

УДК 519.632.4

АНАЛИЗ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ, АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ТРЕТЬЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹⁾

© 1997 г. В. С. Щеглик

(Минск, Белоруссия)

Поступила в редакцию 28.02.96 г.
Переработанный вариант 18.07.96 г.

Рассматривается третья краевая задача для нелинейного уравнения с неограниченной нелинейностью на обобщенных решениях. Исследуется разностная схема решения данной задачи и реализующий ее итерационный алгоритм. Доказывается сходимость итерационного процесса, и получены априорные оценки скорости сходимости.

В течение последних двадцати лет возникло и интенсивно развивается такое направление в теории конечных разностей, как построение разностных схем для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, у которых скорость сходимости согласована с гладкостью решения (см. [1]):

$$\|y - u\|_{W_2^s(\omega)} \leq M h^{m-s} \|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

где u – решение дифференциальной задачи, y – решение аппроксимирующей задачи, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ – соответственно, нормы пространств Соболева дискретного и непрерывного аргументов.

Необходимо отметить, что первые результаты по исследованию сходимости дискретных методов для задач с решениями из W_2^k были получены в теории методов конечных элементов. Однако способы построения разностных схем и получения таких оценок в методе сеток отличаются от приемов, применяемых в методе конечных элементов.

Для широкого класса линейных задач согласованные оценки приведены в [2], [3]. Но, как правило, большинство реальных задач нелинейны, причем природа нелинейности разнообразна. Для квазилинейных эллиптических уравнений с ограниченной нелинейностью согласованные оценки точности получены в [4], [5]. Однако требования, предъявляемые к коэффициентам дифференциального уравнения, такие как положительная определенность, ограниченность производных для всех значений $u \in \mathbb{R}$, сильно сужает класс допустимых входных данных задачи. В работе [6] доказана сходимость одной разностной схемы к обобщенному решению для квазилинейного уравнения с нелинейностью неограниченного роста и получены согласованные оценки вида

$$\|y - u\|_{W_2^1(\omega)} \leq \gamma h^{m-1} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^m(\Omega)}), \quad m = 2, 3,$$

где $\gamma > 0$ – константа, не зависящая от h .

1. ПОСТАНОВКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим на сегменте $\bar{\Omega} = [0, 1]$ нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} k(u) \frac{du}{dx} - q(u)u = -f(u), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований.

с краевыми условиями III рода

$$k(u)du/dx = \sigma_-(u)u, \quad x = 0, \quad -k(u)du/dx = \sigma_+(u)u, \quad x = 1. \quad (1.2)$$

Введем область значений точного решения \mathcal{M}_u и определим ее окрестность \mathcal{D}_u :

$$\mathcal{M}_u = \{u: u_1 \leq u(x) \leq u_2, x \in \bar{\Omega}\}, \quad \mathcal{D}_u = \{\tilde{u}: u_1 - \delta \leq \tilde{u}(x) \leq u_2 + \delta, x \in K \subseteq \bar{\Omega}\}.$$

Предполагаем, что для коэффициентов задачи (1.1), (1.2) удовлетворены следующие

Условия.

1. $k(v) \geq k_1 > 0$, $\sigma_{\pm}(v) \geq 4k_1 > 0$, $q(v) \geq 0$, $|f(v)| \leq 2M_0$ при любых $v \in \mathcal{D}_u$.

2. Для любых $v_1, v_2 \in \mathcal{D}_u$

$$|d(v_1) - d(v_2)| \leq \rho_1 |v_1 - v_2|, \quad d = k, \sigma_{\pm}/4, q/4, \quad |f(v_1) - f(v_2)| \leq 4\rho_2 |v_1 - v_2|.$$

3. $\rho_1 M_0 / k_1^2 + \rho_2 / k_1 = \rho_0 < 1$.

4. $\|k(u)\|_{C(\mathcal{M}_u)} \leq \mu(1 + \|u\|_{W_2^1(\Omega)})$, $\|q(u)\|_{C(\mathcal{M}_u)} \leq \mu(1 + \|u\|_{W_2^1(\Omega)})$.

Априори полагаем, что решение краевой задачи (1.1), (1.2) существует и принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$.

2. РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА

Введем в области Ω равномерные сетки узлов $\omega = \{x: x = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, h = 1/N\}$, $\omega^+ = \omega \cup \{x = 1\}$. Аппроксимируем дифференциальную задачу (1.1), (1.2) разностной:

$$A(y)y = f(y), \quad (2.1)$$

где нелинейный разностный оператор A определяется следующим образом:

$$A(y)v = \begin{cases} -\frac{2}{h}(a^+(y)v_x - \sigma_-(y)v) + q(y)v, & x = 0, \\ -(a(y)v_{\bar{x}})_x + q(y)v, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h}(a(y)v_{\bar{x}} + \sigma_+(y)v) + q(y)v, & x = 1, \end{cases}$$

а шаблонный функционал a выбирается по формуле $a(y) = k(0.5(y(x) + y(x-h)))$, $a^+(y(x)) = a(y(x+h))$.

Для нахождения приближенного решения сеточного уравнения (2.1) построим итерационный процесс вида

$$A(\tilde{y})\tilde{y}^+ = f(\tilde{y}). \quad (2.2)$$

Не представляет труда показать [6], что если v и w принадлежат \mathcal{D}_u , то верно следующее:

$$a(w) \geq k_1 > 0, \quad |a(v) - a(w)| \leq \rho_1 |v - w|. \quad (2.3)$$

В разделе 3 будут указаны достаточные условия сходимости итерационного метода и приведена его оценка скорости сходимости.

Определим на множестве сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$, скалярные произведения

$$[y, v] = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x)h + 0.5h(y(0)v(0) + y(1)v(1)), \quad (y, v) = \sum_{x \in \omega^+} y(x)v(x)h,$$

которые индуцируют соответствующие нормы

$$[[v]] \equiv \|v\|_{L_2(\bar{\omega})} \equiv \|v\|_0 = [v, v]^{1/2}, \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}$$

и дискретные аналоги норм пространств C , W_2^1

$$\|v\|_{C(\bar{\omega})} \equiv \|v\|_{\infty} = \max_{x \in \bar{\omega}} |v(x)|, \quad \|v\|_{W_2^1(\omega)}^2 \equiv \|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + \|v_{\bar{x}}\|^2.$$

Наряду с нормой $\|\cdot\|_1$ в пространстве $W_2^1(\bar{\omega})$ будем использовать эквивалентную ей $\|v\|_1^2 = \|v_{\bar{x}}\|^2 + 4(v^2(0) + v^2(1))$.

Для исследования сходимости итерационной схемы (2.2) к решению разностной задачи (2.1) нам понадобятся некоторые априорные оценки, которые ниже сформулированы в виде лемм.

Лемма 1 (см. [7], [8]). *Для любой сеточной функции v , заданной на сетке $\bar{\omega}$, справедливы неравенства*

$$\|v\|_{\infty}^2 \leq 0.5 \|v\|_1^2, \tag{2.4}$$

$$\|v\|_0^2 \leq 0.25 \|v\|_1^2. \tag{2.5}$$

Лемма 2. *Пусть $\bar{y} \in \mathcal{D}_u$. Тогда сеточная функция \bar{y}^{s+1} , удовлетворяющая (2.2), ограничена в сеточной норме $\|\cdot\|_1$ сверху:*

$$\|\bar{y}^{s+1}\|_1 \leq c, \quad c = M_0/k_1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Умножим (2.2) скалярно на \bar{y}^{s+1} и воспользуемся разностным аналогом первой формулы Грина. Приходим к энергетическому тождеству

$$(a(\bar{y}), (\bar{y}^{s+1})^2) + (\sigma_-(\bar{y})(\bar{y}^{s+1})^2)(0) + (\sigma_+(\bar{y})(\bar{y}^{s+1})^2)(1) + [q(\bar{y}), (\bar{y}^{s+1})^2] = [\bar{y}^{s+1}, f(\bar{y})]. \tag{2.7}$$

Применяя к правой части (2.7) неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия (2.3), переходим от (2.7) к неравенству $k_1 \|\bar{y}^{s+1}\|_1^2 \leq M_0 \|\bar{y}^{s+1}\|_1$.

Отсюда и следует искомая оценка (2.6).

В процессе доказательства теоремы о сходимости метода итераций нам понадобится оценка $\bar{z} = \bar{y} - u$ в равномерной метрике. Поэтому имеет смысл рассмотреть задачу для погрешности первого приближения \bar{z} . Для этого операторное уравнение (2.2) при $s = 0$ сложим с невязкой $\psi = f(u) - A(u)u$. В результате получим задачу

$$A(u)\bar{z} = (A(u) - A(\bar{y}^0))\bar{y} + f(\bar{y}^0) - f(u) + \psi. \tag{2.8}$$

Используя уравнение баланса, представляем ψ в дивергентном виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2}{h}\eta(h) + \xi(0), & x = 0, \\ \eta_x(x) + \xi(x), & x \in \omega, \\ -\frac{2}{h}\eta(1) + \xi(1), & x = 1, \end{cases}$$

где

$$\eta(x) = (a(u)u_{\bar{x}})(x) - (k(u)u')(x - 0.5h), \quad x \in \omega^+,$$

$$\xi(x) = (Sq(u)u - q(u)u + f(u) - Sf(u))(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

S – оператор усреднения по Стеклову.

Умножив (2.8) скалярно на \bar{z} и воспользовавшись условиями (2.3), получим энергетическое неравенство

$$k_1 \|\bar{z}\|_1^2 \leq ((a(\bar{y}^0) - a(u))\bar{y}_{\bar{x}}, \bar{z}_{\bar{x}}) + ((\sigma_-(\bar{y}^0) - \sigma_-(u))\bar{y} \bar{z})(0) + ((\sigma_+(\bar{y}^0) - \sigma_+(u))\bar{y} \bar{z})(1) + [(q(\bar{y}^0) - q(u))\bar{y}, \bar{z}] + [(f(\bar{y}^0) - f(u)), \bar{z}] + [\bar{z}, \psi]. \tag{2.9}$$

Используя условие 2), оценку (2.6) и вложения (2.4), (2.5), оцениваем скалярные произведения

правой части (2.9):

$$\begin{aligned} & ((a(\overset{0}{y}) - a(u))\overset{1}{y}_{\bar{x}}, \overset{1}{z}_{\bar{x}}] + ((\sigma_-(\overset{0}{y}) - \sigma_-(u))\overset{1}{y} \overset{1}{z})(0) + ((\sigma_+(\overset{0}{y}) - \sigma_+(u))\overset{1}{y} \overset{1}{z})(1) + \\ & + [(q(\overset{0}{y}) - q(u))\overset{1}{y}, \overset{1}{z}] \leq \rho_1 \|\overset{0}{z}\|_\infty (\|\overset{1}{y}_{\bar{x}}\| \|\overset{1}{z}_{\bar{x}}\| + 4\overset{1}{y}(0)\overset{1}{z}(0) + 4\overset{1}{y}(1)\overset{1}{z}(1) + \\ & + 4\|\overset{1}{y}\|_0 \|\overset{1}{z}\|_0) \leq 2\rho_1 \|\overset{0}{z}\|_\infty \|\overset{1}{y}\|_1 \|\overset{1}{z}\|_1 \leq \rho_1 c \|\overset{0}{z}\|_1 \|\overset{1}{z}\|_1, \\ & [(f(\overset{0}{y}) - f(u)), \overset{1}{z}] \leq 4\rho_2 \|\overset{0}{z}\|_0 \|\overset{1}{z}\|_0 \leq \rho_2 \|\overset{0}{z}\|_1 \|\overset{1}{z}\|_1, \\ & [\overset{1}{z}, \Psi] = -(\overset{1}{z}_{\bar{x}}, \eta) + [\overset{1}{z}, \xi] \leq \|\overset{1}{z}\|_1 \|\Psi\|_{(-1)}. \end{aligned}$$

Учитывая (2.4), приходим к неравенству

$$\|\overset{1}{z}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\overset{1}{z}\|_1 \leq \frac{\rho_0}{2} \|\overset{0}{z}\|_1 + \frac{1}{2k_1} \|\Psi\|_{(-1)}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 3. При $\overset{0}{y} \in \mathcal{D}_u$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|\overset{1}{y} - u\|_\infty \leq \beta, \\ & \beta = \frac{1 + \rho_0}{2} \|\overset{0}{z}\|_1 + \frac{1}{2k_1} \|\Psi\|_{(-1)}, \quad \|\Psi\|_{(-1)} = (4\|\eta\|^2/3 + \|\xi\|_0^2)^{1/2}, \quad \overset{0}{z} = \overset{0}{y} - u. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Лемма 4. Если $\overset{k}{y} \in \mathcal{D}_u, k = 0, 1, \dots, s$, то

$$\|\Delta \overset{s+1}{y}\|_\infty \leq \beta \rho_0^s, \quad \Delta \overset{s+1}{y} = \overset{s+1}{y} - \overset{s}{y}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Вычтем из (2.2) это же уравнение, записанное для предыдущей итерации.

Получим задачу для разности соседних итераций $\overset{s+1}{y}$:

$$A(\overset{s}{y})\Delta \overset{s+1}{y} + (A(\overset{s}{y}) - A(\overset{s-1}{y}))\overset{s}{y} = f(\overset{s}{y}) - f(\overset{s-1}{y}). \tag{2.12}$$

Умножая (2.12) скалярно на $\Delta \overset{s+1}{y}$ и рассуждая аналогично доказательству леммы 3, приходим к рекуррентному соотношению

$$\|\Delta \overset{s+1}{y}\|_1 \leq \rho_0 \|\Delta \overset{s}{y}\|_1 \leq \rho_0^2 \|\Delta \overset{s-1}{y}\|_1 \leq \dots \leq \rho_0^s \|\Delta \overset{1}{y}\|_1. \tag{2.13}$$

Оценим $\|\Delta \overset{1}{y}\|_1$ с помощью неравенства треугольника и (2.10). Получим $\|\Delta \overset{1}{y}\|_1 \leq \|\overset{1}{z} - \overset{0}{z}\|_1 \leq \|\overset{1}{z}\|_1 + \|\overset{0}{z}\|_1 \leq (1 + \rho_0) \|\overset{0}{z}\|_1 + k_1^{-1} \|\Psi\|_{(-1)}$. Возвращаясь к (2.13) с учетом последнего соотношения, получаем

$$\|\Delta \overset{s+1}{y}\|_\infty \leq \frac{\rho_0^s}{2} \left((1 + \rho_0) \|\overset{0}{z}\|_1 + \frac{1}{k_1} \|\Psi\|_{(-1)} \right) = \beta \rho_0^s. \tag{2.14}$$

Из (2.14) и следует (2.11).

Под окрестностью точного решения u дифференциальной задачи (1.1), (1.2) будем понимать множество $\mathcal{S}_u = \{v : \|v - u\|_\infty \leq \delta\}$. Очевидно, что если $v \in \mathcal{S}_u$, то $v \in \mathcal{D}_u$ и для этого элемента справедливы все изложенные выше леммы.

3. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3 и выбор начального приближения подчинен соотношению

$$\overset{0}{y} \in \mathcal{S}_u, \quad \beta/(1 - \rho_0) \leq \delta, \tag{3.1}$$

β – из (2.10).

Тогда справедливы такие утверждения:

1) для любых $s = 0, 1, \dots$ последовательность решений задачи (2.2) не выходит из \mathcal{S}_u ;

2) метод итераций сходится:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \dot{y}^s = y, \quad y \in \mathcal{S}_u,$$

и предел последовательности является решением операторного уравнения (2.1);

3) скорость сходимости итерационного процесса характеризуется оценкой

$$\|\dot{y}^s - y\|_\infty \leq \frac{\beta}{1 - \rho_0} \rho_0^s.$$

Доказательство утверждения 1) теоремы проведем методом математической индукции. Для этого сначала покажем, что $\dot{y}^1 \in \mathcal{S}_u$. Действительно, справедливость данного утверждения следует из условия (3.1) выбора \dot{y}^0 , оценки (2.10) и цепочки неравенств $\|\dot{z}\|_\infty \leq \beta \leq \beta/(1 - \rho_0) \leq \delta$. Теперь предположим, что $\dot{y}^k \in \mathcal{S}_u, k = 0, 1, \dots, s$. Простыми выкладками с использованием неравенства треугольника, формулировок лемм 3 и 4 устанавливаем следующее соотношение:

$$\|\dot{y}^{s+1} - u\|_\infty \leq \sum_{k=1}^s \|\Delta^k \dot{y}^{s+1}\|_\infty + \|\dot{y}^1 - u\|_\infty \leq \sum_{k=0}^s \beta \rho_0^k \leq \frac{\beta}{1 - \rho_0} \leq \delta, \tag{3.2}$$

а это эквивалентно тому, что $\dot{y}^{s+1} \in \mathcal{S}_u$. Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано.

Для доказательства п. 2) возьмем отрезок $\dot{y}^s, \dot{y}^{s+1}, \dots, \dot{y}^{s+p}$ последовательности и докажем, что она фундаментальна. В силу утверждения 1), элементы $\dot{y}^{s+k}, k = 0, 1, \dots, p$, принадлежат \mathcal{S}_u , поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\|\dot{y}^{s+p} - \dot{y}^s\|_\infty \leq \sum_{k=1}^p \|\Delta^k \dot{y}^{s+k}\|_\infty \leq \beta \rho_0^s \sum_{k=1}^p \rho_0^{k-1} \leq \frac{\beta}{1 - \rho_0} \rho_0^s, \tag{3.3}$$

а это означает, что последовательность \dot{y}^s является последовательностью Коши. Так как пространство $C(\bar{\omega})$ банахово, то существует предел данной последовательности. Устремляя $s \rightarrow \infty$ в (3.2) и в (2.2), убеждаемся, что предел принадлежит множеству \mathcal{S}_u и является решением задачи (2.1). Оценка скорости сходимости метода итераций непосредственно вытекает из (3.3) при $p \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Докажем, что операторное уравнение (2.1) имеет единственное решение. Предположим, что существуют элементы y_1, y_2 из \mathcal{S}_u , которые удовлетворяют (2.1). Вычитая из (2.1) при $y = y_1$ это же уравнение при $y = y_2$, получаем задачу для $\Delta y = y_1 - y_2$:

$$A(y_1)\Delta y = [A(y_1) - A(y_2)]y_2 + f(y_1) - f(y_2) = 0. \tag{3.4}$$

Проводя над (3.4) выкладки, аналогичные доказательству леммы 3, приходим к соотношению $(1 - \rho_0)\|\Delta y\|_\infty \leq 0$ или, учитывая, что $\rho_0 < 1$, делаем вывод, что y_1 тождественно совпадает с y_2 .

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Теорема 2. Пусть решение дифференциальной задачи (1.1), (1.2) имеет вид $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ и начальное приближение \dot{y}^0 принадлежит \mathcal{S}_u . Тогда при достаточно малом $h < h_0$ и при выполнении условий 1–4 решение разностного уравнения (2.1) сходится к решению исходной задачи и при этом справедлива оценка точности

$$\|y - u\|_{W_2^1(\omega)} \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}),$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, не зависящая от шага сетки h .

Доказательство. Можно заметить, что при достаточно малом $h < h_0$ неравенство из (3.1) выполнено, так как $\beta = \beta(h)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены и, в силу утверждения 2) теоремы 1, решение y разностной краевой задачи (2.1) лежит в окрестности точного решения \mathcal{S}_u .

Подставляя u в (2.1) и складывая с невязкой, приходим к задаче для погрешности разностной схемы $z = y - u$:

$$A(u)z = [A(u) - A(y)]y + f(y) - f(u) + \psi.$$

Не представляет труда показать (см., например, доказательство леммы 3), что для z верна оценка

$$\|z\|_1 \leq \frac{1}{(1 - \rho_0)k_1} \|\psi\|_{(-1)}. \tag{4.1}$$

Теперь перейдем к изучению вопроса о погрешности аппроксимации и покажем, что для $\eta(x)$ и $\xi(x)$ справедливы оценки

$$\|\eta\| \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}), \quad \|\xi\| \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}). \tag{4.2}$$

Через γ будем обозначать постоянную, которая не зависит от шага сетки и в разных местах, вообще говоря, разная.

Представим η в удобном для исследования виде:

$$\eta = \sum_{k=1}^2 \alpha_k(x) \eta_k(x),$$

где $\alpha_1(x) = a(u(x))$, $\alpha_2(x) = u'(\bar{x})$, $\eta_1(x) = u_{\bar{x}}(x) - u'(\bar{x})$, $\eta_2(x) = a(u(x)) - k(u(\bar{x}))$, $\bar{x} = x - 0.5h$.

Для оценки η_1 воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора с представлением остаточного члена в интегральной форме:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + v'(t)\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - s)v''(s)ds.$$

Применим неравенство Коши–Буняковского. Получим

$$\begin{aligned} |\eta_1(x)| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^x (x-s)u''(s)ds + \int_{x-h}^{\bar{x}} (x-h-s)u''(s)ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \left[\left(\int_{\bar{x}}^x (x-s)^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_{x-h}^{\bar{x}} (x-h-s)^2 ds \right)^{1/2} \right] \left(\int_{x-h}^x (u''(s)ds)^2 ds \right)^{1/2} \leq \gamma h^{1/2} \|u\|_{W_2^2(x-h; x)}. \end{aligned}$$

Из условия 3 следует, что $|\alpha_1(x)| = |k(0.5(u(x) + u(x-h)))| \leq \|k(u)\|_{C(\mathcal{D}_u)} \leq \mu(1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)})$.

Для оценки $\eta_2(x)$ воспользуемся условием липшиц-непрерывности $k(u)$ и теоремой о среднем для интегралов

$$\eta_2(x) \leq \frac{\rho_1}{2} \left| \int_{\bar{x}}^x u'(s)ds - \int_{x-h}^{\bar{x}} u'(s)ds \right| \leq \frac{\rho_1 h}{4} \int_{\bar{x}-0.5h\Theta_2}^{\bar{x}+0.5h\Theta_1} |u''(s)|ds \leq \gamma h^{1/2} \|u\|_{W_2^2(x-h, x)},$$

так как $\Theta_1, \Theta_2 \in (0, 1)$ и $h < 1$.

Поскольку $W_2^2(\Omega)$ вкладывается в $C^1(x-h, x)$, то для α_2 верно

$$|\alpha_2(x)| \leq \|u'\|_{C(x-h, x)} \leq \|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

Таким образом, имеем

$$|\eta(x)| \leq \gamma h^{1/2} \|u\|_{W_2^2(x-h, x)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}).$$

Суммируя $\eta(x)$ по узлам сетки ω^+ , приходим к соотношению

$$\|\eta\| = \left(\sum_{x \in \omega^+} |\eta(x)|^2 h \right)^{1/2} \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}).$$

Представим $\xi(x)$ в виде $\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x)$, где $\xi_1 = Sq(u)u - q(u)u$, $\xi_2 = f(u) - Sf(u)$. Легко проверить, что

$$q(v)v - q(u)u = 0.5((q(v) - q(u))(v + u) + [q(v) + q(u)](v - u)). \quad (4.3)$$

Пусть $x \in \omega$. Тогда, воспользовавшись тождеством (4.3) и условиями 2, 3, получим

$$\begin{aligned} |\xi_1(x)| &\leq \frac{1}{2h} \left(\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} [|q(u(t)) - q(u(x))| |u(t) + u(x)| + |q(u(t)) + q(u(x))| |u(t) - u(x)|] dt \right) \leq \\ &\leq \frac{\rho_1 (\|u\|_{C(\bar{\omega})} + \|q(u)\|_{C(\mathbb{Q}_u)})}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |u(t) - u(x)| dt \leq \gamma h^{1/2} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}) \|u\|_{W_2^2(\bar{x}, \bar{x}+h)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом показывается, что для $\xi_1(0)$ и $\xi_2(0)$ справедливы неравенства

$$\xi_1(0) \leq \gamma h^{1/2} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}) \|u\|_{W_2^2(0, 0.5h)}, \quad \xi_1(1) \leq \gamma h^{1/2} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}) \|u\|_{W_2^2(1-0.5h, 1)}.$$

Суммируя $\xi_1(x)$ по узлам сетки $\bar{\omega}$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|\xi_1\|_0 &\leq \left(\sum_{x \in \omega} \gamma^2 h^2 (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)})^2 \|u\|_{W_2^2(\bar{x}, \bar{x}+h)}^2 + 0.5 \gamma^2 h^2 ((1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)})^2 \|u\|_{W_2^2(0, 0.5h)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)})^2 \|u\|_{W_2^2(1-0.5h, 1)}^2) \right)^{1/2} \leq \gamma h (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}) \|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Доказательство того факта, что $\|\xi_2\|_0 \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$, принципиально от случая ξ_1 не отличается.

Подставляя оценки (4.2) в (4.1), приходим к утверждению теоремы.

Замечание 2. Как следствие теоремы 2 легко получить оценку скорости сходимости решения разностной схемы в норме $C(\bar{\omega})$:

$$\|y - u\|_{C(\omega)} \leq \gamma h \|u\|_{W_2^2(\Omega)} (1 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}).$$

Автор выражает благодарность П.П. Матусу за ряд ценных замечаний и консультаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазаров Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А. Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях // Матем. сб. 1982. Т. 117(159). № 4. С. 469–480.
2. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Наука, 1987.
3. Самарский А.А. Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями // Актуальные пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1984. С. 174–183.
4. Гаврилюк И.П., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. и др. Оценки скорости сходимости разностных решений к решениям второй краевой задачи для уравнений четвертого порядка при минимальных требованиях к гладкости // Докл. АН УССР. 1983. Сер. А. № 2. С. 6–9.
5. Макаров В.Л., Слушаенко Н.В. Согласованные оценки скорости сходимости метода сеток для квазилинейных уравнений с большой константой Липшица // Дифференц. ур-ния. 1983. № 7. С. 1246–1250.
6. Матус П.П., Москальков М.Н., Щеглик В.С. Согласованные оценки скорости сходимости метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Дифференц. ур-ния. 1995. № 7. С. 1219–1226.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
8. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.