А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, О комбинировании нестандартных методов. I. Монадология, *Сиб. матем. журн.*, 1990, том 31, номер 5, 69–78

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 31, № 5 СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ 1990

УДК 517.11 + 517.43

А. Г. КУСРАЕВ, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

О КОМБИНИРОВАНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ. I. МОНАДОЛОГИЯ

Нестандартные методы анализа в настоящее время воспринимаются в основном как объединенные в два крупных направления — инфинитезимальный анализ (=робинсоновский нестандартный анализ) и булевозначный анализ (см. [1] и приведенную там библиографию).

Робинсоновский нестандартный анализ приводит к ряду упрощений за счет актуализации конструкций, рассматриваемых при обычном подходе как потенциально осуществимые. Булевозначный анализ позволяет существенно продвинуться в теории операторов за счет увеличения объема классических фактов, относящихся к функционалам. Подчеркнем, что приведенные в последних двух предложениях утверждения характеризуют лишь небольшую часть типичных свойств упомянутых направлений.

При изучении задач функционального анализа, мотивированных теорией пространств Канторовича, возникает необходимость комбинирования идейных и технических средств, доставляемых нестандартными моделями теории множеств. Следует особо указать, что булевозначный и инфинитезимальный варианты анализа наряду с общностью «нестандартности» подхода имеют принципиальные содержательные и технические отличия. В этой связи возникают многообразные возможности их совместного применения. Один из продуктивных подходов состоит в изучении стандартной булевозначной модели, расположенной в универсуме внутренних множеств Нельсона (или, более общо, внешних множеств Каваи). При этом специфические средства, связанные с предикатом стандартности, используются во внешнем для булевозначного универсума мире — в мире спусков. Содержательно говоря, в рамках излагаемого подхода, руководствуясь неоклассической установкой нестандартного анализа, стандартное K-пространство E с базой B изучают с помощью стандартного отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$. Изложенный вариант исследования циклических и экстенсиональных фильтров и родственные приложении к теории K-пространств представлены в [2, 3].

В ряде случаев целесообразно поступать иным способом, т. е. применять инфинитезимальные методы к объектам, лежащим внутри $V^{(B)}$. Действительно, пусть мы начинаем анализ оператора T, действующего в E, с превращения его с помощью подъема в $V^{(B)}$ в функционал $T\uparrow$. Тогда интерпретируя результаты инфинитезимального анализа функционалов и осуществляя последующий спуск, мы можем выяснить интересующие нас свойства исходного T. Фактически этот подход реализовывался в некоторых наших работах. Именно он и станет отправным пунктом последующего анализа.

Цель исследования, начатого настоящей работой,— развить и упростить некоторые формальные возможности, возникающие на изложенном пути комбинирования процедур подъема и спуска с промежуточным привлечением аппарата нестандартного анализа в робинсоновском варианте. В дальнейшем основное внимание уделено возникающим техническим средствам, которые представляются полезными в задачах анализа. Многие интересные математические факты и проблемы, связанные с формализацией процессов переноса и интерпретации, сознательно оставлены нами для иных времен. В этой первой работе мы собрали необходимые в последующем простейшие факты, относящиеся к монадологии.

§ 1. Предварительные сведения

Ниже считаются фиксированными полная булева алгебра B и отделимый булевозначный универсум $V^{(B)}$. Оценка истинности формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля обозначается через $[\varphi]$. Прочая терминология и символика булевозначного анализа, используемые в дальнейшем, также согласованы с [1].

Применяя средства инфинитезимального анализа, мы имеем в виду классический подход А. Робинсона, реализованный внутри $V^{(B)}$ (см. [1]). Иными словами, в конкретных ситуациях имеются в виду стандартная и нестандартная суперструктуры и соответствующее *$*$-изображение — робинсоновская стандартизация*, представленные элементами $V^{(B)}$. При этом нестандартное расширение предполагается должным образом насыщенным. Под *спуск-стандартизацией* по определению понимается спуск $*$-изображения. Наряду с термином спуск-стандартизация используются также выражения: «*B-стандартизация*», «*простандартизация*». При этом для робинсоновской стандартизации B-множества A применяется символ $^*A$. Соответственно спуск-стандартизация множества A с *B-структурой* (т. е. подмножества $V^{(B)}$), по определению представленная $({}^*(A\uparrow))\downarrow$, обозначается символом ${}_*A$ (здесь $A\uparrow$ — это элемент рассматриваемой в $V^{(B)}$ стандартной суперструктуры «классических» множеств). Таким образом, ${}^*a \in {}_*A \leftrightarrow a \in A\uparrow\downarrow$. Естественным путем определена и спуск-стандартизация ${}_*\Phi$ экстенсионального соответствия Φ. При необходимости рассматривать спуск-стандартизации стандартных имен элементов универсума фон Неймана V мы для удобства используем сокращения, полагая ${}^*x := {}^*(x^\wedge)$ и соответственно ${}_*x := ({}^*x)\downarrow$ для $x \in V$. Правила расстановки и опускания (по умолчанию) звездочек при использовании спуск-стандартизаций без особых оговорок считаются столь же свободными, как и применяемые для робинсоновского $*$-изображения.

В качестве иллюстраций приведем некоторые простейшие правила расстановки звездочек и варианты принципов переноса и идеализации в рассматриваемой нами ситуации.

1.1. *Для множеств F, $G \in \mathscr{P}(V^{(B)})$ и экстенсионального соответствия Φ выполнено*

$$ {}_*(G \cap F) = {}_*G \cap {}_*F,\quad {}_*(G \cup F) = ({}_*G \cup {}_*F)\uparrow\downarrow; $$
$$ {}_*\Phi({}_*G) = {}_*\Phi(G). $$

$\triangleleft$ Доказательство состоит в последовательном применении правил спусков и подъемов и свойств $*$-изображения. Например, вывод второй из формул заключен в следующей выкладке:

$$ {}_*(G \cup F) = ({}^*((G \cup F)\uparrow))\downarrow = ({}^*(G\uparrow \cup F\downarrow)) = $$
$$ = ({}^*(G\uparrow) \cup {}^*(F\uparrow))\downarrow = (({}^*(G\uparrow))\downarrow \cup ({}^*(F\uparrow))\downarrow)\uparrow\downarrow = ({}_*G \cup {}_*F)\uparrow\downarrow. \ \triangleright $$

1.2. *Пусть $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство непустых множеств с B-структурой и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы. Тогда для перемешиваний имеет место равенство*

$$ {}_*\left(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\right) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi {}_*A_\xi. $$

$\lhd$ Положим $A := \Sigma_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi$. Ясно, что для каждого $\xi \in \Xi$ верно $b_\xi \leqslant [A_\xi\uparrow = A\uparrow] = [{}^*(A_\xi\uparrow) = {}^*(A\uparrow)]$. Отсюда следует, что $({}_*A)\uparrow$ — это перемешивание $(({}_*A_\xi)\uparrow)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В этом случае (см. [2]) ${}_*A = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi {}_*A_\xi$, что и требовалось установить. $\rhd$

1.3. Принцип переноса. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ — формула теории Цермело — Френкеля (не содержащая никаких свободных переменных, кроме x и y). Для непустого в $V^{(B)}$ элемента F и каждого z выполнено*

$$(\exists x \in {}_*F)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\exists x \in F\downarrow)\ [\varphi(x, z)] = 1;$$
$$(\forall x \in {}_*F)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\forall x \in F\downarrow)\ [\varphi(x, z)] = 1.$$

Если G — некоторое подмножество $V^{(B)}$, то справедливы эквивалентности

$$(\exists x \in {}_*G)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\exists x \in G\uparrow\downarrow)\ [\varphi(x, z)] = 1;$$
$$(\forall x \in {}_*G)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\forall x \in G)\ [\varphi(x, z)] = 1.$$

$\lhd$ Используя определения и привлекая последовательно как принцип максимума булевозначного анализа, так и принцип переноса для робинсоновской стандартизации — принцип Лейбница, выводим:

$$(\exists x \in {}_*F)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow [(\exists x \in {}^*F)\ \varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(\exists x \in F)\ \varphi(x, z)] = 1 \leftrightarrow (\exists x \in F\downarrow)\ [\varphi(x, z)] = 1;$$
$$(\forall x \in {}_*G)\ [\varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow [(\forall x \in ({}_*G)\uparrow)\ \varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(\forall x \in {}^*(G\uparrow))\ \varphi(x, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow [(\forall x \in G\uparrow)\ \varphi(x, z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{x\in G} [\varphi(x, z)] = 1 \leftrightarrow (\forall x \in G)\ [\varphi(x, z)] = 1.$$

Прочие две эквивалентности справедливы как частные случаи установленных. $\rhd$

1.4. Принцип идеализации. *Пусть $X\uparrow$, Y — (классические) элементы $V^{(B)}$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Для внутреннего в $V^{(B)}$ элемента z выполнено*

$$(\forall^{\text{fin}} A \subset X)(\exists y \in {}_*Y)\ (\forall x \in A)\ [\varphi({}^*x, y, z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists y \in {}_*Y)(\forall x \in X)\ [\varphi({}^*x, y, z)] = 1.$$

$\lhd$ Действительно, привлекая принцип переноса булевозначного анализа, имеем

$$[(\forall A \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(X\uparrow))\ \ (\exists y \in {}^*Y)\ \ (\forall x \in A)\ \ \varphi({}^*x, y, z)] =$$
$$= [(\exists y \in_* Y)\ \ (\forall x \in X)\ \ \varphi({}^*x, y, z)].$$

Осталось заметить, что $\mathscr{P}_{\text{fin}}(X\uparrow) = \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)^{\uparrow\uparrow} := \{A\uparrow :\ A \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)\}\uparrow$ и применить правила подсчета оценок в $V^{(B)}$. $\rhd$

§ 2. Спуски монад

В этом параграфе излагаются фрагменты монадологии, относящиеся к изображению и сравнению фильтров в булевозначной модели. Изложение ведется в параллель с теорией циклических монад, представленной в [2, 3].

2.1. Пусть $\mathscr{S}$ — базис фильтра в некотором подмножестве $V^{(B)}$ и $\mathscr{S}' := \{G\uparrow :\ G \in \mathscr{S}\}$. Как обычно, символом $\mathscr{S}^\uparrow$ обозначим фильтр внутри $V^{(B)}$ с базисом $\mathscr{S}'\uparrow$. Элемент $\mathscr{S}^\uparrow$ называют *подъемом* фильтра $\mathscr{S}$. Для фильтра $\mathscr{F}$ внутри $V^{(B)}$ его спуск $\mathscr{F}^\downarrow$ определяют как совокупность надмножеств базиса $\{F\downarrow :\ F \in \mathscr{F}\downarrow\}$. Наконец, циклическая оболочка $\mathscr{S}\uparrow\downarrow$ базиса фильтра $\mathscr{S}$ определена как фильтр с базисом $\{G\uparrow\downarrow :\ G \in \mathscr{S}\}$.

2.2. Для фильтра $\mathcal{F}$ из множеств с B-структурой его *спуск-монаду* $m(\mathcal{F})$ вводят соотношением

$$m(\mathcal{F}) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}_*F.$$

2.3. (1) *Спуск-монада фильтра — это спуск монады его подъема;*

(2) *подъем спуск-монады служит монадой подъема фильтра;*

(3) *для каждого множества F элементов $V^{(B)}$ выполнено $F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow {}_*F \supset m(\mathcal{F})$;*

(4) *у фильтра $\mathcal{F}$ и у его циклической оболочки $\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$ совпадают спуск-монады.*

◁ Утверждения (1), (2) устанавливаются одновременно такой выкладкой:

$$z \in m(\mathcal{F}) \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})\ z \in {}_*F \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})\ [z \in {}^*(F\uparrow)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{F \in \mathcal{F}} [z \in {}^*(F\uparrow)] = 1 \leftrightarrow \left[(\forall F \in \mathcal{F}^{\uparrow})\ z \in {}^*F\right] =$$
$$= 1 \leftrightarrow \left[z \in \mu(\mathcal{F}^{\uparrow})\right] = 1 \leftrightarrow z \in \mu(\mathcal{F}^{\uparrow})\downarrow.$$

Для проверки утверждения (3) следует привлечь то обстоятельство, что множество входит в фильтр в том и только в том случае, если его $*$-изображение содержит монаду этого фильтра. С учетом отмеченного, вычисляя оценки истинности, получим (ср. п. 1.3):

$$F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{F}^{\uparrow}\downarrow)\ F \supset G\downarrow \leftrightarrow \left[(\exists G \in \mathcal{F}^{\uparrow})\ G \subset F\uparrow\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left[F\uparrow \in \mathcal{F}^{\uparrow}\right] = 1 \leftrightarrow \left[{}^*(F\uparrow) \supset \mu(\mathcal{F}^{\uparrow})\right] = 1 \leftrightarrow {}_*F \supset \mu(\mathcal{F}^{\uparrow})\downarrow = m(\mathcal{F}).$$

Утверждение (4) обеспечено тем, что $\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow\uparrow} = \mathcal{F}^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. ▷

2.4. *Пусть $(\mathcal{F}_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство фильтров, $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы и $\mathcal{F} := \Sigma_{\xi \in \Xi} b_\xi \mathcal{F}_\xi{}^{\uparrow}$ — перемешивание $(\mathcal{F}_\xi{}^{\uparrow})_{\xi \in \Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Тогда*

$$m(\mathcal{F}^{\downarrow}) = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi m(\mathcal{F}_\xi).$$

◁ По определению перемешивания имеем $[\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi{}^{\uparrow}] \geqslant b_\xi$ для $\xi \in \Xi$. Поскольку фильтры внутри $V^{(B)}$ совпадают, если и только если у них одинаковые монады, выводим

$$(\forall \xi \in \Xi)\ \left[\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi^{\uparrow}\right] \geqslant b_\xi \leftrightarrow (\forall \xi \in \Xi)\ \left[\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}_\xi^{\uparrow})\right] \geqslant b_\xi \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall \xi \in \Xi)\ b_\xi \mu(\mathcal{F})\downarrow = b_\xi \mu(\mathcal{F}_\xi^{\uparrow})\downarrow \leftrightarrow m(\mathcal{F}^{\downarrow}) = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi m(\mathcal{F}_\xi). \ ▷$$

2.5. *Пусть Φ — экстенсиональное соответствие и фильтр $\mathcal{F}$ задевает эффективную область определения Φ. Тогда спуск-монада образа фильтра — это образ спуск-монады:*

$$m(\Phi(\mathcal{F})) = ({}_*\Phi)(m(\mathcal{F})).$$

◁ Учитывая, что внутри $V^{(B)}$ монада образа служит образом монады фильтра $\mathcal{F}^{\uparrow}$, последовательно выводим (ср. п. 1.1):

$$({}_*\Phi)(m(\mathcal{F})) = ({}^*(\Phi\uparrow))\downarrow\left(\mu(\mathcal{F}^{\uparrow})\downarrow\right) = \left(({}^*\Phi\uparrow))(\mu(\mathcal{F}^{\uparrow}))\right)\downarrow =$$
$$= \mu\left(\Phi\uparrow(\mathcal{F}^{\uparrow})\right)\downarrow = \mu\left(\Phi(\mathcal{F})^{\uparrow}\right)\downarrow = m(\Phi)).$$

Здесь мы учли п. 2.3(2) и правило $\Phi\uparrow(\mathcal{F}^{\uparrow}) = \Phi(\mathcal{F})^{\uparrow}$. ▷

2.6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *фильтры $\mathcal{F}^{\uparrow}$ и $\mathcal{G}^{\uparrow}$ задевают друг друга внутри $V^{(B)}$;*

(2) *для любых $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$ имеем $F\uparrow\downarrow \cap G\uparrow\downarrow \neq \varnothing$;*

(3) *спуск-монады* $m(\mathscr{F})$ *и* $m(\mathscr{G})$ *имеют общую точку. При соблюдении эквивалентных условий* (1)—(3) *выполнено*

$$m(\mathscr{F})\cap m(\mathscr{G})=m(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}\vee\mathscr{G}{\uparrow}{\downarrow});$$
$$\mathscr{F}^{\uparrow}\vee\mathscr{G}^{\uparrow}=(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}\vee\mathscr{G}{\uparrow}{\downarrow})^{\uparrow}.$$

$\lhd$ Справедливы оценки

$$[\exists\mathscr{F}^{\uparrow}\vee\mathscr{G}^{\uparrow}]=[(\forall F\in\mathscr{F}^{\uparrow})\ (\forall G\in\mathscr{G}^{\uparrow})\ F\cap G\neq\varnothing]=$$
$$=\bigwedge_{F\in\mathscr{F}}\bigwedge_{G\in\mathscr{G}}[F{\uparrow}\cap G{\uparrow}\neq\varnothing]=[m(\mathscr{F}){\uparrow}\cap m(\mathscr{G}){\uparrow}\neq\varnothing],$$

из которых вытекают требуемые заключения. $\rhd$

2.7. *Для фильтров* $\mathscr{F}$ *и* $\mathscr{G}$ *выполнено*

$$m(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})=(m(\mathscr{F})\cup m(\mathscr{G})){\uparrow}{\downarrow};$$
$$\mathscr{F}^{\uparrow}\wedge\mathscr{G}^{\uparrow}=(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})^{\uparrow}.$$

$\lhd$ По определению фильтр $(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$ имеет базис $\{(F\cup G){\uparrow}\colon F\in\mathscr{F},\ G\in\mathscr{G}\}{\uparrow}$. Отсюда с учетом равенства $(F\cup G){\uparrow}=F{\uparrow}\cup G{\uparrow}$ заключаем, что $(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})^{\uparrow}=\mathscr{F}^{\uparrow}\wedge\mathscr{G}^{\uparrow}$. Значит, по п. 2.3

$$m(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G}){\uparrow}=\mu((\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})^{\uparrow})=\mu(\mathscr{F}^{\uparrow}\wedge\mathscr{G}^{\uparrow})=$$
$$=\mu(\mathscr{F}^{\uparrow})\cup\mu(\mathscr{G}^{\uparrow})=m(\mathscr{F}){\uparrow}\cup m(\mathscr{G}){\uparrow}.$$

Осталось вспомнить, что $(m(\mathscr{F}){\uparrow}\cup m(\mathscr{G}){\uparrow}){\downarrow}=(m(\mathscr{F})\cup m(\mathscr{G})){\uparrow}{\downarrow}$. $\rhd$

2.8. Теорема. *Пусть* $\mathscr{E}$ — *множество фильтров и* $\mathscr{E}^{\uparrow}:=\{\mathscr{F}^{\uparrow}\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}{\uparrow}$ — *его подъем в* $V^{(B)}$. *Эквивалентны утверждения*:

(1) *множество циклических оболочек* $\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}:=\{\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}$ *ограничено сверху*;

(2) *множество* $\mathscr{E}^{\uparrow}$ *ограничено сверху внутри* $V^{(B)}$;

(3) $\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}\neq\varnothing$;

При соблюдении эквивалентных условий (1)—(3) *выполнено*

$$m(\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow})=\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\};$$
$$\sup\mathscr{E}^{\uparrow}=(\sup\mathscr{E})^{\uparrow}.$$

$\rhd$ Если $\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$ ограничено сверху, то для $\mathscr{G}:=\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$ и $\mathscr{F}\in\mathscr{E}$ будет $\mathscr{G}\geqslant\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ и, стало быть, $m(\mathscr{G})\subset m(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})=m(\mathscr{F})$ на основании п. 2.3(4). Итак, $m(\mathscr{G})\subset\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}$. Пусть теперь $F\in\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$. Имеется конечное множество $\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}$ такое, что $F\in\sup(\mathscr{E}_0{\uparrow}{\downarrow})$. Следовательно, ${}^*F\supset m(\sup(\mathscr{E}_0{\uparrow}{\downarrow}))$. Ввиду п. 2.5 заключаем ${}^*F\supset\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}=\mathscr{E}_0\}$. Окончательно выводим

$$m(\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow})\supset\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}_0,\ \mathscr{E}_0\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{E})\}=\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}.$$

Приведенные рассуждения устанавливают импликации (1)$\to$(2)$\to$(3) и требуемое для спуск-монад равенство. Если же известно, что выполнено (3), то для любого конечного подмножества $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ непусто пересечение $\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}_0\}$. Значит, на основании п. 2.6 имеется точная верхняя граница $\sup(\mathscr{E}_0{\uparrow}{\downarrow})$, а потому и граница $\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$.

Завершается доказательство следующим подсчетом оценок истинности:

$$[\sup\mathscr{E}^{\uparrow}=(\sup\mathscr{E})^{\uparrow}]=[\mu((\sup\mathscr{E})^{\uparrow})=\bigcap\{\mu(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\{\mathscr{F}^{\uparrow}\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}^{\uparrow}\}]=$$
$$=[m(\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}){\uparrow}=\bigcap\{m(\mathscr{F}){\uparrow}\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}{\uparrow}]=$$
$$=[m(\sup\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}){\uparrow}=\bigcap\{m(\mathscr{F})\colon\mathscr{F}\in\mathscr{E}\}{\uparrow}].\qquad\rhd$$

2.9. Полезно подчеркнуть, что для бесконечного множества спуск-монад их объединение и даже циклическая оболочка этого объединения спуск-монадой, вообще говоря, не является. Ситуация здесь повторяет общеизвестную для обычных монад.

2.10. *Пусть* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейство циклических фильтров. Тогда для спуск-монад выполнено*

$$m\Big(\prod_{\xi\in\Xi}\mathscr{F}_\xi\Big)=\prod_{\xi\in\Xi}m(\mathscr{F}_\xi).$$

$\triangleleft$ Обозначим через $\mathscr{F}$ произведение рассматриваемых фильтров. Тогда в очевидных обозначениях справедливо представление $\mathscr{F}=\sup\{\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi)\colon \xi\in\Xi\}$. Сохраняя символ $(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})_{\xi\in\Xi^\wedge}$ для подъема отображения $\xi\mapsto\mathscr{F}_\xi^{\uparrow}$ и привлекая пп. 2.3 и 2.8, имеем

$$m(\mathscr{F})=\bigcap\{m(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi))\colon \xi\in\Xi\}=\big(\bigcap\{\mu(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\colon \xi\in\Xi\}\!\uparrow\big)\!\downarrow=$$
$$=\mu\big(\sup\{\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\colon \xi\in\Xi^\wedge\}\big)\!\downarrow=\mu\Big(\prod_{\xi\in\Xi^\wedge}\mathscr{F}_\xi^{\uparrow}\Big)\!\downarrow=\Big(\prod_{\xi\in\Xi^\wedge}\mu(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\Big)\!\downarrow.$$

Итак,

$$x\in m(\mathscr{F})\leftrightarrow\Big[x\in\prod_{\xi\in\Xi^\wedge}\mu(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\Big]=1\leftrightarrow\big[(\forall\xi\in\Xi^\wedge)\ x_\xi\in\mu(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\big]=1\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\xi\in\Xi)\ \Big[x_{\xi^\wedge}\in\mu\big(\mathscr{F}_{\xi^\wedge}^{\uparrow}\big)\Big]=1\leftrightarrow(\forall\xi\in\Xi)\ x_\xi\in\mu(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})\!\downarrow\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\xi\in\Xi)\ x_\xi\in m(\mathscr{F}_\xi)\leftrightarrow x\in\prod_{\xi\in\Xi}m(\mathscr{F}_\xi).\quad\triangleright$$

§ 3. Спуск-монады проультрафильтров

В этом параграфе мы займемся характеризацией *проультрафильтров* — максимальных циклических фильтров, подъемы которых служат ультрафильтрами в булевозначном универсуме.

3.1. *Справедливы утверждения:*

(1) *для циклического фильтра* $\mathscr{F}$ *и циклического множества* U *имеет место альтернатива: либо* ${}_*U\cap m(\mathscr{F})\neq\varnothing$, *либо* $U'\in\mathscr{F}$;

(2) *для экстенсионального фильтра* $\mathscr{F}$ *и циклического множества* U *имеет место альтернатива: либо* ${}_*U\cap m(\mathscr{F})\neq\varnothing$, *либо* ${}_*(U')\supset m(\mathscr{F})$.

$\triangleleft$ На основании п. 2.3(1) достаточно убедиться в достоверности утверждения (1). Для проверки констатируем, что существуют две взаимоисключающие возможности:

$$(\forall F\in\mathscr{F})\ \ U\cap F{\uparrow}{\downarrow}\neq\varnothing,\qquad (\exists F\in\mathscr{F})\ \ U\cap F=\varnothing.$$

Во втором случае $U'\in\mathscr{F}$. В первом же ввиду п. 2.5 будет ${}_*U\cap m(\mathscr{F})\neq\varnothing$. $\triangleright$

3.2. Нестандартные критерии проультрафильтра. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{A}$ — *это проультрафильтр;*

(2) $\mathfrak{A}$ — *это экстенсиональный фильтр с минимальной по включению спуск-монадой;*

(3) *имеет место представление*

$$\mathfrak{A}=(x)^{\downarrow}:=\{A{\uparrow}{\downarrow}\colon x\in{}_*A\}$$

для каждой точки x *из спуск-монады* $m(\mathfrak{A})$;

(4) $\mathfrak{A}$ — *это экстенсиональный фильтр, спуск-монаду которого легко поймать циклическим множеством, т. е. для всякого* $U=U{\uparrow}{\downarrow}$ *верно либо* $m(\mathfrak{A})\subset{}_*U$, *либо* $m(\mathfrak{A})\subset{}_*(U')$;

(5) $\mathfrak{A}$ — *это циклический фильтр такой, что для всякого циклического* U *при* ${}_*U\cap m(\mathscr{F})\neq\varnothing$ *будет* $U\in\mathfrak{A}$.

$\triangleleft$ Нам удобно провести излишне подробное доказательство по схеме $(1)\to(2)\to(3)\to(4)\to(1)$ и $(1)\leftrightarrow(5)$.

(1)$\to$(2). Если $m(\mathfrak{A}) \supset m(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}^{\uparrow\downarrow} \supset \mathfrak{A}^{\uparrow\downarrow} = \mathfrak{A}$. Стало быть, $\mathfrak{B}^{\uparrow\downarrow} = \mathfrak{A}$ и $m(\mathfrak{A}) = m(\mathfrak{B}^{\uparrow\downarrow}) = m(\mathfrak{B})$.

(2)$\to$(3). Рассмотрим $\mathfrak{A}^{\uparrow}$. Если внутри $V^{(B)}$ будет $\mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}) \subset \mu(\mathfrak{B})$, то $m(\mathfrak{A}) = m(\mathfrak{B}^{\downarrow})$. Значит, $\mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}) = m(\mathfrak{A})^{\uparrow} = m(\mathfrak{B}^{\downarrow})\uparrow = m(\mathfrak{B})$. Таким образом, $\mathfrak{A}^{\uparrow}$ — ультрафильтр внутри $V^{(B)}$. Иными словами,

$$[(\forall x \in \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}))\quad A \in \mathfrak{A}^{\uparrow} \leftrightarrow x \in {}^*A] = 1.$$

По правилам подсчета оценок заключаем, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\uparrow\downarrow} = (x)^{\downarrow}$ для каждого $x \in m(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow})\downarrow$.

(3)$\to$(4). На основании п. 3.1(2) для циклического U либо $m(\mathfrak{A}) \subset \subset_*(U')$, либо ${}_*U \cap m(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$. Во втором случае для $x \in m(\mathscr{F}) \cap {}_*U$ по определению $x \in {}_*U$ и $U\uparrow\downarrow = U \in \mathfrak{A}$. Стало быть, ${}_*U \supset m(\mathfrak{A})$.

(4)$\to$(1). Пусть $\mathfrak{B}$ — циклический фильтр, причем $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Возьмем циклическое множество $U \in \mathfrak{B}$. Если $m(\mathfrak{A}) \subset {}_*(U')$, то по п. 2.3(1)—(3) будет $U' \in \mathfrak{A}^{\uparrow\downarrow} = \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Получаем противоречие. Таким образом, реализуется тот случай, когда ${}_*U \supset m(\mathfrak{A})$. Вновь по п. 2.3(1)—(3) заключаем, что $U \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — максимальный циклический фильтр, т. е. проультрафильтр.

(1)$\leftrightarrow$(5). Если $\mathfrak{A}$ — проультрафильтр и циклическое U таково, что ${}_*U \cap m(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$, то на основании (3) $U \in \mathfrak{A}$. Если же $U \in \mathfrak{B}$, где $U = U\uparrow\downarrow$ и $\mathfrak{B}$ — циклический фильтр, мажорирующий $\mathfrak{A}$, то ${}_*U \cap m(\mathfrak{A}) \supset {}_*U \cap \cap m(\mathfrak{B}) = {}_*U \neq \varnothing$. Стало быть, $U \in \mathfrak{A}$ по условию (5). Тем самым $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. $\triangleright$

3.3. Полезно сопоставить приведенные критерии с признаками проультрафильтров, найденными в [3]. Для того чтобы почувствовать различие в формализмах, подчеркнем, что спуск-монады представляют собой, очевидно, объединение спуск-монад проультрафильтров. В то же время обычные монады экстенсиональных фильтров не сводятся к объединению своих существенных точек.

§ 4. Квантификация по спуск-монадам

Здесь мы приведем некоторые простейшие факты, относящиеся к дешифровке утверждений, содержащих кванторы, распространенные на спуск-монады.

4.1. *Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Оценка истинности φ постоянна на спуск-монаде любого проультрафильтра $\mathfrak{A}$, т. е.*

$$(\forall x,\ y \in m(\mathfrak{A}))\quad [\varphi(x)] = [\varphi(y)].$$

$\triangleleft$ Для ультрамонады, как известно [4], равносильны экзистенциональность и универсальность, т. е. внутри $V^{(B)}$ верно $(\forall x \in \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}))\ \varphi(x) \leftrightarrow (\exists y \in \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}))\ \varphi(y)$. Вычисляя оценки, имеем с учетом п. 2.3(2)

$$\bigwedge_{x \in m(\mathfrak{A})} [\varphi(x)] = [(\forall x \in m(\mathfrak{A})\uparrow)\ \varphi(x)] = \left[(\forall x \in \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}))\ \varphi(x)\right] =$$

$$= \left[(\exists y \in \mu(\mathfrak{A}^{\uparrow}))\ \varphi(y)\right] = [(\exists y \in m(\mathfrak{A})\uparrow)\ \varphi(y)] = \bigvee_{y \in m(\mathfrak{A})} [\varphi(y)],$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. $\triangleright$

4.2. Теорема. *Пусть $\varphi = \varphi(x,\ y,\ z)$ — формула теории Цермело — Френкеля и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — некоторые фильтры множеств с B-структурой. Имеют место следующие правила квантификации (при внутренних y, z в $V^{(B)}$):*

(1) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))\ [\varphi(x,\ y,\ z)] = 1 \leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})(\exists x \in {}_*F)\ [\varphi(x,\ y,\ z)] = 1$;

(2) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow \left(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}\right)(\forall x \in {}_*F)\ [\varphi(x, y, z)] = 1$;

(3) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))(\exists y \in m(\mathscr{G}))\ [\varphi(x,\ y,\ z)] = 1 \leftrightarrow (\forall G \in \mathscr{G})\left(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}\right)$ $(\forall x \in {}_*F)(\exists y \in {}_*G)\ [\varphi(x,\ y,\ z)] = 1$;

(4) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))(\forall y \in m(\mathcal{S}))\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow \left(\exists G \in \mathcal{S}^{\uparrow\downarrow}\right)(\forall F \in \mathcal{F})$ $(\exists x \in {}_*F)(\forall y \in {}_*G)\ [\varphi(x, y, z)] = 1$.

При этом для стандартизованных свободных переменных будет

(1′) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))\quad [\varphi(x, {}^*y, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F\uparrow\downarrow)$ $[\varphi(x, y, z)] = 1$;

(2′) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))\quad [\varphi(x, {}^*y, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)$ $[\varphi(x, y, z)] = 1$;

(3′) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))(\exists y \in m(\mathcal{S}))\quad [\varphi(x, y, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{S})$ $(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)(\exists y \in G\uparrow\downarrow)\quad [\varphi(x, y, z)] = 1$;

(4′) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))(\forall y \in m(\mathcal{S}))\quad [\varphi(x, y, {}^*z)] = 1 \leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{S}^{\uparrow\downarrow})$ $(\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F\uparrow\downarrow)(\forall y \in G)\ [\varphi(x, y, z)] = 1$.

◁ Начнем с доказательства правил (1), (2). Применяя алгоритм Нельсона внутри $V^{(B)}$, выводим:

$$(\exists x \in m(\mathcal{F}))\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow \left[\left(\exists x \in \mu\left(\mathcal{F}^{\uparrow}\right)\right) \varphi(x, y, z)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left[\left(\forall F \in \mathcal{F}^{\uparrow}\right)(\exists x \in {}^*\mathcal{F})\ \varphi(x, y, z)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in {}_*F)\ [\varphi(x, y, z)] = 1;$$
$$(\forall x \in m(\mathcal{F}))\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow \left[\left(\forall x \in \mu\left(\mathcal{F}^{\uparrow}\right)\right)\ \varphi(x, y, z)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left[\left(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow}\right)(\forall x \in {}^*F)\ \varphi(x, y, z)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}\right)(\forall x \in {}_*F)\ [\varphi(x, y, z)] = 1.$$

Перейдем теперь к доказательству (3). Имеем, привлекая последовательно (2) и (1):

$$(\forall x \in m(\mathcal{F}))(\exists y \in m(\mathcal{S}))\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall x \in m(\mathcal{F}))(\forall G \in \mathcal{S})(\exists y \in {}_*G)\ [\varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{S})(\forall x \in m(\mathcal{F}))\ [(\exists y \in {}^*G)\ \varphi(x, y, z)] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{S})\left(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}\right)(\forall x \in {}_*F)(\exists y \in {}_*G)\ [\varphi(x, y, z)] = 1.$$

Утверждение (4) устанавливается аналогичной выкладкой. Эквивалентности, записанные под номерами (1′)—(4′), вытекают из уже установленных с учетом принципа переноса 1.2. ▷

§ 5. Прокомпактные фильтры и изображения компактных пространств

Для дальнейшего нам понадобятся признаки *прокомпактных* (=циклически компактных) множеств и фильтров (см. [5]). С целью экономии места, как и в [2], ограничимся случаем равномерных пространств.

Итак, пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство в $V^{(B)}$ и $(X\downarrow, \mathcal{U}^{\downarrow})$ — его спуск. Ясно, что спуск-монада $m(\mathcal{U}^{\downarrow})$ представляет собой отношение эквивалентности в ${}_*X$. Для его обозначения будем использовать тот же символ *бесконечной близости* $\approx$, что и для $\mu(\mathcal{U})$ внутри $V^{(B)}$. Итак, ${}^{\approx}x = m\left(\mathcal{U}^{\downarrow}(x)\right)$.

5.1. *Элемент x является точкой прикосновения циклической оболочки фильтра $\mathcal{F}$ в том и только в том случае, если* ${}^{\approx}x \cap m(\mathcal{F}) \neq \varnothing$, *т. е. если x микропредельна для $m(\mathcal{F})$.*

◁ Достаточно применить п. 2.6, ибо $x \in \mathrm{cl}\ (\mathcal{F}\uparrow\downarrow) \leftrightarrow \exists \mathcal{F}\uparrow\downarrow \vee$ $\vee\, \mathcal{U}^{\downarrow}(x) \leftrightarrow m(\mathcal{F}) \cap m(\mathcal{U}^{\downarrow}(x)) \neq \varnothing$. ▷

5.2. *Для внутреннего U в $V^{(B)}$ обозначим символом* $\mathrm{cl}_{\approx}(U\downarrow)$ *совокупность всех микропредельных точек $U\downarrow$, т. е. микрозамыкание $U\downarrow$. Множество $\mathrm{cl}_{\approx}(U\downarrow)$ замкнуто. Для каждого подмножества U в X выполнено* $\mathrm{cl}_{\approx}({}_*U) = \mathrm{cl}\,(U\uparrow\downarrow)$.

◁ Для $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U\downarrow)$ и циклической открытой окрестности $\mathcal{O}$ точки y найдется x такой, что ${}^{\approx}x \cap U\downarrow \neq \varnothing$ и, кроме того, $x \in \mathcal{O}$. Поскольку ${}_{*}\mathcal{O} \supset {}^{\approx}x$, можно утверждать, что $(\forall \mathcal{O} \in \mathcal{U}^{\downarrow}(y))\ {}_{*}\mathcal{O} \cap U\downarrow \neq \varnothing$. По принципу идеализации ${}^{\approx}y \cap U\downarrow \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U\downarrow)$. Как вдно, $\mathrm{cl}_{\approx}(U\downarrow) = (\mathrm{cl}_{\approx}(U))\downarrow$. Последнее наблюдение завершает доказательство. ▷

5.3. Точка y из множества ${}_{*}X$ называется *спуск-околостандартной* или просто *околостандартной*, если нет опасности недоразумений, при условии, что для некоторого $x \in X\downarrow$ будет ${}^{*}x \approx y$. Таким образом, спуск-околостандартные точки ${}_{*}X$ — это элементы, бесконечно близкие к точкам стандартного ядра множества ${}^{*}X$ внутри $V^{(B)}$.

5.4. Критерии прокомпактности фильтра. *Для фильтра $\mathcal{F}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$\mathcal{F}$ прокомпактен (=циклически компактен), т. е. каждый циклический фильтр, более тонкий, чем $\mathcal{F}$, имеет точку прикосновения;*

(2) *каждый проультрафильтр, мажорирующий $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$, сходится;*

(3) *спуск-монада $m(\mathcal{F})$ состоит из околостандартных точек;*

(4) *$\mathcal{F}^{\uparrow}$ компактен внутри $V^{(B)}$;*

(5) *$\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$ циклически компактен.*

◁ $(1)\to(2)$. Если x — точка прикосновения проультрафильтра $\mathfrak{A}$, мажорирующего $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$, то ${}^{\approx}x \cap m(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$ и стало быть, на основании п. 3.2(2) $m(\mathfrak{A}) \supset {}^{\approx}x$. Последнее означает, что $\mathfrak{A} \to x$.

$(2)\to(3)$. Пусть $y \in m(\mathcal{F})$. Тогда $(y)^{\downarrow}$ — проультрафильтр. Ясно, что y бесконечно близко к пределу $(y)^{\downarrow}$.

$(3)\to(4)$. Учитывая правила подъема, заключаем, что монада $\mu(\mathcal{F}^{\uparrow})$ состоит из околостандартных точек внутри $V^{(B)}$.

$(4)\to(5)$. Если $\mathcal{G}$ — циклический фильтр, более тонкий, чем $\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$, то $\mu(\mathcal{G}) \subset \mu(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})$ внутри $V^{(B)}$. С учетом п. 5.1 замечаем, что $\mathcal{G}$ имеет точку прикосновения.

$(5)\to(1)$. Достаточно заметить, что $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$ и $\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$ мажорируются одними и теми же проультрафильтрами. ▷

5.5. Критерий прокомпактности. *Множество $A\uparrow\downarrow$ прокомпактно (=циклически компактно) в том и только в том случае, если каждая точка ${}_{*}A$ спуск-околостандартна.*

◁ Достаточно применить п. 5.4 к фильтру с базисом $\{A\uparrow\downarrow\}$. ▷

5.6. Следует сопоставить критерий 5.5 с критерием 3.2 из [2], состоящим в околостандартности существенных точек робинсоновской стандартизации рассматриваемого циклического множества.

5.7. Точка y из множества ${}_{*}X$ называется *спуск-предстандартной* или просто *предстандартной*, если нет опасности недоразумений, при условии, что микрогало ${}^{\approx}y$ содержит некоторую спуск-монаду. Таким образом, спуск-предстандартные точки ${}_{*}X$ изображают предстандартные точки ${}^{*}X$ внутри $V^{(B)}$.

5.8. *Для фильтра $\mathcal{F}$ эквивалентны утверждения:*

(1) *каждая спуск-предстандартная точка $m(\mathcal{F})$ является спуск-околостандартной;*

(2) *каждый циклический фильтр Коши, более тонкий, чем $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$, сходится;*

(3) *фильтр $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$ полон;*

(4) *$\mathcal{F}^{\uparrow}$ полон внутри $V^{(B)}$.*

◁ Эквивалентность $(1)\leftrightarrow(4)$ обеспечена обычным признаком полноты фильтра $\mathcal{F}^{\uparrow}$, состоящим в том, что $\mathrm{pst}\,({}^{*}X) \cap \mu(\mathcal{F}^{\uparrow}) \subset \mathrm{nst}\,({}^{*}X)$ внутри $V^{(B)}$ (см. [6]).

$(1)\to(2)$. Пусть $\mathcal{G}$ — циклический фильтр Коши и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$. Если $x \in m(\mathcal{G})$, то $x \in \mu(\mathcal{G}^{\uparrow})\downarrow$ и, стало быть, x — спуск-предстандартная точка. Таким образом, точка x спуск-околостандартна и для некоторого

$y \in X$ будет ${}^{\approx}y \cap m(\mathscr{S}) \neq \varnothing$. На основании п. 5.1 заключаем, что y служит точкой прикосновения $\mathscr{S}$. Так как $\mathscr{S}$ — фильтр Коши, то $\mathscr{S} \to y$.

$(2) \to (1)$. Пусть $x \in m(\mathscr{F})$ и ${}^{\approx}x = m(\mathscr{S})$. Ясно, что $\mathscr{S}^{\uparrow\downarrow}$ — циклический фильтр, являющийся фильтром Коши. На основании п. 2.6 имеется фильтр $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow} \vee \mathscr{S}^{\uparrow\downarrow}$. По условию у него есть предел y. Видно, что $x \in m(\mathscr{F}) \cap m(\mathscr{S}) \subset m(\mathscr{U}^{\downarrow}(y))$. Значит, x — это спуск-околостандартная точка.

Наконец, убедимся, что $(2) \to (3)$, ибо импликация $(3) \to (2)$ несомненна по определению.

$(2) \to (3)$. Итак, пусть $\mathscr{S}$ — фильтр Коши, более тонкий, чем $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. Ясно, что $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}{\uparrow\downarrow} \subset \mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. Так как равномерность $\mathscr{U}^{\downarrow}$ является циклической, то $\mathscr{S}{\uparrow\downarrow}$ — также фильтр Коши. Поскольку $\mathscr{S}{\uparrow\downarrow}$ сходится в силу утверждения (2), то сходится и $\mathscr{S}$. $\triangleright$

5.9. Фильтр $\mathscr{F}$ называют *пропредкомпактным* (=циклически вполне ограниченным), если $\mathscr{F}^{\uparrow}$ вполне ограничен внутри $V^{(B)}$. Непосредственными следствиями введенных определений и известных критериев (см. [6]) служат следующие утверждения.

5.10. *Фильтр является пропредкомпактным в том и только в том случае, если каждая точка его спуск-монады спуск-предстандартна.*

5.11. Критерий Хаусдорфа. *Циклический фильтр является прокомпактным в том и только в том случае, если он полон и пропредкомпактен.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Кутателадзе С. С.* Циклические монады и их применение // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 1. С. 100—110.
3. *Кутателадзе С. С.* Монады проультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 129—133.
4. *Benninghofen B., Richter M.* A general theory of superinfinitesimals // Fund. math. 1987. V. 128. N 3. P. 199—215.
5. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 5. С. 1049—1052.
6. *Кутателадзе С. С.* О топологических понятиях, близких к непрерывности // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 149—156.

г. Новосибирск

Статья поступила 22 ноября 1989 г.