

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА
ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю. А. ДАВЫДОВ

1. Рассмотрим измеримый случайный процесс (ξ_t) , $t \in [0, a]$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ со значениями в (R^1, \mathfrak{B}) . Локальным временем для (ξ_t) называют (см. [1]) функцию $(\omega, x, t) \rightarrow p(\omega, x, t)$ на $\Omega \times R^1 \times [0, a]$ со значениями в R_+ , обладающую свойствами:

1. Функция p измерима относительно σ -алгебры $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_{[0, a]}$.
2. Для каждой пары (ω, x) функция $t \rightarrow p(\omega, x, t)$ не убывает.
3. Для любого $A \in \mathfrak{B}$ и любого $t \in [0, a]$ с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\int_0^t \mathbf{1}_A(\xi_s(\omega)) ds = \int_A p(\omega, x, t) dx.$$

Если локальное время существует, то для каждого $t \in [0, a]$ меры

$$\mu_t^\omega(A) = \int_0^t \mathbf{1}_A(\xi_s(\omega)) ds, \quad A \in \mathfrak{B},$$

с вероятностью 1 абсолютно непрерывны относительно меры Лебега m и функции $x \rightarrow p(\omega, x, t)$ являются вариантами плотностей $d\mu_t^\omega/dm$. Меры μ_t^ω описывают времена пребывания («occupation times») процесса (ξ_t) в борелевских множествах, и потому существование локального времени есть не что иное, как существование определенным образом согласованных вариантов плотностей времен пребывания. С другой стороны, при фиксированных x и t неубывающая функция $t \rightarrow p(\omega, x, t)$ порождает на $\mathfrak{B}_{[0, a]}$ некоторую меру; обозначим ее λ_x^ω . Легко показать, что если (ξ_t) имеет с вероятностью 1 непрерывные реализации, то меры λ_x^ω сосредоточены с вероятностью 1 на множествах уровня E_x , $E_x = \{s \mid \xi_s(\omega) = x\}$. Таким образом, функцию $t \rightarrow p(\omega, x, t)$ можно рассматривать как функцию, задающую распределение времени пребывания процесса (ξ_t) на уровне $\{x\}$. Этим, собственно, и объясняется название «локальное время».

Приведенное определение локального времени (в дальнейшем — л. в.) существенным образом использует естественную упорядоченность R^1 . Чтобы получить определение л. в., пригодное для процессов, параметризованных другими множествами, надо рассматривать л. в. как меры, зависящие от ω и x . В п. 2 дается такое определение и доказывается, что существование л. в. в смысле этого общего определения эквивалентно абсолютной непрерывности (с вероятностью 1) времен пребывания отно-

сительно меры Лебега. Показано также, что сохраняется возможность рассматривать л. в. как семейство мер на множествах уровня. В п. 3 рассматривается ситуация, когда параметрическое множество имеет структуру прямого произведения. Доказывается, что если для почти всех сечений параметрического множества сужения исходного процесса на эти сечения имеют л. в., то и сам процесс будет обладать л. в. Последний пункт посвящен изучению d -параметрических аналогов броуновского движения. Здесь доказывается существование совместно непрерывного варианта л. в.

Несколько слов об обозначениях. Через \mathfrak{B} обозначается σ -алгебра борелевских подмножеств R^1 , через m — мера Лебега на \mathfrak{B} ; 1_A — индикатор множества A , т. е. функция, равная 1 на A и 0 — вне A . Символ I_d обозначает d -мерный единичный куб, S_{d-1} — $(d - 1)$ -мерную единичную сферу, в R^d . Если \mathfrak{M} — σ -алгебра и $A \in \mathfrak{M}$, то через \mathfrak{M}_A будет обозначаться совокупность подмножеств A , являющихся элементами \mathfrak{M} . Если (A_α) — семейство множеств, то через $\sigma(A_\alpha)$ обозначается наименьшая σ -алгебра, содержащая все A_α . Как обычно, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — основное вероятностное пространство. Если $(\xi_t)_{t \in T}$ — случайный процесс на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, то через \mathfrak{F}^V будет обозначаться σ -алгебра, порожденная величинами $\{\xi_t, t \in V\}$.

2. Пусть $(\xi_t)_{t \in T}$ — случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ со значениями в (R^1, \mathfrak{B}) . Предполагается, что параметрическое множество снабжено σ -алгеброй \mathfrak{Z} и конечной мерой τ . Предполагается также, что (ξ_t) измерим относительно $\mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что функция $(\omega, x, V) \rightarrow p(\omega, x, V)$, определенная на $\Omega \times R^1 \times \mathfrak{Z}$, со значениями в R^1 , является локальным временем для процесса (ξ_t) , если выполнены следующие условия:

1. Для каждого $V \in \mathfrak{Z}$ функция $(\omega, x) \rightarrow p(\omega, x, V)$ является $\mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}$ -измеримой.

2. Для каждой пары $(\omega, x) \in \Omega \times R^1$ функция $V \rightarrow p(\omega, x, V)$ является мерой на \mathfrak{Z} .

3. Для каждых $V \in \mathfrak{Z}$ и $A \in \mathfrak{B}$

$$\int_A p(\omega, x, V) dx = \int_V 1_A(\xi_s(\omega)) \tau(ds) \quad \text{п. н.}$$

Положим $\mu_V^\omega(A) = \int_V 1_A(\xi_s(\omega)) \tau(ds)$, $A \in \mathfrak{B}$. Очевидно, μ_V^ω есть мера, являющаяся образом сужения меры τ на \mathfrak{Z}_V при отображении $s \rightarrow \xi_s(\omega)$. Так как σ -алгебра \mathfrak{B} сепарабельна, то условие 3 эквивалентно следующему: при любом $V \in \mathfrak{Z}$ с вероятностью 1

$$\mu_V^\omega(A) = \int_A p(\omega, x, V) dx, \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Это означает, что для каждого V из \mathfrak{Z} меры μ_V^ω при почти всех ω абсолютно непрерывны относительно меры m . Последнее условие при небольших ограничениях на σ -алгебру \mathfrak{Z} является и достаточным для существования л. в.

В дальнейшем всюду предполагается, что σ -алгебра \mathfrak{E} сепарабельна и содержит такой компактный подкласс \mathfrak{S} (определение см. [2], стр. 48), что

$$\tau(V) = \sup\{\tau(U) : U \in \mathfrak{S}, U \subset V\}, \quad V \in \mathfrak{E}.$$

Это предположение является весьма общим; оно выполняется, например, если T — полное сепарабельное метрическое пространство и \mathfrak{E} — его борелевская σ -алгебра.

Предложение 1. *Локальное время для процесса (ξ_t) существует тогда и только тогда, когда $\mu_V^\omega \ll m$ для каждого $V \in \mathfrak{E}$ при почти всех ω .*

Доказательство. Необходимость уже установлена; докажем достаточность. Определим меру μ_V на $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$, полагая

$$\mu_V(B) = \int_{\Omega} \int_{R^1} 1_B(\omega, x) \mu_V^\omega(dx) P(d\omega), \quad B \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}.$$

Так как по условию $\mu_V^\omega \ll m$ при почти всех ω , то $\mu_V \ll P \times m$. Следовательно, существует такая $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$ -измеримая функция $(\omega, x) \rightarrow \bar{p}(\omega, x, V)$, что

$$\int_{F \times A} \bar{p}(\omega, x, V) P(d\omega) m(dx) = \int_F \mu_V^\omega(A) P(d\omega), \quad F \in \mathfrak{F}, A \in \mathfrak{B}, V \in \mathfrak{E}.$$

Поэтому при любых $V \in \mathfrak{E}$, $A \in \mathfrak{B}$

$$\int_A \bar{p}(\omega, x, V) m(dx) = \int_V 1_A(\xi_s(\omega)) \tau(ds) \quad \text{п. н.}$$

Значит, для любой последовательности $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $V_k \cap V_j = \emptyset$ при $k \neq j$,

$$\sum_n \bar{p}(\omega, x, V_n) = \bar{p}(\omega, x, \bigcup_n V_n)$$

для $P \times m$ -почти всех пар (ω, x) . Повторяя теперь рассуждения, использованные в доказательстве предложения V.4.4 в [2], получим существование функции $p(\omega, x, V)$, обладающей требуемыми свойствами 1 и 2 и такой, что $p(\omega, x, V) = \bar{p}(\omega, x, V)$ при любом $V \in \mathfrak{E}$ для $P \times m$ -почти всех (ω, x) . Но тогда $p(\omega, x, V) = \bar{p}(\omega, x, V)$ для каждого V при почти всех ω и для m -почти всех x и, следовательно, свойство 3 будет выполняться для p . Это и есть искомая функция.

З а м е ч а н и е 1. Условие конечности меры τ можно заменить условием σ -конечности.

З а м е ч а н и е 2. Построенный вариант л. в. обладает дополнительным свойством измеримости, а именно: функция $(\omega, x) \rightarrow p(\omega, x, V)$ при любом $V \in \mathfrak{E}$ является $\mathfrak{F}^V \times \mathfrak{B}$ -измеримой.

Пусть теперь T — топологическое пространство со счетной базой и \mathfrak{E} — его борелевская σ -алгебра. Для каждого $\omega \in \Omega$ обозначим Γ_ω график отображения $t \rightarrow \xi_t(\omega)$, а через $\bar{\Gamma}_\omega$ — его замыкание в произведении топологий R^1 и T . Положим

$$J_{\omega, x} = \{t \in T \mid (t, x) \in \bar{\Gamma}_\omega\}.$$

Предложение 2. *Если процесс (ξ_t) имеет л. в. $p(\omega, x, V)$, то для почти всех ω носитель меры $p(\omega, x, \cdot)$ содержится в $J_{\omega, x}$ для почти всех x .*

Поскольку график непрерывного отображения T в R^1 замкнут, мы получаем

Следствие 1. Если в условиях предложения 2 реализации (ξ_t) непрерывны с вероятностью 1, то для почти всех ω и x носитель меры $p(\omega, x, \cdot)$ содержится в множестве

$$E_{\omega, x} = \{t \in T \mid \xi_t(\omega) = x\}.$$

Доказательство предложения 2. Рассмотрим функцию множества

$$\mu^\omega(S) = \int_T 1_S(t, \xi_t(\omega)) \tau(dt), \quad S \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}, \omega \in \Omega.$$

Очевидно, μ^ω для почти всех ω является конечной мерой, сосредоточенной на $\bar{\Gamma}_\omega$. Пусть (λ_x^ω) — система нормированных условных мер на элементах разбиения $R^1 \times T$ на «слои» $\{x\} \times T$. Факторпространство по этому разбиению естественным образом отождествляется с R^1 , и тогда фактормерой становится мера μ_T^ω . Так как л. в. существует, то при любом $S \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{B}$

$$\mu^\omega(S) = \int_{R^1} \int_T 1_S(t, x) \lambda_x^\omega(dt) p(\omega, x, T) m(dx) \quad \text{п. н.},$$

где $p(\omega, x, V)$ — один из вариантов л. в. С другой стороны, из определения л. в. легко выводится, что при любом $S \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{B}$

$$\mu^\omega(S) = \int_{R^1} \int_T 1_S(t, x) p(\omega, x, dt) m(dx) \quad \text{п. н.}$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, видим, что при любом $V \in \mathfrak{X}$

$$\lambda_x^\omega(V) = p(\omega, x, V) / p(\omega, x, T)$$

при $\mathbf{P} \times \mathbf{m}$ -почти всех (ω, x) . Так как σ -алгебра \mathfrak{X} сепарабельна, то отсюда следует, что меры λ_x^ω при $\mathbf{P} \times \mathbf{m}$ -почти всех (ω, x) совпадают с мерами $p(\omega, x, \cdot) / p(\omega, x, T)$. Мы видели, что мера μ^ω сосредоточена на $\bar{\Gamma}_\omega$. Это означает, что для $\mathbf{P} \times \mathbf{m}$ -почти всех (ω, x) меры λ_x^ω (а следовательно, и $p(\omega, x, \cdot)$) сосредоточены на $J_{\omega, x}$. Это и требовалось доказать.

Во многих задачах при изучении локальных времен нет необходимости рассматривать значения $p(\omega, x, V)$ на всех множествах $V \in \mathfrak{X}$, а достаточно иметь информацию только для множеств из некоторого семейства. Мы будем рассматривать семейства элементов \mathfrak{X} , параметризованные некоторым множеством S с выделенной σ -алгеброй \mathfrak{E} .

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $(V_s)_{s \in S}$ — семейство элементов \mathfrak{X} . Локальным временем вдоль семейства (V_s) назовем функцию $(\omega, x, s) \rightarrow p(\omega, x, s)$, заданную на $\Omega \times R^1 \times S$, со значениями в R^1 и обладающую свойствами:

1. Функция p является $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{E}$ -измеримой.
2. При любых $(\omega, x) \in \Omega \times R^1$ и таких $s_1, s_2 \in S$, что $V_{s_1} \subset V_{s_2}$, имеет место неравенство $p(\omega, x, s_1) \leq p(\omega, x, s_2)$.

3. При любых $s \in S$, $A \in \mathfrak{F}$

$$\int_A p(\omega, x, s) dx = \int_{V_s} 1_A(\xi_t(\omega)) \tau(dt).$$

Ниже будет показано, что при естественных требованиях на семейство (V_s) из существования л.в. следует существование л.в. по семейству (V_s) .

Обозначим через \mathfrak{L}/τ булеву алгебру классов τ -эквивалентных множеств из \mathfrak{L} , а через ρ_τ — метрику, индуцированную на \mathfrak{L}/τ мерой τ . Известно (см., например, [2]), что $(\mathfrak{L}/\tau, \rho_\tau)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Обозначим через \mathfrak{B}_τ σ -алгебру борелевских подмножеств \mathfrak{L}/τ , и пусть π — отображение из \mathfrak{L} в \mathfrak{L}/τ , сопоставляющее каждому V класс эквивалентности, его содержащий.

О п р е д е л е н и е 3. Семейство $(V_s)_{s \in S}$ называется *измеримым*, если отображение $s \rightarrow V_s$ является измеримым отображением (S, \mathfrak{S}) в $(\mathfrak{L}, \pi^{-1}(\mathfrak{B}_\tau))$.

З а м е ч а н и е 3. В силу сепарабельности пространства $(\mathfrak{L}/\tau, \rho_\tau)$ каждое измеримое семейство может быть поточечно приближено «ступенчатыми» семействами (т. е. измеримыми семействами с конечным числом значений).

Предложение 3. Если процесс (ξ_t) имеет локальное время, а семейство $(V_s)_{s \in S}$ измеримо, то существует л.в. вдоль семейства (V_s) .

Это предложение является частным случаем предложения 4, приводимого ниже.

З а м е ч а н и е 4. На протяжении всей статьи мы рассматриваем вещественные процессы, поскольку этот случай представляет наибольший интерес. При желании можно распространить определение локального времени на случайные процессы со значениями в произвольном пространстве с мерой (E, \mathfrak{E}, e) . При этом предложения 1 и 2 останутся справедливыми, если предположить, что σ -алгебра \mathfrak{E} сепарабельна.

3. В настоящее время имеется ряд достаточных условий (см. [4] — [8]), которые могут быть использованы для доказательства существования л.в. у процессов с произвольным параметрическим множеством. Однако проверка этих условий связана, как правило, с громоздкими вычислениями и потому весьма затруднительна. В этом разделе предлагается новый подход к изучению л.в. для процессов, параметрическое множество которых имеет структуру прямого произведения. Этот подход позволяет в определенном классе случаев не только проверять существование локальных времен, но и исследовать более точно их строение.

В этом пункте предполагается, что $(T, \mathfrak{L}, \tau) = (T_1, \mathfrak{L}_1, \tau_1) \times (T_2, \mathfrak{L}_2, \tau_2)$, где σ -алгебры $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ сепарабельны, а меры τ_1, τ_2 конечны. Процесс $(\xi_t)_{t \in T}$ будет записываться также в виде $(\xi(t_1, t_2))_{t_1 \in T_1, t_2 \in T_2}$. Через $(\xi(t_1, \cdot))$ будет обозначаться сужение процесса (ξ_t) на множество $\{t_1\} \times T_2$. Пусть $(S_1, \mathfrak{S}_1), (S_2, \mathfrak{S}_2)$ — два параметрических множества и $(U_{s_1})_{s_1 \in S_1}, (V_{s_2})_{s_2 \in S_2}$ — два измеримых семейства со значениями соответственно в $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$.

Предложение 4. Если для τ_1 -почти всех $t_1 \in T_1$ процесс $(\xi(t_1, \cdot))$ имеет локальное время, то процесс $(\xi_t)_{t \in T}$ также имеет локальное время

и, кроме того, существует функция $(\omega, x, s_2, t_1) \rightarrow q(\omega, x, s_2, t_1)$, определенная на $\Omega \times R^1 \times S_2 \times T_1$ и обладающая свойствами:

1. функция q является $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{T}_1$ -измеримой,

2. для τ_1 -почти всех $t_1 \in T_1$ функция $(\omega, x, s_2) \rightarrow q(\omega, x, s_2, t_1)$ является вариантом локального времени для $(\xi(t_1, \cdot))$ вдоль семейства $(V_{s_2})_{s_2 \in S_2}$,

3. функция $p(\omega, x, s_1, s_2) = \int_{U_{s_1}} q(\omega, x, s_2, t_1) \tau_1(dt_1)$ является вариантом локального времени для процесса $(\xi_t)_{t \in T}$ вдоль семейства $(U_{s_1} \times V_{s_2})_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2}$.

З а м е ч а н и е 5. Предложение 3, как уже указывалось ранее, является частным случаем предложения 4. Действительно, достаточно взять в качестве T_1 одноточечное множество, а в качестве T_2 — само T . Роль семейства $(V_{s_2})_{s_2 \in S_2}$ будет выполнять семейство $(V_s)_{s \in S}$.

З а м е ч а н и е 6. В заметке автора [9] сформулирован результат, являющийся частным случаем предложения 4; там рассматривались семейства (U_{s_1}) и (V_{s_2}) , состоящие каждое из одного элемента.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 4. Сначала мы докажем утверждение о существовании функции q с требуемыми свойствами. Обозначим

$$\mu_{t_1, s_2}^\omega(A) = \int_{V_{s_2}} \mathbf{1}_A(\xi(t_1, t_2, \omega)) \tau_2(dt_2), \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Пусть $A_{n, k} = [k/2^n, (k + 1)/2^n)$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$. Положим

$$q_n(\omega, x, s_2, t_1) = \sum_k \frac{\mu_{t_1, s_2}^\omega(A_{n, k})}{m(A_{n, k})} \mathbf{1}_{A_{n, k}}(x). \quad (1)$$

Используя замечание 3, легко показать, что функции q_n являются $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{T}_1$ -измеримыми. Из условия следует, что для τ_1 -почти всех $t_1 \in T_1$ найдется такое множество $\Omega_{t_1} \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(\Omega_{t_1}) = 1$, что $\mu_{t_1, s_2}^\omega \ll \ll m$ для каждого $\omega \in \Omega_{t_1}$ и $s_2 \in S_2$. Следовательно, при таких t_1 , ω и s_2 для каждого $k \in \mathbf{N}$ последовательность функций $x \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$, рассматриваемых как случайные величины на вероятностном пространстве $\{[-k, k], \mathfrak{B}_{[-k, k]}, (2k)^{-1} m\}$, образуют равномерно интегрируемый мартингал (см., например, [3], стр. 189). Поэтому эта последовательность сходится к некоторой функции $x \rightarrow q_\infty(\omega, x, s_2, t_1)$ почти всюду на R^1 и в $L^1(R^1, m)$. При этом функция $x \rightarrow q_\infty(\omega, x, s_2, t_1)$ является вариантом плотности

$\frac{d\mu_{t_1, s_2}^\omega}{dm}$. Положим теперь $q(\omega, x, s_2, t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(\omega, x, s_2, t_1)$ и покажем, что q — искомая функция. Действительно, она $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{T}_1$ -измерима. Так как при любых ω, x, t_1 из условия $V_{s_2}' \subset V_{s_2}''$ следует, что $q_n(\omega, x, s_2', t_1) \leq q_n(\omega, x, s_2'', t_1)$ при каждом n , то это свойство будет выполняться и для q . Поскольку для τ_1 -почти каждого $t_1 \in T_1$ при $\omega \in \Omega_{t_1}$ и любом $s_2 \in S_2$ функция $q(\omega, x, s_2, t_1)$ совпадает с $q_\infty(\omega, x, s_2, t_1)$ при почти всех x , то мы получаем, что для τ_1 -почти каждого $t_1 \in T_1$ функция $(\omega, x, s_2) \rightarrow q(\omega, x, s_2, t_1)$ является вариантом локального времени для $(\xi(t_1, \cdot))$ вдоль семейства $(V_{s_2})_{s_2 \in S_2}$.

Положим $p(\omega, x, s_1, s_2) = \int_{U_{s_1}} q(\omega, x, s_2, t_1) \tau_1(dt_1)$. Используя опять замечание 3, получаем, что функция p является $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ -измеримой. Проверка остальных двух свойств функции p легко следует из ее определения и теоремы Фубини. Тем самым существование функции q доказано. Для доказательства существования л.в. у процесса $(\xi_t)_{t \in T}$ достаточно применить только что установленный факт к семействам $U_{s_1} = T_1$, $V_{s_2} = T_2$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам понадобится одно уточнение предложения 4, относящееся к случаю, когда $S_1 = T_1 = [0, a]^{d_1}$, $\tau_1 = m^{d_1}$, $\tau_2 = m^{d_2}$, $S_2 = T_2 = [0, b]^{d_2}$,

$$U_{s_1} = \prod_{k=1}^{d_1} [0, s_1^k], \quad s_1 = (s_1^1, \dots, s_1^{d_1}), \quad V_{s_2} = \prod_{l=1}^{d_2} [0, s_2^l], \quad s_2 = (s_2^1, \dots, s_2^{d_2}).$$

Предложение 5. Если для процесса $(\xi(t_1, \cdot))$ для τ_1 -почти всех $t_1 \in T_1$ существует вариант л.в. вдоль $(V_{s_2})_{s_2 \in S_2}$, непрерывный по паре переменных (x, s_2) , то функция q может быть выбрана так, что при $P \times \tau_1$ -почти всех (ω, t_1) отображение $(x, s_2) \rightarrow q(\omega, x, s_2, t_1)$ будет непрерывно по паре переменных (x, s_2) .

Доказательство. Покажем, что множество K тех пар (ω, t_1) , для которых $\mu_{t_1, s_2}^\omega \ll m$ при всех $s_2 \in S_2$ и для которых плотности $\frac{d\mu_{t_1, s_2}^\omega}{dm}$ могут быть выбраны совместно непрерывными по (x, s_2) , принадлежит σ -алгебре $\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_1$. Зададим отображения $r_n: \Omega \times T_1 \rightarrow L^1(R \times S_2, m \times m^{d_2})$ следующим образом: точке (ω, t_1) сопоставим функцию $(x, s_2) \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$, где q_n определяются равенством (1). Легко проверяется, что отображения r_n измеримы. Следовательно, множество M тех пар (ω, t_1) , для которых существует предел $r(\omega, t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\omega, t_1)$, будет принадлежать $\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_1$, а предельное отображение $r: M \rightarrow L^1(R^1 \times S_2, m \times m^{d_2})$ будет измеримо относительно $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_1)_M$. Так как множество C тех f из $L^1(R^1 \times S_2, m \times m^{d_2})$, которые эквивалентны непрерывным по (x, s_2) функциям, является борелевским, то $r^{-1}(C) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_1$. Проверим, что $r^{-1}(C) = K$. Если $(\omega, t_1) \in K$, то последовательность функций $x \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$ для любого $s_2 \in S_2$ сходится в $L^1(R^1, m)$. Но тогда функции $(x, s_2) \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$ будут сходиться в $L^1(R^1 \times S_2, m \times m^{d_2})$, причем предельная функция будет лежать в C . Следовательно, $K \subset r^{-1}(C)$.

Пусть теперь $(\omega, t_1) \in r^{-1}(C)$. Это означает, что функции $(x, s_2) \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$ сходятся в $L^1(R^1 \times S_2, m \times m^{d_2})$ к непрерывной по (x, s_2) функции $q(x, s_2)$. Отсюда вытекает, что при m^{d_2} -почти всех s_2 последовательность функций $x \rightarrow q_n(\omega, x, s_2, t_1)$ образует равномерно интегрируемый мартингал. Поэтому для m^{d_2} -почти всех s_2 (а следовательно, и для всех $s_2 \in S_2$) $\mu_{t_1, s_2}^\omega \ll m$. Так как при этом для каждого $s_2 \in S_2$ функция $x \rightarrow q(x, s_2)$ является вариантом плотности $\frac{d\mu_{t_1, s_2}^\omega}{dm}$, то $r^{-1}(C) \subset K$. Итак, равенство $r^{-1}(C) = K$ установлено. Теперь для завершения доказательства остается заметить, что в условиях нашего предложения множество K

имеет полную $\mathbf{P} \times m^{d-1}$ -меру и что для любой пары $(\omega, t_1) \in K$ функция $(x, s_2) \rightarrow q(\omega, x, s_2, t_1)$, построенная в доказательстве предложения 4, непрерывна.

4. В этом пункте мы используем предложения 4 и 5 для изучения локальных времен многопараметрических аналогов броуновского движения.

«Полеми Леви» или «броуновским движением Леви» на R^d мы будем называть (центрированный) гауссовский процесс $(W_t)_{t \in R^d}$, корреляционная функция которого задается равенством

$$B(t, s) = 1/2 (\|t\| + \|s\| - \|t - s\|), \quad t = (t_1, \dots, t_d), \quad \|t\| = \left(\sum_{k=1}^d t_k^2 \right)^{1/2}.$$

«Броуновский лист» — это (центрированный) гауссовский процесс $(V_t)_{t \in R_+^d}$ с корреляционной функцией $B(t, s) = \prod_{k=1}^d (t_k \wedge s_k)$.

Существование л.в. для этих процессов можно получить, используя известные критерии (см. [8]), однако с помощью предложения 4 проверка этого факта становится совсем простой. Рассмотрим процесс (V_t) для $t \in [0, a]^d$, и пусть $T_1 = [0, a]^{d-1}$, $T_2 = [0, a]$, $\tau_1 = m^{d-1}$, $\tau_2 = m$. Поскольку сужение (V_t) на множество вида $\{(t_1, \dots, t_{d-1})\} \times T_2$ будет с точностью до множителя стандартным броуновским движением на $[0, a]$ и так как для стандартного броуновского движения л.в. существует, то по предложению 4 и сам процесс (V_t) будет иметь л.в.

При рассмотрении процесса $(W_t)_{t \in R^d}$ удобно перейти к сферическим координатам (θ, ρ) , $\theta \in S^{d-1}$, $\rho \in R_+$. Положим $T_1 = S^{d-1}$, $T_2 = [0, a]$, и пусть τ_1 — мера Хаара на $\mathfrak{S}_{S^{d-1}}$, τ_2 — мера на $\mathfrak{S}_{[0, a]}$ с плотностью ρ^{d-1} . Обозначим сужение процесса (W_t) на полупрямую $\{\theta\} \times R_+$ через $(W_{\theta, \rho})_{\rho \in R_+}$. Процесс $(W_{\theta, \rho})_{\rho \in [0, a]}$ является стандартным броуновским движением и, следовательно, имеет л.в. относительно меры m . Так как $\tau_2 \ll m$, то $(W_{\theta, \rho})_{\rho \in [0, a]}$ будет иметь л.в. и относительно τ_2 . По предложению 4 получаем существование л.в. для (W_t) .

В обзорной статье [10] был поставлен вопрос о существовании непрерывного варианта л.в. для броуновского листа. Здесь мы дадим доказательство более сильного утверждения о существовании совместно непрерывного варианта л.в. вдоль «естественных» семейств для процессов (V_t) и (W_t) . Для процесса (V_t) мы будем рассматривать семейство $(U_t)_{t \in T}$,

$$T = \prod_{k=1}^d [0, a_k], \quad U_t = \prod_{k=1}^d [0, t_k].$$

Для процесса (W_t) определим семейство $(Q_t)_{t \in D_a}$, $D_a = \{t \mid \|t\| \leq a\}$, $a > 0$, следующим образом. Пусть $\varphi_1(s), \dots, \varphi_{d-1}(s)$ ($0 \leq \varphi_k(s) \leq 2\pi$) — сферические координаты вектора $s \in R^d$. Положим

$$Q_t = \{s \mid \varphi_k(s) \in [0, \varphi_k(t)], \quad k = 1, \dots, d-1; \quad \|s\| \leq \|t\|\}.$$

Предложение 6. Существует вариант $p(\omega, x, t)$ локального времени по семейству $(U_t)_{t \in T}$ для процесса $(V_t)_{t \in T}$ такой, что при почти всех ω функция $(x, t) \rightarrow p(\omega, x, t)$ непрерывна на $R^1 \times T$.

Предложение 7. Существует вариант $p(\omega, x, t)$ локального времени вдоль семейства $(Q_t)_{t \in D_a}$ для процесса $(W_t)_{t \in D_a}$ такой, что с вероятностью 1 функция $(x, t) \rightarrow p(\omega, x, t)$ непрерывна на $R^1 \times D_a$.

Доказательства этих предложений опираются на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $(u(t))_{t \in R_+}$ — стандартный процесс броуновского движения. Существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что при любом $a > 0$

$$E \sup_{z \in [0, 1]} \left\{ \frac{1}{z+a} u^2(z) \right\} \leq C_1 + C_2 a^{-1/3}.$$

Доказательство элементарно, мы его опустим.

Лемма 2. Пусть $\pi(x, t) = \pi(\omega, x, t)$ — вариант локального времени для стандартного процесса броуновского движения, непрерывный по (x, t) . Тогда

$$E \sup_{x \in R^1} \pi(x, 1) = \alpha < \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть τ — случайная величина, не зависящая от процесса $(u(t))_{t \in R^1}$, с экспоненциальным распределением: $P\{\tau > t\} = e^{-t/2}$. Пусть $\zeta = \sup_{x \in R^1} \pi(x, \tau)$. Покажем, что $E\zeta < \infty$. Отсюда будет следовать (2). Действительно, пусть $\zeta(t) = \sup_{x \in R^1} \pi(x, t)$. Тогда

$$E\zeta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E\zeta(t) e^{-t/2} dt.$$

Следовательно, $E\zeta(t) < \infty$ для почти всех t . Так как распределения величин $\zeta(t)$ и $\sqrt{t}\zeta(1)$ совпадают, то $E\zeta(t) < \infty$ для всех t и, в частности, $E\zeta(1) = \alpha < \infty$.

Для доказательства неравенства $E\zeta < \infty$ мы воспользуемся описанием локальных времен $\pi(x, \tau)$ (при условии, что $u(\tau)$ фиксировано), полученным Рэем (см. [11], стр. 90). Положим

$$b = u(\tau), \quad c = \min_{t \in [0, \tau]} u(t), \quad d = 0 \wedge b, \quad e = 0 \vee b,$$

$$f = \max_{t \in [0, \tau]} u(t), \quad \zeta_1 = \sup_{x \in [c, d]} \pi(x, \tau),$$

$$\zeta_2 = \sup_{x \in [d, e]} [\pi(x, \tau) - \pi(d, \tau)], \quad \zeta_3 = \sup_{x \in [e, f]} [\pi(x, \tau) - \pi(e, \tau)].$$

Так как $\pi(x, \tau) = 0$ при $x \leq c$, $x \geq f$, то $\zeta \leq \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ и, следовательно, достаточно показать, что $E\zeta_i < \infty$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим $P_b(A) = P(A | u(\tau) = b)$, E_b — математическое ожидание относительно меры P_b . На интервале $[c, d]$

$$\pi(x, \tau) = \frac{1}{4} e^{-2x} r_4^2 (e^{2x} - e^{2c}),$$

где r_4 — четырехмерный бесселевский процесс, начинающийся в нуле и не зависящий от c . Равенство здесь понимается в том смысле, что конечномерные распределения $\pi(x, \tau)$ относительно P_b совпадают с конечномерными распределениями процесса, стоящего в правой части. По лемме 1

$$E_b \{\zeta_1 | c\} \leq E_b \left\{ \sup_{z \in [0, 1]} (z + e^{2c})^{-1} u_1^2(z) \right\} \leq C_1 + C_2 e^{2c/3}.$$

Здесь $(u_1(t))_{t \in R^+}$ — стандартный процесс броуновского движения, не зависящий от b и c . Так как $P_b\{c < x\} = e^{-2(d-x)}$, $x \leq d$, то $E_b(e^{-2c/3}) =$

$= 3/2 e^{-2d/3}$. Следовательно,

$$E_b \zeta_1 \leq C_1 + 3/2 C_2 e^{2|s|b}, \quad E \zeta_1 \leq C_1 + 3/2 C_2 E e^{2|s|b}.$$

Так как

$$E e^{2|s|b} = E \{ E \{ e^{2|s|b} | \tau \} \} = 1/2 \int_0^\infty E e^{2|s|u(t)} e^{-t/2} dt,$$

$$E e^{2|s|u(t)} = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty e^{2|s| \sqrt{t|x|}} e^{-x^2/2} dx \leq 2e^{2|s|t},$$

то $E e^{2|s|b} < \infty$. Следовательно, $E \zeta_1 < \infty$. Оценим $E \zeta_2$. На интервале $[d, e]$

$$\pi(x, \tau) = 1/4 e^{-2x} r_2^2 (e^{2x} - e^{2d}),$$

где r_2 — двумерный бesselевский процесс, начинающийся в $r_4 (e^{2d} - e^{2c})$, но не зависящий от r_4 и с другим образом *. Поэтому

$$E_b \zeta_2 \leq 1/2 E_b \{ \sup_{z \in [0, e^{2e}]} (z + e^{2d})^{-1} u_1^2(z) \},$$

где $(u_1(t))_{t \in R^+}$ — стандартный процесс броуновского движения, не зависящий от b . Если $b < 0$, то по лемме 1 получим, что

$$E_b \zeta_2 \leq 1/2 (C_1 + C_2 e^{2|s|b}). \tag{3}$$

Если же $b > 0$ ($e = b$), то, замечая, что распределения величин

$$\sup_{z \in [0, e^{2b}]} \{(z + 1)^{-1} u_1^2(z)\} \quad \text{и} \quad \sup_{z \in [0, 1]} \{(z + e^{-2b})^{-1} u_1^2(z)\}$$

совпадают, опять по лемме 1 получим, что имеет место неравенство (3). Мы уже видели, что $E e^{2|s|b} < \infty$. Следовательно, $E \zeta_2 < \infty$. Математическое ожидание $E \zeta_3$ оценивается аналогично $E \zeta_1$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 6. Обозначим $t^1 = (t_1, \dots, t_{d-1})$. Тогда $U_t = U_{t^1} \times [0, t_d]$. По предложению 5 локальное время для $(V_t)_{t \in T}$ вдоль семейства $(U_t)_{t \in T}$ имеет представление

$$p(\omega, x, t) = \int_{U_{t^1}} q(\omega, x, s^1, t_d) m^{d-1}(ds^1),$$

где $q(\omega, x, s^1, t_d)$ с вероятностью 1 при почти всех $s^1 \in U_{t^1}$ являются совместно непрерывными (по (x, t_d)) вариантами локального [времени вдоль семейства $([0, t_d])_{t_d \in [0, a_d]}$ для $(V_{(s^1, t_d)})_{t_d \in [0, a_d]}$. Из леммы 2 следует, что если $\pi^c(x, t)$ — совместно непрерывный вариант локального времени для процесса $(cu(t))_{t \in R^+}$, где $u(t)$ — стандартное броуновское движение, то

$$E \sup_{\substack{x \in R^1 \\ t \in [0, a]}} \pi^c(x, t) = \alpha \frac{\sqrt{a}}{c}.$$

Так как процесс $(V_{(s^1, t_d)})_{t_d \in [0, a_d]}$ стохастически эквивалентен процессу $(\sqrt{s_1 \dots s_{d-1}} u(t))_{t \in [0, a_d]}$, то для почти всех s^1

$$E \sup_{\substack{x \in R^1 \\ t_d \in [0, a_d]}} q(\cdot, x, s^1, t_d) = \alpha \left(\frac{a_d}{s_1 s_2 \dots s_{d-1}} \right)^{1/2}.$$

* Как и ранее, это равенство понимается в смысле равенства конечномерных распределений.

Обозначим $Q(s^1) = \sup_{\substack{x \in R^1 \\ t_d \in [0, a_d]}} q(\omega, x, s^1, t_d)$. Тогда из предыдущего равенства следует, что функция $s^1 \rightarrow EQ(s^1)$ интегрируема на U_{t_1} . Поэтому $\int_{U_{t_1}} Q(s^1) m^{d-1}(ds^1) < \infty$ для почти всех ω . Обозначим множество таких ω через Ω_1 . Положим

$$\Delta = |p(\omega, x, t) - p(\omega, y, z)|, \quad t, z \in T.$$

Очевидно, $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |p(\omega, x, t^1, t_d) - p(\omega, y, t^1, z_d)|, \\ \Delta_2 &= |p(\omega, y, t^1, z_d) - p(\omega, y, z^1, z_d)|. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\Delta_1 \leq \int_{U_{t_1}} |q(\omega, x, s^1, t_d) - q(\omega, y, s^1, z_d)| m^{d-1}(ds^1).$$

Обозначим через Ω_2 множество тех ω , для которых при почти всех s^1 подынтегральная функция стремится к нулю при $(x, t_d) \rightarrow (y, z_d)$. В силу непрерывности q имеем $P(\Omega_2) = 1$. Если $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, то для подынтегральной функции существует суммируемая мажоранта $2Q(s^1)$. Значит, по теореме Лебега $\Delta_1 \rightarrow 0$ при $(x, t_d) \rightarrow (y, z_d)$. Поскольку

$$\Delta_2 = \int_{U_{t_1} \Delta U_{z_1}} Q(s^1) m^{d-1}(ds^1), \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

то $\Delta_2 \rightarrow 0$ для $\omega \in \Omega_1$ при $t^1 \rightarrow z^1$. Таким образом, если $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, а $(x, t) \rightarrow (y, z)$, то $\Delta \rightarrow 0$. Утверждение доказано.

Доказательство предложения 7 кроме леммы 2 использует еще один простой факт.

Лемма 3. Пусть $(\xi_t)_{t \in [0, a]}$ имеет совместно непрерывный вариант $p(\omega, x, t)$ локального времени вдоль семейства $([0, t])_{t \in [0, a]}$ (с мерой τ на $\mathfrak{B}_{[0, a]}$, равной m). Предположим, что мера $\lambda \ll m$ и что плотность $\frac{d\lambda}{dm}$ может быть выбрана непрерывной и ограниченной. Тогда существует совместно непрерывный вариант $p_1(\omega, x, t)$ локального времени (вдоль того же семейства) по мере $\tau = \lambda$. Кроме того,

$$E \sup_{\substack{x \in R^1 \\ t \in [0, a]}} p_1(x, t) \leq \sup_{t \in [0, a]} \frac{d\lambda}{dm}(t) E \sup_{\substack{x \in R^1 \\ t \in [0, a]}} p(x, t).$$

Доказательство леммы основано на том, что

$$p_1(\omega, x, t) = \int_0^t \frac{d\lambda}{dm}(s) p(\omega, x, ds).$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны рассуждениям из доказательства предложения 6.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Geman, J. Horowitz, Local times and supermartingales, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, **29**, 4 (1974), 273—294.
- [2] Ж. Неве, Математические основы теории вероятностей, М., изд-во «Мир», 1969.
- [3] П. А. Мейер, Вероятность и потенциалы, М., изд-во «Мир», 1973.
- [4] S. Orey, Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, **15**, 3 (1970), 249—256.
- [5] S. Berman, Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **137** (1969), 277—299.
- [6] S. Berman, Harmonic analysis of local times and sample functions of Gaussian processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **143** (1970), 269—281.
- [7] S. Berman, Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties, *Ann. Math. Statist.*, **41**, 4 (1970), 1260—1272.
- [8] Ю. А. Давыдов, Локальные времена для случайных процессов, *Теория вероят. и ее примен.*, **XXI**, 1 (1976), 172—179.
- [9] Ю. А. Давыдов, Локальные времена для случайных полей, *Теория вероят. и ее примен.*, **XXI**, 3 (1976), 670—674.
- [10] R. Pyke, Partial sums of matrix arrays and Brownian sheets, in «*Stochastic Analysis*», London, 1973, 331—348.
- [11] К. Ито, Г. Маккин, Диффузионные процессы и их траектории, М., изд-во «Мир», 1968.

LOCAL TIMES FOR STOCHASTIC PROCESSES
WITH MULTIDIMENSIONAL PARAMETERS

Yu. A. DAVYDOV (LENINGRAD)

(Summary)

A definition of a local time is proposed which is applicable for processes with arbitrary parameter set. The existence of a local time is proved to be equivalent to the absolute continuity of sojourn times with respect to the Borel measure. It is shown that it is still possible to refer to local times as measures on level sets. If the parameter set T is a product $T_1 \times T_2$, local times are represented as integrals over T_1 of local times for the restrictions of the process considered onto t_1 -sections of T . This representation is used to prove the existence of jointly continuous versions of local times for analogs of the Brownian motion with multi-dimensional parameter.