Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Б. Карманова, Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 298–325

https://www.mathnet.ru/smj7557

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
25 апреля 2025 г., 08:19:51

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.518.182+517.518.114+514.7

ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ НА ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ ДЛЯ ВЕКТОР–ФУНКЦИЙ

М. Б. Карманова

Аннотация. Установлена формула коплощади как выражение меры подмножества группы Карно через сублоренцевы меры его пересечения с множествами уровня вектор-функции. Описаны условия, когда множества уровня вектор-функций пространственноподобны, а также, установлены метрические характеристики таких поверхностей. Решен ряд специфических для рассматриваемого случая вопросов, в частности об однозначности определения коэффициента коплощади.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.205

Ключевые слова: группа Карно, сублоренцева структура, вектор-функция, множество уровня, сублоренцева мера, формула коплощади.

Известная в классическом анализе формула коплощади активно применяется для решения задач о свойствах экстремальных поверхностей, в теории потоков, алгебраической геометрии, геометрической теории меры и др. Она является криволинейным аналогом теоремы Фубини, согласно которой меру множества можно вычислить через меры пересечения этого множества с плоскостями меньшей размерности. В недавней работе [1] формула коплощади впервые установлена для нового модельного случая C^1-гладких функций, определенных на открытых подмножествах группы Карно глубины два, в терминах сублоренцевых мер пересечения области определения с множествами уровня. Кроме того, в [1] установлено условие пространственноподобия поверхностей уровня в терминах горизонтального градиента.

Сублоренцевы структуры являются субримановыми обобщениями геометрии Минковского. Последняя (см., например, [2]) представляет собой структуру пространства-времени $\mathbb{R}^{n+1}_1$, при этом частный случай $\mathbb{R}^4_1$ является пространством событий специальной теории относительности. Отличительной особенностью является то, что квадрат расстояния между точками с координатами (x_1, t_1) и (x_2, t_2), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, вычисляется по формуле

$$|x_1 - x_2|^2 - (t_1 - t_2)^2, \tag{1}$$

т. е. вдоль временно́го направления t он отрицателен, а вдоль пространственных $x \in \mathbb{R}^n$ положителен. Таким образом, длина вектора с ненулевыми координатами также может быть как положительной, так и отрицательной или равной нулю. Если у поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ все касательные векторы имеют положительный

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613.

© **2021 Карманова М. Б.**

квадрат длины, то такая поверхность называется *пространственноподобной* и локально она представима в виде графика, где временна́я координата зависит от остальных: $t = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. При определенных требованиях на гладкость определяющего поверхность отображения можно выписать уравнения, описывающие поверхность максимальной площади, из которых следует, что средняя кривизна максимальных поверхностей равна нулю. Согласно гипотезе Нильсена [2, 3] решения уравнения тяготения Эйнштейна физически содержательны тогда и только тогда, когда они реализуемы в виде таких поверхностей в $\mathbb{R}^{n+1}_1$. См. подробнее о геометрии Минковского, интерпретациях и применениях в [2] и упомянутых там источниках, например, [3, 4] и др.

Неголономный вариант такой геометрии, основанный на введении расстояния со свойствами (1) на субримановых структурах и называемый сублоренцевой геометрией, начали исследовать относительно недавно [5–15], как и его приложения в физике [16, 17]. Практически в то же время, что и неголономное обобщение, стали изучаться структуры с многомерным временем [18–20], но на евклидовых пространствах.

В настоящей работе рассмотрены вектор-функции, определенные на группах Карно произвольной глубины и принимающие значения в $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} \geq 1$. Кроме того, при рассмотрении множеств уровня сублоренцева структура вводится в многомерном виде: если субриманов дифференциал отображения невырожденный на $\tilde{n}$ горизонтальных полях, то квадрат длины вдоль n^- из них отрицателен, где $1 \leq n^- \leq \tilde{n}$. В связи с усложнением структуры прообраза и образа потребовалось установить некоторые новые свойства субриманова дифференциала отображения; кроме того, при $n^- > 1$ обнаружена новая характеристика, не возникающая в базовом случае. Вопрос о формуле коплощади данного типа на таких структурах, включая «классический» случай геометрии Минковского, до настоящего времени оставался открытым. Таким образом, установленная в настоящей работе формула коплощади новая и для классического случая, когда множества уровня принадлежат структурам геометрии Минковского, т. е. когда область определения отображения — евклидово пространство (иными словами, все базисные поля горизонтальны, а поля большей степени отсутствуют).

Краткий обзор результатов статьи изложен в [1, 21].

1. Основные определения и свойства

Введем необходимые определения и опишем важные свойства групп Карно и их отображений.

Определение 1.1 (см., например, [22]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представляется в виде прямой суммы

$$V = \bigoplus_{k=1}^{M} V_i, \quad [V_1, V_k] = V_{k+1},\ k = 1, \dots, M-1, \quad [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Число M называется *глубиной* группы $\mathbb{G}$. Размерность V_k в каждой точке будем обозначать символом $\dim V_k$, $k = 1, \dots, M$.

Далее будем считать, что базис $\{X_1, \dots, X_N\}$ выбран таким образом, что каждое базисное поле принадлежит одному из V_k, $k = 1, \dots, M$.

Определение 1.2. Если $X_j \in V_k$, $k = 1, \dots, M$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$, $j = 1, \dots, N$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Обозначение 1.3. Обозначим символом $\mathbf{0}$ единицу группы $\mathbb{G}$.

Замечание 1.4. Обозначение единицы группы нулем мотивировано тем, что многие рассуждения проводятся в нормальных координатах, в том числе относительно этой единицы (см. далее определение 1.11). Очевидно, что в этом случае координаты единицы нулевые.

Для описания групповой операции понадобится следующее понятие.

Определение 1.5. Для мультииндекса $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ его *весовая норма* равна

$$|\mu|_h = \sum_{j=1}^{M} \mu_j \dim V_j.$$

Из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и условия левоинвариантности базисных полей выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если $x = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(\mathbf{0})$, $y = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j\right)(\mathbf{0})$, где

$$\begin{cases} z_j = x_j + y_j & \text{для} \quad \deg X_j = 1, \\ z_j = x_j + y_j + \sum\limits_{\substack{\mu>0,\, \beta>0, \\ |\mu+\beta|_h = \deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta & \text{для} \quad \deg X_j > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Геометрическая интерпретация умножения $x \cdot y$ состоит в следующем. Сначала движение идет вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$ до точки x, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом в x. В обоих случаях время движения t меняется от нуля до единицы: $t \in [0, 1]$. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(x)$.

Определение 1.6. Константы $\left\{F^j_{\mu,\beta}\right\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

На группах Карно часто используется метрика Карно — Каратеодори d_{cc}, согласованная с неголономной структурой (см. например, [23]). Однако до сих пор остаются открытыми вопросы о строении ее шаров. Кроме того, ее не всегда возможно использовать на нильпотентных градуированных группах [22], поэтому в таких случаях применяется квазиметрика d_∞, которая на группах Карно локально билипшицево эквивалентна d_{cc}: если $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, то $d_\infty(v, w) = \max\limits_{i=1,\dots,N}\{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$. Мы же будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную d_∞.

Определение 1.7. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности

N и $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v,w) = \max_{k=1,\dots,M}\Bigl\{\Bigl(\sum_{j:\deg X_j = k} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2k}}\Bigr\}.$$

Свойство 1.8. *Величина $d_2(v,w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника*

$$d_2(v,w) \le C_D(d_2(v,u) + d_2(u,w))$$

верно для всех $v,u,w \in D$.

Обозначение 1.9. Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке v, равный $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v,w) < r\}$, обозначим символом $\mathrm{Box}_2(v,r)$.

Свойство 1.10. *Рассмотрим точку $v \in \mathbb{G}$ и $(w_1,\dots,w_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:*

$$\theta_v(w_1,\dots,w_N) = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\Biggr)(v).$$

Известно, что θ_v — гладкий диффеоморфизм.

Определение 1.11. Набор $\{w_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами*, или *координатами первого рода*, (*относительно* $v \in \mathbb{G}$) точки $w = \theta_v(w_1,\dots,w_N)$.

Свойство 1.12. *Образ шара $\mathrm{Box}_2(v,r)$ при отображении θ_v^{-1} — декартово произведение шаров, диаметры которых равны $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.*

Свойство 1.13. *С помощью свойства 1.12 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна*

$$\nu = \sum_{k=1}^{M} k \dim V_k.$$

Определение 1.14. Значение *субримановой меры Хаусдорфа* для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \omega_N \cdot \varliminf_{\delta\to 0}\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i,r_i) \supset A, \quad x_i \in A,\ r_i < \delta\Bigr\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

В следующих определениях 1.15 и 1.16 символ $\tilde d_2$ обозначает квазиметрику, построенную аналогично d_2, на $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Определение 1.15 ([23], см. также [24]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\tilde d_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(d_2(x,y)) \quad \text{при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Определение 1.16. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ называется *липшицевым во внутреннем смысле*, или *липшицевым в субримановом смысле*, если

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \varphi(x)) \leq L d_2(y, x)$$

для $L < \infty$ и всех $x, y \in \Omega$.

Теорема 1.17 ([23], см. также [24] для измеримых множеств). *Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда φ является hc-дифференцируемым почти всюду.*

Важным подклассом липшицевых в субримановом смысле отображений являются контактные отображения класса C^1_H.

Определение 1.18. Отображение φ является *контактным отображением класса C^1_H*, если его горизонтальные производные существуют и непрерывны, а образы горизонтальных полей принадлежат горизонтальному подрасслоению образа.

Теорема 1.19 ([23], см. также [24] для измеримых множеств). *Если φ — вектор-функция класса C^1, определенная на группе Карно, то она непрерывно hc-дифференцируема всюду. Ее hc-дифференциал $D_H\varphi$ совпадает с $(X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi, 0, \dots, 0)$.*

Предположение 1.20. *Будем рассматривать отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\tilde{n} < \dim V_1$ и $\operatorname{rank} D_H\varphi(x) = \tilde{n}$ в каждой точке x.*

2. Сублоренцева структура и поверхности уровня

В данном разделе опишем сублоренцеву структуру на $\mathbb{G}$ и класс исследуемых отображений и установим тонкие метрические свойства поверхностей уровня.

Прежде всего введем квадрат сублоренцева расстояния между точками. Так как для определения меры нужна система шаров, определять само расстояние (с точностью до знака) нет необходимости.

Определение 2.1 (см. общий случай в [25]). Пусть $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$, и пусть $n^- \in [1, \tilde{n}]$. Зададим величину $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ следующим образом:

$$\mathfrak{d}_2^2(v,w) = \max\Biggl\{\sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2, \Bigl(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \dots, \Bigl(\sum_{j:\deg X_j = M} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{M}}\Biggr\}.$$

Множество $\left\{w \in \mathbb{G} : \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\right\}$ называется *шаром относительно $\mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)$.

Квадрат сублоренцевой длины вектора $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i(x)$, $x \in \mathbb{G}$, определяется аналогично.

Свойство 2.2. *Образ шара* $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v,r)$ *при отображении* θ_v^{-1} *— декартово произведение множества*

$$\left\{(w_1,\dots,w_{\dim V_1}) : \sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2 < r^2\right\}$$

и шаров, диаметры которых равны $2r^2,\dots,2r^M$*. Здесь и далее будем обозначать*

$$\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r) = \theta_v^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v,r)).$$

Определение 2.3 [2]. Если квадрат длины вектора положителен, то он называется *пространственноподобным*, если отрицателен, то — *времениподобным*, а если нулевой, то — *светоподобным*. Если все касательные векторы поверхности пространственноподобны, то такая поверхность называется *пространственноподобной*.

Следующее понятие обобщает соответствующее классическое.

Определение 2.4. Пусть $v\in\mathbb{G}$. Множество

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^N w_jX_j\right)(v) : \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2 = \sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2,\ \sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2 = \dots = \sum_{j:\deg X_j=M} w_j^2 = 0\right\}$$

называется *световым конусом с центром в точке* v.

Замечание 2.5. Для C^1-гладких поверхностей S классическое понятие пространственноподобия можно заменить следующим свойством: если $v\in S$, то эта поверхность локально лежит вне светового конуса с центром в этой точке, за исключением v.

Иными словами, она лежит в множестве

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^N w_jX_j\right)(v) : \max\left\{\sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2,\ \sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2,\dots,\sum_{j:\deg X_j=M} w_j^2\right\} > 0\right\}.$$

Чтобы корректно ввести понятие сублоренцевой меры Хаусдорфа на множествах уровня вектор-функции φ с выбранной системой шаров, нужно, чтобы пересечение шара с поверхностью было ограниченным, а пространственноподобие поверхности гарантирует это свойство.

Сформулируем требования, которым должна удовлетворять вектор-функция φ, и покажем, что при их выполнении множества уровня пространственноподобны.

Обозначение 2.6. Обозначим символом $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ часть матрицы $D_H\varphi(x)$, состоящую из первых $\tilde n$ столбцов, $x\in\Omega$. Заметим, что $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ можно рассматривать как $(\tilde n\times\tilde n)$-матрицу.

В свою очередь, символ $D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi$ обозначает $(\tilde n\times(\dim V_1-\tilde n))$-матрицу, полученную удалением из $D_H\varphi$ столбцов $D_H^{\tilde n}\varphi$, а также столбцов с номерами $\dim V_1+1,\dots,N$, состоящими из нулей.

Предположение 2.7. *Пусть выполнены условия предположения* 1.20. *Будем изучать отображения* $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^{\tilde n}$ *класса* C^1, где $\Omega\subset\mathbb{G}$ *— открытое множество, такие, что*

(1) *матрица* $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ *обратима и ее определитель строго отделен от нуля всюду на* Ω*;*

(2) *матрица* $D^{\tilde{n}}_H\varphi(x)$ *содержит* n^- *столбцов, соответствующих векторным полям, квадратное расстояние* $\mathfrak{d}_2^2$ *вдоль которых отрицательно;*

(3) *длины строк* $\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)$ *не превосходят* $\frac{1}{\tilde{n}}-c$ *всюду на* Ω, *где* c — *некоторое положительное число.*

Свойство 2.8. *Из свойства* (1) *предположения* 2.7 *следует, что элементы матрицы, обратной к* $D^{\tilde{n}}_H\varphi(x)$, *равномерно ограничены на любой компактной окрестности.*

Обозначение 2.9. Здесь и далее символ E_l обозначает единичную матрицу размера l.

Из [26, 27] вытекает

Лемма 2.10. *Квадратичная форма, определяемая матрицей*

$$D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^*-\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^*, \tag{3}$$

положительно определена всюду на любой компактной окрестности, лежащей в Ω. *Кроме того,*

$$\det\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^*-\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^*\bigr)\geq\hat{c},\quad \hat{c}>0,$$

на любой компактной окрестности, лежащей в Ω.

Доказательство. Домножим матрицу (3) слева на $\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}$, а справа — на $\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi^*\bigr)^{-1}$. В силу п. (3) предположения 2.7 форма, определяемая матрицей

$$E_{\tilde{n}}-\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)\bigl(\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)\bigr)^*,$$

где $E_{\tilde{n}}$ — единичная матрица размера $\tilde{n}$, положительно определена (см. подробности в [26, свойство 2.17]). Утверждение леммы далее следует из невырожденности $D^{\tilde{n}}_H\varphi$, равномерной ограниченности обратной к ней матрицы на компактных окрестностях и непосредственного определения положительной определенности в терминах скалярного произведения. □

Следствие 2.11. *В условиях предположения* 2.7 *квадратичная форма, определяемая матрицей*

$$E_{\dim V_1-\tilde{n}}-\bigl(\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)\bigr)^*\bigl(D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde{n}}_H\varphi\bigr),$$

где $E_{\dim V_1-\tilde{n}}$ — *единичная матрица размера* $\dim V_1-\tilde{n}$, *положительно определена всюду на любой компактной окрестности, лежащей в* Ω.

Доказательство. Сравним квадратичные формы, определяемые матрицами E_p-A^*A и E_q-AA^* при условии, что одна из них положительно определена. Пусть квадратичная форма, построенная по E_q-AA^*, положительно определена. Обозначим ранг матрицы A символом m.

Применим некоторые ортогональные преобразования, которые не влияют на свойство положительной определенности. Так как ранг A равен m, она содержит m независимых столбцов размера q. Следовательно, для них существует ортогональная матрица O такая, что матрица, составленная из их образов, равна объединению матрицы размера m и $q-m$ строк, состоящих из нулей. Так как оставшиеся столбцы представляют собой линейные комбинации независимых столбцов, при преобразовании O их координаты с номерами, большими m, также будут нулевыми.

Таким образом, OA представимо как объединение матрицы ранга m и $q-m$ строк, состоящих из нулей.

Кроме того, существует ортогональная матрица O' такая, что только первые m столбцов OAO' ненулевые. Обозначим матрицу размера m, состоящую из ненулевых элементов OAO', символом Q. Следовательно,

$$O(E_q - AA^*)O^* = E_q - OAO'(O')^*A^*O^*$$

представляет собой блочно-диагональную матрицу, первый блок которой равен $E_m - QQ^*$, а второй состоит из единичной матрицы E_{q-m}. Аналогично

$$(O')^*(E_p - A^*A)O' = E_p - (O')^*A^*O^*OAO'$$

представляет собой блочно-диагональную матрицу, первый блок которой равен $E_m - Q^*Q$, а второй состоит из единичной матрицы E_{p-m}.

Рассмотрим теперь первые блоки этих матриц. Для вычисления собственных чисел матрицы $E_m - QQ^*$ составляем уравнение

$$\det((1-\lambda)E_m - QQ^*) = 0.$$

Так как Q невырожденная, уравнение преобразуется в виде

$$\det((1-\lambda)Q^{-1} - Q^*) = 0.$$

По этой же причине его можно преобразовать как

$$\det((1-\lambda)E_m - Q^*Q) = 0.$$

Таким образом, собственные значения у $E_p - A^*A$ и $E_q - AA^*$ одинаковы, поэтому из положительной определенности $E_q - AA^*$ следует положительная определенность $E_p - A^*A$. Отсюда вытекает утверждение следствия. □

Лемма 2.12. *Матрица $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$, состоящая из $\tilde n$ столбцов $D_H\varphi(x)$ и удовлетворяющая условиям предположения* 2.7, *если существует, то определяется единственным образом. Если Ω связно, то такая матрица определяется единственным образом всюду на Ω.*

Замечание 2.13. В силу предположения 1.20 во всякой точке x по теореме о неявной функции существуют $\tilde n$ столбцов матрицы $D_H\varphi(x)$ с номерами $i_1, \dots, i_{\tilde n}$ такие, что составленная из них матрица $\overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)$ обладает следующим свойством. Для $\sum\limits_{j=1}^{\dim V_1} w_jX_j(x) \in \ker D_H\varphi(x)$ справедливо

$$(w_{i_1}, \dots, w_{i_{\tilde n}})^T = \big(\overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H \setminus \overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)(w_{j_{\tilde n+1}}, \dots, w_{j_{\dim V_1}})^T,$$

где матрица $D_H \setminus \overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)$ состоит из столбцов $D_H\varphi(x)$, не входящих в $\overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)$, номера которых не превосходят $\dim V_1$, и $i_l \neq j_k$ для $l = 1, \dots, \tilde n$ и $k = \tilde n + 1, \dots, \dim V_1$. Предположение 2.7 говорит о том, что среди всех матриц, обладающих свойствами $\overline{D}_H^{\tilde n}\varphi(x)$, должна найтись такая, что выполнено свойство (3). Для упрощения технических деталей без ограничения общности считаем, что этим свойством обладает матрица, составленная из первых $\tilde n$ столбцов $D_H\varphi(x)$.

Кроме того, рассматриваем такие отображения, что выполнено еще и свойство (2) предположения 2.7, т. е. что обладающая свойством (3) матрица содержит столбцы, соответствующие векторным полям, квадрат длины вдоль которых отрицателен.

Доказательство леммы 2.12. Фиксируем $x \in \Omega$. В данном доказательстве значения всех подходящих терминов будем рассматривать в точке x, а сам символ (x) использовать не будем, чтобы не загромождать текст. Кроме того, так как нулевые столбцы матрицы субриманова дифференциала с номерами, большими $\dim V_1$, не влияют на рассуждения, под символом $D_H\varphi$ будем иметь в виду матрицу $(X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi)$.

Предположим противное: существует преобразование P, переставляющее столбцы $D_H\varphi$, такое, что матрица $(D_H\varphi P)^{\tilde n}$, составленная из первых $\tilde n$ столбцов $D_H\varphi P$, удовлетворяет условиям предположений 1.20 и 2.7. Заметим, что она получается умножением $D_H\varphi$ на первые $\tilde n$ столбцов P; обозначим эту матрицу символом $P^{\tilde n}$, а состоящую из оставшихся $\dim V_1 - \tilde n$ столбцов — символом $P \setminus P^{\tilde n}$. Следовательно, полагая матрицу $D_H\varphi P \setminus (D_H\varphi P)^{\tilde n}$ равной $(\tilde n \times (\dim V_1 - \tilde n))$-матрице, полученной удалением из $D_H\varphi P$ столбцов $(D_H\varphi P)^{\tilde n}$, получаем

$$(D_H\varphi P)^{\tilde n} = D_H\varphi P^{\tilde n} \quad \text{и} \quad D_H\varphi P \setminus (D_H\varphi P)^{\tilde n} = D_H\varphi(P \setminus P^{\tilde n}).$$

Отсюда вытекает

$$(D_H\varphi P)^{\tilde n}((D_H\varphi P)^{\tilde n})^* - (D_H\varphi P \setminus (D_H\varphi P)^{\tilde n})(D_H\varphi P \setminus (D_H\varphi P)^{\tilde n})^* \\ = D_H\varphi(P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* - (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*)D_H\varphi^*. \quad (4)$$

Выведем свойства $P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* - (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*$. Так как преобразование P ортогонально, $PP^* = E_{\dim V_1}$, где $E_{\dim V_1}$ — единичная матрица размера $\dim V_1$. Следовательно,

$$E_{\dim V_1} = PP^* = ((P^{\tilde n}|\overline{0}_{\tilde n+1} \dots \overline{0}_{\dim V_1}) + (\overline{0}_1 \dots \overline{0}_{\tilde n}|P \setminus P^{\tilde n})) \\ \times ((P^{\tilde n}|\overline{0}_{\tilde n+1} \dots \overline{0}_{\dim V_1}) + (\overline{0}_1 \dots \overline{0}_{\tilde n}|P \setminus P^{\tilde n}))^* \\ = P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* + (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*, \quad (5)$$

где $\overline{0}$ с индексом обозначает нулевой столбец с соответствующим номером. Таким образом, с учетом определения переставляющей столбцы матрицы P обе матрицы $P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^*$ и $(P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*$ диагональны с элементами 0 и 1 на диагонали, сумма которых равна единичной. Следовательно, матрица $P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* - (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*$ диагональна, причем элементы ее диагонали, соответствующие номерам столбцов $D_H\varphi$, которые перешли в $(D_H\varphi P)^{\tilde n}$, равны $+1$, а остальные равны -1.

Далее, сравним квадратичную форму (3), определяемую $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ и $D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi$, с формой, полученной преобразованием P (см. (4)). Обозначим символом $E_{\tilde n,0}$ диагональную матрицу размера N, первые $\tilde n$ элементов которой равны $+1$, а остальные нулевые, и положим $E_{0,\dim V_1 - \tilde n} = E_{\dim V_1} - E_{0,\tilde n}$. Тогда (3) совпадает с $D_H\varphi(E_{\tilde n,0} - E_{0,\dim V_1 - \tilde n})D_H\varphi^*$. В силу предположения 2.7 и леммы 2.10 имеем

$$\langle (D_H\varphi(E_{\tilde n,0} - E_{0,\dim V_1 - \tilde n})D_H\varphi^*)v, v\rangle \\ = \langle (E_{\tilde n,0} - E_{0,\dim V_1 - \tilde n})D_H\varphi^* v, D_H\varphi^* v\rangle \geq C\|v\|^2, \quad C > 0. \quad (6)$$

Для преобразования P соответствующая квадратичная форма равна

$$\langle (D_H\varphi(P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* - (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*)D_H\varphi^*)v, v\rangle \\ = \langle (P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^* - (P \setminus P^{\tilde n})(P \setminus P^{\tilde n})^*)D_H\varphi^* v, D_H\varphi^* v\rangle. \quad (7)$$

Так как P не совпадает с единичной матрицей, в наборе $(1,\dots,\tilde n)$ найдется хотя бы один номер m, для которого диагональный элемент $E_{\tilde n,0}$, равный $+1$, будет заменен на -1 в выражении $P^{\tilde n}(P^{\tilde n})^*-(P\setminus P^{\tilde n})(P\setminus P^{\tilde n})^*$. Рассмотрим ненулевой вектор $v\in\mathbb{R}^{\tilde n}$ такой, что он ортогонален всем столбцам $D_H^{\tilde n}\varphi$, кроме вектора с номером m. Тогда по условию из (3) и (6) вытекает

$$\big\langle\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)_m, v\big\rangle^2-\sum_{j=1}^{\dim V_1-\tilde n}\big\langle\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)_j, v\big\rangle^2\geq C\|v\|^2,$$

где $\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)_m$ — столбец $D_H^{\tilde n}\varphi$ с номером m, а $\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)_j$ — столбец $D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi$ с номером j, $j=1,\dots,\dim V_1-\tilde n$. Тогда значение (7) для v не будет превосходить

$$-\big\langle\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)_m, v\big\rangle^2+\sum_{j=1}^{\dim V_1-\tilde n}\big\langle\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)_j, v\big\rangle^2\leq -C\|v\|^2<0,$$

что противоречит положительной определенности квадратичной формы. Иными словами, в случае существования матрицы $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$, состоящей из $\tilde n$ столбцов $D_H\varphi(x)$ и удовлетворяющей условиям предположения 2.7, она определяется единственным образом.

Предположим, что Ω связно. Рассмотрим две ее произвольные точки и непрерывную кривую, соединяющую их. Тогда она лежит в некотором компактном подмножестве Ω. В силу условия (3) предположения 2.7 и леммы 2.10 для единичных полей w, ограниченных на эту кривую, верно

$$\big\langle\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^*-\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)^*\big)w, w\big\rangle\geq C>0, \tag{8}$$

где $C>0$ определяется компактной окрестностью, лежащей в Ω. Так как для каждого непрерывного w значение (8) непрерывно на Ω, набор столбцов, отличный от составляющих матрицу $D_H^{\tilde n}\varphi$ и обладающий свойством (8), не существует на этой кривой. Действительно, в противном случае строгая отделенность от нуля неравенства (8) и, следовательно, непрерывность на Ω, нарушаются. Таким образом, если Ω связно, матрица, удовлетворяющая условиям предположения 2.7, определяется единственным образом всюду на Ω.

Окончательно матрица $D_H^{\tilde n}\varphi$, состоящая из $\tilde n$ столбцов $D_H\varphi$ и удовлетворяющая условиям предположения 2.7, определяется на связном множестве Ω единственным образом. Лемма доказана. $\square$

С помощью перехода в координаты первого рода относительно x и применений рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве свойства 2.17 и теоремы 2.25 в [26] и в [1], выводим следующее утверждение.

Теорема 2.14. *Поверхности уровня вектор-функции φ, удовлетворяющей условиям предположений 1.20 и 2.7, обладают следующими свойствами.*

1. *Они пространственноподобны.*
2. *Для точек одного множества уровня величины $\mathfrak{d}_2^2$ и d_2^2 локально билипшицево эквивалентны. Это свойство сохраняется и для точек касательной плоскости к множеству уровня.*

Доказательство. Фиксируем точку x и проходящее через нее множество уровня $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Так как световой конус лежит строго в горизонтальном подпространстве, поверхность не попадает внутрь него, если всякое пересечение поверхности и горизонтального пространства не попадает внутрь множества

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{\dim V_1} w_j X_j\right)(x) : \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2 = \sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2\right\};$$

иными словами, для горизонтальных координат $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$ точек поверхности должно выполняться

$$\sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2 > 0.$$

Перейдем в координаты первого рода относительно этой точки и рассмотрим пересечение поверхности $(\varphi \circ \theta_x)^{-1}(\varphi(x))$ и касательного пространства к ней с горизонтальной плоскостью, равной

$$\operatorname{span}\bigl\{e_1, \dots, e_{\dim V_1}\bigr\} = \operatorname{span}\bigl\{D\theta_x^{-1}(x)\langle X_1(x)\rangle, \dots, D\theta_x^{-1}(x)\langle X_{\dim V_1}(x)\rangle\bigr\}.$$

Для доказательства утверждений теоремы построим параметризацию пересечения множества уровня и горизонтальной плоскости пересечением касательного к ней пространства и горизонтальной плоскости, а затем используем аппроксимацию поверхностей уровня касательным пространством и свойства горизонтального дифференциала, описанные в предположении 2.7.

По условию $\operatorname{rank} D_H\varphi = \tilde{n}$ всюду, поэтому размерность пересечения касательного к поверхности пространства с горизонтальной плоскостью совпадает с $\dim V_1 - \tilde{n}$. Действительно, так как ранг $D_H(\varphi \circ \theta_x)$ в окрестности нуля также равен $\tilde{n}$, в горизонтальном подпространстве содержатся $\tilde{n}$ некасательных полей; по предположению 2.7 это $\bigl\{D\theta_x^{-1}\langle X_i\rangle\bigr\}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$. Кроме того, размерность пересечения не может быть меньше, чем

$$(N - \tilde{n}) + \dim V_1 - N.$$

Обозначим это пересечение, равное

$$\begin{aligned}\ker D(\varphi \circ \theta_x)(0) \cap \bigl(D\theta_x^{-1}(x)\langle V_1(x)\rangle\bigr)& \\ = \ker D_H(\varphi \circ \theta_x)(0) \cap \bigl(D\theta_x^{-1}(x)\langle V_1(x)\rangle\bigr),& \qquad (9)\end{aligned}$$

символом $\ker D_H(\varphi \circ \theta_x)(0)_H$. Заметим, что совпадение (9) имеет место, так как если горизонтальный вектор лежит в ядре $D(\varphi \circ \theta_x)(0)$, он лежит также в ядре $D_H(\varphi \circ \theta_x)(0)$. Обратное утверждение также справедливо. Отсюда следует, что

$$\ker D_H(\varphi \circ \theta_x)(0)_H \subset \ker D(\varphi \circ \theta_x)(0).$$

Напомним, что в нуле набор $\bigl\{D\theta_x^{-1}\langle X_i\rangle\bigr\}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, совпадает с $e_1, \dots, e_{\tilde{n}}$. В силу непрерывности дифференциала φ векторы $e_1, \dots, e_{\tilde{n}}$ не касательные для поверхности $(\varphi \circ \theta_x)^{-1}(\varphi(x))$ и в некоторой окрестности нуля.

Так как существует проекция $\pi_{\tilde{n}}$ вдоль $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{\tilde{n}}\}$ некоторой окрестности нуля в $\ker D(\varphi \circ \theta_x)(0)$ на окрестность нуля в $(\varphi \circ \theta_x)^{-1}(\varphi(x))$, являющаяся биективной на свой образ, то и ограничение $\pi_{\tilde{n}}$ на $\ker D_H(\varphi \circ \theta_x)(0)_H$ также биективно на свой образ. Следовательно, топологическая размерность образа $\ker D_H(\varphi \circ \theta_x)(0)_H$ при $\pi_{\tilde{n}}$, совпадающего с пересечением

$$(\varphi \circ \theta_x)^{-1}(\varphi(x))_H = (\varphi \circ \theta_x)^{-1}(\varphi(x)) \cap \bigl(D\theta_x^{-1}(x)\langle V_1(x)\rangle\bigr),$$

также равна $\dim V_1 - \tilde n$. Таким образом, $\pi_{\tilde n}|_{\ker D_H(\varphi\circ\theta)(0)_H}$ — искомая параметризация.

Докажем пространственноподобие множества уровня. Согласно теореме о неявной функции множество $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)_H$ в окрестности нуля представимо в виде графика отображения

$$\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big):\mathbb{R}^{\dim V_1-\tilde n}\to\mathbb{R}^{\tilde n};$$

см. подробности в замечании 2.13 и лемме 2.12 с учетом предположения 2.7. Из предположения 2.7, в частности, из положительной определенности в силу следствия 2.11 квадратичной формы

$$E_{\dim V_1-\tilde n}-\Big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\Big)^*\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)$$

вытекает, что если $(w_1,\dots,w_{\dim V_1})\in\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)_H$, то

$$\begin{aligned}\sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1}w_j^2-\sum_{j=1}^{n^-}w_j^2&=\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2+\sum_{j=n^-+1}^{\tilde n}w_j^2-\sum_{j=1}^{n^-}w_j^2\ge\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2-\sum_{j=1}^{\tilde n}w_j^2\\
&=\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2-\Big\langle\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\langle w^{\dim V_1-\tilde n}\rangle,\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\langle w^{\dim V_1-\tilde n}\rangle\Big\rangle\\
&=\Big\langle\Big(E_{\dim V_1-\tilde n}-\Big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\Big)^*\big(D_H^{\tilde n}\varphi\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi\big)\Big)w^{\dim V_1-\tilde n},w^{\dim V_1-\tilde n}\Big\rangle\\
&\ge\widehat C\langle w^{\dim V_1-\tilde n},w^{\dim V_1-\tilde n}\rangle=\widehat C\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2,\quad\widehat C>0,\end{aligned}\tag{10}$$

где $w^{\dim V_1-\tilde n}=(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})$, а $\widehat C$ не зависит от x, а зависит только от компактной окрестности, содержащей x и лежащей в Ω. В силу линейной зависимости $(w_1,\dots,w_{\tilde n})$ от $(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})$ если $\sum\limits_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2=0$, то $w_1=\dots=w_{\dim V_1}=0$, т. е. рассматриваемая точка совпадает с вершиной светового конуса. Из (10) следует локальная билипшицева эквивалентность $\mathfrak{d}_2^2$ и d_2^2 на касательной плоскости к множеству уровня. Действительно, имеем

$$\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2-\sum_{j=1}^{\tilde n}w_j^2\ge\widehat C\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2,\tag{11}$$

следовательно, в силу (10) число $\widehat C$ строго отделено от единицы, поэтому

$$\sum_{j=1}^{\tilde n}w_j^2\le(1-\widehat C)\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2\quad\text{и}\quad\sum_{j=1}^{\dim V_1}w_j^2\le\widehat K\left(\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1}w_j^2-\sum_{j=1}^{\tilde n}w_j^2\right),\tag{12}$$

где $\widehat K>0$ равномерно ограничено на компактной окрестности, содержащей x и лежащей в Ω. Так как для координат степени, большей единицы, $\mathfrak{d}_2^2$ и d_2^2 определяются одинаково, их локальная билипшицева эквивалентность на касательной плоскости к множеству уровня доказана.

Пусть $y\in(\varphi\circ\theta_x)^{-1}(\varphi(x))_H$. В силу невырожденности $D(\varphi\circ\theta_x)$ на $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{\tilde n}\}$ имеем

$$\begin{aligned}o(\|y\|)=o(\|0-y\|)&=\|(\varphi\circ\theta_x)(y)-D(\varphi\circ\theta_x)(0)\langle y\rangle\|\\
&=\|(\varphi\circ\theta_x)(0)-D(\varphi\circ\theta_x)(0)\langle y\rangle\|=\big\|D(\varphi\circ\theta_x)(0)\big\langle y-\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\big\rangle\big\|\\
&\ge K(D\varphi)\big\|y-\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\big\|,\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в образе и прообразе, и значение $K(D\varphi)$ строго отделено от нуля на компактной окрестности, содержащей x и лежащей в Ω. Таким образом,

$$\left\|y - \pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right\| = o(\|y\|) \quad \text{и} \quad \left\|y - \pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right\| = o\big(\left\|\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right\|\big), \tag{13}$$

где $o(1) \to 0$ при $y \to x$ равномерно по x из некоторой компактной окрестности. Так как $\pi_{\tilde n}$ — проекция вдоль $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{\tilde n}\}$, координаты $y \in (\varphi\circ\theta_x)^{-1}(\varphi(x))_H$ отличаются от таковых $\pi_{\tilde n}^{-1}(y)$ только на первые $\tilde n$ координат. Иными словами,

$$\left(\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_1, \dots, \left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_{\tilde n}, y_{\tilde n+1}, \dots, y_{\dim V_1}\right) \in \ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)_H.$$

В силу равномерности $o(1)$ можно считать, что $|o(1)| < \widetilde C$ во втором соотношении (13), где $\widetilde C^2 + 2\widetilde C < \widehat C/2$. Повторяя рассуждения (10) для точки y с координатами $(y_1, \dots, y_{\dim V_1})$, с учетом неравенства Гёльдера выводим

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} y_j^2 = \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 + \sum_{j=n^-+1}^{\tilde n} y_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} y_j^2 \\
&\quad \geq \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n} y_j^2 = \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j + y_j - \left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right)^2 \\
&\geq \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(y_j - \left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right)^2 - 2\sum_{j=1}^{\tilde n}\left|\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right|\left|y_j - \left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right| \\
&\quad \geq \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(y_j - \left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right)^2 - 2\widetilde C\sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right)^2 \\
&\quad\quad \geq \sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j^2 - (\widetilde C^2 + 2\widetilde C)\sum_{j=1}^{\tilde n}\left(\left(\pi_{\tilde n}^{-1}(y)\right)_j\right)^2 \geq \frac{\widehat C}{2}\sum_{j=\tilde n+1}^{\dim V_1} y_j^2.
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения аналогично случаю $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)_H$ следует локальная билипшицева эквивалентность $\mathfrak{d}_2^2$ и d_2^2 на поверхности уровня (см. (11) и (12)). Теорема доказана. $\square$

Введем понятие сублоренцевой меры для подмножеств поверхностей уровня. Оно корректно в силу теоремы 2.14.

Определение 2.15. Пусть $z \in \mathbb{R}^{\tilde n}$. Значение *сублоренцевой меры* для $A \subset \varphi^{-1}(z)$ равно

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde n}(A) &= \omega_{\dim V_1 - \tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k} \\
&\quad \times \lim_{\delta\to 0}\inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu-\tilde n} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_i, r_i) \supset A,\ x_i \in A,\ r_i < \delta\Big\},
\end{aligned}$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

3. Формула коплощади

Данный раздел посвящен выводу формулы коплощади для сублоренцева случая.

Определение 3.1. Пусть $E^-_{n^-}$ — диагональная матрица размера $\tilde n$, первые n^- элементов которой равны -1, а остальные равны $+1$. Величина $\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,x)$, равная

$$\bigl(\det\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*+\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)E^-_{n^-}\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*\bigr)\bigr)^{1/2},$$

где значения $D_H\varphi$ рассматриваются в x, а символы $D^{\tilde n}_H\varphi$ и $D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi$ описаны в обозначении 2.6, называется *сублоренцевым коэффициентом коплощади* отображения φ в точке x. В определении предполагаем, что выполнены условия предположений 1.20 и 2.7.

Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия предположений* 1.20 *и* 2.7. *Для отображения* $\varphi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^{\tilde n})$, *определенного на открытом множестве* $\Omega\subset\mathbb{G}$ *группы Карно* $\mathbb{G}$, *справедлива формула коплощади*

$$\int\limits_\Omega \mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,x)\,d\mathscr{H}^\nu(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}} d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)} d\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}(y). \tag{14}$$

Следствие 3.3. *Если* $n^-=\tilde n$, *то формула коплощади имеет вид*

$$\int\limits_\Omega\bigl(\det\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*-\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*\bigr)\bigr)^{1/2}\,d\mathscr{H}^\nu =\int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}} d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)} d\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}(y). \tag{15}$$

Следствие 3.4. *Верно*

$$\det\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*+\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)E^-_{n^-}\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*\bigr)\geq\bar c>0.$$

Кроме того, квадратичная форма, определяемая матрицей

$$D^{\tilde n}_H\varphi\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*+\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)E^-_{n^-}\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^*,$$

положительно определена.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости этих свойств, достаточно применить рассуждения леммы 2.10 и метод доказательства свойства 2.17 в [26] о преобладающей главной диагонали [27] для матрицы

$$E_{\tilde n}+E^-_{n^-}\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigr)^*,$$

учитывая, что $E^-_{n^-}$ умножает первые n^- строк произведения матриц

$$\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigl(\bigl(D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi\bigr)\bigr)^*$$

на -1, а остальные строки — на $+1$. $\square$

Справедливо следующее усиление утверждения, доказанного в следствии 2.11.

Лемма 3.5. *Пусть A — $(q \times p)$-матрица. Определители матриц*

$$E_p + A^* E^-_{n^-} A \quad \text{и} \quad E_q + E^-_{n^-} A A^*, \tag{16}$$

где p и q — размеры единичных матриц, а $E^-_{n^-}$ — диагональная матрица размера q, первые n^- элементов которой равны -1, а остальные равны $+1$, совпадают.

Кроме того, если квадратичная форма, соответствующая одной из матриц (16), положительно определена, то и вторая также положительно определена.

Доказательство. По условию матрица A^* состоит из q столбцов размера p. Для нее существует ортогональная матрица O такая, что OA^* представимо как объединение матрицы ранга $q' \leq \min\{q, p\}$ и $p - q'$ строк, состоящих из нулей. Действительно, для q' линейно независимых столбцов A^* существует преобразование O такое, что матрица, составленная из их образов, равна объединению матрицы размера q' и $p - q'$ строк, состоящих из нулей. Так как оставшиеся столбцы представляют собой линейные комбинации независимых столбцов, при преобразовании O их координаты с номерами, большими q', также будут нулевыми. Без ограничения общности можем считать, что ненулевыми будут первые q' строк матрицы OA^*.

Кроме того, существует ортогональная матрица O' такая, что только первые q' столбцов OA^*O' ненулевые. Обозначим матрицу размера q', состоящую из ненулевых элементов OA^*O', символом A_1.

Заметим, что $E^-_{n^-} A O^* = E^-_{n^-} (OA^*)^*$ совпадает с объединением матрицы ранга не более q' и $p - q'$ столбцов, состоящих из нулей. Тогда и $(O')^* E^-_{n^-} A O^*$ имеет такой же вид. Обозначим $(q \times q')$-матрицу, состоящую из первых q' столбцов $(O')^* E^-_{n^-} A O^*$, символом A'_2, а часть A'_2, состоящую из первых q' строк, — символом A_2. Таким образом,

$$\det(E_p + A^* E^-_{n^-} A) = \det(E_p + OA^*O'(O')^* E^-_{n^-} A O^*),$$

где $E_p + OA^*O'(O')^* E^-_{n^-} A O^*$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из блока $E_{q'} + A_1 A_2$ размера q' и единичного блока:

$$E_p + \begin{pmatrix} A_1 & 0_{(q' \times (q - q'))} \\ 0_{((p - q') \times q')} & 0_{((p - q') \times (q - q'))} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & 0_{(q' \times (p - q'))} \\ A'_2 \setminus A_2 & 0_{((q - q') \times (p - q'))} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E_{q'} + A_1 A_2 & 0_{(q' \times (p - q'))} \\ 0_{((p - q') \times q')} & E_{p - q'} \end{pmatrix},$$

где $0_{s \times t}$ — нуль-матрица размера $(s \times t)$, а блок $A'_2 \setminus A_2$ состоит из строк A'_2, не вошедших в A_2. Кроме того, если форма, соответствующая матрице $E_p + A^* E^-_{n^-} A$, положительно определена, то этим же свойством обладает форма, соответствующая матрице $E_p + OA^* E^-_{n^-} A O^*$.

Далее,

$$\det(E_q + E^-_{n^-} A A^*) = \det(E_q + (O')^* E^-_{n^-} A O^* O A^* O'),$$

где $E_q + (O')^* E^-_{n^-} A O^* O A^* O'$ — блочно-нижнетреугольная квадратная матрица, диагональный блок размера q' которой совпадает с $E_{q'} + A_2 A_1$, а второй диагональный блок также единичный:

$$E_q + \begin{pmatrix} A_2 & 0_{(q' \times (p - q'))} \\ A'_2 \setminus A_2 & 0_{((q - q') \times (p - q'))} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0_{(q' \times (q - q'))} \\ 0_{((p - q') \times q')} & 0_{((p - q') \times (q - q'))} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E_{q'} + A_2 A_1 & 0_{(q' \times (q - q'))} \\ (A'_2 \setminus A_2) A_1 & E_{q - q'} \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему случаю если форма, соответствующая матрице $E_q + E^{-}_{n^-}AA^*$, положительно определена, то этим же свойством обладает форма, соответствующая матрице $E_q + (O')^*E^{-}_{n^-}AA^*O'$.

По построению A_1 обратима. Кроме того,

$$\det(E_{q'} + A_1A_2) = \det(A_1)\det\bigl(A_1^{-1} + A_2\bigr) = \det\bigl(A_1^{-1} + A_2\bigr)\det(A_1) = \det(E_{q'} + A_2A_1),$$

поэтому $\det(E_p + A^*E^{-}_{n^-}A) = \det(E_q + E^{-}_{n^-}AA^*)$.

Исследуем решения характеристических уравнений для матриц из (16). Так как при ортогональных преобразованиях собственные числа не меняются, корни этих уравнений совпадают с корнями

$$\det((1-\lambda)E_{q'} + A_1A_2)\cdot\det((1-\lambda)E_{p-q'}) = 0,$$
$$\det((1-\lambda)E_{q'} + A_2A_1)\cdot\det((1-\lambda)E_{q-q'}) = 0$$

соответственно. Далее,

$$\det((1-\lambda)E_{q'} + A_1A_2) = \det(A_1)\det\bigl((1-\lambda)A_1^{-1} + A_2\bigr) = \det\bigl((1-\lambda)A_1^{-1} + A_2\bigr)\det(A_1) = \det((1-\lambda)E_{q'} + A_2A_1).$$

Таким образом, знаки корней уравнений для обеих матриц (16) совпадают. Поэтому из положительной определенности одной формы следует положительная определенность другой. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Идея доказательства состоит в выводе формулы (14) из классической

$$\int\limits_{\Omega}(\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*))^{1/2}\frac{|g|_{\ker D\varphi(x)}|}{|g(x)|}\,d\mathscr{H}^N(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}} d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)} d\mathscr{H}^{N-\tilde n}(y),$$

где g — риманов тензор на $\mathbb{G}$. Основную сложность представляет вычисление соотношения мер $\mathscr{H}^{N-\tilde n}$ и $\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}$ на множествах уровня. Следовательно, ключевым шагом является анализ метрических свойств множеств уровня, с помощью которого, в частности, требуется установить равенства

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{N-\tilde n}(\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)) = (\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*)^{1/2}\bigl(\det\bigl(D_H^{\tilde n}\varphi(x)D_H^{\tilde n}\varphi(x)^*\bigr)\\ + \bigl(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\bigr)E^{-}_{n^-}\bigl(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\bigr)^{-1}\bigl(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\bigr)\bigl(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\bigr)^*\bigr)^{-1/2}\\ \times\,\omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu-\tilde n}\bigl|g|_{\ker D\varphi(x)}(x)\bigr|(1+o(1)),\end{aligned}\qquad(17)$$

$$\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}(\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)) = \omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu-\tilde n}(1+o(1)),\qquad(18)$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по x из некоторой компактной окрестности, лежащей в Ω.

Разобьем доказательство на четыре основных шага. На шаге 1 покажем, что соотношение (18) следует из (17). На шагах 2, 3 установим (17). Окончательно на шаге 4 выведем формулу коплощади (14).

Шаг 1. Фиксируем точку x, проходящее через нее множество уровня $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и сублоренцев шар $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)$ с центром в этой точке и предположим, что (17) уже доказано. В силу утверждения (2) теоремы 2.14 в окрестности точки x значения $\mathfrak{d}_2^2$ и d_2^2 билипшицево эквивалентны на множестве уровня. Кроме того, из (17) и следствия 3.4 вытекает, что мера $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$ удовлетворяет условию удвоения вблизи точки x на «шарах» $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(y,s)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))$, $y\in\varphi^{-1}(\varphi(x))$, $s>0$. Тогда справедливы следующие аналоги результатов [28, леммы 3.14, 3.16].

1. Для всякого множества $A\subset\varphi^{-1}(\varphi(x))$ нулевой $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-меры и любого $\varepsilon>0$ существует его покрытие «шарами» $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_j,r_j)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))\}_{j\in\mathbb{N}}$, где $x_j\in\varphi^{-1}(\varphi(x))$, $j\in\mathbb{N}$, сумма $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-мер которых не превосходит ε.

2. Для достаточного малого $r>0$ и любого $\varepsilon>0$ существует покрытие $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))$ множествами $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_j,r_j)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))\}_{j\in\mathbb{N}}$, где $x_j\in\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и

$$\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_j,r_j)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))\subset\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x)),$$

$j\in\mathbb{N}$, такое, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_j,r_j)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x)))<\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x)))+\varepsilon.$$

Доказательство утверждений проводится, как в [28], с заменой «шаров» $\mathrm{Box}_2(y,s)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))$ «шарами» $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(y,s)\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))$, $y\in\varphi^{-1}(\varphi(x))$, $s>0$.

Осталось применить схему доказательства теоремы 3.17 из [28] с учетом результата леммы 2.10 и следствия 3.4 о положительных значениях и непрерывности всех элементов правой части (17), а также определения 2.15 меры Хаусдорфа на уровнях.

Таким образом, соотношение (18) установлено. Кроме того, показано, что мера $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde{n}}$ дифференцируема по мере $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$ на множествах уровня и восстанавливается [29, 30] по значениям производной $D_{\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}}\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde{n}}$ на всех множествах уровня.

Шаг 2. Цель следующих двух шагов — вычислить $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-меру пересечения $\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)$. На данном шаге перейдем в координаты первого рода относительно x и покажем, что

(a) $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-мера пересечения $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ равна

$$\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}(\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r))\cdot\frac{(\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*))^{1/2}}{(\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*))^{1/2}}\cdot(1+o(1)),\quad(19)$$

(b) $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-мера $(\varphi\circ\theta_x)^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ совпадает с (19) с точностью до множителя $1+o(1)$, где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно в некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω.

Чтобы вывести выражение п. (a) для $\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}$-меры $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$, построим отображение из $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)$ в $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$ и найдем искажение меры в нуле при обратном к нему.

Здесь и далее в доказательстве положим $\dim H_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\dim V_i$, $k=1,\dots,M$. Выберем $\dim V_1-\tilde{n}$ базисных векторов в $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$, являющихся горизонтальными. Тогда эти векторы будут также лежать и в $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)$. Обозначим их символами $\eta_{\tilde{n}+1},\dots,\eta_{\dim V_1}$. Без ограничения общности можно считать, что они ортонормированы. Остальные поля в $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$ выберем стандартными: $e_{\dim V_1+1},\dots,e_N$. Добавим к выбранному базису горизонтальные ортонормированные векторы из $\operatorname{span}\{\eta_{\tilde n+1},\dots,\eta_{\dim V_1}\}^\perp$ и обозначим получившийся базис символом $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$.

Рассмотрим матрицу $D_{H_2}(\varphi\circ\theta_x)(0)$, равную

$$\big(D\theta_x^{-1}\langle X_1\rangle(\varphi\circ\theta_x)(0),\dots,D\theta_x^{-1}\langle X_{\dim H_2}\rangle(\varphi\circ\theta_x)(0),\overline{0}_{\dim H_2+1},\dots,\overline{0}_N\big),$$

где $\overline{0}$ с индексом обозначает нулевой столбец с соответствующим номером, и выберем базис для ядра соответствующего ей линейного отображения следующим образом: добавим при необходимости к векторам $e_{\dim V_1+1},\dots,e_{\dim H_2}$ векторы из $\operatorname{span}\{\zeta_1,\dots,\zeta_{\tilde n}\}$. Получившиеся векторы обозначим $\eta_{\dim V_1+1},\dots,\eta_{\dim H_2}$. Тогда набор $\{\eta_i\}_{i=\tilde n+1}^{\dim H_2}\cup\{e_i\}_{i=\dim H_2+1}^N$ является базисом для $\ker D_{H_2}(\varphi\circ\theta_x)(0)$. Далее, по индукции для ядра матрицы

$$\begin{aligned}&D_{H_k}(\varphi\circ\theta_x)(0)\\&\quad=\big(D\theta_x^{-1}\langle X_1\rangle(\varphi\circ\theta_x)(0),\dots,D\theta_x^{-1}\langle X_{\dim H_k}\rangle(\varphi\circ\theta_x)(0),\overline{0}_{\dim H_k+1},\dots,\overline{0}_N\big)\end{aligned}$$

выберем базис аналогично: к стандартным векторам $e_{\dim H_{k-1}+1},\dots,e_{\dim H_k}$ добавим при необходимости векторы из $\operatorname{span}\{\zeta_1,\,\dots,\zeta_{\tilde n}\}$ и получим набор

$$\{\eta_i\}_{i=\tilde n+1}^{\dim H_k}\cup\{e_i\}_{i=\dim H_k+1}^N.$$

Здесь $k=3,\dots,M$; кроме того, $D_{H_M}(\varphi\circ\theta_x)(0)=D(\varphi\circ\theta_x)(0)$. Заметим, что данное построение базиса $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)$ возможно в силу предположений 1.20 и 2.7. Рассмотрим отображение

$$\pi:\sum_{i=\tilde n+1}^N t_i\eta_i\mapsto\sum_{i=\tilde n+1}^N t_i\zeta_i.$$

Оно обладает следующими свойствами.

1. Верно $\pi(t)\perp(t-\pi(t))$, где $t=\sum\limits_{i=\tilde n+1}^N t_i\eta_i$.
2. Если $\max\limits_{k=1,\dots,M}\big\{\big(\sum\limits_{i:\deg X_i=k}t_i^2\big)^{\frac{1}{2k}}\big\}=\rho$, то

$$\max_{i=1,\dots,N}\{|\tilde t_i-t_i|^{1/\deg X_i}\}=o(1)\cdot\rho,$$

где $\{\tilde t_i\}_{i=1}^N$ — координаты $\sum\limits_{i=\tilde n+1}^N t_i\eta_i$ в базисе $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ и $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω. Здесь предполагается, что $t_i=0$ для $i\le\tilde n$.

Свойство 1 следует из того, что по построению набора $\{\eta_i\}_{i=\tilde n+1}^N$ вектор $\eta_i-\zeta_i$ либо нулевой (если $i=\tilde n+1,\dots,\dim V_1$), либо состоит из векторов с координатами, номера которых не превосходят $\dim V_1$, и которые ортогональны множеству $\operatorname{span}\{\zeta_{\tilde n+1},\dots,\zeta_N\}$. Таким образом, из непосредственных вычислений получаем $\zeta_j\perp(\eta_i-\zeta_i)$ при любых соотношениях и значениях i и j. Подчеркнем, что здесь $i,j>\tilde n$.

Второе соотношение также следует из построения базиса $\{\eta_i\}_{i=\tilde n+1}^N$. Представим каждый вектор η_i, где $\deg X_i>1$, в виде $\zeta_i+\sum\limits_{k=1}^{\tilde n}a_k^i\zeta_k$. Тогда $\sum\limits_{i=\tilde n+1}^N t_i\eta_i$ можно преобразовать в виде

$$\sum_{i=\tilde n+1}^N t_i\eta_i=\sum_{i=\tilde n+1}^N t_i\bigg(\zeta_i+\sum_{k=1}^{\tilde n}a_k^i\zeta_k\bigg)=\sum_{i=1}^{\tilde n}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1}t_ka_i^k\Big)\zeta_i+\sum_{i=\tilde n+1}^N t_i\zeta_i \tag{20}$$

(здесь $a_k^i = 0$ для $i \le \dim V_1$), поэтому

$$\max_{i=1,\dots,N}\{|\tilde{t}_i - t_i|^{1/\deg X_i}\} = \max_{i=1,\dots,\tilde{n}}\Big\{\Big|\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big|\Big\} = o(1)\cdot\rho, \tag{21}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по некоторой окрестности x в силу непрерывности $D\varphi$ и $D_H\varphi$.

Покажем, что образ $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ при π лежит в

$$\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0, r(1+o(1))),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по некоторой окрестности x. Для этого перейдем в стандартный базис $\{e_i\}_{i=1}^N$. Заметим, что он совпадает с $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ для номеров $i > \dim V_1$.

Далее, набор $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\dim V_1}$ получен ортогональным преобразованием базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\dim V_1}$. Напомним, что $\tilde{t}_i = t_i$ для $i = \tilde{n}+1,\dots,\dim V_1$, а

$$|\tilde{t}_i| = o\Big(\max_{k=1,\dots,M}\Big\{\Big(\sum_{i:\deg X_i=k} t_i^2\Big)^{\frac{1}{2k}}\Big\}\Big)$$

для $i = 1,\dots,\tilde{n}$. Тогда координаты $(\hat{t}_1,\dots,\hat{t}_{\dim V_1})$ элемента из области определения отображения π и $(\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_{\dim V_1})$ его образа в базисе $\{e_i\}_{i=1}^{\dim V_1}$ получаются через существующие наборы координат и матрицу перехода Ξ, являющуюся ортогональной:

$$(\hat{t}_1,\dots,\hat{t}_{\dim V_1})^T = \Xi(\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_{\dim V_1})^T \quad\text{и}\quad (\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_{\dim V_1})^T = \Xi(t_1,\dots,t_{\dim V_1})^T,$$

где $t_1 = \dots = t_{\tilde{n}} = 0$. По условию имеем

$$\sum_{j=\tilde{n}+1}^{\dim V_1}\tilde{t}_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde{n}}\tilde{t}_j^2 < r^2,$$

$$\max_{k=2,\dots,M}\Big\{\Big(\sum_{i:\deg X_i=k}\tilde{t}_i^2\Big)^{\frac{1}{k}}\Big\} = \max_{k=2,\dots,M}\Big\{\Big(\sum_{i:\deg X_i=k} t_i^2\Big)^{\frac{1}{k}}\Big\} < r^2. \tag{22}$$

Кроме того, $\hat{t}_j = \langle\Xi_j^*, (\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_{\dim V_1})\rangle$ и $\bar{t}_j = \langle\Xi_j^*, (0,\dots,0,\tilde{t}_{\tilde{n}+1},\dots,\tilde{t}_{\dim V_1})\rangle$, где Ξ_j^* — строка с номером j матрицы Ξ, $j = 1,\dots,\dim V_1$. Поэтому

$$|\hat{t}_j - \bar{t}_j| = |\langle\Xi_j^*, (\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_{\tilde{n}},0,\dots,0)\rangle| = o\Big(\max_{k=1,\dots,M}\Big\{\Big(\sum_{i:\deg X_i=k} t_i^2\Big)^{\frac{1}{2k}}\Big\}\Big),$$

$j = 1,\dots,\dim V_1$. В силу ортогональности Ξ и (12) верно $\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}\tilde{t}_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}\hat{t}_i^2 \le Lr^2$, где $L < \infty$ зависит только от рассматриваемой компактной окрестности. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1} t_i^2 < Lr^2$, так как

$$(t_1,\dots,t_{\dim V_1}) = (0,\dots,0,\tilde{t}_{\tilde{n}+1},\dots,\tilde{t}_{\dim V_1}),$$

поэтому $|\hat{t}_j - \bar{t}_j| = o(r)$. Следовательно, аналогичные оценки справедливы для $\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_{\dim V_1}$: верно $\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}\bar{t}_i^2 < L'r^2$, $L' < \infty$, и тогда

$$\big|\hat{t}_j^2 - \bar{t}_j^2\big| \le o(1)\cdot r^2 \quad\text{и}\quad \left|\Big(\sum_{j=\tilde{n}+1}^{\dim V_1}\hat{t}_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde{n}}\hat{t}_j^2\Big) - \Big(\sum_{j=\tilde{n}+1}^{\dim V_1}\bar{t}_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde{n}}\bar{t}_j^2\Big)\right| \le o(1)\cdot r^2. \tag{23}$$

Окончательно

$$\sum_{j=\tilde{n}+1}^{\dim V_1} \bar{t}_j^2 - \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \bar{t}_j^2 < r^2(1+o(1))$$

и образ $\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ при π лежит в

$$\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r(1+o(1))),$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω.

Так как π биективно на свой образ, в силу оценок (22) и (23) аналогичное утверждение справедливо и для π^{-1}. Таким образом, из [28, теорема 3.11, шаги I, II] выводим

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}(\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r))\\ &=\mathscr{H}^{N-\tilde{n}}(\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r))\cdot\frac{(\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*))^{1/2}}{(\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*))^{1/2}}\cdot(1+o(1)),\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω. Напомним, что, так как матрица $D\theta_x(0)$ в базисах $\{e_i\}_{i=1}^N$ и $\{X_i(x)\}_{i=1}^N$ совпадает с единичной, в формуле используются дифференциалы φ, а не $\varphi\circ\theta_x$.

Докажем (b): покажем, почему исследование пересечения множества уровня с $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ можно заменить исследованием пересечения такого шара и касательной плоскости к множеству уровня в нуле. Рассмотрим проекцию вдоль $e_1,\dots,e_{\tilde{n}}$ множества уровня на его касательную плоскость. Пусть $y\in(\varphi\circ\theta_x)^{-1}(\varphi(x))$ и $\mathfrak{d}_2^2(0,y)=\rho^2$, $\rho<r$. По свойству (2) теоремы 2.14 справедливо

$$K_1\rho\le d_2(0,y)\le K_2\rho,\quad 0<K_1\le K_2<\infty. \tag{24}$$

Представим y в виде

$$y=y_{\ker}+y_\perp,\quad \text{где } y_{\ker}\in\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0),\ \text{а } y_\perp\in\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{\tilde{n}}\}.$$

Далее, представим $y_{\ker}$ в виде (20) в базисах $\{\eta_i\}_{i=\tilde{n}+1}^N$ и $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$:

$$y_{\ker}=\sum_{i=\tilde{n}+1}^N t_i\eta_i=\sum_{i=\tilde{n}+1}^N t_i\zeta_i+\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big)\zeta_i,$$

где в силу оценок (21)

$$d_2\left(0,\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big)\zeta_i\right)=o(1)\cdot d_2(0,y_{\ker}). \tag{25}$$

По свойствам $D_H\varphi$, равенству $(\varphi\circ\theta_x)(y)=\varphi(x)$ и (24) имеем

$$o(1)\cdot\rho=\mathrm{dist}(\varphi(x),D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\langle y\rangle)=\|D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\langle y\rangle\|, \tag{26}$$

где dist — расстояние в $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Кроме того, так как $\sum\limits_{i=\tilde{n}+1}^N t_i\zeta_i\in\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$, имеем

$$D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\langle y\rangle=D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\left\langle\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big)\zeta_i+y_\perp\right\rangle,$$

и в силу того, что вектор $\sum\limits_{i=1}^{\tilde n}\big(\sum\limits_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\big)\zeta_i + y_\perp$ горизонтален и не лежит в ядре $D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$, справедливо

$$\left\|D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\left\langle\sum_{i=1}^{\tilde n}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big)\zeta_i + y_\perp\right\rangle\right\| \geq K_3\cdot\left\|\sum_{i=1}^{\tilde n}\Big(\sum_{k:\deg X_k>1} t_k a_i^k\Big)\zeta_i + y_\perp\right\|,\quad K_3>0.$$

Следовательно, из (24), (26) и (25) выводим

$$\|y_\perp\| = o(1)(d_2(0,y)+d_2(0,y_{\ker})). \tag{27}$$

Рассмотрим расстояние $\bar d_2$, построенное, как d_2, с заменой $\{X_i\}_{i=1}^N$ постоянными полями $\{e_i\}_{i=1}^N$. В силу обобщенного неравенства треугольника

$$\bar d_2(0,y)\leq \bar d_2(0,y_{\ker}) + K_4\bar d_2(0,y_\perp)\quad\text{и}\quad \bar d_2(0,y_{\ker})\leq \bar d_2(0,y)+K_4\bar d_2(0,y_\perp),$$

$0<K_4<\infty$, поэтому из (24) и (27) следует, что

$$\bar d_2\big(0,y_{\ker}\big) = d_2\big(0,y_{\ker}\big)\leq K_5\rho\quad\text{и}\quad \bar d_2(0,y_\perp) = d_2(0,y_\perp) = \|y_\perp\| = o(1)\cdot\rho,$$

$0<K_5<\infty$. Так как координаты $y_{\ker}$ отличаются от координат y только на координаты $y_\perp$, подставляя оценки квадрата евклидовой нормы $y_\perp$ в определение 2.1, выводим $\mathfrak{d}_2^2(0,y_{\ker}) = \rho^2(1+o(1))$, где $o(1)\to 0$ при $\rho\to 0$ равномерно в некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω.

Аналогичная оценка справедлива и для обратного отображения $y_{\ker}\mapsto y$. Таким образом, построено биективное отображение $y\mapsto y_{\ker}$ пересечения поверхности уровня $(\varphi\circ\theta_x)^{-1}(\varphi(x))$ и $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)$ на множество S такое, что

$$\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r(1-o(1)))\cap\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0)\subset S \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r(1+o(1)))\cap\ker D(\varphi\circ\theta_x)(0).$$

Построенная проекция принадлежит классу C^1 (как проекция C^1-гладкой поверхности на плоскость), и якобиан такого отображения в нуле равен единице. Подчеркнем, что во всех соотношениях п. (b) величина $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω.

Шаг 3. Для доказательства (17) преобразуем множители, входящие в произведение (19). Найдем выражение для

$$\mathscr{H}^{N-\tilde n}(\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r)).$$

В силу предположения 2.7 и теоремы о неявной функции для $\sum\limits_{j=1}^{\dim V_1} w_jX_j(x)\in\ker D_H\varphi(x)$ имеем

$$(w_1,\dots,w_{\tilde n})^T = \big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T$$

(см. также замечание 2.13). Отсюда получаем, что $\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)$ является поверхностью-графиком отображения

$$(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T\mapsto\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T.$$

Представим его как

$$(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T\mapsto Q\big(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1}\big)^T,\quad Q=\begin{pmatrix}Q^-\\ Q^+\end{pmatrix},$$

где

$$Q^-(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T=(w_1,\dots,w_{n^-})^T,$$
$$Q^+(w_{\tilde n+1},\dots,w_{\dim V_1})^T=(w_{n^-+1},\dots,w_{\tilde n})^T.$$

По определению

$$E^-_{n^-}=\begin{pmatrix}-E_{n^-} & 0\\ 0 & E_{\dim V_1-n^-}\end{pmatrix}$$

и (см. также (5))

$$Q^*E^-_{n^-}Q=\begin{pmatrix}Q^-\\ Q^+\end{pmatrix}^*\cdot\begin{pmatrix}-E_{n^-} & 0\\ 0 & E_{\dim V_1-n^-}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Q^-\\ Q^+\end{pmatrix}=(Q^+)^*Q^+-(Q^-)^*Q^-.$$

Из следствия 3.4 вытекает, что форма, определяемая матрицей $E_{\tilde n}+E^-_{n^-}QQ^*$, положительно определена. Ввиду леммы 3.5 квадратичная форма, определяемая матрицей

$$E_{\dim V_1-\tilde n}+Q^*E^-_{n^-}Q=E_{\dim V_1-\tilde n}+(Q^+)^*Q^+-(Q^-)^*Q^-,$$

также положительно определена. Тогда из результатов для пересечений отображений-графиков с сублоренцевыми шарами (см., например, [26]) получаем

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^{N-\tilde n}(\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r))\\ &=\frac{(\det(E_{\dim V_1-\tilde n}+Q^*Q))^{1/2}}{(\det(E_{\dim V_1-\tilde n}+(Q^+)^*Q^+-(Q^-)^*Q^-))^{1/2}}\omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}r^{\nu-\tilde n}(1+o(1))\\ &\qquad=\frac{(\det(E_{\dim V_1-\tilde n}+Q^*Q))^{1/2}}{(\det(E_{\dim V_1-\tilde n}+Q^*E^-_{n^-}Q))^{1/2}}\omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}r^{\nu-\tilde n}(1+o(1)),\end{aligned}$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно на некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω. Поэтому

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^{N-\tilde n}(\ker D_H(\varphi\circ\theta_x)(0)\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(0,r))=\Big(\det\big(E_{\dim V_1-\tilde n}\\ &\quad+\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^*\big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big)^*\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)\big)\Big)^{1/2}\\ &\quad\times\Big(\det\big(E_{\dim V_1-\tilde n}+\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^*\big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big)^*\\ &\quad\times E^-_{n^-}\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)\big)\Big)^{-1/2}\omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu-\tilde n}(1+o(1)),\end{aligned}\tag{28}$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно на некоторой компактной окрестности x, лежащей в Ω.

Из леммы 3.5 (см. также следствие 2.11) вытекает, что первый множитель в правой части (28) совпадает с величиной

$$\frac{\Big(\det\big(E_{\tilde n}+\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^*\big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big)^*\big)\Big)^{1/2}}{\Big(\det\big(E_{\tilde n}+E^-_{n^-}\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)\big(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^*\big(\big(D_H^{\tilde n}\varphi(x)\big)^{-1}\big)^*\big)\Big)^{1/2}}.\tag{29}$$

Домножая числитель и знаменатель на

$$\big(\det\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)^*\big)\big)^{1/2}=\big(\det\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)\big)^{1/2}\cdot\big(\det\big(\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)^*\big)\big)^{1/2}$$

и учитывая представление

$$\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*)=\det\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)D^{\tilde n}_H\varphi(x)^*+\big(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)\big(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)^*\big),$$

выводим равенство (29) соотношению

$$(\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*))^{1/2}\big(\det\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)D^{\tilde n}_H\varphi(x)^* \\ +\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)E^-_{n^-}\big(D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)^{-1}\big(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)\big(D_H\setminus D^{\tilde n}_H\varphi(x)\big)^*\big)\big)^{-1/2}.$$

Следовательно, с учетом результата шага 2, в частности, соотношения (19), выводим (17):

$$\mathscr{H}^{N-\tilde n}(\varphi^{-1}(\varphi(x))\cap\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)) \\ =\frac{(\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*))^{1/2}}{\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,x)}\omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k}r^{\nu-\tilde n}|g|_{\ker D\varphi(x)}(x)|(1+o(1)),$$

где g — риманов тензор на $\mathbb{G}$ и $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по x из некоторой компактной окрестности, лежащей в Ω.

Шаг 4. С учетом (17), (18), определения 3.1 и дифференцируемости $\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}$ по $\mathscr{H}^{N-\tilde n}$ получаем

$$D_{\mathscr{H}^{N-\tilde n}}\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}(y)=\frac{\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,y)}{(\det(D\varphi(y)D\varphi(y)^*))^{1/2}|g|_{\ker D\varphi(y)}(y)|},\quad y\in\Omega.$$

Кроме того, так как мера $\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}$ восстанавливается $D_{\mathscr{H}^{N-\tilde n}}\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}$, верно

$$\int\limits_A\frac{\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,y)}{(\det(D\varphi(y)D\varphi(y)^*))^{1/2}|g|_{\ker D\varphi(y)}(y)|}\,d\mathscr{H}^{N-\tilde n}(y)=\int\limits_A d\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}(y)$$

для измеримых $A\subset\varphi^{-1}(z)$, $z\in\mathbb{R}^{\tilde n}$. Далее доказательство следует схеме, аналогичной выводу субримановой формулы коплощади [28, теорема 3.21]:

$$\int\limits_\Omega\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,x)\,d\mathscr{H}^\nu(x)=\int\limits_\Omega\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,x)\frac{1}{|g(x)|}\,d\mathscr{H}^N(x) \\ =\int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}}d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)}\frac{\mathscr{J}^{n^-}_{\tilde n}(\varphi,y)|g(y)|}{(\det(D\varphi(y)D\varphi(y)^*))^{1/2}|g(y)||g|_{\ker D\varphi(y)}(y)|}\,d\mathscr{H}^{N-\tilde n}(y) \\ =\int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}}d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)}D_{\mathscr{H}^{N-\tilde n}}\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}_{\mathfrak{d}}(y)\,d\mathscr{H}^{N-\tilde n}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{\tilde n}}d\mathscr{H}^{\tilde n}(z)\int\limits_{\varphi^{-1}(z)}d\mathscr{H}^{\nu-\tilde n}(y).$$

Теорема доказана. □

Замечание 3.6. Установленная в настоящей работе формула коплощади новая и для классического случая, когда множества уровня принадлежат структурам геометрии Минковского, т. е. область определения отображения —

евклидово пространство. В частности, для функций, определенных на структурах классической геометрии Минковского, формула коплощади имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{(\partial_t\varphi)^2 - (\partial_x\varphi)^2 - (\partial_y\varphi)^2 - (\partial_z\varphi)^2}\, d\mathscr{H}^4 = \int\limits_{\mathbb{R}} du \int\limits_{\varphi^{-1}(u)} d\mathscr{H}^3_{\mathfrak{d}},$$

где $\mathscr{H}^3_{\mathfrak{d}}$ построена по шарам в (1), а условие пространственноподобия поверхностей уровня выглядит как

$$(\partial_t\varphi)^2 - (\partial_x\varphi)^2 - (\partial_y\varphi)^2 - (\partial_z\varphi)^2 \geq c > 0.$$

Таким образом, на классических структурах геометрии Минковского и на их римановых обобщениях верен следующий результат.

Теорема 3.7. *Пусть* $\dim V_1 = N$*; иными словами,* $V_1 = V$ *и* $V_2 = \{0\}$. *Утверждения теоремы* 3.2 *и следствия* 3.3, *а также все вспомогательные утверждения, включая утверждение о пространственноподобии поверхностей уровня, справедливы для отображений класса* C^1 *с заменой субриманова дифференциала классическим при выполнении аналогов предположений* 1.20 *и* 2.7.

4. Вектор-функции на многообразиях Карно

Утверждения теоремы 3.2 и следствия 3.3 справедливы и для вектор-функций, определенных на классах пространств Карно — Каратеодори.

Определение 4.1 ([31], ср. [32, 33]). Фиксируем связное риманово C^∞-многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N. Пусть в его касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация

$$H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такая, что для каждого $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$, $U \ni p$, с набором полей $X_1, \dots, X_N$ класса C^1, обладающая следующими свойствами.

(1) Подпространство $H_i\mathbb{M}(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ имеет размерность $\dim H_i$ независимо от $v \in U$, $i = 1, \dots, M$.

(2) Верны включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M$, $i + j \leq M$.

В этом случае набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ называется *пространством Карно — Каратеодори*.

Если, кроме того, выполнено (3), то набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ — *многообразие Карно*:

(3) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \left[\frac{j+1}{2}\right]$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \dots, M-1$.

Для упрощения обозначений пространство Карно — Каратеодори (или многообразие Карно) будем обозначать символом $\mathbb{M}$. Подрасслоение $H_1\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*, число M — *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$.

Определение 4.2. *Степень* поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$.

Замечание 4.3. Из условия (2) определения 4.1 следует, что

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k: \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \quad i, j = 1, \dots, N. \tag{30}$$

Для описания субриманова аналога дифференцируемости введем понятие локальной однородной группы и выведем ее главные свойства. Субриманова дифференцируемость по аналогии с классической, в определении которой участвуют отображения касательных пространств, вводится через отображения локальных однородных групп, аппроксимирующих пространства Карно — Каратеодори в их внутренней геометрии [24, 34].

Теорема 4.4 [34]. *Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Набор*

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) \text{ из } (30), & \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{31}$$

определяет нильпотентную градуированную алгебру Ли.

Иными словами, при фиксированном $u \in \mathbb{M}$ константы из набора (31) обладают свойством антисимметричности и удовлетворяют тождеству Якоби и, таким образом, являются структурными константами некоторой алгебры Ли. Построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$ со структурными постоянными теоремы 4.4 как нильпотентную градуированную алгебру Ли векторных полей $\{(\widehat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ такую, что экспоненциальное отображение

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\widehat{X}_i^u)'\right)(0)$$

тождественно [35]. В силу этого $x_i = \exp\bigl(x_i(\widehat{X}_i^u)'\bigr)(0)$. Следовательно, $e_i = (\widehat{X}_i^u)'(0)$. Соответствующую группу Ли обозначим через $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$. По построению для векторных полей $\{(\widehat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ справедливы соотношения

$$\bigl[(\widehat{X}_i^u)', (\widehat{X}_j^u)'\bigr] = \sum_{k:\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u)(\widehat{X}_k^u)',$$

$i, j = 1, \dots, N$, всюду на $\mathbb{R}^N$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа [35] (см. также (2)). Базисные векторные поля $(\widehat{X}_i^u)' \in \mathfrak{g}^u$, $i = 1, \dots, N$, левоинвариантны относительно этой групповой операции. Используя экспоненциальное отображение θ_u (оно определяется так же, как и в свойстве 1.10), перенесем поля $(\widehat{X}_i^u)'$ на $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$:

$$\bigl[(\theta_u)_*\langle(\widehat{X}_i^u)'\rangle\bigr](\theta_u(x)) = D\theta_u(x)\langle(\widehat{X}_i^u)'(x)\rangle,$$

и получим поля $\widehat{X}_i^u = (\theta_u)_*(\widehat{X}_i^u)'$, $i = 1, \dots, N$. Напомним, что $\widehat{X}_i^u(u) = X_i(u)$, $i = 1, \dots, N$.

Определение 4.5. Группа (Ли), ассоциированная с алгеброй Ли $\{\widehat{X}_i^u\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется *локальной однородной группой* $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$. Определим ее таким образом, чтобы отображение θ_u было *локальным групповым изоморфизмом* окрестностей единиц $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ и $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$.

Каноническая риманова структура на $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$ определяется внутренним произведением в единице $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$, совпадающим с произведением на $T_u\mathbb{M}$. Каноническая риманова структура на $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ определяется таким образом, что локальный групповой изоморфизм θ_u — изометрия.

Итак, для многообразий Карно локальной однородной группой является группа Карно.

Замечание 4.6 (см., например, [32]). В случае, когда поля $X_1,\dots,X_N$ принадлежат классу C^1, соответствующие поля $\widehat{X}_1^u,\dots,\widehat{X}_N^u$ только непрерывны. Поэтому экспоненциальное отображение

$$\theta_v^u(x_1,\dots,x_N)=\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i\widehat{X}_i^u\right)(v)$$

для таких полей будем определять как

$$\theta_u\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i\big(\widehat{X}_i^u\big)'\right)\big(\theta_u^{-1}(v)\big)\right).$$

Опишем понятие субримановой дифференцируемости для отображений, определенных на пространствах Карно — Каратеодори.

Определение 4.7 (см., например, [24]). Пусть $\mathbb{M}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно — Каратеодори и $\Omega\subset\mathbb{M}$. Отображение $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{M}}$ *дифференцируемо в субримановом смысле*, или *hc-дифференцируемо*, в (предельной) точке $x\in\Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\widehat{D}\varphi(x):\mathscr{G}^x\mathbb{M}\to\mathscr{G}^{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{M}}$ локальных однородных групп такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(y),\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)=o(d_2(x,y)),\ y\in\Omega,\quad o(1)\to 0 \text{ при } y\to x.$$

Теорема 4.8 [24]. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{M}$ — открытое подмножество многообразия Карно $\mathbb{M}$. Отображения $\varphi\in C_H^1(\Omega,\widetilde{\mathbb{M}})$ (см. определение 1.18) непрерывно hc-дифференцируемы всюду.*

Замечание 4.9. Если $\widetilde{\mathbb{M}}=\mathbb{R}^{\tilde{n}}$, то

$$\widehat{D}\varphi(x)=D_H\varphi(x)=(X_1\varphi(x),\dots,X_{\dim H_1}\varphi(x),0,\dots,0)$$

в каждой точке $x\in\Omega$.

Остальные определения, утверждения и рассуждения разделов 1 (аналоги определений 1.7 и 1.14 и вытекающие из них свойства), 2 (в частности, аналоги определений 2.1, 2.4 и 2.15 и замечания 2.5) и 3 повторяются почти дословно с очевидными изменениями. Таким образом, для многообразий Карно, на которых введена сублоренцева структура с соответствующим квадратом расстояния (аналог определения 2.1), имеет место

Теорема 4.10. *Пусть $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ принадлежит классу C^1, где $\Omega\subset\mathbb{M}$ — открытое подмножество многообразия Карно $\mathbb{M}$, $\tilde{n}<\dim H_1$ и $\operatorname{rank} D_H\varphi(x)=\tilde{n}$ в каждой точке x. Пусть, кроме того, hc-дифференциал отображения φ удовлетворяет условиям предположения 2.7. Тогда*

1) *поверхности уровня отображения φ пространственноподобны;*
2) *справедлива формула коплощади (14), а также (15) для $n^-=\tilde{n}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* Формула коплощади для функций на 2-ступенчатых группах Карно с сублоренцевой структурой // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 61–64.
2. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf. 2011.
3. *Nielsen B.* Minimal immersion, Einstein's equations and Mach's principle // J. Geom. Phys. 1987. V. 4. P. 1–20.

4. *Naber G. L.* The geometry of Minkowski spacetime. An introduction to the mathematics of the special theory of relativity. Berlin: Springer-Verl., 1992. (Appl. Math. Sci.; V. 92).
5. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
6. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.
7. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59, N 7. P. 885–900.
8. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. V. 17, N 1. P. 49–75.
9. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.
10. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. V. 18, N 4. P. 1150–1177.
11. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in R3. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. 2014. V. 20, N 1. P. 59–89.
12. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. V. 50, N 2. P. 161–178.
13. *Grochowski M.* Remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. 2013. V. 3, N 4. P. 295–309.
14. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.
15. *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.
16. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
17. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.
18. *Craig W., Weinstein S.* On determinism and well-posedness in multiple time dimensions // Proc. R. Soc. A. 2008. V. 465, N 2110. P. 3023–3046.
19. *Bars I., Terning J.* Extra dimensions in space and time. New York, NY: Springer-Verl., 2010.
20. *Velev M.* Relativistic mechanics in multiple time dimensions // Physics Essays. 2012. V. 25, N 3. P. 403–438.
21. *Карманова М. Б.* Пространственноподобие классов поверхностей уровня на группах Карно и их метрические свойства // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. С. 38–42.
22. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
23. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
24. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemporary Mathematics; V. 424).
25. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.
26. *Карманова М. Б.* Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
27. *Ostrowsky, A.* Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants // Bull. Sci. Math. 1937. V. 61. P. 19–32.
28. *Karmanova M., Vodopyanov S.* A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.
29. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
30. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. IШ // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

31. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
32. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser-Verl., 1996. P. 79–318.
33. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
34. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Basel: Birkhäuser-Verl., 2009. P. 233–335.
35. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 8 июня 2020 г.
После доработки 3 октября 2020 г.
Принята к публикации 9 октября 2020 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com