N. V. Proskurin, The group $G_2(\mathbb{C})$ in connection with the theory of metaplectic forms, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 162, 169–185

Н.В.Проскурин

# ГРУППА $G_2(\mathbb{C})$ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКИХ ФОРМ

Простая комплексная группа Ли типа $G_2$ (в классификации Картана) может быть реализована как группа автоморфизмов алгебры Кэли над $\mathbb{C}$ и, также, как подгруппа в $SL(7,\mathbb{C})$ состоящая из матриц оставляющих инвариантными некоторые симметричную билинейную и кососимметричную трилинейную формы. Эта группа исследовалась в работах Шевалле [3], [4], [5], Джекобсона [7], [8] и других авторов. Наиболее подробное и удобное для нас описание реализации группы типа $G_2$ как подгруппы $G_2(\mathbb{C})$ в $SL(7,\mathbb{C})$ дает Гросс [6]. На однородном пространстве $G_2(\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})\cap SU(7)$ можно определить метаплектические формы, - это функции автоморфные относительно некоторой дискретной подгруппы $\Gamma$ в $G_2(C)$ имеющие в качестве системы мультипликаторов гомоморфизм Басса-Милнора-Серра [1]. В частности, мы можем определить метаплектические ряды Эйзенштейна и исследовать их вычеты. Такого рода исследования проводились ранее для линейных и симплектических групп, смотрите [10], [11], [12], [9], [13].

Метаплектические формы на $G_2(\mathbb{C})$ никогда ранее не рассматривались. Применяемые нами (глобальные) методы требуют детального описания самой группы $G_2(\mathbb{C})$ и также некоторых специфических свойств дискретной подгруппы $\Gamma$. Настоящая работа как раз и имеет целью дать такое описание.

## § 1. Группа $G_2(\mathbb{C})$

Здесь собрано несколько предложений проясняющих структуру группы $G_2(\mathbb{C})$ - разложение Ивасавы, разложение Брюа, группа Вейля и т.д. Мы приводим доказательства только тех из них, которые не содержатся у Гросса [6]. Под $G_2(\mathbb{C})$ понимается группа (Ли типа $G_2$) $G$ из теоремы 1.4.1 [6].

1°. Разложение Ивасавы.

Пусть:

(a) $N$ - множество всех матриц

$$n(v_1, v_2, \dots, v_6) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
1 & \sqrt{2}\, v_1 & \sqrt{2}\, v_3 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\, v_4 \\ \hline
0 & 1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 v_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -v_1 \\
-\sqrt{2}\, v_4 & v_5 & v_6 & 1 & -v_3 & v_1 & v_3 v_5 - v_1 v_6 - v_4^2 \\ \hline
-\sqrt{2}\, v_1 & -v_1^2 & -v_4 - v_1 v_3 & 0 & 1 & 0 & -v_5 - v_1 v_4 \\
\sqrt{2}(v_1 v_2 - v_3) & v_4 - v_1 v_3 + v_1^2 v_2 & v_2 v_4 - v_3^2 + v_1 v_2 v_3 & 0 & -v_2 & 1 & -v_6 + v_2 v_5 - v_3 v_4 + v_1 v_2 v_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \tag{I.I}$$

$v_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \dots, 6;$

(в) $A$ – множество матриц вида

$$a(c_1, c_2) = \operatorname{diag}(1, c_1, c_2, (c_1 c_2)^{-1}, c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_1 c_2), \tag{I.2}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 > 0;$

(с) $$K = G_2(\mathbb{C}) \cap SU(7). \tag{I.3}$$

Тогда $N, A, K$ – подгруппы в $G_2(\mathbb{C})$ и

$$G_2(\mathbb{C}) = NAK \tag{I.4}$$

– разложение Ивасавы, причем $N$ – нильпотентная, $A$ – коммутативная и $K$ – максимальная компактная подгруппы.

$2^0$. Группа Вейля

Порядок группы Вейля группы $G_2(\mathbb{C})$ равен $12$. Как это принято делать, отождествляем группу Вейля с некоторой группой $S \subset K$. Именно,

$$S = \{e_7, p_1, p_2, (p_1 p_2)^{\alpha}, p_2 (p_1 p_2)^{\beta}, \alpha = 1, \dots, 5;\ \beta = 1, \dots, 4\} \tag{I.5}$$

здесь: $e_7$ – единичная матрица $7 \times 7$,

$$
p_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 000 & 000 \\ \hline \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & O & R \\ \hline \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & R & O \end{array}\right), \qquad
p_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 000 & 000 \\ \hline \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & T & O \\ \hline \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & O & T \end{array}\right),
$$

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{I.6}
$$

Группа $W$ порожденная $p_2$ и $(p_1 p_2)^2$ имеет индекс $2$ в $S$, так что

$$
S = W \cup W\tilde{p} \quad , \text{ при любом } \tilde{p} \in S \setminus W \tag{I.7}
$$

и объединение дизъюнктное.

3°. Разложение Брюа.

Пусть $C$ – множество всех матриц вида (I.2) с $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1 c_2 \neq 0$. Тогда $C$ – подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$ и

$$
B = CN = NC \tag{I.8}
$$

– максимальная разрешимая (=борелевская= минимальная параболическая) подгруппа в $G_2(C)$. Имеет место разложение $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение – разложение Брюа –

$$
G_2(\mathbb{C}) = \bigcup_{r \in S} B r B \tag{I.9}
$$

4°. Одномерные представления группы $N$.

Если $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ и

$$
e(z) = \exp\{2\pi i\,(z + \bar{z})\}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{I.10}
$$

то отображение

$$
n(v_1, v_2, \ldots, v_6) \mapsto e(\mu v_1 + \nu v_2) \tag{I.11}
$$

является одномерным комплексным представлением группы $N$. Других одномерных комплексных представлений группа $N$ не имеет.

5°. Разложение группы $N$.

Пусть $N_1$ – множество всех матриц $n_1$ вида

$$n_1 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
1 & \sqrt{2}u_3 & \sqrt{2}u_2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}u_1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3 \\
-\sqrt{2}\,u_1 & -u_1u_3 & -uu_2 & 1 & -u_2 & u_3 & -u_1^2 \\
\hline
-\sqrt{2}\,u_3 & -u_3^2 & -u_1u_2u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\sqrt{2}\,u_2 & u_1-u_2u_3 & -u_2^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \qquad (I.12)$$

и $N_0$ – множество всех матриц $n_0$ вида

$$n_0 = \left(\begin{array}{c|c|c}
1 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
\hline
\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & {}^t\mathcal{D}^{-1} & O \\
\hline
\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & O & \mathcal{D}
\end{array}\right), \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_3 \\ -z_1 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (I.13)$$

$$u_j, z_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1,2,3.$$

Тогда

$$N_0 N_1 = N_1 N_0 = N \qquad (I.14)$$

(каждый элемент из $N$ представим однозначно в виде $n_0 n_1$ с $n_0 \in N_0$, $n_1 \in N_1$ и в виде $n_1 n_0$, $n_0 \in N_0$, $n_1 \in N_1$ ). Это проверяется непосредственными вычислениями. $N_0$ – подгруппа в $N$.

6°. Вложение $SL(3,\mathbb{C})$ в $G_2(\mathbb{C})$.

Для $\sigma \in SL(3,\mathbb{C})$ положим

$$\sigma_* = \left(\begin{array}{c|c|c}
1 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
\hline
\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & {}^t\sigma^{-1} & O \\
\hline
\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & O & \sigma
\end{array}\right) \in SL(7,\mathbb{C}). \qquad (I.15)$$

Пусть $SL(3,\mathbb{C})_*$ – образ $SL(3,\mathbb{C})$ относительно мономорфизма $*$ определенного (I.I5). Покажем, что

$$SL(3,\mathbb{C})_* \subset G_2(\mathbb{C}) . \qquad (I.I6)$$

Воспользуемся для этого равенством

$$SL(3,\mathbb{C})_* = \bigcup_{r\in W} N_0 C r C N_0 \qquad (I.I7)$$

которое, по-существу, является разложением Брюа для $SL(3,\mathbb{C})$ [*]. Из разложения Брюа (I.9) и формул (I.I4), (I.8), (I.I7) находим:

$$SL(3,\mathbb{C})_* \subset \bigcup_{r\in W} N_1 N_0 C r C N_0 N_1 =$$

$$= \bigcup_{r\in W} B r B \subset G_2(\mathbb{C}),$$

что и требовалось.

$7^0$. Следствие разложения Брюа.

Имеет место разложение группы $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение

$$G_2(\mathbb{C}) = N_1\, SL(3,\mathbb{C})_* N_1 \cup N_1\, SL(3,\mathbb{C})_* p_0 N_1 \qquad (I.I8)$$

в котором

$$p_0 = (p_1 p_2)^3 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & & O & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & O & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & \end{array}\right) \in S\setminus W \qquad (I.I9)$$

Для доказательства (I.I8) достаточно (смотрите (I.7),(I.9)) проверить два равенства:

$$\bigcup_{r\in W} B r B = N_1\, SL(3,\mathbb{C})_* N_1, \qquad (I.20)$$

$$\bigcup_{r\in Wp} B r B = N_1\, SL(3,\mathbb{C})_* p_0 N_1, \qquad (I.2I)$$

---

[*] $W$ является образом относительно $*$ группы Вейля группы $SL(3,\mathbb{C})$.

с каким-либо $\tilde{p} \in S \setminus W$. Ради краткости ограничимся доказательством (I.2I). Сначала заметим, что

$$\tilde{p} C = C \tilde{p}, \quad \tilde{p} N_0 = N_0 \tilde{p}, \tag{I.22}$$

где

$$\tilde{p} = \varepsilon_* p_0 \in S \setminus W, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.23}$$

Очевидно,

$$SL(3, \mathbb{C})_* \tilde{p} = SL(3, \mathbb{C})_* p_0 . \tag{I.24}$$

Далее имеем (смотрите (I.I4), (I.8), (I.I7), (I.22), (I.24)):

$$\bigcup_{\tau \in W \tilde{p}} B \tau B = \bigcup_{\tau \in W} N_1 N_0 C \tau \tilde{p} C N_0 N_1 =$$

$$= \bigcup_{\tau \in W} N_1 (N_0 C \tau C N_0) \tilde{p} N_1 =$$

$$= N_1 \, SL(3, \mathbb{C})_* \tilde{p} N_1 = N_1 \, SL(3, \mathbb{C})_* p_0 N_1 ,.$$

что и требовалось.

8°. Еще одно разложение группы $G_2(\mathbb{C})$.

Имеет место разложение группы $G_2(\mathbb{C})$ в дизъюнктное объединение

$$G_2(\mathbb{C}) = N_1 \, SL(3, \mathbb{C})_* N_2 \cup N_1 \, SL(3, \mathbb{C})_* N_3 , \tag{I.25}$$

в котором $N_1$ как в пункте 5°, $N_2$ – множество всех матриц вида

$$n_2 = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} u_1 & -\sqrt{2} u_3 & -\sqrt{2} u_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -u_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} u_1 & u_2 & -u_3 & u_1^2 & u_1 u_3 & u_1 u_2 & -1 \\ \hline \sqrt{2} u_3 & -1 & 0 & 0 & u_3^2 & u_1 + u_2 u_3 & 0 \\ \sqrt{2} u_2 & 0 & -1 & 0 & -u_1 + u_2 u_3 & u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) , \tag{I.26}$$

$N_3$ – множество всех матриц вида

$$
n_3=\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,u_1 & \sqrt{2}\,u_3 & \sqrt{2}\,u_2 & 0 \\
\hline
-\sqrt{2}\,u_3 & 1 & 0 & -u_1u_3 & -u_3^2 & -u_1-u_2u_3 & 0 \\
-\sqrt{2}\,u_2 & 0 & 1 & -u_1u_2 & u_1-u_2u_3 & -u_2^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & u_2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -u_3 & 0 & 1 & 0 \\
-\sqrt{2}\,u_1 & -u_2 & u_3 & -u_1^2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right), \qquad (I.27)
$$

$u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$.

Для доказательства заметим, что

$$
n_1 p_0^{-1} = n_2, \qquad p_0 n_1 p_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_1u_3 & -u_2u_1 & 1 \end{pmatrix} n_3,
$$

если $n_1, n_2, n_3$ из (I.12), (I.26), (I.27). Умножив разложение (I.18) справа на $p_0^{-1}$ и воспользовавшись этим замечанием получаем (I.25).

9°. Последняя строка.

Вектор строка

$$
(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)
$$

является последней строкой некоторой матрицы из $G_2(\mathbb{C})$ в том и только в том случае, если

$$
c_1^2 = -2(c_2c_5 + c_3c_6 + c_4c_7). \qquad (I.28)
$$

Доказательство получается непосредственными вычислениями основывающимися на разложении (I.25).

10°. Два замечания

Отметим, что

$$
p_0 N p_0^{-1} = {}^tN, \qquad (I.29)
$$

$$
N_3 = {}^tN_1 \qquad (I.30)
$$

( $t$ обозначает транспонирование). Эти равенства проверяются очевидным образом.

II$^{\circ}$. Два вложения группы $SL(2,\mathbb{C})$ в $G_2(\mathbb{C})$ . Если

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}), \tag{I.31}$$

то

$$\check{\sigma}=\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1+2bc & -\sqrt{2}\,bd & 0 & 0 & \sqrt{2}\,ac & 0 & 0 \\ \hline -\sqrt{2}\,cd & d^2 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & -b & 0 \\ \hline \sqrt{2}\,ab & -b^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \in G_2(\mathbb{C}), \tag{I.32}$$

и

$$\hat{\sigma}=\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1+2bc & 0 & \sqrt{2}\,bd & 0 & 0 & -\sqrt{2}\,ac & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ \sqrt{2}\,cd & 0 & d^2 & 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -c & d & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\,ab & 0 & -b^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \in G_2(\mathbb{C}), \tag{I.33}$$

Для доказательства заметим, что

$$\hat{\sigma}=p_2\,\check{\sigma}\,p_2^{-1}, \tag{I.34}$$

где $p_2$ из (I.6), и что для $\check{\sigma}$ имеет место разложение

$$\check{\sigma}=n_1 h_* n_3 \tag{I.35}$$

в котором:

$n_1$ из (I.I2) с $u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{b}{d}$,

$n_3$ из (I.27) с $u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{c}{d}$,

$$h = \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Разложения (I.25) и (I.35) обеспечивают $\check{\delta} \in G_2(\mathbb{C})$. И, далее, из (I.34) и $p_2 \in G_2(\mathbb{C})$ следует $\hat{\delta} \in G_2(\mathbb{C})$.

Отображения $\vee$ и $\wedge$ являются мономорфизмами групп. Мы оставляем читателю проверить это.

## § 2. Дискретная подгруппа

Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ и $q$ – идеал в $\mathcal{O}$. Матрицы

$$(a_{ij}) \in G_2(\mathbb{C}) \tag{2.I}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &(a) \quad a_{ii} \in 1+q, \quad i=1,\dots,7, \\ &(в) \quad a_{1i}, a_{i1} \in \sqrt{2}\,q, \quad i=2,\dots,7, \\ &(c) \quad a_{ij} \in q, \quad i,j=2,\dots,7, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{2.2}$$

составляют дискретную подгруппу $\Gamma(q)$ в $G_2(\mathbb{C})$ ; мы будем обозначать ее через $\Gamma$ в случае когда $q=(3)$ и через $G_2(\mathcal{O})$ случае, когда $q=(1)$. Если $q$ обозначает не идеал в $\mathcal{O}$, а какое-либо подкольцо в $\mathbb{C}$, то группу определяемую условиями (2.2) мы обозначаем через $G_2(q)$ ; например, $G_2(\mathbb{Z})$ – подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$ состоящая из всех матриц удовлетворяющих (2.2) с $\mathbb{Z}$ вместо $q$. (Множитель $\sqrt{2}$ в условии (в) обеспечивает компактность фактора $N \cap \Gamma(q) \backslash N$.)

Ниже мы определяем некоторые подгруппы в $\Gamma$ и доказываем ряд утверждений, которые должны обеспечить возможность вычисления коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна на $G_2(\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C}) \cap SU(7)$ автоморфных относительно $\Gamma$.

Обозначения из § I сохраняются.

Всюду далее

$$\begin{aligned} &\mathcal{O} \text{ – кольцо целых чисел поля } \mathbb{Q}(\sqrt{-3}); \\ &q \text{ – идеал в } \mathcal{O} \text{ порожденный } 3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\mathcal{O}$ из (2.3) – кольцо главных идеалов, с алгоритмом Евклида и с однозначным разложением на простые множители. Группа $\mathcal{O}^*$ единиц кольца $\mathcal{O}$ содержит 6 элементов, – это корни уравнения $\xi^6=1$. Для каждого $c\in\mathcal{O}$, $c\neq 0$, существует и единственно разложение вида

$$c=\xi\,(\sqrt{-3})^n c', \tag{2.4}$$

$\xi\in\mathcal{O}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$, $c'\in 1+q$. В частности, если $c\in 1+q$ и $c\in\mathcal{O}^*$, то $c=1$. Для $a_1,a_2,\dots,a_m$ из которых не все равны 0 мы обозначаем через

$$\mathrm{Hog}\,(a_1,a_2,\dots,a_m)$$

число $c\in\mathcal{O}$ порождающее идеал $(a_1)+(a_2)+\dots+(a_m)$ и имеющее в разложении (2.4) $\xi=1$. (Теория квадратичных полей изложена в [2].)

I°. Подгруппа $\tilde{\Gamma}$.

Положим

$$\tilde{\Gamma}=\Gamma\cap SL(3,\mathbb{C})_* \tag{2.5}$$

Очевидно, $\tilde{\Gamma}$ – образ относительно $*$ главной конгруэнцподгруппы $\mathrm{mod}\ q$ в $SL(3,\mathcal{O})$.

2°. Группы $\Delta_j$.

Полагаем

$$\Delta_0=B\cap\Gamma, \tag{2.6}$$

$B$ – борелевская подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$, смотрите пункт 3°, §I. Вместе с тем, легко показать, что

$$\Delta_0=N\cap\Gamma. \tag{2.7}$$

Далее,

$$\Delta_1=\{(a_{ij})\in\Gamma\mid a_{7j}=0,\ j=1,\dots,6;\ a_{77}=1\}, \tag{2.8}$$

– это подгруппа в $\Gamma$, которую можно охарактеризовать также как пересечение $B'\cap\Gamma$, где $B'$ – некоторая максимальная параболическая подгруппа в $G_2(\mathbb{C})$.

Наконец,

$$\Delta_2 \text{ – подгруппа в } \Gamma \text{ порожденная } \Delta_1 \text{ и } \tilde{\Gamma}. \tag{2.9}$$

Очевидно,

$$\Delta_0\subset\Delta_1\subset\Delta_2 \tag{2.10}$$

3°. Построение матрицы $\gamma\in\Gamma$ по последней строке.

Пусть вектор строка

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) \tag{2.11}$$

удовлетворяет условиям:

$$c_1 \in \sqrt{2}\,\mathfrak{q};\ c_2, c_3, \ldots, c_6 \in \mathfrak{q};\ c_7 \in 1+\mathfrak{q}; \tag{2.12}$$

$$c_1^2 = -2(c_2c_5 + c_3c_6 + c_4c_7); \tag{2.13}$$

$$(c_5) + (c_6) + (c_7) = \mathcal{O}. \tag{2.14}$$

Пусть $\delta$ – матрица из главной конгруэнцподгруппы $\bmod \mathfrak{q}$ в $SL(3,\mathcal{O})$ с последней строкой $(c_5, c_6, c_7)$ :

$$\delta = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ c_5 & c_6 & c_7 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

(Существование такой матрицы $\delta$ обеспечивается (2.12), (2.14)). Мы утверждаем, что существует такая матрица $n \in N_3 \cap \Gamma$, что

$$\gamma = n\delta_* \tag{2.16}$$

имеет нижней строкой вектор (2.11). Это означает, в частности, что каждый вектор (2.11) удовлетворяющий (2.12), (2.13), (2.14) является последней строкой некоторой матрицы $\gamma \in \Gamma$. (Условия (2.12), (2.13) нельзя опустить. Однако, в $\Gamma$ есть матрицы $\gamma$ с последней строкой не удовлетворяющей (2.14); такие $\gamma$ конечно не представлены в виде (2.16)). Докажем наше утверждение. Пусть $n = n_3$ из (1.27) и пусть

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_7)$$

последняя строка матрицы $n\delta_*$. Перемножая находим:

$$\tilde{c}_1 = -\sqrt{2}\,u_1 \tag{2.17}$$

$$\tilde{c}_j = c_j, \quad j = 5,6,7;$$

$$(-u_2, u_3, -u_1^2) = (\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4)^t\,\delta. \tag{2.18}$$

Равенства

$$\tilde{c}_j = c_j, \quad j = 2,3,4$$

будут обеспечены, если определить $u_1, u_2, u_3$ из равенства

$$(-u_2, u_3, -u_1^2) = (c_2, c_3, c_4)^t\,\delta. \tag{2.19}$$

Очевидно, что определяемые отсюда $u_2$, $u_3$ принадлежат $\mathfrak{q}$. В том, что касается $u_1$, равенство (2.19) эквивалентно:

$$-u_1^2 = c_2c_5 + c_3c_6 + c_4c_7 .$$

Ввиду (2.13), (2.17) мы можем и должны взять

$$u_1 = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \in q . \qquad (2.20)$$

При этом $n \in N_3 \cap \Gamma$ и

$$\tilde{c}_j = c_j , \quad j = 1,\dots,7,$$

что и требовалось.

Отметим, что в разложении (2.16) матрица $n$ однозначно определяется по вектору (2.11) и матрице (2.15) равенствами (2.19), (2.20) и даже одним только равенством (2.19).

$4^{\circ}$. О классах из $\Gamma/\Delta_0$ .

Пусть

$$(c_1, c_2, \dots, c_7) \qquad (2.21)$$

– последняя строка матрицы $\gamma \in \Gamma$ , $n \in \Delta_0$ и

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_7) \qquad (2.22)$$

– последняя строка матрицы $\gamma n$ .

Если

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = 0 , \qquad (2.23)$$

то также

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_4 = \tilde{c}_5 = \tilde{c}_6 = 0 \qquad (2.24)$$

(проверяется непосредственно умножением).

Мы утверждаем, что во всех случаях отличных от (2.23) матрицу $n \in \Delta_0$ можно подобрать так, что

$$(\tilde{c}_5) + (\tilde{c}_6) + (\tilde{c}_7) = \mathcal{O} . \qquad (2.25)$$

Другими словами, каждый класс из $\Gamma/\Delta_0$ либо состоит из матриц $\gamma$ с последней строкой вида

$$(0, c_2, c_3, 0, 0, 0, c_7), \qquad (2.26)$$

либо содержит матрицу $\gamma$ удовлетворяющую условию (2.14).

Для построения доказательства нам будет удобно рассмотреть раздельно следующие три случая:

(а) $C_4 \neq 0$; $C_1 \neq 0$;

(в) $C_4 \neq 0$; $C_1 = 0$; (2.27)

(с) $C_4 = 0$; $C_5 \neq 0$ или $C_6 \neq 0$.

В случаях (а) и (с) мы сможем подобрать необходимую матрицу $n$ в $\Gamma \cap N_1 \subset \Delta_0$, причем так, что $n = n_1$ с $u_1 = 0$ (смотрите (I.I2)). Случай (в) сводится к (а). Случаи (а), (в) и (с) будут рассмотрены в пунктах $5^0$, $6^0$ и $7^0$.

Если строка (2.27) не удовлетворяет ни одному из условий (2.27), то она имеет вид (2.26) (это следует из (I.28)).

Умножив $\gamma$ на $n = n_1 \in \Gamma \cap N_1$ из (I.I2) мы находим:

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \sqrt{2}\, C_4 u_1 \quad \text{, если } u_2 = u_3 = 0; \tag{2.28}$$

$$\tilde{C}_4 = C_4; \tag{2.29}$$

$$\tilde{C}_5 = C_5 - C_4 u_2; \tag{2.30}$$

$$\tilde{C}_6 = C_6 + C_4 u_3; \tag{2.31}$$

$$\tilde{C}_7 = C_7 + C_2 u_2 - C_3 u_3, \text{ если } u_1 = 0. \tag{2.32}$$

Отметим, что

$$\mathrm{Hog}\,(C_1, C_2, \ldots, C_7) = 1, \tag{2.33}$$

– так как иначе $\det \gamma \neq 1$ и что

$$\mathrm{Hog}\,(C_2, C_3, \ldots, C_7) = 1, \tag{2.34}$$

– следует из (2.33) и (I.28).

$5^0$. Случай (а).

Мы ищем $n = n_1 \in \Gamma \cap N_1$ из (I.I2) с $u_1 = 0$ с тем, чтобы имело место (2.25).

Будем искать $u_j$ в виде

$$u_j = 3x_j, \quad x_j \in \mathcal{O}, \quad j = 2, 3. \tag{2.35}$$

Пусть

$$a = \mathrm{Hog}(C_2, C_3, C_7), \quad b = \mathrm{Hog}(3C_4, C_5), \quad d = \mathrm{Hog}(3C_4, C_6);$$

$$c_4' = 3c_4 b^{-1}, \quad c_5' = c_5 b^{-1}, \quad c_4'' = 3c_4 d^{-1}, \quad c_6'' = c_6 d^{-1}; \tag{2.36}$$

$$c_j' = c_j a^{-1}, \quad j = 2, 3, 7.$$

В этих обозначениях (2.30), (2.3I), (2.32) принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_5 &= b(c_5' - c_4' x_2), \\ \tilde{c}_6 &= d(c_6'' - c_4'' x_3), \\ \tilde{c}_7 &= a(c_7' + 3c_2' x_2 - 3c_3' x_3). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Из равенства (I.28) и формул (2.30), (2.3I), (2.32) находим

$$c_1^2 = -2(c_2\tilde{c}_5 + c_3\tilde{c}_6 + c_4\tilde{c}_7). \tag{2.38}$$

Отсюда видно, что общий делитель чисел $\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7$ является делителем $c_1$. Нам достаточно, следовательно, подобрать $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$ таким образом, чтобы

$$\text{Нод}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7, c_1) = 1. \tag{2.39}$$

Пусть $p$ – простой делитель числа $c_1$, $p \neq \sqrt{-3}$. Поскольку

$$\text{Нод}(c_4', c_5') = \text{Нод}(c_4'', c_6'') = 1,$$

имеем:

если $p \mid c_4'$, то $\text{Нод}(c_5' - c_4' x_2, p) = 1$, для всех $x_2$;
если $p \nmid c_4'$, то $\text{Нод}(c_5' - c_4' x_2, p) = 1$ для всех $x_2 \not\equiv c_4'^{-1} c_5' \pmod p$;

если $p \mid c_4''$, то $\text{Нод}(c_6'' - c_4'' x_3, p) = 1$ для всех $x_3$;
если $p \nmid c_4''$, то $\text{Нод}(c_6'' - c_4'' x_3, p) = 1$, для всех $x_3 \not\equiv c_4''^{-1} c_6'' \pmod p$;

Таким образом,

$$\text{Нод}(c_5' - c_4' x_2, p) = 1 \tag{2.40}$$

для всех $x_2 \in \mathcal{O}$ за исключением, быть может, $x_2 \equiv \alpha \pmod p$ для какого-нибудь одного $\alpha$. Точно так же,

$$\text{Нод}(c_6'' - c_4'' x_3, p) = 1 \tag{2.4I}$$

для всех $x_3 \in \mathcal{O}$ за исключением, быть может, $x_3 \equiv \beta \pmod p$ для какого-нибудь одного $\beta$. Далее, если

$$p \mid (c_7' + 3c_2' x_2 - 3c_3' x_3) \tag{2.42}$$

для всех $x_2 \not\equiv \alpha \pmod p$ и $x_3 \not\equiv \beta \pmod p$, то

$$p \mid \text{Нод}(c_7', 3c_2', 3c_3'),$$

а это невозможно ввиду (2.36). Отсюда следует, что существуют такие $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$, что имеют место (2.40), (2.4I) и

$$p \nmid (c_7' + 3c_2' x_2 - 3c_3' x_3). \tag{2.43}$$

Эти $x_2$ и $x_3$ можно заменить на любые другие лежащие в тех же классах $\bmod p$ с сохранением свойств (2.40), (2.4I), (2.43).

Перебрав так все простые делители $p \neq \sqrt{-3}$ числа $c_1$ и воспользовавшись китайской теоремой об остатках мы получаем такие $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$, что каждое из чисел

$$c_5' - c_4' x_2, \quad c_6'' - c_4'' x_3, \quad c_7' + 3c_2' x_2 - 3c_3' x_3 \tag{2.44}$$

не имеет с $c_1$ общих простых делителей за исключением быть может $\sqrt{-3}$. Отметим также, что последнее из чисел (2.44) не делится на $\sqrt{-3}$. С такими $x_2, x_3$ мы получаем из (2.36), (2.37), (2.33):

$$\text{Нод}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7, c_1) = \text{Нод}(b, d, a, c_1) =$$

$$= \text{Нод}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = 1.$$

Как уже отмечалось, отсюда следует

$$\text{Нод}(\tilde{c}_5, \tilde{c}_6, \tilde{c}_7) = 1,$$

что и требовалось.

6°. Случай (в).

Умножим $\gamma$ на матрицу $n = n_1 \in \Gamma \cap N_1$ из (I.I2) с $u_2 = u_3 = 0$ и $u_1 \neq 0$. Согласно (2.28), (2.29) в последней строке матрицы $\gamma n$ первый и четвертый элементы отличны от $0$. Следовательно, мы можем применить к $\gamma n$ результат пункта 5°.

7°. Случай (с).

В соответствии с (2.30), (2.3I), (2.32) нам достаточно подобрать $u_2, u_3 \in q$ так, чтобы

$$\text{Нод}(c_5, c_6, c_7 + c_2 u_2 - c_3 u_3) = 1. \tag{2.45}$$

Пусть

$$d = \text{Нод}(c_2, c_3), \quad c_j' = c_j d^{-1}, \quad j = 2, 3. \tag{2.46}$$

Будем искать $u_j$ в виде

$$u_j = 3x_j, \quad x_j \in \mathcal{O}, \quad j = 2, 3.$$

В этих обозначениях

$$c_7 + c_2 u_2 - c_3 u_3 = c_7 + 3d(c_2' x_2 - c_3' x_3).$$

Поскольку $\text{Нод}(c_2', c_3')=1$, уравнение $c_2' x_2 - c_3' x_3 = t$ разрешимо с $x_2, x_3 \in \mathcal{O}$ при любом $t \in \mathcal{O}$. Поэтому нам достаточно доказать существование такого $t \in \mathcal{O}$, что

$$\text{Нод}(c_5, c_6, c_7 - 3dt) = 1. \tag{2.47}$$

Поскольку $c_5 \neq 0$ или $c_6 \neq 0$ равенство (2.47) имеет место при каком-либо $t \in \mathcal{O}$ в том и только в том случае, если

$$\text{Нод}(c_5, c_6, c_7, 3d) = 1. \tag{2.48}$$

Поскольку $\text{Нод}(c_7, 3) = 1$, $c_4 = 0$, (2.48) следует из (2.46), (2.34).

8°. Построение матрицы $\gamma \in \Gamma$ по последней строке.

Одна конструкция предложена в пункте 3°. Вопрос, однако, не был решен полностью – условие (2.14) слишком ограничительно. Здесь мы предлагаем еще одну конструкцию, которая очень ограничена, но позволяет нам построить матрицу $\gamma \in \Gamma$ с последней строкой как в (2.26). Мы таким образом получаем представителей тех классов из $\Gamma/\Delta_0$, которые были исключены из рассмотрения в пункте 4°. Итак, пусть

$$c_2, c_3 \in q; c_2 \neq 0 \quad \text{или} \quad c_3 = 0; \ c_7 \in 1 + q \tag{2.49}$$

Положим $\ell = \text{Нод}(c_2, c_3)$. Построим

$$\sigma = \begin{pmatrix} \times & \times \\ \ell & c_7 \end{pmatrix}, \qquad \delta = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ -c_3\ell^{-1} & c_2\ell^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

так что $\delta \in SL(3, \mathcal{O})$, а $\sigma$ лежит в главной конгруэнцподгруппе $\bmod q$ в $SL(2, \mathcal{O})$. После этого легко находим, что

$$\gamma = \delta_*^{-1} \hat{\sigma} \delta_* \in \Gamma \tag{2.51}$$

и что последняя строка матрицы $\gamma$ есть

$$(0, c_2, c_3, 0, 0, 0, c_7) \tag{2.52}$$

Наконец, если в (2.26) $c_2 = c_3 = 0$, то $c_7 = 1$ и в качестве $\gamma$ можно взять единичную матрицу.

## Литература


1. H.B a s s , J.M i l n o r and S.J.S e r r e , "Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n$ $(n \geqslant 3)$ and $Sp_{2n}$ $(n \geqslant 2)$ ". Inst. Hautes Etudes Sci.Publ.Math., No.33 (1967), 59-137.
2. З.И.Б о р е в и ч, И.Р.Ш а ф а р е в и ч, Теория чисел, Москва, "Наука", I972.
3. C.C h e v a l l e y , Theory of Lie groups. I, Princeton Math.Series, Vol.8, Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1946.
4. C.C h e v a l l e y , Sur certains groupes simples, Tôhoku Math.J. 7 (1955), 14-66.
5. Séminaire Chevalley, Classification des groupes de Lie algebriques, Secretariat Math., Paris, 1958.
6. K.I.G r o s s, The Plancherel transform on the nilpotent part of $G_2$ and some applications to the representation theory of $G_2$ , Transactions of the American Mathematical Society, v.132, N 2, 1968, c.411-446.
7. N.J a c o b s o n, Cayley numbers and simple Lie algebras of type $G$ , Duke Math.J. 5 (1939), 775-783.
8. N.J a c o b s o n, Composition algebras and their automorphisms, Rend.Circ.Mat.Palermo (2) 7 (1958), 55-80.
9. D.A.K a z h d a n and S.J.P a t t e r s o n, "Metaplectic forms", Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math., No.59 (1984), 35-142.
10. T.K u b o t a "On automorphic functions and the reciprocity law in a number theory", Lectures in Math., Kyoto Univ.,No.2, (1969).
11. S.J.P a t t e r s o n, "A cubic analogue of the theta series I, II", J.Reine Angew.Math. 296 (1977), 125-161, 217 - 220.
12. Н.В.П р о с к у р и н , "Автоморфные функции и гомоморфизм Басса-Милнора-Серра, I,II", в кн. Записки научных семинаров ЛОМИ, т.I23, Автоморфные функции и теория чисел, I, (I983), с.85-I26, I27-I63. (Translation from Russian to English: Journal of Soviet Mathematics. v.29, No.2, april 1985, 115-1191, 1192-1218).
13. N.V.P r o s k u r i n , On cubic symplectic metaplectic forms, preprint LOMI E-I-87, Leningrad, 1987.