Г. А. Колесник, Улучшение остаточного члена в проблеме делителей,
Матем. заметки, 1969, том 6, выпуск 5, 545–554

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 545—554

УДК 511

УЛУЧШЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Г. А. Колесник

Получена новая оценка остаточного члена в проблеме делителей. Библ. 4 назв.

Нахождением остатка в проблеме делителей занимались ряд авторов (см. [3], стр. 157). Последний результат — Чи Цзан-ту и Рихерта, которые показали, что $\Delta(R) \ll R^{15/46}$, где $\Delta(R)$ — остаточный член в проблеме делителей. В этой работе показано, что $\Delta(R) \ll R^{12/37} \ln^{62/37} R$. Улучшение получено за счет более точной оценки двойной тригонометрической суммы. Тригонометрическая сумма вычисляется, в отличие от [1], [2] и других работ, без сведения ее к интегралу и оценки его.

ЛЕММА 1. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая при*

$$|z-x| \leqslant \sqrt{M_1 \ln X}, \qquad X \leqslant x \leqslant X_1 \leqslant 2X;$$

$f(x)$ — действительная функция,

$$0 < M_1^{-1} \leqslant f''_{x^2}(x) \ll M_1^{-1}; \qquad f^{(k+2)}_{x^{k+2}}(x) \ll k!\,(MX^k)^{-1},$$

$$k = 1, 2, \ldots;$$

$$X^2 \gg \ln^3 X \cdot M_1{}^3 M^{-2}; \qquad M_1 \geqslant M \geqslant M_0.$$

Тогда

$$\sum_{X \leqslant x \leqslant X_1 \leqslant 2X} e^{2\pi i f(x)} = e^{\pi i/4} \sum_{f'(X) \leqslant n \leqslant f'(X_1)} (f''(x_n))^{-1/2} \times$$
$$\times e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)} + O(\sqrt{M_1} + \ln^3 X),$$

где $f'_x(x_n) \equiv n$.

Лемма доказывается подобно лемме 2, стр. 121 из [4].

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$0 < M_1^{-1} \leqslant f''_{x^2}(x, y) \leqslant M^{-1};$$

$$f^{(k+2)}_{x^{k+2}}(x, y) \ll k!\,(MX^k)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

$$X^2 \gg \ln^3 X \cdot M_1^3 M^{-2}; \qquad M > M_0;$$

$f''_{x^2}(x, y)$ *кусочно монотонна на конечном количестве связных областей таких, что вместе с двумя точками* $x(x_1, x_2)$ *и* $y(y_1, y_2)$ *она содержит и точки* $\alpha x + (1 - \alpha) y$, *если* $x_1 = y_1$ *или* $x_2 = y_2$, *где*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1; \qquad f''_{xy}(x, y) \ll X(YM)^{-1};$$

$$M_2^{-1} \leqslant f''_{x^2}(x, y) f''_{y^2}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 \ll X^2 (YM)^{-2}, \qquad M_2 > M_0.$$

Тогда

$$\sum_D e^{2\pi i f(x, y)} \ll \ln N \,(X^2 / M + X\sqrt{M_2}\, M^{-1} + Y\sqrt{M_1} + Y \ln^3 X),$$

где суммирование ведется по области D:

$$X \leqslant x \leqslant X_1 \leqslant 2X, \qquad Y \leqslant y \leqslant Y_1 \leqslant 2Y, \qquad xy \leqslant N,$$

и

$$\sum_{D'} e^{2\pi i f(x, y)} \ll \ln N\,(\varepsilon Y^2 M^{-1/2} + Y\sqrt{M_1} + Y \ln^3 X),$$

где D' — *подобласть* D, *в которой* $|x/y - \gamma_1| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство.

$$\sum_D e^{2\pi i f(x, y)} \ll \ln X \left| \sum_{D_1} e^{2\pi i f(x, y)} \right|,$$

где D_1—подобласть одной из указанных в условии леммы областей, в которой

$$(M')^{-1} \leqslant f''_{x_2}(x, y) \leqslant 2\,(M')^{-1}; \qquad M \leqslant M' \leqslant M_1.$$

Применив лемму 1, получим

$$\sum_{D_1} e^{2\pi i f(x, y)} = \sum_Y e^{\pi i/4} \sum_n (f''_{x^2}(x_n, y))^{-1/2} e^{2\pi i (f(x_n, y) - n x_n)} + O(Y\sqrt{M_1} + Y \ln^3 N) \ll \frac{X^2}{M} + \frac{X\sqrt{M_2}}{M} + Y\sqrt{M_1} + Y \ln^3 N.$$

Вторая часть леммы очевидна.

Докажем некоторые утверждения относительно корней многочленов вида

$$f(\theta) = \sum_{i=0}^{m} \theta^i \sum_{i+i_1+2i_2+3i_3=m} a_{i_1, i_2, i_3} \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \sigma_3^{i_3},$$

где

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \quad \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3;$$
$$\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3;$$
$$\alpha_1 = h_1/h_2; \ \alpha_2 = h_3/h_4; \ \alpha_3 = h_5/h_6;$$

$R_{f(x), \varphi(x)}$ — результант многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$;

$$H_2 = h_2h_4h_6; \ Q = q_1q_2 \ldots q_6; \ Q_2 = q_2q_4q_6.$$

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$f(\theta) = \theta^3 + a_1\sigma_1\theta^2 + a_2\sigma_2\theta + a_3\sigma_3,$$
$$\varphi(\theta) = \theta^3 + b_1\sigma_1\theta^2 + b_2\sigma_2\theta + b_3\sigma_3.$$

Тогда, если

$$R_{R_2(x,1), R_3(x,1)} \neq 0 \text{ и } \lim_{\alpha_3\to\infty} \frac{R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\max\limits_{\alpha_2\leqslant\alpha_1} R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \neq 0,$$

то

$$\frac{1}{Q}\sum_h H_2^{-\alpha} \leqslant Q_2^{-\alpha} \sqrt[4]{\varepsilon^3 Y^3 X^{-3}},$$

где суммирование проводится по $1 \leqslant |h_i| \leqslant q_i - 1$ *таким, что*

$$f(\theta_1) = \varphi(\theta_1 + \varepsilon); \ f(\theta) \not\equiv \varphi(\theta + \varepsilon); \ \varepsilon \leqslant \theta_1;$$
$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f(x), \varphi(x)}$$

(*если* $\varphi(\theta) \equiv \varphi(\theta)$, *то* $R_1 \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f(x), f'(x)}$); $\alpha < 1$;

$$R_2(\alpha_1, \alpha_2) = R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x), R_1'(\alpha_1, \alpha_2, x)};$$
$$R_3(\alpha_1, \alpha_2) = R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x), R_1''(\alpha_1, \alpha_2, x)}.$$

Доказательство. Докажем, для $f(\theta) \equiv \varphi(\theta)$ Если $f(\theta) \not\equiv \varphi(\theta)$, доказательство аналогично. Имеем

$$f(\theta_1) = 0,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}(f(\theta_1 + \varepsilon) - f(\theta_1)) = f_1(\theta_1) = 0.$$

Отсюда $R_{f(x),\, f_1(x)} = 0$. Он симметричен относительно α_1, α_2, α_3. Очевидно,

$$\alpha_i^2 + a\alpha_i\alpha_j + \alpha_j^2 \gg \alpha_i^2 + \alpha_j^2$$

(если $a \neq -2$) при некоторых i, j, причем для них

$$\alpha_k^2 \ll \alpha_i^2 + \alpha_j^2, \qquad \alpha_i^2 + \alpha_j^2 \gg \varepsilon^2$$

и

$$\min\{\alpha_i, \alpha_j\} \ll \alpha_k.$$

Считаем для определенности, что $k = 3$.

$$R_{f(x),\, f_1(x)} = \alpha_3^4(\alpha_1^2 + a\alpha_1 a_2 + \alpha_2^2) +$$
$$+ \alpha_3^3 P_3(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + \varepsilon P_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \ldots = 0,$$

где $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен m-й степени; $a \neq -2$.

$$\alpha_3^4(\alpha_1^2 + a\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \alpha_3^3 P_3(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots$$
$$\ldots = R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Delta = -\varepsilon P_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \ldots;$$
$$(\alpha_1^2 + a\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(\alpha_3 - \alpha_3^1)(\alpha_3 - \alpha_3^2)(\alpha_3 - \alpha_3^3)(\alpha_3 - \alpha_3^4) = \Delta.$$

Если

$$\alpha_3^1 - \alpha_3^2 = \varepsilon_1 \ll \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

то

$$R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x),\; 1/\varepsilon_1 (R_1(\alpha_1, \alpha_2, x\cdot\varepsilon_1) - R_1(\alpha_1, \alpha_2, x))} = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha_2 = c\alpha_1 + O(\varepsilon_1) \text{ и } |\alpha_3^1 - \alpha_3^i| \gg \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

при $i > 2$. Отсюда или

$$|\alpha_3 - \alpha_3^0(\alpha_1, \alpha_2)| \ll |\Delta|(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\varepsilon_1^{-1},$$

или

$$\begin{cases} |\alpha_3 - \alpha_3^0(\alpha_1, \alpha_2)| \ll |\Delta|^{1/2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-1}, \\ \alpha_2 = c\alpha_1 + O(\varepsilon_1). \end{cases}$$

Так как

$$\Delta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \ll \varepsilon\alpha_3 + \varepsilon^2,$$

то

$$\frac{1}{Q}\sum_h H_2^{-\alpha} \ll \theta_2^{-\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1\sqrt{\varepsilon}\sqrt{Y^3X^{-3}}\right) \ll \theta_2^{-\alpha}\sqrt[4]{\varepsilon^3Y^3X^{-3}}$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $f_i(\theta)$ — *многочлены*, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

$$f_i(\theta_i + \varepsilon_i) = 0; \quad f_i(\theta + \varepsilon_i) \not\equiv f_j(\theta + \varepsilon_j);$$
$$\varepsilon_i \ll \theta_1; \ \theta_1 = \theta_2; \ \theta_3 = \theta_4; \ \theta_1 \sim \theta_3.$$

Тогда, если $R_5(\alpha_1, \alpha_2) \not\equiv 0$, *то* $\alpha_i \sim \theta_1$; *если*

$R_{R_5(x,1),\, R_6(x,1)} \neq 0$, $R_{R_5(x,1),\, R_7(x,1)} \neq 0$ *и* $R_{R_5(x,1),\, R_5'(x,1)} \neq 0$,

то

$$|\theta_i - \theta_5| \gg \theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{Q}\sum\nolimits_h H_2^{-\alpha} \ll Q_2^{-\alpha}\varepsilon^2 Y^2 X^{-2},$$

где $\alpha < 1$, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_i\}$; *суммирование проводится по* $1 \leqslant |h_i| \leqslant q_i - 1$ *таким, что* $f_i(\theta)$ *удовлетворяют условиям леммы*;

$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_2(x)};$$
$$R_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_3(x),\, f_4(x)};$$
$$R_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_5(x)};$$
$$R_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_3(x),\, f_5(x)};$$
$$R_5(\alpha_1, \alpha_2) = R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x),\, R_2(\alpha_1, \alpha_2, x)};$$
$$R_6(\alpha_1, \alpha_2) = R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x),\, R_3(\alpha_1, \alpha_2, x)};$$
$$R_7(\alpha_1, \alpha_2) = R_{R_1(\alpha_1, \alpha_2, x),\, R_4(\alpha_1, \alpha_2, x)}$$

(*если* $f_1(x) \equiv f_2(x)$, *то*

$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1'(x)};$$

если $f_3(x) \equiv f_4(x)$, *то*

$$R_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_3(x),\, f_3'(x)};$$

если $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x) \equiv f_4(x)$, *то*

$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1'(x)} \quad \text{и} \quad R_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1''(x)};$$

если $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv \ldots \equiv f_5(x)$, *то*

$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1'(x)},$$
$$R_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1''(x)},$$
$$R_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R_{f_1(x),\, f_1'''(x)} \text{ и т. д.}).$$

Лемма доказывается подобно предыдущей. Приведем еще две известные леммы, которые будут использоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 5.

$$S=\sum_{D_0} e^{2\pi i f(x,y)} \ll \frac{N}{\sqrt{q}}+\sqrt{\frac{N}{q}\sum_{|n|=1}^{q-1}\left|\sum_{D_n} e^{2\pi i\varphi(x,y)}\right|},$$

где

$$\varphi(x,y)=\varphi_h(x,y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(f(x+ht,y))\,dt,$$

а суммирование по x, y *проводится по области* D_n:

$$X\leqslant x+ht\leqslant X_1\leqslant 2X,\quad Y\leqslant y\leqslant Y_1\leqslant 2Y,$$
$$(x+ht)\,y\leqslant N,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

ЛЕММА 6.

$$S\ll \frac{N}{\sqrt{q_1q_2}}+$$
$$+\sqrt{\frac{N}{q_1q_2}\left(\sum_{h_1=0}^{q_1-1}\sum_{h_2=1}^{q_2-1}|S_1|+\sum_{h_1=1}^{q_1-1}\sum_{h_2=1-q_2}^{0}|S_1|\right)},$$

где

$$S_1=\sum_{x,y} e^{2\pi i\psi(x,y)},$$
$$\psi(x,y)=\psi_{h_1,h_2}(x,y)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}(f(x+h_1t,\,y+h_2t))\,dt,$$

а суммирование проводится по области

$$X\leqslant x+h_1t\leqslant X_1\leqslant 2X,$$
$$Y\leqslant y+h_2t\leqslant Y_1\leqslant 2Y,$$
$$(x+h_1t)(y+h_2t)\leqslant N,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

ТЕОРЕМА 1.

$$\sum\nolimits_1=\sum_{x,y} e^{2\pi i\sqrt{Rxy}}\ll R^{25/74}\ln^{-105/37}R,$$

где суммирование проводится по области

$$X\leqslant x\leqslant X_1\leqslant 2X,\quad Y\leqslant y\leqslant Y_1\leqslant 2Y,$$
$$xy\leqslant N\leqslant R^{13/37}\ln^{-124/37}R.$$

Доказательство. Пусть $X \geqslant Y$, и пусть вначале $X \leqslant N^{7/13}$. Тогда, применив три раза лемму 6 с

$$q_1^4 q_2^4 = q_3^2 q_4^2 = q_5 q_6, \quad q_1/q_2 = q_3/q_4 = q_5/q_6 = X/Y,$$

получим

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \frac{N}{\sqrt{q_1 q_2}} + \sqrt[8]{NQ^{-1} \sum\nolimits_h' \sum\nolimits_{x,\,y}' e^{2\pi i f(x,\,y)}} + R_1,$$

где

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t_1\, \partial t_2\, \partial t_3} (\sqrt{R^*})\, dt_1\, dt_2\, dt_3,$$

а

$$R^* \equiv R(x + h_1 t_1 + h_3 t_2 + h_5 t_3)(y + h_2 t_1 + h_4 t_2 + h_6 t_3),$$

$$\sum\nolimits_h = \sum\nolimits_{|h_1|=1}^{q_1-1} \sum\nolimits_{|h_2|=1}^{q_2-1} \cdots \sum\nolimits_{|h_6|=1}^{q_6-1},$$

$$Q = q_1 q_2 \ldots q_6 = \ln^{28} R \sqrt{N^{21} R^{-7}},$$

а суммирование по x, y проводится по области

$$X \leqslant x + h_1 t_1 + h_3 t_2 + h_5 t_3 \leqslant X_1 \leqslant 2X,$$

$$Y \leqslant y + h_2 t_1 + h_4 t_2 + h_6 t_3 \leqslant Y_1 \leqslant 2Y,$$

$$(x + h_1 t_1 + h_3 t_2 + h_5 t_3)(y + h_2 t_1 + h_4 t_2 + h_6 t_3) \leqslant N,$$

$$0 \leqslant t_i \leqslant 1.$$

Из дальнейшего будет ясно, что

$$R_1 \leqslant R^{25/74} \ln^{-105/37} R.$$

Обозначим $\theta = x/y$; $Q_1 = q_1 q_3 q_5$; $Q_2 = q_2 q_4 q_6$; $H_2 = h_2 h_4 h_6$. Очевидно,

$$f''_{x_2}(x, y) = \frac{a_0 \sqrt{Rxy}\, H_2}{x^5} (\theta^3 + a_1 \sigma_1 \theta^2 + a_2 \sigma_2 \theta + a_3 \sigma_3) + $$
$$+ O\left(\frac{\sqrt{RQ}}{Nx^2} \sqrt[14]{\frac{Q^4}{N^7}}\right) = \frac{a_0 \sqrt{Rxy}\, H_2}{x^5} f_1(\theta) + O\left(\sqrt[14]{\frac{Q^{11} R^7}{N^{21} X^{28}}}\right);$$

$$f''_{y_2}(x, y) = \frac{b_0 \sqrt{Rxy}\, H_2}{x^3 y^2} \Bigl(\theta^3 + b_1 \sigma_1 \theta^2 + b_2 \sigma_2 \theta + b_3 \sigma_3 + $$
$$+ O\left(\frac{\sqrt{RQ}}{Ny^2} \sqrt[14]{\frac{Q^4}{N^7}}\right) = \frac{b_0 \sqrt{Rxy}\, H_2}{x^3 y^2} f_2(\theta) + O\left(\sqrt[14]{\frac{Q^{11} R^7}{N^{21} X^{28}}}\right);$$

$$f''_{x^2}(x, y) f''_{y^2}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 =$$

$$= \frac{c_0 R H_2^2}{x^7 y} (\theta^6 + c_1 \sigma_1 \theta^5 + (c_2 \sigma_1^2 + c_3 \sigma_2) \theta^4 + (c_4 \sigma_1 \sigma_2 + c_5 \sigma_3) \theta^3 +$$

$$+ (c_6 \sigma_1 \sigma_3 + c_7 \sigma_2^2) \theta^2 + c_8 \sigma_1 \sigma_3 \theta + c_9 \sigma_2^2) + O\left(\frac{RQ}{N^4} \sqrt[14]{\frac{Q^4}{N^7}}\right) =$$

$$= \frac{c_0 R H_2^2}{x^7 y} f_3(\theta) + O(\sqrt[14]{R^{14} Q^{18} N^{-63}});$$

$$S = \frac{1}{Q} \sum_h \left| \sum_{x, y} e^{2\pi i f(x, y)} \right| = \frac{1}{Q} \sum_h \left| S_h \right|;$$

$$\sum_h = \sum_{|\theta_1^1 - \theta_1^2| < \delta_1} + \sum_{|\theta_1^1 - \theta_1^2| \geqslant CX/Y} + \sum_{\delta_1 < |\theta_1^1 - \theta_1^2| < CX/Y} =$$

$$= \sum_{h'} + \sum_{h''} + \sum_{i=0}^{I} \sum_{\delta_{i+3} = 2^i \delta_1 \leqslant |\theta_1^1 - \theta_1^2| < 2\delta_{i+3}} +$$

$$+ \sum_{\delta_i 2^I \leqslant |\theta_1^1 - \theta_1^2| < CX/Y} = \sum_{h'} + \sum_{h''} + \sum_{i=3}^{I+4} \sum_{h^i},$$

где

$$|\theta_1^1 - x/y| = \min_i \{|\theta_i^1 - x/y|\};$$

$$f_i(\theta_j^i) = 0; \quad \delta_1 \ll x/y; \quad |\theta_1^1 - \theta_1^2| = \min_i |\theta_1^1 - \theta_i^2|;$$

$$I = \left[\log_2 \left(\frac{CX}{Y\delta_1}\right)\right].$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{h''} S_h \ll \frac{1}{Q} \sum_{h''} \Bigg(\sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| \leqslant \varepsilon \\ |x/y - \theta_1^1| \ll X/Y}} + \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| > \varepsilon \\ |x/y - \theta_1^1| \ll X/Y}} +$$

$$+ \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| \leqslant \varepsilon' \\ |x/y - \theta_1^1| \gg X/Y}} + \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| > \varepsilon' \\ |x/y - \theta_1^1| \gg X/Y}} \Bigg) e^{2\pi i f(x, y)},$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{h^i} S_h \ll \frac{1}{Q} \sum_{h^i} \Bigg(\sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| \leqslant \varepsilon_i \\ |x/y - \theta_1^1| \ll \delta_i}} + \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| > \varepsilon_i \\ |x/y - \theta_1^1| \ll \delta_i}} +$$

$$+ \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| \leqslant \varepsilon_i \\ |x/y - \theta_1^1| \gg \delta_i}} + \sum_{\substack{x, y \\ |x/y - \theta_1^3| > \varepsilon_i' \\ |x/y - \theta_1^1| \gg \delta_i}} \Bigg) e^{2\pi i f(x, y)}.$$

Применив леммы 4, 3 и 2, получим

$$\frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h''} S_h \ll \left(Y\varepsilon' \sqrt[4]{\frac{RQ}{N^2}} + \frac{X^2}{Y}\ln^4 N \sqrt{\frac{Y}{X\varepsilon'}} + \frac{Y^2\varepsilon}{X}\sqrt[4]{\frac{RQ}{N^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{X}{\varepsilon}\ln^4 N + X\ln^3 N + \sqrt{\frac{RQ}{N^2}} + N\sqrt[4]{\frac{N^2}{RQ}}\right)\ln N \ll$$

$$\ll R^{9/37}\ln^{28/37} R,$$

$$\frac{1}{Q}\sum\nolimits_{hi} S_h \ll \frac{1}{Q}\sum\nolimits_{hi}\left[\left(\frac{Y^2\varepsilon}{X}\sqrt[4]{\frac{RQ}{N^2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + X\ln^3 N\sqrt{\frac{Y}{\varepsilon X}} + \sqrt{\frac{RQ}{N^2}}\right) + N\ln N\sqrt{\frac{X^2N}{RQ\delta_i}}\right]\ln N \ll$$

$$\ll \frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h'} R^{9/37}\ln^{28/37} R + N\ln^3 N\sqrt[4]{\frac{X^2N}{RQ\delta_i}} + R^{9/37}\ln^{-1} R,$$

$$i = 3,\ 4, \ldots,\ I+4.$$

Значит,

$$S \ll \frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h'} |S_h| + R^{9/37}\ln^{28/37} R + \ln^3 R\sqrt[4]{\frac{N^6X}{RQY\delta_1}},$$

$$\frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h'} |S_h| \ll \frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h'}\left|\left(\sum_{\substack{x,\,y\\ |x/y-\theta_1^1|\leqslant\delta_1}} + \sum_{\substack{x,\,y\\ |x/y-\theta_i^1|\geqslant\delta_1}}\right) e^{2\pi i f(x,y)}\right|.$$

Аналогично предыдущему

$$\frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h_1}\left|\sum_{\substack{x,\,y\\ |x/y-\theta_i^1|\geqslant\delta_1}} e^{2\pi i f(x,y)}\right| \ll R^{9/37}\ln^{28/37} R +$$

$$+ \ln^3 R\sqrt[4]{\frac{N^6Y}{RQX\delta_1}}$$

Применив последовательно леммы 5, 4, 2 и 3, получим

$$\frac{1}{Q}\sum_{h'}\left|\sum_{\substack{x,\,y\\ |x/y-\theta_1^1|\leqslant\delta_1}} e^{2\pi i f(x,y)}\right| \ll$$

$$\ll \frac{1}{Q}\sum\nolimits_{h'}\left[\frac{Y^4\delta_1^2}{q} + Y^2\delta_1\left(Y^2\delta_1\sqrt{\frac{RQq^2}{Y^2N^4}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\frac{X^4N^2}{\sqrt{RNqQ_1}}} + X\ln^4 N\right)\right]^{1/2} \ll$$

$$\ll \sqrt[8]{\frac{RQY^{16}\delta_1^{14}}{X^{10}}} + \sqrt[7]{\frac{Y^7\delta_1^5\ln^8 N}{X}} + \sqrt[12]{\frac{Y^{25}\delta_1^{17}}{X^5}}.$$

Отсюда

$$S \ll R^{9/37}\ln^{28/37} R + \ln^3 R \sqrt[4]{\frac{N^6 X}{RQY\delta_1}} + \sqrt[8]{\frac{RQY^{16}\delta_1^{14}}{X^{10}}} +$$

$$+ \sqrt[4]{\frac{Y^7\delta_1^5 \ln^8 N}{X}} + \sqrt[12]{\frac{Y^{25}\delta_1^{17}}{X^5}} \ll R^{9/37}\ln^{28/37} R;$$

$$\Sigma_1 \ll R^{25/4} \ln^{-105/37} R.$$

Если $N^{7/13} \leqslant X < N^{15/26}$, то, применив один раз лемму 5 и два раза лемму 6, а также доказав вначале утверждение, подобное лемме 4, для функций вида

$$\sum_{i=0}^{m}{}' \theta^i \sum_{i+i_1+2i_2=m}{}' a_{i_1, i_2} (\sigma_1')^{i_1} (\sigma_2')^{i_2},$$

получим аналогично предыдущему $\Sigma_1 \ll R^{25/74} \ln^{-105/37} R$. Если $N^{15/26} \leqslant X < N^{31/52}$, то утверждение теоремы получим, применив два раза лемму 5, лемму 6 и затем лемму 2. Если $N^{31/56} \leqslant X < N^{8/13}$ и $N^{8/13} \leqslant X < N^{9/13}$, то, применив три раза лемму 5 и оценив подобно лемме 2, получим $\Sigma_1 \ll R^{25/74} \ln^{-105/37} R$. Если $N^{9/13} \leqslant X < N^{11/13}$, то, применив два раза лемму 5, получим подобно предыдущему, что $\Sigma_1 \ll R^{25/74} \ln^{-105/37} R$. Если же $N^{11/13} < X$, то

$$\sum\nolimits_1' \ll Y\left(X \sqrt[6]{\frac{\sqrt{RN}}{X^3}} + \sqrt{X}\sqrt[6]{\frac{X^3}{\sqrt{RN}}}\right) \ll R^{9/37}\ln^{-105/37} R.$$

ТЕОРЕМА 2. $\Delta(R) \ll R^{12/37} \ln^{62/37} R$.

Доказательство. Известно, что остаток

$$\Delta(R) \ll \frac{R}{V} + \frac{R}{V^{3/2}}\left|\sum\nolimits'_{xy\leqslant V^2/R} e^{2\pi i \sqrt{Rxy}}\right|.$$

Взяв $V = R^{25/37} \ln^{-62/37} R$, из теоремы 1 получим

$$\Delta(R) \ll \frac{R}{V} + \frac{R}{V^{3/2}} \ln^2 R \cdot R^{25/74} \ln^{-105/37} R \ll R^{12/37} \ln^{62/37} R.$$

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило 30.XII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Van der Corput, Zum Teilerproblem, Math. Ann., 98 (1928), 697—716.

[2] Richert H. E., Vershärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem, Math. Z., 58 (1953), 204—218.

[3] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, М., 1964.

[4] Колесник Г. А., О распределении простых чисел в последовательностях вида $[n^c]$, Матем. заметки, 2, №2 (1967). 117—128.