ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1968 МАТЕМАТИКА № 10 (77)

УДК 519.40

Л. М. Глускин

МИНИМАЛЬНЫЕ БИИДЕАЛЫ ОПЕРАТИВА

Различные условия минимальности естественным образом возникают во многих алгебраических теориях. Хорошо известна роль, которую они там играют. Наличие минимальной подалгебры того или иного рода в структуре подалгебр дает часто весьма существенную информацию о строении всей алгебры. К таким алгебрам относятся, в частности, и полугруппы. В настоящей статье с этой точки зрения изучаются позиционные оперативы [1] — [3] — класс алгебр с тождествами (2), (3) типа ассоциативности, содержащий полугруппы и полугруды. В § 2 настоящей статьи на $\mathfrak{p}$-оперативы обобщаются известные результаты о разложении i-простых полугрупп в объединение их минимальных односторонних идеалов. Условие (7) здесь существенно, оно является аналогом условия [5] отсутствия в полугруппе нильпотентных идеалов. Для некоторых классов $\mathfrak{p}$-оперативов приведены критерии их c-простоты (при $n=2$ c-простой $\mathfrak{p}$-оператив — это не что иное, как вполне простая полугруппа).

В § 3 дано разложение c-простого $\mathfrak{p}$-оператива в объединение его равномощных минимальных биидеалов (теорема п. 3.1). С помощью результатов этого параграфа автором получен для позиционных оперативов аналог теоремы Сушкевича — Рисса — Клиффорда [3]. В теоремах п. п. 3.10—3.10.2 в терминах биидеалов дан критерий c-простоты позиционных оперативов.

В § 4 с помощью биидеалов изучаются $\mathfrak{p}$-оперативы из обратимых элементов (теоремы п. 4.2 — 4.2.1). Теорема п. 4.1 дополняет один из результатов статьи [2].

§ 1. Позиционные оперативы

1.1 *Оперативом* называется множество S с одной всюду определенной n-арной операцией: $s_1s_2 \ldots s_n = s$ $(s_i, s \in S)$. Если A_i — непустые подмножества оператива S, то через $A_1A_2 \ldots A_n$ обозначим множество всех произведений $a_1a_2 \ldots a_n$, где $a_i \in A_i$. Если при этом одно из подмножеств A_i (например, A_1) содержит единственный элемент a, то будем писать $A_1A_2 \ldots A_n = aA_2 \ldots A_n$. Если $A_{t+1} = A_{t+2} = \ldots = A_{t+k} = A$, то обозначим $A_1A_2 \ldots A_n = A_1A_2 \ldots A_tA^kA_{t+k+1} \ldots A_n$; A^0 — пустой символ. Обозначим далее $(A_1A_2 \ldots A_n)\, A_{n+1} \ldots A_{2n-1} = A_1A_2 \ldots A_{2n-1}$. Иногда вместо $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k \ldots A_n$ будем писать $A_1A_2 \ldots A_{k-1} \cdot A_k \ldots A_n$.

Непустое подмножество A оператива S называется (k)-*идеалом*, если $S^{k-1}AS^{n-k} \subseteq A$. Множество A, являющееся (k)-идеалом при всех

$k=1, 2, \ldots, n$, называется *идеалом* оператива S; при $k=1$ и одновременно при $k=n$ — *двусторонним идеалом*. Если оператив S содержит такой элемент 0, что $\{0\}$ является идеалом, то 0 называется *нулем* оператива S. Подмножество B оператива S называется его *биидеалом* [5], если $BS^{2n-3}B \subseteq B$.

Ненулевой (k)-идеал (соответственно двусторонний идеал, биидеал) M оператива S называется *минимальным*, если он не содержит ненулевых (k)-идеалов (соответственно двусторонних идеалов, биидеалов) оператива S, отличных от M.

1.2. Всюду в дальнейшем через J_r будем обозначать отрезок натурального ряда $\{1, 2, \ldots, r\}$. Пусть $\mathfrak{p}=\{\rho_k\}_{k=1}^{n}$ — семейство взаимно однозначных отображений ρ_k множества J_{2n-1} на себя таких, что

$$\rho_1=\rho_n=\varepsilon \tag{1}$$

(ε — тождественная подстановка). Оператив S называется позиционным, ассоциированным с семейством $\mathfrak{p}$ (или $\mathfrak{p}$-*оперативом*), если при любых $k \in J_n$, $x_i \in S$

$$x_1x_2 \ldots x_{k-1}(x_kx_{k+1} \ldots x_{k+n-1})x_{k+n} \ldots x_{2n-1} = x_{\rho_k 1}x_{\rho_k 2} \ldots x_{\rho_k (2n-1)}. \tag{2}$$

Позиционный оператив S называется π-*оперативом*, если при любых $k \in J_n$, $j \in J_{2n-1}$ $k \leqslant j \leqslant k+n-1 \leftrightarrow k \leqslant \rho_k j \leqslant k+n-1$ [1]. Иначе говоря, π-оперативу S можно отнести семейство $\pi=\{\sigma_k, \pi_k\}_{k=1}^{n}$ подстановок σ_k, π_k множества J_n таких, что $\pi_1=\pi_n=\sigma_1=\sigma_n=\varepsilon$, $\sigma_k 1=k$, и для любых $x_i, y_j \in S$

$$\begin{gathered} x_1x_2 \ldots x_{k-1}(y_1y_2 \ldots y_n)x_{k+1} \ldots x_n = \\ = x_{\sigma_k 1}x_{\sigma_k 2} \ldots x_{\sigma_k (k-1)}y_{\pi_k 1}y_{\pi_k 2} \ldots y_{\pi_k n}x_{\sigma_k (k+1)} \ldots x_{\sigma_k n}. \end{gathered} \tag{3}$$

π-оператив называется *ассоциативом*, если $\sigma_k=\pi_k=\varepsilon$ при всех $k \in J_n$, *альтернативом*, если n нечетно и все $\sigma_k=\pi_{2j+1}=\varepsilon$, $\pi_{2j}=\tau$, где

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В [1], [2] использованы обозначения: $n\mathfrak{p}$-оператив, $n\pi$-оператив, n-ассоциатив, n-альтернатив. В настоящей статье, как и в [3], обозначения несколько упрощены, поскольку арность операции n всюду считается фиксированной.

π-оператив S назовем π^*-*оперативом*, если $\pi_i\{1, n\}=\{1, n\}$ при любом $i \in J_n$. Всякий ассоциатив или альтернатив является, очевидно, π^*-оперативом. В [1], [2] рассмотрен еще один класс π^*-оперативов.

1.3. Оператив S, содержащий более одного элемента, назовем i-*простым*, если он не содержит собственных идеалов и не изоморфен оперативу $V_n=\{0, a\}$, где 0 — нуль и $a^n=0$. Известно [3], что $S^n=S$ для всякого i-простого $\mathfrak{p}$-оператива S. Если a — произвольный ненулевой элемент из S, то S является объединением своих двусторонних идеалов A_γ:

$$S=\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma, \tag{4}$$

где Γ — подмножество J_{n-1}, $A_1=S^{n-1}aS^{n-1}$, $A_\gamma=S^{\gamma-1}aS^{n-\gamma}$ при $\gamma \neq 1$, $A_\gamma \cap A_\delta=\{0\}$ при $\gamma \neq \delta$. Для каждого двустороннего идеала A_γ существует семейство $\{\xi_\gamma i\}_{i=1}^{n}$ индексов $\xi_\gamma i \in \Gamma$ такое, что $A_{\xi_\gamma 1}=A_{\xi_\gamma n}=A_\gamma$,

$$A_\gamma=A_{\xi_\gamma 1}A_{\xi_\gamma 2} \ldots A_{\xi_\gamma n}, \tag{5}$$

---

[1] $\leftrightarrow$ — логическая эквивалентность; $\rightarrow$ — импликация; $\forall$ — квантор общности.

при любых $\gamma_i \in \Gamma$

$$A_\gamma A_{\gamma_2} A_{\gamma_3} \ldots A_{\gamma_n} = \{0\}, \text{ если } A_{\gamma_i} \neq A_{\xi_\gamma i}. \qquad (6)$$

Для любых различных A_γ, A_δ найдется индекс $k \in J_{n-1}$ такой, что $A_\delta = S^{k-1} A_\gamma S^{n-k}$.

1.4. i-простой $\mathfrak{p}$-оператив S называется j-простым [3], если при любых $k \in J_{n-1}$, $a \in S \setminus \{0\}$

$$S^{k-1} a S^{n-k} \neq \{0\}. \qquad (7)$$

В частности, всякий i-простой π^*-оператив j-прост. В j-простом $\mathfrak{p}$-оперативе S все двусторонние идеалы A_γ (см. п. 1.3) минимальны, будем называть их *компонентами* оператива S. Для любой компоненты A_γ j-простого оператива S и любых его элементов x_i либо $A_\gamma x_2 x_3 \ldots x_{n-1} A_\gamma = \{0\}$, либо $A_\gamma x_2 x_3 \ldots x_{n-1} A_\gamma = A_\gamma$; если $a \in A_\gamma$, $a \neq 0$, то $A_\gamma = S^{n-1} a S^{n-1}$. j-простой оператив S называется *c-простым*, если каждая его компонента содержит по крайней мере один минимальный левый и один минимальный правый идеалы.

Понятие c-простого оператива является обобщением понятия вполне простой полугруппы.

В [3] замечено, что i-простой $\mathfrak{p}$-оператив без нуля не содержит собственных двусторонних идеалов; очевидно, что такой оператив j-прост. Следовательно, i-простой $\mathfrak{p}$-оператив без нуля c-прост тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один минимальный левый и хотя бы один минимальный правый идеалы.

§ 2. Минимальные односторонние идеалы j-простого $\mathfrak{p}$-оператива

2.1. Лемма. *Пусть S есть j-простой $\mathfrak{p}$-оператив с нулем* 0, *L — его минимальный левый идеал, a_i — произвольные элементы из S, $L' = La_2a_3 \ldots a_n$.*

Тогда либо $L' = \{0\}$, либо L' также является минимальным левым идеалом оператива S.

Доказательство. Множество L' является левым идеалом оператива S: из (2) следует $S^{n-1} L' = S^{n-1}(La_2 \ldots a_n) = (S^{n-1} L) a_2 \ldots a_n \subseteq La_2 \ldots a_n = L'$. Пусть $L' \neq \{0\}$ и L'' — левый идеал оператива S, содержащийся в L'; L_1 — подмножество L, состоящее из всех $l \in L$ таких, что $la_2 \ldots a_n \in L''$. Тогда в силу (2) $(S^{n-1} L_1) a_2 \ldots a_n = S^{n-1}(L_1 a_2 \ldots a_n) = S^{n-1} L'' \subseteq L'$ и $S^{n-1} L_1 \subseteq L_1$, т. е. L_1 — левый идеал оператива S, содержащийся в L. По условию, $L_1 = \{0\}$ или $L_1 = L$. Соответственно $L'' = \{0\}$ или $L'' = L'$, т. е. $L' = La_2 \ldots a_n$ — минимальный левый идеал.

2.2. Лемма. *При условиях* п. 2.1: 1) $S^{n-1} x = L$ *для любого элемента* $x \in L$; 2) *при любых* $a_i \in S$ $La_2 \ldots a_n \neq \{0\} \leftrightarrow \forall_{x \in L \setminus \{0\}} xa_2 \ldots a_n \neq \{0\}$.

Доказательство. $S^{n-1} x$ является ненулевым левым идеалом оператива S, содержащимся в L; следовательно, $S^{n-1} x = L$. Допустим, что $La_2 \ldots a_n \neq \{0\}$ и $xa_2 \ldots a_n = 0$ при некоторых $x \in L \setminus \{0\}$, $a_i \in S$. Тогда из (2) и $S^{n-1} x = L$ следует $La_2 \ldots a_n = (S^{n-1} x) a_2 \ldots a_n = \{0\}$, что противоречит условию. Таким образом, $La_2 \ldots a_n \neq \{0\} \rightarrow \forall_{x \in L \setminus \{0\}} xa_2 \ldots a_n \neq 0$. Обратная импликация тривиальна.

2.3. Лемма. *Если L — минимальный левый идеал j-простого $\mathfrak{p}$-оператива S, то LS^{n-1} является компонентой оператива S и объединением некоторого множества его минимальных левых идеалов.*

Доказательство. $LS^{n-1} \neq \{0\}$, так как S j-прост. Из (2) следует: $S^{n-1}(LS^{n-1}) = (S^{n-1}L)S^{n-1} \subseteq LS^{n-1}$, $(LS^{n-1})S^{n-1} = LS^{2n-2} \subset LS^{n-1}$, и $A = LS^{n-1}$ является ненулевым двусторонним идеалом оператива S.

Пусть l — произвольный ненулевой элемент из L. Из п. 1.3 следует, что l содержится в некоторой компоненте A_γ оператива S. По лемме п. 2.2 $L = S^{n-1}l \subseteq A_\gamma$. Но тогда $LS^{n-1} \subseteq A_\gamma$. Из минимальности двустороннего идеала A_γ и из $LS^{n-1} \neq \{0\}$ следует $A_\gamma = LS^{n-1}$. По лемме п. 2.1 LS^{n-1} является объединением некоторого множества минимальных левых идеалов оператива S.

2.4. Пусть S есть c-простой $\mathfrak{p}$-оператив. Каждому его минимальному левому идеалу припишем некоторый индекс λ. Обозначим через Λ_γ множество всех индексов λ, приписанных минимальным левым идеалам, содержащимся в компоненте A_γ. Из п. 2.3 вытекает

$$A_\gamma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_\gamma} L_\lambda. \tag{8}$$

Если $\lambda \neq \mu$ (т. е. $L_\lambda \neq L_\mu$), то $L_\lambda \cap L_\mu$ является левым идеалом оператива S, содержащимся в L_λ и L_μ, и, следовательно, $L_\lambda \cap L_\mu = \{0\}$. Точно так же

$$A_\gamma = \bigcup_{i \in I} R_i, \tag{9}$$

где R_i — минимальные правые идеалы оператива S, и $R_i \cap R_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Обозначим $I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, $\Lambda = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$. По построению, $I_\gamma \cap I_\delta = \Lambda_\gamma \cap \Lambda_\delta = \varnothing$ при $\gamma \neq \delta$. Из (4), (8), (9) вытекает следующая

Теорема. *Всякий c-простой $\mathfrak{p}$-оператив является объединением своих минимальных левых идеалов и объединением своих минимальных правых идеалов*: $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda = \bigcup_{i \in I} R_i$.

2.5. Лемма. *Пусть L — минимальный левый идеал j-простого π-оператива S, x_i — любые элементы из S, $L_k = S^{k-1}Lx_{k+1} \dots x_n$, $R_k = x_1x_2 \dots x_{k-1}LS^{n-k}$.*

Тогда:

а) *Если $\pi_k 1 = 1$, $\pi_k n = n$ и $L_k \neq \{0\}$, то L_k является минимальным левым идеалом оператива S.*

б) *Если $\pi_k 1 = n$, $\pi_k n = 1$ и $R_k \neq \{0\}$, то R_k является минимальным правым идеалом оператива S.*

Доказательство. Пусть $\pi_k 1 = 1$, $\pi_k n = n$, $L_k \neq \{0\}$, $a = x_1x_2 \dots x_{k-1}lx_{k+1} \dots x_n$ — произвольный ненулевой элемент из L_k ($l \in L \setminus \{0\}$). Из (3), обозначая $X_i = S$ при $i \leqslant k-1$, $X_i = \{x_i\}$ при $i \geqslant k+1$, $Y_i = S$ при $2 \leqslant i \leqslant n-k$, $Y_i = \{x_{i-n+k}\}$ при $i > n-k$, получим: $S^{n-1}a = S^{k-1}S^{n-k}x_1x_2 \dots x_{k-1}lx_{k+1} \dots x_n = X_{\sigma_k^{-1}1} \dots X_{\sigma_k^{-1}(k-1)} \times (SY_{\pi_k^{-1}2} \dots Y_{\pi_k^{-1}(n-1)}l) X_{\sigma_k^{-1}(k+1)} \dots X_{\sigma_k^{-1}n}$. Если бы $SY_{\pi_k^{-1}2} \dots Y_{\pi_k^{-1}(n-1)}l = \{0\}$, то отсюда следовало бы $S^{n-1}a = \{0\}$, что противоречит j-простоте S. Из леммы п. 2.2 тогда вытекает, что $SY_{\pi_k^{-1}1} \dots Y_{\pi_k^{-1}(n-1)}l = L = S^{n-1}L$ и $S^{n-1}a = X_{\sigma_k 1} \dots X_{\sigma_k(k-1)}(S^{n-1}L)X_{\sigma_k(k+1)} \dots X_{\sigma_k n} = S^{k-1}S^{n-1}Lx_{k+1} \dots x_n = S^{k-1}Lx_{k+1} \dots x_n = L_k$, а это и означает, что L_k — минимальный левый идеал оператива S.

Аналогично при $\pi_k 1 = n$, $\pi_k n = 1$ для любого ненулевого элемента $a \in R_k$ имеем $aS^{n-1} = x_1x_2 \dots x_{k-1}lx_{k+1} \dots x_nS^{k-1}S^{n-k} = X_{\sigma_k^{-1}1} \dots X_{\sigma_k^{-1}(k-1)}(SY_{\pi_k^{-1}2} \dots Y_{\pi_k^{-1}(n-1)}l)X_{\sigma_k^{-1}(k+1)} \dots X_{\sigma_k^{-1}n} = x_1x_2 \dots x_{k-1}LS^{n-1}S^{n-k} = L_k$.

2.6. Теорема. *Для того чтобы i-простой π^*-оператив S был c-простым, необходимо и достаточно, чтобы какая-нибудь его компонента содержала минимальный левый идеал и минимальный правый идеал.*

Необходимость условий теоремы вытекает из определения п. 1.4. Докажем их достаточность.

Пусть S есть i-простой π^*-оператив (в п. 1.4 было указано, что S j-прост), и какая-нибудь компонента A_γ оператива S содержит минимальный левый идеал L и минимальный правый идеал R; A_δ — любая другая компонента оператива S. В силу п. 1.3 существует индекс $k \in J_n$ такой, что $S^{k-1}A_\gamma S^{n-k} = A_\delta$. Из (7) при любом $k \in J_n$ следует, что $S^{k-1}LS^{n-k} \neq \{0\}$ и $S^{k-1}RS^{n-k} \neq \{0\}$. Найдутся такие элементы $x_i, y_i \in S$, что $L' = S^{k-1}Lx_{k+1} \dots x_n \neq \{0\}$, $R' = x_1 \dots x_{k-1}LS^{n-k} \neq \{0\}$, $L'' = S^{k-1}Ry_{k+1} \dots y_n \neq \{0\}$, $R'' = y_1 \dots y_kRS^{n-k} \neq \{0\}$. Если $\pi_k 1 = 1$, $\pi_k n = n$ (соответственно $\pi_k 1 = n$, $\pi_k n = 1$), то по лемме п. 2.5 L' и R'' (R' и L'') являются минимальными левым и правым (соответственно правым и левым) идеалами оператива S, содержащимися в компоненте $S^{k-1}A_\gamma S^{n-k}$.

Если A_δ — произвольная компонента оператива S, то при некотором $k \in I_{n-1}$ ее можно представить в виде $A_\delta = S^{k-1}A_\gamma S^{n-k}$. Из леммы п. 2.5 следует теперь, что A_δ содержит минимальный левый и минимальный правый идеалы оператива S.

2.6.1. В частности, справедлива

Теорема. *Для того чтобы i-простой ассоциатив S был c-простым, необходимо и достаточно, чтобы S содержал минимальный левый идеал L и минимальный правый идеал R.*

Доказательство аналогично п. 2.6. В рассматриваемом случае необязательно требовать, чтобы R и L содержались в одной и той же компоненте оператива S.

2.6.2. Теорема. *Пусть S есть π^*-оператив, не содержащий собственных двусторонних идеалов и не являющийся ассоциативом. Для того чтобы S был c-простым, необходимо и достаточно, чтобы S содержал хотя бы один минимальный односторонний идеал.*

В дополнение к п. 2.6 здесь следует заметить, что $S = S^{k-1}aS^{n-k}$ при любом k и что $\pi_k 1 = n$, $\pi_k n = 1$ хотя бы при одном k.

2.6.3. Теорема. *Если i-простой ассоциатив S содержит хотя бы один минимальный левый (правый) идеал, то он является объединением своих минимальных левых (соответственно правых) идеалов.*

Доказательство теоремы аналогично п. 2.6.

2.7. Пусть S есть $\mathfrak{p}$-оператив без нуля, 0 — некоторый символ. Операцию в S продолжим до операции в множестве $S_0 = S \cup \{0\}$, считая, что $x_1x_2 \dots x_n = 0$, если $x_i = 0$ при каком-либо i. Очевидно, что S_0 является $\mathfrak{p}$-оперативом, а 0 — его нулем.

Теорема. *Всякий c-простой $\mathfrak{p}$-оператив S без нуля изоморфен подоперативу всех ненулевых элементов некоторого c-простого $\mathfrak{p}$-оператива с нулем, не содержащего собственных двусторонних идеалов.*

Действительно, в силу п. 1.3 S_0 является j-простым $\mathfrak{p}$-оперативом без собственных двусторонних идеалов, содержащим минимальный левый и минимальный правый идеалы.

2.7.1. Теорема. *Пусть S есть i-простой π^*-оператив без нуля, не являющийся ассоциативом. Для того чтобы S был c-простым,* *необходимо и достаточно, чтобы S содержал хотя бы один минимальный односторонний идеал.*

Теорема вытекает из пп. 2.6.2, 2.7.1.

§ 3. Биидеалы c-простого $\mathfrak{p}$-оператива

3.1. Всюду в настоящем параграфе S есть c-простой $\mathfrak{p}$-оператив. Для любых $\gamma \in \Gamma$, $i \in I_\gamma$, $\lambda \in \Delta_\gamma$ обозначим $C'_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$, $C_{i\lambda} = C'_{i\lambda} \setminus \{0\}$ (см. п. 2.4). Каждое множество $C'_{i\lambda}$ является, очевидно, биидеалом оператива S. Основной здесь является следующая

Теорема. *Всякая компонента A_γ c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S является объединением его минимальных биидеалов $C'_{i\lambda}$:*

$$A_\gamma = \bigcup_{i \in I_\gamma,\, \lambda \in \Delta_\gamma} C'_{i\lambda}. \tag{10}$$

Все биидеалы $C'_{i\lambda}$ имеют одну и ту же мощность; $C_{i\lambda} \cap C_{j\mu} = \varnothing$, если $C_{i\lambda} \neq C_{j\mu}$.

Доказательство теоремы дано ниже в пп. 3.2—3.6.

3.2. Лемма. *Если какая-либо компонента A_γ c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S содержит по крайней мере два различных минимальных правых идеала, то $\rho_k 1 = 1$.*

Доказательство. Из п. 1.4 следует, что существуют элементы $x_i \in S$ такие, что

$$A_\gamma = A_\gamma x_2 \dots x_{n-1} A_\gamma . \tag{11}$$

Если L — произвольный минимальный левый идеал оператива S, содержащийся в A_γ, то из (11) и п. 2.4 вытекает, что при некотором $x_n \in A_\gamma$ $L' = A_\gamma x_2 \dots x_{n-1} x_n \neq \{0\}$. L' является ненулевым левым идеалом оператива S, содержащимся в L; следовательно, $L' = L$ и $A_\gamma x_2 \dots \dots x_{n-1} x_n = L$. Вследствие $S^n = S$, x_k можно представить в виде $x_k = y_k y_{k+1} \dots y_{k+n-1}$. Обозначив $y_i = x_i$ при $2 \leqslant i < k$ и $y_i = x_{i-n+1}$ при $i \geqslant k+n$, получим $L = A_\gamma y_2 \dots y_{k-1} (y_k \dots y_{k+n-1})\, y_{k+n} \dots y_{2n-1}$, и в силу (2), если $1 = \rho_k t$ $(t \neq 1)$,

$$L = y_{\rho_k 1} y_{\rho_k 2} \dots y_{\rho_k (t-1)} A_\gamma\, y_{\rho_k (t+1)} \dots y_{\rho_k (2n-1)}. \tag{12}$$

Вследствие (9), $y_{\rho_k 1}$ содержится в некотором минимальном правом идеале R оператива S; тогда из (12) следует, что $L \subseteq R$, т. е. каждый минимальный левый идеал $L_\lambda \subseteq A_\gamma$ содержится в некотором минимальном правом идеале $R_i \subseteq A_\gamma$. Каждый минимальный правый идеал $R_i \subseteq A_\gamma$ в силу (8), (9) имеет вид $R_i = \bigcup_{\lambda \in \Delta_i} L_\lambda$, и $S^{n-1} R_i = \bigcup_{\lambda \in \Delta_i} S^{n-1} L_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Delta_i} L_\lambda = R_i$, т. е. каждый минимальный правый идеал $R_i \subseteq A_\gamma$ является двусторонним. По предположению, A_γ содержит по крайней мере два различных правых идеала R_i; это противоречит минимальности двустороннего идеала A_γ.

Значит, $\rho_k 1 = 1$. Аналогично из предположения о существовании в A_γ двух различных минимальных левых идеалов оператива S следует $\rho_k(2n-1) = 2n-1$ при любом k.

3.3. Лемма. *Для любых ненулевых элементов a, b, c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S, содержащихся в одной и той же его компоненте A_γ, $aS^{n-2}b \neq \{0\}$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $|\Delta_\gamma| = 1$[1]; иначе говоря, A_γ является минимальным левым идеалом оператива S.

[1] $|X|$ — мощность множества X.

Из п. 2.2 тогда следует, что $A_\gamma = S^{n-1}a$ для любого своего ненулевого элемента a. Если $aS^{n-2}b = \{0\}$, то из (3) имеем $S^{n-1}(aS^{n-2}b) = (S^{n-1}a)S^{n-2}b = A_\gamma S^{n-2}b = \{0\}$. В то же время из (6) следует $A_\alpha S^{n-2}b = \{0\}$ при любом $\alpha \neq \gamma$, и в силу (4) $S^{n-1}b = \{0\}$. Это противоречит j-простоте оператива S. К аналогичному выводу придем при $|I_\gamma| = 1$.

Пусть теперь $|\Lambda_\gamma| \geqslant 2$ и $|I_\gamma| \geqslant 2$ при некотором $\gamma \in \Gamma$. Из п. 3.2 следует тогда $\rho_k = 1$, и, аналогично, $\rho_k(2n-1) = 2n-1$ при любом $k \in J_{n-1}$. Из (3) и $S^n = S$ имеем $aS^{n-2}b = aS^{k-2}SS^{n-k-1}b = aS^{k-2}(S^n)S^{n-k-1}b = aS^{k-2}S^nS^{n-k-1}b = aS^{2n-3}b$. Отсюда, из (3) и из $aS^{n-2}b = \{0\}$ следовало бы $S^{n-1}aS^{n-2}b = (S^{n-1}aS^{n-1})S^{n-2}b = A_\gamma S^{n-2}b = \{0\}$; как и выше, это снова дало бы $S^{n-1}b = \{0\}$, т. е. противоречие с j-простотой оператива S. Лемма доказана.

3.4. Лемма. *Для всякой компоненты A_γ с-простого $\mathfrak{p}$-оператива S справедливо разложение* (10), *где все $C_{i\lambda} \neq \varnothing$, $C_{i\lambda} \cap C_{j\mu} = \varnothing$, если $C_{i\lambda} \neq C_{j\mu}$, и при любых $i, j, k \in I_\gamma$, $\varkappa, \lambda, \mu \in \Lambda_\gamma$, $x_{m\nu} \in C_{m\nu}$, $s_r \in S$,*

$$x_{i\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} \neq 0 \rightarrow C_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}x_{j\mu} = x_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}C_{j\mu} = C_{k\mu}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $L_\varkappa$, L_λ — любые два минимальных левых идеала оператива S, содержащиеся в его компоненте A_γ, $L_\varkappa \setminus \{0\} = \bigcup_{i \in I_\varkappa} C_{i\varkappa}$, $L_\lambda \setminus \{0\} = \bigcup_{i \in I_\lambda} C_{i\lambda}$. Пусть $C_{i\varkappa} \neq \varnothing$, $C_{j\lambda} \neq \varnothing$ при некоторых $i \in I_\varkappa$, $j \in I_\lambda$. По лемме п. 3.3 для любых $x_{i\varkappa} \in C_{i\varkappa}$, $x_{j\lambda} \in C_{j\lambda}$ существуют элементы $s_i \in S$ такие, что $x_{i\varkappa}s_2s_3 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} \neq 0$. Тогда из пп. 2.1, 2.2 следует $L_\varkappa s_2s_3 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} = L_\lambda$, или

$$\left(\bigcup_{k \in I_\varkappa} C_{k\varkappa}\right)s_2 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} = \bigcup_{k \in I_\lambda} C_{k\lambda}. \tag{14}$$

Поскольку все R_i являются правыми идеалами, причем $R_i \cap R_j = \{0\}$ при $i \neq j$, из (14) и п. 2.4 следует, во-первых, $I_\varkappa = I_\lambda$ и, во-вторых,

$$C_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} = C_{k\lambda} \tag{15}$$

при любом $k \in I_\varkappa$. В частности, $C_{k\lambda} \neq \varnothing$ при любом $k \in I_\varkappa (= I_\gamma)$. Тем самым доказана справедливость разложения (10). Из (15) и п. 2.4 следует при любом $x_{k\varkappa} \in C_{k\varkappa}$

$$x_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}x_{j\lambda} \neq 0. \tag{16}$$

Пользуясь (16) и равенством, двойственным соотношению (15), получим $x_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}C_{i\mu} = C_{k\mu}$ при любом $\mu \in \Lambda_\gamma$, и точно так же $C_{k\varkappa}s_2 \dots s_{n-1}x_{j\mu} = C_{k\mu}$.

3.5. Пусть a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — произвольные элементы из S такие, что $a_1a_2 \dots a_n \neq 0$; $a_1 \in R_j$, $a_n \in L_\lambda$, $a_k \in C_{i\varkappa}$ при некотором k. Из пп. 2.4, 3.4 следует, что $a_1a_2 \dots a_{k-1}xa_{k+1} \dots a_n \in C'_{j\lambda}$ при любом $x \in C'_{i\varkappa}$. Обозначим $\varphi_k x = a_1a_2 \dots a_{k-1}xa_{k+1} \dots a_n$.

Лемма. *Ограничение отображения φ_k на множестве $C_{i\varkappa}$ взаимно однозначно отображает множество $C_{i\varkappa}$ на $C_{j\lambda}$.*

Доказательство. Докажем сначала справедливость леммы при $k = 1$. Если $a_1 \in C_{i\varkappa}$, $a_n \in L_\lambda$, $a_1a_2 \dots a_n \neq 0$, то в силу п. 3.4 $C_{i\varkappa}a_2 \dots a_n = C_{i\lambda}$. Как и в п. 3.4, существуют элементы u_r ($r = 2, 3, \dots, n$; $u_n \in C_{i\varkappa}$) такие, что $xa_2 \dots a_nu_2 \dots u_n \neq 0$ при любом $x \in C_{i\varkappa}$. По лемме п. 3.4 множество $C_{i\varkappa}$ является группой относительно операции

$x \circ z = xa_2 \dots a_n u_2 \dots u_{n-1} z$. Допустив, что $xa_2 \dots a_n = ya_2 \dots a_n$ при некоторых x, $y \in C_{i\varkappa}$, мы имели бы $x \circ u_n = y \circ u_n$, и, следовательно, $x = y$.

Точно так же лемма справедлива при $k = n$.

Обозначим через J подмножество J_{2n-1}, состоящее из всех индексов $k \in J_{2n-1}$, для которых при любых $a_i \in S$ из $a_1 a_2 \dots a_{2n-1} \neq 0$, $a_1 \in R_j$, $a_{2n-1} \in L_\lambda$, $a_k \in C_{i\varkappa}$ следует, что отображение φ_k: $\varphi_k x = a_1 a_2 \dots \dots a_{k-1} x a_{k+1} \dots a_{2n-1}$ $(x \in C_{i\varkappa})$, является мономорфизмом $C_{i\varkappa}$ на $C_{j\lambda}$. Выше было доказано, что лемма справедлива при $k = 1$ и $k = n$; если $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \neq 0$, $a_1 \in C_{i\varkappa}$, $a_n \in C_{j\lambda}$, то каждое из отображений $\psi_1 x = xa_2 \dots a_{n-1} a_n$ $(x \in C_{i\varkappa})$, $\psi_n x = a_1 a_2 \dots a_{n-1} x$ $(x \in C_{j\lambda})$ является мономорфизмом $C_{i\varkappa}$ (соответственно $C_{j\lambda}$) на $C_{i\lambda}$. Отсюда вытекает, что при любых $c_i \in S$, для которых $c_1 c_2 \dots c_{2n-1} \neq 0$, $c_1 \in C_{i\varkappa}$, $c_n \in C_{j\lambda}$, $c_{2n-1} \in C_{k\mu}$, каждое из отображений $\varphi_1 x = xc_2 \dots c_{2n-1} = (xc_2 \dots c_n) c_{n+1} \dots \dots c_{2n-1}$ $(x \in C_{i\varkappa})$, $\varphi_n x = c_1 c_2 \dots c_{n-1} x c_{n+1} \dots c_{2n-1} = (c_1 c_2 \dots c_{n-1} x) c_{n+1} \dots \dots c_{2n-1}$ $(x \in C_{j\lambda})$, $\varphi_{2n-1} x = c_1 c_2 \dots c_{2n-2} x = c_1 c_2 \dots c_{n-1} (c_n c_{n+1} \dots c_{2n-2} x)$ $(x \in C_{k\mu})$ является мономорфизмом $C_{i\varkappa}$ (соответственно $C_{i\lambda}$, $C_{k\mu}$) на $C_{l\mu}$. Таким образом, 1, n, $2n-1 \in J$.

Пусть $M_0 = \{1,\ n,\ 2n-1\}$ и $M_t = M_{t-1} \cup \rho_k^{-1} M_{t-1}$ при $k \in J_n$, $t = 1,\ 2,\ \dots$, Если $T_k = \{k,\ k+1,\ \dots,\ k+n-1\}$, $M_{t-1} \cap T_k = \varnothing$, то $\rho_k^{-1} M_{t-1} \neq M_{t-1}$, поскольку $n \in M_{t-1} \setminus \rho_k^{-1} M_{t-1}$; тогда $M_{t-1} \neq M_t = M_{t-1} \cup \rho_k^{-1} M_{t-1}$, и $M_{t-1} \subset M_t$. Если бы $M_t \cap T_k = \varnothing$ при всех целых положительных t, то мы имели бы бесконечную последовательность $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset J_{2n-1}$, где каждое M_{t-1} является собственным подмножеством множества M_t. Это противоречит конечности множества J_{2n-1}; следовательно, существует такое t, что $M_{t-1} \cap T_k = \varnothing$, $M_t \cap T_k \neq \varnothing$.

Мы показали ранее, что $M_0 \subseteq J$. Допустим что $M_r \subseteq J$ при некотором $r < t-1$, j — любой индекс из $M_{r+1} \setminus M_r$, $a_1 a_2 \dots a_{2n-1} \neq 0$. Тогда j, $\rho_k j \notin \{k,\ k+1,\ \dots,\ k+n-1\}$; допустим для определенности, что $j \leqslant k-1$, $\rho_k j \leqslant k-1$. Из (2) следует

$$a_1 a_2 \dots a_{2n-1} = a'_1 \dots a'_{k-1} (a'_k \dots a'_{k+n-1}) a'_{k+n} \dots a'_{2n-1}, \tag{17}$$

где $a'_i = a_{\rho_k^{-1} i}$. Обозначим $c_i = a'_i$ при $i < k$, $c_k = a'_k a'_{k+1} \dots a'_{k+n-1}$, $c_i = a'_{i+n-1}$ при $k+1 \leqslant i \leqslant 2n-2$ и представим a'_{2n-1} в виде $a'_{2n-1} = c_n c_{n+1} \dots c_{2n-1}$ (это возможно в силу $S^n = S$ (см. п. 1.4)). Тогда из (17) и $\rho_k j \in M_r \subseteq J$ следует, что отображение $\varphi_j x = c_1 c_2 \dots \dots c_{j-1} x c_{j+1} \dots c_{2n-1}$ является мономорфизмом некоторого множества $C_{i\varkappa}$ на $C_{j\lambda}$. В силу произвола в выборе элементов c_s, $j \in J$, и $M_{r+1} \subseteq J$. Таким образом, можно считать, что $M_{t-1} \subseteq J$.

Пусть теперь $j \in M_t \cap T_k$, тогда $j' = \rho_k j \in M_{t-1} \subseteq J$. Допустим, что $a'_j \in C_{s\sigma}$, a'_1, $a_1 \in R_j$, a'_{2n-1}, $a_{2n-1} \in L_\lambda$, $a'_k \in R_i$, $a'_{k+n-1} \in L_\varkappa$. Обозначим, как и выше, $c_i = a'_i$ при $i \leqslant k-1$, $c_i = a'_{i+n-1}$ при $k+1 \leqslant i \leqslant 2n-2$, $a'_{2n-1} = c_n c_{n+1} \dots c_{2n-1}$, $a'_k a'_{k+1} \dots a'_{j-1} x a'_{j+1} \dots a'_{n+k-1} = \psi x$, $c_1 c_2 \dots \dots c_{k-1} y c_{k+1} \dots c_{2n-1} = \varphi_k y$, $a_1 a_2 \dots a_{j-1} x a_{j+1} \dots a_{2n-1} = \varphi_j x$. Из (17) следует $\varphi_k \psi x = \varphi_j x$ при любом $x \in C'_{s\sigma}$. Поскольку $j \in J$, отображение $\varphi_k \psi = \varphi_j$ является мономорфизмом $C'_{s\sigma}$ на $C'_{j\lambda}$. Но $\varphi_k (\psi C'_{s\sigma}) \subseteq \varphi_k C'_{i\varkappa}$, $\varphi_k 0 = \psi 0 = 0$; значит, $\varphi_k C'_{i\varkappa} = C'_{j\lambda}$. Повторив наши рассуждения для отображения ψ, получим $\psi C'_{s\sigma} = C'_{i\varkappa}$, и, следовательно, φ_k является мономорфизмом $C'_{i\varkappa}$ на $C'_{j\lambda}$. Из $\varphi_k 0 = 0$ следует $\varphi_k C_{i\varkappa} = \varphi_\varkappa (C'_{i\varkappa} \setminus \{0\}) = C'_{j\lambda} \setminus \{0\} = C_{j\lambda}$.

Остается лишь заметить, что $\overset{*}{\varphi}_k y = c_1 c_2 \ldots c_{k-1} y c_{k+1} \ldots c_{n-1} a'_{2n-1}$. Лемма доказана при любом k.

3.6. Лемма. *Все биидеалы $C'_{i\varkappa}$ c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S минимальны.*

Доказательство. Для любого подмножества $D_{i\lambda} \subseteq C_{i\lambda}$ из леммы п. 3.5 следует $D_{i\lambda} S^{2n-3} D_{i\lambda} = C'_{i\lambda}$.

3.7. Теорема. *Пусть S есть произвольный c-простой $\mathfrak{p}$-оператив без нуля. Тогда S не содержит собственных двусторонних идеалов и является объединением своих попарно не пересекающихся биидеалов $C_{i\varkappa}$: $S = \bigcup_{i \in I, \varkappa \in \Lambda} C_{i\varkappa}$.*

Доказательство. В п. 2.7 было отмечено, что оператив $S_0 = S \bigcup \{0\}$ является c-простым и не содержит собственных двусторонних идеалов. Все $C_{i\varkappa}$ являются биидеалами оператива S, а $C'_{i\varkappa} = C_{i\varkappa} \bigcup \{0\}$ — биидеалами оператива S_0. Остается лишь применить теорему п. 3.1.

3.8. Пусть $S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ есть c-простой $\mathfrak{p}$-оператив, B — его подмножество; обозначим $B_\gamma = B \bigcap A_\gamma$. Из пп. 2.4, 3.1 следует, что всякое подмножество

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma, \tag{18}$$

где $B_\gamma = \{0\}$, или при некоторых непустых $I'_\gamma \subseteq I_\gamma$, $\Lambda'_\gamma \subseteq \Lambda_\gamma$

$$B_\gamma = \bigcup_{i \in I'_\gamma, \lambda \in \Lambda'_\gamma} C'_{i\lambda}, \tag{19}$$

является биидеалом оператива S.

Теорема. *Подмножество B c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S тогда и только тогда является его биидеалом, когда оно имеет вид* (18) — (19).

Доказательство. Пусть B есть произвольный биидеал c-простого $\mathfrak{p}$-оператива; a, b — любые элементы из B. По теореме п. 3.1 a, b содержатся в некоторых биидеалах $C_{i\varkappa}$, $C_{j\lambda} \subseteq S$. Если a, b содержатся в различных компонентах оператива S, то $a\ S^{2n-3} b = \{0\}$ в силу п. 1.4. Если же a, b содержатся в одной и той же компоненте A_γ, то из определения биидеала и из леммы п. 3.4 следует $C'_{i\lambda} = a S^{2n-3} b \subseteq B$. В частности, $C'_{i\varkappa} = a S^{2n-3} a \subseteq B$, и B имеет вид (18) — (19).

3.8 1. Теорема. *Для того чтобы подмножество B c-простого $\mathfrak{p}$-оператива S было (при $n > 2$) биидеалом, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию*

$$BS^{n-2} B = B. \tag{20}$$

Доказательство. Из теоремы п. 3.8 и леммы п. 3.4 следует, что всякий биидеал оператива S удовлетворяет условию (20). Обратно, пусть B — произвольное подмножество оператива S, удовлетворяющее условию (20). Из п. 1.4 и леммы п. 3.4 имеем $aS^{2n-3}b = aS^{n-2}b$ ($= \{0\}$ или $C'_{i\lambda}$) при любых a, $b \in S$ и $BS^{2n-3}B = \bigcup_{a, b \in B} aS^{2n-3}b = \bigcup_{a, b \in B} aS^{n-2}b = BS^{n-2}B = B$, т. е. B — биидеал оператива S.

3.9. Лемма. *Пусть B есть минимальный биидеал j-простого $\mathfrak{p}$-оператива S, a_i — произвольные элементы из S. Если $B' = a_1 a_2 \ldots \ldots a_{n-1} B a_{n+1} \ldots a_{2n-1} \neq \{0\}$, то B' является минимальным биидеалом оператива S.*

Доказательство. Прежде всего, B' является биидеалом оператива S: $B' S^{2n-3} B' = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} B a_{n+1} \ldots a_{2n-1} S^{2n-3} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} B a_{n+1} \ldots$

$\dots a_{2n-1} \subseteq a_1a_2 \dots a_{n-1}Ba_{n+1} \dots a_{2n-1} = B'$. В частности, при любом $b \in B$ множество $B'' = ba_{n+1} \dots a_{2n-1}S^{2n-3}a_1a_2 \dots a_{n-1}b$ является биидеалом оператива S, содержащимся в B, и в силу минимальности B $B'' = \{0\}$ или $B'' = B$. Допустим, что $B' \neq \{0\}$. Выберем произвольный элемент $b' \in B' \setminus \{0\}$; b' имеет вид $b' = a_1a_2 \dots a_{n-1}ba_{n+1} \dots a_{2n-1}$, где $b \in B \setminus \{0\}$. Из (2) имеем $b'S^{2n-3}b' = a_1a_2 \dots a_{n-1}ba_{n+1} \dots a_{2n-1}S^{2n-3}a_1a_2 \dots a_{n-1}ba_{n+1} \dots \dots a_{2n-1} = a_1a_2 \dots a_{n-1}B''a_{n+1} \dots a_{2n-1}$, и, следовательно, $b'S^{2n-3}b' = \{0\}$ или $b'S^{2n-3}b' = B'$. Если бы $b'S^{2n-3}b' = \{0\}$, то из (5), (7) мы имели бы $\{0\} = S^{n-1}(b'S^{2n-3}b')S^{n-1} = A_\gamma S^{n-2}b'S^{n-1} = A_\gamma$, где A_γ — компонента, содержащая b'. Следовательно, $b'S^{2n-3}b' = B'$ для любого элемента $b' \in B' \setminus \{0\}$, и B' — минимальный биидеал оператива S.

3.10. Теорема. *Для того чтобы j-простой $\mathfrak{p}$-оператив S был c-простым, необходимо и достаточно, чтобы каждая его компонента содержала по крайней мере один минимальный биидеал.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает непосредственно из определения. Покажем его достаточность. Пусть A_γ есть какая-либо компонента j-простого $\mathfrak{p}$-оператива S; B — минимальный биидеал оператива S, содержащийся в A_γ. Из п. 1.4 следует, что A_γ можно записать в виде

$$A_\gamma = \bigcup_{x_i \in S} x_1x_2 \dots x_{n-1}Bx_{n+1} \dots x_{2n-1}. \tag{21}$$

Из п. 1.4 вытекает, что $BS^{n-1} \neq \{0\}$; существуют элементы $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1} \in S$ такие, что $Ba_{n+1} \dots a_{2n-1} \neq \{0\}$. Тогда в силу п. 1.4 множество $L = S^{n-1}Ba_{n+1} \dots a_{2n-1} = \bigcup_{x_i \in S} x_1x_2 \dots x_{n-1}Ba_{n+1} \dots a_{2n-1}$ является ненулевым левым идеалом оператива S, содержащимся в двустороннем идеале A_γ (поскольку $B \subseteq A_\gamma$). Пусть $l = a_1a_2 \dots \dots a_{n-1}ba_{n+1} \dots a_{2n-1}$ — любой ненулевой элемент из L. Из (4) — (6), (21) имеем $S^{n-1}l = A_\gamma S^{n-2}l = \bigcup_{x_i \in S} x_1x_2 \dots x_{n-1}Bx_{n+1}x_{n+2} \dots x_{2n-3}a_1a_2 \dots \dots a_{n-1}ba_{n+1} \dots a_{2n-1}$. Как и в п. 3.9, легко показать, что каждое множество $B^* = Bx_{n+1}x_{n+2} \dots x_{2n-3}a_1a_2 \dots a_{n-1}b$ является биидеалом оператива S, содержащимся в B, и, следовательно, $B^* = \{0\}$ или $B^* = B$. Отсюда следует $S^{n-1}l = \bigcup_{x_i \in S} x_1x_2 \dots x_{n-1}Ba_{n+1}a_{n+2} \dots a_{2n-1} = L$, и L является минимальным левым идеалом оператива S, содержащимся в его компоненте A_γ. Аналогично существуют элементы $a_i \in S$ такие, что $R = a_1a_2 \dots a_{n-1}BS^{n-1}$ является содержащимся в A_γ минимальным правым идеалом оператива S, и S c-прост.

3.10.1. Из пп. 2.6, 3.10 вытекает

Теорема. *Для того чтобы i-простой π^*-оператив (в частности, ассоциатив) S был c-простым, необходимо и достаточно, чтобы S содержал минимальный биидеал.*

3.10.2. Подмножество B полугруппы S называется биидеалом, если $BSB \subseteq B$. О минимальных биидеалах вполне простых полугрупп см. [6], [7] и гл. 2 из [5]. Из теоремы п. 3.10.1 следует

Теорема. *Для того чтобы полугруппа S без собственных идеалов была вполне простой, необходимо и достаточно, чтобы S содержала минимальный биидеал.*

§ 4. Обратимые элементы $\mathfrak{p}$-оператива

4.1. Элемент a оператива S называется (k)-*обратимым* [1], [2], если $S^{k-1}aS^{n-k} = S$, *двусторонне обратимым*, если он (1)-обратим и (n)-обратим.

Приведенная ниже теорема обобщает результат п. 2.1 из [2].

Теорема. *Всякий двусторонне обратимый элемент a $\mathfrak{p}$-оператива S (k) обратим при любом $k \in J_n$.*

Доказательство. Пусть k — произвольный фиксированный индекс из J_{n-1}, $T_k = \{k, k+1, k+2, \ldots, k+n-1\}$, $N_0 = \{1, n, 2n-1\}$. Для любого подмножества $Z \subseteq J_{2n-1}$ обозначим через Z' (через Z'') подмножество, состоящее из всех индексов $j \in J_{2n-1}$, сравнимых по модулю $n-1$ хотя бы с одним индексом $i \in J_{2n-1}$ (соответственно из всех индексов $j = i + k - 1 \in T_k$, где $i \in Z$). Если множество N_r при некотором r уже построено, то обозначим $N_{r+1} = N_r \cup \cup \{\rho_k^{-1}\{(N_r \setminus T_k) \cup (N_r \cap J_n)''\}\}'$.

Допустим, что $k \overline{\in} N_r$ и $|N_r \cap J_n| = l$. Тогда $|N_r \setminus T_k| = |N_r \cap J_n| = |(N_r \cap J_n)''| = l$, и, поскольку подстановка ρ_k взаимно однозначна, $|N_{r+1}| \geqslant |\rho_k^{-1}\{(N_r \setminus T_k) \cup (N_r \cap J_n)\}| \geqslant 2l$. В то же время из $n \in N_0 \subseteq N_r$ при любом r следует, что $|N_r| = 2l - 1$; таким образом, N_r является собственным подмножеством множества N_{r+1}. Если бы $k \overline{\in} N_r$ при любом r, то мы имели бы бесконечную монотонно возрастающую последовательность подмножеств N_r множества J_{2n-1}. Следовательно, $k \in N_t$ при некотором t.

Обозначим через K подмножество J_{2n-1}, состоящее из всех индексов $k \in J_{2n-1}$, для которых $S^{k-1}aS^{2n-1-k} = S$. Из $aS^{n-1} = S^{n-1}a = S$ следует $S^n = S$; отсюда имеем $aS^{2n-2} = (aS^{n-1})S^{n-1} = S$, $S^{n-1}aS^{n-1} = (S^{n-1}a)S^{n-1} = S$, $S^{2n-2}a = S^{n-1}(S^{n-1}a) = S$, и $N_0 = \{1, n, 2n-1\} \subseteq K$. Предположим, что $N_r \subseteq K$; для доказательства справедливости теоремы нам достаточно показать, что $N_{r+1} \subseteq K$. Пусть $j_1 \in N_{r+1} \setminus N_r$ (и, следовательно, $j_1 \overline{\in} N_0$), $j_2 \equiv j_1 \pmod{n-1}$; в силу $N_r \subseteq K$ для одного из индексов j_α (обозначим его через j) существует индекс $i \in K \setminus T_k$ такой, что $i = \rho_k j$, либо индекс $i \in K \cap J_n$ такой, что $i + k - 1 = \rho_k j$. В первом случае (считая для определенности $i \leqslant k-1$) из (2) $S^n = S$, и из $i \in K \setminus T_k$ имеем $S^{j-1}aS^{2n-1-j} = S^{i-1}aS^{k-i-1}(S^n)S^{n-k} = S^{i-1}aS^{n-i} = S$. Поскольку $j \not\equiv 1 \pmod{n-1}$, из $j_1 \equiv j_2 \equiv j \pmod{n-1}$ и из $S^n = S$ следует $S^{j_1-1}aS^{2n-1-j_1} = S^{j_2-1}aS^{2n-1-j_2} = S$ и j_1, $j_2 \in K$. Во втором случае в силу $i \in N_r \cap J_n$ аналогично получим $S^{j-1}aS^{2n-1-j} = S^{k-1}(S^{i-1}aS^{n-i})S^{n-k} = S^{k-1}SS^{n-k} = S$, и снова j_1, $j_2 \in K$. Теорема доказана.

4.2. Теорема. *Для того чтобы все элементы $\mathfrak{p}$-оператива S были (k)-обратимы при любом $k \in J_n$, необходимо и достаточно, чтобы в S не было биидеалов, отличных от самого оператива S.*

Доказательство. Если $\mathfrak{p}$-оператив S не содержит биидеалов, отличных от S, то для любого $b \in S$

$$bS^{2n-3}b = S \tag{22}$$

(поскольку, очевидно, множество $bS^{2n-3}b$ является биидеалом S). Из (22) и $S^{n-1}b \subseteq S^n \subseteq S$ имеем $bS^{n-1} = S$, и аналогично $S^{n-1}b = S$, т. е. всякий элемент $b \in S$ двусторонне обратим. Из теоремы п. 4.1 следует, что всякий элемент $b \in S$ (k)-обратим при любом $k \in J_n$.

Обратно, пусть всякий элемент $b \in S$ (k)-обратим при любом $k \in J_n$. Тогда $S^{n-1}b = bS^{n-1} = S$, $bS^{2n-3}b = bS^{n-2}(S^{n-1}b) = bS^{n-2}S = S$. Если B — биидеал оператива S, b — любой элемент из B, то $bS^{2n-3}b \subseteq B$, $S \subseteq B$, и, следовательно, $S = B$.

4.2.1. Ассоциатив S называется *n-группой*, если каждый его элемент (k)-обратим при любом $k \in J_n$. Из теоремы п. 4.2 вытекает следующая (при $n=2$ она приведена в [5])

Теорема. *Для того чтобы ассоциатив S был n-группой, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал отличных от S биидеалов.*

г. Харьков

Поступило
26 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Глускин Л. М. О позиционных оперативах. ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964, с. 767—770.

2. Глускин Л. М. Позиционные оперативы. Матем. сб., т. 68 (110) : 3, 1965, с. 444—472.

3. Глускин Л. М. О позиционных оперативах, II. ДАН СССР, т. 182, № 5, 1968.

4. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.

5. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semigroups, v. 1. Providence, 1961.

6. Steinfeld O. Über die Quasiideale von Halbgruppen. Publs math., Bd. 4, № 4, 1956, S. 262—275.

7. Steinfeld O. Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern. Acta scient. math., Bd. 18, № 3—4, 1957, S. 235—242.

Е. А. БРЕДИХИНА. О РАЗЛОЖЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СПЕКТРАМИ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Приводится теорема о представлении равномерной почти периодической (п.п.) функции $f(x) \sim \sum\limits_k A_k e^{i\lambda_k x}$ в виде суммы равномерно сходящегося ряда, членами которого являются равномерные п. п. функции

$$f_1(x) \sim \sum_{|\lambda_k| \geqslant \varepsilon_1} A_k e^{i\lambda_k x}, \quad f_k(x) \sim \sum_{\varepsilon_k \leqslant |\lambda_k| < \varepsilon_{k-1}} A_k e^{i\lambda_k x} \quad (k=2, 3, \dots; \ \varepsilon_k \downarrow 0).$$

Указаны приложения этой теоремы к установлению признаков абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных п.п. функций. (Работа поступила в журнал „Математика" 6. I. 1968.)

Л. Х. БУРШТЕЙН. ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Пусть K есть некоторый класс функций $f(z)$, $\{\Phi_l(f)\}_{l=1}^n$ — непрерывная система функционалов с областью значений D, $G(w_1, \dots, w_n)$ — аналитическая функция, заданная на D. Исследуется связь между задачей о нахождении минимума вещественного функционала $\operatorname{Re} G(\Phi_1(f), \dots, \Phi_n(f))$ с областью D значений системы функционалов $\{\Phi_l(f)\}_{l=1}^n$. Кроме того, доказывается некоторое обобщение теоремы Кирвэна (Proc. Amer. Math. Soc., v. 17, № 5, 1966). (Работа поступила в журнал „Математика" 6.I.1967.)