V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, On rationally complete algebraic systems of finite strain tensors of complex continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2017, Volume 17, Issue 1, 71–84

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84

УДК 539.374

РАЦИОНАЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ТЕНЗОРОВ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СЛОЖНЫХ КОНТИНУУМОВ

В. А. Ковалев[1], Ю. Н. Радаев[2]

[1]Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента и финансового права, Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, Москва, Сретенка, 28, kovalev.kam@gmail.com

[2]Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Статья посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных тензоров деформации и экстрадеформации сложных (в частности, микрополярных) континуумов. Континуум предполагается сложным, т. е. изменения его пространственных конфигураций сопряжены с возникновением и развитием экстрадеформаций. Математическая размерность континуума считается произвольной. Предполагается, что он может быть вложен во внешнее плоское пространство, возможно, большего числа измерений. Указанная проблема решается в рамках и методами физической теории поля в сочетании с теорией алгебраических инвариантов группы собственно ортогональных преобразований конечных систем контравариантных векторов в плоском пространстве с заданным числом измерений. Тензоры деформации конструируются как неприводимые алгебраические инварианты, нечувствительные к поворотам координатного репера внешнего пространства, некоторой системы контравариантных векторов, с помощью которых задается плотность интеграла действия. С алгебраической точки зрения решение ограничивается системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Исследуется полнота полученных систем инвариантов и получены сизигии, связывающие инварианты с помощью целых рациональных соотношений. Рассматривается проблема построения объективных тензоров деформации микрополярного континуума из элементов полярных разложений градиентов деформации и экстрадеформации.

Ключевые слова: континуум, сложный континуум, микрополярный континуум, поле, действие, лагранжиан, деформация, d-переменная, алгебраический инвариант рациональный инвариант, сизигия.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Представляемая работа посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных мер деформации и экстрадеформации сложного континуума, допускающего вложение во внешнее плоское пространство (возможно, более высокой размерности) со стандартной метрикой. В противовес стандартным моделям сплошных деформируемых сред [1, 2] сложные континуумы (т. е. континуумы сложной аффинно-метрической структуры и дополнительными микростепенями свободы, изменения пространственных конфигураций которых сопряжены с возникновением и развитием экстрадеформаций) находят все более широкое применение в различных прикладных вопросах механики сплошных сред, особенно при исследовании механического поведения твердых тел с поврежденностью и дефектами структуры, гранулированных и пористых сред, биоматериалов, метаматериалов. Механика сложного континуума основана на представлении о том, что учета изменений только в геометрии положений составляющих его элементов недостаточно для математического моделирования его деформированных состояний. Поэтому развитие механики сплошных сред происходит, с одной стороны, за счет усложнения аффинно-метрических свойств континуума, а с другой — наделения составляющих континуум микроэлементов дополнительными степенями свободы. Континуум Коссера и микроморфная среда являются яркими примерами сложных континуумов с дополнительными (экстра) внутренними степенями свободы — микровращениями и аффинными деформациями мезообъема. Континуум Коссера (или микрополярная среда) — исторически первый пример нового подхода к моделированию механического поведения твердых деформируемых тел [3], более ста лет назад определивший новый вектор развития механики континуума.

Континуум в современных исследованиях обычно моделируется дифференцируемым многообразием (или дифференцируемым пространством) [4]. Для того чтобы максимально сохранить преемственность в математическом моделировании его деформации, в работе предполагается, что он обладает определенной аффинно-метрической структурой, но и при этом допускает вложение во внешнее плоское пространство, число измерений которого, возможно, превосходит математическую размерность континуума. Такое положение дел имеет место, например, в том случае, когда континуум является римановым многообразием [5]. В таких условиях естественно не удается полностью сохранить классическую схему построения объективных мер деформации. Однако оказывается возможным, в частности, дальнейшее обобщение модели микрополярного континуума вследствие возрастания числа линейно-независимых директоров, ассоциированных с микроэлементом. Соответствующий круг вопросов обсуждается во втором параграфе статьи.

В третьем параграфе определяются действие и плотность действия для рассматриваемой модели континуума как необходимые предпосылки для формулировки проблемы построения полной системы тензоров деформации и экстрадеформации в рамках физической теории поля [6,7], исходя из принципа ротационной инвариантности плотности действия при поворотах координатного репера внешнего пространства.

Четвертый параграф включает решение поставленной проблемы с помощью теории алгебраических инвариантов конечных систем контравариантных векторов в плоском пространстве заданной размерности и стандартной метрикой [8]. Тензоры деформации при этом конструируются как инварианты системы контравариантных векторов внешнего пространства, с помощью которых задается плотность интеграла действия, относительно группы собственно ортогональных преобразований внешнего пространства. Решение ограничивается характерными для механики континуума системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Устанавливается неприводимость инвариантов, образующих систему. Каждая система объективных тензоров деформации должна удовлетворять свойству полноты: полная система не допускает присоединения к ней новых неприводимых тензоров деформации и тем самым гарантирует отсутствие не имеющих физического смысла вкладов в интеграл действия. С помощью алгебраических критериев доказывается полнота полученной системы тензоров деформации и экстрадеформации. Найдены сизигии, связывающие инварианты с помощью целых рациональных соотношений, позволяющие исключить ряд мер деформации, правда, за пределами области целых рациональных соотношений между ними.

Заключительный, пятый, параграф работы посвящен проблемам построения объективных тензоров деформации микрополярного континуума из элементов полярных разложений градиентов деформации и экстрадеформации. Там же рассматривается объективная геометрия конечной деформации микрополярного континуума с нежестким микроструктурным полиэдром.

2. СЛОЖНЫЙ КОНТИНУУМ, ПОГРУЖАЕМЫЙ ВО ВНЕШНЕЕ ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Континуум как математический объект чаще всего мыслится как дифференцируемое многообразие некоторой данной размерности M. Для большинства прикладных вопросов механики континуума достаточно полагать, что $M = 3$. Окрестность каждой точки многообразия допускает изображение на некоторой карте (т. е. с помощью области аффинного пространства размерности M). В этом смысле многообразие допускает локальные сравнения с областями привычного нам аффинного пространства. Число карт не более чем счетно. Концепция многообразия (а поэтому и континуума) не требует никаких представлений об окружающем (внешнем) пространстве, в которое континуум может быть вложен. В дальнейшем изложении мы не различаем сам континуум и его математическую модель — некоторое дифференцируемое многообразие размерности M. Таким образом, индивидуальные точки континуума суть точки указанного дифференцируемого многообразия; они представляются специальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, которая, в свою очередь, устанавливается для многообразий и идентифицируется с помощью координат ξ^α.

Очевидно, что соответствие

$$\boldsymbol{\xi} \to \xi^\alpha \tag{1}$$

изображает точку $\boldsymbol{\xi}$ на карте координатами ξ^α. Координаты ξ^α в механике континуума называются обычно материальными координатами.

Дифференцируемое многообразие в качестве математической модели континуума характеризуется излишней общностью и по этой причине малопригодно в механике континуума. Эта проблема преодолевается заданием на многообразии дополнительных аффинно-метрических структур. Риманова структура на многообразии [5] является хорошим в этом плане примером. Риманово многообразие (риманово пространство) в настоящее время выступает как одна из важнейших моделей континуума.

Рациональная механика континуума широко использует представление об окружающем тело пространстве. Можно также сказать, что тела мыслятся «погруженными» в пространство. Окружающее (внешнее) пространство как-бы «вмещает» тела и служит фоном, на котором разворачиваются процессы взаимодействия тел и полей. В рациональной механике внешнее пространство молчаливо предполагается трехмерным с естественной евклидовой метрикой. Долгое время подобные представления не вызывали никаких возражений. Ситуация начала меняться, когда для моделирования континуумов с дефектами и повреждениями стали применяться аффинно-метрические структуры различного уровня сложности. При этом никогда не обсуждался вопрос о возможности погружения континуума сложной аффинно-метрической структуры в трехмерное пространство. Хорошо известно, что такое погружение не всегда возможно. Так, например, риманово многообразие размерности M в общем случае погружается в плоское пространство[1] размерности

$$N = \frac{1}{2}M(M+1).$$

Для изображения состояний и процессов в рациональной механике континуума обычно используется трехмерное плоское пространство. Таким образом, одним из новых подходов к математическому описанию деформации континуума будет отказ от концепции внешнего пространства как трехмерного плоского пространства, в которое погружен континуум.

В том случае, когда континуум допускает вложение в некоторое внешнее плоское пространство размерности N со стандартной метрикой[2], оказывается возможным вести речь о положениях $\mathbf{X}$ в этом пространстве и измерениях длин и углов. Точка континуума $\boldsymbol{\xi}$ займет некоторое положение (место) $\mathbf{X}$ во внешнем плоском пространстве, определяемое упомянутым выше вложением. Положение $\mathbf{X}$ во внешнем пространстве в механике континуума называется референциальным. Ясно, что референциальное положение $\mathbf{X}$ взаимно-однозначно связано с материальной переменной $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{\xi} \rightleftarrows \mathbf{X}. \tag{2}$$

Еще одно важное допущение состоит в том, что в процессе деформации континуум всегда должен допускать вложение в одно и то же внешнее пространство.

На основании (1) и (2) можно параметризовать референциальное положение континуума во внешнем пространстве координатами ξ^α:

$$\mathbf{X} \to \xi^\alpha, \tag{3}$$

следовательно, референциальную переменную $\mathbf{X}$ также можно рассматривать как материальную.

В процессе деформации точки континуума изменяют свои положения во внешнем пространстве. Пространственное положение индивидуальной точки континуума $\boldsymbol{\xi}$ в результате деформации обозначим через $\mathbf{x}$. Поэтому в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением индивидуальных точек континуума на места внешнего пространства:

$$\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}. \tag{4}$$

В силу (2) и (4) можно вести речь о преобразовании позиционных переменных внешнего пространства:

$$\mathbf{X} \to \mathbf{x}. \tag{5}$$

---

[1]Следуя [5], риманово пространство будем называть плоским, если в нем существует координатная система, в которой компоненты метрического тензора пространства постоянны.

[2]Стандартная метрика плоского пространства в системе координат y^j определяется квадратичной дифференциальной формой:

$$ds^2 = \sum_j c_j dy^j dy^j \quad (j = 1, \ldots, N),$$

где постоянные $c_j = \pm 1$ в зависимости от типа пространства. Для координатной системы y^j используется термин *декартова система координат*. Таким образом, для внешнего пространства декартова система координат является предпочтительной.

Это преобразование в рациональной механике континуума называется деформацией.

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ и позиционные координаты X^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, M$), x^j ($j = 1, 2, \ldots, N$) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологиней механики континуума [1, 2]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и пространственная (эйлерова) метрика g_{ij}. Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и в отличие от метрик ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и g_{ij} определяется деформацией (5).

Как видно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием.

В теориях сложных континуумов «конечная» деформация, представляемая геометрическим преобразованием позиционных переменных $\mathbf{X} \to \mathbf{x}$, сопровождается экстрадеформацией, описание которых реализуется с помощью дополнительных специальных переменных (d-переменных). Индексы, имеющие начертания $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$, в дальнейшем изложении применяются для индивидуализации d-переменных. Эти переменные, вообще говоря, являются тензорами и преобразуются по тензорному закону при преобразованиях координат внешнего пространства x^j ($j = 1, 2, \ldots, N$). В частности, в микрополярных континуумах [3] экстрадеформация проявляется в форме нарушений взаимной ориентации и изменений метрических характеристик системы полярных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{d}^k$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, N$), ассоциированных с каждым микроэлементом континуума. В этом случае d-переменные — контравариантные векторы внешнего пространства. Вследствие гипотезы о погружаемости континуума во внешнее плоское пространство появляется дополнительная возможность, например, расширить систему d-векторов, пользуясь тем обстоятельством, что в пространстве большей размерности существует больше линейно независимых векторов. В результате приходим к понятию обобщенного микрополярного континуума. В дальнейшем мы ограничимся (как в плане обозначений d-переменных, так и в плане их интерпретации) векторными переменными.

«Полная» деформация сложного континуума состоит из преобразования позиционных переменных (5) и экстрадеформации, т. е. трансформации d-векторов, начиная от их референциального положения:

$$ {}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} \to \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}. \tag{6}$$

Деформация и экстрадеформация, представленные в координатах X^α, x^j, записываются в следующем виде:

$$ x^j = x^j(X^\alpha), \tag{7}$$

$$ \underset{\mathfrak{a}}{d}^j = \underset{\mathfrak{a}}{d}^j(X^\alpha). \tag{8}$$

Градиент деформации, или «дисторсия» (см., например, [9, 10])

$$ \partial_\alpha x^j \quad (j = 1, 2, \ldots, N, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M), \tag{9}$$

где ∂_α обозначает частное дифференцирование по материальной переменной, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Дисторсия $\partial_\alpha x^j$ трансформирует отсчетный линейный элемент dX^α в актуальное положение во внешнем пространстве dx^j согласно

$$dx^j = (dX^\alpha)\partial_\alpha x^j. \tag{10}$$

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$ ($j = 1, 2, \dots, N$; $\alpha = 1, 2, \dots, M$) в случае $M = N$, как известно [1, 9], разлагается в композицию чистой деформации (растяжений относительно трех взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота во внешнем прстранстве отсчетного полиэдра главных осей деформации до его актуального положения.

Если $M = N$, то можно вести речь о якобиане деформации:

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \tag{11}$$

Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ вычисляется с помощью градиента деформации и внешней эйлеровой g_{ij} метрики с помощью следующей формулы:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j). \tag{12}$$

Метрики $`g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ ротационно-инвариантны при произвольных поворотах координатной системы внешнего пространства.

В рациональной механике важную роль отводится детерминантам, составленным из метрических коэффициентов (отсчетных, конвективных и пространственных); для них мы применяем следующие обозначения:

$$`g = \det(`g_{\alpha\beta}), \tag{13}$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \tag{14}$$

$$\Gamma = \det(g_{ij}). \tag{15}$$

Если $M = N$, то детерминанты (14), (15) и якобиан (11) связаны между собой посредством уравнения

$$\sqrt{\Gamma} J = \sqrt{g}. \tag{16}$$

Это так называемое уравнение неразрывности в переменных Лагранжа [1]. В дальнейшем будет видно, что с алгебраической точки зрения уравнение (16) выступает как сизигия, связывающая целым рациональным соотношением рациональные инварианты деформации, нечувствительные к поворотам координатного репера внешнего пространства.

3. ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СЛОЖНОГО КОНТИНУУМА. РОТАЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПЛОТНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

При исследовании сложных континуумов одной из первых встает задача о нахождении тензоров деформации и экстрадеформации, которые имели бы объективную природу. Объективность здесь понимается как инвариантность тензорных мер деформации и экстрадеформации относительно поворотов координатных систем во внешнем пространстве. Решение указанной задачи может быть выполнено с позиций теории поля (см., например, [6, 7]), если допустить, что деформация континуума подчиняется принципу наименьшего действия.

Действие в теориях поля представляет собой интегральный функционал вида

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^M X, \tag{17}$$

где:

$\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);

φ^k — физические полевые переменные;

X^β $(\beta = 1, 2, \ldots, M)$ — позиционные (пространственно-временные) координаты;

$d^M X$ — «естественный» элемент объема (произведение дифференциалов позиционных координат).

Отдавая приоритет теоретико-полевому подходу, будем рассматривать координаты внешнего пространства x^j как физические поля. То же самое относится и к системе d-переменных. Последние рассматриваются как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент.

Плотность действия (лагранжиан) $\mathscr{L}$ для сложного (в частности, микрополярного) континуума примем в следующем виде:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j). \tag{18}$$

Плотность действия $\mathscr{L}$ является объективной величиной и не должна зависеть от поворотов системы координат внешнего пространства. Поэтому $\mathscr{L}$ на самом деле функционально зависит лишь от таких алгебраических комбинаций контравариантных векторов внешнего пространства

$$\partial_\alpha x^i, \quad \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \quad \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \tag{19}$$

которые являются инвариантными относительно собственно ортогональных преобразований внешней координатной системы.

Инвариантность плотности действия относительно поворотов координатного репера является проявлением изотропии внешнего пространства, т. е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Проблеме определения целых рациональных комбинаций контравариантных векторов внешнего пространства, которые были бы не чувствительны к поворотам внешней координатной системы, будет посвящен следующий параграф работы. Там же обсуждается полнота системы рациональных инвариантов.

4. ТЕНЗОРЫ ДЕФОРМАЦИИ КАК РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Решение сформулированной выше проблемы получается чисто алгебраическими методами, изложенными, например, в [8].

К целым рациональным инвариантам системы контравариантных векторов внешнего пространства (19), которые были бы не чувствительны к поворотам внешней координатной системы, следует отнести попарные внутренние (в метрике внешнего пространства g_{ij}) произведения векторов

$$\begin{gathered}
g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \qquad \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{S}} = g_{ij} \underset{\mathfrak{a}}{d}^i \underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\
\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha x^i) \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \qquad \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i) \underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\
\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j), \qquad \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{b}}{d}^j),
\end{gathered} \tag{20}$$

собственно и образующих *неприводимые* тензоры деформации, а также $N \times N$-определители, в столбцах которых расположены компоненты всевозможных систем из N векторов (19).

Неприводимость каждого из указанных инвариантов очевидна в силу их построения, правда, при этом приходится ограничиваться лишь целыми рациональными инвариантами системы векторов (19). Полноту системы (20) вместе с упомянутыми определителями, т. е. возможность представления любого целого рационального инварианта как рациональной функции от (20) и указанных выше определителей, можно доказать, опираясь на известные результаты теории рациональных алгебраических инвариантов (см. [8]).

Тензоры деформации в правой колонке (20) никак не связаны с градиентом деформации и в механике континуума вообще не рассматриваются.

Заметим также, что *квадраты* упомянутых определителей (с учетом множителя $\sqrt{\Gamma}$) в силу формул Грама – Шмидта[3] являются целыми рациональными функциями контравариантных компонент векторов внешнего пространства (19), поскольку рационально выразимы через внутренние произведения, данные в (20). Поэтому сами определители рационально не выразимы в терминах контравариантных компонент векторов внешнего пространства (19).

В частности, если $M = N$, целое рациональное соотношение, связывающее якобиан деформации $J = \det(\partial_\alpha x^j)$ и конвективную метрику $g_{\alpha\beta}$

$$\det(g_{ij})J^2 - \det(g_{\alpha\beta}) = 0, \tag{21}$$

выступает в качестве сизигии. Подобные сизигии могут быть выписаны для всех независимых детерминантов, определяемых системами из N векторов (19).

Если экстрапеременные не требуются для математического описания континуума, то сизигия (21) будет единственной. Следовательно, полная система рациональных инвариантов для системы из N контравариантных векторов внешнего пространства $\partial_\alpha x^i$ будет состоять из компонент конвективной метрики и якобиана деформации, связанных между собой единственной сизигией (21), которая в механике континуума интерпретируется как уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ как элемент полной системы неприводимых в рациональной области инвариантов в механике континуума используется сравнительно редко; вместо нее вводится тензор второго ранга, характеризующий *изменение* метрики в результате деформации:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - {}^{\backprime}g_{\alpha\beta}). \tag{22}$$

[3]Речь идет о формулах вида

$$\det(g_{ij}) \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u^k u_k & u^k v_k & u^k w_k \\ v^k u_k & v^k v_k & v^k w_k \\ w^k u_k & w^k v_k & w^k w_k \end{vmatrix},$$

справедливых для произвольных векторов u^k, v^k, w^k в трехмерном пространстве. Определитель слева не выражается рационально через внутренние произведения векторов u^k, v^k, w^k. Алгебраическая формула для указанного определителя будет содержать квадратный радикал, что выводит рассуждения за пределы области целых рациональных функциональных зависимостей. Аналогичные формулы имеют место и в многомерном случае.

Компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}$ преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ называется тензором деформации Грина [9, 10]. Использование тензора деформации Грина в качестве функционального аргумента плотности действия признается удобным, поскольку он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума, которая наблюдается относительно референциальной конфигурации континуума во внешнем пространстве.

В случае континуума размерности $M = 3$, допускающего вложение в трехмерное внешнее пространство, полная система рациональных инвариантов включает всевозможные 3×3-определители, в столбцах которых расположены контравариантные компоненты всевозможных троек векторов системы (19). Если рассматриваемые определители содержат по меньшей мере один столбец из контравариантных компонент градиента деформации $\partial_\alpha x^i$, то их, размещая контравариантные компоненты градиента деформации $\partial_\alpha x^j$ в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$[(\partial_\alpha x^j)\, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}\, \underset{\mathfrak{b}}{d^j}], \tag{I}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\, (\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^j})\, \underset{\mathfrak{b}}{d^j}], \tag{II}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\, (\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^j})\, (\partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^j})] \qquad (\beta \neq \gamma \text{ и } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \text{ одновременно}), \tag{III}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\, (\partial_\beta x^j)\, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}] \qquad (\beta \neq \alpha), \tag{IV}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\, (\partial_\beta x^j)\, (\partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^j})] \qquad (\beta \neq \alpha), \tag{V}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\, (\partial_\beta x^j)\, (\partial_\gamma x^j)]. \tag{VI}$$

На основании формул Грама – Шмидта каждый из перечисленных выше определителей выражается через внутренние произведения векторов системы (19) с помощью квадратных радикалов. Соотношения для квадратов определителей (I)–(VI) будут выступать в роли сизигий, связывающих инварианты посредством целых рациональных уравнений.

5. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИИ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛЯРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Полные системы в случае $M = N$ могут быть построены с помощью полярных разложений градиента деформации и экстрадеформации (см., например, [11]). Полярные разложения нашли широкое применение в механике континуума, так как они позволяют с самого начала построить характеристики деформации, поддающиеся ясному геометрическому истолкованию.

Градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора второго ранга $|x|_{\alpha\beta}$ (модуля) и ортогонального тензора $\lambda^{i\beta}$ (тензора поворота):

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}. \tag{23}$$

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ выражается следующими равенствами:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \tag{24}$$

ортогональность тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ подразумевает выполнение следующих двух условий:

$$g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = {}^{\backprime}g^{\beta\gamma}, \qquad {}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \tag{25}$$

Условия (25), как нетрудно видеть, эквивалентны, поскольку одно их них следует из другого. Если совершить поворот произвольного вектора ${}^{\backprime}a_\alpha$ из отсчетного положения в актуальное $a^i = \lambda^{i\alpha}{}^{\backprime}a_\alpha$, то указанные условия гарантируют совпадение длины вектора ${}^{\backprime}a_\alpha$, вычисленной с помощью отсчетной метрики, с длиной вектора a^i, вычисленной с помощью метрики внешнего пространства, т.е. выполнение равенства

$${}^{\backprime}g^{\beta\gamma}\,{}^{\backprime}a_\beta\,{}^{\backprime}a_\gamma = g_{ij}\lambda^{i\beta}\,{}^{\backprime}a_\beta\lambda^{j\gamma}\,{}^{\backprime}a_\gamma;$$

если выполняется обратный поворот вектора a_s из актуального положения в отсчетное ${}^{\backprime}a^\alpha = \lambda^{s\alpha}a_s$, то совпадают длины векторов a_s (в метрике внешнего пространства) и ${}^{\backprime}a^\alpha$ (в отсчетной метрике):

$$g^{ij}a_ia_j = {}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}a_i\lambda^{j\gamma}a_j.$$

В частности, вычисляя длины векторов $\underset{\mathfrak{a}}{d_j}\lambda^{j\beta}$ в отсчетной метрике ${}^{\backprime}g_{\beta\gamma}$, имеем:

$${}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\underset{\mathfrak{a}}{d_i}\lambda^{i\beta}\underset{\mathfrak{a}}{d_j}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d_i}\underset{\mathfrak{a}}{d_j},$$

где величина справа есть длина d-директора с указателем $\mathfrak{a}$ в метрике внешнего пространства.

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ обеспечивает вещественность его спектра. Спектральные значения $|x|_A$ $(A = 1, 2, \ldots, M)$ вычисляются как корни характеристического уравнения:

$$\det(|x|_{\alpha\beta} - \lambda\,{}^{\backprime}g_{\alpha\beta}) = 0$$

и называются главными растяжениями.

Собственные векторы модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$, обозначаемые через ${}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^\beta$, образуют ортонормированный в отсчетной метрике ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ полиэдр

$${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}\,{}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^\beta\,{}^{\backprime}\underset{C}{k}{}^\beta = \underset{AC}{\delta},$$

определяющий отсчетные ориентации главных осей деформации.

Актуальная ориентация главных осей деформации определяется в результате поворота полиэдра ${}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^\beta$:

$$\underset{A}{k}{}^s = \lambda^{s\beta}\,{}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^\beta.$$

Векторы $\underset{A}{k}{}^s$ $(A = 1, 2, \ldots, M)$ взаимно ортогональны в метрике внешнего пространства g_{ij}.

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$, таким образом, представляет собой композицию последовательно выполняемых чистой деформации (растяжений относительно взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота отсчетного полиэдра главных осей деформации до их актуального положения.

Полярные разложения градиентов d-директоров имеют вид

$$\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i = |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta} \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{i\beta}, \tag{26}$$

где тензоры $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$ симметричны и неотрицательны, а «тензоры поворота» $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{i\beta}$ ортогональны (считаются неопределенными, если градиент вырождается).

Перейдем к построению системы инвариантов деформации и экстрадеформации, исходя из элементов, определяющих рассмотренные выше полярные разложения. Тензоры $|x|_{\alpha\beta}$ и $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$, очевидно, не чувствительны к поворотам координатного репера внешнего пространства. Следует отметить, что они не могут быть рационально выражены через компоненты градиента деформации и градиента экстрадеформации. С тем чтобы получить несводимые к ним инварианты, к ним следует добавить следующие внутренние произведения (обязательно содержащие множитель $\lambda^{i\beta}$):

$$g_{ij} \underset{\mathfrak{a}}{d}^i \lambda^{j\beta}, \qquad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}, \qquad g_{ij} \lambda^{i\beta} \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\gamma}. \tag{27}$$

Рассмотрим контравариантный отсчетный вектор $g_{ij} \underset{\mathfrak{a}}{d}^i \lambda^{j\beta}$. Очевидно, что он получается в результате обратного поворота актуального положения d-директора с указателем $\mathfrak{a}$ в некоторое отсчетное положение, вообще говоря, отличающееся от такового, определяемого вектором ${}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{\beta}$. По этой причине нам придется ввести специальное обозначение

$${}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{e}^{\beta} = g_{ij} \underset{\mathfrak{a}}{d}^i \lambda^{j\beta} \tag{28}$$

для инвариантного относительно поворота внешней координатной системы отсчетного вектора.

Второй из перечисленных в (27) тензоров в силу ортогональности тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ в точности совпадает с отсчетной метрикой:

$${}^{\backprime}g^{\beta\gamma} = g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}. \tag{29}$$

Поскольку модули градиентов d-директоров никак не связаны с градиентом деформации, их необходимо включить в третий из тензоров (27), устраняя тем самым и возможную неопределенность «тензоров поворота» $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{i\beta}$:

$$|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\varsigma} g_{ij} \lambda^{i\gamma} \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\varsigma}. \tag{30}$$

Таким образом, вторая система инвариантов деформации и экстрадеформации, которые выдерживают повороты координатного репера внешнего пространства, состоит из следующих тензоров:

$$|x|_{\alpha\beta}, \quad {}^{\backprime}g^{\beta\gamma}, \quad {}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{e}^{\beta}, \quad |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\varsigma} g_{ij} \lambda^{i\gamma} \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\varsigma}. \tag{31}$$

Полученная в предыдущем параграфе работы система инвариантов выразима в терминах инвариантов (31) с помощью целых рациональных соотношений:

$$\begin{gathered} g_{\alpha\beta} - {}^{\backprime}g^{\sigma\kappa} |x|_{\alpha\sigma} |x|_{\beta\kappa} = 0, \quad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_\alpha - |x|_{\alpha\beta} {}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{e}^{\beta} = 0, \\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} - |x|_{\alpha\sigma} |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\gamma} g_{ij} \lambda^{i\sigma} \underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\gamma} = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Система инвариантов (31), сконструированная из множителей в полярных разложениях градиентов деформации и экстрадеформации, рационально не выразима в терминах инвариантов

$$g_{\alpha\beta}, \qquad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\alpha}, \qquad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta}. \tag{33}$$

Это нетрудно заметить, анализируя соотношения (32). Тот же самый факт становится очевидным, если учесть, что инварианты (31) рационально не выразимы через компоненты градиентов деформации и экстрадеформации, в то время как для инвариантов (33) это можно сделать. Тем не менее, поскольку уравнения (32) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между системами инвариантов (33) и (31), то в некотором смысле система инвариантов (31) также может считаться полной.

Если экстрапеременные не требуются для математического описания континуума, то полная система инвариантов, не чувствительных к поворотам координатного репера внешнего пространства, будет состоять из модуля дисторсии и компонент отсчетной метрики

$$|x|_{\alpha\beta}, \quad \grave{g}^{\alpha\beta}. \tag{34}$$

Этот вывод полностью согласуется с положениями нелинейной теории упругости [9]; в указанной теории тензоры (34) применяются в качестве объективных мер конечной деформации упругого континуума.

Кроме тензорной пары (34), как отмечается в [9], следующая пара метрических тензоров

$$g_{\alpha\beta}, \quad \grave{g}_{\alpha\beta} \tag{35}$$

с успехом может быть положена в основу теории деформации нелинейно упругого тела. Ее использование в прикладных задачах часто оказывается более предпочтительным по сравнению с тензором деформации Грина (22), поскольку при больших деформациях отсчетная и конвективная метрики будут настолько сильно отличаться друг от друга, что их разность не будет обладать теми преимуществами, которыми она обладает в случае малых деформаций.

Библиографический список

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошных сред. М. : Физматгиз, 1962. 284 с.
2. *Ильюшин А. А.* Механика сплошных сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
3. *Cosserat E. et F.* Théorie des corps déformables. P. : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М. : Наука, 1967. 664 с.
5. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.
6. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
7. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
9. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М. : Наука, 1983. 448 с.

10. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М. : Мир, 1965. 456 с.
11. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 656 с.

Образец для цитирования:
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 71–84. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84.

On Rationally Complete Algebraic Systems of Finite Strain Tensors of Complex Continua

V. A. Kovalev[1], Yu. N. Radayev[2]

[1]Vladimir A. Kovalev, Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com
[2]Yurii N. Radayev, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, Vernadskogo Avenue, 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The paper is devoted to the mathematical description of complex continua and the systematic derivation of strain tensors by the notion of isometric immersion of complex continuum in a plane space of higher dimension. Problem of establishing of complete systems of irreducible objective strain and extra-strain tensors for complex continuum immersed in an external plane space is considered. The solution to the problem is given by methods of the field theory and the theory of algebraic invariants. Strain tensors are obtained as irreducible algebraic invariants of contravariant vectors of the external space emerging in the complex continuum action density. Considerations are restricted to rational algebraic invariants. Completeness criteria for systems of rational algebraic invariants and rational syzygies are discussed and applied to strain tensors of micropolar elastic continua. Objective strain tensors of micropolar continuum are alternatively obtained by combining multipliers of polar decompositions of strain and extra-strain gradients.

Key words: continuum, complex continuum, micropolar continuum, field, action, Lagrangian, strain, d-variable, algebraic invariant, rational invariant, syzygy.

References

1. Sedov L. I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [An Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 284 p. (in Russian).
2. Illyushin A. A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum Mechanics]. Moscow, Moscow University Press, 1978. 287 p. (in Russian).
3. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriia i tenzornyi analiz* [Riemannian Geometry and Tensor Calculus]. Moscow, Nauka, 1967. 664 p. (in Russian).
5. Eisenhart L. P. *Rimanova geometriia* [Riemannian Geometry]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1948. 316 p. (in Russian).
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 156 p. (in Russian).

7. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010. 328 p. (in Russian).
8. Gurevich G. B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov* [Elements of Theory of Algebraic Invariants]. Moscow, Leningrad, Gostechteretizdat, 1948. 408 p. (in Russian).
9. Berdichevskii V. L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983. 448 p. (in Russian).
10. Green A. E., Adkins J. E. *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. London, Oxford Univ. Press, 1960. 348 p. (Russ. ed.: Green A., Adkins J. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelineinaia mekhanika sploshnoi sredy*. Moscow, Mir, 1965. 456 p.)
11. Horn R., Johnson H. *Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990. 561 pp. (Russ. ed.: Horn R., Johnson H. Matrichnyi analiz. Moscow, Mir, 1989. 656 p.)

Cite this article as:
Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On Rationally Complete Algebraic Systems of Finite Strain Tensors of Complex Continua. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 71–84 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84.