omega : \|F(x)\| < \alpha_*\}$$

на N. Скорость сходимости оценивается как

$$\|r(y) - y_j\| \leqslant 1/2^{j-1}\psi(\alpha_0), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Т-свойство обобщает понятие трансверсальности из дифференциальной топологии и естественно выполняется во многих задачах — так для монотонных по Минти – Браудеру отображений оно справедливо всегда. Примеры функционалов, удовлетворяющих условиям теоремы, есть в [2].

Литература

1. Бобылев Н. А. Градиентные процедуры в задачах с неизолированными экстремалями / Н. А. Бобылев, И. Г. Исмаилов, С. К. Коровин // Докл. РАН. — 1997. — 354, № 1. — С. 11–13.

2. Исмаилов И. Г. Об одном классе модельных задач оптимизации с континуумом решений / И. Г. Исмаилов, Ю. О. Кузнецов // Автоматика и телемеханика. — 2016. — (принята в печать).

3. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука. — 1975.

МЕТОД ГОМОТОПНОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ У. ДИКМАНА[1]

А.В. Калистратова (Москва)

kanast74@gmail.com

Предметом данного исследования является метод гомотопного анализа HAM (Homotopy Analysis Method) в применении к решению интегрального уравнения, возникающего в разработанной Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу модели некоторого стационарного экологического сообщества [1], состоящего из особей одного вида, с известными функциями, задающими рождаемость (dispersal kernel) и смертность (competition kernel) внутри популяции. Цель состоит в отыскании равновесных средних ожидаемых плотностей популяции N, видовых пар $C(\xi)$, а также видовых троек $T(\xi,\xi')$. Причём последняя может быть аппроксимирована при помощи функций N и $C(\xi)$:

$$T(\xi,\xi') = \frac{C(\xi)C(\xi')}{N}. \tag{1}$$

В рамках указанной модели экологическое сообщество может быть описано набором следующих параметров: b, b' — темпы естественной рождаемости и рождаемости в условиях конкуренции, d, d' — темпы естественной смертности и смертности от конкуренции, а также $m(\xi), w(\xi)$ — ядра рассеивания и конкуренции (dispersal and competition kernels). В данных обозначениях искомое интегральное уравнение может быть записано следующим образом:

$$\frac{m(\xi)Y}{b-d}\int w(\xi)C(\xi)d\xi + b\int m(\xi)C(\xi'+\xi)d\xi' - d'w(\xi)C(\xi) - bC(\xi) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Y = \int w(\xi)C(\xi)d\xi$, средняя плотность популяции может быть найдена с помощью формулы : $N = \frac{b-d}{Y}$.

Метод HAM для решения интегральных уравнений [2] состоит в построении непрерывного отображения начального приближения на точное решение, для чего используется некоторый вспомогательный параметр q, непрерывно меняющийся от нуля до едини-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных – кандидатов наук МК-6108.2015.9.

цы. Функция $\varphi(x;q)$ допускает разложение в ряд Тейлора по степеням q:

$$\varphi(x;q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) q^m, \tag{3}$$

где

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x;q)}{\partial q^m} \ |_{q=0} \ . \tag{4}$$

А значит, искомое решение может быть найдено следующим образом:

$$y(x) = \varphi(x;1) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x). \tag{5}$$

Метод НАМ имеет несколько неоспоримых преимуществ: во-первых, он может быть использован для решения в том числе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода; во-вторых, он характеризуется простотой доказательства сходимости и поиска условий, накладываемых на параметры системы, обеспечивающих его сходимость. В частности, было доказано, что при решении уравнения (2) метод сойдётся, если соблюдается условие $3d = b + d'$, причем со скоростью, характеризуемой параметром $\beta \in (1; 1.5]$

Для определения погрешности решения может быть получена следующая оценка:

$$|y(x) - \textstyle\sum_{m=0}^{n} y_m(x)| \quad \leqslant \quad \begin{cases} \frac{2^x ||K||^x}{n!!} \{|y(b) - y_0(b)| + |y(a) - y_0(a)|\}, \\ \text{при чётном } n; x = \frac{n}{2}, \\ \frac{2^x ||K||^x}{n!!} \{|y(b) - y_0(b) - \int_a^b K(b,t) y_0(t) dt| + \\ +|y(a) - y_0(a) - \int_a^b K(a,t) y_0(t) dt|\}, \\ \text{при нечётном } n; x = \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Где (a,b) — интервал, на котором решается задача; $||K||$ — норма ядра интегрального оператора.

В будущем планируется рассмотреть и другие виды ядер, а также иные замыкания третьего момента, отличные от (1).

Литература

1. Dieckmann U., Law R. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / U. Dieckmann, R. Law. — Cambridge University Press, 2000. — 553p.

2. Wazwaz Abdul-Majid. Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications / Abdul-Majid Wazwaz. — Springer, 2011. — 658 p.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФ–ФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БАРБАШИНА[1]

А.С. Калитвин (Липецк)
kalitvinas@mail.ru

Основы теории линейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина (ИДУБ) с частными производными первого порядка и некоторые их приложения изложены в [1], здесь же рассмотрены некоторые вопросы их устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости. При этом описание вопросов устойчивости ИДУБ в книге [1] основано на использовании показателей Ляпунова и Ляпунова – Боля.

В данной работе исследование вопросов устойчивости для линейных ИДУБ сводится к их исследованию для линейных уравнений с частными интегралами, эквивалентных ИДУБ, и производится с использованием представления решений интегральных уравнений с применением резольвентных ядер.

Будем рассматривать задачу

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = l(t,s)x(t,s) + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s), x(a,s) = \varphi(s), \tag{1}$$

где $t \in J = [a,\infty)$, $s \in [c,d]$, l, f, m, и φ — заданные функции, непрерывные на $D = J \times [c,d]$, $D \times [c,d]$ и $[c,d]$ соответственно.

Под решением задачи (1) понимается непрерывная на D вместе с частной производной по t функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ и начальному условию.

Интегрируя обе части ИДУБ (1) по отрезку $[a,t]$ и учитывая начальное условие, получим эквивалентное интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d m(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s), \tag{2}$$

где

$$g(t,s) = \int_a^t f(\tau,s)d\tau + \varphi(s),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

а под решением уравнения (2) понимается непрерывная на D функция, удовлетворяющая этому уравнению.

Если теперь $\|l(\cdot,s)\|_{L^1([r,\infty)} \leqslant \varepsilon < 1$, $\|m(\cdot,s,\cdot)\|_{L^1(D_r)} \leqslant \varepsilon < 1$, где $r > a$ и $D_r = [r,\infty) \times [c,d]$, то аналогично [2,3], решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$x(t,s) = \int_a^t r(t,s,\tau)g(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d \bar{r}(t,s,\tau,\sigma)g(\tau,s)d\tau d\sigma + g(t,s),$$

где $r(t,s,\tau)$ и $\bar{r}(t,s,\tau,\sigma)$ — непрерывные по совокупности переменных резольвентные ядра уравнения (2).

Уравнение (2) назовем устойчивым (асимптотически устойчивым), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|g\| \leqslant \delta$ следует неравенство $\|x\| \leqslant \epsilon$ (и, кроме того, из условия $g(t,s) \to 0$ при $t \to \infty$ следует условие $x(t,s) \to 0$ при $t \to \infty$).

Нетрудно видеть, что уравнение (2) устойчиво точно тогда, когда условие $g \in BC(D)$, где $BC(D)$ — множество ограниченных функций из $C(D)$, влечет включение $x \in BC(D)$. Отсюда следует, что уравнение (2) устойчиво точно тогда, когда

$$\sup_D \left(\int_J |r(t,s,\tau)| d\tau + \int_J \int_c^d |\bar{r}(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma \right) < \infty. \tag{3}$$

Асимптотическая устойчивость уравнения (2) вытекает тогда из (3) и условия

$$\sup_{D_n} \left(\int_n^\infty |r(t,s,\tau)| d\tau + \int_n^\infty \int_c^d |\bar{r}(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma \right) \to 0$$

при $n \to \infty$, где $D_n = [n,\infty) \times [c,d]$.

Литература

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York – Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А. С. Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных и ограниченных на полуполосе функций / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова // Труды института математики НАН Беларуси, 2001. — Т. 9. — С. 68–72.

3. Калитвин А. С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C^{(1),n}(D)$[1]

А.С. Калитвин, Н.И. Трусова (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

Расмотрим систему линейных интегральных уранений типа Романовского с частными интегралами

$$x(t,s) = (M\Pi + N\Pi)x(t,s) + f(t,s), \tag{1}$$

где $x(t,s) = (x_1(t,s), ..., x_n(t,s))$, $f(t,s) = (f_1(t,s), ..., f_n(t,s))$,

$$M = (M_{ij})_{i,j=1}^n, \quad N = (N_{ij})_{i,j=1}^n,$$

операторы M_{ij}, N_{ij} определяются равенствами

$$(M_{ij}x_j)(t,s) = \int_a^b m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma, \tag{2}$$

$$(N_{ij}x_j)(t,s) = \int_a^b \int_a^b n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, i,j = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

$t,s,\sigma,\tau \in [a,b]$, m_{ij}, n_{ij} — заданные измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега и $\Pi : x(t,s) \to x(s,t)$ — оператор перестановки переменных.

Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на $D = [a,b] \times [a,b]$ функций, $C^{(1)}(D)$ — пространство непрерывно дифференцируемых на D функций, $C^n(D)$ и $C^{(1),n}(D)$ — пространства вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s),\ldots,x_n(t,s))$, где $x_j \in C(D)$ и $x_j \in C^{(1)}(D)$ $(j = 1,\ldots,n)$ соответственно. Через $C^{(1)}(D \times [a,b])$ и $C^{(1)}(D \times D)$ обозначим пространства непрерывно дифференцируемых на $D \times [a,b]$ и $D \times D$ соответственно функций.

Линейное уравнение $x = Ax + f$, где A — ограниченный в банаховом пространстве X линейный оператор и $f \in X$, считается фредгольмовым, если A — фредгольмов оператор в X, т.е. имеет конечную размерность ядра и коядра и нулевой индекс.

Матричный оператор $M\Pi$ в случае ненулевых ядер из $C^{(1)}(D \times [a,b])$ не является компактным оператором в $C^{(1),n}(D)$ в

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

силу того, что операторы M_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ не являются компактными в $C^{(1)}(D)$. Однако оператор $(M\Pi)^2$ с ядрами из $C^{(1)}(D\times[a,b])$ является компактным в $C^{(1),n}(D)$. Это позволяет получить условия фредгольмовости уравнения (1) в $C^{(1),n}(D)$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^{(1),n}(D)$, $m_{ij} \in C^{(1)}(D \times [a,b])$ и $n_{ij} \in \in C^{(1)}(D \times D)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда уравнение (1) фредгольмово в $C^{(1),n}(D)$.*

Для доказательства теоремы 1 прежде всего отметим, что в условии теоремы оператор $N\Pi$ компактен в $C^{(1),n}(D)$. Поэтому достаточно доказать фредгольмовость в $C^{(1),n}(D)$ системы уравнений

$$x(t,s) = (M\Pi x)(t,s) + f(t,s),$$

которая вытекает из компактности оператора $(M\Pi)^2$ в $C^{(1),n}(D)$. Компактность оператора $(M\Pi)^2$ в $C^{(1),n}(D)$ вытекает из компактности операторов $M_{ij}\Pi M_{pq}\Pi$ в $C^{(1)}(D)$, где $i, j, p, q = 1, \ldots, n$, а Π обозначает оператор перестановки переменных у функции $z(t,s)$ из $C^{(1)}(D)$.

Аналогичное утверждение имеет место для следующей системы уравнений:

$$x(t,s) = (M\Pi + N\Pi + K\Pi)x(t,s) + f(t,s),$$

где M и N — операторы (2) и (3), $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$ и

$$(K_{ij}x_j)(t,s) = \int_a^b \int_a^b k_{ij}(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\sigma d\tau,$$

причем $k_{ij} \in C^{(1)}(D \times D)$.

Отметим, что критерии действия и достаточные условия действия частично интегральных операторов M_{ij} в $C(D)$ приведены в [2].

Литература

1. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2014. — 196 с.

2. Калитвин А. С. Линейные уравнения с частными интегралами. C–теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2015. — 195 с.

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

В.А. Калитвин (Липецк)
kalitvin@mail.ru

Интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ) мы будем называть интегро-дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция содержится под знаком частной производной и под знаком интеграла, причем частная производная этой функции вычисляется по одной переменной, а ее интегрирование производится по другой переменной.

Основы теории линейных ИДУБ с частными производными первого порядка и некоторые их приложения изложены в [1]. Теория нелинейных ИДУБ в настоящее время требует дальнейшего развития.

В данной заметке рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = l(s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + m(t,s)x(t,s) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + f(t,s),$$

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s). \qquad (1)$$

В (1) предполагается, что заданные функции $m, f \in C(D)$, l, φ, $\psi \in C([c,d])$, где $C(D)$ и $C([c,d])$ — пространства непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ и $[c,d]$ соответственно функций, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Будем считать функцию n непрерывной на $D \times [c,d] \times (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющей условию Липшица

$$|n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \leqslant n_0(t,s,\sigma)|u-v|,$$

где функция n_0 принадлежит пространству $C(D \times [c,d])$ непрерывных на $D \times [c,d]$ функций.

Через $C_t^2(D)$ обозначим множество функций из $C(D)$, у которых $x''_{tt} \in C(D)$.

Решением задачи (1) назовем функцию $x \in C_t^2(D)$, удовлетворяющую ИДУБ и начальным условиям.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

Интегрируя обе части ИДУБ (1) по отрезку $[a, t]$ и учитывая начальное условие, получим задачу Коши для нелинейного ИДУБ с частной производной по t первого порядка. Интегрируя обе части ИДУБ в полученной задаче Коши по отрезку $[a, t]$ и учитывая начальное условие в этой задаче, приходим к некоторому нелинейному интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами $x = Vx + g$.

При сделанных предположениях задача (1) и полученное интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами будут эквивалентными, если под решением интегрального уравнения $x = Vx + g$ понимается функция из $C_t^2(D)$, удовлетворяющая этому уравнению.

Существование и единственность решения $x \in C(D)$ нелинейного интегрального уравнения Вольтерра с частными нтегралами $x = Vx + g$ доказывается с применением обобщенного принципа сжимающих отображений [2]. Применение этого принципа к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами более общего вида рассмотрено в [3].

Непосредственно проверяется, что единственное в $C(D)$ решение x уравнения $x = Vx + g$ принадлежит $C_t^2(D)$. Учитывая непрерывность вложения $C_t^2(D) \subset C(D)$, получаем, что x — единственное решение уравнения $x = Vx + g$ в $C_t^2(D)$.

В силу эквивалентности задачи (1) и уравнения $x = Vx + g$ задача (1) имеет единственное решение.

Литература

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York – Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский и др. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

3. Калитвин А. С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТЕРНАРНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

З.Н. Камарадинова (Душанбе)
zarrina.qamariddinova@gmail.com

Обозначим через $t_0(n)$ количество представлений натурального n в виде

$$n = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3,$$

где z_1, z_2, z_3 — некоторые целые числа. Положим также

$$t(n) = \frac{1}{3}t_0(n).$$

Рассмотрим «*среднюю Рисса веса* α», $\alpha \geqslant 0$ функции

$$s(n) = \rho(n)t(n),$$

то есть функцию

$$\mathcal{S}_\alpha(N) = \sum_{n \leqslant N} s(n)\left(1 - \frac{n}{N}\right)^\alpha.$$

В частности величина

$$S_0(N) = 12\mathcal{S}_0(N)$$

выражает собой количество решений указанного выше диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$$

относительно целых неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3 при условии

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant N.$$

Обозначение: $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $L(s,\chi)$ – L-ряд Дирихле, χ – неглавный характер по модулю 3, $B(s,\alpha)$ – беттафункция Эйлера.

Теорема 1. [1] *Для производящего ряда Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s}$$

функции $s(n)$ справедливо равенство

$$f(s) = \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathfrak{B}(s),$$

где χ_q — неглавный характер по модулю q, а также равенство

$$\mathfrak{B}(s) = \left(1 - \frac{2}{3^{2s}} + \frac{3}{3^{4s}}\right) \times \\ \times \prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}}\right) \prod_{p\equiv 5 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 + \frac{3}{p^{2s}} - \frac{2}{p^{3s}}\right) \times \\ \times \prod_{p\equiv 7 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 + \frac{3}{p^{2s}}\right) \prod_{p\equiv 11 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

причем бесконечное произведение $\mathfrak{B}(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $\Re s > 0,5$.

Литература

1. Камарадинова З. Н. Производящая функция для числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов / З. Н. Камарадинова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2014. — Т. 57, № 11–12. — С. 831–834.

О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИЗ ЦИКЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ОЛДРОЙДА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]

М.И. Каменский, Ж.И. Бахтина (Воронеж)

mikhailkamenski@mail.ru

Моделирование колебательных процессов в вязкоупругих средах приводит к задаче о периодических решениях абстрактных параболических уравнений с бесконечным запаздыванием вида:

$$\frac{dv}{dt} + Av + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}Av(s)ds = f(t,v), \tag{1}$$

где A - производящий оператор аналитической полугруппы в некотором банаховом пространстве E, $f(\cdot, A^{-\alpha}\cdot) : R^1 \times E \to E$ - непрерывно дифференцируемая функция, а $A^{-\alpha}$ - дробная степень оператора A.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00867, № 16-01-00386

В том случае, когда правая часть уравнения (1) не зависит от t, его T-периодическое решение порождает цикл периодических решений, получаемых из одного сдвигом по фазе. Начиная с работ А. Пуанкаре, И. Г. Малкина, М. А. Красносельского, классической была задача о рождении из цикла при наличии внешних воздействий малой амплитуды, близких к циклу периодических режимов. Для обыкновенных дифференциальных уравнений, параболических уравнений и уравнений с запаздыванием в конечномерных пространствах (см. [1]-[3]) была разработана методика изучения указанной задачи на основе исследования некоторого операторного уравнения в подходящем функциональном пространстве. Эту методику мы применяем к уравнению (1), имеющему следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} + Av + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)} Av(s)ds = f(v) + \varepsilon\varphi(t, v, \varepsilon), \qquad (2)$$

где ε - малый параметр, а φ - нелинейный оператор, описывающий внешнее воздействие. Для уравнения (2) построен аналог так называемой бифуркационной функции Малкина, нули которой задают точки на цикле, из которых как раз и рождаются искомые периодические режимы.

Основной результат базируется на инвариантности функции Малкина.

Литература

1. Kamenskii M. A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Math. Nachr. — 2008. — 281. — 42-61 pp.

2. Couchouron JF. An infinite dimensional bifurcation problem with application to a class of functional differential equations of neutral type / JF. Couchouron, M. Kamenskii, P. Nistri // Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — 12. — 1845-1859 pp.

3. Kamenskii M. A bifurcation problem for a class of periodocally perturbed autonomous parabolic equations / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Bound. Value Probl. — 2013. — 101. — 1-18 pp.

О СВЯЗИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, ОТВЕЧАЮЩИХ ИНВАРИАНТАМ ВАСИЛЬЕВА ПОРЯДКА НЕ ВЫШЕ ВТОРОГО, СО СВОЙСТВАМИ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ И ИСТОЧНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

Н.А. Кирин (Коломна)
Kirin_N_A@mail.ru

Классическая задача о движении точечных вихрей на плоскости связана с топологическими инвариантами конечного порядка, а именно, гамильтониан $H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\Gamma_i\Gamma_j\ln r_{ij}$, определяющий движение точечных вихрей на плоскости, и функция потенциала $\Phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\Gamma_i\Gamma_j\varphi_{ij}$, представляют собой, соответственно, мнимую и вещественную части инварианта Васильева первого порядка для геометрических кос, представленного 1-итерированным интегралом Чена от логарифмических дифференциальных форм $\omega = \sum_{i<j}\frac{\Gamma_i\Gamma_j}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d(z_i-z_j)}{z_i-z_j}$.

Основываясь на этом, можно рассмотреть обобщение классической задачи, деформируя классический гамильтониан системы слагаемыми отвечающими инвариантам Васильева более высокого порядка.

Как известно, система трех классических вихрей на плоскости всегда интегрируема в смысле Лиувилля, поэтому естественным образом возникает задача о рассмотрении движения трех точек на плоскости с деформированным гамильтонианом. Динамическая система трех точек на плоскости, гамильтониан которой отвечает инварианту Васильева порядка не выше второго, обладает свойствами во многом сходными со свойствами движения классических точечных вихрей на плоскости, поэтому точки, движение которых рассматривается в полученном обобщении, можно называть неклассическими вихрями на плоскости. Например, система трех неклассических вихрей имеет сохраняющиеся коллинеарные конфигурации, причем условие, которое определяет эти конфигурации, совпадает с соответствующим условием в классическом случае, а так же система трех неклассических вихрей имеет сохраняющиеся томсоновские конфигурации.

Явный вид гамильтониана деформированной системы имеет вид $H_2 = H + H\Phi$. Это приводит к выявлению связи построенной гамильтоновой системы не только с классической системой точечных вихрей, но и с системой источников, движение которых, как известно, задает гамильтониан, который совпадает с Ф. Не трудно видеть, что если K является общим интегралом как для системы вихрей, так и для системы источников, то K будет интегралом и для построенной гамильтоновой системы. Как известно, для случая трех вихрей и трех источников есть два общих интеграла. Таким образом, построенная гамильтонова система имеет помимо гамильтониана H_2 ещё два интеграла. Следовательно, мы получаем ещё одно общее свойство деформированной и классической систем, а именно, справедлива

Теорема 1. *Система трех неклассических вихрей интегрируема, а её первые интегралы совпадают с интегралами системы классических вихрей на плоскости.*

Литература

1. Kohno T. Vassiliev Invariants of Braids and Iterated Integrals // Advanced Studies in Pure Mathematics, 2000. — V. 27. — P. 157–168.

2. Борисов А.В. Математические методы динамики вихревых структур / А.В. Борисов. —М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. — 368 с.

3. Kirin N.A. Hamiltonian systems and Vasil'ev invariants // Journal of Mathematical Sciences: Springer New York, Volume 160, Number 1, 2009. — P. 10–20.

4. Кирин Н.А. Инварианты Васильева и конечномерные аппроксимации уравнения Эйлера магнитной гидродинамики / Н.А. Кирин // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 2010. — Т. 270. — С. 161–169.

5. Кирин Н.А. Сохраняющиеся конфигурации в неклассической теории точечных вихрей на плоскости / Н.А. Кирин // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2015. — Т. 4, № 1. — С. 41–47.

ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛОРЕНЦА РАЗНОЙ ШИРИНЫ И С ОБЩИМ ЦЕНТРОМ

Е.А. Киселев (Воронеж)
evg-kisel2006@yandex.ru

В атомном и молекулярном спектральном анализе важное значение имеют функции вида

$$\varphi(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2},$$

получившие название лоренцевский контур [1]. В данной работе будет рассмотрен вопрос о разделении нескольких таких функций с различными заданными параметрами σ и общим центром.

В качестве примера предположим, что исследуемая зависимость $f(x)$ состоит из двух компонент с разными параметрами ширины σ_1 и σ_2 (пусть для определенности $\sigma_2 > \sigma_1$):

$$f(x) = C_1 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + x^2} + C_2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + x^2}.$$

Найти коэффициенты C_1 и C_2 можно с помощью биортогональной системы [2]. Построим биортогональную систему для $\varphi_k(x) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + x^2}, k = 1, 2$, т.е. будем искать функции $\psi_m(x)$ такие, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + x^2} \psi_m^*(x) dx = \delta_{km}, k, m = 1, 2.$$

Данное соотношение удобно записать в терминах преобразования Фурье, используя его свойство унитарности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_k \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma_k |\xi|} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi = \delta_{km}, k, m = 1, 2,$$

где

$$\widehat{\psi}_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Если искать четные $\psi_m(x)$, последняя формула запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty e^{-\sigma_k \xi} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \delta_{km}, k, m = 1, 2.$$

Заменим в полученном соотношении σ_k комплексной переменной z и рассмотрим функции

$$\lambda_m(z) = \int\limits_0^\infty e^{-z\xi} \widehat{\psi}_m^*(\xi) d\xi, \lambda_m(\sigma_k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \delta_{km}, k, m = 1, 2.$$

Выбрать $\lambda_{1,2}(z)$ можно многими способами. Подходящими, например, являются функции вида

$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{A_{1,2}}{z + a} - \frac{B_{1,2}}{z + b}.$$

Чтобы $\lambda_{1,2}(z)$ удовлетворяли требуемым условиям, коэффициенты должны иметь следующие значения:

$$A_{1,2} = \frac{(\sigma_{1,2} + a)(\sigma_{1,2} + b)(\sigma_{2,1} + a)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2} + b)(\sigma_{2,1} + a) - (\sigma_{1,2} + a)(\sigma_{2,1} + b))},$$

$$B_{1,2} = \frac{(\sigma_{1,2} + a)(\sigma_{1,2} + b)(\sigma_{2,1} + b)}{\sigma_{1,2}\sqrt{2\pi}((\sigma_{1,2} + b)(\sigma_{2,1} + a) - (\sigma_{1,2} + a)(\sigma_{2,1} + b))},$$

причем a, b – произвольные вещественные параметры, с теми лишь требованиями, чтобы $a \neq b, a, b > 0$.

Применяя обратные преобразования Лапласа и Фурье, можно получить окончательный ответ

$$\psi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(A_{1,2} \frac{a}{x^2 + a^2} - B_{1,2} \frac{b}{x^2 + b^2} \right).$$

Описанный способ построения биортогональных систем применим и для случая большего количества функций Лоренца, однако это приводит к громоздким формулам.

Литература

1. Дробышев А. И. Основы атомного спектрального анализа / А. И. Дробышев. — СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та., 1997. — 198 с.

2. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Ученые записки МГУ. — 1951. — Т. 4, № 148. — С. 69–107.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВАМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ

Е.А. Киселев (Воронеж)
evg-kisel2006@yandex.ru

Пусть имеется некоторая функция $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим систему целочисленных сдвигов $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ и будем искать функцию $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ортогональную всем $\varphi(x-k)$. Запишем скалярное произведение $\varphi(x-k)$ и $f(x)$

$$(f(x), \varphi(x-k)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi^*(x-k)dx = 0. \tag{1}$$

Заменим в формуле (1) целое k действительной переменной y и рассмотрим функцию

$$\lambda(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi^*(x-y)dx. \tag{2}$$

При этом требуется, чтобы $\lambda(k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Такую функцию $\lambda(y)$ можно выбирать достаточно произвольно и получать при этом различные $f(x)$, решая уравнение типа свертки (2) с помощью преобразования Фурье.

Приведем конкретные примеры.

1. Система целочисленных сдвигов функции Гаусса

$$\varphi(x-k) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Неполнота этой системы следует, например, из результатов, полученных А. М. Переломовым [1]. Если положить в формуле (2)

$$\lambda(y) = \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sin \pi y,$$

причем $\alpha = \frac{\beta+1}{\beta}$, то с точностью до постоянного множителя получится семейство функций

$$f(x) = \exp\left(-\frac{\beta x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sin \pi x(1+\beta),$$

где $\beta > 0$.

2. Система целочисленных сдвигов функции Лоренца

$$\varphi(x-k) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x-k)^2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Функция Лоренца имеет важное значение в атомном спектральном анализе [2], однако является менее изученной, чем функция Гаусса.

Если выбрать

$$\lambda(y) = \frac{s^2}{s^2+y^2} \sin \pi y, s > \sigma,$$

это приведет к набору функций

$$f(x) = \frac{\sigma(s^2-\sigma^2-x^2)e^{-(s+\sigma)\pi}}{((s-\sigma)^2+x^2)((s+\sigma)^2+x^2)} +$$

$$+\frac{s(s^2-\sigma^2-x^2)\cos \pi x - 2s\sigma x \sin \pi x}{((s-\sigma)^2+x^2)((s+\sigma)^2+x^2)},$$

где $s > \sigma$, откуда напрямую следует неполнота рассматриваемой системы при всех значениях параметра σ.

Описанный способ построения ортогональных функций допускает обобщение и на случай других систем. Вместо свертки в формуле (2) будет более сложное соотношение и вопрос сводится к возможности обращения соответствующего интегрального преобразования.

Литература

1. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. — М. : Наука, 1987. — 268 с.

2. Дробышев А. И. Основы атомного спектрального анализа / А. И. Дробышев. — СПб. : Изд-во С-Петербург. ун-та., 1997. — 198 с.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА ЛОЗИНСКОГО

О.И. Клещина (Воронеж)
avdeeva.olga.official@gmail.com

Пусть $A = (a_{ij})$ есть вещественная или комплексная квадратная $n \times n$ матрица, и $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$ – полный набор её собственных значений (спектр $sp\ A$ матрицы A). Величину

$$spa\ A = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Re\lambda_j(A) \tag{1}$$

назовем спектральной абсциссой матрицы A [1, с. 23]. Введем еще одно определение. Логарифмической нормой Лозинского называется

$$\|A\|_{log} = \lim_{h \to +0} \frac{\|A + hI\| - 1}{h} \tag{2}$$

[2, с. 461]. Нас интересует поведение матричной экспоненты

$$e^{tA} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \tag{3}$$

где I – единичная матрица. Из (2) вытекает, что

$$e^{-t\|A\|} \leqslant \|e^{tA}\| \leqslant e^{t\|A\|}, \ \ 0 \leqslant t < +\infty. \tag{4}$$

Вообще говоря, константы $-\|A\|$ и $-\|A\|$ не являются наилучшими.

Пусть α и a – некоторые постоянные в оценках

$$e^{t\alpha} \leqslant \|e^{t\|A\|}\| \leqslant e^{ta}, \ \ 0 \leqslant t < +\infty, \tag{5}$$

$(-\|A\| \leqslant \alpha \leqslant a \leqslant \|A\|)$.

Теорема 1. *Пусть α – наилучшая постоянная в оценке* (5) *снизу. Тогда*

$$\alpha = \inf_{0<t} \frac{\ln\ \|e^{tA}\|}{t} = \lim_{0<t \to 0} \frac{\ln\ \|e^{tA}\|}{t} = \max_{\lambda \in sp\ A} Re\lambda(A) \tag{6}$$

[3, с. 42–43].

Согласно последнему равенству в (6) α является спектральной абсциссой матрицы A: $\alpha = spa\ A$.

Теорема 2. *Пусть a – наилучшая постоянная в оценке* (5) *сверху. Тогда*

$$a = \sup_{0<t} \frac{\ln\ \|e^{tA}\|}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln\ \|e^{tA}\|}{t} = \lim_{0<t\to +0} \frac{\|I+tA\|}{t} =$$

$$= \lim_{0<t\to +0} \frac{\|I+tA\| - \|I\|}{t}. \tag{7}$$

Последнее равенство в (5) говорит о том, что a есть логарифмическая норма Лозинского матрицы A: $a = \|A\|_{log}$. Из теорем 1 и 2 вытекает важное неравенство

$$\alpha = spa\ A \leqslant \|A\|_{log} = a. \tag{8}$$

Теорема 3. *Для нахождения логарифмической нормы справедлива формула*

$$\|A\|_{log} = \sup_{x\neq 0} \frac{[x, Ax]}{\|x\|}, \tag{9}$$

где

$$[x, h] = \lim_{0<t\to 0} \frac{\|x+th\| - \|x\|}{t} \tag{10}$$

есть односторонний дифференциал Гато нормы [2, с. 461].

В следующей теореме говорится о границах логарифмической нормы.

Теорема 4. *Пусть A – квадратная матрица n-го порядка и $\alpha = spa\ A$ – её спектральная абсцисса. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно задать такую операторную норму $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$, что*

$$(spa\ A \leqslant)\|A\|_{(\varepsilon)log} \leqslant spa\ A + \varepsilon. \tag{11}$$

Литература

1. Перов А. И. Новые признаки устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами / А. И. Перов // АиТ. — 2002. — № 2. — С. 22–23.

2. Теория показателей Ляпунова и ее применение к теории устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с.

3. Далецкий Ю. Л. Устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

НАХОЖДЕНИЕ НАПОРОВ ПОД ГИБКИМ ФЛЮТБЕТОМ ПРИ НАЛИЧИИ В ОСНОВАНИИ ДРЕНИРУЮЩЕГО СЛОЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону)
simon@sfedu.ru

В данной работе предполагается исследование фильтрации под гибким грунтонаполняемым флютбетом при наличии в основании дренирующего слоя, когда мощность водонепроницаемого основания неограниченна.

Подземный контур флютбета до наступления деформации имеет эллиптическую форму $y = -\frac{b}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, а область размыва нижнего бьефа за сооружением аппроксимируется дугой окружности, с абсциссой начальной точки размыва C и абсциссой максимальной точки размыва l.

Краевые условия для комплексного потенциала имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -\kappa_0 H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{BC} = 0,$$

где H — действующий на сооружение напор, κ_0 — коэффициент фильтрации.

При решении используются методы мажорантных областей и конформных преобразований [1]. Путем деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых задачу фильтрации можно решить точно. Полученные фильтрационные характеристики для этих областей заведомо дают верхние и нижние оценки искомых.

Верхняя $\overline{h}$ и нижняя $\underline{h}$ оценки напоров вдоль недеформированного подземного контура флютбета определяются по формулам

$$\overline{h} = \frac{H}{\pi} arccos\left[\frac{1}{d+1}\left(\frac{x-aR-c}{aR} + \frac{aR}{x-aR-c} + d - 1\right)\right],$$

$$\underline{h} = \frac{H}{\pi} arccos\left[\frac{1}{d-1}\left(\frac{x-aR-c}{aR} + \frac{aR}{x-aR-c} + d + 1\right)\right],$$

где

$$d = \frac{c+a(1+R)}{aR} + \frac{aR}{c+a(1+R)}, R = \frac{a^2+al+b\sqrt{2al+l^2-b^2}}{2(a^2-b^2)} + \frac{c}{2a}.$$

Искомое значение находится как среднее арифметическое найденных оценок. Решение получается достаточно точным, а его погрешность находится строго обоснованно.

Литература

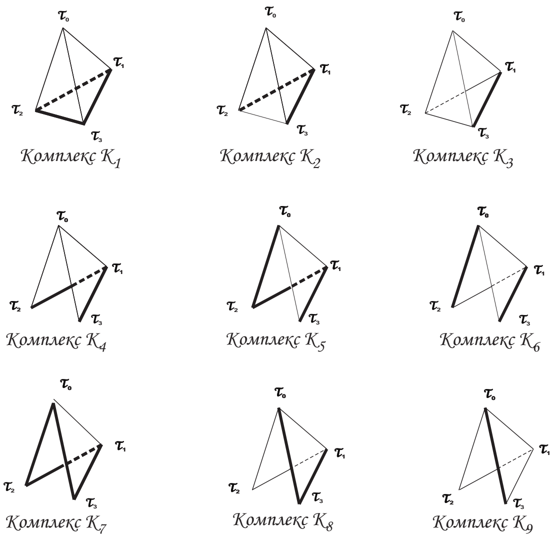
1. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. И. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. — Киев : Наукова думка, 1977.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Л.А. Ковалева (Белгород)

kova1eva1ida@yandex.ru

Рассматривается нелокальная краевая задача на стратифицированном комплексе, представляющим собой тетраэдр без одной грани. Множество вершин комплекса обозначим $F = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Комплексы K_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, получены из тетраэдра путем выбрасывания одной грани $\tau_1\tau_2\tau_3$, а остальные комплексы, выбрасыванием граней $\tau_1\tau_2\tau_3$ и $\tau_0\tau_2\tau_3$. На рисунке жирным шрифтом выделены стороны, на которых для каждого комплекса задаются условия Дирихле.



Задача Дирихле состоит в отыскании гармонической на всем комплексе функции $u \in C(K \setminus F)$, принимающей на границе заданное значение. Будем рассматривать ее в весовых пространствах Гельдера функций, удовлетворяющих условию Гельдера вне любой окрестности множества F, а в вершинах допускающих особенности степенного характера.

Пусть $æ_{-0}$ и $æ_{(+0)}$ означают индексы задачи в пространствах, соответственно, $C^{\mu}_{-\delta}(K,F)$ и $C^{\mu}_{(+\delta)}(K,F)$. Показано, что задача фредгольмова в пространствах $C^{\mu}_{-\delta}(K,F)$ и $C^{\mu}_{(+\delta)}(K,F)$ и для комплексов $K = K_i,\ \ 1 \leqslant i \leqslant 9$, соответствующие индексы принимают следующие значения

$$æ_{-0} = \begin{cases} 1, & K = K_1, \quad K_2, \quad K_4, \quad K_8, \\ 0, & K = K_5, \quad K_6, \quad K_7, \\ 2, & K = K_3, \quad K_9. \end{cases}$$

а $æ_{(+0)} = 0$ для всех комплексов.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный [и др.]. — М. : Физматлит, 2004, — 272 с.

2. Солдатов А. П. Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно- гладкий случай / А. П. Солдатов // Изв. АН СССР. — 1992. — Т. 56, № 3. — С. 566–604.

3. Солдатов А. П., Обобщенная задача Римана на римановой поверхности / А. П. Солдатов // Докл. РАН. — 1998. — Т. 362, № 6. — С. 735–738.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА – ОРЛИЧА

Л.М. Кожевникова (Стерлитамак)

kosul@mail.ru

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\},\ n \geqslant 2$. Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i} = f(\mathrm{x}, u), \quad \mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

с неоднородными граничными условиями:

$$u(\mathrm{x})\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathrm{x})\Big|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x},\mathrm{s})$, $i = 1,\ldots,n$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $\mathrm{s} = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathbb{R}_n$, каратеодориевы и существуют положительные числа $\overline{a}, \widehat{a}$ и измеримые неотрицательные функции $\varphi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и $\mathrm{s},\mathrm{t} \in \mathbb{R}_n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},\mathrm{s}) s_i \geqslant \overline{a} \sum_{i=1}^{n} B_i(s_i) - \varphi(\mathrm{x}); \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i(a_i(\mathrm{x},\mathrm{s})) \leqslant \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} B_i(s_i) + \Phi(\mathrm{x}); \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x},\mathrm{s}) - a_i(x,\mathrm{t}))(s_i - t_i) > 0. \tag{5}$$

Здесь $B_1(z),...,B_n(z)$ — произвольные N–функции, а $\overline{B}_1(z),...,\overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним (см. [1]). Функция $f(\mathrm{x},r)$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, каратеодориева и неубывающая по r.

В работе [2] для изотропного эллиптического уравнения (1) со степенными нелинейностями установлены существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле с однородным граничным условием. Здесь доказана единственность энтропийного решения задачи Дирихле с неоднородными граничным условием (2) в произвольной неограниченной области Ω для эллиптического уравнения (1) с нестепенными нелинейностями.

Через $L_B(\Omega)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N-функции $B(z)$, с нормой Люксембурга. Замыкание пространства $Lip_0(\Omega)$ в $L_B(\Omega)$ обозначим через $E_B(\Omega)$. Пространство $L_B(\Omega)$ является сопряженным к пространству $E_{\overline{B}}(\Omega)$.

Определим анизотропное пространство Соболева-Орлича $\mathring{W}^1_{\mathrm{LB}}(\Omega)$, как множество тех элементов $\mathrm{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \prod_{i=1}^{n} L_{B_i}(\Omega)$, для которых существуют последовательности $\vartheta_m \in C_0^1(\Omega)$ такие, что $\nabla\vartheta_m \rightharpoonup \mathrm{v}$ $*$-слабо как последовательности функционалов над $\prod_{i=1}^{n} E_{\overline{B}_i}(\Omega)$.

Положим $T_k(r) = \max\{-k, \min\{k, r\}\}$.

Определение. *Энтропийным решением задачи (1), (2) с* $\psi \in L_\infty(\Omega)$, $\nabla\psi \in \prod_{i=1}^{n} E_{B_i}(\Omega)$ *называется измеримая функция* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$1) f(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega);$$
$$2) \nabla T_k(u-\psi) \in \mathring{W}^1_{\mathrm{LB}}(\Omega) \text{ при всех } k > 0;$$

при всех $k > 0$, $\xi \in C_0^1(\Omega)$ *справедливо равенство:*

$$\int\limits_{\Omega} \left(f(\mathrm{x}, u) T_k(u-\psi-\xi) + \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\psi-\xi)\right) d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), *тогда энтропийное решение задачи* (1), (2) *единственно.*

Литература

1. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 272 с.
2. An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations / P. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouet etc. // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4 serie. — 1995. — V. 22, № 3. — P. 241–273.

О ДВИЖЕНИЯХ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ[1]

Н.Д. Копачевский, З.З. Ситшаева (Симферополь)
szz2008@mail.ru

Изучается задача о поведении идеальной жидкости с плотностью $\rho = \mathrm{const}$ в осемиметричном сосуде, находящемся под действием слабого гравитационного поля с ускорением $\vec{g} = \mathrm{const}$ и поля массовых сил $\vec{f}(t, x)$. Пусть в состоянии покоя жидкость занимает область $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, ограниченную частью S стенки и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_0 находится внутри Ω_0, Γ_1 — поверхность капли, свисающей из отверстия в дне; $\partial\Gamma_0$, $\partial\Gamma_1$ — границы

[1] Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете.)

контакта Γ_j с сосудом; S, Γ_j, $\partial\Gamma_j$ — липшицевы. Тогда задача о малых движениях жидкости относительно состояния покоя имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+\nabla p=\rho\vec{f},\quad \operatorname{div}\vec{w}=0\quad (\text{в }\ \Omega),\quad \vec{w}\cdot\vec{n}|_S=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial\nu}+\chi_0\zeta_0|_{\partial\Gamma_0}=0,\ \ \zeta_0:=\vec{w}\cdot\vec{n}|_{\Gamma_0},\ \ \chi_0:=\frac{k_0\cos\delta_0-k_S}{\sin\delta_0}, \tag{2}$$

$$p|_{\Gamma_0}=-\sigma\Delta_0\zeta_0+(-\sigma((k_1^0)^2+(k_2^0)^2)g\rho\cos(\widehat{\vec{n}_0,\vec{e}_3})-(k_S^0)^2)\zeta_0, \tag{3}$$

$$\zeta_1|_{\Gamma_1}=0,\ \ \zeta_1:=\vec{w}\cdot\vec{n}|_{\Gamma_1},\ \ \int\limits_{\Gamma_0}\zeta_0\,d\Gamma_0+\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\,d\Gamma_1=0, \tag{4}$$

$$p|_{\Gamma_1}=-\sigma\Delta_1\zeta_1+(-\sigma((k_1^1)^2+(k_2^1)^2)g\rho\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{e}_3})-(k_S^1)^2)\zeta_1, \tag{5}$$

$$\vec{w}(0,x)=\vec{w}^0(x),\quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial t}(0,x)=\vec{w}^1(x),\quad x\in\Omega, \tag{6}$$

где $\vec{n}_j$, $j=0,1$ — векторы внешних нормалей к Γ_j; $\vec{\nu}$ — нормаль к $\partial\Gamma_0$ в плоскости, касательной к Γ_0; δ_0 — угол смачивания на $\partial\Gamma_0$; (k_1^j), (k_2^j) — главные кривизны Γ_j; k_0 и k_S — кривизны сечений поверхностей Γ_0 и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma_0$; $\sigma=\mathrm{const}>0$ — поверхностное натяжение на Γ_0; $\zeta=\zeta(t,x):=\{\zeta_0,\zeta_1\}$, ζ_0, ζ_1 — малые отклонения поверхности жидкости относительно Γ_j вдоль нормалей $\vec{n}_j$ к Γ_j; Δ_j — операторы Лапласа – Бельтрами на Γ_j.

С использованием операторного подхода (см. [1–4]) проблема (1)–(6) приводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения вида

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\zeta+\mathcal{B}\zeta=\mathcal{A}f,\ \ \zeta:=(\zeta_0;\widetilde{\zeta}_1)^\tau,\ f:=(f_0;f_1)^\tau, \tag{7}$$

$$\zeta(0)=\zeta^0,\ \ \zeta'(0)=\zeta^1, \tag{8}$$

в пространстве $\mathcal{H}=L_2(\Gamma)\ominus 1_\Gamma$, $1_\Gamma=\{1_{\Gamma_0};1_{\Gamma_1}\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* $0<\mathcal{A}\in\mathfrak{S}_\infty$, $B=B^*\gg\gg 0$, $\zeta^0\in\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B})$, $\zeta^1\in\mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2})$, $f\in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}))$. *Тогда задача (7) имеет единственное сильное решение на интервале* $[0,T]$, *т.е. все слагаемые в уравнении (7) непрерывны по* t *со значениями в* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$.

Теорема 2. *Если в задаче (6)–(7) выполнены условия*

$\widetilde{\zeta}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}), \quad \widetilde{\zeta}^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2}), \quad \widetilde{f} \in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})),$ *то существует единственное сильное решение задачи (6)–(7) на отрезке* $[0,T]$, *т.е. все слагаемые в уравнении (6) непрерывны по* t *со значениями в* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$.

Теорема 3. *Пусть в задаче (1)–(5) выполнены условия:*

$$a)\ \vec{w}^0(x) \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega);\ b)\ w_n^0|_{\Gamma_k} \in \mathcal{D}(B_k) \cap H^{3/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{0,n};$$

$$c)\ \vec{w}^1(x) \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega);$$

$$d)\ w_n^1|_{\Gamma_0} \in H^1(\Gamma_0),\ \ w_n^0|_{\Gamma_k} \in H_0^1(\Gamma_k),\ k = \overline{1,n};$$

$$e) \vec{f}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega)).$$

Тогда задача (1)–(5) имеет на отрезке $[0,T]$ *сильное решение, т.е. в уравнении движения (1) все функции непрерывны по* t *со значениями в* $\vec{L}_2(\Omega)$, *а в граничных условиях на* Γ *все слагаемые непрерывны по* t *со значениями в* $H_\Gamma^{1/2} := (H^{1/2}(\Gamma_0) \times H_0^{1/2}(\Gamma_1) \times \ldots \times H_0^{1/2}(\Gamma_n)) \cap L_{2,\Gamma}$.

Литература

1. Kopachevsky N.D., Sitshayeva Z.Z. On the spectral criterion of stability in the problem of small motions of an ideal capillary fluid with disconnected free surface // Journal of Mathematical Sciences. 2015. — Vol. 206, Issue 1. — P. 39–57.

2. Kopachevskii N.D., Sitshaeva, Z.Z. On the Equilibrium and Stability of a Capillary Liquid with Disconnected Free Surface in an Open Vessel // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 205, Issue 6. — P. 777–790.

3. Копачевский Н.Д. О равновесии и устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде / Н.Д. Копачевский, З.З. Ситшаева // Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 41–45.

4. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Наука, 1989. — 416 с.

О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

С.В. Корнев (Воронеж)
kornev_vrn@rambler.ru

Среди направлений исследования бифуркационного феномена в динамических системах, описываемых различными классами дифференциальных включений, представляет интерес подход, основанный на методе направляющих функций, общие принципы которого для случая дифференциальных уравнений сформулировали еще в середине прошлого века М.А. Красносельский и А.И. Перов (см., например, [1]), а для случая дифференциальных включений — Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский (см. [2]). Следует отметить, что бифуркационная задача рассматривается не только с позиций классического метода направляющих функций (см. [3]), но и его модификации – метода интегральных направляющих потенциалов (см., например, [4]).

В настоящей работе, развивая подход В. Крышевского (см. [3]), предлагается использовать при исследовании бифуркационной задачи для некоторых классов дифференциальных включений понятие многолистной направляющей функции, впервые введенное Д.И. Рачинским для решения задачи о существовании периодических решений дифференциальных уравнений (см. [5]).

Будем рассматривать периодическую задачу для семейства дифференциальных включений следующего вида:

$$\begin{cases} z'(t) \in F(t, z(t), \mu), & (1) \\ z(0) = z(T), & (2) \end{cases}$$

в предположении, что (H_1) мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to$ $\to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично $(T > 0)$ по первому аргументу; (H_2) для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ задача (1), (2) имеет решение $z : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, для которого $z(0) = z(T) = 0$ (по поводу терминологии см. [2]).

Под решением задачи (1), (2) понимается пара (z, μ), удовлетворяющая почти в каждой точке включению (1), где $z \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 14-01-00468, 16-01-00386) и РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

– абсолютно непрерывная T-периодическая функция, $\mu \in \mathbb{R}$. Символом S обозначается множество нетривиальных решений.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через ζ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим риманову поверхность $\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}$.

На $\Pi \times \mathbb{R}$ пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $W(\xi, \mu)$ такая, что для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} > 0, \quad W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = W(\varphi, \rho, \mu) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \quad (3)$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}$ пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta, \mu)$, для которой $\frac{\partial V(0,\mu)}{\partial \zeta} = 0$ и

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} V(\zeta, \mu) = +\infty. \quad (4)$$

Для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ выберем $\rho_1 := \rho_1(\mu)$, $\rho_2 := \rho_2(\mu)$ такие, что $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2$ и для $\vartheta_0 := \min V(\zeta, \mu)$ возьмем $\vartheta := \vartheta(\mu)$ такое, что $\vartheta > \vartheta_0$. Пусть $\Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V_\mu(pz) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}$.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(t, \mu)$, $\beta(t, \mu)$ такие, что для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t,z,\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qy \right\rangle < \alpha(t, \mu), \quad (5)$$

$$\inf_{z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t,z,\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qy \right\rangle > \beta(t, \mu). \quad (6)$$

Определение. Пару функций $\{V(\zeta, \mu), W(\xi, \mu)\}$, обладающих свойствами (2)–(6), будем называть многолистной направляющей функцией (МНФ) относительно области $\Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$ для включения (1), если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in F(t,z,\mu)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega_\mu(\vartheta, \rho_1, \rho_2);$$

$$\left\langle \frac{\partial V(pz, \mu)}{\partial pz}, py \right\rangle < 0, \quad y \in F(t, z, \mu),\ V(pz, \mu) \geqslant \vartheta,\ \|qz\| \leqslant \rho_2;$$

$$2\pi(N_\mu - 1) < \int\limits_0^T \alpha(\tau,\mu)d\tau, \int\limits_0^T \beta(\tau,\mu)d\tau < 2\pi N_\mu, \text{ где } N_\mu - \text{целое число.}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (H_1) *и* (H_2). *Предположим, что* $\{V(\zeta,\mu), W(\xi,\mu)\}$ *является МНФ для включения (1) относительно области* $\Omega\mu\,(\vartheta,\rho_1,\rho_2)$ *для каждого* $\mu : |\mu - \mu_0| \geqslant r$. *Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*

(i) *существует последовательность* $\{(y_n,\mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n \to \overline{\mu}$, $|\overline{\mu} - \mu_0| = r$, $y_n \in \mathbb{R}^n$, $y_n \neq y_m$ *для* $n \neq m$, *и существует последовательность* (z_n) *решений задачи (1), (2) при* $\mu = \mu_n$ *таких, что* $z_n(0) = z_n(T) = y_n \to 0$ *и* $z_n \to \overline{z}$, *где* $\overline{z}$ *– решение задачи (1), (2) при* $\mu = \overline{\mu}$ *такое, что* $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$;

(ii) *существует связное множество* C *точек* (y,μ), $y \neq 0$, *такое, что* • $(0,\overline{\mu}) \in \overline{C}$ *при* $|\overline{\mu} - \mu_0| < r$; • C *– неограниченно и либо* $\overline{C} \cap \partial U \neq \varnothing$, *либо* $(0,\widetilde{\mu}) \in \overline{C}$ *для некоторого* $\widetilde{\mu} \in \mathbb{R} : |\widetilde{\mu} - \mu_0| > r$; • *каждой точке* $(y,\mu) \in \overline{C}$ *соответствует решение* $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *включения (1), для которого* $z(0) = z(T) = y$. *В частности, существует последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *решений включения (1) для* $\mu = \mu_n$, $z_n(0) = z_n(T) = y_n$, *где* $\mu_n \to \overline{\mu}$, $\|\overline{\mu} - \mu_0\| < r$, *сходится к решению* $\overline{z}$ *включения (1) для* $\mu = \overline{\mu}$, $\overline{z}(0) = \overline{z}(T) = 0$.

Литература

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 332 с.

2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — Изд. 2-е. — М. : Либроком, 2011. — 226 с.

3. Kryszewski W. Homotopy properties of set-valued mappings / W. Kryszewski. — Torun : Univ. N. Copernicus Publ., 1997. — 243 p.

4. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. — Berlin : Springer, 2013. — 177 p.

5. Rachinskii D. I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems / D. I. Rachinskii // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. — 1996. — V. 26, № 3. — P. 631–639.

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»

А.С. Коротких, Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов (Воронеж)
korotkikh.andrey@gmail.com, tata_sti@rambler.ru, yusapr@mail.ru

Как известно, структурные изменения вещества изучаются посредством специальным образом подобранных модельных дифференциальных уравнеий при краевых условиях Пуассона. Например, при изучении динамики спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава) часто используется уравнение Кана – Хилларда [1]–[5]

$$\dot{w} = \Delta\, \mathrm{grad}\, V(w) := \mathcal{D}\, \Delta(w^3 - w - \gamma\Delta(w)), \tag{1}$$

в котором $w = w(x,t)$ — относительная концентрация компоненты вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant w \leqslant 1$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(w) := \mathcal{D} \iint\limits_U \left(\frac{(w^2-1)^2}{4} + \frac{\gamma}{2}|\nabla U|^2 \right) dx_1 dx_2$$

— интеграл энергии, U — область, занятая сплавом, t — время. Описание равновесных состояний сводится к построению таких решений w уравнения (1), для которых выполнено расширенное граничное условие Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial U} = \frac{\partial \Delta(w)}{\partial n}\Big|_{\partial U} = 0,$$

где ∂U — граница области U, n — векторное поле нормалей к границе. Первоочередной интерес представляют стационарные состояния — решения $w = w(x)$ стационарного уравнения Кана – Хилларда

$$\mathcal{D}\, \Delta(w^3 - w - \gamma\Delta(w)) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что в состав решений уравнения (2) входят решения стационарного уравнения «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью

$$\gamma\Delta(w) + w - w^3 = C - \mathrm{const} \tag{3}$$

или, что одно и то же, экстремали (критические точки) функционала $\overline{V}(w) := V(w) - C\,[w]$, где $[w] := \iint\limits_U w\, dx_1 dx_2$ — среднее значение

w. Поиск экстремалей $V(w)$ можно осуществлять посредством редукции Ляпунова – Шмидта к конечномерной задаче $\operatorname{grad} W(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $W(\xi) := \inf\limits_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} \overline{V}(w)$ — ключевая функция [6]-[7], построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях Пуассона) в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний.

С нестационарным уравнением Кана – Хилларда тесно связано динамическое уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью $\dot{w} = \gamma\Delta(w) + w - w^3 - C$.

Обратимся к функциональным пространствам $\widehat{\mathcal{H}}_0, \widehat{\mathcal{H}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{H}}_5$, где $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$, $\widehat{\mathcal{H}}_k$ — замыкание по норме $\|w\|_k$ $(k = 1, 2, \ldots 5)$ множества тригонометрических полиномов вида $\sum\limits_{p+q=1}^{m} \xi_{p,q} e_{p,q}$, $p, q \geqslant 0$, $e_{p,q}(x_1, x_2)$ — собственная функция оператора Δ (при краевом условии Неймана $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial U} = 0$): $e_{p,0} = \sqrt{2}\cos(p\pi x_1)$, $e_{0,q} = \sqrt{2}\cos(q\pi x_2)$, $e_{p,q} = 2\cos(p\pi x_1)\cos(q\pi x_2)$, $pq \neq 0$. Собственная функция $e_{p,q}$ отвечает собственному значению $\lambda_{p,q} = -\pi^2(p^2 + q^2)$, совокупность функций $\{e_{p,q}\}$ является ортонормированной системой векторов в $L_2(\Omega)$. Норма $\|w\|_k$ определена следующими соотношениями:

$$\|w\|_1^2 := -\iint\limits_{\Omega} w\,\Delta(W)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} |\nabla(w)|^2\,dx_1 dx_2\,,$$

$$\|w\|_2^2 := \iint\limits_{\Omega} w\,\Delta^2(W)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} (\Delta(w))^2\,dx_1 dx_2\,,$$

$$\|w\|_3^2 := -\iint\limits_{\Omega} w\,\Delta^3(W)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} |\nabla(\Delta(w))|^2\,dx_1 dx_2\,,$$

$$\|w\|_4^2 := \iint\limits_{\Omega} w\,\Delta^4(W)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} (\Delta^2(w))^2\,dx_1 dx_2\,,$$

$$\|w\|_5^2 := -\iint\limits_{\Omega} w\,\Delta^5(W)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} |\nabla(\Delta^2(w))|^2\,dx_1 dx_2\,.$$

Для каждого $k \in \{2, \ldots, 5\}$ линейный оператор $\mathcal{A} := -\Delta : \widehat{\mathcal{H}}_k \longmapsto \longmapsto \widehat{\mathcal{H}}_{k-2}$ является изоморфизмом. При этом оператор $\mathcal{A}$ положительный и диагонализируемый:

$$\mathcal{A}:\ \sum_{p,q}\xi_{p,q}e_{p,q}\longmapsto\sum_{p,q}|\lambda_{p,q}|\,\xi_{p,q}e_{p,q}\,,\qquad p,q\geqslant 0\,,\quad p+q\geqslant 1\,.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — положительный и симметричный оператор, для которого $\mathcal{B}^2=\mathcal{A}$ (то есть $\mathcal{B}$ — положительный квадратный корень из $\mathcal{A}$). Оператор B изоморфно действует из $\widehat{\mathcal{H}}_k$ на $\widehat{\mathcal{H}}_{k-1}$, $\forall\,k\geqslant 1:$

$$\mathcal{B}:\ \sum_{p,q}\xi_{p,q}e_{p,q}\longmapsto\sum_{p,q}\sqrt{|\lambda_{p,q}|}\ \xi_{p,q}e_{p,q}=\pi\sum_{p,q}\sqrt{p^2+q^2}\ \xi_{p,q}e_{p,q},$$

где $p+q\geqslant 1$. Из этого соотношения следует, что

$$\|w\|_k=\|\mathcal{B}\,(w)\|_{k-1}^2\quad\forall\,k\,.$$

Так как уравнение Кана – Хилларда допускает представление в «операторном» виде

$$\dot{w}=-\mathcal{B}^2\mathrm{grad}\,V(w)\,,\qquad w\in\widehat{\mathcal{H}}_4\,.$$

то, следовательно, оно линейно эквивалентно уравнению

$$\dot{w}=-\mathcal{B}\,\mathrm{grad}\,V(\mathcal{B}\,w)\,,\qquad w\in\widehat{\mathcal{H}}_5\,,\tag{4}$$

у которого правая часть — антиградиент функционала $V(\mathcal{B}\,w)$. Таким образом, исследование решений уравнения Кана – Хилларда сводится к исследованию решений градиентного уравнения (4) в $\widehat{\mathcal{H}}_5$. Оно естественно продолжается (вместе с функционалом $V(\mathcal{B}\,w)$) на пространство $\widehat{\mathcal{H}}_4$.

Последнее замечание позволяет утверждать, что для исследования траекторий динамической системы Кана – Хилларда можно привлекать вариационный подход и, в частности, использовать метод прямого спуска. Далее мы рассмотрим этот подход применительно к родственной динамической системе «реакция-диффузия».

Рассмотрим уравнение диффузии в форме

$$\dot{w}=-\mathrm{grad}\ (V(w)-C[w])=\Delta w+\lambda w-w^3-C\,,\tag{5}$$

где $w=w(x,t)$ — концентрация компонента, $x=x(x_1,x_2)$, $x\in U=$ $=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$,

$$V(w):=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}-\lambda\frac{w^2}{2}+\frac{w^4}{4}\right)dx_1dx_2$$

— интеграл энергии по области $U = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что выполнено граничное условие Неймана $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial U} = 0$ и выполнено естественное ограничение на концентрацию вещества в целом:

$$[w] := \iint\limits_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \ = K > \ 0. \tag{6}$$

При исследовании локальных бифуркаций экстремалей часто используется локальная ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(K + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях, в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний):

$$e_0 = 1,\ e_1 = \sqrt{2}\cos(\pi x_1),\ e_2 = \sqrt{2}\cos(\pi x_2),\ e_3 = 2\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2),$$

$$e_4 = \sqrt{2}\cos(2\pi x_1),\ e_5 = \sqrt{2}\cos(2\pi x_2),\ e_6 = 2\cos(2\pi x_1)\cos(\pi x_2),$$

$$e_7 = 2\cos(\pi x_1)\cos(2\pi x_2),\ e_8 = 2\cos(2\pi x_1)\cos(2\pi x_2),\ \ldots\ .$$

В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использовать большое количество мод, что приводит к значительному увеличению размерности аппроксимирующей системы. Снизить ее размерность можно за счет использования нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции.

Дальнейший анализ можно осуществить переходом к конечномерной задаче $\operatorname{grad} W(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $W(\xi) := \inf\limits_{\langle w, e_j\rangle = \xi_j} \overline{V}(w)$ — нелокальная ключевая функция Ляпунова – Шмидта [6], [7].

Запишем искомую функцию концентрации w в виде

$$w = K + \widetilde{w}, \qquad \iint\limits_{\Omega} \widetilde{w}\, dx_1 dx_2 = 0. \tag{7}$$

Сужение функционала V на подпространство функций с фиксированным средним (равным (6)) осуществляется подстановкой (7), в результате которой получаем $\widetilde{V}(\widetilde{w}) := V(K+\widetilde{w})$ на $\widehat{\mathcal{H}}_2$:

$$\widetilde{V}(\widetilde{w}) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \widetilde{w}|^2}{2} - \widetilde{\lambda}\, \frac{\widetilde{w}^2}{2} + \frac{\widetilde{w}^4}{4} + K\, \widetilde{w}^3 \right) dx_1 dx_2 \,, \tag{8}$$

$\widetilde{\lambda} = \lambda - \frac{3}{2}\, K^2$, и, соответственно,

$$-\mathrm{grad}\,(\widetilde{V})(\widetilde{w}) = \Delta \widetilde{w} + \widetilde{\lambda}\, \widetilde{w} - \widetilde{w}^3 - 3K\, \widetilde{w}^2 - \alpha \,, \tag{9}$$

$\alpha = \iint\limits_{\Omega} \left(\widetilde{w}^3 + 3K\, \widetilde{w}^2 \right) dx_1 dx_2$ (в тройке пространств $\widehat{\mathcal{H}}_2 \subseteq \widehat{\mathcal{H}}_0 \subseteq \widehat{\mathcal{H}}_0$). Для отыскания критического значения параметра λ рассмотрим линеаризованное уравнение (в точке $\widetilde{w} = 0$) $\Delta \widetilde{w} + \widetilde{\lambda}\, \widetilde{w} = 0$. Минимальным критическим значением параметра $\widetilde{\lambda}$ является число π^2 (соответственно $\lambda = \lambda_* = \pi^2 + \delta$). Модами бифуркации при таком значении λ являются функции $e_1 = \sqrt{2}\cos(\pi x_1)$, $e_2 = \sqrt{2}\cos(\pi x_2)$.

Теорема 1. *При малых значениях концентрации и при малых $\delta := \lambda - \lambda_*$ главной частью ключевой функции, соответствующей функционалу (3), является многочлен (4-й степени)*

$$U(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\delta}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{1}{2}\xi_1^2 \xi_2^2 \,.$$

Доказательство вытекает из определяющего ключевую функцию соотношения

$$W_\delta(\xi_1, \xi_2) := \inf_{\langle \widetilde{w}, e_1 \rangle = \xi_1,\, \langle \widetilde{w}, e_2 \rangle = \xi_2} \widetilde{V}(\widetilde{w}) \,,$$

и из того, что

$$W_\delta(\xi_1, \xi_2) = \widetilde{V}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) + o\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^2 =$$

$$= -\frac{\delta}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{a}{4}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{b}{2}\xi_1^2 \xi_2^2 + o\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^2 \tag{10}$$

(см. [6]–[7]). Здесь учтено, что $\iint\limits_{\Omega} \widetilde{w}^3 dx_1 dx_2 = 0$, если $\widetilde{w} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. Несложные вычисления показывают, что

$$a = \iint\limits_{\Omega} e_1^4\, dx_2 dx_1 = \iint\limits_{\Omega} e_2^4\, dx_2 dx_1 = \frac{3}{2},$$

$$b=\iint\limits_{\Omega} e_1^2 e_2^2 dx_1 dx_2 = \left(\int\limits_0^1 e_1^2 dx_1\right)\left(\int\limits_0^1 e_2^2 dx_2\right) = 1\,.$$

Вид главной части ключевой функции связан, во-первых, с ее симметрией относительно преобразования $(\xi_1,\xi_2)\to(\xi_2,\xi_1)$ и, во-вторых, с тем, что кубическая часть в тейлоровском разложении функционала V обнуляется на $\xi_1 e_1+\xi_2 e_2$.

Теорема 2. *Для функционала (3) вблизи нуля при малых концентрациях имеется ветвь устойчивых функций концентраций вида*

$$\widetilde{w}=K+\varepsilon(e_1+e_2)+o(\varepsilon)\,,$$

где $\varepsilon=\mathrm{const}\,\delta^{\frac{1}{2}}$ *— малый параметр.*

При «конечных» значениях δ возникает необходимость применения других вычислительных средств, например, принципа сжатых отображений, нелинейного метода Галеркина – Ритца и пр.

Запишем уравнение $\mathrm{grad}\,\overline{V}(w)=0$ в виде

$$f(w):=\mathcal{A}w-\lambda\,w-g(w)=0,\qquad w\in E, \tag{11}$$

где

$$E=\left\{w\in\widehat{\mathcal{H}}_2(\Omega):\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\,,\ \ \iint\limits_{\Omega} w(x_1,x_2)dx_1dx_2=0\right\}.$$

$$\mathcal{A}=-\Delta\,,\qquad g(w):=-(w^3+3K\,w^2)\,.$$

Оператор f действует из E в $F=\widehat{\mathcal{H}}_0(\Omega)$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ является положительным и диагонализируемым:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}\xi_{p,q}e_{p,q}\longmapsto\sum_{p,q=1}^{\infty}\lambda_{p,q}\xi_{p,q}e_{p,q}\,,$$

здесь $e_{p,q}(x,y)$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$.

Рассмотрим далее операторное уравнение

$$f(w):=\mathcal{A}w-\lambda\,w-g(w)+c=0,\qquad w\in\widehat{\mathcal{H}}_2\,,$$

и перепишем его в виде (продолжив на $\widehat{\mathcal{H}}_1$)

$$w=\mathcal{A}^{-1}(g(w)+\lambda\,w-c),\quad w\in\widehat{\mathcal{H}}_1\,. \tag{12}$$

Разобьем уравнение (11) в систему двух уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w)) + \lambda\, u - a) & = & 0\,, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w)) + \lambda\, v - b) & = & 0\,, \end{array}\right\} \qquad (13)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}\big|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}\big|_{N^\perp\cap E}$, $N := Lin(e_1, e_2)$. Второе уравнение системы (13) рассматривается в подпространстве $N^\perp \cap \widehat{\mathcal{H}}_1$. Из спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$ вытекает, что норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp \cap \widehat{\mathcal{H}}_1 \longrightarrow N^\perp \cap \widehat{\mathcal{H}}_1$ меньше единицы и поэтому оператор

$$S(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u+v, u+v) + \lambda\, v - b)$$

переводит некоторый шар $\|v\|_{\widetilde{H}^0} \leqslant L$ (в $N^\perp \cap \widehat{\mathcal{H}}_1$) в себя, являясь при этом сжимающим. Это означает, что решения второго уравнения системы (13) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u)\,, \qquad (14)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = S(v_{n-1})$. Подставив выражение (14) в первое уравнение системы (13), получим ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \qquad (15)$$

на конечномерном пространстве N. Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями [6]. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой $w = u + \Phi(u)$. Уравнение (15) также является потенциальным с потенциалом в виде ключевой функции $W(u) := V(u{+}\Phi(u))\,,\quad u \in N\,.$ Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществить непосредственно изучив экстремали ключевой функции W. Вычисление функции W и анализ ее критических точек осуществляется по известным технологиям [8],[9].

Посредством оценки размера образа отображения S и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения (12) (см. [9], [10] с. 184).

Литература

1. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. — P. 258–267.

2. J.W. Cahn, On spinodal decomposition, Acta Metall. 9 (1961) 795–801.

3. Скрипов В.П. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) / В.П. Скрипов, А.В. Скрипов // УФН. — 1979. — Т. 123, вып. 2. — С. 193–231.

4. J.W. Cahn, C.M. Elliott, A. Novick-Cohen, The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature, Eur. J. Appl. Math. 7 (1996) 287-301.

5. Инфельд Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос. - пер с англ. / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 480 с.

6. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

7. Костин Д.В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем : учебное пособие / Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — 207 с.

8. Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений / Т.И. Костина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 181–186.

9. Сапронов Ю.И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю.И. Сапронов // Вестник ЮУрГУ. Сер. : Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 74–86.

10. Ковалева М. И. Огибающие кривые, точки возврата и бифуркационный анализ нелинейных задач / М. И. Ковалева, Т. И. Костина, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. — 242 с.

О РАВНОМЕРНОЙ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Л.В. Крицков (Москва)
kritskov@cs.msu.su

Рассмотрим одномерный оператор Шредингера, порождаемый в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ дифференциальным выражением

$$Lu = -u'' + q(x)u, \qquad x \in \mathbb{R},$$

с потенциалом $q(x)$, являющимся вещественнозначной функцией-распределением из пространства $W^{-1}_{2,loc}(\mathbb{R})$. Это пространство является сопряженным к соболевскому пространству $W^{1,0}_2(\mathbb{R})$ функций с компактным носителем на $\mathbb{R}$.

В [1] показано, что если потенциал $q(x)$ равномерно локально принадлежит W^{-1}_2, т.е. представим в виде $q(x) = Q'(x) + q_1(x)$, где

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |Q(\tau)|^2 d\tau < \infty, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |q_1(\tau)|\, d\tau < \infty,$$

то максимальный оператор $\mathcal{A}$, сопоставляемый регуляризованному выражению L (см. подробности в [2]) с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \,|\, f, f' - Qf \in AC(\mathbb{R}),\, Lf \in L_2(\mathbb{R})\},$$

является самосопряженным, причем:

а) он полуограничен снизу,

б) если $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $f \in W^1_2(\mathbb{R})$ и $f' - Qf \in L_2(\mathbb{R})$.

Отметим, что как следует из общей теории самосопряженных операторов [3, XII.3], пространство $L_2(\mathbb{R})$ допускает упорядоченное спектральное представление относительно рассматриваемого оператора $\mathcal{A}$, которое характеризуется мерой $\rho(\lambda)$, кратностью $m \leqslant 2$, множествами кратности e_i и обобщенными собственными функциями $u_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,m}$. Функции $u_i(x,\lambda)$ являются решениями уравнения $Lu_i(x,\lambda) = \lambda u_i(x,\lambda)$ в слабом смысле и удовлетворяют должным образом регуляризованной формуле среднего значения Титчмарша.

В связи с этим для анализа сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору $\mathcal{A}$, может быть применен подход В.А. Ильина [4].

Теорема 1. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ положительно определен. Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \geqslant 0$ выполнена оценка*

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mu^2}^{(\mu+1)^2} \Big\{ |u_i(x,\lambda)|^2 + (\sqrt{\lambda}+1)^{-2} |u_i'(x,\lambda) - Q(x) u_i(x,\lambda)|^2 \Big\} d\rho(\lambda) = O(1).$$

Из теоремы 1 непосредственно следует, что спектральная функция оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяет равномерной по $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \geqslant 0$ оценке

$$\theta((\mu+1)^2; x, x) - \theta(\mu^2; x, x) = O(1).$$

Стандартные рассуждения показывают, что справедливо следующее утверждение о равномерной сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha})$ дробной степени оператора $\mathcal{A}$ и $\alpha > 1/4$, то ее спектральное разложение $\sigma_\lambda(x, f)$ сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, причем имеет место оценка*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_\lambda(x, f) - f(x)| = O(\lambda^{(1/4)-\alpha}).$$

Литература

1. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Self-adjointness of Schrödinger operators with singular potentials // Methods Funct. Anal. Topol. — 2012. — V.18, № 2. — С. 152–159.

2. Савчук А.М. Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Труды ММО. — 2003. — Т. 64. — С. 143–192.

3. Данфорд Н. Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж.Т. Щварц. — М. : Мир. Т. 2, 1966. — 1064 с.

4. Ильин В. А. Равномерная на всей прямой оценка обобщенных собственных функций одномерного оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом / В. А. Ильин, Л. В. Крицков // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 8. — С. 1323–1329.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

Л.П. Кувардина (Саратов)
KuvardinaLP@info.sgu.ru

В докладе рассматривается интегральный оператор вида

$$Af(x) = \int\limits_0^{p(x)} A(p(x),t)f(t)dt,$$

где $p(x) = \frac{1-x}{ax+1}$ $(a > -1)$; функции $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, и $A(x,x) = 1$, $A_x(x,t)\big|_{t=x} = 0$.

Впервые операторы такого вида в случае линейной инволюции $p(x) = 1-x$ были рассмотрены А.П. Хромовым [1].

Заметим, что такой выбор оператора, использование инволюции $p(x)$, позволяют свести интегральное уравнение для резольвенты Фредгольма оператора к системе двух интегро-дифференциальных уравнений, хотя обычно к конечной системе не сводится. Это является одним из ключевых моментов работы. Более того, выбор пределов интегрирования в операторе позволил освободиться от требования условия регулярности по Биркгофу граничных условий обратного оператора, что существенно упрощает формулировки результатов. В доказательствах используется метод Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

Эта работа продолжает исследование интегральных операторов с дробно-линейной инволюцией. Ранее автором была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора A и в тригонометрический ряд Фурье.

В докладе изучается вопрос о сходимости средних Рисса разложений по (с.п.ф.) оператора A и устанавливается аналог теоремы Жордана -– Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье.

Литература

1. Хромов А.П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования /

А.П. Хромов // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа : сб. статей. — М. : АФЦ, 1999. — С. 255–266.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ МАЛОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ТЕЛА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В.С. Купцов, А.А. Катрахова (Воронеж)
Vckuptsov@rambler.ru

В работе вычислено поле скоростей и силовое воздействие на эллипсоид в нестационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Ввиду сложности задачи, не представляется возможным совершенно точно вычислить гидродинамические параметры возмущенного потока, поэтому при решении задачи рассматривались линеаризованные уравнения Навье – Стокса, а также использовался метод малого параметра. Получены нулевое и первое приближения задачи. Сделана оценка точности решения задачи.

Пусть основной (невозмущенный) поток удовлетворяет линейным уравнениям Навье – Стокса [1], то есть рассматривается медленное течение жидкости. Решение уравнений можно записать в виде разложения поля скоростей с помощью гармонических функций.

Внесем малый эллипсоид в невозмущенный поток . Поле скоростей и давлений возмущенного эллипсоидом потока будем искать в виде суммы двух решений. В качестве первого приближения берется решение задачи об обтекании сферы, внесенной в невозмущенный поток [2]. Второе решение определяется с помощью метода малого параметра. Малый параметр это малое изменение радиуса сферы.

Применяя к линейным уравнениям Навье – Стокса (уравнения параболического типа [3]) методы операционного исчисления, получим систему уравнений:

$$(\delta_{kj}+\varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2}+\varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3}^{-2}\frac{\partial^2 U_i^{\text{эл}}}{\partial x_k^2}-\frac{p}{v}U_i^{\text{эл}}=$$

$$=\frac{1}{\mu}(\delta_{ij}+\varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2}+\varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-1}\frac{\partial P^{\text{эл}}}{\partial x_k};$$

$$(\delta_{kj} + \varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-1}\frac{\partial U^{\text{эл}}}{\partial x_k} = 0,$$

где p — параметр преобразования Лапласа; x_k —декартовы координаты, $U_i^{\text{эл}}$, $P_{\text{эл}}$ — образы компонент полей скоростей и давления в возмущенном эллипсоидом потоке, μ, — вязкость жидкости, a — радиус малой сферы, δ_{kj} — тензор Кронекера.

По повторным индексам ведется суммирование.

Граничные условия для уравнений имеют вид: $U_i^{\text{эл}}\ |_{r=a} = 0$; $U_i^{\text{эл}}|_{r\to\infty} = U_i(x_{k,}, p)$, где $r^2 = x_k x_k, U$ — образы компонент поля скоростей в невозмущенном потоке.

Для поля скоростей и давлений получены оригиналы нулевого и первого приближений задачи. Точность решения задачи для силового воздействия будет порядка a^3, для компонент вектора скорости-порядка (a/L), где L — расстояние от центра эллипсоида до особенностей основного потока.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. — М. : Наука, 1973.

2. Купцов В.С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости / В.С. Купцов // Сб. статей по мех. спл. сред. — Воронеж : ВГУ. — 1976. — вып. 18.

3. Катрахова А.А. О разрешимости некоторых сингулярных краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, содержащих оператор Бесселя / А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.Ю. Сазонов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. VII Международ. конф. — Воронеж, 2014. — С. 186–188.

СВОЙСТВА ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ[1]

В.П. Курдюмов, А.П. Хромов (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), x \in [0,1], t \in (-\infty, \infty) \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x) \qquad (2)$$

и граничных условиях двух следующих видов

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (3)$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \qquad (4)$$

где $q(x) \in C[0,1]$ комплекснозначная функция, α_i, β_i $(i = 1, 2.)$ – комплексные числа.

В [1] использованием приема А.Н. Крылова [2] об ускорении сходимости рядов, подобных рядам Фурье, получено классическое решение задачи (1)–(3) для вещественной $q(x)$ при минимальных условиях на $\psi(x)$. В [3], [4] использованием резольвентного подхода в методе Фурье и приема А.Н. Крылова такое решение при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено для задач (1)–(3) и (1), (2), (4). В [5] для этих задач, но с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = 0$ проведено исследование поведения формального решения по методу Фурье при ослаблении минимальных требований на $\varphi(x)$. Теперь подобные результаты приведем для начальных условий (2).

1. Рассмотрим задачу (1)–(3). Предположим, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Формальное решение задачи (1)–(3) представим в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \qquad (5)$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014 К).

$$\text{где } u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi - R_\lambda^0\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$, $R_\lambda^0 = (L_0-\lambda E)^{-1}$, $Ly = -y'' + q(x)y$, $y(0) = y(1) = 0$, L_0 есть L при $q(x)\equiv 0$, E – единичный оператор, λ – спектральный параметр; γ_n – образ в λ – плоскости ($\lambda = \rho^2$, $Re\rho \geqslant 0$) окружности $\{|\rho||\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ достаточно мало), содержащий внутри себя лишь одно из собственных значений оператора L, которые являются простыми при $n\geqslant n_0$; $r>0$ фиксировано и таково, что контур $|\lambda| = r$ содержит все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n\geqslant n_0$.

Пусть $z(x,\rho)$ – решение уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z(0,\rho) = 0$, $z'(0,\rho) = 1$, тогда ([6], с. 17, 23) $z(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,\tau)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}d\tau$, где $K(x,\tau)$ непрерывно дифференцируема по x и τ, и $K(x,0) = 0$ (формула оператора преобразования). Обозначим $\psi_1(x) = \psi(x) + \int\limits_x^1 K(\tau,x)\psi(\tau)d\tau$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{\psi}(\tau)d\tau,$$

где $\widetilde{\psi}(x)\in W_2^1[-A,A]$ *при любом* $A>0$, $\widetilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ *при* $x\in[0,1]$, $\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\psi}(-x)$, $\widetilde{\psi}(x+2) = \widetilde{\psi}(x)$.

Лемма 2. *Ряд* $u_1(x)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по* x *и* t *сходятся абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$ *и* $t\in[-T,T]$ *при любом* $T>0$.

Теорема 1. *Функция* $u(x,t)$ *есть решение задачи (1)–(3), когда уравнение (1) выполняется лишь почти всюду (п.в.).*

2. Рассмотрим задачу (1)–(3), когда $\psi(x)\in L_2[0,1]$. Представление (5) сохраняется.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x-t) + \Phi(x+t)\right],$$

где $\Phi(x) \in W_2^1[-A, A]$ *при любом* $A > 0$, $\Phi'(x) = -\psi_1(x)$ *п.в. на* $[0,1]$, $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$.

Лемма 4. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по* t, *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-T, T]$.

На основании лемм 3, 4, теоремы равносходимости для операторов L и L_0, и теоремы Карлесона, получаем

Теорема 2. *Ряд* $u(x,t)$ *формального решения задачи (1)–(3) сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-T,T]$, *удовлетворяет условиям (2), (3), когда* $u'_t(x,0) = \psi(x)$ *выполняется лишь п.в. на [0,1].*

Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0,1]$ и $\psi_h(0) = \psi_h(1) = 0$. Решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1, обозначим $u_h(x,t)$.

Лемма 5. *Имеет место оценка*

$$\max_{Q_T} |u_h(x,t) - u(x,t)| \leqslant C_T \|\psi_h - \psi\|,$$

где $Q_T = [0,1] \times [-T,T]$, *постоянная* C_T *зависит только от* T, $\|\cdot\|$ *– норма в* $L_2[0,1]$.

Теорема 3. *Если* $\|\psi_h - \psi\| \to 0$ *при* $h \to 0$, *то решение* $u_h(x,t)$ *сходится к* $u(x,t)$ *из теоремы 2 равномерно в* Q_T, *т.е.* $u(x,t)$ *в этом смысле является обобщенным решением задачи (1)–(3) при любой* $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

3. Теперь рассмотрим задачу (1), (2), (4). Пусть $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Для формального решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), (4) теорема 1 сохраняется, но вместо условий (3) будут (4).

4. Если в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in L_2[0,1]$, то имеет место и теорема 2, но вместо условий (3) будут (4), которые выполняются лишь п.в. Пусть $\psi_h(x)$ – та же, что и в п.2 и $u_h(x,t)$ – решение задачи (1), (2), (4) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1. Тогда имеет место теорема 3 с условиями (4) вместо (3) об обобщенном решении задачи (1), (2), (4).

Литература

1. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. — 112 с.

2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А. Н. Крылов. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1950. — 368 с.

3. Курдюмов В. П. Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные / В. П. Курдюмов, А. П. Хромов // Математика. Механика : сб. научн. тр. — Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2015. — вып. 17. — С. 33–36.

4. Гуревич А. П. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью / А. П. Гуревич, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, Вып. 1. — С. 13–19.

5. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения / А. П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 239–251.

6. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наук. думка, 1977. — 392 с.

ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Ф.А. Кутерин (Нижний Новгород)
kuterin.f@yandex.ru

Рассматривается выпуклая задача оптимального управления с непрерывным сильно выпуклым функционалом, с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в гильбертовом пространстве $L_2(X)$, и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства

$$f(u) \equiv \int_0^T \big(\langle F(t)x[u](t), x[u](t)\rangle\, dt + \langle G(t)u(t), u(t)\rangle\big)\, dt \to \min,\ u \in \mathcal{D},$$

$$g(u)(t) \equiv \langle \Phi_1(t), x[u](t)\rangle = H_1(t), \quad \text{при п.в. } t \in X \subset [0,T],$$

$$g_1(u) \equiv (\langle \varphi_{1,1}, x[u](T)\rangle, \ldots, \langle \varphi_{1,k}, x[u](T)\rangle) = h_1,$$

$$g_2(u) \equiv (\varphi_{2,1}(x[u](T)), \ldots, \varphi_{2,m}(x[u](T))) \leqslant 0,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-02-12155-офи_м и 15-47-02294-р_поволжье_а).

где $f\,:\,L_2(0,T)\to\mathbb{R}^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал с ограниченными измеримыми по Лебегу неотрицательной и равномерно по t положительной матрицами $F:\,[0,T]\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $G:\,[0,T]\to\mathbb{R}^{l\times l}$; Φ_1, $H_1\in L_\infty(X)$, $\varphi_{1,i}\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\ldots,k$, $h_1\in\mathbb{R}^k$, — заданные функции и векторы, $\varphi_{2,i}\,:\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, $i=1,\ldots,m$ — выпуклые непрерывные вместе с градиентами $\nabla_x\varphi_{2,i}$ функции, $\mathcal{D}\equiv\{u\in L_2(0,T)\,:\,u(t)\in U$ при п.в. $t\in(0,T)\}$, $U\subset\mathbb{R}^l$ — выпуклый компакт, $X=\mathrm{cl}\,\overset{\circ}{X}$, $x[u](\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t),\;\; x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n,\;\; t\in[0,T]$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $A:\,[0,T]\to\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $B:\,[0,T]\to\mathbb{R}^{n\times l}$.

Рассматриваемая задача оптимального управления является неустойчивой по отношению к ошибкам задания исходных данных. Она переформулируется в виде вспомогательной эквивалентной задачи выпуклого программирования с бесконечномерным ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Для этой вспомогательной задачи на основе алгоритма итеративной двойственной регуляризации [1, 2] формулируется устойчивый к ошибкам исходных данных принцип Лагранжа в итерационной недифференциальной форме [2, 3] и, как следствие, устойчивый принцип максимума Понтрягина в итерационной форме в исходной задаче оптимального управления. Он порождает в ней последовательность двойственных переменных и соответствующую им минимизирующую последовательность. Элементы указанной последовательности двойственных переменных определяются с помощью заранее заданной итерационной процедуры регуляризованного градиентного подъема при максимизации в двойственной задаче, в которой увеличение номера итерации сопровождается уменьшением возмущения задачи. С уменьшением возмущения задачи очередное значение набора двойственных переменных определяется в соответствии с этой процедурой и пересчитывается на каждом шаге итерационного процесса. В качестве же очередного элемента конструируемой минимизирующей последовательности выбирается допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина в задаче минимизации функции Лагранжа, взятой при очередном значении набора двойственных переменных. Одновременно, вырабатываемая итерационной процедурой последовательность двойственных переменных является максимизирующей в двойственной к исходной задаче.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности / М.И. Сумин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 602–625.

2. Sumin M.I. On the Stable Sequential Kuhn–Tucker Theorem and its Applications // Applied Mathematics. Special issue "Optimization". – 2012. – V. 3, № 10A. – P. 1334-1350.

3. Кутерин Ф.А. Об устойчивом принципе Лагранжа в итерационной форме в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых операторных уравнений первого рода / Ф.А. Кутерин // Вестник Тамбовского университета. Серия : Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1239–1245.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 6-ГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ЧЕРЕДОВАНИИ ЗНАКОВ ДРУГИХ НЕЧЕТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

А.Б. Кущев (Воронеж)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$x^{(6)} + a_5x^{(5)} + a_4x^{(4)} + a_3x''' + a_2x'' + a_1x' + f(x) + \\ + \varphi(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}, x^{(5)}) = 0, \quad (1)$$

где функции $f(x)$, $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ непрерывны по совокупности переменных $(-\infty < t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 < \infty)$, а функция $\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \varphi(t, X)$ ω-периодична по t:

$$\varphi(t + \omega, X) = \varphi(t, X). \quad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании ω-периодических решений у уравнения (1). Исследование проводится методом направляющих функций [1].

Мы будем также предполагать, что

$$k_1 < f(x)/x < k_2(|x| > R_1, k_1k_2 > 0), \tag{3}$$

и равномерно относительно t

$$\lim_{||X||\to\infty} \frac{\varphi(t,X)}{||X||} = 0, \tag{4}$$

где $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_6^2}$.

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)–(4) и, кроме того,

$$a_1 = 0, a_3a_5 < 0. \tag{5}$$

Тогда у уравнения (1) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка с простейшим запаздыванием

$$\begin{gathered} x^{(6)} + a_5x^{(5)} + a_4x^{(4)} + a_3x''' + a_2x'' + a_1x' + f(x)+ \\ + \varphi(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(4)}(t), x^{(5)}(t), \\ x(t-h), x'(t-h), x''(t-h), x'''(t-h), x^{(4)}(t-h), x^{(5)}(t-h)) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где функции $f(x)$, $\varphi t, x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ непрерывны по совокупности переменных, а последняя функция ω-периодична по t

$$\varphi(t+\omega, X, X_1) = \varphi(t, X, X_1) \tag{7}$$

и равномерно относительно t, X, X_1

$$\lim_{||X||\to\infty} \frac{\varphi(t,X,X_1)}{||X||} = 0. \tag{8}$$

Нас будет интересовать ω-периодические решения уравнения (6). Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (3), (7) и (8). Пусть выполнены условия (5) теоремы 1.

Тогда у уравнения (6) есть хотя бы одно ω-периодическое решение.

Литература

1. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

2. Кущев А.Б. Достаточный признак существования правильной направляющей функции для одного класса систем дифференциальных уравнений / А.Б. Кущев // Прикл. методы функц. анализа. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1985. — С. 100–110.

3. Кущев А.Б. О существовании периодических решений одного класса дифференциальных уравнений 6-го порядка в случае отсутствия двух последних нечетных производных в линейной части / А.Б. Кущев // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XXXIII». — Воронеж : ВГУ, 2012. — С. 103–104.

4. Кущев А.Б. О существовании периодических решений одного класса дифференциальных уравнений 6-го порядка в случае отсутствия первой и пятой производных в линейной части / А.Б. Кущев // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XXXV». — Воронеж : ВГУ, 2014. — С. 103–105.

5. Кущев А.Б. О существовании периодических решений одного класса дифференциальных уравнений 6-го порядка в случае отсутствия третьей и пятой производных в линейной части / А.Б. Кущев // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XXXVI». — Воронеж : ВГУ, 2015. — С. 125–127.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОМПОНЕНТЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д.А. Литвинов (Воронеж)
d77013378@yandex.ru

Рассматривается полностью управляемая динамическая система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t),$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^k$; A, B матрицы соответствующих размеров; $t \in [0, T]$.

Ставится задача построения управляющей функции $u(t)$ и функции состояния $x(t)$, удовлетворяющих системе (1), при этом управляющая функция принимает в начальной и конечной точках нулевые значения, а функция состояния удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$ и $x(T) = x_T$. Построение $x(t)$ и $u(t)$ ведется методом каскадной декомпозиции, разработанным в работе [1].

Кроме того, требуется найти такое d, что при наличии ограничений по норме на краевые условия: $||x(0)|| \leqslant d$, $||x(T)|| \leqslant d$, выполняется ограничение для l-й компоненты функции управления $|u_l(t)| \leqslant c$, где c — некоторое число. Предлагается два альтернативных варианта решения этой задачи: методом оценок и с помощью Леммы Абеля.

Приводится пример использования методов данной работы для ограничения функции угла отклонения элеронов, являющейся одной из компонент управления тяжелым самолетом "Боинг – 747" [2].

Предлагается частичная автоматизация решения задачи методом каскадной декомпозиции с помощью программы, реализованной на языке Java в среде Eclipse. Результаты иллюстрируются графиками функций состояния и управления.

Литература

1. Зубова С.П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек / С.П. Зубова // Автоматика и Телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27–41.

2. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. — М. : Высшая школа, 2003.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО ИХ МЛАДШИМ ТЕЙЛОРОВСКИМ КОЭФФИЦИЕНТАМ[1]

А.В. Лобода, В.И. Суковых (Воронеж)

lobvgasu@yandex.ru

В задаче описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств имеется возможность использования младших тейлоровских коэффициентов их канонических (нормальных по Мозеру [1]) уравнений.

Первые содержательные результаты об уменьшении со 100 до 16 числа параметров (тейлоровских коэффициентов), необходимых для однозначного определения голоморфно-однородной поверхности общего положения в $\mathbb{C}^3$, получены в [2]. Некоторые уточнения этих результатов в [3] по сути приведены лишь в "качественных"формулировках.

Цель данного сообщения — иллюстрация возможностей коэффициентного подхода при выполнении некоторых ограничений, позволяющих получить и сформулировать конечный результат в относительно "компактной" форме. Ожидается скорое получение аналогичных утверждений и в общем случае, свободном от вводимых здесь ограничений.

Пусть нормальное, по Мозеру, уравнение голоморфно-однородной поверхности $M \subset \mathbb{C}^3$ имеет вид

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \sum_{k,l,m} N_{klm}(z, \bar{z}, u), \tag{1}$$

где

$$N_{220}(z, \bar{z}) = (|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1),$$

$$N_{320}(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} \omega_{k+3j} z_1^{3-j} z_2^{j} \bar{z}_1^{2-k+1} \bar{z}_2^{k-1}$$

и коэффициенты $\omega_k (k = 1, 2, 3, 10, 11, 12)$ вещественны.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00709а).

Теорема 1. *Если выполняются неравенства* $\omega_3 \neq 0$ *и*

$$\omega_{10}\omega_2 + \omega_3\omega_{11} - 2\omega_3^2 - 2\omega_{10}^2 \neq 0, \tag{2}$$

то вся поверхность (1) определяется "опорной" шестеркой коэффициентов $\omega_k (k = 1, 2, 3, 10, 11, 12)$ *и вещественным коэффициентом при мономе* $z_1^2\bar{z}_2^2u^2$ *из уравнения (1).*

Замечание. *Опорная шестерка* ω_k *удовлетворяет при этом системе из семи полиномиальных (достаточно громоздких) уравнений.*

При выполнении лишь условий вещественности ω_k и неравенства $\omega_3 \neq 0$ все уравнение (1) однородной поверхности однозначно определяется упомянутым набором из семи коэффициентов и парой (t_4, λ_2') (вещественных) коэффициентов при мономах $z_1^3z_2\bar{z}_1^2$ и $z_1^2\bar{z}_2^2u$, соответственно, из уравнения (1).

При этом имеется система из девяти полиномиальных уравнений на опорную шестерку и пару (t_4, λ_2'). Все эти уравнения линейны по (t_4, λ_2') и имеют не более чем шестую степень по остальным переменным. Неравенство (2) является одним из простейших возможных условий полноты ранга этой системы.

Пример. *Трубка в* $\mathbb{C}^3$ *над аффинно-однородной поверхностью*

$$ux_1 = x_2^2 - x_1^{8/5}$$

из $\mathbb{R}^3$ *имеет нормальное уравнение Мозера требуемого вида (и при переходе к комплексным координатам сохраняет свои младшие тейлоровские коэффициенты вещественными). Ее коффициенты удовлетворяют обсуждаемым 9 уравнениям.*

В настоящее время изучаются условия совместности упомянутых систем и алгоритмы получения их решений.

Литература

1. Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. — 133, № 3.— 1974.— P. 219–271.

2. Лобода А. В. Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Вестник ВГУ. Системный анализ. — 2015. — № 1. — С. 14–22.

3. Арапов В. А. О вещественных тейлоровских коэффициентах однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / В. С. Арапов, А. В. Лобода // Материалы 12-й международной летней школы-конференции. — Казань, 2015. — С. 34–35.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЙ ВЫНУЖДЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПЕРВЫМИ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, Беларусь)
lomovcev@bsu.by

1. Постановка задачи граничного управления. Для произвольно заданного времени $t = T > 0$ требуется привести струну, вынужденные колебания которой моделируются уравнением

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\} \in Q_T = [0,2] \times [0,T], \qquad (1)$$

из произвольно заданного начального состояния

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,2], \qquad (2)$$

с помощью выбора значений μ_i, $i = 1,\, 2$, граничного режима

$$\Gamma_i(t)u \equiv [\alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)u]|_{x=2i-2} = \mu_i(t), t \in [0,T], i = 1,2, \qquad (3)$$

в произвольно заданное финальное состояние

$$u|_{t=T} = \widehat{\varphi}(x),\ u_t|_{t=T} = \widehat{\psi}(x),\ x \in [0,2]. \qquad (4)$$

Определение. Задача (1)–(4) называется *задачей граничного управления*. Функции u называются *решениями*, граничные данные μ_i, $i = 1,\, 2,$ – *управлениями*, время $t = 0$ – *начальным моментом* управления и время $t = T$ – *финальным моментом* управления.

Из постановки задачи управления (1)–(4) и гладкости ее решений $u \in C^2(Q_T)$ вытекают необходимые требования гладкости:

$$f \in C(Q_T),\, \varphi,\, \widehat{\varphi} \in C^2[0,2],\, \psi,\, \widehat{\psi} \in C^1[0,2],\, \mu_1,\, \mu_2 \in C^1[0,T], \qquad (5)$$

и необходимые начальные и финальные условия согласования:

$$\alpha_i(0)\psi(2i-2) + \beta_i(0)\varphi'(2i-2) + \gamma_i(0)\varphi(2i-2) = \mu_i(0),$$

$$\alpha_i(0)[\varphi''(2i-2) + f(i-2,0)] + [\alpha_i'(0) + \gamma_i(0)]\psi(i-2) + \beta_i(0)\psi'(2i-2) +$$
$$+ \beta_i'(0)\varphi'(2i-2) + \gamma_i'(0)\varphi(2i-2) = \mu_i'(0),\ i = 1,\, 2, \qquad (6)$$

$$\alpha_i(T)\widehat{\psi}(2i-2)+\beta_i(T)\widehat{\varphi}'(2i-2)+\gamma_i(T)\widehat{\varphi}(2i-2)=\mu_i(T),$$

$$\alpha_i(T)[\widehat{\varphi}''(2i-2)+f(2i-2,T)]+[\alpha_i'(T)+\gamma_i(T)]\widehat{\psi}(2i-2)+\beta_i(T)\widehat{\psi}'(2i-2)+$$
$$+\beta_i'(T)\widehat{\varphi}'(2i-2)+\gamma_i'(T)\widehat{\varphi}(2i-2)=\mu_i'(T),\ i=1,\,2. \qquad (7)$$

Прямоугольник Q_T разбивается на прямоугольники $Q^{(k)}=[0,2]\times$ $\times[k-1,k]$, $k=1,\,2,\,...,\,n-1$, и $Q^{(n)}=[0,2]\times[n-1,T]$. В работе [1] имеется дополнительное необходимое требование гладкости

$$\int_{k-1}^{t} f(|2-|2-x\pm(t-\tau)||,\tau)\,d\tau\in C^1(Q^{(k)}),\ k=1,\,2,\,...,\,n. \qquad (8)$$

2. Существование граничных управлений. Если $n-1<$ $<T\leqslant n$ и $T_n=T-n+1$, то $0<T_n\leqslant 1$ для всех $n=1,\,2,\ldots$

Теорема. *Пусть финальный момент $n-1<T\leqslant n$ при некотором $n=1,2,...,$ и коэффициенты $\alpha_i,\,\beta_i,\,\gamma_i\in C^1[0,T]$, $\alpha_i(t)\neq(-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $t\in[0,T]$, $i=1,\,2$. Классическое решение $u\in C^2(Q_T)$ задачи управления (1)–(4) существует для тех и только тех функций f, φ, ψ, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, μ_1, μ_2, для которых при этом же $n=1,2,...,$ на Q_T выполняются требования гладкости (5), (8), условия согласования (6), (7) и условия управляемости:*

$$\varphi_n(x+T_n)+\varphi_n(0)+\int\limits_0^{x+T_n}\psi_n(s)ds+\int\limits_0^{T_n}\int\limits_{\tau}^{x+T_n-\tau}f(s,n-1+\tau)dsd\tau-$$

$$-\widehat{\varphi}(x)-\widehat{\varphi}(T_n)-\int\limits_{T_n}^{x}\widehat{\psi}(s)ds=0,\ x\in[0,T_n[,\ T_n=T-n+1,\ n=1,\,2,...,$$

$$\varphi_n(2)+\varphi_n(x-T_n)+\int\limits_{x-T_n}^{2}\psi_n(s)ds+\int\limits_0^{T_n}\int\limits_{\tau}^{2-x+T_n-\tau}f(2-s,n-1+\tau)dsd\tau-$$

$$-\widehat{\varphi}(2-T_n)-\widehat{\varphi}(x)-\int\limits_{x}^{2-T_n}\widehat{\psi}(s)ds=0,\ x\in]2-T_n,2],\ n=1,\,2\,\ldots,$$

при $T_n<1$ для $x\in[T_n,2-T_n]$ условиям управляемости

$$\varphi_n'(x+T_n)+\psi_n(x+T_n)+\int\limits_0^{T_n}f(x+T_n-\tau,n-1+\tau)d\tau=\widehat{\varphi}'(x)+\widehat{\psi}(x),$$

$$\varphi_n'(x-T_n)-\psi_n(x-T_n)-\int\limits_0^{T_n} f(x-T_n+\tau, n-1+\tau)d\tau = \widehat{\varphi}'(x)-\widehat{\psi}(x),$$

или при $T_n=1$ *вместо последних условий для* $x=1$ *условиям*

$$\varphi_n(2)+\varphi_n(0)+\int\limits_0^2 \psi_n(s)ds+\int\limits_0^1\int\limits_\tau^{2-\tau} f(s,n-1+\tau)dsd\tau = 2\widehat{\varphi}(1),\ \varphi_n'(2)-$$

$$-\varphi_n'(0)+\psi_n(2)+\psi_n(0)+\int\limits_0^1 [f(2-\tau,n-1+\tau)+f(\tau,n-1+\tau)]d\tau = 2\widehat{\psi}(1).$$

Замечание. Эта теорема также является теоремой существования управлений для задачи управления (1)–(4), потому что если существует её классическое решение $u \in C^2(Q_T)$, то функции $\mu_i(t) = \Gamma_i(t)u \in C^1[0,T]$, $i = 1, 2$, будут её управлениями. Существование и единственность управлений задачи (1)–(4) за время $T = 2$ вытекает из [2], где получены аналогичные необходимые и достаточные условия гладкости, согласования и управляемости.

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 73–76.

2. Ломовцев Ф. Е. Граничное управление вынужденными колебаниями струны первыми косыми производными за короткий промежуток времени / Ф. Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1669-1675.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОАКУСТИКИ ПРИ ЭЛЕКТРОРАЗРЯДЕ В ВОДЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

А.В. Мельник (Николаев, Украина)
mlnk74@mail.ru

Электроразряд в воде (ЭРВ) используется во многих технологиях разрушения и служит источником излучения гидроакустических волн. Рассматривается краевая гидроакустическая задача с момента, когда в воде произошел электрический пробой и сформировался плазменный канал разряда в виде конечного цилиндра.

Вблизи плазменной полости, образующейся при электрическом разряде в воде, могут формироваться ударные волны большой амплитуды, что вызывает необходимость привлечения нелинейных соотношений для их описания. Поэтому для решения задачи используется система уравнений газовой динамики [1].

Система уравнений замыкается уравнением состояния, которое для воды в широком диапазоне изменения давлений имеет вид $E = \frac{p+\gamma B}{\rho\,(\gamma-1)} - \frac{c_0^2}{\gamma-1}$, где $B = \rho_0\, c_0^2/\gamma$, при этом для воды $\rho_0 =$ кг/м^3; $c_0 = 1460$ м/с; $\gamma = 7{,}15$. Краевое условие на канале разряда определяется из уравнения баланса энергии

$$\frac{\gamma_\Pi\, p_{\,\Pi}}{\rho(\gamma_\Pi - 1)}\dot{V}_\Pi + \frac{V_\Pi}{\gamma - 1}\,\dot{p}_\Pi = N_\Pi(t)\,,$$

где $\gamma_\Pi = 1{,}26$ — эффективный показатель адиабаты плазмы; $N_\Pi(t)$ — закон ввода энергии, V_Π — объём канала разряда.

Интегрирование системы уравнений гидроакустики в ближней к разряду зоне осуществляется с помощью явной двухслойной схемы С.К. Годунова [2], допускающей расчет в подвижных сетках, что позволяет явно выделить характерные разрывы — фронт ударной волны и поверхности канала разряда. Поскольку область должна быть ограничена, то вводится условная граница, окружающая канал разряда в виде сферической поверхности на расстоянии 2–3 радиусов от канала разряда. Для моделирования затухания волн на бесконечности на этой поверхности рассматриваются, следуя Бейлису и Тэркелу, “неотражающие” граничные условия, которые для гидроакустического давления p имеют вид

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2}{c_0}\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\left(\frac{1}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^2}\,p = 0\,.$$

Для иллюстрации метода рассматриваются волновые процессы, происходящие при электрическом разряде, производимом в центре сферической области. На рисунке 1 показано давление в точках поверхности сферы (кривые 1–6), расположенных с угловым интервалом, равным $\pi/10$.

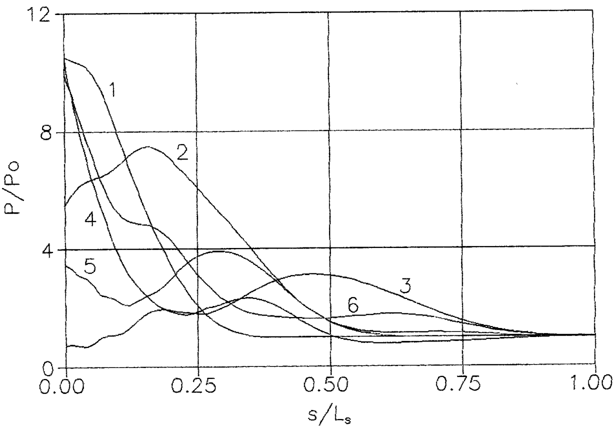


Рис. 1. Распределение давления в разных точках условной поверхности

На значительном расстоянии от источника возмущений гидроакустическое давление можно определить аналитическим методом с помощью интеграла Кирхгофа на основании значений давления на поверхности условной границы.

Литература

1. Наугольных К.А. Электрические разряды в воде / К.А. Наугольных, Н.А. Рой. — М. : Наука, 1971. — 151 с.

2. Численное решение многомерных задач газовой динамики / под ред. С.К. Годунова. — М. : Наука, 1976. — 400 с.

МНОГООБРАЗИЯ БЕТЕ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ СЕРИИ B[1]

В.В. Мещеряков (Коломна)
metcherykov@mail.ru

В работе [1] для каждой приведённой неприводимой системы корней определено комплексное алгебраическое многообразие, названное авторами [1] многообразием Бете. В [3] установлено, что для систем корней классических серий A, B, C и D многообразия Бете не пустые. В частности, для систем корней серий A и D многообразия Бете представляют собой непустое пересечение гиперплоскостей, а для системы корней серии B — непустое пересечение гиперплоскостей и квадратичных гиперповерхностей. Нами доказано следующее уточнение последнего утверждения.

Теорема 1. *Для системы корней типа B_n $(n \geqslant 2)$ многообразие Бете гомеоморфно многообразию комплексных $2 \times n$ матриц, имеющих ранг, равный 1.*

Следствие. *Комплексная размерность многообразия Бете, ассоциированного с системой корней типа B_n, равна $n + 1$.*

Согласно описанной в [2] конструкции, многообразие Бете, ассоциированное с B_n, может быть вложено в пространство $\mathbb{C}^{n^2}$. Пересечение многообразия Бете с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$ естественно назвать *вещественным* многообразием Бете.

В статье [4] подробно описаны многообразия вещественных прямоугольных матриц немаксимального ранга. В частности, доказана

Теорема 2. *Для любого $r, 0 < r < \min\{n, m\}$, многообразие вещественных $n \times m$ матриц фиксированного ранга r ориентируемо тогда и только тогда, когда $n - m$ чётное.*

Прямым следствием теорем 1, 2 является следующее свойство вещественных многообразий Бете.

Предложение. *Вещественное многообразие Бете, ассоциированное с системой корней типа B_n, ориентируемо тогда и только тогда, когда n чётное.*

Литература

1. Golubeva V. A., Leksin V. P. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-51-150005).

of rational and trigonometric models / V. A. Golubeva, V. P. Leksin // J. Math. Sci. — 2000. — V. 98, No 3. — P. 291–318.

2. Meshcheryakov V. On the coincidence of two manifolds associated with the Calogero model / V. Meshcheryakov // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2009. — V. 15, No 2. — P. 343–403.

3. Мещеряков В. В. Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней / В. В. Мещеряков // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 5. — С. 709–718.

4. Петров Е. Е. Ориентация и интегрирование на многообразии матриц фиксированного ранга / Е. Е. Петров // Вестник МГОСГИ. — 2014. — №16. — С. 49–63.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.С. Мокейчев

В [1–8] выписаны интегро-дифференциальные уравнения (в том числе и в частных производных, и нелинейные, и с отклоняющимися аргументами), для которых удаётся в явном виде выписать характеристические числа и собственные значения 2π-периодической задачи. Однако с их помощью не удаётся выписать в явном виде хотя бы одно характеристическое число 2π-периодической задачи, например, для уравнения $y^{(2)}-y=\mu(cos(at))^2y$. Нижеприведенные результаты частично ликвидируют пробел.

Если собственные элементы линейного вполне непрерывного оператора A, отображающего гильбертово пространство H в H, образуют ортонормированный базис в H, то $\sup|\mu_k|=\|A\|$, где $\{\mu_k\}$ – множество всех собственных значений оператора A. В частности, если μ_k вещественны, то либо $\| A \|$, либо $-\| A \|$ — собственное значение оператора A.

Пусть B линейно отображает $D_B\subset H$ в H и B^{-1} вполне непрерывен. Тогда нахождение собственных значений для B сводится к уравнению $(1/\mu)y=B^{-1}y$, поэтому $\sup|(1/\mu_k)|=\| B^{-1} \|$, если собственные элементы оператора B^{-1} образуют ортонормированный базис в H. Следовательно, важно вычислить $\| B^{-1} \|$. Ниже $A=B^{-1},\ \nu=1/\mu$.

Произвольно фиксируется ортонормированный базис $\{e_{(r)},\ r\in\in J\}$ в H. Тогда $\| A \|^2 = \sup \| Ay \|^2 = \sup \sum\limits_{|r|=0}^{+\infty}\Big|\sum\limits_{|s|=0}^{+\infty} A_{s,r}y_s\Big|^2$, где sup вычисляется по всем $y\in H :\| y \| = 1$, и $A_{s,r} = < Ae_{(s)}, e_{(r)} >$.

Ниже предполагается, что $\| Ay \|^2$ можно переписать в виде $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big|\sum\limits_{s\in Q_k} C_{s,k}y_s\Big|^2$, и при $k\geqslant 2$ выполняются равенства $Q_k = Q_{k,2}\cup Q_{k,1},\ Q_{k,2} = \Big(\bigcup\limits_{r\leqslant k-1} Q_r\Big)\cap Q_k,\ Q_{1,1} = Q_1$.

Теорема 1. *Если при всех* $k\geqslant M$ *не пусты множества* $Q_{k,1}$, *то* $\sup\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big|\sum\limits_{s\in Q_k} C_{s,k}y_s\Big|^2$ *– наибольшая из величин* $\sum\limits_{k=1}^{M-1}\Big|\sum\limits_{s\in Q_k} C_{s,k}y_s\Big|^2,\quad \sup\limits_{k\geqslant M}\sum\limits_{s\in Q_{k,1}} |C_{s,k}|^2$.

Теорема 2. *Если при всех* k *не пусты множества* $Q_{k,1}$, *то* $\sup\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big|\sum\limits_{s\in Q_k} C_{s,k}y_s\Big|^2 = \sup\limits_{k}\sum\limits_{s\in Q_{k,1}} |C_{s,k}|^2$.

Важно отметить, что величина $\| A \|$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в H.

В частном случае $\| Ay \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{M}\Big|\sum\limits_{q=1}^{M_1} C_{q,k}y_q\Big|^2$, вводится матрица $C = \begin{pmatrix} C_{1,1}\dots C_{M_1,1}\\ \vdots \\ C_{1,M}\dots C_{M_1,M}\end{pmatrix}$, и справедливо равенство $\sup \| Ay \| = \sqrt{max\lambda_p}$, где $\{\lambda_p\}$ – множество всех собственных значений матрицы C^*C. Использование теоремы 1 в ряде случаев позволяет уменьшить размерность матрицы C.

Пример. Пусть $P(D)u = \mu|c(x)|^2u$, и краевые условия таковы, что существует, самосопряжён и вполне непрерывен в $L^2([0,\ \pi]^n)$ оператор $A = (P(D))^{-1}$; μ – характеристическое число задачи тогда и только тогда, когда $\nu = 1/\mu$ – собственное значение задачи $\nu w = \Big(\overline{c(t)}Ac(t)\Big)w,\ w\in L^2([0,\ \pi]^n)$. Если $c(t)$ – тригонометрический многочлен с периодом 2π, то выполняются предположения теоремы 2, причём удобно положить $\{e_{(r)},\ r\in J\} = \{(2\pi)^{-n/2}\exp(2ipx), p = (p_1, ..., p_n)\in Z^n\}$.

Литература

1. Мокейчев В.С. Собственные значения периодической краевой задачи для некоторых уравнений в частных производных / В.С. Мокейчев // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12, № 2. — С. 356–358.

2. Мокейчев В.С. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами / В.С. Мокейчев. — Казань : Изд-во КГУ, 1985. — 225 с.

3. Мокейчев В.С. Спектральные пары нелинейных операторов / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 1986. — № 3. — С. 72–76.

4. Мокейчев В.С. Проблема собственных значений во всём пространстве для уравнений с разрывными коэффициентами / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 2002. — № 6. — С. 45–49.

5. Мокейчев В.С. Об отсутствии собственных значений у задачи, обобщающей задачу о волноводах / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 6. — С. 41–47.

6. Мокейчев В.С. Существование и базисность собственных и присоединённых элементов линейных операторов / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 6. — С. 49–55.

7. Мокейчев В.С. Явный вид и кратность характеристических чисел периодических задач для дифференциальных уравнений / В.С. Мокейчев // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 455–466.

8. Мокейчев В.С. Явный вид характеристических чисел периодической задачи / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 2010. — № 10. — С. 44–50.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. Мустафокулов (Душанбе)

rmustaf@list.ru

На множестве $\Gamma = (a, b)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{A(x)}{(x-a)^{\alpha}} y' + \frac{B(x)}{(x-a)^{2\alpha}} y = \frac{f(x)}{(x-a)^{2\alpha}}, \tag{1}$$

где $A(x), B(x), f(x)$ — непрерывные на Γ функции и число $\alpha > 0$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$y'' + \frac{A(a)}{(x-a)^{\alpha}} y' + \frac{B(a)}{(x-a)^{2\alpha}} y = \frac{F(x)}{(x-a)^{2\alpha}}, \tag{2}$$

где $F(x) = f(x) - [B(x) - B(a)]y(x) - [A(x) - A(a)](x-a)^{\alpha} y'(x)$.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y'' + \frac{A(a)}{(x-a)^{\alpha}} y' + \frac{B(a)}{(x-a)^{2\alpha}} y = 0. \tag{3}$$

Лемма. *Если $c_1(x), c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = \dfrac{F(x)}{(x-a)^{2\alpha}}, \end{cases} \tag{4}$$

то функция $\bar{y}(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$ будет решением уравнения (2).

Определитель системы (4) — вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому она имеет единственное решение

$$c_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)}{W(x)} \frac{F(x)}{(x-a)^{2\alpha}}, \qquad c_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{W(x)} \frac{F(x)}{(x-a)^{2\alpha}}. \tag{5}$$

Если интеграл от правой части этих равенств существует, то в силу леммы функция

$$\bar{y}(x) = \int_a^x \frac{K(x,s)}{(s-a)^{2\alpha}} F(s)ds \tag{6}$$

является решением уравнения (2), где

$$K(x,s) = \frac{1}{W(s)} \left(\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)\right)$$

функция Коши уравнения (2). Подставляя в (6) вместо $F(s)$ её значение, затем перенеся слагаемые, содержащие неизвестную функцию и ее производную в левую часть, после некоторых преобразованный приходим к следующему интегральному уравнению

$$\bar{y}(x) + \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K(x,s)}{(s-a)^{\alpha}}\right) A_1(s) + \frac{K(x,s)}{(s-a)^{2\alpha}} B_1(s)\right) \bar{y}(s)ds =$$

$$= \int_a^x \frac{K(x,s)}{(s-a)^{2\alpha}} f(s)ds, \tag{7}$$

где обозначены

$$A_1(s) = A(s) - A(a), \qquad B_1(s) = B(s) - B(a) + A'(s)(s-a)^{\alpha}. \tag{8}$$

Интегральное уравнение (7) получено при предположении, что интегралы от правой части (5) сходятся. Для этого, в силу (7), необходимо, чтобы функции $A_1(x), B_1(x)$ и $f(x)$ в точке $x = a$ обращались в нуль с асимптотическим поведением как

$$o\left(\frac{W(x)}{\varphi_i(x)}(x-a)^{2\alpha}\right) \quad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Если обозначить

$$K_1(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K(x,s)}{(x-a)^{\alpha}}\right) A_1(s) + \frac{K(x,s)}{(x-a)^{2\alpha}} B_1(s),$$

$$f_1(x) = \int_a^x \frac{K(x,s)}{(x-a)^{2\alpha}} f(s)ds,$$

то уравнение (7) запишется в виде интегрального уравнения вольтеровского типа

$$\bar{y}(x) + \int_a^x K_1(x,s)\bar{y}(s)ds = f_1(x) \qquad (x \in \Gamma). \tag{10}$$

Теорема. *Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3), а коэффициенты $A(x), B(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения (1) являются непрерывными в Γ функциями, причем функции $A_1(x), B_1(x)$ определенные равенствами (8) и $f(x)$ при $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением (9). Тогда общее решение уравнения (1) определяется в виде*

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + f_1(x) + \int_a^x R(x,s) f_1(s)ds, \tag{11}$$

где c_1, c_2- произвольные постоянные, а $R(x,s)-$ резольвента уравнения (10).

Отметим, что если в условиях теоремы фундаментальная система решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ уравнения (3) задауотся в явном виде, то в соответствии с условиями (9) можно определить класс дифференциальных уравнений вида (1), для которых интегральное представление общего решения (11) записывается в явном виде. Например, для уравнения

$$y'' + \left(\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{x-a}\right)y' + \frac{B}{(x-a)^{2\alpha}}y = \frac{f(x)}{(x-a)^{2\alpha}}, \quad \alpha > 1, \tag{12}$$

решением соответствующего однородного уравнения будет функция

$$y(x) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha-1}(x-a)^{1-\alpha}},$$

где параметр λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 + A\lambda + b = 0. \tag{13}$$

Асимптотическая оценка (9), в зависимости от корней характеристического уравнения (13), определяет класс функций $f(x)$, для которых решение $\bar{y}(x)$ уравнения (12) существует и оно определяется в конкретном виде.

Отметим также, что аналогичным методом можно исследовать уравнения со сингулярной точкой на правом конце промежутка, а также уравнения с двумя сингулярными граничными точками.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В УСЛОВИЯХ МОДЕЛИ ВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

О.О. Мякинник, В.В. Феоктистов, О.П. Феоктистова (Москва)
olga.mknk@yandex.ru, ww.pheoktistow@yandex.ru

В виде системы

$$I\frac{\partial\vec{F}(t,x)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{s}A_k\frac{\partial\vec{F}(t,x)}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\vec{F}(t,x)=(F_1(t,x),\ldots,F_n(t,x))^\top, \qquad x=(x_1,\ldots,x_s),$$

(A_k — числовые матрицы порядка n, I — единичная матрица), для которой построена модель волнового взаимодействия [1], рассматриваются: уравнения распространения малых возмущений в идеальном газе при течении размерности s ([2] при $s=1$),

$$\vec{F}(t,x)=(\vec{V},\rho,e)^\top, \qquad s=\overline{1,3}, \quad n=\overline{3,5} \tag{2}$$

($\vec{V}$ — скорость движения газа, ρ — его плотность, e — энтальпия); линейная однородная система уравнений Максвелла (в отсутствие токов и зарядов при $\varepsilon=\mu=1$) [3],

$$\vec{F}(t,x)=(\vec{E},\vec{H})^\top, \qquad s=3, \quad n=6 \tag{3}$$

($\vec{E}$, $\vec{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей); система однородных уравнений магнитной гидродинамики [4],

$$\vec{F}(t,x)=(\vec{V},\rho,\vec{H})^\top, \qquad s=3, \quad n=7, \tag{4}$$

для которых выполнена линеаризация.

Основным понятием модели являются решения системы X_k,

$$X_k\equiv Ix_k+tA_k, \qquad k=\overline{1,s}, \tag{5}$$

которые рассмотрены как n-мерные бегущие волны, где задающие систему (1) матрицы A_k содержат параметры задачи.

Свойства системы (1) и ее решений определяются алгебраическими свойствами матриц A_k. Если (1) соответствует законам сохранения (как, например, для вектора (2)), то некоммутативные коэффициенты такой гиперболической системы связаны отношением подобия с диагональной жордановой матрицей при $s = \overline{1,3}$. Для системы уравнений Максвелла, которую от (1) отличает дополнительное условие соленоидальности вектора (3), A_k являются вырожденными некоммутативными матрицами с антисимметричными блоками, отвечающими операторам rot и −rot.

При распространении волн (5) происходит их наложение (суперпозиция) и взаимодействие по закону, определяемому оператором W_s^α. Решение (1) относительно каждого из векторов (2)–(4) представлено в виде [1]

$$\begin{aligned}
\vec{F}(t,x) &= \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} W_s^\alpha \cdot \vec{\gamma}_\alpha \equiv \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} W(X_1^{\alpha_1},\dots,X_k^{\alpha_k},\dots,X_s^{\alpha_s})\vec{\gamma}_\alpha,\\
W_s^\alpha &= \sum_{k=1}^{s} X_k W_s^\alpha(X_1^{\alpha_1},\dots,X_k^{\alpha_k-1},\dots,X_s^{\alpha_s}),\ X_k = Ix_k + tA_k,
\end{aligned}$$

где $\vec{\gamma}$ — числовой вектор-коэффициент, матрицы A_k отвечают соответствующей системе уравнений математической физики.

Литература

1. Феоктистов В. В. Модель волнового взаимодействия для нормальной системы линейных уравнений в частных производных первого порядка с числовыми коэффициентами / В. В. Феоктистов, О. О. Мякинник // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1083– 1085.

2. Феоктистов В. В. Малые возмущения идеального газа : волны, инварианты и задача Коши / В. В. Феоктистов, О. О. Мякинник // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. — 2014. № 12. — Режим доступа: DOI 10.7463/1214.0744956.

3. Феоктистов В. В. Приложение модели волнового взаимодействия к решению задачи для системы уравнений Максвелла / В. В. Феоктистов, О. О. Мякинник // Вестник ХНТУ. — 2013. — № 2(47). — С. 230–234.

4. Куликовский А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 656 с.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШИМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ ПО ВРЕМЕНИ[1]

Р.Р. Нажимов, В.Е. Федоров (Челябинск)
goldenboy454@mail.ru, kar@csu.ru

Пусть $P_n(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\lambda^i$, $Q_{n_1}(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{n_1}d_j\lambda^j$, $c_i,d_j\in\mathbb{C}$, $i=0,\ldots,n$, $j=0,1,\ldots,n_1$, $c_n,d_{n_1}\neq 0$, $n\geqslant n_1$. Пусть, кроме того, $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $A,B_1,B_2,\ldots,B_r$ регулярно эллиптичен [1, с. 454], где

$$(Au)(x)=\sum_{|q|\leqslant 2r}a_q(x)D_x^qu(x),\ \ a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$(B_lu)(x)=\sum_{|q|\leqslant r_l}b_{l_q}(x)D_x^qu(x),\ \ b_{l_q}\in C^\infty(\partial\Omega),\ l=1,2,\ldots,r,$$

$D_x^q=D_{x_1}^{q_1}D_{x_2}^{q_2}\ldots D_{x_s}^{q_s}$, $D_{x_i}^{q_i}=\partial^{q_i}/\partial x_i^{q_i}$, $q=(q_1,q_2,\ldots,q_s)\in\mathbb{N}_0^s$. Пусть оператор $A_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$, $A_1u=Au$ с областью определения $D(A_1)=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [1, с. 399] самосопряжен и имеет ограниченный справа спектр. В таком случае спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 дискретный, вещественный и сгущается к $-\infty$. Пусть $\{\varphi_k:k\in\mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора A_1, занумерованных по невозрастанию соотвествующих собственных значений $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ с учётом их кратности. Предполагая, что, вообще говоря, при некоторых $k\in\mathbb{N}$ $P_n(\lambda_k)=0$, рассмотрим начально-краевую задачу

$$P_n(A)D_t^\alpha u(x,t)=Q_{n_1}(A)u(x,t)+f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega\times[0,T),\tag{1}$$

$$B_lA^ku(x,t)=0,\ k=0,1,\ldots,n-1,\ l=1,2,\ldots,r,\ (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T),\tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+}D_t^{\alpha-m+l}u(x,t)=u_l(x),\ l=0,1,\ldots,m-1,\tag{3}$$

где $m\in\mathbb{N}$, $m-1\leqslant\alpha<m$, при $\beta>0$ D_t^β — дробная производная Римана – Лиувилля по переменной t, при $\beta<0$ — дробный интеграл Римана – Лиувилля. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а через $E_{\alpha,\beta}$ — функцию Миттаг – Лёффлера.

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant n_1$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих нулей многочленов P_n и Q_{n_1}, $f \in C([0,T);L_2(\Omega))$, при $P_n(\lambda_k)=0$*

$$Q_{n_1}(\lambda_k)\left\langle u_l,\varphi_k\right\rangle = -\lim_{t\to 0+}\left\langle D_t^{\alpha-m+l}f(\cdot,t),\varphi_k\right\rangle,\ l=0,1,\ldots,m-1. \tag{4}$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3), *при этом оно имеет вид*

$$u(x,t)=\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\sum_{l=0}^{m-1}t^{\alpha-m+l}E_{\alpha,\alpha-m+l+1}\left(\frac{Q_{n_1}(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}t^{\alpha}\right)\left\langle u_l,\varphi_k\right\rangle\varphi_k(x)+$$

$$+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0}E_{\alpha,\alpha}\left(\frac{Q_{n_1}(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}(t-\tau)^{\alpha}\right)\frac{\left\langle f(\cdot,\tau),\varphi_k\right\rangle\varphi_k(x)}{P_n(\lambda_k)}d\tau-$$

$$-\sum_{P_n(\lambda_k)=0}\frac{\left\langle f(\cdot,t),\varphi_k\right\rangle\varphi_k(x)}{Q_{n_1}(\lambda_k)}. \tag{5}$$

Для задачи с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0+}D_t^{\alpha-m+l}P_n(A)(u(x,t)-u_l(x))=0,\ l=0,1,\ldots,m-1, \tag{6}$$

можно обойтись без условий согласования (4).

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant n_1$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих нулей многочленов P_n и Q_{n_1}, $f \in C([0,T);L_2(\Omega))$. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), (6), *при этом оно имеет вид* (5).

В случае дробной производной Герасимова – Капуто близкие начально-краевые задачи исследовались в работе [2].

Литература

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М. : Мир, 1980. — 664 с.

2. Федоров В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

О МОДЕЛИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО ПОРИСТОГО СКЕЛЕТА

И.В. Некрасова (Белгород)
Nekrasova_I@bsu.edu.ru

В настоящей работе предлагается математическая модель, вывод которой основан на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте.

Рассмотрен упругий пористый скелет, занимающий ограниченную область. Поры полностью насыщены вязкой несжимаемой жидкостью. В пористом скелете имеет место полое включение – цилиндрическое отверстие, заполненное той же самой жидкостью, что и поры.

В безразмерных переменных дифференциальные уравнения точной модели для безразмерного вектора перемещений $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ в области, моделирующей нефтяной пласт, состоят из уравнений Стокса для вязкой жидкости в порах и уравнений Ламэ для упругого скелета грунта. В области моделирующей скважину, скорость $\{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t\}$ и давление $\{p^{\varepsilon}\}$ подчиняются системе уравнений Стокса.

Полученная в работе усредненная модель свободна от быстро осциллирующих коэффициентов, что делает ее пригодной для численных расчетов.

Теорема. *Пусть $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ есть слабое решение исходной задачи. Тогда*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ и $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ сходятся слабо в $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{v}$ соответственно, последовательности $\{\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\}$ и $\{p^{\varepsilon}\}$ сходятся слабо в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ и $L_2(Q_T)$ к функциям $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}$ и p соответственно;

2) предельные функции $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$ и p есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

и усредненного уравнения баланса импульса

$$\varrho(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} + \nabla p = \nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}}, \tag{2}$$

$$\widehat{\mathbb{P}} = \zeta\,\mu_0\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}) + (1-\zeta)\big(\mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}) +$$
$$\mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau,$$

совместно с краевым и начальным условиями

$$\widehat{\mathbb{P}} \cdot \boldsymbol{e}_3 = -p_0\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x} \in S^1_T, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S^2_T, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in Q; \tag{5}$$

3) задача (1)–(5) имеет единственное решение.

О СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ СООБЩЕСТВ[1]

А.А. Никитин (Москва)
nikitin@cs.msu.ru

Рассмотрим задачу о нахождении стационарных точек системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}N = (b-d)N - d'\int_{\mathbb{R}^n} w(\xi)C(\xi)d\xi \\ \frac{\partial}{\partial t}C(\xi) = Nbm(\xi) + b\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi')C(\xi+\xi')d\xi' - dC(\xi) - \\ \qquad -d'w(\xi)C(\xi) - \frac{d'}{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi')T(N,C,\xi,\xi')d\xi'. \end{cases}$$

Данная система предложена У. Дикманом и Р. Лоу в работе [1] с целью описать в приближённой форме динамику стационарной биологической популяции, получаемую в результате некоторого стохастического процесса в пространстве.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МК-6108.2015.9, в ходе проведения исследования (16-05-0069) в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2016 – 2017 гг. и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

Переменные, входящие в это уравнение, могут быть описаны следующим образом: b, d, d' – известные неотрицательные константы (рождаемость, смертность, сила конкуренции); $m(\xi), w(\xi)$ – известные функции, являющиеся плотностями вероятности (рождаемости и конкуренции); Неизвестные функции, первый и второй пространственные моменты, $N(t)$ – математическое ожидание плотности популяции в момент времени t; $C(t, \xi)$ – математическое ожидание плотности пар на расстоянии ξ в момент времени t; заданная функция $T(N, C, \xi, \xi')$ (замыкание) – способ выразить математическое ожидание плотности троек через N и C.

Функция $T(N, C, \xi, \xi')$ выбирается из биологических соображений. В настоящей работе было выбрано замыкание – следующая комбинация первого и второго моментов [2]:

$$\begin{cases} T(N, C, \xi, \xi') = \frac{1}{(\alpha+\gamma)N} \left(\alpha C(\xi)C(\xi') + \beta C(\xi)C(\xi - \xi') + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \gamma C(\xi')C(\xi - \xi') - \beta N^4\right) \end{cases}$$

Стоит отметить, что в частном случае $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ можно воспользоваться методом Нистрёма или методом рядов Неймана, эффективно обобщаемыми на многомерный радиально-симметричный случай с помощью разработанным авторами методом понижения размерности интегралов.

Литература

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge:Cambridge University Press, 2000. P. 252–270.

2. Murrell D. J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space // Journal of Theoretical Biology, 2004. Vol. 229. P. 421–432.

3. Бодров А.Г. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ / А.Г. Бодров, А.А. Никитин // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 455, № 5. — С. 507–511.

4. Бодров А.Г. Исследование интегрального уравнения равновесия в пространствах различных размерностей / А.Г. Бодров, А.А. Никитин // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование : новые задачи и методы : сборник статей Международной конференции. — М. : РУДН. — С. 242–246.

5. Бодров А.Г. Исследование уравнения равновесной плотности биологического вида в пространствах различных размерностей / А.Г. Бодров, А.А. Никитин // Вестник Московского университета, серия 15 Вычислительная математика и кибернетика. — 2015. — № 4. — С. 7–13.

СПОСОБ РАСЧЕТА НА ПОЛНУЮ ПРОЧНОСТЬ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

В.Б. Огарков, А.А. Аксенов (Воронеж)
garikpetrosyan@yandex.ru, afon9192@mail.ru

Рассматривается задача изгиба упругой балки трапецеидальной формы (рис. 1) [1]. Будем рассматривать балку, у которой ширина b(x) и высота h(x) поперечного сечения являются заданными функциями абсциссы x. Нормальное и касательное напряжения находятся по следующим формулам [1].

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}; \quad I_z = \frac{b(x)h^3(x)}{12}. \tag{1}$$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{b(x)h(x)}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2(x)}\right]. \tag{2}$$

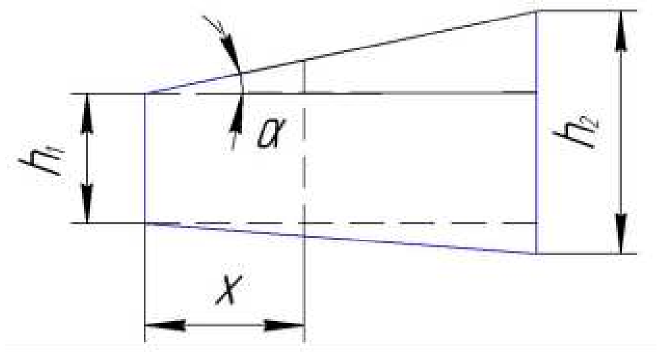


Рис. 1. Балки трапецеидальной формы

В этих формулах соответственно $Q_z(x)$ и $M_z(x)$ – заданные поперечная сила и изгибающий момент; y – ордината точки прямоугольного поперечного сечения.

Исключим переменную y из соотношения (1) и (2):

$$\tau + \frac{bh^3}{24M_z^2}\sigma^2 = \frac{3Q_z}{2bh}. \tag{3}$$

Формула (3) представляет собой уравнение параболы в осях (τ, σ).

При $\sigma = 0$:

$$\tau = \frac{3Q_z}{2bh}. \tag{4}$$

При $\tau = 0$:

$$\sigma_{1,2} = \pm\frac{6M_z\sqrt{Q_z}}{bh^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим третью и четвертую теории прочности [1].

$$\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} \leqslant \sigma_{adm}; \quad \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)} \leqslant \sigma_{adm}; \tag{6}$$

В предельном случае равенств соотношения (7) представляют собой уравнения эллипсов, которые в нормальной форме имеют следующий вид:

$$(\frac{\sigma}{1})^2 + (\frac{\tau}{0.5})^2 = \sigma_{adm}^2; \quad (\frac{\sigma}{1})^2 + (\frac{\tau}{1/\sqrt{3}})^2 = \sigma_{adm}^2; \tag{7}$$

Из соотношения (3) и (7) следует, что нормальные и касательные напряжения должны одновременно лежать на параболе (3) и на эллипсе (7). Отсюда следует вывод: пара напряжений τ и σ при полном расчете балки должны лежать на параболе (3) и на эллипсе (7) (рис. 2).

Для выполнения полного расчета на прочность вершина параболы должна лежать внутри эллипса прочности. Если точки С и Д будут лежать вне эллипса, то предыдущий вывод сохраняет свою силу, поскольку напряжения τ и σ всегда должны находится внутри эллипса.

Если вершина параболы лежит вне эллипса, то последний расчет балки на прочность подлежит дополнительному рассмотрению.

В статье предложен способ расчета балки на полную прочность с использованием геометрической картины (рис. 2), которая должна

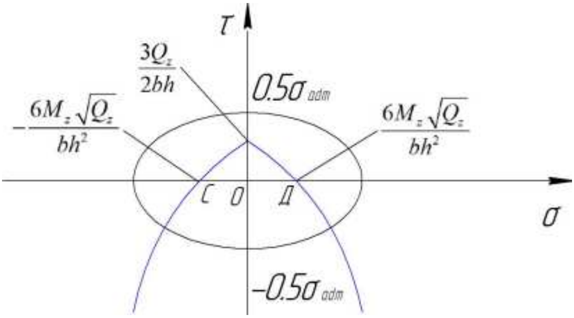


Рис. 2. Расчет балки на полную прочность с использованием геометрической картины

сохраняться для всех фиксированных абсцисс 0⩽x⩽ l, где l – длина балки. Данный способ позволяет избежать сложной процедуры построения и исследования на экстремум октаэдрического напряжения как функции двух переменных y и x.

Одновременный экстремум функций $M_z(x)$ и $Q_z(x)$ просто невозможен ввиду произвольной системы внешних нагрузок.

Литература

1. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов : учеб. / Г.С. Писаренко. – Киев, 1979. – 696 с.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ

А.М. Павлов, А.Н. Темнов (Москва)
pavlov_ arseniy@mail.ru

Пусть G — конечная группа преобразований симметрии. Представление G в некотором m-мерном пространстве L обозначим как $D(G)$. $O_R \in D(G) : L \to L$ — оператор преобразования, соответствующий элементу $R \in G$. Если O_R можно представить в матричной форме, то, $D(G)$ соответсвтвует группа матриц $D(R)$ с компонентами $D_{ij}(R)$.

Пусть $D^{(\nu)}(G)$ — n-мерное неприводимое представление группы G, построенное с помощью базисных функций $\psi_i^{(\nu)}$, $i = 1 \dots n$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть для произвольной функции ψ определены преобразования симметрии $O_R \in D(G)$. Тогда функция ψ может быть разложена по базисным функциям наприводимых представлений группы G* [1]:

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{n_\nu} \psi_i^{(\nu)}.$$

Следствие. *Исходное пространство L может быть разложено в прямую сумму подпространств $L^{(\nu)}$, натянутых на функции $\psi_i^{(\nu)}$:*

$$L = \sum_{\nu=1}^{\mu} \oplus L^{(\nu)}.$$

Другим важным результатом теории представлений является

Теорема 2. *Если оператор H имеет дискретный вещественный спектр с собственными подпространствами конечной размерности и при этом инвариантен относительно преобразований $O_R \in D(G)$, то собственные функции H являются базисными функциями неприводимых представлений группы G* [2].

Рассмотрим движение механической системы, симметрия которой может быть описана некоторой группой G. Уравнение движения системы

$$M \frac{\partial^2 U(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + AU(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{x}, t) = 0,$$

дополненное граничными условиями $\Omega(U) = 0$ и начальными условиями $U(\mathbf{x}, 0) = \chi(\mathbf{x})$, $\dot{U}(\mathbf{x}, 0) = \chi_1(\mathbf{x})$, может быть решено с помощью обобщенного метода Галеркина, в котором решение представляется в виде разложения по собственным элементам оператора A с коэффициентами, зависящими от времени.

Разложение вектор-функций $F(\mathbf{x}, t)$, $\chi(\mathbf{x})$, $\chi_1(\mathbf{x})$ позволяет решать задачу в подпространставх $L^{(\nu)}$, размерность которых в несколько раз меньше размерности исходного пространства L, благодаря чему сокращаются вычислительные затраты, а также упрощается анализ полученных решений.

Рассматривается применение указанного метода к механическим системам, представляющим собой «пакет» упругих идентичных стержней, симметрично расположенных относительно центрального стержня. Полученные результаты сравниваются с решением подобной задачи на всем пространстве L [3].

Литература

1. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. / М. Хамермеш. — М. : Мир, 1966. — 588 с.

2. Вигнер Ю. Теория групп и ее приложения к квантовомеханическиой теории атомных спектров. / Ю. Вигнер. — М. : ИЛ, 1961. — 444 с.

3. Павлов А. М. Продольные колебания пакета стержней / А. М. Павлов, А. Н. Темнов // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. : Естественные науки. — 2014. — № 6. — С. 53–66.

АНАЛИЗ И ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА СМЕРЧЕОПАСНЫХ СИТУАЦИЙ В УМЕРЕННЫХ ШИРОТАХ

Э.В. Переходцева (Москва)

kritskov@cs.msu.su

Развитие методов прогноза явлений смерчей и сильных шквалов, сопровождающиеся порывами максимального ветра скоростью 25 м/с и более до настоящего времени является чрезвычайно актуальной задачей синоптической практики. Синоптики дают штормовое предупреждение о такой скорости ветра с заблаговременностью 3 ч и менее, о прогнозе смерчей речь вообще не идет, прогноз этого явления синоптиками не дается даже в вероятностной форме.

Увеличение заблаговременности даже вероятностного прогноза смерчей до 12–24–36 ч позволило бы заранее принять предохранительные меры и существенно снизить наносимый ими материальный ущерб. Особый интерес представляет объективный и автоматизированный прогноз этих очень редких на территории России явлений.

В 80-х годах прошлого века впервые была разработана статистическая модель объективного (не зависящего от интуиции синоптика) прогноза шквалов и смерчей со скоростью 20 м/с и более (т.е. более 72 км/ч), по которой был успешно рассчитан с заблаговременностью 12 ч прогноз смерчей 1984–1986 гг. для территории ЕТР, в том числе и Ивановского смерча от 9 июня 1984 года, синоптики же прогнозировали в этих случаях порывы ветра при грозе 15–18 м/с. Тогда была разработана статистическая модель распознавания этих редких опасных явлений, когда метеорологическая ситуация, приводящая к смерчам или сильным шквалам представлялась в виде вектора $\mathbf{X}$(A)=(x_1(A), x_2(A), $\ldots x_n$(A)), где n равнялось 26 параметрам, которые, исходя из опыта синоптиков, могли влиять на возникновение этих явлений. Множество векторов $\{\mathbf{X}(A)\}$ составило обучающую выборку наличия явления смерчей и сильных шквалов. Обучающая выборка отсутствия таких явлений состояла из метеоситуаций, при которых наблюдались грозы и ливни (выборка $\{\mathbf{X}(B)\}$. Модель распознавания множеств $\{\mathbf{X}(A)\}$ и $\{\mathbf{X}(B)\}$ была построена с помощью байесовского подхода, при котором минимизируются средние экономические потери при ошибках первого и второго рода. Очень важная проблема уменьшения размерности пространства признаков (параметров атмосферы) была решена с помощью нашего алгоритма приведения средней выборочной матрицы корреляции **R** к блочной структуре и выбора наиболее информативных представителей от каждого блока. В качестве параметров информативности были использованы критерии – расстояние Махаланобиса Δ^2 и критерий минимальной энтропии Вапника-Червоненкиса H_{min}. При этом был выбран вектор-предсказатель из шести физически обоснованных параметров ($\mathbf{V}_{700}$, $\mathbf{T}_З$, $\mathbf{Td}_З$, $(\mathbf{T'}$-$\mathbf{T})_{500}$, $\mathbf{dT/dn}_З$,$\mathbf{H}_0$), на которых и была построена дискриминантная функция U($\mathbf{X}$) для прогноза с заблаговременностью 12 ч. В те годы время часть из этих параметров рассчитывалась синоптиками по картам погоды.

С целью полной автоматизации прогноза сильного летнего ветра двух классов (с V >= 20 м/с и с V >= 25 м/с), включая шквалы и смерчи, на новых выборках наличия и отсутствия этих явлений двух классов были построены новые статистические модели прогноза этих явлений, когда в качестве потенциальных предикторов были выбраны 38 параметров атмосферы, гидродинамические прогнозы которых давались в первой оперативной полусферной модели. Они использовались в качестве значений предикторов в новой статистической модели прогноза. В узлах сетки этой модели 150x150 км в зависимости от значений гидродинамических прогнозов рассчитывались дискриминантные функции $F_1(\mathbf{X})$, $F_2(\mathbf{X})$, зависящие от нового вектора-предсказателя ($\mathbf{V}_{700}$, $\mathbf{T}_З$, $\mathbf{Td}_З$, $\mathbf{H}_{1000}$, $\mathbf{Iw}$, $\mathbf{dT/dn}_З$, $\mathbf{T}_{300}$), а также вероятности возникновения сильных шквалов и смерчей двух классов $P_1(\mathbf{X})$ и $P_2(\mathbf{X})$: $P_1(\mathbf{X})$=100/(1+exp(-$F_1(\mathbf{X})$); $P_2(\mathbf{X})$=100/(1+exp(-$F_2(\mathbf{X})$). Прогнозы двух классов с заблаговременностью 12–24–36 ч передавались до 2006 года в течение 13 лет в четыре разных региона европейской территории России (ЕТР). По этой гидродинамико-статистической модели были успешно даны прогнозы московских смерчей в июне 1998 года и в июле 2001 года.

В настоящее время гидродинамико-статистическая модель прогноза сильных шквалов и смерчей со скоростью V >= 25 м/с

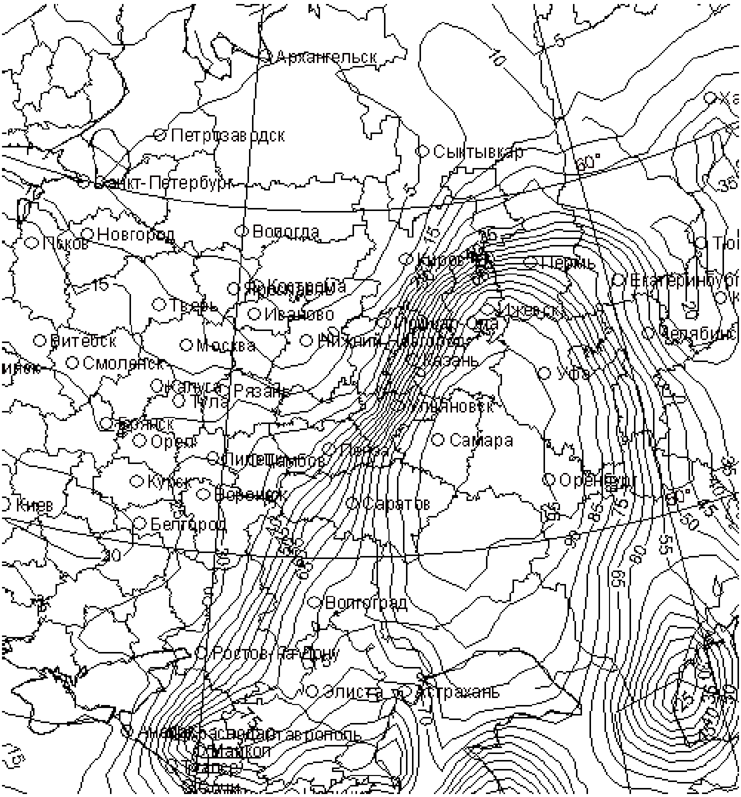


Рис. 1. Область прогноза максимального ветра V >= 25 м/с ограничена изолинией вероятности P = 65%. В районе возникновения смерча (между Уфой и Ижевском) P > 90%

(V >= 90 км/ч) адаптирована к гидродинамическим прогнозам метеоэлементов из новой региональной модели Гидрометцентра России с горизонтальным разрешением 75x75 км, в узлах которой, покрывающих территорию ЕТР рассчитываются по той же выше приведенной формуле вероятности прогноза очень сильных шквалов и смерчей. По независимой оценке в 2015 году предупрежденность летних ветров с V >= 25 м/с с допуском до 22 м/с составила Пя = 75–77% для заблаговременности 12–36 ч, а предупрежденность отсутствия этих явлений — Пот = 85 % и выше. При наличии в области прогноза вероятностей 75 % и выше (P >= 75 %) дается вероятностный прогноз смерчеопасной ситуации. По данной гидродинамико-статистической модели были успешно даны прогнозы смерчей в Подмосковье в июне 2009 года, в Санкт–Петербурге в августе 2010 года, в Одессе в мае 2013 г, в Сочи в сентябре 2013 года и др. Особенно сильный разрушительный смерч третьей категории был отмечен в Янаульском районе Башкортостана (пос. Дюртюли и др.) 29 августа 2014 года. На рис. 1 представлена область прогноза ветра с V >= 25м/с, рассчитанного на эту дату с заблаговременностью 36 ч, в центре которой находятся очень высокие вероятности P = 92–95 %. При этом на 6 станциях были отмечены (предсказанные нами) шквалы скоростью 22 м/с и выше. На 26 станциях, вошедших в область, ограниченную изолинией P = 65 %, были отмечены ветры скоростью 19 м/с

Совместное применение последней модели гидродинамико-статистического прогноза и модели объективного статистического прогноза позволяют давать более успешный вероятностный прогноз смерчеопасных ситуаций, что и будет представлено в докладе на данных за 5 последних лет.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННОГО В НЕЯВНОМ ВИДЕ[1]

Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова (Воронеж)
garikpetrosyan@yandex.ru, afon9192@mail.ru

Пусть E — банахово пространство, $C([0,a];E)$ — пространство непрерывных функций на $[0,a]$ со значениями в E. Символом $Kv(E)$ обозначим совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E. Мы рассматриваем задачу Коши для дифференциального включения дробного порядка в пространстве E, следующего вида:

$$D^q x(t) \in F(t, x(t), D^q x(t)), \qquad t \in [0,a], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $D^q, 0 < q < 1,$ — дробная производная Капуто, $F : [0,a] \times E \times E \to Kv(E)$ — многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

$(F1)$ Для всех $(x(t), D^q x(t)) \in E \times E$ мультифункция $F(\cdot, x_t, D^q x(t)) : [0,a] \longrightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ Для п.в. $t \in [0,a]$ мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot) : E \longrightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху.

$(F3)$ Для каждого $n \in N$ существует функция $\omega_n \in L^\infty([0,a])$, такая, что для любой функции $x \in C([0,a];E)$, удовлетворяющей оценке $\|x\|_{C([0,a];E)} \leqslant n$, выполнено:

$$\|F(t, x(t), D^q x(t))\| := \sup\{\|f\|_E : f \in F(t, x(t), D^q x(t))\} \leqslant \omega_n(t)$$

для п.в. $t \in [0,a]$.

$(F4)$ найдется функция $\mu \in L^\infty([0,a])$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Delta \subset E$ и $Q \subset E$ мы имеем

$$\chi(F(t, \Delta, Q)) \leqslant \mu(t)(\chi(\Delta) + \chi(Q))$$

для п.в. $t \in [0,a]$, где χ — мера некомпактнотсти Хаусдорфа в E.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00468, № 14-01-92004 и № 16-01-00386).

Определение 1. Интегральным решением задачи Коши (1)–(2) на промежутке $[0, a]$ называется функция $x \in C([0, a]; E)$:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(s, x(s), D^q x(s)) ds, \qquad t \in [0, a],$$

где $f(s, x(s), D^q x(s)) \in F(s, x(s), D^q x(s))$.

Теорема 1. *При выполнении условий* $(F1), (F2), (F3), (F4)$ *множество решений задачи* (1)–(2) *на отрезке* $[0, \tau], \tau \in [0, a)$, *непусто.*

Теорема 2. *При выполнении условий* $(F1), (F2), (F4)$ *и условия:*
$(F'3)$ *существует функция* $\alpha \in L^\infty_+([0, a])$ *такая, что*

$$\|F(t, x(t), D^q x(t))\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x(t)\|_E + \|D^q x(t)\|_E)$$

для п.в. $t \in [0, a]$, *множество решений задачи* (1)–(2) *на отрезке* $[0, a]$ *непусто и компактно.*

Литература

1. Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Книжный дом «Либроком», 2011. — 224 с.

2. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin — New-York: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

3. Обуховский В. В. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ, серия Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 192–209.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Л. Пивень (Харьков)
aleksei_piven@mail.ru

Рассматривается задача Коши

$$\frac{d^2Au(t)}{dt^2} + B\frac{du(t)}{dt} + Cu(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{2}$$

с неограниченными замкнутыми операторами A, B, C в банаховых пространствах X, Y, где $f(t,x) \in C([0,T] \times X, Y)$. Функция $u(t) \in C^1([0,T], X)$ называется *решением* задачи Коши (1),(2), если $Au(t) \in C^2([0,T], Y)$, $Bu(t) \in C^1([0,T], Y)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2). Предполагается, что резольвента $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ удовлетворяет ограничению

$$||R(\lambda)|| \leqslant C_1, \quad |\lambda| \geqslant C_2. \tag{3}$$

Операторы

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=C_2} AR(\lambda)d\lambda, \quad Q_2 = E_Y - Q_1$$

являются ограниченными взаимно дополнительными проекторами в Y [1]. Заметим, что $Q_2 \neq 0 \Leftrightarrow Ker A \neq 0$.

В монографии [2] введен оператор $G = A + Q_2 B$ с областью определения $D(A) \cap D(B)$, для которого существует ограниченный обратный G^{-1}. Также в [2] получены глобальные теоремы существования и единственности решения задачи Коши для полулинейного уравнения первого порядка $\frac{d}{dt}(Au) + Bu = f(t,u(t))$. Линейное однородное уравнение (1) ($f(t,x) \equiv 0$) исследовалось в работах [3, 4].

Теорема 1. *Пусть* $\{0\} \neq D(A) \cap D(B) \subset D(C)$, *выполнено ограничение (3), функция* $f(t,x) : [0,T] \times X \to Y$ *непрерывна по* *совокупности переменных и удовлетворяет глобальному условию Липшица*

$$||f(t,x) - f(t,u)|| \leqslant M||x-u||$$

Тогда для любых начальных векторов $u_0, u_1 \in D(A) \cap D(B)$ *в (2) таких, что* $Q_2(Bu_1 + Cu_0) = Q_2 f(0, u_0)$ *существует единственное решение* $u(t)$ *задачи Коши (1),(2). Если дополнительно проекция* $Q_2 f(t,x)$ *является непрерывно - дифференцируемой по совокупности переменных, то решение* $u(t) \in C^2([0,T], X)$ *и удовлетворяет уравнению* $A\frac{d^2u(t)}{dt^2} + B\frac{du(t)}{dt} + Cu(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,T]$.

Для уравнения, полученного из уравнения (1) замещением диссипативного члена $B\frac{du}{dt}$ на $\frac{dBu(t)}{dt}$, устанавливается теорема 2 существования и единственности решения начальной задачи с условиями

$$u(0) = u_0, \ (Au)'(0) = y_1 \quad \forall u_0 \in D(A) \cap D(B) \ \forall y_1 \in Q_1(Y)$$

С помощью метода спектральных проекторов типа Рисса [1, 2] устанавливается эквивалентность разрешимости задачи (1),(2) разрешимости некоторого нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра. Рассматриваются приложения полученных результатов к уравнениям в частных производных.

Литература

1. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ / А. Г. Руткас // Диф. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.

2. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями / Л. А. Власенко. — Днепропетровск : Системные технологии, 2006. — 272 с.

3. Власенко Л. А. Признаки корректности задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка / Л. А. Власенко, А. Л. Пивень, А. Г. Руткас // Укр. мат. журнал. — 2004. — Т. 56, № 11. — С. 1484—1500.

4. Шкаликов А. А. Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений / А. А. Шкаликов // Матем. сборник. — 1988. — Т. 135 (177), № 1. — С. 96–118.

ПЕРСПЕКТИВЫ И ОСОБЕННОСТИ СОТРУДНИЧЕСТВА ВУЗА И ШКОЛЫ В РАМКАХ ФОГОСа

О.К. Плетнева (Воронеж)

В настоящее время в стране происходит обновление российского образования. Школа, как важный социальный институт, должна помочь становлению личности, обладающей такими важнейшими качествами как инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения, выбирать профессиональный путь, готовность к самообразованию в течение всей жизни.

Вопросы раннего развития и формирования гармоничного человека не могут не волновать и высшую школу. Возникает естественное желание не только получать готовый результат школьного образования, а активно участвовать в создании человека способного мыслить самостоятельно, готового как к индивидуальному, так и к коллективному труду.

Именно поэтому деятельность педагогического коллектива вуза по выявлению и становлению талантливой молодежи должна начинаться с самых ранних этапов обучения. В связи с этим необходимо внедрять и развивать новые формы сотрудничества между высшей и средней школами. Телеконференции, видео-уроки, онлайн консультации и многое другое может стать основой обновления содержания образования и методов обучения, что позволит достичь высоких результатов.

Одним из таких направлений, на наш взгляд, является дистанционная подготовка школьников школ города и Воронежской области к сдаче Единого государственного экзамена по математике. Такая система начала работать в рамках подготовительных курсов ВГУ и уже прошла апробацию в течение прошлого года. В настоящее время разрабатывается аналогичный дистанционный курс для подготовки девятиклассников к сдаче ОГЭ.

Однако в рамках президентской программы, направленной на выявление, развитие и обучение одаренных детей особенно актуальной становится дистанционная работа с ребятами, проявляющими особый интерес к изучению математики, и желающими принимать участие в олимпиадном движении различного уровня. В самое ближайшее время планируется начать дистанционную работу с такими учащимися. Подготовительная работа в этом направлении будет включать в себя разработку специальных учебно-методических комплексов, привлечение к сотрудничеству администрации школ для выявления математически одаренной молодежи и установление тесного контакта с этими ребятами.

Именно привлечение современных компьютерных технологий позволит изучать математику на углубленном уровне ребятам из самых отдаленных районов области, даст возможность им общаться со своими единомышленниками из других школ, что несомненно приведет к повышению уровня их математической культуры.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Поздеев, О.Ю. Олефиренко,
А.И. Авраменко (Николаев, Украина)
oksanadurkot@mail.ru

Рассмотрим метод нелинейного преобразования времени [1] на примере генерирования волн давления нестационарно движущимся в сжимаемой жидкости плоским поршнем. Полагаем, что перемещения поршня значительны настолько, что граничное условие необходимо задавать на текущем положении границы. Математическую постановку задачи запишем в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_o^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$x = H_R(t): \ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_R(t)\,, \tag{2}$$

где φ — потенциал скоростей возмущенного движения среды; x — координата; t — время; C_o — скорость звука в среде; V_R — скорость движения поршня; H_R — закон движения поршня, но в общем случае $\frac{\partial H_R}{\partial t} \neq V_R(t)$.

Начальные условия полагаем нулевыми, т.е.

$$t = 0\ :\ \varphi(x,0) = \frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t} = 0\,. \tag{3}$$

При известном потенциале скоростей $\varphi = \varphi(x,t)$ скорость среды и давления в среде определяются выражениями

$$V(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,; \quad P(x,t) = -\rho_0\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \tag{4}$$

где ρ_0 — плотность среды.

Решение поставленной задачи (1)–(4) будем искать методом нелинейного преобразования времени. В соответствии с этим методом решение волнового уравнения (1) запишем в виде

$$\varphi(x,t) = F(t^0)\,; \qquad t^0(x,t) = t - \frac{x}{C_0}\,, \tag{5}$$

где t^0 — волновой аргумент ($t^0 \geqslant 0$), F — неизвестная (искомая) функция волнового аргумента, определяемого из граничного условия (2). Подставляя решение (5) в граничное условие (2), получаем соотношение

$$d\,\varphi\left(t - \frac{H_R(t)}{C_0}\right) \Big/ d\left(t - \frac{H_R(t)}{C_0}\right) = -C_0\,V_R(t)\,. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) воспользуемся преобразованием времени

$$t - \frac{H_R(t)}{C_0} = \tau\,, \tag{7}$$

исходя из которого получаем обратную функцию

$$t = w(\tau)\,, \tag{8}$$

где τ — «новое» время. Заметим, что преобразование вида (7), (8) лежит в основе метода нелинейного преобразования времени как метода решения волновых задач с подвижными границами. С учетом преобразования (7), (8) уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -C_0\,V_R(w(\tau)). \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (9) по τ, получаем

$$\varphi(\tau) = -C_0 \int\limits_0^{\tau} V_R(\tau) d\tau\,. \tag{10}$$

Учитывая, что решение волнового уравнения должно быть функцией волнового аргумента, в (10) принимаем $\tau = t^0$. Тогда получаем решение краевой задачи в виде

$$\varphi(x,t) = -C_0 \int\limits_0^{t^0} V_R(w(\tau))\,d\tau\,. \tag{11}$$

Скорость среды и давление в среде находим в виде

$$V(x,t) = V_0(w(t^0))\,, \quad P(x,t) = \rho_0 C_0 V_R(w(t^0))\,. \tag{12}$$

Остановимся на определении обратной функции из соотношения (8). В ряде случаев задания закона $H_R(t)$ обратное преобразование (8) можно получить из решения алгебраического уравнения (7). Например, пусть $H_R(t) = V_0\,t + a_0\,t^2/2$. Тогда

$$t = w(\tau) = \frac{C_0}{V_0}\,(1 - M_0)\left\{1 - \left[1 - \frac{2\,a_0\,\tau}{C_0(1 - M_0)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{13}$$

$M_0 = \frac{V_0}{C_0}$. Используя обращение вида (13), найдем решение краевой задачи с подвижной границей

$$\overline{V}(x,t) = \overline{P}(x,t) = 1 - (1 - M_0)\,\left[1 - \frac{2\,a_0 t^0}{C_0(1 - M_0)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

где $\overline{V} = \frac{V}{C_0}$; $\overline{P} = \frac{P}{\rho_0 C_0^2}$.

Метод нелинейного преобразования времени применим для решения краевой задачи с подвижной границей для нелинейного волнового уравнения в модели простых волн Римана [2].

Литература

1. Поздеев В.А. // ПММ. — 1991. — № 6. — С. 1055–1058.

2. Олефиренко О. Ю. / О. Ю. Олефиренко, В. А. Поздеев // Материалы I международной заочной научно-практической конференции. — Москва: Изд. «Международный центр науки и образования», 2013. — С. 70–75.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ХИЛЛА[1]

Д.М. Поляков (Воронеж)

DmitryPolyakow@mail.ru

Пусть $L_2[0,\omega]$, $\omega > 0$, — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)\overline{y(\tau)}\,d\tau$, x, $y \in$ $\in L_2[0,\omega]$. Через $W_2^2[0,\omega]$ обозначается пространство Соболева.

Рассматривается дифференциальный оператор Хилла L_θ: $D(L_\theta) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, $\theta \in [0,1]$, порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением

$$l(x) = -x'' - vx,$$

и с областью определения

$$D(L_\theta) = \{x \in W_2^2[0,\omega] : x(\omega) = e^{i\pi\theta}x(0), x'(\omega) = e^{i\pi\theta}x'(0)\}.$$

Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $L_2[0,\omega]$ и всюду используется его разложение в ряд Фурье: $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(k)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in [0,\omega]$, $\widehat{v}(k) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}t}\,dt$.

При оценках собственных значений используется следующая последовательность

$$\alpha(n) = \left(\frac{\|v\|_2^2}{n^2} + \sum_{0<p\leqslant n}\frac{\widetilde{v}(p-n)+\widetilde{v}(p+n)}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\widetilde{v}(n) = \max\{|\widehat{v}(n)|^2, |\widehat{v}(-n)|^2\}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что эта последовательность суммируема с квадратом модуля.

Методом подобных операторов (см. [1–3]) получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Оператор L_θ является оператором с компактной резольвентой и существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для его спектра $\sigma(L_\theta)$ имеет место представление*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{n\geqslant m+1}\sigma_n), \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066), выполняемого в Воронежском государственном университете

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$ и $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n^-\} \cup \{\widetilde{\lambda}_n^+\}$, $n \geqslant m+1$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^- = \widetilde{\lambda}_n^-(\theta)$, $\widetilde{\lambda}_n^+ = \widetilde{\lambda}_n^+(\theta)$, $n \geqslant m+1$, допускают асимптотику вида

$$\widetilde{\lambda}_n^{\mp} = \left(\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}\right)^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \xi_\theta(n),$$

где последовательность $\xi_\theta : m+\mathbb{N} \to [0,\infty)$ оценивается как $|\xi_\theta(n)| \leqslant C_\theta \alpha(2n+\theta)/n^{\frac{1}{2}}$, для некоторой постоянной $C_\theta > 0$.

Теорема 2. *Если $\theta \in (0,1)$, то оператор L_θ является оператором с компактной резольвентой. Его спектр допускает представление вида (1), где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$, множества $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_{n,\theta}\}$, $|n| \geqslant m+1$, одноточечны. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,\theta} = \widetilde{\lambda}_{n,\theta}(\theta)$, $|n| \geqslant m+1$, представимы в виде*

$$\widetilde{\lambda}_{n,\theta} = \left(\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}\right)^2 - \widehat{v}(0) + \eta_\theta(n), \quad |n| \geqslant m+1,$$

где последовательность $\eta_\theta : \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \geqslant m+1\} \to [0,\infty)$ допускает оценку: $|\eta_\theta(n)| \leqslant M_\theta \alpha(2n)/n$, $|n| \geqslant m+1$, для некоторой постоянной $M_\theta > 0$.

Литература

1. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, вып. 3. — С. 3–28.

2. Поляков Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Алгебра и Анализ. — 2015. — Т. 27, вып. 5. — С. 117–152.

3. Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, вып. 3. — С. 417–420.

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛНОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ НАТУРАЛЬНОГО ПОРЯДКА[1]

М.К. Потапов, Б.В. Симонов (Москва, Волгоград)
mkpotapov@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

Обозначим через

• $L_{p_1p_2}, 1 \leqslant p_i \leqslant \infty, i = 1,2-$ множество измеримых функций двух переменных $f(x,y), 2\pi$ - периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_{p_1p_2} < \infty$, где

$$\|f\|_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x,y)|^{p_1}dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

если $1 \leqslant p_i < \infty (i = 1,2)$;

$$\|f\|_{p_1p_2} = \sup_{0\leqslant y\leqslant 2\pi} \mathrm{vrai}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x,y)|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

если $1 \leqslant p_1 < \infty, p_2 = \infty$;

$$\|f\|_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\mathrm{vrai}|f(x,y)|\right)^{p_2}dy\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

если $p_1 = \infty, 1 \leqslant p_2 < \infty$;

$\|f\|_{p_1p_2} = \sup\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi}} \mathrm{vrai}|f(x,y)|$ если, $p_1 = \infty, p_2 = \infty$;

• $L^0_{p_1p_2}$ — множество функций $f \in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x,y)dx =$ $= 0$ для почти всех y и $\int\limits_0^{2\pi} f(x,y)dy = 0$ для почти всех x;

• $\sigma(f)-$ ряд Фурье функции $f \in L_{p_1p_2}$, то есть

$$\sigma(f) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1k_2}e^{i(k_1x+k_2y)},$$

где $c_{k_1k_2}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x,y)e^{-i(k_1x+k_2y)}dxdy.$

•$V_{n_1n_2}(f), n_i \in N \cup \{0\} (i = 1,2),$ – суммы Валле – Пуссеена ряда Фурье функции $f \in L_{p_1p_2}$, т.е.

$$V_{n_1n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t_1, y+t_2)V^{2n_1}_{n_1}(t_1)V^{2n_2}_{n_2}(t_2)dt_1dt_2,$$

где $V^0_0(t) = D_0(t)$,

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00350).

$V_n^{2n}(t) = \frac{1}{n}\big(D_n(t) + ... + D_{2n-1}(t)\big), n \in N,$
$D_k(t) = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}, k \in N \cup \{0\};$

• $\Delta^r_{h_1,h_2}(f)$– полную разность с шагами h_1 и h_2 натурального порядка r функции $f \in L_{p_1p_2}$, то есть

$$\Delta^r_{h_1,h_2}(f) = \sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}f(x+(r-\nu)h_1, y+(r-\nu)h_2),$$

где $\binom{r}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{r}{\nu} = r$ для $\nu = 1$,
$\binom{r}{\nu} = \frac{r(r-1)\cdots(r-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$,

• $\omega_r(f,\delta)_{p_1p_2}$– полный модуль гладкости натурального порядка r функции $f \in L_{p_1p_2}$, то есть $\omega_r(f,\delta)_{p_1p_2} = \sup\limits_{|h_i|\leqslant\delta, i=1,2}||\Delta^r_{h_1,h_2}(f)||_{p_1p_2}$,

• $f^{(r_1,r_2)}, f^{(r_1,0)}, f^{(0,r_2)}$– смешанные и частные производные функции f.

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \leqslant CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2) \ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Теорема. Пусть $f \in L^0_{p_1p_2}, 1 \leqslant p_i \leqslant \infty (i = 1,2), r \in N, n \in N$. Тогда

$$\omega_r\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_{p_1p_2} \asymp n^{-r}\sum_{m=0}^{r}\Big\|V_{nn}^{(m,r-m)}(f)\Big\|_{p_1p_2} + ||f - V_{nn}(f)||_{p_1p_2}.$$

В случае $p_1 = p_2$ аналогичная теорема содержится в работе [1].

Литература

1. Потапов М. К. Связь между полными модулями гладкости в метриках L_1 и L_∞ / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестник МГУ. Серия : Математика. Механика. — 2016. — № 1. — С. 16–24.

ОБ АЛГОРИТМЕ АДАПТАЦИИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА К ОДНОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ С ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

А.З. Пчелова (Чебоксары)
apchelova@mail.ru

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, как известно, используются в качестве математических моделей реальных процессов и явлений. Наличие подвижных особых точек этих уравнений относит их к категории дифференциальных уравнений, в общем случае, не разрешимых в квадратурах. Этот факт не позволяет применять к ним известные аналитические и численные приближенные методы решения, так как они не адаптированы к этой категории особых точек.

В работах [1–2] предложен приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, состоящий в построении приближенных решений с помощью аналитических продолжений как в области аналитичности, так и в окрестности подвижной особой точки.

В данной статье приводится алгоритм программы для ЭВМ, реализующей приближенный метод для нелинейного дифференциального уравнения

$$y' = y^5(x) + r(x)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Программа является следствием адаптации известного численного метода к решению нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, гарантирует отсутствие подвижных особых точек в рассматриваемой области и позволяет получить приближенное решение рассматриваемого уравнения с заданной точностью в области аналитичности.

В соответствии с результатами, полученными в работах [3–4], имеем следующие расчетные соотношения, необходимые для реализации численного метода:

$$M = \max\left\{|y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}, \quad R = \frac{1}{5(M^4+1)},$$

где R — радиус аналитичности.

Описание алгоритма.

1. Ввод данных: область поиска решения; значения начальных данных задачи Коши; допустимые погрешности. Переходим к п. 2.

2. Вычисление значений M и R. Переходим к п. 3.

3. Нахождение значений функции y_i в узлах сетки x_i и на границе области аналитичности по методу Рунге – Кутты. Переходим к п. 4.

4. Если выполняются условия остановки расчетов: выход за границы заданного отрезка, либо попадание в окрестность подвижной особой точки:

$$\begin{cases} R < \varepsilon, \\ y_i y_i' y_i'' > 0 \ (y_i y_i' y_i'' < 0), \end{cases}$$

тогда переходим к п. 5, иначе — переходим к п. 2.

5. Вывод таблицы значений. Завершение алгоритма.

На рисунке 1 представлена блок-схема этого алгоритма.

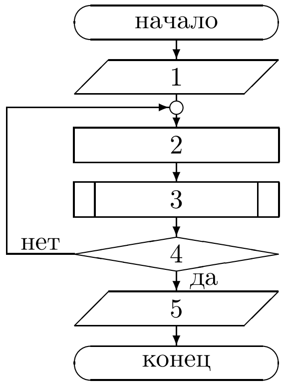


Рис. 1

Для задачи Коши $y' = y^5$, $y(1) = 1$, результаты расчетов приведены в таблице 1. Здесь y_i — значение приближенного решения, $y(x_i)$ — значение точного решения. Точным решением данного уравнения является функция $y = 1/\sqrt[4]{5-4x}$.

Приведенные расчеты подтверждают, что полученные значения приближенного решения найдены с заданной точностью, гарантируют отсутствие подвижных особых точек в области поиска решения и завершение поиска решения в случае попадания в окрестность подвижной особой точки.

Таблица 1

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	R
1	1	1	1	$0,1$
2	$1,1$	$1,13621938$	$1,13621937$	$0,075$
3	$1,175$	$1,351210018$	$1,35120015$	$0,04615384$
4	$1,22115384$	$1,71578568$	$1,71578555$	$0,02068915$
5	$1,24184349$	$2,35293040$	$2,35292974$	$0,0631903$
6	$1,24816253$	$3,41531126$	$3,41530699$	$0,00145924$
7	$1,24962177$	$5,07048430$	$5,07045347$	$0,00030212$

Литература

1. Орлов В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Диф. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 10. — С. 1829–1832.

2. Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. — М. : МПГУ, 2013. — 174 с.

3. Орлов В. Н. Необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек решений одного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: сб. статей по материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Чув. гос. пед. ун-т, 12–15 августа 2013 г.): в 2 ч. — Ч. 2. — Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева, 2013. — С. 53–59.

4. Пчелова А. З. К вопросу о влиянии погрешности начального условия на приближенное решение задачи Коши для одного нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности / А. З. Пчелова // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. конф. : Воронеж. зимняя матем. школа (Воронеж. гос. ун-т, 27 января — 2 февраля 2015 г.). — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2015. — С. 104–106.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ С РАСХОДЯЩИМИСЯ МОМЕНТАМИ

А.М. Райцин (Москва)
arcadiyram@rambler.ru

При практическом использовании лазеров часто возникает необходимость идентификации пространственного-временного распределения интенсивности (РИ) излучения $I(x, y, z, t_0) > 0$ в фиксированный момент времени t_0, в фиксированном поперечном сечении $z = c$. Тогда $I(x, y, c, t_0) = I(x, y)$.

Так, разработчиков лазеров и систем на их основе интересует фокусируемость лазерного пучка и сходство его РИ к Гауссу, что определяется коэффициентом распространения $M^2 \geqslant 1$ — известной стандартизованной характеристикой, равный единице только для РИ Гаусса. При этом коэффициент M^2выражается через вторые моменты РИ. Недостаток характеристики M^2 рассмотрен в [1].

В работах [2–3] предложена новая характеристика, характеризующая меру сходства измеренного РИ к Гауссу, приводящая к применению логарифмического момента, где показано, что из всех возможных РИ, имеющих фиксированные вторые моменты, наибольшее значение логарифмического момента достигается для РИ Гаусса. Однако, РИ, рассматриваемые на всей плоскости XOY, могут не иметь моментов, в силу расходимости соответствующих интегралов. В тоже время, средства измерений РИ всегда производят измерения в ограниченной области плоскости и вторые моменты всегда существуют и могут быть определены. Возникает задача оценки меры δ сходства измеренного РИ с РИ Гаусса при бесконечном расширении пределов области измерений. Решение такой задачи рассмотрено ниже.

Будем считать, что РИ имеет гладкое соприкосновение с плоскостью XOY на концах промежутков, где оно сосредоточено, т.е. $\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \to 0$, $\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \to 0$ при $x, y \to \pm\infty$ что, как правило, выполняется для реальных РИ. Мера δ может быть представлена в виде [2], $\delta = H/H_{\mathrm{g}}$, где

$H_g = \pi \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) s(x, y)\, dxdy / \iint\limits_G s(x, y) dxdy$,

$H = -\iint\limits_G s(x, y) \ln |s(x, y)| dxdy$, G — область интегрирования

$0 < s\left(x,y\right) = I\left(x,y\right)/I_{\max} \leqslant 1$. Рассмотрим в качестве области измерения РИ G круг радиусом L и будем считать, что РИ осесимметрично.

Тогда $H_g = \pi\int\limits_0^L r^3 s\left(r\right)dr/\int\limits_0^L rs\left(r\right)dr$, $H = -2\pi\int\limits_0^L rs\left(r\right)ln\left|s\left(r\right)\right|dr$, причем считаем, что интегралы, входящие в выражение для H_g, при $L \to \infty$ расходятся и также стремятся к бесконечности. Легко показать,что интеграл для H, выражающий логарифмический момент, при $L \to \infty$ всегда сходится. Тогда

$$\delta\left(L\right) = \frac{-2\int\limits_0^L rs\left(r\right)\ln\left|s\left(r\right)\right|dr \cdot \int\limits_0^L rs\left(r\right)dr}{\int\limits_0^L r^3 s\left(r\right)dr}$$

и $\lim\limits_{L\to\infty}\delta\left(L\right)$ представляет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Можно показать, что при сделанных допущениях

$$\lim_{L\to\infty}\delta\left(L\right) = -\lim_{L\to\infty}Ls'\left(L\right).$$

Если $s'\left(L\right)$ при $L \to \infty$ убывает как $s'\left(L\right) \approx 1/L^{\alpha}$, где $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{L\to\infty}\delta\left(L\right) = 0$, что, как правило, выполняется для реальных РИ со слабо спадающими “хвостами”, например, для РИ типа Коши $s\left(r\right) = \frac{1}{1+br^2}$.

В этом случае отличие измеренного РИ от кривой Гаусса наибольшее.

Литература

1. Ананьев Ю. А. Еще раз о критериях «качества» лазерных пучков / Ю. А. Ананьев // Оптика и спектроскопия. — 1999. — Т. 86, № 3. — С. 499–502.

2. Raitsin A. M. A new integral characteristic of the degree of difference of the spatial distribution of a laser beam from a Gaussian distribution // Measurement Techniques. — 2011. — V. 54, № 2. — P. 162–169.

3. Raitsin A. M., Ulanovskii M.V. Application of the logarithmic moment of an intensity distribution as an alternative to the dispersion coefficient of a laser beam // Measurement Techniques. — 2015. — V. 58, № 6. — P. 630–633.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В.В. Рогачев (Москва)
valdakhar@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$y''' = p(x, y, y', y'')|y|^k \operatorname{sgn} y, \qquad \text{где } k \in (0, 1), \tag{1}$$

функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, y_2. Исследуется существование решений с заданным числом нулей на заданной области определения.

Теорема 1. *Пусть $0 < m \leqslant |p(x, y_0, y_1, y_2)| \leqslant M < \infty$. Тогда для любых $k \in (0, 1)$, $-\infty < a < b < +\infty$ и целого $m \geqslant 2$ уравнение (1) имеет решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей.*

Ранее, в работах [2], [3], [4], был получен аналогичный результат для уравнения такого же вида, но при $k \in (1, \infty)$. При доказательстве использованы теоремы из [1], [5].

Литература

1. Astashova I. V. On special solutions to Emden – Fowler type differential equations. / Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. — (WBVP) January, 20–24, 2014, Brno, Czech Republic.

2. Асташова И. В. О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью / И. В. Асташова, В. В. Рогачев // Нелінійні коливання. — 2014. — Т. 17, № 1. — С. 16–31.

3. Асташова И. В. О существовании решений с заданным числом нулей для уравнений типа Эмдена-Фаулера третьего и четвертого порядков / И. В. Асташова, В. В. Рогачев // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1509–1510.

4. Рогачев В. В. О существовании решений с заданным числом нулей у регулярно нелинейного уравнения типа Эмдена – Фаулера третьего порядка с переменным коэффициентом / В. В. Рогачев // Вестник СамГУ. — 2015. — № 6 (128). — С. 117–123.

5. Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа : научное издание под ред. И.В. Асташовой. — М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2012. — С. 22–288.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ ПОДОХОДНОГО НАЛОГА В РЕГИОНАХ РОССИИ[1]

В.А. Родин (Воронеж)

1. Введение. В работе построены модели прогрессивной шкалы подоходного налога, учитывающие современные статистические данные по распределению доходов населения определенных регионов России. Для построения использовались сведения о виде закона распределения легальных доходов и параметры этого закона. Проведен численный анализ целесообразности введения прогрессивного налогообложения.

2. Определение налоговой шкалы. Пусть $T = (t_0;\ a_1, t_1;\ ...; a_k, t_k)$ - упорядоченный набор $2k+1$ чисел. Числа $a_1, ...a_k$ строго возрастают и называются делениями шкалы. Числа $t_0,\ t_1, ..., t_k$, из промежутка [0,1) называются налоговыми ставками. Величина налога определяется по формуле:

$$N(x) = \left(\begin{array}{cc} t_0 & 0 \leqslant x < a_1 \\ t_1 & a_1 \leqslant x < a_2 \\ & ... \\ t_n & x \geqslant a_{n+1} \end{array} \right. \qquad (1)$$

Налоговая шкала называется прогрессивной, если налоговые ставки строго возрастают. Понятие "много денег" относительно, дальнейшие рассуждения показывают, что можно и нужно указывать процент от среднего заработка μ^* (математического ожидания). В дальнейшем $a_k = \beta_k \mu^\bullet$.

3. Функция распределение легальных доходов населения Известно из работ [1,2], что легальный доход в расчёте на одного налогоплательщика в регионах России представляет собой

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00614-а

случайную величину X, принимающую значения $x \in [0, +\infty)$ и распределённую по закону с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где параметр $\sigma \geqslant 0$ различный для разных регионов. Пусть N-количество налогоплательщиков, $t(x)$- ставка подоходного налога, зависящая от величины дохода. Тогда совокупный налог, собранный со всех налогоплательщиков, равен $S = N\int\limits_0^\infty t(x)xf(x)dx$. Если $t(x) = const$, то получим равномерную шкалу налогообложения: $S = N\int\limits_0^\infty Constxf(x)dx = ConstN\mu^*$. Здесь μ^* - математическое ожидание (средний заработок). В настоящее время в России ставка равна 13%, поэтому $S_R = 0.13\, N\, \mu^*$.

4. Модель прогрессивной шкалы. Задаем деления и ставки шкалы в формуле (1). Предполагаем, что $t_0 = 0$ для $x < 0.2\,\mu^*$. Это означает, что с бедных людей, доход которых не превышает пятой части среднего уровня (математического ожидания), $a_1 = 0,2\,\mu^*$, налог вообще не берётся (аналог китайской схемы). Остальные ставки предложим по следующей формуле:

$$t(x) = \begin{cases} 0.13, & 0.2\mu^* \leqslant x < 2\mu^* \\ 0.20, & 2\mu^* \leqslant x < 4\mu^* \\ 0.25, & 4\mu^* \leqslant x < 6\mu^* \\ 0.35, & 6\mu^* \leqslant x < 10\mu^* \\ 0.55, & 10\mu^* \leqslant x < \infty \end{cases}. \tag{2}$$

Общая сумма сбора прогрессивного налога связана с математическим ожиданием. Задача вычисления этой суммы упрощается, так как справедливо следующее

Утверждение. *В случае логнормального распределения и определения шкалы в долях математического ожидания μ^* процент (эффект) от совокупного налога зависит только от параметра σ, и вычисляется по формуле*

$$S = N\mu^* \sum_{k=1}^{n} t_k \left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\beta_{k+1} - \frac{\sigma}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\beta_k - \frac{\sigma}{2}\right)\right] \quad , \tag{3}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2/2}dx$ — интегральная функция Лапласа.

1) Распределение 1. Имеем $\mu = 1.5$ и $\sigma = 1.57$. Математическое ожидание дохода на физическое лицо $\mu^* = \exp\left\{\mu + {\sigma^2}/{2}\right\} \approx$ ≈ 15.37т. руб.

Это, как видно из вычислений, небогатый район с незначительным разбросом заработанных сумм [2]. Вычисления дают сумму сбора налога

$$\sum\nolimits_1 \approx N\,\mu^*\,0.279.$$

2) Распределение 2. Имеем $\mu = 1.6$ и $\sigma = 2.2$. Математическое ожидание дохода на физическое лицо $\mu^* = \exp\left\{\mu + {\sigma^2}/{2}\right\} \approx$ ≈ 55.70т. руб. Это как видно из вычислений район с обеспеченными жителями и значительным разбросом заработанных сумм. Вычисления дают сумму сбора налога

$$\sum\nolimits_2 \approx N\,\mu^*\,0.370.$$

5. Диаграммы сравнения.

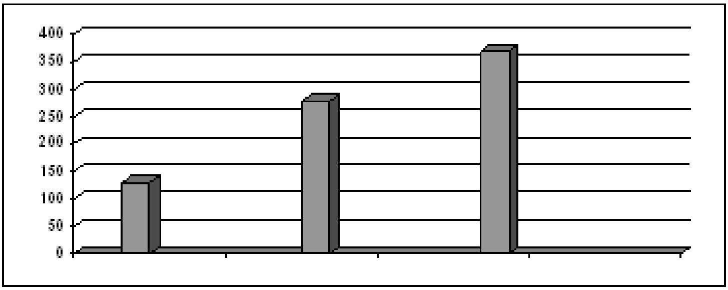


Рис. 1. Диаграмма сравнения

6. Выводы. В работе показано что, освободив полностью от налога малоимущий слой населения, с помощью прогрессивной шкалы даже в регионе с невысоким среднем заработком можно не только сохранить прежний уровень сбора суммы налога, но и увеличить его вдвое (средний столбец рис.3). В районе с населением в среднем имеющим достаточный заработок общий сбор налога можно увеличить почти в три раза (Правый столбец Рис.3). Современный равномерный сбор в 13% со всех слоев населения (Левый столбец рис.3).

Литература

1. Колмаклв И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения / И.Б. Колмаклв // Проблемы прогнозирования. — 2006. — № 1. — С. 136–162.

2. Скрыль С.В. Безопастность социоинформационных процессов. Теория синтеза прогностических моделей / С.В. Скрыль, С.Н. Тростянский. — Воронеж : ВИ МВД России, 2008. — 155 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ В СЕКТОРЕ РАЗРЕШАЮЩЕЕ СЕМЕЙСТВО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО[1]

Е.А. Романова (Челябинск)

linux_21@mail.ru

Пусть замкнутые операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ имеют плотные области определения $D_L, D_M \subset \mathfrak{U}$. Множество точек $\mu \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathfrak{V}$ инъективен, при этом операторы $(\mu L - M)^{-1} L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ (линейны и непрерывны), назовем *L-резольвентным множеством* $\rho^L(M)$ оператора M.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}^\alpha(\theta, a, p)$, если

(i) существуют такие константы $a_0 \geqslant 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, что для всех $\lambda \in S^L_{a_0,\theta_0}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при всех $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K(a, \theta) > 0$, что при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$

$$\max\left\{\| \prod_{k=0}^{p} (\mu_k^\alpha L - M)^{-1} L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \| \prod_{k=0}^{p} L(\mu_k^\alpha L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant K \prod_{k=0}^{p} |\mu_k^{\alpha-1}(\mu_k - a)|^{-1}.$$

Пусть D_t^α — дробная производная Герасимова – Капуто. Решением уравнения

$$D^\alpha L u(t) = M u(t) \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

называется такая функция $u \in C(\mathbb{R}_+; D_M) \cap C(\mathbb{R}_+; D_L)$, для которой существует производная $D^\alpha Lu$ и при всех $t > 0$ выполняется равенство (1).

Теорема 1. *Пусть* $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$, $\Gamma = \partial S^L_{a_0,\theta_0}(M) + 1$. *Тогда семейство операторов*

$$\left\{ U_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1}(\mu^\alpha L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : \, t > 0 \right\}$$

аналитически продолжимо в сектор

$$\Sigma_{\theta_0} \equiv \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta_0 - \pi/2, \tau \neq 0\}.$$

При этом для любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует такое* $C_n(a, \theta)$, *что при каждом* $\tau \in \Sigma_\theta$ *для всякого* $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|U_\alpha^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leqslant C_n(a, \theta) e^{a \mathrm{Re} \tau} (a + |\tau|^{-1})^n.$$

Кроме того, при всех $u_0 \in D_M$ *функция* $U_\alpha(t) u_0$ *является решением уравнения* (1).

Полученные результаты являются обобщением некоторых результатов работы [1] на случай вырожденных уравнений (поскольку, вообще говоря, $\ker L \neq \{0\}$) и обобщением результатов работ [2, 3] на более общий класс пар операторов (L, M).

Литература

1. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — iv+107 p.

2. Федоров В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.

3. Федоров В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Рыжкова (Воронеж)
a.r.ryzhkova@gmail.com

Пусть X — комплексное банахово пространство. Через $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$. Пусть $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое пространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций из C_b, исчезающих на бесконечности, т.е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим операторы сдвига

$S(t) : C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(\tau)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$, т. е. $\lim\limits_{\tau\to\infty} \|x(\tau + t) - x(\tau)\| = 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций образуют замкнутое подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, которое обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Дадим следующее определение (аппроксимационное) почти периодической на бесконечности функции, которое было введено в статьях [1],[2].

Определение 2. Функция $x \in C_b$ называется *почти периодической на бесконечности* если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $x_k \in C_{sl,\infty}$ и числа $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, такие что $\|x(t) - \sum\limits_{k=0}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon$, для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество почти периодических на бесконечности функций обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Ясно, что $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Отметим, что банахово пространство $AP(\mathbb{R}, X)$ почти периодических функций(понимаемых в классическом смысле) содержится в $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

В частности функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}, x : \mathbb{R} \to X, \tag{1}$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}, 1 \leqslant k \leqslant m$, $x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, являются почти периодическими на бесконечности функциями ($x \in \in AP_\infty(\mathbf{R}, X)$).

В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$, где X конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $y \in C_0(\mathbb{R}, X), B \in EndX$ со свойством $\sigma_0 = \sigma(B) \cap i\mathbb{R} = = \{i\lambda_1, i\lambda_2 ..., i\lambda_m\}$ — совокупность простых собственных значений и $\sigma(B)$ обозначает спектр оператора B.

Теорема 1. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2) является почти периодической на бесконечности функцией,которое допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t},$$

где $x_k \in C_{sl,\infty}$, $0 \leqslant \lambda_k < 2\pi$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$.

Литература

1. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174–190.

2. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.

3. Рыжкова А.А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 45–49.

4. Рыжкова А.А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Науч. ведомости Белгородского государственного ун-та. Серия : Математика. Физика. — 2014. — Т. 36. — С. 71–75.

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО КОРНЕВЫМ ЭЛЕМЕНТАМ НЕРЕГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1]

В.С. Рыхлов (Саратов)
RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим краевую задачу для пучка $L(\lambda)$:

$$y''' - 3\lambda y'' + 3\lambda^2 y' - \lambda^3 y = 0,\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) - y''(0) = 0. \tag{2}$$

Характеристический многочлен $\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1$ пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda) = e^\lambda - 2$ является вырожденным, а пучок $L(\lambda)$ — нерегулярным [1, с. 66–67]. Собственные значения (с.з.) пучка есть числа $\lambda_k = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решается задача нахождения таких условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, при которых имеет место трехкратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]), соответствующим его корневым элементам (к.э.).

В нерегулярном случае дифференциального оператора 3-го порядка, когда характеристики лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [2]. Разложения по к.э. в случае регулярного пучка с четырехкратными характеристиками изучались в [3]. Случай нерегулярного пучка второго порядка с простыми характеристиками рассматривался в [4].

Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ определим функцию

$$F(x,\lambda) := -\lambda^2 f_1(x) + \lambda\big(-3f_1'(x) + f_2(x)\big) + \big(3f_1''(x) - 3f_2'(x) + f_3(x)\big).$$

Обозначим через Γ_ν круговые контуры в λ-плоскости с центрами в начале координат и радиуса $\sqrt{\ln^2 2 + 4\pi^2(\nu + 1/2)^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $G(x,t,\lambda)$ есть функция Грина задачи (1)–(2).

Теорема 1. *Если в.-ф. f удовлетворяет условиям*

$$f_1^{(5)}, f_2^{(4)}, f_2^{(3)} \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant +\infty, \tag{3}$$

[1] Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K).

$$f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0,\ j = \overline{1,3},\ s = \overline{0, 5-j}, \tag{4}$$

то имеют место следующие формулы трехкратного разложения в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^{s-1} \int_0^1 G(x,t,\lambda)F(x,\lambda)\,d\lambda =$$

$$= f_s(x) + x(1-x)\varphi_1^{(s-1)}(x) + (x^2-1)\varphi_2^{(s-1)}(x),\ s = \overline{1,3},$$

где сходимость равномерная по $x \in [0,1]$ и

$$\varphi_1(x) := xf_1''(x) - f_1'(x) - 2xf_2'(x) + f_2(x) + xf_3(x),$$

$$\varphi_2(x) := \frac{x^2}{2} f_1''(x) - xf_1'(x) + f_1(x) - x^2 f_2'(x) + xf_2(x) + \frac{x^2}{2} f_3(x).$$

Теорема 2. *Пусть в.-ф. f удовлетворяет условиям (3)–(4). Для того чтобы имели место формулы трехкратного разложения в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$ с равномерной сходимостью*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \lambda^{s-1} \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda)F(x,\lambda)\,d\lambda = f_s(x),\ s = \overline{1,3},\ x \in [0,1],$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества

$$\varphi_1(x) \equiv 0, \quad \varphi_2(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1].$$

Доказательство теоремы 1 проводится путем линеаризации задачи (1)–(2) подстановкой $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, $z_3 = \lambda z_2$. В результате получается краевая задача на с.з. для дифференциального оператора $\hat{L}$ в пространстве в.-ф. $z = (z_1, z_2, z_3)^T$: $\hat{L}z - \lambda z = 0$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d^3}{dx^3} & -3\frac{d^2}{dx^2} & 3\frac{d}{dx} \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \{z \big| z_1'', z_2', z_3 \in L_1[0,1],\ z_1(0) = 0,\ z_1'(0) = 0, z_1(1) - z_1''(0) = 0\}.$$

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой к.э. оператора $\hat{L}$.

Пусть $(\hat{L}-\lambda E)^{-1}f=\big(z_1(x,\lambda),z_2(x,\lambda),z_3(x,\lambda)\big)^T$. В доказательстве теоремы 1 используются явные формулы для функций $z_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,3}$, которые даются в следующей лемме.

Лемма 1. *Если* $f_1'',f_2',f_3\in L_1[0,1]$, *то*

$$z_1(x,\lambda)=\int_0^1 G(x,t,\lambda)F(t,\lambda)\,dt=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}e^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda)\,dt-$$

$$-\frac{1}{e^\lambda-2}\int_0^1\frac{x^2(1-t)^2}{2}e^{\lambda(x+1-t)}F(t,\lambda)\,dt,\quad \operatorname{Re}\lambda\leqslant 0;$$

$$z_1(x,\lambda)=\int_0^1 G(x,t,\lambda)F(t,\lambda)\,dt=-\int_x^1\frac{(x-t)^2}{2!}e^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\int_0^1\Big((x^2-x)t+(1-x^2)\frac{t^2}{2}\Big)e^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda)\,dt-$$

$$-\frac{1}{1-2e^{-\lambda}}\int_0^1 x^2(t-1)^2e^{\lambda(x-1-t)}F(t,\lambda)\,dt,\quad \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0;$$

$$z_2(x,\lambda;f)=\lambda z_1(x,\lambda)+f_0(x);$$

$$z_2(x,\lambda;f)=\lambda^2 z_1(x,\lambda)+\lambda f_1(x)+f_2(x).$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы о разложении в [4].

Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка / А. П. Хромов // Исследования по теории операторов. — Уфа, 1988. — С. 182–193.

3. Вагабов А. И. Четырехкратная разлолжимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой / А. И. Вагабов, А. Х. Абуд // Вестник Дагест. гос. ун-та. — 2015. — Т. 30, вып. 1. — С. 34–39.

4. Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка / В. С. Рыхлов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. : Матем. Мех. Информ. — 2013. — Т. 13, вып. 1, ч. 1. — С. 21–26.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛОСЕ

А.С. Рябенко, Е.Е. Шамрицкая (Воронеж)
alexr-83@yandex.ru, shamritskaya.e@yandex.ru

Рассматривается следующая краевая задача с параметрами:

$$u''(x_3,\gamma,s)-(\gamma^2 b^2(x_3)+|s|^2)u(x_3,\gamma,s)=-f(x_3,\gamma,s),\ x_3\in(0;d), \quad (1)$$

$$u(0,\gamma,s)=0,\quad u(d,\gamma,s)=0, \quad (2)$$

где γ – комплексный параметр, $s=(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$.

Предполагается, что $b(x_3)\in C([0;d])$ и существуют такие положительные константы ε_1 и ε_2, что при $x_3\in[0;d]$ выполнены оценки

$$\varepsilon_1\leqslant b^2(x_3)\leqslant\varepsilon_2,$$

а функция $f(x_3,\gamma,s)$ непрерывна на отрезке $[0;d]$ по переменной x_3 при фиксированных γ и s.

Задачу (1)–(2) можно получить из следующей начально-краевой задачи для волнового уравнения в полосе:

$$\frac{\partial^2\nu(\bar{x},t)}{\partial t^2}-a^2(x_3)\Delta\nu(\bar{x},t)=f(\bar{x},t),\ \ \bar{x}\in\mathbb{R}^2\times(0;d),\ \ t>0,$$

$$\nu(\bar{x},t)|_{x_3=0}=\nu(\bar{x},t)|_{x_3=d}=0,\ \ x'\in\mathbb{R}^2,\ \ t>0,$$

$$\nu(\bar{x},0)=0,\quad \frac{\partial\,\nu(\bar{x},0)}{\partial\,t}=0,\ \ \bar{x}\in\mathbb{R}^2\times(0;d),$$

где $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $x'=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $x_3\in(0;d)$, если формально применить к ней преобразование Лапласа по переменной t ($L_{t\to\gamma}$), преобразование Фурье по переменным $(x_1,\,x_2)$ ($F_{(x_1,\,x_2)\to(s_1,s_2)}$) и ввести следующие обозначения:

$$u(x_3,\gamma,s)=F_{(x_1,\,x_2)\to(s_1,s_2)}\left[L_{t\to\gamma}\left[\nu(\bar{x},t)\right]\right],\ \ a^2(x_3)=b^{-2}(x_3),$$
$$f(x_3,\gamma,s)=\frac{F_{(x_1,\,x_2)\to(s_1,s_2)}\left[L_{t\to\gamma}\left[f(\bar{x},t)\right]\right]}{a^2(x_3)}.$$

В работе получены априорные оценки для решения задачи (1)–(2).

В частности, эти оценки могут быть использованы для определения зависимости поведения решения задачи (1)–(2) от переменной x_3, параметров γ и s, а также для определения области аналитичности решения задачи (1)–(2) по параметру γ [1–3].

Пусть $g(x_3, \gamma, s)$ – комплекснозначная функция действительного переменного $x_3 \in [0; d]$. В дальнейшем через $\| g\|$ будет обозначаться норма по переменной x_3 в $L_2([0; d])$ при фиксированных значениях параметров γ и s.

Были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi = \arg\gamma$, ε_0 *– произвольная константа, такая что* $0 < \varepsilon_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $u(x_3, \gamma, s)$ *– решение задачи (1)–(2), тогда найдется такая положительная константа* c, *что при* $|\varphi| \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_0;\ \pi\right]$ *и* $s \in \mathbb{R}^2$ *будет выполнена оценка*

$$\|u''\| + (|\gamma| + |s|)\,\|u'\| + (|\gamma|^2 + |s|^2)\,\| u\| \leqslant c\,\|f\|\,.$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x_3, \gamma, s)$ *– решение задачи (1)–(2), тогда найдутся такие положительные константы* c, ε_1 *и* δ, *что при* $|\gamma| \leqslant \varepsilon_1$ *и* $s \in \mathbb{R}^2$ *будет выполнена оценка*

$$\|u''\| + (|\gamma| + |s| + \delta)\,\|u'\| + (|\gamma|^2 + |s|^2 + \delta)\,\| u\| \leqslant c\,\|f\|\,.$$

Литература

1. Рябенко А. С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2007. — № 1. — С. 95–99.

2. Glushko A. V. Localization Principle and an Estimate of the Rate of Damping of Oscillations in a Viscous Compressible Stratified Liquid / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // Mathematical Notes. — 2009. — V. 85, № 3–4. — P. 558–565.

3. Карпова Ю. Ю. Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности / Ю. Ю. Карпова, А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 168–174.

К ТЕОРИИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК[1]

К.Б. Сабитов (Стерлитамакж)
sabitov_fmf@mail.ru

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка.

Пусть балка длины l для определенности опирается на две опоры с помощью штифтовых устройств. Под влиянием непрерывной внешней силы $g(x,t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения при изгибе, описываются уравнением четвертого порядка [1, с. 141–143], [2, с. 278–280], [3], [4, гл. VI]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = g(x,t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости материала, J — момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, которое перепишем в следующем виде:

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $f(x,t) = g(x,t)/\rho S$.

Отметим, что к уравнению (1) приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [3].

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки нужно задать граничные условия на концах $x=0$ и $x=l$. Вид дополнительных граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подперты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом месте изгибающий момент должен равняться нулю. В этом случае мы имеем условия

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Поволжье (проект № 14-01-97003).

А в случае балки с наглухо закрепленными обоими концами граничными условиями являются неподвижность балки и горизонтальность касательной на концах:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (3)$$

Если оба конца свободны, то в этом случае на концах должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная сила

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (4)$$

Если конец $x = 0$ наглухо заделан, а другой конец $x = l$ свободен, то имеем следующие граничные условия:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (5)$$

Если конец $x = 0$ шарнирно закреплен, а другой наглухо заделан, то

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (6)$$

Возможны и другие граничные условия.

Что касается начальных условий, то они такие же, как и в случае уравнения струны:

$$u(x,t)\,|_{t=0} = \varphi(x),\, u_t(x,t)\,|_{t=0} = \psi(x), 0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (7)$$

В докладе для уравнения (1) предполагаются следующие задачи в прямоугольной области

$$D = \{\,(x,t)\,|\; 0 < x < l, \; 0 < t < T\,\}\;,$$

где l и T – заданные положительные числа.

Начально-граничные задачи. *Найти в области D функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D})\,; \qquad (8)$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \;\; (x,t) \in D\,; \qquad (9)$$

удовлетворяет начальным условиям (7) и одному из граничных условий (2) – (6), где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Для большей ясности и краткости задачу (7)–(9) и (N), где N принимает значения 2, 3, 4, 5, 6, назовем задачей $N-1$, т.е., например, задача (7)–(9) и (3) будет называться задачей 2.

Отметим, что в указанных выше работах и других методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) и формы собственных колебаний (собственные функции) для уравнения (1) при $f(x,t) \equiv 0$ с граничными условиями (2)–(6). Вопросы об обосновании корректности поставленных нами начально-граничных задач не изучены. Интерес к этим задачам вызван обращением автору доклада специалистов по строительной механике с просьбой построить в явном виде решения поставленных задач.

Теорема 1. *Если существуют решения указанных начально-граничных задач* 1–5, *то при любом* $t \in [0,T]$ *для каждого решения справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^l \left(u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant e^T \left[\int\limits_0^l \left(\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x)\right) \, dx + \iint\limits_D f^2(x,t)\, dxdt\right]. \tag{10}$$

Отметим, что интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left(\rho S u_t^2 + EJ u_{xx}^2\right) dx$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной балки при нулевых граничных условиях (2)–(6). Поэтому неравенство (10) по аналогии с теорией колебаний струны назовем энергетическим.

Следствие (Теорема единственности). *Если существует функция* $u(x,t)$*, удовлетворяющая условиям* (7)–(9) *и одному из граничных условий* (2)–(6)*, то она единственна.*

Для примера приведем решение задачи 1.

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$, *то существует единственное решение задачи*

(7)–(9) и (2), которое определяется рядом

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\mu_n x, \tag{11}$$

коэффициенты которого находятся по формуле

$$u_n(t)=\varphi_n\cos\alpha\mu_n^2 t+\frac{\psi_n}{\alpha\mu_n^2}\sin\alpha\mu_n^2 t,$$

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\mu_n x(x)\,dx,$$

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\mu_n x(x)\,dx,\ \ \mu_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Теорема 3. *Для решения* (11) *задачи* 1 *имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leqslant C_5\Big(\,\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\Big),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leqslant C_6\Big(\,\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}\Big).$$

Литература

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

2. Рэлей Л. Теория звука. Т. 1 / Л. Рэлей. — М. : Гостехиздат, 1955. — 503 с.

3. Крылов А. Н. Вибрация судов / А. Н. Крылов. — М., 2012. — 447 с.

4. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях : Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна / С. Гульд. — М. : Мир, 1970. — 328 с.

5. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки / К. Б. Сабитов // Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне. Самарский государственный архитектурно-строительный университет. — Самара, 2015. — С. 34–42.

6. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами / К. Б. Сабитов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2015. — Т. 19, № 2 (39). — С. 311–324.

7. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок / К. Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 16. (в печати).

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ю.К. Сабитова (Стерлитамак)
sabitovauk@rambler.ru

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$L_m u \equiv y^m u_{xx} - u_{yy} - b^2 y^m u = 0, \tag{1}$$

где $m = \text{const} > 0$, $b = \text{const} \geqslant 0$ в области $D = \{(x, y) | \, 0 < x < l, \ 0 < y < T\}$. Для уравнения (1) в области D поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D); \tag{2}$$

$$L_m u \equiv 0, \ (x, y) \in D; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \ \ 0 \leqslant y \leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ u(x, T) = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причём $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Используя идеи работ [1, 2], установлен критерий единственности и доказана теорема существования решения задачи (2)–(5) для уравнения (1). Решение построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые и позволили обосновать существование решения в классе регулярных решений.

Теорема 1 (Критерий единственности решения). *Если существует решение задачи* (2) – (5), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x\to 0+} u_x(x,y)X_n(x) = \lim_{x\to l-} u_x(x,y)X_n(x) = 0, \ \ 0 \leqslant y \leqslant T, \qquad (6)$$

где $X_n(x) = \sqrt{2/l}\sin\mu_n x$, $\mu_n = \pi n/l$, $n = 1, 2, \ldots,$ *то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы при всех* n *выполнялись условия*

$$\Delta(n) = J_{\frac{1}{2q}}(p_n T^q) \neq 0, \qquad (7)$$

где $J_{\frac{1}{2q}}(z)$ – функция Бесселя I рода, $p_n = \sqrt{b^2+\mu_n^2}/q$, $q = (m + + 2)/2$. Введем обозначение $\frac{T^q}{ql} = T_{ql}$.

Лемма. *Если выполнено одно из следующих условий:* 1) T_{ql} *является произвольным натуральным числом;* 2) $T_{ql} = \frac{d}{t}$ *является произвольным рациональным числом,* d, $t \in \mathbb{N}$, $(d,t) = 1$, $d/t \notin \mathbb{N}$, *и выполнено неравенство* $\dfrac{r}{t} - \dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{4q}$, *при* $r = 1, 2, \ldots t-1$, $\ t \geqslant 2$, *то существуют положительные постоянные* n_0 $(n_0 \in \mathbb{N})$ *и* C_0, *зависящие от* T, l, b *и* m, *такие, что всех* $n > n_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(n)| \geqslant \frac{C_0}{\sqrt{n}} > 0. \qquad (8)$$

Если выполнена оценка (8), то решение задачи (2)–(5) можно представить виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)X_n(x), \qquad (9)$$

где функции $u_n(y)$ определяются по формуле

$$u_n(y) = \frac{\psi_n - \varphi_n\beta_n Y_{\frac{1}{2q}}(p_n T^q)\sqrt{T}}{J_{\frac{1}{2q}}(p_n T^q)\sqrt{T}} J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y} +$$

$$+\varphi_n\beta_n Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y}, \qquad (10)$$

где $\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)dx$, $\psi_n = \int\limits_0^l \psi(x)X_n(x)dx$, $\beta_n = -\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}\left(\frac{p_n}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}$.

Теорема 4. *Пусть* T_{ql} *удовлетворяет условиям леммы и функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$,

$i = 0, 2$. *Тогда, если* $\Delta(n) \neq 0$ *при* $n = \overline{1, n_0}$, *то существует единственное решение задачи Дирихле и это решение определяется рядом* (9), *где функции* $u_n(y)$ *определяются по формуле* (10).

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков / К.Б. Сабитов // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, вып. 2. — С. 262 – 276.

2. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 413, № 1. — С. 23–26.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ[1]

А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин (Москва)

antonsavin@mail.ru, sternin@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию нового класса краевых задач на гладком компактном многообразии с краем, в которых основной и граничный операторы являются нелокальными и ассоциированы с гладкими отображениями многообразия в себя. Такие задачи включают в качестве частных случаев ряд известных классов задач. Именно, задачи для обратимых отображений (т.е. для диффеоморфизмов) (см. [1]); задачи с гомотетиями в $\mathbb{R}^n$ (см. [2]). Наконец, такие задачи содержат в качестве частного случая известные задачи Бицадзе–Самарского [3], в которых значения функции на границе связываются с её значениями на подмногообразии, расположенном внутри области.

Основной результат данного доклада состоит в получении условий фредгольмовости рассматриваемого класса операторов в случае, когда задача ассоциирована со *сжатием* — отображением многообразия с краем строго внутрь себя. При этом наибольший интерес представляет нахождение аналога условия Шапиро – Лопатинского в этой ситуации.

Оказывается, что в случае нелокальных задач, ассоциированных со сжатиями, условие эллиптичности имеет принципиально новый вид. Дело в том, что при наличии сжатий необходимо замораживать коэффициенты сразу на всей орбите точки границы

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08392 и 16-01-00373).

под действием сжатия и его итераций. В результате получаемое нами на этом пути условие типа Шапиро – Лопатинского состоит в требовании однозначной разрешимости *бесконечной* матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающих траекториям граничных точек, лежащих внутри многообразия.

Литература

1. Antonevich A. and Lebedev A. Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory. Number 70 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — Longman: Harlow, 1994.

2. Россовский Л. Е. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов / Л. Е. Россовский // Тр. Моск. мат. о-ва. — 2001. — Т. 62. — С. 199–228.

3. Бицадзе А. В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач / А. В. Бицадзе, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 185, вып. 4. — С. 739–740.

4. Савин А. Ю. Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем / А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин // Доклады академии наук. — 2016 (в печати).

МЕХАНИЗМЫ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ ДВУХВИДОВЫХ ПОПУЛЯЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫЕ СТАЦИОНАРНЫМИ ТОЧКАМИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

А.С. Савостьянов (Москва)

a.s.savostyanov@gmail.com

Настоящая работа посвящена изучению двухвидовой популяционной пространственной модели биологических сообществ, предложенной Ульфом Дикманом [1]. Основываясь на ранее изученных моделях [2], данная модель подходит к изучению самоструктурирующихся в пространстве сообществ при помощи N_i — средних ожидаемых плотностей индивидов $i-$ого вида; и $C_{ij}(\xi)$ — средних

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-6108.2015.9. Работа подготовлена в ходе проведения исследования (16-05-0069) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» в 2016 – 2017 гг. и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

ожидаемых плотностей пар $\langle i, j\rangle$-видов на расстоянии ξ, приближая пространственные структуры высших порядков данными величинами.

В рамках работы исследуются стационарные положения системы, т.е. такие, что

$$\forall i, j: \;\; \frac{\partial N_i}{\partial t} = 0, \; \frac{\partial C_{ij}(\xi)}{\partial t} = 0$$

В случае одновидовой популяции для аппроксимаций, порождающих линейное интегральное уравнение, в работе [3] было показано необходимое отсутствие экзогенной смертности в популяции; нами был разработан численный метод, позволяющий изучать стационарные точки в случае аппроксимаций, приводящих к нелинейным уравнениям.

В рамках данной работы рассмотрен случай двухвидовой популяции, стационарные точки которой описываются следующей системой:

$$\begin{cases} C_{11} = K_{11}[C_{11}, C_{12}, C_{22}, N_1, N_2] \\ C_{22} = K_{22}[C_{11}, C_{12}, C_{22}, N_1, N_2] \\ C_{12} = K_{12}[C_{11}, C_{12}, C_{22}, N_1, N_2] \\ N_1 = L_1[C_{11}, C_{12}, C_{22}] \\ N_2 = L_2[C_{11}, C_{12}, C_{22}], \end{cases} \tag{1}$$

где K_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — интегральные операторы с нелинейностями вида $C_{ij} \cdot [f * C_{ij}](\xi)$ и $[(f \cdot C_{ij}) * C_{ij}](\xi)$, L_1 — интегральный оператор, содержащий $\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \cdot C_{ij}(\xi) d\xi$ (где $f(\xi)$ — известная функция).

На основе метода последовательных приближений (рядов Неймана) и прежних результатов был разработан численный метод, использующий преобразование Ханкеля, позволивший находить стационарные точки системы 1. Работа метода реализована сходящимся применением операторов 1 по следующей схеме:

$$C_{12} = K_{12} \Rightarrow N_1 = L_1, \; N_2 = L_2 \Rightarrow C_{11} = K_{11}, \; C_{22} = K_{22} \Rightarrow \\ \Rightarrow N_1 = L_1, \; N_2 = L_2 \Rightarrow C_{12} = K_{12} \Rightarrow \dots$$

Центральное место в исследовании занимает изучение механизмов сосуществования, т.е. таких стационарных точек, что $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$, при наличия межвидовой конкуренции (т.е. популяция не распадается на два независимых сообщества): изучается влияние пространственной структуры популяций на механизмы competition-colonization trade-off и heteromyopia, предложенные в [4].

Литература

1. Dieckmann U. & Law R. (2000). Relaxation Projections and the Method of Moments. // The Geometry of Ecological Interactions pp. 412–455. Cambridge University Press.

2. Van Baalen M (2000). Pair approximations for different spatial geometries. // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity, pp. 359–387. Cambridge University Press.

3. Бодров А.Г. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели популяции стационарных сообществ / А.Г. Бодров, АА. Никитин // ДАН. — 2014. — Т. 455, № 5. — С. 507–511.

4. Murrell, D. J. & Law, R. (2003). Heteromyopia and the spatial coexistence of similar competitors. // Ecology Letters, №6: pp.48–59

ТЕОРЕМА БОЛЯ – ПЕРРОНА ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ[1]

П.М. Симонов (Пермь)

simpm@mail.ru

Систематическое развитие теории устойчивости дифференциальных уравнений с последействием ведется с середины XX века. При этом возникли основные методы исследований: функционалы Ляпунова – Красовского, функции Разумихина, интегральные и дифференциальные неравенства, монотонные операторы, производящие функции с параметром, W-метод Азбелева. В последние десять лет началось исследование гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). Источником послужили работы E. Fridman, J.-J. Loiseau, M. Cardelli, X. Dusser, K. Gu, V.I. Kharitonov, J. Chen, C. Bonnet, J. Partington, R. Rabah, G.M. Sklyar, A.V. Rezounenko, S.I. Niculescu, P. Fu, В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо.

Исследование по устойчивости решений ГФДСП достаточно мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных гибридных дифференциально-разностных систем. Получены необходимые

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке АО “ПРОГНОЗ”.

и достаточные условия экспоненциальной устойчивости этих систем.

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [2]–[5] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе, свойства устойчивости решений. В то же время, широкие и актуальные для приложений классы систем ГФДСП, а именно гибридных линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием, формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. В статьях [6]–[8] предложены гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости. Здесь мы предлагаем теорему Боля – Перрона для линейных ГФДСП.

Литература

1. Марченко В. М. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко, Ж. Ж. Луазо // Дифференц. уравнение. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 728–740.

2. Азбелев Н. В. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными / Н. В. Азбелев, П. М. Симонов. — Пермь : Перм. ун-т, 2001. — 230 с.

3. Устойчивость линейных систем с последействием. II / Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 4. — С. 555–562.

4. Устойчивость линейных систем с последействием. III / Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 10. — С. 1659–1668.

5. Устойчивость линейных систем с последействием. IV / Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 2. — С. 194–204.

6. Ларионов А. С. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) / А. С. Ларионов, П. М. Симонов // Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”. — 2013. — Т. 13, № 4. — С. 34–37.

7. Ларионов А. С. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II / А. С. Ларионов, П. М. Симонов // Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”. — 2014. — Т. 14, № 5. — С. 38–45.

8. Ларионов А. С. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). III / А. С. Ларионов, П. М. Симонов // Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”. — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 63–69.

О КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА ГРАФАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

В.А. Скороходов (Ростов-на-Дону)
pdvaskor@yandex.ru

В классической постановке при формировании пути на орентированном графе все его дуги считаются равноправными, а пути допустимыми. Рассмотрим ориентированный граф $G(X,U,f)$ такой, что множество его дуг разбито на непересекающиеся подмножества и поставлено ограничение на прохождение по дугам выделенных подмножеств. В данном случае начальный отрезок пути определяет дальнейшее продвижение по дугам графа, т.е. при введённом ограничении некоторые пути на графе G становятся недопустимыми. Такие графы будем называть графами с нестандартной достижимостью.

Рассмотрим две классические задачи на графах с нестандартной достижимостью: задачу о случайных блужданиях и задачу о максимальном потоке.

1. Задача о случайных блужданиях

Рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Отметим, что данный случайный процесс фактически зависит от двух параметров: первый – вероятность перехода по дуге, второй – ограничение на достижимость. Из-за влияния второго параметра рассматриваемый процесс на графе G в общем случае не является марковским.

Предложен подход, согласно которому по графу G строится его вспомогательный граф G' (см. [1]) большего размера, но на котором все пути являются допустимыми. Показано, что исходный процесс случайного блуждания сводится к марковскому процессу на вспомогательном графе G'. Более того, имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Для любых вершин x и y имеет место следующее равенство*

$$P_G(x,y,t) = \sum_{i=0}^{k} P_{G'}(x, y^{(i)}, t).$$

Другими словами, вероятность перехода из x в y за t шагов на исходном графе G равна сумме вероятностей перехода за t шагов из x в каждую вершину $y^{(i)}$ на вспомогательном графе G'.

2. Задача о максимальном потоке

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока на графе G с нестандартной достижимостью. Отметим, что эта задача существенно сложнее, чем рассмотренная выше задача о случайных блужданиях. Это происходит из-за того, что даже построение вспомогательного графа не позволяет полностью избавиться от влияния ограничения на достижимость. Вследствие того, что одной дуге исходного графа ставится в соотвествие несколько дуг вспомогательного графа, может возникнуть ситуация, когда при нахождении максимального потока на вспомогательном графе и последующем переносе результата на исходный граф, на некоторой дуге получится, что пропускаемый по ней поток больше пропускной способности этой дуги.

Показано (см. [2]), что задача нахождения максимального потока в сети с нестандартной достижимостью в общем случае является NP-сложной.

Имеет место оценка величины максимального потока.

Теорема 2. *Для величины максимального потока в сети G' с дополнительным условием связи величин потока по дуге и её пропускной способности имеет место соотношение*

$$\min_{(Y,Y')}\left\{\min_{M\subset(Y,Y')}\left\{\sum_{u\in M}\frac{c(u)}{|m_u|}\right\}\right\}\leqslant v^*\leqslant\min_{(Y,Y')}\left\{\max_{M\subset(Y,Y')}\sum_{u\in M}c(u)\right\},$$

где множество M — максимальное по вложению подмножество дуг разреза (Y,Y') сети G', обладающее тем свойством, что ни одна дуга множества M не влияет ни на какую другую дугу этого же множества, а m_u $(u\in m_u)$ – множество дуг, соответствующих одной и той же дуге исходного графа.

Литература

1. Графы с нестандартной достижимостью : задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

2. Водолазов Н. Н. Поток на графах с ограничениями на достижимость / Н. Н. Водолазов, Я. М. Ерусалимский // В сб. трудов научной школы Симоненко И. Б. — Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2010. — С. 44–57.

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В ПРЯМОМ ВРЕМЕНИ[1]

Н.Н. Субботина, Т.Б. Токманцев (Екатеринбург)
subb@uran.ru

Рассматривается [1] управляемая система вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, на управление u наложены ограничения

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+],\ a_i^- < a_i^+,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Пусть $x_*(\cdot)\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная фазовая траектория системы (1), $u_*(\cdot)$ — наименьшее по норме L_2 управление, порождающее траекторию $x_*(\cdot)$, и в каждый момент времени $t \in [0, T]$ известно история $y(\cdot)\colon [0, t] \to \mathbb{R}^n$ замеров фазовой переменной $x_*(\cdot)$. Причем $(t, x_*(t)) \in \{(t, x)\colon t \in [0, T],\ \|x - y(t)\| \leqslant \delta\}$, параметр погрешности измерений $\delta > 0$ известен, символ $\|z\|$ означает евклидову норму конечномерного вектора z.

Задача состоит в том, что нужно построить управление $u^\delta(\cdot) : [0, T] \to U$ и порождаемую им траекторию $x^\delta(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ системы (1), такие что при $\delta \to 0$ выполняются соотношения $\|x^\delta(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \to 0$, $\|u^\delta(\cdot) - u_*(\cdot)\|^2_{L_2} \to 0$, где $\|\cdot\|_C$ — норма в пространстве непрерывных функций, $\|\cdot\|_{L_2}$ — норма в пространстве L_2. Задача решается в прямом времени, конструируя управление $u(\cdot)$ с помощью вспомогательных задач оптимального управления системой (1),(2), используя историю замеров $y(\cdot)\colon [0, t] \to \mathbb{R}^n$. Предлагается новый подход [1], опирающийся на необходимые условия — принцип максимума Понтрягина в гамильтоновой форме.

Литература

1. N.N. Subbotina, T.B. Tokmantsev A Study of the Stability of Solutions to Inverse Problems of Dynamics of Control Systems under Perturbations of Initial Data // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2015, Vol. 291, Suppl. 1, pp. S1–S17.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14–01–00168), программа Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

СИСТЕМА ЛАМЕ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

О.А. Тарасова, О.В. Чернова (Белгород)
tarasova_ o@bsu.edu.ru,chernova_ olga@bsu.edu.ru

В основе исследования краевых задач [1] для эллиптической системы в области D, лежит представление общего решения этой системы через J–аналитические функции.

Рассмотрим систему Ламе

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12}+a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

в изотропной среде в верхней полуплоскости области

$$D = \{y > 0\}, \tag{2}$$

которая ограничена гладким контуром Г. [3]

Введем матрицу $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, которая обратима и все ее собственные значения ν имеют положительную мнимую часть, т.е. лежат в верхней полуплоскости.

Пусть J имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

С матрицей J свяжем эллиптическую систему первого порядка специального вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - J\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

где непрерывно дифференцируемая вектор–функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ принадлежит области (2).

Очевидно, при условии $J = i$ соотношение (3) есть условие Коши–Римана, которое определяет аналитические функции.

По этой причине решения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ системы (3) называем $J-$аналитическими функциями.

Согласно [2], [4] общее решение u системы Ламе и сопряженная к ней функция v описываются через $J-$аналитические функции.

Теорема. *Существуют такие обратимые матрицы $B, C \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, что любое решение u системы Ламе (1) и сопряженная к нему вектор–функция v в области D представима в виде*

$$u = \mathrm{Re}\ B\varphi, \quad v = \mathrm{Re}\ C\varphi + \xi, \tag{4}$$

с некоторой $J-$аналитической функцией φ и $\xi \in \mathrm{R}^2$, причем φ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968. — 511 с.

2. Солдатов А П. Смешанная задача плоской теории упругости в полуплоскости / А П. Солдатов, О. А. Тарасова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2015. — № 23(220), Выпуск 41. — С. 5–8.

3. Солдатов А П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости / А П. Солдатов // Доклады РАН. — 2002. — Т. 385, № 2. — С. 163–167.

4. Солдатов А П. Задача Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера / А П. Солдатов, О. В. Чернова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. — 2009. — Т. 13, № 17–2. — С. 115.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Л.С. Тахтенкова (Ульяновск)

lubov.s.alex@yandex.ru

Рассматривается система, описываемая уравнением:

$$\ddot{x} + k(t)\dot{x} + f(t)x = \sigma(t)\dot{\xi}(t)x, \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, $k \in C(R^+)$, $f \in C(R)$ и $\sigma \in C(R^+)$, R — действительная прямая.

Исследуется задача об асимптотической устойчивости по вероятности положения равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1).

Задача решается на основе теоремы об асимптотической устойчивости [1] построением функции Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \mu x)^2 + \frac{1}{2}gx^2,$$

где $\mu > 0$, $g > 0$ — постоянные.

Для этого согласно [1, 2] вычисляется оператор

$$LV = (\mu - k(t))\dot{x}^2 + (\mu^2 + g - f(t) - k(t)\mu)\dot{x}x + (\frac{1}{2}\sigma^2(t) - f(t)\mu)x^2.$$

Условие определенной отрицательности этого оператора является достаточным условием асимптотической устойчивости положения равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1).

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что существует такая постоянная μ, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{\sigma^2}{2f_{min}(t)} < \mu < k_{min}(t),$$

$$\sqrt{f_{max}(t) - \frac{\sigma_{min}^2(t)}{2\mu}} - \sqrt{f_{min}(t) - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu}} < 2\sqrt{\mu(k_{min}(t) - \mu)},$$

$$\sqrt{\mu(k_{max}(t) - \mu)} - \sqrt{\mu(k_{min}(t) - \mu)} < 2\sqrt{f_{min}(t) - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu}}.$$

Тогда положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по вероятности.

Полученный результат является обобщением решения известной задачи об устойчивости системы, жесткость и демпфированность которой нелинейны и зависят от времени [3].

Этот результат применяется к исследованию задачи об устойчивости плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите под действием случайных сил и при случайных изменения параметров [4].

Литература

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 367 с.

2. Гихман А. В. Стохастические дифференциальные уравнения / А. В. Гихман, И. И. Скороход. — Киев : Наукова думка, 1968. — 354 с.

3. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1987. — 304 с.

4. Белецкий В. В. Движение искуственного спутника относительно центра масс / В. В. Белецкий. — М. : Наука, 1965. — 416 с.

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ[1]

П.А. Терехин (Саратов)

terekhinpa@mail.ru

Пусть действительно- или комплекснозначная функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет носитель supp $\subset [0,1]$. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j).$$

Кроме того, положим $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ. Предположим, что

$$\varphi \in L^2, \qquad \int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Рассмотрим ряд Фурье – Хаара функции $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n$. *Дуальной функцией* к функции φ назовем формальный ряд по системе Хаара $\varphi^d = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n$, коэффициенты которого определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = x_n$ для $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$, $\alpha_\nu \in \{0, 1\}$, причем без ограничения общности считаем, что $x_1 = y_1 = 1$.

Обозначим $\mathcal{L}^2$ пространство, состоящее из всех функций $f \in L^2$, которые имеют абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье – Хаара, снабженное нормой

$$\|f\|_* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Теорема 1. *Если $\varphi, \varphi^d \in \mathcal{L}^2$, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса.*

Теорема 2. *Если $\varphi \in \mathcal{L}^2$, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Заметим, что если L^2-модуль непрерывности функции φ

$$\omega_2(\varphi,\delta) = \sup_{0<h<\delta}\left(\int_0^{1-h} |\varphi(t+h)-\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_2(\varphi,\frac{1}{n})}{n} < \infty$, то $\varphi \in \mathcal{L}^2$, т.е. минимальные условия гладкости порождающей функции φ обеспечивают бесселевость аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Однако одного лишь свойства непрерывности оказывается недостаточно.

Теорема 3. *Существует непрерывная функция φ, для которой аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ не является бесселевой.*

Теорема 4. *Пусть $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ - система Радемахера и*

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k, \qquad \varPhi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 < \infty.$$

Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является:

ортонормированной $\Leftrightarrow \varPhi(z)$ *внутренняя функция,*

полной $\Leftrightarrow \varPhi(z)$ *внешняя функция,*

бесселевой $\Leftrightarrow |\varPhi(z)| \leqslant B < \infty, |z| < 1,$

базисом Рисса $\Leftrightarrow 0 < A \leqslant |\varPhi(z)| \leqslant B < \infty, |z| < 1.$

Литература

1. Терехин П. А. Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке / П. А. Терехин // Матем. заметки. — 2002. — Т. 72, вып. 4. — С. 547–560.

2. Терехин П. А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функции в пространстве $L^p[0,1]$ / П. А. Терехин // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 5. — С. 722–740.

3. Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. Riesz Basicity for General Systems of Functions // Journal of Function Spaces. — 2014. — V. 2014, Article ID 860279. — 3 p.

4. Mironov V.A., Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. Affine Bessel sequences and Nikishin's example // Filomat. — 2016. — V. 30.

5. Терехин П. А. Аффинные базисы Рисса и дуальная функция / П. А. Терехин // Матем. сборник. — 2016. — Т. 207.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо (Майкоп)

tlyachev@adygnet.ru

Будем рассматривать систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_n(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ – взаимно простые над полем $\mathbb{R}$ многочлены n–й степени.

Пусть дано семейство $\{\ell_i\}_{i=1}^m$ эллипсов $\ell_i : \omega_i(x, y) = 0$. Под символической записью $\ell_i \subset \ell_j$ условимся понимать тот факт, что эллипс ℓ_i расположен внутри эллипса ℓ_j. Будем говорить, что семейство эллипсов $\{\ell_i\}_{i=1}^m$ обладает свойством (α), если выполняются два условия:

$a)\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ из неравенства $i < j$ следует, что $\ell_i \subset \ell_j$;

$b)$ система уравнений

$$\begin{cases} \omega_i(x, y) = 0, \\ \omega_j(x, y) = 0 \end{cases}$$

не совместна, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть эллипсы семейства $\{\ell_i\}_{i=1}^m$, обладающего свойством (α), являются кривыми контактов траекторий системы (1) с окружностями топографической системы

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C. \tag{2}$$

Тогда имеет место тождество [1]:

$$xP_n(x, y) + yQ_n(x, y) \equiv A\omega_1(x, y)\omega_2(x, y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x, y),\ A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3}$$

При $y = 0$ из (3) следует соотношение

$$xP_n(x, 0) \equiv A\omega_1(x, 0)\omega_2(x, 0) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x, 0). \tag{4}$$

Так как семейство $\{\ell_i\}_{i=1}^m$ обладает свойством (α), то в силу (4) справедливо равенство

$$\omega_1(x, 0) \equiv xM_1(x), \tag{5}$$

где $M_1(x)$ — линейная функция. Из (5) следует, что

$$\omega_1(x,y) \equiv xM_1(x) + yW_1(x,y), \tag{6}$$

где $W_1(x,y)$ — также некоторая линейная функция.

Перепишем тождество (3) с учетом (6) в виде

$$xP_n(x,y) + yQ_n(x,y) \equiv A[xM_1(x) + yW_1(x,y)]\omega_2(x,y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x,y). \tag{7}$$

Полагая в (7) $x = 0$ и сокращая на y, получаем тождественное равенство:

$$Q_n(x,y) \equiv AyW_1(x,y)\omega_2(x,y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x,y) + xG_{n-1}(x,y), \tag{8}$$

где $G_{n-1}(x,y)$ – многочлен степени не выше $n-1$.

Учитывая (6), (8) и сокращая на x, из равенства (3) можно получить, что

$$P_n(x,y) \equiv -yG_{n-1}(x,y) + AM_1(x)\omega_2(x,y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x,y). \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9) систему (1) уже можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{n-1}(x,y) + AM_1(x)\omega_2(x,y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{n-1}(x,y) + AW_1(x,y)\omega_2(x,y) \cdot \ldots \cdot \omega_m(x,y). \end{cases} \tag{10}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Кривая контактов траекторий системы (1) с окружностями топографической системы (2) состоит из эллипсов семейства* $\{\ell_i\}_{i=1}^m$, *обладающего свойством* (α), *тогда и только тогда, когда система (1) имеет вид системы (10), где* $M_1(x)$ *и* $W_1(x,y)$ *– линейные функции,* $G_{n-1}(x,y)$ *– произвольный многочлен степени не выше* $n-1$, *причем* $G_{n-1}(x,y) \not\equiv 0$, $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Теорема 2. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{n-1}(x,y) + Ax\prod\limits_{i=1}^{m-1}(x^2+y^2-R_i^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{n-1}(x,y) + Ay\prod\limits_{i=1}^{m-1}(x^2+y^2-R_i^2), \end{cases} \tag{11}$$

где $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_{m-1}$, $G_{n-1}(x,y)$ *– произвольный многочлен степени не выше* $n-1$, $G_{n-1}(x,y) \not\equiv 0$, $O(0;0)$ *–*

единственная особая точка системы (11), имеет в качестве предельных циклов окружности $x^2 + y^2 - R_i^2 = 0\,(i = \overline{1, m-1})$.

В самом деле, система (11) является частным случаем системы (10) при $M_1(x) = x$, $W_1(x, y) = y$, а значит, выполняются условия теоремы 1. Поэтому концентрические окружности $x^2 + y^2 - R_i^2 = 0$ являются кривыми контактов траекторий системы (11) с окружностями системы (2). Производная $\dfrac{dF}{dt}$ в силу системы (11) меняет знак лишь при переходе через окружности $x^2 + y^2 - R_i^2 = 0\,(i = \overline{1, m-1})$. Следовательно эти окружности являются предельными циклами системы (11). Впрочем эта система не имеет других предельных циклов, отличных от вышеуказанных окружностей.

Замечание. Можно показать, что начало координат $O(0; 0)$ является простой устойчивой (неустойчивой) особой точкой типа «фокус» или «дикритический узел», если $(-1)^{m-1}A < 0 (> 0)$.

Литература

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1966. — 568 с.

О ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ[1]

И.А. Тришина (Воронеж)

i.a.trishina@gmail.com

Пусть $C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_{b,u}$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Следуя [1], [2], дадим определение медленно меняющейся на бесконечности функции.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(\tau)x - x \in C_0(\mathbb{J}, X)$, т. е. $\lim\limits_{\tau\to\infty} \|x(\tau+\omega) - x(\tau)\| = 0$ для любого $\omega \in \mathbb{J}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций образуют замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{J}, X)$, которое обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Определение 2 [2]. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов функции x обозначим через $\Omega(x, \varepsilon)$.

Определение 3 [1]. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности* , если существует такое число $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$, что $\sup\limits_{|t|>\alpha} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов функции x на бесконечности обозначим через $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Определение 4 (классическое определение Бора). Функция $x \in C_b(\mathbb{R}; X)$ называется *почти периодической функцией*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε — периодов $\Omega(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$, т. е. существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega(x, \varepsilon) \neq \varnothing$, для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5 (первое определение почти периодической функции на бесконечности). Функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если найдется промежуток $[0, N_\varepsilon]$ и относительно плотное на $\mathbb{J}$ множество $\Omega(x, \varepsilon)$ такие, что
$\sup\limits_{|t|\geqslant N_\varepsilon} \|x(t+\omega) - x(t)\|_x < \varepsilon$, для любого $\omega \in \Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Определение 6 (второе определение почти периодической функции на бесконечности). Функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ ее множество ε - периодов на бесконечности $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Определение 7(аппроксимационное). Функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ и числа $\lambda_k \in \mathbb{R}$ такие, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon$.

Теорема 1.*Каждая почти периодическая в смысле определения 5 функция $x : \mathbb{J} \to X$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где x_1 — почти периодическая в смысле определения 4 функция и $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$.*

Теорема 2. *Определение 6 и определение 7 почти периодической на бесконечности функции эквивалентны.*

Литература

1. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174—190.

2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — С. 7–18.

3. Рыжкова А. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2015. — № 1. — С. 45–49.

4. Рыжкова А. А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2014. — № 19. — С. 71–75.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОГО ФРЕДГОЛЬМОВСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.И. Усков (Воронеж)

vum1@yandex.ru

Задаётся фредгольмовский (с нулевым индексом) дифференциальный оператор

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 1 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix},$$

определённый в банаховом пространстве $E = \{v(x) : v(x) \in C^1[0, 2\pi]\}$ с областью определения $\operatorname{dom} A = \{v(x) : v(x) \in C^1[0, 2\pi], v(0) = v(2\pi)\}$.

Цепочка Жордана присоединённых элементов оператора A, отвечающих собственному числу 0, содержит только элемент из ядра $\operatorname{Ker} A$.

С применением этого оператора рассматриваются следующие задачи с искомой функцией U и заданной непрерывной функцией φ. Введём декартово произведение $\Omega_{x,t} = [0, 2\pi] \times [0, T]$, $T \leqslant \infty$.

Задача 1. Найти функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + U(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{x,t}, \tag{1}$$

и условиям

$$\begin{cases} U(x,0) = h_1(x), \quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = h_2(x), \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{t=0} = h_3(x), \quad \left.\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right|_{t=0} = h_4(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ U(0,t) = U(2\pi,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

Задача (1)-(2) равносильна задаче нахождения функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению:

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = u(x,t) + f(x,t), \quad u = (u_1\ u_2)^T, \quad (x,t) \in \Omega_{x,t}, \tag{3}$$

и условиям

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u(0,t) = u(2\pi,t), \quad (x,t) \in \Omega_{x,t}. \tag{4}$$

Задача 2. Для параболического уравнения типа $(1,0,1)$ [1]

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U(x,t,\varepsilon) = \varphi(t), \ (x,t) \in \Omega_{x,t}, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{5}$$

требуется найти функцию $U(x,t,\varepsilon)$, удовлетворяющую уравнению (5) и условиям

$$\begin{cases} U(x,0,\varepsilon) = h_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\big|_{t=0} = h_2(x), \\ \frac{\partial U}{\partial x}\big|_{t=0} = h_3(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ U(0,t,\varepsilon) = U(2\pi,t,\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \end{cases} \tag{6}$$

Задача (5)-(6) равносильна задаче определения функции $u(x,t,\varepsilon)$ из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = Au(x,t,\varepsilon) + f(t), \quad u = (u_1\ u_2)^T, \quad (x,t) \in \Omega_{x,t}, \tag{7}$$

и условий

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon), \ u(0,t,\varepsilon) = u(2\pi,t,\varepsilon), \ (x,t) \in \Omega_{x,t}, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \tag{8}$$

Задачи (3), (4) и (7), (8) решаются методом каскадной декомпозиции уравнения.

Литература

1. Михлин С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1968. — 576 с.

СТУДЕНЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ — СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПОДГОТОВКИ ВОСТРЕБОВАННЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ

О.Ф. Ускова, А.И. Шашкин (Воронеж)

Студенческие олимпиады по информатике активизируют повышение интереса студентов к учёбе, к приобретению более глубоких и разносторонних знаний для своей будущей профессиональной востребованности.

Заметим, что по полученной специальности работают 76,5% выпускников факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета; 14,6% по смежным специальностям; 8,9% — в других сферах. В ЗАО НПП РЕЛЭКС доля выпускников факультета составляет 64% от общего числа сотрудников.

Ежегодно на лабораторной базе ВГУ проводятся студенческие олимпиады по информатике и программированию различного уровня:

— региональные по программированию и компьютерному моделированию (2001-2004 г.г., гранты Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции науки и высшего образования» по направлению «Проведение научных конкурсов, школ и конференций для студентов, аспирантов, молодых преподавателей и сотрудников вузов и научных организаций») [1];

— Всероссийские студенческие олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» (2003-2012 г.г., приказы Министерства образования и науки РФ «О проведении общесистемных мероприятий» , «О награждении победителей олимпиад» , «О выделении ассигнований из Федерального бюджета на выполнение работ по результатам открытого конкурса») [1];

— студенческие соревнования в открытом телекоммуникационном режиме, посвященные 95-летию образования Воронежского государственного университета (2013, декабрь);

— студенческие соревнования по информатике и программированию, посвященные 25-летию ЗАО НПП Релэкс — первой в России независимой компанией-разработчиком систем управления базами данных, в которой работают основные создатели первой в СССР реляционной СУБД ЛИНТЕР (2015, декабрь);

На основе опыта организации и проведения студенческих олимпиад разработана и успешно реализуется технология формирования содержания и структуры проведения студенческих соревнований, учитывающая традиции и инновации. В программу проведения олимпиад включены мероприятия, которые расширяют информационно-образовательное пространство. Например:

— компьютерное анкетирование участников;

— интеллектуальная викторина «Информатика. Компьютеры. Олимпиады. Воронеж»;

— видеофильм о выступлении Н.Вирта, известного специалиста в области программирования и информ технологий, автора языка программирования Паскаль в Нижегородском госуниверситете в сентябре 2006. Этот видеофильм засняли студенты специализации «Информационные технологии» факультета ПММ ВГУ, которые как победители Всероссийской студенческой олимпиады 2005 года присутствовали на выступлении Н.Вирта.

Студенты факультета ПММ ВГУ принимают активное участие не только в решении олимпиадных заданий, но и в разработке соответствующего программного обеспечения, в работе студенческих общественных организаций (студенческого директората и секретариата), которые стали эффектными формами студенческого самоуправления.

Приведём в заключение высказывание главы представительства DataArt в Санкт-Петербурге исполнительного директора Завилейского М.С.: «Для начала карьеры IT-профессионала, необходимо продемонстрировать талант — участие в олимпиадах, конкурсах, проектах». [2]

Литература

1. Горбенко О. Д. Воронежский государственный университет — базовый вуз Всероссийских студенческих олимпиад «Информатика. Программирование. Информационные технологии» / О. Д. Гор-

бенко О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин // Вестник ВГУ. Серия : Проблемы высшего образования. — 2012. — № 2. — С. 51–56.

2. Завилейский М. С. Начало карьеры IT-профессионала / М. С. Завилейский // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия : «Прикладная математика и информатика». Специальный выпуск : Четвёртая Всероссийская студенческая олимпиада по информатике — 2006 — № 3(4). — С. 75–84.

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЗАДАЧИ РОБЕНА

А.В. Филиновский (Москва)
flnv@yandex.ru

В ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с границей $\Gamma \in C^3$ рассмотрим задачу Робена на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

ν – единичный вектор внешней нормали, $\alpha \in R$. Обозначим через $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений задачи (1), а через $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность собственных значений задачи Дирихле $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $u = 0$, $x \in \Gamma$, собственные значения считаем занумерованными в порядке возрастания с учетом кратностей. Пусть $\{u_{k,\alpha}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_k^D(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие последовательности нормированных (в $L_2(\Omega)$) собственных функций задач Робена и Дирихле. Будем обозначать через $m(\lambda)$ кратность собственного значения λ.

Теорема 1. *Для всех $k = 1, 2, \ldots$ существует число $\alpha_k \in R$, такое, что при $\alpha > \alpha_k$ выполнено $m(\lambda_k(\alpha)) \leqslant m(\lambda_k^D)$.*

Теорема 2. *Пусть $m(\lambda_k^D) = 1$. Тогда существует число $\alpha_k \in R$, такое, что при $\alpha > \alpha_k$ собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ – дифференцируемая функция α и*

$$\lambda_k'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2 ds}{\int_\Omega u_{k,\alpha}^2 dx} > 0.$$

Теорема 3. *Пусть $m(\lambda_k^D) = 1$. Тогда для собственного значения $\lambda_k(\alpha)$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_k^D - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_k^D}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega (u_k^D)^2 \, dx} \, \alpha^{-1} + o(\alpha^{-1}), \quad \alpha \to +\infty.$$

Для всех $\alpha \in R$ будем предполагать $\int_\Omega u_{k,\alpha} u_k^D \, dx \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть* $m(\lambda_k^D) = 1$. *Тогда существует число* $\alpha_k \in R$, *такое, что при всех* $\alpha > \alpha_k$ *выполнено* $m(\lambda_k(\alpha)) = 1$ *и справедлива оценка*

$$\|u_{k,\alpha} - u_k^D\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\alpha}$$

с постоянной C, *не зависящей от* α.

Литература

1. Филиновский А. В. Об асимптотическом поведении собственных значений краевой задачи с параметром / А. В. Филиновский // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия — 2015. — № 6 (128). — С. 135–140.

2. Filinovskiy A. V. On the estimates of eigenvalues of the boundary value problem with large parameter // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. — P. 101–113.

3. Filinovskiy A. V. On the asymptotic behavior of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // J. Ellipt. Parab. Equ. — 2015. — V. 1. — P. 123–135.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПУЛЬСНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

О.В. Филиппова (Тамбов)

philippova.olga@rambler.ru

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \int\limits_a^b |x(s)|ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть $t_k \in [a,b]$, $k = \overline{1,m}$, $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]$ множество всех абсолютно-непрерывных на каждом из промежутков $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-97504, № 14-01-00877).

функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=$ $=\overline{1,m}$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]}=|x(a)|+\|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}+\sum\limits_{k=1}^{m}|\Delta(x(t_k))|$, где $\Delta(x(t_k))=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=\overline{1,m}$.

Пусть заданы линейные непрерывные отображения $\mathcal{L}:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$, $l:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n$, отображения $\Phi:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$, $\varphi:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и векторы $\beta_k\in\mathbb{R}^n$ $k=\overline{1,m}$. Рассмотрим краевую задачу для импульсного функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x\in\Phi(x),\ \Delta x(t_k)=\beta_k,\ k=\overline{1,m};\tag{1}$$

$$lx\in\varphi(x).\tag{2}$$

Задача (1), (2) эквивалентна включению

$$x\in X\varphi(x)+G\Phi(x)+\sum_{k=1}^{m}G_k\beta_k,\tag{3}$$

где X — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$, $\Delta x(t_k)=0, k=\overline{1,m}$ при условии, что $l(X)$ — единичная матрица размерности $n\times n$; $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{D}^n[a,b]$, $(Gy)(t)=\int\limits_a^b G(t,s)y(s)ds$ — оператор Грина краевой задачи $\mathcal{L}x=y$, $\Delta x(t_k)=0$, $k=\overline{1,m}$, $lx=0$; $(G_k)(t)=\chi_{(t_k,b]}(t)\int\limits_a^b G(t_k,s)ds$, $k=$ $=\overline{1,m}$, $\chi_{(t_k,b]}(\cdot)$ — характеристическая функция промежутка $(t_k,b]$.

В докладе вводится понятие обобщенного решения краевой задачи (1), (2), аналогичное понятиям обобщенного решения задачи Коши, приведенным в [1], [2]. Получены условия существования обобщенных решений и оценки обобщенных решений аналогичные оценкам, представленным в [2]. При этом используется представление задачи (1), (2) в виде эквивалентного включения (3). Предложен способ нахождения приближенного решения. Найдена оценка погрешности приближенного решения.

Отметим, что в работе не требуется выпуклость и выпуклость по переключению образов отображения $\Phi:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$.

Литература

1. Булгаков А.И. Обобщенные решения квазилинейных краевых задач для функционально-диффренциальных включений /

А.И. Булгаков, А.И. Полянский // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2007. — Т. 12, вып. 1. — С. 52–54.

2. Булгаков А.И. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 / А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2009. — Т. 14, вып. 6. — С. 1275–1313.

О СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ НОРМЕ

В.И. Фомин (Тамбов)

vasiliyfomin@bk.ru

Пусть $\mathrm{C}^{n\times n}$ и $\mathrm{R}^{n\times n}$ – соответственно множества комплексных и вещественных квадратных матриц $\mathrm{A} = (a_{ij})$ порядка n; $\mathrm{C}_N^{n\times n}$ – класс нормальных матриц из множества $\mathrm{C}^{n\times n}$; $\mathrm{R}_s^{n\times n}$ – класс симметрических матриц из множества $\mathrm{R}^{n\times n}$; $||\cdot||_s$ и $\rho(\cdot)$ – соответственно спектральная норма и спектральный радиус на $\mathrm{C}^{n\times n}$; $\sigma(\mathrm{A})$ – спектр матрицы А; A^* – сопряжённая матрица для матрицы А; $||\cdot||$ – евклидова норма в C^n.

Среди матричных норм принято выделять индуцированные нормы, ибо такие нормы обладают полезным свойством минимальности [1, с. 369]. Важнейшим примером индуцированной нормы является спектральная норма, т.е. матричная норма, порождённая евклидовой нормой: (1) $||\mathrm{A}||_s = \max\limits_{||\,x\,||\,=\,1}||\mathrm{A}\,x||$, так как (2) $||\mathrm{A}||_s = \sqrt{\rho(\mathrm{A}^*\mathrm{A})}$ [2, с. 392] и (3) $||\mathrm{A}||_s = \rho(\mathrm{A})$ для $\mathrm{A}\in \mathrm{C}_N^{n\times n}$, в частности, для $\mathrm{A}\in\mathrm{R}_s^{n\times n}$ [3, с. 187].

Для матричных норм, индуцируемых простейшими векторными нормами, удаётся получить явные формулы, выражающие такие матричные нормы через элементы матриц [1, с. 356]. Для спектральной нормы приходится прибегать к формуле (1).

Пусть, для определённости, $\mathrm{A}\in\mathrm{R}^{n\times n}$. Запишем равенство (1) в виде

$$||\mathrm{A}||_s = \max_{x\in S_1(0)}[f(x)]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где $S_1(0)$ – единичная сфера в пространстве R^n,

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2.$$

Заметим, что максимум в правой части равенства (4) достигается в точках максимума функции $f(x)$ на множестве $S_1(0)$.

Получили классическую задачу на отыскание условного максимума функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условии $1 - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = 0$.

Применяя метод неопределённых множителей Лагранжа, приходим к системе уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) - \lambda\, x_k = 0; \quad k = \overline{1\,, n}; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1. \tag{6}$$

Перегруппировкой слагаемых система уравнений (5) приводится к виду

$$\mathrm{T}_k\, \mathrm{T}_1\, x_1 + \mathrm{T}_k\, \mathrm{T}_2\, x_2 + ... + \mathrm{T}_k\, \mathrm{T}_n\, x_n - \lambda\, x_k = 0; \quad k = \overline{1\,, n}, \tag{7}$$

где T_j – j-й вектор-столбец матрицы A, $\mathrm{T}_k\, \mathrm{T}_j$ – скалярное произведение векторов T_k и T_j ($j = \overline{1\,, n}$).

В силу соотношений (7) нужные нам значения параметра λ являются собственными числами матрицы $(\,\mathrm{T}_k\, \mathrm{T}_j)_{1 \leqslant\, k,j \,\leqslant\, n} = \mathrm{A}^*\mathrm{A}$ (эти собственные числа вещественны и неотрицательны [3, с. 186]).

Пусть $\lambda \in \sigma(\mathrm{A}^*\mathrm{A})$, $x = (x_j)$ – решение системы уравнений (5), (6), отвечающее данному λ. Используя известный приём из [4. с.477], получаем равенство $f(x) = \lambda$. Тогда в силу формулы (4) $||\mathrm{A}||_s = \max\limits_{\lambda \in \sigma(\mathrm{A}^*\mathrm{A})} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\rho(\mathrm{A}^*\mathrm{A})}$.

Таким образом, стандартный анализ формулы (1) приводит лишь к известному результату (2).

Заметим, что равенство (1) можно использовать для получения нижних оценок спектральной нормы и, тем самым, в силу соотношения (3), для нахождения нижних границ спектрального радиуса нормальной матрицы, что делается, например, в работах [5], [6].

Литература

1. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989. — 655 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.

3. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1982. — 272 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I / Г.М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1970. — 608 с.

5. Фомин В.И. О нижних линейных оценках спектрального радиуса нормальной матрицы / В.И. Фомин // Вестник Тамб. ун-та. Сер. : Естеств. и технич. науки. — 2001. — Т. 6, вып. 2. — С. 145–146.

6. Фомин В.И. О нижних оценках спектрального радиуса вещественной симметрической матрицы / В.И. Фомин // Вестник Тамб. ун-та. Сер. : Естеств. и технич. науки. — 2013. — Т. 18, вып. 4. — С. 1481–1483.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ОКТАНТЕ

Е.В. Фролова (Липецк)

lsnn48@mail.ru

В работе изучаются условия однозначной разрешимости уравнения Вольтерра

$$x = Kx + g \tag{1}$$

в пространстве $C_h(D)$. Через $C_h(D)$ обозначено множество заданных на $D = [a, +\infty) \times [c, +\infty) \times [e, +\infty)$ функций, таких что $hx \in C(D)$ — пространству равномерно непрерывных и ограниченных на D функций; $h(t, s, r) = e^{-k(t+s+r)}$, где $k > 0$. Норма в $C_h(D)$ определяется равенством $\|x\|_{C_h(D)} = \|hx\|_{C(D)}$. Здесь $K = L + M + {} + N + P + Q + V + W$, а операторы L, M, N, P, Q, V, W определяются равенствами

$$(Lx)(t,s,r) = \int_a^t l(t,s,r,\tau)x(\tau,s,r)\,d\tau,$$
$$(Mx)(t,s,r) = \int_c^s m(t,s,r,\sigma)x(t,\sigma,r)\,d\sigma,$$
$$(Nx)(t,s,r) = \int_e^r n(t,s,r,\theta)x(t,s,\theta)\,d\theta,$$
$$(Px)(t,s,r) = \int_a^t \int_c^s p(t,s,r,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma,r)\,d\tau\,d\sigma,$$
$$(Qx)(t,s,r) = \int_a^t \int_e^r q(t,s,r,\tau,\theta)x(\tau,s,\theta)\,d\tau\,d\theta,$$
$$(Vx)(t,s,r) = \int_c^s \int_e^r v(t,s,r,\sigma,\theta)x(t,\sigma,\theta)\,d\sigma\,d\theta,$$
$$(Wx)(t,s,r) = \int_a^t \int_c^s \int_e^r w(t,s,r,\tau,\sigma,\theta)x(\tau,\sigma,\theta)\,d\tau\,d\sigma\,d\theta;$$

$t,\tau \in [a,+\infty), s,\sigma \in [c,+\infty), r,\theta \in [e,+\infty)$ l,m,n,p,q,v,w — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема 1. *Пусть*

$$l(t,s,r,\tau)=\sum_{i=1}^{p} h(\tau,s,r)l_i(t)\bar{l}_i(s)\tilde{l}_i(r)a_i(\tau),$$
$$m(t,s,r,\sigma)=\sum_{i=1}^{p} h(t,\sigma,r)m_i(t)\bar{m}_i(s)\tilde{m}_i(r)b_i(\sigma),$$
$$n(t,s,r,\theta)=\sum_{i=1}^{p} h(t,s,\theta)n_i(t)\bar{n}_i(s)\tilde{n}_i(r)c_i(\theta),$$
$$p(t,s,r,\tau,\sigma)=\sum_{i=1}^{p} h(\tau,\sigma,r)p_i(t)\bar{p}_i(s)\tilde{p}_i(r)d_i(\tau,\sigma),$$
$$q(t,s,r,\tau,\theta)=\sum_{i=1}^{p} h(\tau,s,\theta)q_i(t)\bar{q}_i(s)\tilde{q}_i(r)e_i(\tau,\theta),$$
$$v(t,s,r,\sigma,\theta)=\sum_{i=1}^{p} h(t,\sigma,\theta)v_i(t)\bar{v}_i(s)\tilde{v}_i(r)f_i(\sigma,\theta),$$
$$w(t,s,r,\tau,\sigma,\theta)=\sum_{i=1}^{p} h(\tau,\sigma,\theta)w_i(t)\bar{w}_i(s)\tilde{w}_i(r)g_i(\tau,\sigma,\theta)$$

(i=1, …, p), где i и p для каждой из функций l,m,n,p,q,v,w различны; $l_i, \bar{l}_i, \tilde{l}_i$, $m_i, \bar{m}_i, \tilde{m}_i$, $n_i, \bar{n}_i, \tilde{n}_i$, $p_i, \bar{p}_i, \tilde{p}_i$, $q_i, \bar{q}_i, \tilde{q}_i$, $v_i, \bar{v}_i, \tilde{v}_i$, w_i, $\bar{w}_i$, $\tilde{w}_i$ — равномерно непрерывные и ограниченные функции; а функции $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ принадлежат соответствующему пространству L^1. Тогда оператор K действует в $C_h(D)$, операторы $I-L$, $I-M$, $I-N$, $I-P$, $I-Q$, $I-V$, $I-W$ и $I-K$ обратимы, а уравнение (1) *имеет в $C_h(D)$ единственное решение при любой функции $g \in C_h(D)$.*

Для доказательства теоремы показывается, что оператор $I-L$ обратим и обратный к нему имеет вид

$$(I-L)^{-1}x(t,s,r)=x(t,s,r)+\int_a^t r_l(t,s,r,\tau)x(\tau,s,r)\,d\tau,$$

где $r_l(t,s,r,\tau)$ — резольвентное ядро оператора L, имеющие тот же вид, что и функция l. Аналогичный вид имеют операторы, обратные к $I-M$, $I-N$, $I-P$, $I-Q$, $I-V$, $I-W$.

Покажем обратимость оператора $I-K$. Введем обозначение $(I-L)^{-1}x(t,s,r)\equiv(I+R_l)x(t,s,r)$ и аналогичные ему для других обратных операторов. Представим уравнение (1) в виде $(I-L)x = (M+N+P+Q+V+W)x+g$. Применяя к обеим частям уравнения оператор $(I-L)^{-1}$, получим

$$x=(M+N+P+Q+V+W+R_lM+R_lN+R_lP+R_lQ+ +R_lV+R_lW)x+g+R_lg.$$

Вводя обозначения $P_1=P+R_lM$, $Q_1=Q+R_lN$, $W_1=W+R_lV+ + R_lW$, $g_3=g+R_lg$, придем к уравнению

$$(I-M)x=(N+P_1+Q_1+V+W_1+R_lP+R_lQ)x+g_3,$$

в котором $g_3\in C_h(D)$, а операторы P_1, Q_1 и W_1 имеют вид операторов P, Q и W с соответствующими ядрами.

Применяя к последнему уравнению оператор $(I-M)^{-1}$, получим уравнение, эквивалентное уравнению (1) и содержащее в правой части только один одномерный частично интегральный оператор N, двумерные частично интегральные операторы и трехмерный интегральный оператор с соответствующими ядрами. Перенося оператор N в левую часть уравнения и применяя к обеим частям уравнения оператор $(I-N)^{-1}$, получим уравнение, эквивалентное уравнению (1) и не содержащее одномерных частично интегральных операторов. Перенося далее в левую часть уравнения каждый раз по одному двумерному оператору и применяя к получаемому уравнению соответствующий обратный оператор, получим обычное интегральное уравнение

$x(t,s,r)=\int_a^t\int_c^s\int_e^r u(t,s,r,\tau,\sigma,\theta)x(\tau,\sigma,\theta)\,d\tau\,d\sigma\,d\theta+\bar{g}(t,s,r)$,
где u имеет вид w. Оператор $I-U$, где U — оператор Вольтерра с ядром u обратим, тогда обратимым будет и оператор $I-K$.

НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА: ОТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК К ЛОКАЛЬНЫМ И ПОТОЧЕЧНЫМ[1]

Б.Н. Хабибуллин, Р.А. Баладай (Уфа)
Khabib-Bulat@mail.ru

1. Версии неравенства Йенсена. Пара (X,μ) — пространство с положительной счетно-аддитивной мерой $\mu\neq 0$; $L^1(X,\mu)$ — класс функций f, определенных на X почти всюду по мере μ значениями из множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и интегрируемых по μ на X; $I\subset\mathbb{R}$ — связное непустое множество, т. е. произвольный интервал; $\circ$ — операция суперпозиции функций. Используется

Неравенство Йенсена. *Пусть $\mu(X)=1$, $f\in L^1(X,\mu)$ и $f(x)\in I$ для почти всех точек $x\in X$ по мере μ, а $\Phi\colon I\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция на I, т. е. её надграфик — выпуклое множество. Тогда*

$$\Phi\left(\int\limits_X f\,d\mu\right)\leqslant\int\limits_X \Phi\circ f\,d\mu.$$

Для произвольной функции $\Phi\colon I\to\mathbb{R}$ корректно определена

sup-*обратная функция* $\quad \sup\Phi^{-1}\colon y\mapsto\sup\Bigl(\Phi^{-1}\bigl(\{y\}\bigr)\Bigr),\quad y\in\operatorname{im}\Phi.$

Теорема 1. *Пусть μ — конечная мера на X и $0\neq\mu\leqslant\nu$, где ν — положительная счетно-аддитивная мера на X; функция Φ — выпуклая со связным образом* $\operatorname{im}\Phi$ *и с* sup-*обратной*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00024).

строго возрастающей вогнутой функцией $\sup \Phi^{-1}$*;* $u, v \in L^1(X, \mu)$*,* $u(x) - v(x) \in I$ *для почти всех* $x \in X$ *по* μ*, а суперпозиция* $\Phi \circ (u - v)$ ν*-интегрируема на* X*; функция* $\Phi \circ (u - v)$ *положительна на подмножестве в* X*, где сосредоточена разность мер* $\nu - \mu \geqslant 0$*, и*

$$\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X \Phi \circ (u - v) \, d\nu \in \operatorname{im} \Phi. \qquad \textit{Тогда}$$

$$\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X u \, d\mu \leqslant \frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X v \, d\mu + \sup \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X \Phi \circ (u - v) \, d\nu \right).$$

Мы не приводим здесь специальные случаи Теоремы 1 и различные её вариации, а обсудим

2. Классы голоморфных функций с интегральными весами. Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство; $B(z, r)$ — открытый шар с центром $z \in \mathbb{C}^n$ радиуса $r > 0$; $\operatorname{Hol}(\mathcal{O})$ — пространство функций, голоморфных в открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$. Значительную роль и как самостоятельный объект, и как вспомогательный аппарат в комплексном анализе играют классы функций $f \in \operatorname{Hol}(\mathcal{O})$, удовлетворяющих при $0 < p \in \mathbb{R}$ ограничению вида

$$\int\limits_{\mathcal{O}} |f|^p e^{-v} \, d\lambda < +\infty, \quad \lambda \text{ — мера Лебега на } \mathcal{O}, \tag{1}$$

где *измеримую функцию* v называют *весовой функцией,* или *весом.* Для интегрируемой по λ в $B(z, r)$ функции v ведем характеристику

$$B(v; z, r) := \frac{1}{\lambda\bigl(B(z, r)\bigr)} \int\limits_{B(z,r)} v \, d\lambda = \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} \int\limits_{B(z,r)} v \, d\lambda$$

— среднее функции v по шару $B(z, r)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (1)*. Тогда для всех* $z \in \mathcal{O}$

$$\log\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{p} \inf_{0 < r < \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{O})} \left(B(v; z, r) + 2n \log \frac{1}{r} \right) + \mathrm{const},$$

где const *— постоянная, а* dist *— евклидово расстояние.*

Пример 1. Для простоты пусть $n = 1$, $\mathcal{O} := \Bigl\{ z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0 \Bigr\} =:$ $\mathbb{C}^{\mathrm{up}}$ — верхняя полуплоскость, $v(z) = \operatorname{Im} z$, $z \in \mathbb{C}^{\mathrm{up}}$. Тогда для любой функции $f \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{C}^{\mathrm{up}})$ из ограничения

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{\mathrm{up}}} \bigl|f(z)\bigr| e^{-\operatorname{Im} z}\, d\lambda(z) < +\infty$$

по теореме 2 следует оценка

$$\log\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \operatorname{Im} z - 2\,\log \operatorname{Im} z + \mathrm{const} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}^{\mathrm{up}}.$$

Известные нам традиционные оценки не позволяют получить в правой части добавку $-2\,\log \operatorname{Im} z$, уменьшающую первое слагаемое $\operatorname{Im} z$ справа при больших значениях $\operatorname{Im} z$.

Пример 2. Рассмотрим *пространство Фока* функций $f \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{C})$:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \bigl|f(z)\bigr|^2 e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) < +\infty\,.$$

По Теореме 2 при таких ограничениях $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \mathrm{const}\, e^{|z|^2/2}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Известные традиционные оценки дают добавочный множитель $|z|$ справа. Неравенства подобного типа с помощью Теоремы 2 легко распространяется и на любые $n > 1$.

3. Локальные оценки решения $\bar\partial$-задачи. Через $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ обозначаем класс локально интегрируемых по мере Лебега λ функций на открытом множестве из $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$; $L^2_{(0,1)}(\mathcal{O})$ —пространство $(0,1)$-форм с коэффициентами из $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$. С помощью [1; Теорема 4.2.6] и Теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{O}$ — псевдовыпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$, v — плюрисубгармоническая функция в $\mathcal{O}$ и $0 < a \in \mathbb{R}$, а также $g \in L^2_{(0,1)}(\mathcal{O})$ и $\bar\partial g = 0$. Тогда при условии*

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \bigl|g(z)\bigr|^2 e^{-v(z)} \bigl(1+|z|^2\bigr)^{1-a} \Bigl(2+\log\bigl(1+|z|^2\bigr)\Bigr)^{n+2} d\lambda(z) < +\infty$$

уравнение $\bar\partial f = g$ имеет решение $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$, удовлетворяющее при всех $z \in \mathcal{O}$ и $0 < r < \mathrm{dist}\,(z, \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{O})$ неравенству

$$\log\bigl|f(z)\bigr| \leqslant B\bigl(\log|f|; z, r\bigr) \leqslant \frac{1}{2}\, B(v; z, r) + a\log\bigl(1+r\bigr) + n\log\frac{1}{r} + \\ + \frac{a}{2}\log\frac{1+|z|^2}{1+\log\bigl(1+|z|\bigr)} + \mathrm{const},$$

где постоянная const зависит только от g и $\mathcal{O}$.

Рассмотренные здесь утверждения и примеры — часть [2].

Литература

1. Hörmander L. Notions of Convexity / L. Hörmander. — Boston: Birkhäuser, 1994. — 416 p.

2. Баладай Р.А. Применения неравенства Йенсена: от интегральных оценок к усредненным, локальным, поточечным / Р.А. Баладай, Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 2016 — (в печати).

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ КОЭРЦИТИВНОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Р. Ханалыев (Москва)

asker-hanalyyew@rambler.ru

В произвольном банаховом пространстве E рассматривается нелокальная краевая задача

$$v'(t)+A(t)v(t)=f(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1),\ v(0)=v(\lambda)+\mu \quad (0<\lambda\leqslant 1) \quad (1)$$

для абстрактного параболического уравнения с действующим в E линейным неограниченным, сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t, всюду плотную в E область определения $D=D(A(t))$ и порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}(s\geqslant 0)$; $\mu\in D$.

Пусть для любых $t,s,\tau\in[0,1]$ справедливо неравенство

$$\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(\tau)\right\|_{E\to E}\leqslant M|t-s|^{\varepsilon}, 0<\varepsilon\leqslant 1. \quad (2)$$

Пространство Гёльдера, состоящее из функций $f(t)$, определенных на $[0,1]$ со значениями в E, для которых конечная норма

$$\|f\|_{C^{\alpha}(E)}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t)\|_E+\sup_{0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1}\frac{\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^{\alpha}}, \quad (3)$$

обозначим через $C^{\alpha}(E)=C^{\alpha}([0,1],E)(0<\alpha<1)$. Введем дробные пространства $E_{\alpha}=E_{\alpha,\infty}(A(t),E)$ $(0<\alpha<1)$ с нормой

$$\|u\|_{E_{\alpha}}=\sup_{z>0}z^{1-\alpha}\left\|A(t)\exp\{-zA(t)\}u\right\|_E+\|u\|_E\,, \quad (4)$$

состоящие из всех элементов $u\in E$. В работе [1] для задачи Коши

$$v'(t)+A(t)v(t)=f(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1),\ v(0)=v_0 \quad (5)$$

доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача (5) коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|v'\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} + \|v'\|_{C(E_\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\frac{1}{\alpha}\|v_0'\|_{E_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)}\right], \tag{6}$$

где M *не зависит от* α, v_0' *и* $f(t)$.

В работе [2] доказана коэрцитивная разрешимость задачи (1) с постоянным оператором $A(t) \equiv A$ в пространствах $C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta, 0 < \beta < 1)$ и $C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E_{\alpha-\beta})(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha, 0 < \alpha < 1)$. А в работах [3,4] аналогичные результаты получены для задачи (1) с переменным оператором.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача (1) коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|v'\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} + \|v'\|_{C(E_\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\frac{1}{\alpha}\|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)\|_{E_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)}\right] \tag{7}$$

с постоянной M*, не зависящей от* α, μ *и* $f(t)$.

Литература

1. Ашыралыев А. Коэрцитивная оценка в гельдеровых нормах для параболических уравнений с переменным оператором / А. Ашыралыев., А. Ханалыев // Моделирование процессов разработки газовых месторождений и прикладные задачи теоретической газогидродинамики. — Ашгабат : Ылым, 1998. — С. 154–162.

2. Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E. Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations / A. Ashyralyev, A. Hanalyev, P. E. Sobolevskii //Abstract and Applied Analysis. — 2001. — Vol. 6, no. 1. — P. 53–61.

3. Ashyralyev A., Hanalyev A. Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators / A. Ashyralyev, A. Hanalyev // TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. — 2012. — Vol. 2, no. 1. — P. 75–93.

4. Ashyralyev A., Hanalyev A. Well-Posedness of Nonlocal Parabolic Differential Problems with Dependent Operators / A. Ashyralyev, A. Hanalyev // The Scientific World Journal. — Vol. 2014, No. ID 519814, Jan. 2014. — P. 1–11.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

А.П. Хромов (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

$$x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty)$$

при условиях:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Предполагаем, что комплексная $q(x) \in L[0,1]$. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

Исследование задачи (1)–(3) проводится методом Фурье, не прибегая к традиционному (см. [1]) исследованию равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение, и рядов, получаемых из него почленным дифференцированием до второго порядка, избегая завышенных условий гладкости функции $\varphi(x)$. Мы продолжаем исследования, начатые В. А. Чернятиным [2], связанные с идеей А. Н. Крылова [3] об усилении скорости сходимости рядов Фурье и им подобных. При этом мы используем резольвентный подход в методе Фурье, предложенный автором в [4, 5] и развитый в [6–9].

Здесь результаты из [9], полученные для однородного уравнения ($f(x,t) = 0$), переносятся на случай уравнения (1).

---

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Формальное решение задачи (1)–(3) возьмем в виде:

$$u(x,)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t+$$

$$+\int\limits_0^t(R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $Ly=-y''(x)+q(x)y(x)$, $y(0)=y(1)=0$; $r>0$ фиксировано и таково, что все собственные значения оператора L при $|\lambda_n|>r$ простые и попадают по одному в области с границами γ_n, являющиеся образами окружностей $\tilde\gamma_n=\{\rho|\ |\rho-n\pi|=\delta\}$ ($\delta>0$ и достаточно мало), при отображении $\lambda=\rho^2$, $\operatorname{Re}\rho\geqslant 0$, $n\geqslant n_0$; $R_\lambda f$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x.

Рассмотрим вопрос о классическом решении. Представим (4) в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{5}$$

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t(R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda.$$

Ясно, что $u_1(x,t)$ есть формальное решение задачи (1)–(3) при $f(x,t)=0$, $u_2(x,t)$ — формальное решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x)\equiv 0$. Классическое решение задачи (1)–(3) в случае $f(x,t)=0$, даваемое (5), найдено в [9].

Рассмотрим теперь $u_2(x,t)$. Представим $u_2(x,t)$ в виде:

$$u_2(x,t)=u_{20}(x,t)+u_{21}(x,t), \tag{6}$$

где

$$u_{20}(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t(R_\lambda^0 f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$

$$u_{21}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$

где $R_\lambda^0 = (L-\lambda E)^{-1}$, $L_0 y = -y''(x)$, $y(0)=y(1)=0$.

Лемма 1. *Если $f(x,t)\in L_2[Q_T]$, где $Q_T=[0,1]\times[0,T]$, при любом $T>0$, то ряд $u_{20}(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и*

$$u_{20}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\Phi(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{7}$$

где $\Phi(\eta,\tau)$ нечетна и 2-периодична по η на всей оси и $\Phi(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$.

Теорема 1. *Если $f(x,t)$, $f_t'(x,t)$ непрерывна и $f(0,t)=f(1,t)=0$, то $u_{20}(x,t)$ из (6) есть классическое решение задачи (1)–(3) при $q(x)=0$, $\varphi(x)=0$.*

Теорема 2. *Если $f(x,t)$ из теоремы 1, то $u_{21}(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и $u_2(x,t)$ из (6), где $u_{20}(x,t)$ есть (7), есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x)=0$ (уравнение (1) удовлетворяется почти всюду).*

Теперь перейдем к обобщенному решению.

Лемма 2. *Если $\varphi(x)\in L_p[0,1]$, $p>1$, $f(x,t)\in L_2[Q_T]$ при любом $T>0$, то формальное решение (4) преобразуется к виду*

$$u(x,t) = \frac{\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\Phi(\eta,\tau)\,d\eta + {}$$

$$+u_3(x,t)+u_4(x,t), \tag{8}$$

где $\tilde\varphi(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ на всю ось; $\Phi(\eta,\tau)$ нечетна и 2-периодична по η; $\Phi(\eta,\tau)=f(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$;

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{9}$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda. \tag{10}$$

Лемма 3. *Если* $\varphi(x) \in L_p[0,1] \quad (p > 1)$, *то ряд* (9) *сходится абсолютно и равномерно по* $x, t \in Q_T$, *причем*

$$\max_{x,t \in Q_T} |u_3(x,t)| \leqslant C_T \|\varphi\|_p.$$

Лемма 4. *Если* $f(x,t) \in L[Q_T]$, *то ряд* (10) *сходится абсолютно и равномерно по* $x, t \in Q_T$ *и*

$$\max_{x,t \in Q_T} |u_4(x,t)| \leqslant C_T \|f\|_{L[Q_T]}.$$

Теорема 3. *Если* $\varphi(x) \in L_p[0,1] \quad (p > 1)$, $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, *то ряд* (4) *формального решения задачи* (1)–(3) *сходится почти всюду. Его сумма* $u(x,t)$ *находится по формуле* (8), *где ряды* $u_3(x,t)$ *и* $u_4(x,t)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x, t \in Q_T$ *при любом* $T > 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0,1]$. *Более того, если* $\varphi_h(x)$, $\varphi_h'(x)$ *абсолютно непрерывны и* $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = 0$, $L\varphi_h \in L_p[0,1]$, $f_h(x,t)$ *из теоремы 1, то решение* $u_h(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *для таких* $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$ *вместо* $\varphi(x)$, $f(x)$ *сходится к* $u(x,t)$ *в* $L_p[Q_T]$ *при* $h \to 0$ *при любом* T, *если* $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$, $\|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \to 0$ *при* $h \to 0$.

Таким образом, $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Пусть теперь $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Тогда правая часть (7) имеет смысл и ряды $u_3(x,t)$, $u_4(x,t)$ сходятся абсолютно и равномерно в Q_T. Обозначим через $\tilde{u}(x,t)$ правую часть (8). Тогда $\tilde{u}(x,t) \in L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$. Назовем в этом случае $\tilde{u}(x,t)$ обобщенным формальным решением задачи (1)–(3).

Теорема 4. *Если* $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, $f(x,t) \in \in L[Q_T]$, *то* $\tilde{u}(x,t) \in L_p[Q_T]$, *при этом* $\tilde{u}(x,0) = \varphi(x)$ *почти всюду при* $x \in [0,1]$. *Если* $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$, $u_h(x,t)$ *из теоремы 3 и* $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$, $\|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L[Q_T]} \to 0$ *при* $h \to 0$, *то и* $\|\tilde{u}(x,t) - u_h(x,t)\|_{L_p[Q_T]} \to 0$.

Таким образом, $\tilde{u}(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3). Значит, теорема 4 дает обобщенное решение задачи (1)–(3) в крайнем случае $\varphi(x) \in L_p[0,1] \ (p > 1)$, $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.

Литература

1. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики / В. А. Стеклов. — М. : Наука, 1983. — 432 с.

2. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. — 112 с.

3. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А. Н. Крылов. — Л. : ГИТТЛ, 1950. — 368 с.

4. Бурлуцкая М. Ш. Резольвентный подход в методе Фурье / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Докл. АН. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 138–140.

5. Бурлуцкая М. Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

6. Корнев В. В. Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 621–630.

7. Корнев В. В. Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 7. — С. 1156–1167.

8. Хромов А. П. Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями / А. П. Хромов // Докл. АН. — 2015. — Т. 462, № 2. — С. 148–150.

9. Хромов А. П. Поведение формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом / А. П. Хромов // Докл. АН. — 2016. — Т. 467, № 4. — С. 389–391.

ОСОБОЕ МНОЖЕСТВО И УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА[1]

И.Г. Царьков (Москва)

tsar@mech.math.msu.su

Одним из новых и перспективных направлений геометрической теории приближения является изучение ее методами поведение C^1-решений уравнений Гамильтона-Якоби, одним из представителей которого является уравнение эйконала: $|\nabla u| = 1$, где функция

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

$u = u(x)$ обычно задана на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Из простейших соображений нетрудно получить, что такие решения локально представляют собой функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ для некоторых констант $c \in \mathbb{R}$ и подмножеств $M \subset \mathbb{R}^n$, где $\varrho(x, M)$ – расстояние до некоторого множества M от точки x.

Здесь мы обратим внимание на следующий факт: свойство гладкости решения уравнения эйконала взаимосвязано с геометрическо-аппроксимативным понятием локальной солнечности поверхностей уровня этого решения. По этой причине в мы будем исследовать свойства локальной солнечности (регулярности) и особых точек. Подробнее о связи C^1-решений уравнения эйконала с геометрической теорией приближения и свойствами функций расстояния до множества можно посмотреть в работе [1], а также ознакомиться со свойствами функций расстояния и свойств солнечности в работах [2,3].

Далее мы будем изучать аппроксимативные свойства непустого и замкнутого множества M в произвольном действительном конечномерном банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$, что имеет отношение к уравнению эйконала вида $\|\nabla u\|_{X^*} = 1$. Здесь X^* – сопряженное с X пространство, а $u = u(x)$ – функция на подмножестве пространства X.

Определение 1. *Точка $x \in X \setminus M$ называется регулярной для замкнутого множества $M \subset X$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т.е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию* $\operatorname{int} M$, *будем называть особыми.*

Отметим, что для конечномерного пространства X в регулярной точке $x_0 \in X \setminus M$ выполняется свойство локальной строгой солнечности (см. обзоры [1–3], т.е. для любой точки $x \in O(x_0)$ существует (единственная ближайшая) y из M такая, что y будет являться ближайшей в M для всех точек из пересечения $O(x_0)$ и луча ℓ_y, выходящего из y и проходящего через x.

Теорема 1. *Пусть X – конечномерное гладкое строго выпуклое пространство, A – объединение отрезков с концами во множестве E, представляющем собой множество всех особых точек множества M, равного замыканию следа локально простой гиперповерхности класса C^1 во всех точках $M \setminus E$. Тогда найдется выпуклое тело G, для которого $M \setminus \operatorname{int} A = \partial G \setminus \operatorname{int} A$. При этом в случае,* *когда $A \cap M$ нигде не плотно в M, найдется выпуклое тело G, которое содержит множество E и $M = \partial G$.*

Пример. Требуется определить все C^1-гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), для которых особое множество ее следа представляет собой окружность O радиуса R и прямую ℓ, перпендикулярную плоскости окружности и проходящей через ее центр. Применяя предыдущую теорему, можно показать, что след таких гиперповерхностей является границей тора, представляющего собой объединение шаров одного и того же радиуса $r < R$ с центрами из O.

Замечание. Для области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (O \cup \ell)$ опишем все допустимые значения решений уравнения эйконала $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ на $\partial\Omega$. Для простоты описания ограничимся случаем, когда часть особых точек лежит на ℓ. Любое такое решение $u(x)$ принимает постоянные значения на O, равные k. И на прямой ℓ имеет вид $\psi(x) = c \pm \varphi(x)$, где φ – некоторая выпуклая вверх неотрицательная функция на некотором (необязательно ограниченном) интервале $(a, b) \subset \ell$, равная нулю в конечных концах этого интервала и равная $-\varrho(x, (a, b))$ вне этого интервала. При этом $k = c \pm \inf\{\varphi(x) - \varrho(x, O) \mid x \in (a, b)\}$.

Литература

1. Алимов А.Р. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения / А.Р. Алимов, И.Г. Царьков // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 1 (427). — С. 3–84.

2. Балаганский В.С. Проблема выпуклости чебышевских множеств / В.С. Балаганский, Л.П. Власов // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 6(312). — С. 125–188.

3. Алимов А.Р. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств / А.Р. Алимов, И.Г. Царьков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2014. — Т. 63, № 4. — С. 21–91.

О ТРЕУГОЛЬНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Чан Куанг Выонг, А.П. Солдатов (Белгород)

vuongtq@dlu.edu.vn

Пусть на комплексной плоскости задан ориентируемый гладкий контур Γ дополнение к нему обозначим $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Рассмотрим в классе $C^\mu(\widehat{D})$ вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ задачу линейного сопряжения

$$\varphi^+ = G\varphi^- + g \tag{1}$$

где $G = (G_{ij})_1^n \in C^\mu(\Gamma)$ матрица-функция, определитель которой $\det G(t) \neq 0$ в каждой точке $t \in \Gamma, g(t) \in C^\mu(\Gamma)$ заданный вектор-функция. Поведение φ на бесконечности подчиним условию

$$\deg \varphi_j \leqslant k_j - 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Вопрос разрешимости этой задачи хорошо изучен и описывается в терминах так называемой канонической матрицы-функции.

В данной статье мы исследуем случай, когда матрица G верхне-треугольна.

$$G_{ij} = 0, \quad i > j. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть матрица $G \in C^\mu(\Gamma)$ удовлетворяет условию (2) и $G_{ii}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда каноническая матрица-функция X также треугольна и строится в явном виде с помощью рекуррентных соотношений. При этом ее частные индексы $æ_i = IndG_{ii}$.*

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968. — 511 с.

О ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ[1]

А.В. Чернов (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область диффеоморфная шаровому слою, причем луч, выходящий из некоторой точки Ω в произвольном направлении, пересекает границу области $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ровно в двух точках – по одной на каждую компоненту связности Γ_1, Γ_2, диффеоморфную сфере в $\mathbb{R}^3$. Пусть, кроме того, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}$ – заданные выпуклые множества, $i = 1, 2$; σ_*, $\sigma^* > 0$ – заданные числа; $\Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$ – класс всех $\sigma(x; v_1) : \Omega \times \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, дифференцируемых по $v_1 \in \mathcal{D}_1$ и вместе с $\sigma'_{v_1}(x; v_1)$ измеримых по $x \in \Omega$, непрерывных по $v_1 \in \mathcal{D}_1$, ограниченных на ограниченных множествах; $\sigma_* \leqslant \sigma(x; v_1) \leqslant \sigma^*$ для п.в. $x \in \Omega$, $\forall v_1 \in \mathcal{D}_1$. Определим класс $\mathbb{F}$ всех вектор-функций $\vec{f}(t, x; v_2) : [0; T] \times \Omega \times \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}^3$, вместе с $\vec{f}'_{v_2}(t, x; v_2)$ измеримых по $(t, x) \in [0; T] \times \Omega$, непрерывных по $v_2 \in \mathcal{D}_2$ и таких, что $\vec{f}(., .; v_2)$, $\vec{f}'_{v_2}\big(., .; u(.)\big) \in \mathbf{C}\big([0; T]; L^3_2(\Omega)\big)$ $\forall v_2 \in \mathcal{D}_2$, $\forall u \in L_\infty(\Pi)$. Пусть $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к Γ_2; $\vec{f}_{\vec{n}}$ – нормальная составляющая вектора $\vec{f}$. Для $v = (v_1; v_2) \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$, $\vec{f} \in \mathbb{F}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t, x) + \operatorname{div}\big(\sigma(x; v_1)\nabla\varphi(t, x)\big) = \operatorname{div}\vec{f}(t, x; v_2); \qquad (1)$$

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial\vec{n}} + \sigma(x; v_2)\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial\vec{n}} - \vec{f}_{\vec{n}}(t, x; v_2)\right] d\ell = 0, \qquad (2)$$

$$\varphi(t, x)\Big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(t, x)\Big|_{x\in\Gamma_2} = C(t), \quad t \in (0; T]; \qquad (3)$$

$$\varphi(t, x)\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \qquad (4)$$

Пусть $V(\Omega)$ — гильбертово пространство [1] всех $\psi \in H^1(\Omega)$, для каждой из которых след $\psi\Big|_{\Gamma_1} = 0$, а след $\psi\Big|_{\Gamma_2}$ постоянный; скалярное произведение $(\varphi, \psi)_{V(\Omega)} = \int\limits_\Omega \big(\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\, dx$. Решение задачи

[1] Работа финансово поддержана МОН РФ в рамках проектной части гос. задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

(1)–(4) понимаем как функцию $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$, удовлетворяющую условию (4) и интегральному тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx+\int\limits_{\Omega}\sigma(x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\big(\vec{f}(t,x;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx\quad \text{для } t\in(0;T],\quad \forall\psi\in V(\Omega).$$

Пусть функция $F(t,x,\xi,\upsilon)\,:\,[0;T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ вместе с $F'_\xi(t,x,\xi,\upsilon)$, $F'_\upsilon(t,x,\xi,\upsilon)$ измерима по $(t,x)\in[0;T]\times\Omega\equiv\Pi$, непрерывна по $(\xi;\upsilon)\in\mathbb{R}\times\mathcal{D}$ и такова, что $F(.,.,\varphi,\upsilon)\in L_1(\Pi)$ $\forall\varphi\in\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $\upsilon\in\mathcal{D}$; $F'_\upsilon(.,.,\varphi,u)\in L_1^2(\Pi)$ $\forall\varphi\in\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $u\in L^2_\infty(\Pi)$; $F'_\xi(.,.,\varphi,u)\in L_2(\Pi)$, $\forall\varphi\in L_2(\Pi)$, $u\in L^2_\beta(\Pi)$ при некотором $\beta\in[1;\infty)$. Рассмотрим интегральный функционал

$$J[\upsilon]=\int\limits_0^T dt\int\limits_{\Omega}F\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\,dx,\quad \upsilon\in\mathcal{D}.$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях функция $J[\upsilon]$ имеет частные производные по обеим переменным:*

$$\frac{\partial J}{\partial\upsilon_1}=\iint\limits_{\Pi}\Big[F'_\xi\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)y(t,x)+F'_{\upsilon_1}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big]\,dt\,dx=$$

$$=\iint\limits_{\Pi}\Big[-\big(\sigma'_{\upsilon_1}(t,x;\upsilon_1)\big)\nabla p\cdot\nabla\varphi[\upsilon]+F'_{\upsilon_1}\big(t,x,\varphi[\upsilon],\upsilon\big)\Big]\,dt\,dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial\upsilon_2}=\iint\limits_{\Pi}\Big[F'_\xi\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)z(t,x)+F'_{\upsilon_2}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big]\,dt\,dx=$$

$$=\iint\limits_{\Pi}\Big[\vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\upsilon_2)\cdot\nabla p(t,x)+F'_{\upsilon_2}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big]\,dt\,dx,$$

где $y\in\mathbf{C}^1\big([0;T],V(\Omega)\big)$ – единственное решение задачи

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\big(\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx+\int\limits_{\Omega}\sigma(x;\upsilon_1)\big(\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx=$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \big(\sigma'_{\upsilon_1}(x;\upsilon_1)\nabla\varphi[\upsilon]\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx,\ t\in(0;T],\ \forall\psi\in V(\Omega),$$

с начальным условием $y(0,x) = 0,\ x\in\Omega$*;* $z\in \mathbf{C}^1\big([0;T],V(\Omega)\big)$ *– единственное решение задачи*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\big(\nabla z(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_{\Omega}\sigma(x;\upsilon_1)\big(\nabla z(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\big(\vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для } t\in(0;T],\quad \forall\psi\in V(\Omega),$$

с начальным условием $z(0,x) = 0,\ x\in\Omega$*;* $p\in \mathbf{C}^1\big([0;T],V(\Omega)\big)$ *– единственное решение сопряженной задачи*

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\big(\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_{\Omega}\sigma(x;\upsilon_1)\big(\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} F'_{\xi}\big(t,x,\varphi[\upsilon],\upsilon\big)\,\psi(x)\,dx \quad \text{для } t\in(0;T],\quad \forall\psi\in V(\Omega),$$

с финальным условием $p(T,x) = 0,\ x\in\Omega$*.*

При доказательстве теоремы 1 используются некоторые идеи [2].

Литература

1. Жидков А.А. Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере / А. А. Жидков, А. В. Калинин // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. — 2009. — № 6(1). — С. 150–158.

2. Чернов А. В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации старшего коэффициента эллиптического уравнения / А. В. Чернов // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 538–547.

О НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

С.А. Шабров, Ф.В. Голованева (Воронеж)
Shabrov_s_a@math.vsu.ru

Доклад посвящен анализу нелинейной модели четвертого порядка, реализуемой в виде краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda F(x,u,u',u''), \\ u(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Модель (1) описывает малые деформации стержневой системы (шарнирно закрепленной на концах), возникающих под воздействием силы, зависящей не только от самой точки x, но и от отклонения $u(x)$ точки x стержня от положения равновесия, и от поворота $u'(x)$, и от — крутящего момента $u''(x)$. В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$ (см. далее), уравнение в (1) понимается как равенство $\Delta\left(pu'_x\right)(\xi) - (ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi, u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение обозначим через Λ. Будем считать действительное число собственным значением задачи (1), если при этом λ (1) имеет нетривиальное решение.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой $\varrho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $Q(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u,u',u'')$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u,u',u'')$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по переменным u, u' и u''; 2) функция $F(x,u,u',u'')$

измерима по x при каждых u, u' и u''; 3) $|F(x,u,u',u'')| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ — σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение (1) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; pu''_{xx} — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $(pu''_{xx})'_x$ и $ru'_x(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Однородное уравнение $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое нетривиальное решение имеет не более трех нулей с учетом кратностей.

В работе получены достаточные условия, при которых множество Λ собственных значений задачи (1), отвечающих неотрицательным на $[0;\ell]$ собственным функциям, обладает следующими свойствами: 1) Λ связно; 2) при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное положительное в $(0;\ell)$ решение $u(x,\lambda)$; 3) $u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ

После выхода работы [1], качественная теория краевых задач с негладкими решениями получила бурное развитие (см., например, работы [2]–[9]).

Литература

1. Покорный, Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

3. Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

4. Pokornyi Yu.V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

5. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

7. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

8. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

9. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ[1]

С.А. Шабров, О.М. Родионова, М.Б. Давыдова (Воронеж)
shabrov_s_a@mat.vsu.ru

Используя поточечный подход к трактовке уравнения с негладкими решениями, предложенный Ю. В. Покорным [1], для математической модели

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ -pu''(0) + \gamma_1 u'(0) = 0, \\ (pu'')'(0) - ru'(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ ru'(l) + \gamma_3 u(l) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

удается доказать существование и единственность функции влияния (при условии невырожденности граничной задачи, которой описывается рассматриваемая модель), и исследовать ее знакорегулярные свойства. Отметим, что избранный подход показал свою

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14–01–00867).

эффективность. Так, для линейных граничных задач второго порядка с негладкими решениями доказана осцилляционность спектра [2], [3]; для уравнений четвертого порядка с производными Радона–Никодима получен ряд важных результатов (доказана разрешимость, построена и изучена функция Грина соответствующей краевой задачи [4], [5]). Так же интенсивно изучаются нелинейные краевые задачи с производными по мере [6] и уравнения с разрывными решениями [7]. В последнее время стали изучаться смешанные задачи для гиперболических уравнений с негладкими решениями [8], [9].

В работе изучается следующая математическая модель (1), которая возникает при описании малых поперечных деформаций системы, состоящей из стержня, один конец которого имеет упругое закрепление и на нем закреплена пружина реагирующая исключительно на поворот, а к другому припаяна натянутая струна. Второй конец струны закреплен упруго. Система помещена во внешнюю среду, локальный коэффициент упругости которой равен dQ.

Пусть наша система расположена вдоль отрезка $[0;l]$; ξ — точка соединения стержня и струны. Коэффициент $p(x)$ в дифференциальном уравнении положителен на $[0;\xi)$ и характеризует материал, из которого сделан стержень; функция $r(x)$, определенная на $(\xi;l]$, равна силе натяжения струны в точке x. Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на оставшуюся часть отрезка $[0;l]$, нулем. Сумму всех внешних сил, приложенных к $[0;x)$, обозначим через $F(x)$.

Производная по мере σ, которая содержит в себе все особенности системы, понимается следующим образом: функция $\psi(x)$ – σ-производная функции $\Psi(x)$, если для всех $x \in [0;l]\backslash S(\sigma)$ справедливо равенство: $\Psi(x) - \Psi(0) = \int\limits_0^x \psi(s)d\sigma$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Pokornyi Yu.V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

3. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Ша-

бров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

4. Шабров С.А. О функции Грина некоторых негладких задач: качественные методы в теории краевых задач / С.А. Шабров, Ф.В. Голованева. — Саарбрюккен, 2011.

5. Голованева Ф.В. О функции Грина сильно сингулярной консоли / Ф.В. Голованева. — Деп. 08.06.2007, № 611–В2007.

6. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

7. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М.Б. Давыдова, Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

8. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

9. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ[1]

М.В. Шамолин (Москва)

shamolin@rambler.ru

Рассматриваются задачи многомерной динамики, где возникают механические системы, пространством положений которых является сфера конечной размерности, а фазовым пространством таких систем становится касательное расслоение к данной сфере. Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00848-а).

первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями, как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию динамической части уравнений движения трехмерного твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой [1, 2]. Отметим также ряд работ автора по интегрированию аналогичных уравнений движения двумерного и четырехмерного твердого тела [1, 3, 4, 5], находящегося в неконсервативном поле сил.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов).

Литература

1. Самсонов В.А. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде / В.А. Самсонов, М.В. Шамолин // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.

2. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М.В. Шамолин. — М. : Изд–во Экзамен, 2007. — 352 с.

3. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М.В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. :

Современая математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. — М. : ВИНИТИ, 2013. — С. 5–254.

4. Шамолин М.В. Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере / М.В. Шамолин // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. — 2015. — № 3. — С. 11–14.

5. Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2015. — Т. 460. — № 2. — С. 165–169.

О ПРОДОЛЖЕНИИ СИММЕТРИЙНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Н.А. Шананин (Москва)

nashananin@inbox.ru

Пусть $(v_1(t,x),\ldots,v_n(t,x),p(t,x)) \in C^\infty$ — решение системы

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t v_l + \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j} v_l - \nu \triangle v_l + \partial_{x_l} p & = & f_l(t,x,v) + a_l(t,x)p, \\ & & l = 1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v_j = g(t,x), & & (t,x) \in \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

где Ω — открытое множество в R^{n+1}, $\triangle = \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j})^2$ — оператор Лапласа, $\nu > 0$, $f_l \in C^\infty(\Omega \times R^n)$, $a_l \in C^\infty(\Omega)$.

Пусть G — группа Ли симметрий системы (1). Говорят, что решение (v,p) G — *инвариантно в точке* (t^0,x^0), если существуют такие открытые окрестности U точки (t^0,x^0) и V единицы группы, что $(g \circ u)(t,x) = u(t,x)$ для всех $(t,x) \in U$ и $g \in V$. Обозначим через V_{sym} подмножество точек, решение инвариантно.

Теорема. *Если $(t^0,x^0) \in V_{\mathrm{sym}}$, то вся связная компонента слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega$, содержащая (t^0,x^0), содержится в V_{sym}.*

Аналог утверждения теоремы справедлив для дискретных групп симметрий. Кроме того, утверждение обобщается на негладкие решения системы (1) с негладкими f_l и a_l.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ

В.А. Шишкин (Пермь)
vsh1791@mail.ru

Пусть имеется n параллельных процессоров и m заявок, требующих обработки. В каждый момент времени конкретный процессор может обрабатывать не более одной заявки. Каждая заявка может быть обработана любым процессором.

Продолжительность t_{ij} обработки i-м, $i = 1, \ldots, n$, процессором j-й заявки, $j = 1, \ldots, m$, зависит как от заявки, так и от процессора (в случае неидентичных процессоров).

До начала составления расписания очереди всех процессоров пусты, но некоторые (или все) процессоры могут быть заняты обработкой ранее поступивших заявок. Обозначим оставшееся время обработки через τ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Если имеется $C > 1$ классов заявок, то при переходе от обработки заявки класса c_j к заявке класса $c_{j'}$ на перенастройку i-го процессора требуется дополнительное время $\pi_i^{c_j \to c_{j'}} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $c_j, c_{j'} = 1, \ldots, C$. Если начальная заявка принадлежит классу $c_{0,i}$, то $\pi_i^{c_{0,i} \to c_{j_1}} \geqslant 0$. Если начальная заявка отсутствует, то время тратиться на начальную настройку процессора: $c_{0,i} = \varnothing$ и $\pi_i^{\varnothing \to c_{j_1}} \geqslant 0$.

Требуется так распределить заявки по процессорам, чтобы время, затраченное на обработку всего множества заявок, было минимально:

$$T_i(Q_i) = \tau_i + \sum_{j \in Q_i} t_{ij} + \pi_i^{c_{0,i} \to c_{j_1}} + \sum_{l=1}^{m_i - 1} \pi_i^{c_{j_l} \to c_{j_{l+1}}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\max_i T_i(Q_i) \to \min .$$

Здесь $Q_i = \{j_1, \ldots, j_{m_i}\}$ — множество индексов заявок, помещённых в очередь i-го процессора.

Предлагаемые эвристические алгоритмы построения решения состоят из двух частей: построение начального субоптимального расписания и его дальнейшее улучшение — «балансировка» распределения нагрузки на процессоры.

Начальное расписание зависит от процессоров (идентичные или неидентичные) и от количества классов заявок. Если процессоры идентичны, то первыми распределяются заявки с максимальной длительностью обработки, в противном случае — с минимальной. Если имеется нескольких классов заявок, то во время оценки вклада распределяемой заявки в общую продолжительность обработки решается подзадача определения оптимального порядка заявок в очереди.

На этапе балансировки нагрузки выбирается i^*-й процессор с максимальной длительностью обработки и рассматриваются возможность переноса j-й заявки $j \in Q_{i^*}$ в очередь i-го процессора ($Q_{i^*,\text{нов}} = Q_{i^*} \setminus \{j\}$ и $Q_{i,\text{нов}} = Q_i \cup \{j\}$) или обмена j-й заявки, $j \in Q_{i^*}$, на j'-ю, $j' \in Q_i$, $t \neq i^*$ ($Q_{i^*,\text{нов}} = (Q_{i^*} \cup \{j'\}) \setminus \{j\}$ и $Q_{i,\text{нов}} = (Q_i \cup \{j\}) \setminus \{j'\}$) так, чтобы

$$\max_i T_i(Q_i) - \max_i T_i(Q_{i,\text{нов}}) \to \max$$

или

$$T_{i^*}(Q_{i^*,\text{нов}}) < T_{i^*}(Q_{i^*}), \quad T_i(Q_{i,\text{нов}}) < T_{i^*}(Q_{i^*}),$$
$$\left|T_{i^*}(Q_{i^*,\text{нов}}) - T_i(Q_{i,\text{нов}})\right| \to \min .$$

Если $\forall j \in Q_{i^*}, j' \in Q_i, i \neq i^* \colon T(j, j') \leqslant 0$, то локально-оптимальное решение найдено.

На втором этапе алгоритма возможен также обмен $n_{i^*} \geqslant 1$ заявок $\{j_1, \ldots, j_{n_{i^*}}\} \subset Q_{i^*}$ на $n_i \geqslant 1$ заявок $\{j'_1, \ldots, j'_{n_i}\} \subset Q_i$, $i \neq i^*$, но время решения задачи при этом *существенно* увеличивается даже при относительно небольших n_{i^*} и n_i.

Предлагаемые алгоритмы можно использовать для изменения существующего расписания при добавлении новой заявки.

Для иллюстрации работы предлагаемых алгоритмов приводятся результаты компьютерных экспериментов (C#, .Net 4.6.1, Visual Studio 2015, Windows 10). Тексты программ и исполняемые файлы расположены по адресу `http://vsh1791.ru/program.html`.

Литература

1. Аничкин А. С. Современные модели и методы теории расписаний / А. С. Аничкин, В. А. Семёнов // Труды ИСП РАН. — 2014. — Т. 26, вып. 3. — С. 5–40.

2. Теория расписаний и вычислительные машины / Дж. Л. Бруно, Р. Л. Грэхем, В. Г. Коглер и др. — М. : Наука, 1984. — 335 с.

3. Конвей Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. — М. : Наука, 1975. — 360 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРИЛИНЕЙНОЙ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УСКОРЕННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ОТВОДЯЩЕГО РОЛЬГАНГА СТАНА ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ

А.М. Шмырин, А.Г. Ярцев (Липецк)
amsh@lipetsk.ru, yartsevlekha@mail.ru

Рассмотрим реализацию методики построения трилинейной окрестностной модели на примере сложного распределенного объекта — технологического процесса ускоренного охлаждения горячекатаной полосы на широкополосном стане горячей прокатки. В данной работе рассматривается трилинейная окрестностная модель [1], которая включает три узла:

$w_x[1,1]\cdot x[1]+w_x[1,2]\cdot x[2]+\cdots+w_{x\nu y}[1,2,1,2]\cdot x[2]\cdot \nu[1]\cdot y[2]=0;$

$\ldots$

$w_x[3,2]\cdot x[2]+w_x[3,3]\cdot x[3]+\cdots+w_{x\nu y}[3,3,3,3]\cdot x[3]\cdot \nu[3]\cdot y[3]=0.$

На охлаждение полосы оказывают влияние многие факторы: химический состав, геометрические параметры, температура конца прокатки, температура окружающей среды, расход и температура охлаждающей воды на отводящем рольганге и т. д. Для модели были выделены существенные компоненты состояния, управления и информации: температура конца прокатки (T_{final}), температура смотки (T_{coil}), скорость полосы на рольганге (v_{roll}). В результате идентификации [2] коэффициенты модели принимают значения: $w_x[1,1]=-0,051$, $w_x[1,2]=0,04$, $\ldots$, $w_{x\nu y}[1,2,1,1]=0,028$, $w_{x\nu y}[1,2,1,2]=-0,052$, $\ldots$ $w_x[3,2]=-0,077$, $w_x[3,3]=-0,021$, $\ldots$, $w_{x\nu y}[3,3,3,2]=-0,04$, $w_{x\nu y}[3,3,3,3]=0,019$. Выражая окрестностные переменные x, v и y через параметрическую переменную U (см. [3]) и складывая уравнения системы, получаем общее параметрическое уравнение окрестностной модели:

$Z=-(U^3+10,802041\cdot 10^3\cdot U^2+9,947\cdot 10^6\cdot U+2,404\cdot 10^9).$

Эта функция имеет одну точку максимума $U=-494,35$ и одну точку минимума $U=-6707,01$. При обратном переходе от параметрической переменной к окрестностным, минимуму $U=-6707,01$ соответствуют значения x, v и y выходящие за пределы допустимых значений. Это означает, что при работе в положении стабильного равновесия (минимум), на выходе получим металл неудовлетворительного качества. Таким образом, для устойчивой работы системы рекомендуем значения параметров, соответствующие точке максимума $U = -494,35$ (нестабильное равновесие). Значения окрестностных переменных состояния, управления и информации, соответствующие максимуму общего параметрического уравнения, равны: $T_{final} = 760,4°C$, $T_{coil} = 672,5°C$, $v_{roll} = 5,4$ м/с. При работе системы со значениями параметров, не соответствующим точкам экстремумов, система находится в области, в которой невозможно с определенностью говорить о её устойчивости. В процессе функционирования могут изменяться значения коэффициентов общего параметрического уравнения, что может повлечь возможность слияния и взаимного уничтожения максимума и минимума и это, в соответствии с [4], говорит о потере положения равновесия и возможности перехода системы в новое состояние.

Литература

1. Shmyrin A. M. Research trilinear neighborhood model of clinker kiln // Modern informatization problems in simulation and social technologies / Shmyrin A. M., Sedykh I. M., Shcherbakov A. P., Yartsev A. G. // Proceedings of the XX-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, January 2015): Science Book Publishing House, 2015, p. 202-206.

2. Блюмин С. Л. Билинейные окрестностные системы / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина. — Липецк : ЛГТУ, 2006. — 130 с.

3. Шмырин А. М. Два подхода к исследованию общего параметрического уравнения окрестностной модели печи обжига клинкера / А. М. Шмырин, И. А. Седых, А. П. Щербаков, Ярцев // Системы управления и информационные технологии. — 2015. — № 1(59). — С. 185–189.

4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. — М. : Мир, 1984. — 350 с.

ИЗОСПИНОВАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ (2+1)-МЕРНОЙ O(3) НЕЛИНЕЙНОЙ σ-МОДЕЛИ

Ф.Ш. Шокиров (Душанбе)
shokirov@rambler.ru

Методами численного моделирования проведено исследование изоспиновой динамики процессов взаимодействия радиально-симметричных топологических солитонов (вихрей) белавин-поляковского типа [1] (2+1)-мерной O(3) нелинейной σ-модели (НСМ). Определены условия, приводящие к различным моделям взаимодействия топологических солитонов (ТС). Напомним, что лагранжиан и плотность гамильтониана исследуемой модели в изоспиновой параметризации имеют следующий вид [2, 3]:

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + (s_3^2 - 1)], \tag{1}$$

$$H = \frac{1}{2}[(\partial_0 s_a)^2 + (\partial_k s_a)^2 + (1 - s_3^2)],$$
$$a = 1,2,3; k = 1,2; \mu = 0,1,2; s_a s_a = 1.$$

Проведено численное исследование изоспиновой динамики взаимодействующих ТС модели (1) с ненулевым индексом Хопфа (топологический заряд) следующего вида:

$$\theta = 2arctg(r/R)^{Q_t}, \varphi = Q_t\chi - \omega\tau, \tag{2}$$
$$r^2 = x^2 + y^2, R = 1, cos\chi = x/r, sin\chi = y/r,$$

где Q_t – топологический заряд (индекс Хопфа). Исследованы процессы лобовых столкновений ТС вида (2) модели (1), обладающих $Q_t = 3$, различной изоспиновой динамикой и движущихся во встречном направлении со скоростями $v(t_0) \in (0.0, 0.2)$.

Отметим, что наши численные модели созданы на основе трехслойных явных разностных схем второго прядка точности $O(h^2 + \tau^2)$ [4], с применением стереографической проекции и учетом теоретико-групповых особенностей конструкции класса O(N) НСМ теории поля [2,3]. Движение исследуемых ТС вида (2) было задано преобразованием Лоренца на основе свойства лоренц-инвариантности двумерной O(3) НСМ (1).

Динамика взаимодействия ТС вида (2) модели (1) были исследованы нами раннее (см., например, [2,3]), где были определены ряд свойств, в том числе:

— столкновение и отражение ТС (проявление частице-подобных свойств);

— распад ТС на локализованные возмущения при столкновении (сохраняющие сумму Q_t);

— поэтапная аннигиляция ТС по единицам Q_t при столкновении;

— дальнодействие ТС (взаимодействие без столкновения);

— взаимное притяжение и отталкивание ТС и т.д.

Результаты численных исследований настоящей работы показали, что вышеуказанные свойства процессов столкновений зависят от динамики изоспиновой структуры фронтальной части взаимодействующих радиально-симметричных ТС вида (2) модели (1):

(a) при взаимодействии изоспинов ТС проекции S_z^p, которых на комплексную плоскость $z(x, y)$ не коллинеарные – происходит столкновение ТС с последующим отражением или распадом на локализованные возмущения (в зависимости от скорости движения ТС);

(b) при взаимодействии изоспинов ТС проекции $S_z^p(\uparrow\uparrow)$, которых на комплексную плоскость $z(x, y)$ коллинеарные и сонаправлены – происходит поэтапное излучение энергии ТС (в виде линейных волн возмущений распространяющиеся со скоростью света c);

(c) при взаимодействии изоспинов ТС проекции $S_z^p(\uparrow\downarrow)$, которых на комплексную плоскость $z(x, y)$ коллинеарные и противоположно направлены – проявляется свойство дальнодействия ТС.

Литература

1. Белавин А. А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А. А. Белавин, А. М. Поляков // ЖЭТФ. — 1975. — № 22(10). — С. 503–506.

2. Муминов Х. Х. Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов O(3) векторной нелинейной сигма-модели / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // ДАН РТ. — 2011. — Т. 54, № 2. — С. 110–114.

3. Муминов Х. Х. Динамика взаимодействия двумерных топологических солитонов в O(3) нелинейной векторной сигма-модели / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // ДАН РТ. — 2010. — Т. 53, № 9. — С. 679–684.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.

HARMONIC AND SPECTRAL ANALYSIS OF BOUNDED SEMIGROUPS OF OPERATORS[1]

A.G. Baskakov (Voronezh)
anatbaskakov@yandex.ru

Let $\mathcal{X}$ be complex Banach space and $\operatorname{End}\mathcal{X}$ be a Banach algebra of bounded linear operators acting on $\mathcal{X}$.

By $C_b = C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the Banach space of bounded continuous functions on $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. By $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ of uniform continuous functions and let $C_0 = C_0(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ be subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ the vanishing at infinity functions.

Let $(S(\tau)x)(t) = x(t+\tau)$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$, be a semigroup (group) of shift operators.

Definition 1. The number $\omega \in \mathbb{J}$ is called ε -period at infinity of $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ if there exist a compact set $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ such that $\sup\limits_{t \in \mathbb{J} \setminus K_\varepsilon} \left\| x(t+\omega) - x(t) \right\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$.

By $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ denote a set of ε -periods at infinity of function x.

Definition 2. A function $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}$ is called *almost periodic at the infinity* (in Bohr sense) if for each $\varepsilon > 0$ there exists $l = l(\varepsilon) > 0$ such that each interval of length l includes at least one point of $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Theorem 1. *Let $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ be bounded strongly continuous semigroup of operators with generator A. Spectrum of A has property $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \ldots, i\lambda_m\}$. Then semigroup T can be represented as $T(t) = \sum_{k=1}^m B_k(t) \mathrm{e}^{i\lambda_k t} + B_0(t), \quad t \geqslant 0$, where functions $B_k : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ are continuous in uniform operator topology and the functions $T(t)x : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, are almost periodic at infinity. Functions B_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, have the following properties:*

1) Operators $B_k(t), \quad t_0 \leqslant t \quad 0 \leqslant k \leqslant m$ belong minimal closed subalgebra from $\operatorname{End}\mathcal{X}$ generated by operators $T(t), \quad t \geqslant t_0$.

2) $\lim\limits_{t \to \infty} \|B_0(t)\| = 0$.

3) Functions $B_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$ are slowly varying at infinity and can be extended on $\mathbb{C}$ to entire functions of exponential type with $\lim\limits_{t \to \infty} \|B_k'(t)\| = 0$.

---

[1] Supported by Ministry of Science and Education of Russia within the framework of a government request in the sphere of scientific activity for 2014-2016 (project no. 1110).

4) $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)B_k(t) - \mathrm{e}^{i\lambda_k t}B_k(t)\| = 0.$

5) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_k(t)B_p(t)\| = 0, \;\; k \neq p.$

ON RECOVERING STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH FROZEN ARGUMENT AND BOUNDARY CONDITIONS OF DIFFERENT TYPES[1]

S.A. Buterin, S.V. Vasiliev (Saratov)
buterinsa@info.sgu.ru, altrair@mail.ru

Let $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ be the spectrum of the boundary value problem $L = L(q(x))$ of the form

$$\ell y := -y'' + q(x)y\Big(\frac{\pi}{k}\Big) = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

where λ is the spectral parameter, $q(x)$ is a complex-valued function and $q(x) \in L_2(0,\pi)$. We also assume that $k \in \mathbb{N}$. Note that the case $k \notin \mathbb{N}$ requires a separate investigation. We study the following inverse problem.

Inverse Problem 1. Given $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$, find $q(x)$.

The greatest success in the inverse problem theory has been achieved for classical Strurm-Liouville operators and afterwards for higher order differential operators, differential pencils and differential systems (see, e.g., a survey in [1]). Concerning inverse problems for differential operators with deviating argument and other classes of nonlocal operators, the classical methods for them usually do not work. Some aspects of inverse spectral theory for differential operators with frozen argument were investigated in [2]–[4]. In [4] Inverse Problem 1 was studied in the case of the Dirichlet conditions in both the ends of the interval. In particular, it was proved that the inverse problem has a unique solution only under an additional assumption about $q(x)$ such as, for example, the assumption of symmetry with respect to the point π/k.

In the present work we prove that in the case of boundary conditions (2) for uniqueness of solution of Inverse Problem 1 no additional assumption is required. However, if $k \notin \mathbb{N}$, then the uniqueness theorem,

[1] This research was supported in part by RFBR (Grants 15-01-04864, 16-01-00015) and by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (Grant 1.1436.2014K).

generally speaking, still does not hold. We also obtain a constructive procedure for solving Inverse Problem 1 along with necessary and sufficient condition for its solvability.

Let $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ be solutions of equation (1) under the initial conditions

$$C\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = S'\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = 1, \quad C'\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = S\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = 0.$$

Eigenvalues of L coincide with the zeros of its characteristic function

$$\Delta(\lambda) := S'(\pi,\lambda)C(0,\lambda) - S(0,\lambda)C'(\pi,\lambda).$$

Theorem 1. *The characteristic function has the form*

$$\Delta(\lambda) = \cos\rho\pi + \int_0^\pi W(t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \quad W(t) \in L_2(0,\pi). \tag{3}$$

Moreover, $W(t) = q(t)$, *if* $k = 1$, *and*

$$W(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k}+t\Big) - q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k}-t\Big), & t \in \Big(0,\dfrac{\pi}{k}\Big), \\ q\Big(\pi\dfrac{k+1}{k}-t\Big) - q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k}-t\Big), & t \in \Big(\dfrac{\pi}{k},\pi\dfrac{k-1}{k}\Big), \\ q\Big(\pi\dfrac{k+1}{k}-t\Big) + q\Big(t-\pi\dfrac{k-1}{k}\Big), & t \in \Big(\pi\dfrac{k-1}{k},\pi\Big), \end{cases} \tag{4}$$

if $k \geqslant 2$.

Relation (4) is called *main equation* of Inverse Problem 1. The following theorem gives solvability of the main equation.

Theorem 2. *Let a natural number* $k \geqslant 2$ *be fixed. Then for any function* $W(t) \in L_2(0,\pi)$ *the main equation (4) has a unique solution* $q(t) \in L_2(0,\pi)$.

Theorem 3. *The boundary value problem* L *has a countable set of eigenvalues* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ *of the form*

$$\lambda_n = \Big(n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{5}$$

The following theorem gives uniqueness of the solution of Inverse Problem 1.

Theorem 4. *The specification of the spectrum* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ *uniquely determines the potential* $q(x)$.

Remark 1. If $k \notin \mathbb{N}$, then Theorem 4 may fail. For example, if $k = 5/2$ and

$$q_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Big(0, \dfrac{2\pi}{5}\Big) \cup \Big(\dfrac{4\pi}{5}, \pi\Big), \\ -1, & x \in \Big(\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}\Big), \end{cases}$$

then the problem $L(q_1(x))$ has the same spectrum as the problem $L(0)$ does.

The following theorem gives necessary and sufficient conditions for the solvability of Inverse Problem 1.

Theorem 5. *For an arbitrary sequence of complex numbers* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ *to be the spectrum for a certain boundary value problem* L *of the form (1), (2) it is necessary and sufficient to satisfy (5).*

The proof is constructive and gives an algorithm for solving Inverse Problem 1.

Литература

1. Yurko V.A. Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems. Moscow, Fizmatlit, 2007.

2. Albeverio S., Hryniv R.O. and Nizhnik L.P. Inverse spectral problems for non-local Sturm-Liouville operators, Inverse Problems 23 (2007), no. 2, P. 523–535.

3. Buterin S.A. and Vasiliev S.V. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with frozen argument, in Aktual. Probl. Prikl. Mat., Inf. i Mekh. Voronezh, Velborn, 2015, P. 4–6.

4. Buterin S.A. and Vasiliev S.V. On recovering Sturm-Liouville operators with frozen argument, in Sovr. Probl. Teor. Funct. i ikh Pril. Saratov, Nauchnaya Kniga, 2016, P. 7–9.

Именной указатель

Я

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
Понтрягинские чтения — XXVII
(3–9 мая 2016 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 14.04.2016. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 16,4. Уч.–изд. л. 14. Тираж 250 экз. Заказ 329.

Издательский дом ВГУ
394000 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394000 Воронеж, ул. Пушкинская, 3