Ю. Д. Бураго, С. В. Буяло, Метрики ограниченной сверху кривизны на двумерных полиэдрах. II, *Алгебра и анализ*, 1998, том 10, выпуск 4, 62–112

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

МЕТРИКИ ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ КРИВИЗНЫ НА ДВУМЕРНЫХ ПОЛИЭДРАХ. II

© Ю. Д. Бураго, С. В. Буяло

Работа является продолжением работы [АрБу]. Изучаются метрики ограниченной сверху кривизны на двумерных полиэдрах. Дана полная характеризация таких метрик, как полученных в результате склеивания двумерных многообразий ограниченной сверху кривизны вдоль кривых с конечной вариацией поворота. Показано, что этот класс метрических пространств замкнут относительно равномерной сходимости и является замыканием соответствующего класса кусочно-гладких метрик.

§0. Введение

0.1. В настоящей работе рассматриваются пространства с внутренней метрикой ограниченной сверху кривизны (определения см. ниже в §1), являющиеся по своей топологии двумерными полиэдрами (в дальнейшем мы для краткости называем их 2-полиэдры). Этот класс занимает промежуточное положение между двумерными многообразиями и общими двумерными локально-компактными пространствами ограниченной сверху кривизны. Выделение такого класса оправдывается тем, что он оказывается замкнутым (при фиксированной топологии), допускает простую характеризацию (см. теорему 0.6), а его геометрия заметно богаче, чем в случае многообразий. С другой стороны, у нас нет примеров общих (локально-компактных) двумерных пространств ограниченной сверху кривизны, обладающих какими-либо качественно новыми свойствами по сравнению с полиэдрами.

Статья является непосредственным продолжением работы [АрБу], в которой изучались метрики ограниченной сверху кривизны на двумерных полиэдрах,

Работа выполнена при поддержке авторов грантами РФФИ 96-01-00674, 96-15-00675 и грантом CRDF RM1-169.

являющиеся равномерными пределами кусочно-гладких метрик. За точными определениями понятий, используемых в этом Введении, мы отсылаем читателя к §1.

Отметим, что метрики ограниченной сверху кривизны на поверхностях детально изучались в основном в контексте более общей теории „двумерных многообразий ограниченной кривизны“ (см. [А3, Ре1]). Для каждого такого многообразия M определена кривизна ω, являющаяся (борелевской знакопеременной) мерой. В случае риманова многообразия имеем $\omega(A) = \int_A K dS$, где K — гауссова кривизна, dS — элемент площади. Кроме того, выделяется класс кривых ограниченной вариации поворота. Для каждой такой кривой $\gamma\colon [0;a] \to M$ определены повороты τ_1, τ_2 с двух ее сторон как (борелевские знакопеременные) меры на $(0,a)$. В случае гладкой кривой в римановом многообразии имеем $\tau_1(B) = \int_B k_g ds$, $\tau_2(B) = -\int_B k_g ds$, где k_g — геодезическая кривизна, ds — элемент длины дуги. (В общем случае не обязательно $\tau_2 = -\tau_1$, и для простой открытой дуги γ выполняется равенство $\tau_1(\gamma) + \tau_2(\gamma) = \omega(\gamma)$).

0.2. В качестве важного примера полиэдров ограниченной сверху кривизны упомянем евклидов конус над графом, в котором каждый нестягиваемый цикл имеет длину $\geqslant 2\pi$; в частности, несколько плоских дисков, склеенных по центрам, или несколько полудисков, склеенных по диаметру.

0.3. Обозначим через $\mathcal{R}_\kappa$ класс локально-компактных полиэдров с внутренней метрикой кривизны не более κ, у которых краевые ребра (т.е. ребра, смежные в точности с одной гранью) являются кривыми с конечной вариацией поворота (мы мотивируем последнее ограничение в §1.B.5). В этом параграфе мы считаем для простоты формулировок, что полиэдр $X \in \mathcal{R}_\kappa$ не имеет ребер степени 0 (т.е. не смежных ни одной грани).

0.4. *Опишем конструкцию склеивания полиэдра из поверхностей* класса $\mathcal{R}_\kappa$ и условия, при которых такой полиэдр принадлежит классу $\mathcal{R}_\kappa$. Тот факт, что эти условия действительно являются достаточными, а особенно, что любой полиэдр $X \in \mathcal{R}_\kappa$ может быть получен такой процедурой склеивания, и составляет центральный результат статьи (теоремы 0.5, 0.6).

Пусть M_i — область на поверхности класса $\mathcal{R}_\kappa$, имеющая компактное замыкание $\overline{M}_i$ и ограниченная конечным числом кривых с конечной вариацией поворота; при этом допускается вырождение таких кривых в точки.

Склеим полиэдр X из набора таких областей M_i. Уточним, что мы понимаем под склеиванием. Предполагается, что граница ∂M_i каждой области M_i

триангулирована, склеивание происходит вдоль симплексов триангуляции (т.е. вдоль точек и отрезков), причем каждый набор отождествляемых (по изометриям) симплексов конечен и его симплексы имеют одинаковую длину. Таким образом, на полиэдре X выделены локально-конечные наборы V вершин и E ребер, вдоль которых происходило склеивание. Внутренняя метрика на X определяется естественным образом с помощью метрик склеиваемых областей M_i.

Каждой вершине $x \in V$ естественно сопоставляется ее линк Λ_x — граф, вершины и ребра которого взаимно однозначно соответствуют выходящим из x ребрам полиэдра X и примыкающим к x „локальным" граням M_i с сохранением их инцидентности (самой грани M_i может соответствовать несколько ребер в Λ_x). *Длиной* ребра $e \subset \Lambda_x$ считаем угол сектора между выходящими из x ветвями границы соответствующей e грани M_e, причем угол измеряется в метрике этой грани. Если точка x изолирована в какой-либо грани M_e, то длина соответствующей этой грани окружности $e \subset \Lambda_x$ есть полный угол вокруг x в грани M_e.

При склеивании полиэдра X из поверхностей M_i будем соблюдать следующие два условия:

(i) для любого ребра $e \subset X$, любого его борелевского подмножества B и любых областей M_i, M_j, примыкающих к e, выполняется неравенство

$$\tau_i(B) + \tau_j(B) \leqslant 0,$$

где τ_i и τ_j — повороты ребра e со сторон M_i и M_j (различных!) соответственно;

(ii) для каждой вершины $x \in X$ любая нестягиваемая петля в Λ_x имеет длину, не меньшую 2π.

0.5. Теорема о склеивании. *Полиэдр X, склеенный из поверхностей $M_i \in \mathcal{R}_\kappa$, принадлежит классу $\mathcal{R}_\kappa$ тогда и только тогда, когда выполнены условия* (i) *и* (ii).

0.6. Теорема характеризации. *Каждый полиэдр $X \in \mathcal{R}_\kappa$ может быть получен склеиванием многообразий $M_i \in \mathcal{R}_\kappa$ с соблюдением условий* (i) *и* (ii).

Существенный 1-*остов* $\mathrm{esk}_1 X$ 2-полиэдра X есть множество *сингулярных* точек полиэдра X, т. е. точек, не имеющих окрестности, гомеоморфной двумерному диску. Автоматически $\mathrm{esk}_1 X$ является локально-конечным графом. Поверхности, являющиеся связными компонентами дополнения $X \setminus \mathrm{esk}_1 X$, называются *максимальными гранями.* Каждой такой грани f мы сопоставляем поверхность с краем $\operatorname{Cl} f = f \cup \partial f$ (см. п. 1.A.2). Тогда компактный полиэдр X получается склеиванием из поверхностей $\operatorname{Cl} f$.

Теперь теорема 0.6 может быть сформулирована в эквивалентной форме следующим образом.

0.7. Теорема. *Для каждой максимальной грани f полиэдра $X \in \mathcal{R}_\kappa$ поверхность $\operatorname{Cl} f$ с внутренней метрикой d_f, индуцированной метрикой d полиэдра X, принадлежит классу $\mathcal{R}_\kappa$.*

Теорема 0.5 сравнительно просто выводится из следующей теоремы 0.8.

0.8. Теорема о предельной метрике. *Пусть метрика d на компактном 2-полиэдре X является равномерным пределом последовательности метрик $d_n \in \mathcal{R}_\kappa$ на X, причем положительные части их кривизн ω_n^+ равномерно ограничены на $X \setminus \operatorname{esk}_1 X$, а также равномерно ограничены длины существенного 1-остова $\operatorname{esk}_1 X$ и вариации поворота краевых ребер. Тогда $d \in \mathcal{R}_\kappa$.*

0.9. Замечание. Условие на длины существенного 1-остова $\operatorname{esk}_1 X$, вероятно, может быть опущено.[1] Далее, при замене равномерной сходимости на сходимость по Громову–Хаусдорфу теорема 0.8 перестает быть верной. Дело в том, что свойство метрики быть метрикой ограниченной сверху кривизны, вообще говоря, не сохраняется при предельном переходе по Громову–Хаусдорфу. Например, на любой замкнутой поверхности, отличной от сферы, существует последовательность метрик кривизны не более 1, сходящаяся к метрике на сфере, имеющей конические точки с полным углом $< 2\pi$. Такие примеры легко строятся благодаря тому, что на торе с дырой и на ленте Мебиуса существуют римановы метрики неположительной кривизны, имеющие сколь угодно малый диаметр и геодезический край.

Однако для *гомотопической сходимости* (в некотором смысле промежуточной между равномерной и по Громову–Хаусдорфу, см. §1.C.3) имеет место следующая

0.10. Теорема [АрБу]. *Предположим, что компактные метрические пространства X_n кривизны не более κ гомотопически сходятся к X, причем $\kappa \leqslant 0$. Тогда X есть пространство кривизны не более κ.*

[1] Это предположение доказано в [И].

Доказательство легко следует из теоремы Картана–Адамара для пространств неположительной кривизны (см. [AB, Ba1]).

Доказательство теоремы 0.6 базируется на аппроксимационной теореме.

0.11. Теорема аппроксимации. *Каждая метрика* $d \in \mathcal{R}_\kappa$ *на* (*локально*) *- компактном* 2*-полиэдре* X *есть равномерный предел последовательности кусочно-гладких метрик* $d_n \in \mathcal{R}_\kappa$ *на* X*, вариации кривизны которых* $|\omega_n|$ (*локально*) *ограничены на* $X \setminus \mathrm{esk}_1 X$*, а существенный* 1*-остов* $\mathrm{esk}_1 X$ *имеет* (*локально*) *равномерно ограниченные длины, и краевые ребра имеют* (*локально*) *равномерно ограниченные вариации поворота.*

0.12. Теорема 0.11, а тем самым и теорема 0.6 требуют предварительного изучения локального строения пространств $X \in \mathcal{R}_\kappa$. Приводимые ниже доказательства необходимых структурных теорем довольно громоздки. Их можно было бы опустить, имея в своем распоряжении результаты о локальном строении локально-компактных пространств ограниченной сверху кривизны, анонсированные Б. Кляйнером в 1993–1994 гг. Однако мы располагаем только коротким сообщением Б. Кляйнера [K1]. Мы благодарим Б. Кляйнера за его письмо, которое оказалось чрезвычайно полезным. Кроме ряда анонсов, оно содержит, в частности, идею доказательства гомеоморфности пространства направлений графу на основе утверждения, соответствующего теореме 3.1 настоящей работы, и соображения по поводу спрямляемости $\mathrm{esk}_1 X$. Не имея другой базы для ссылок и стремясь сделать изложение замкнутым, мы приводим в §3 свой вариант полных доказательств.

0.13. Теоремы 0.5, 0.6, 0.8, 0.11 позволяют многие результаты, ранее полученные только для полиэдров с кусочно-гладкой метрикой, автоматически распространить на общий случай метрик ограниченной сверху кривизны на полиэдрах. Так, в терминах работы [АрБу] теорема 0.11 утверждает, что любая метрика из $\mathcal{R}_\kappa$ является *ручной*. Для ручных метрик в [АрБу] определен заряд кривизны, установлены его естественные свойства и доказана формула Гаусса–Бонне. В силу теоремы 0.11 все это выполняется для любого полиэдра $X \in \mathcal{R}_\kappa$.

Тем самым во всех основных результатах работы [BaBu] требование кусочной гладкости метрик может быть опущено (см. обсуждение этой проблемы во Введении к [BaBu]).

0.14. Проблемы. Однако остаются открытыми вопросы, связанные, например, с существованием меры Лиувилля и ролью гомотопической сходимости. Так, основной результат работы [BaBr], который классифицирует замкнутые двумерные орбиэдры неположительной кривизны и доказан для кусочно-гладких метрик, вероятно, справедлив для общих метрик неположительной кривизны. Доказательство, приведенное в [BaBr], существенно использует для введения меры Лиувилля гладкость метрики на открытых гранях. Это не единственный случай, когда можно ожидать положительного решения той или иной проблемы для общих метрик ограниченной сверху кривизны, однако известные подходы опираются на существование достаточно хорошей меры на касательном расслоении, инвариантной для геодезического потока, которое известно только для гладких метрик.

a. Пусть, например, X — компактное пространство ограниченной сверху кривизны без сопряженных точек с продолжимыми геодезическими и коммутативной фундаментальной группой. Верно ли, что X изометрично конечномерному плоскому тору? В такой общности этот вопрос, по-видимому, открыт даже для случая $\dim X = 2$ (если X — тор с римановой метрикой, то ответ положительный, см. [Bul]).

Наш интерес к гомотопической сходимости обусловлен также следующими двумя проблемами.

b. Можно ли в теореме 0.8 о предельной метрике ослабить условие для метрики d быть равномерным пределом до условия быть гомотопическим пределом метрик d_n на соответствующих 2-полиэдрах X_n?

c. Пусть X — локально-компактное пространство кривизны не более κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, с продолжимыми геодезическими топологической размерности 2. Верно ли, что X является гомотопическим пределом 2-полиэдров кривизны не более κ? (Нетрудно построить примеры таких пространств X, не являющиеся 2-полиэдрами).

К нашему удивлению доказательство теоремы 0.8 о предельной метрике потребовало наибольших усилий при написании настоящей работы. Кроме того, нет никакой надежды обобщить эту теорему на случай $\dim X \geqslant 3$, даже если X является многообразием, ввиду известных примеров римановых метрик на сфере S^3 с секционными кривизнами и диаметром $\leqslant \epsilon$ для любого $\epsilon > 0$ (см. [Bav]).

d. Это приводит к проблеме нахождения наименьшего геометрически интересного класса метрических пространств, который содержал бы пространства кривизны не более κ с $\kappa > 0$ и их равномерные (гомотопические, по Громову–Хаусдорфу и т.д.) пределы (для случая $\kappa \leqslant 0$ см. теорему 0.10).

e. С этим связана проблема об обобщении понятия 2-многообразия „ограниченной кривизны“ [A3] на случай 2-полиэдров. Напомним, что этот класс метрических пространств определяется, грубо говоря, требованием для тотального избытка любой системы неналегающих геодезических треугольников быть (локально) равномерно ограниченным. (Избыток треугольника с углами α, β, γ равен $|\alpha + \beta + \gamma - \pi|$). Непосредственное обобщение не работает, поскольку даже для простейшего нетривиального примера 2-полиэдра $X = C(3) \times \mathbb{R}$, где $C(3)$ — конус над множеством из трех точек, имеется несчетное множество неналегающих треугольников с избытком π каждый.

Структура работы. В §1 приводятся необходимые сведения о 2-полиэдрах, пространствах ограниченной сверху кривизны, кривых с ограниченной вариацией поворота, продолжимости геодезических, различных типах сходимости метрических пространств и иерархии масштабов.

В §2 доказывается теорема о предельной метрике для случая кусочно-гладких метрик d_n. Общий случай этой теоремы следует из теоремы аппроксимации, доказательство которой не использует теорему 0.8. Здесь же доказывается теорема о склеивании.

В п. 3.A и 3.B приведены доказательства результатов Б. Кляйнера о локальном строении локально-компактных пространств ограниченной сверху кривизны, необходимые для настоящей работы. В п. 3.C мы доказываем гомотопическую эквивалентность линков и пространств направлений.

Теоремы характеризации и аппроксимации доказываются в §4.

Благодарности. Мы весьма благодарны Б. Кляйнеру за его стимулирующее письмо [K1] и Ю. Г. Решетняку за любезно присланное нам письмо с объяснением некоторых деталей его работы [Re1], относящихся к лемме 2.6.

§1. Предварительные сведения

1.A. Двумерные полиэдры. Мы придерживаемся определений и обозначений из [АрБу], которые приводим здесь для удобства читателя.

1.A.1. Под полиэдром X мы всегда имеем в виду локально-компактный 2-полиэдр, т.е. локально компактное топологическое пространство, гомеоморфное локально-конечному двумерному симплициальному комплексу Y. Такой гомеоморфизм $X \to Y$ называется *триангуляцией* X. Фиксируя триангуляцию, мы отождествляем X и Y. При этом открытые симплексы размерностей 0, 1, 2 называются *вершинами, ребрами* и *гранями* триангуляции соответственно.

Всевозможные замкнутые симплексы, которым принадлежит точка $x \in X$, образуют ее *звезду* $\mathrm{St}(x)$. *Линк* Λ_x точки x есть граф, гомеоморфный объединению всех замкнутых симплексов в $\mathrm{St}(x)$, не содержащих x. Граф Λ_x компактен и не зависит от выбора триангуляции X. Точка x имеет в X окрестность, гомеоморфную конусу над линком Λ_x, и проколотая звезда $\mathrm{St}(x) \setminus x$ гомотопически эквивалентна Λ_x.

1.A.2. Подмножество $S \subset X$, состоящее из всех точек $x \in X$, имеющих окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^2$, называется *максимальной поверхностью* полиэдра X. Иными словами, S состоит из точек x, для которых линк Λ_x есть окружность. Максимальная поверхность может быть несвязной. Компоненты связности S называются *максимальными гранями* X. *Существенный* 1-*остов* $\mathrm{esk}_1 X$ является дополнением $X \setminus S$. Ясно, что $\mathrm{esk}_1 X$ гомеоморфен локально-конечному графу. Замыкание $\overline{S}$ поверхности S в X не совпадает с X, если X содержит ребро степени 0, см. п. 1.A.3. Напомним, что во Введении мы ограничивались случаем $\overline{S} = X$. Однако это различие не существенно.

Рассмотрим максимальную поверхность как часть симплициального комплекса X с частичной симплициальной структурой, индуцированной включением $S \subset X$. Дополняя каждый симплекс в S до замкнутого симплекса, мы получим локально-компактное пространство $\mathrm{Cl}(S)$; это пространство является поверхностью с краем. Край отличается от множества $\partial S = \mathrm{Cl}(S) \setminus S$ только дискретным множеством одноточечных компонент множества ∂S. Отметим, что одноточечные компоненты всегда принадлежат внутренности поверхности $\mathrm{Cl}(S)$ (пример: полиэдр X состоит из двух копий $\mathbb{R}^2$ с единственной общей точкой). Включение $S \subset X$ естественно продолжается до непрерывной проекции $\mathrm{Cl}(S) \to \overline{S} \subset X$.

1.A.3. *Существенными вершинами* полиэдра X называются вершины графа $\mathrm{esk}_1 X$, т.е. точки, не имеющие в $\mathrm{esk}_1 X$ окрестности, гомеоморфной интервалу. Дополнение к множеству вершин в $\mathrm{esk}_1 X$ есть дизъюнктное объединение интервалов и окружностей; эти кривые называются *существенными ребрами* полиэдра X. Ясно, что существенные вершины и ребра лежат соответственно в 0- и 1-остове любой триангуляции полиэдра X. Если e — существенное ребро, то линк Λ_x любой точки $x \in e$ является графом с двумя вершинами и $p \geqslant 0$ ребрами между ними. Число $p = p_e$ не зависит от выбора точки $x \in e$ и называется *степенью* ребра e. По определению существенного ребра, $p_e \neq 2$. Ребра степени

0 являются геодезическими для любой внутренней метрики на X. В отличие от работы [АрБу] мы допускаем наличие ребер степени 1 (краевых ребер).

1.A.4. Рассматривая на полиэдре X внутренние метрики, мы всегда считаем (если не сказано иное), что соответствующая метрическая топология совпадает с исходной топологией полиэдра X. Говоря о гладкой метрике на n-симплексе, мы считаем симплекс гладко вложенным в $\mathbb{R}^n$ и имеем в виду риманову метрику, заданную в некоторой окрестности симплекса.

Кусочно-гладкой метрикой на симплициальном комплексе Y называется функция расстояния, индуцированная семейством заданных на симплексах $A \subset Y$ гладких метрик g_A таких, что $g_A|B = g_B$ для любой грани $B \subset A$.

Метрика d на 2-полиэдре X называется *кусочно-гладкой*, если d является таковой для некоторой триангуляции Y полиэдра X. Заметим, что при этом метрика, индуцированная на максимальной грани, может и не быть гладкой, если эта грань не является симплексом триангуляции.

1.B. Пространства ограниченной сверху кривизны.

1.B.1. Хотя внутренние метрики на (локально-компактном!) 2-полиэдре X всегда геодезические (т.е. для любых двух точек существует соединяющая их кратчайшая), при рассмотрении касательных конусов нам понадобится более общая ситуация. Поэтому напомним, что метрика d на множестве A называется *внутренней*, если для любых $x, y \in A$ и любого $\epsilon > 0$ существует *ϵ-середина* между x и y, т.е. такая точка z, что

$$\max\{d(x,z), d(y,z)\} \leqslant \frac{1}{2}d(x,y) + \epsilon.$$

Если метрика d полна, то это равносильно условию, что $d(x,y)$ есть инфимум длин кривых, соединяющих x и y.

1.B.2. Кривая $\gamma\colon [0,1] \to X$ называется *кратчайшей*, если ее длина равна расстоянию между ее концами, а параметр пропорционален длине дуги. *Геодезической* называется локально кратчайшая кривая.

1.B.3. Имеется ряд определений и характеризаций пространства ограниченной сверху кривизны (см. [АБН, БН, Бу, KL, LS1]). Все они равносильны по крайней мере для геодезических пространств. Мы напомним здесь вариант определения, не требующий наличия кратчайших; это оказывается полезным при рассмотрении таких предельных операций, как взятие касательного конуса.

Напомним, что κ-плоскостью M_κ называется евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ при $\kappa = 0$, двумерная сфера радиуса $1/\sqrt{\kappa}$ при $\kappa > 0$ и плоскость Лобачевского кривизны κ при $\kappa < 0$. Диаметр $R(\kappa)$ модельного пространства M_κ бесконечен при $\kappa \leqslant 0$ и равен $\pi/\sqrt{\kappa}$ при $\kappa > 0$.

Расстояния $d(x_i, x_j)$, i, $j = 1,2,3$, $i \neq j$, называются *длинами сторон* набора $\Delta = \{x_1, x_2, x_3\} \subset X$. Если сумма $P(\Delta)$ длин сторон Δ меньше $2R(\kappa)$, то на κ-плоскости существует (единственный с точностью до конгруэнтности) *треугольник сравнения* $\overline{\Delta} = (\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3)$ для Δ, длины сторон которого равны длинам сторон Δ. Набор $\Delta \subset X$ назовем *κ-тонким,* если для любого $\epsilon > 0$ и любой ϵ-середины t между x_2 и x_3 длина медианы $\overline{x}_1\overline{t}$ треугольника сравнения $\overline{\Delta}$ не меньше, чем $d(x_1, t) - \delta_\Delta(\epsilon)$, где $\delta_\Delta(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

1.B.4. Метрика d на X называется *локально-внутренней*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $U(x)$, такую что для любых y, $z \in U(x)$ и любого $\epsilon > 0$ существует ϵ-середина t между y и z (не обязательно $t \in U(x)$). Примером локально внутренней метрики, не являющейся внутренней, является пространство направлений (с угловой метрикой) в вершине конуса с полным углом $\theta > 2\pi$ вокруг вершины.

Локально-внутренняя метрика d на X называется *метрикой кривизны не более* κ, если любая точка $x \in X$ имеет окрестность U_x, в которой каждый набор Δ из трех точек является κ-тонким.

Через $B_r(x)$ обозначаем открытый метрический шар радиуса r с центром x. Пространство, в котором он содержится, обычно ясно из контекста.

Супремум $r(x)$ тех $r > 0$, для которых шар $B_r(x)$ может играть роль такой окрестности U_x, будем называть *радиусом выпуклости* в точке x.

1.B.5. В определение класса $\mathcal{R}_\kappa(X)$ метрик кривизны не более κ на 2-полиэдре X мы включаем (см. 0.3) дополнительное требование, что замыкание любого краевого ребра является кривой с конечной вариацией поворота (со стороны поверхности S). Последнее соглашение представляется естественным по двум причинам: для существенных ребер степени $\geqslant 3$ оно выполняется автоматически (однако доказательство этого нетривиально и основывается на теореме аппроксимации). Кроме того, оно позволяет продолжать метрику за такие ребра, рассматривая X как часть большего полиэдра из $\mathcal{R}_\kappa$.

1.B.6. Поворот кривой на поверхности кривизны не более κ уже упоминался в 0.1. Подробное изложение имеется в [А3, Ре1]. Для геодезической ломаной элементарный поворот сосредоточен в ее вершинах и в каждой из них равен

$\pi-\alpha$, где α — угол сектора между выходящими из вершины звеньями с рассматриваемой стороны. Для произвольной кривой поворот определяется путем ее аппроксимации ломаными, подходящими к кривой с нужной стороны. Кривая имеет конечную вариацию поворота, если ее можно аппроксимировать ломаными с равномерно ограниченными вариациями поворотов. Такая кривая, в частности, спрямляема и в каждой точке имеет направление, так что можно говорить об угле между кривыми с конечной вариацией поворота.

Это уже использовалось в 0.4, где были определены длины ребер графа Λ_x. Здесь отметим только, что при этом на линке возникает, вообще говоря, псевдометрика, поскольку углы между ребрами полиэдра X могут обращаться в нуль.

1.B.7. Продолжимость геодезических. Геодезическая $\gamma\colon [0,a] \to X$ называется *продолжимой* (за точку $x = \gamma(a)$), если она является ограничением геодезической $\gamma'\colon [0,b] \to X$ с $b > a$. Если геодезическая $\gamma\colon [0,a] \to X$ в полном пространстве X ограниченной сверху кривизны не продолжима за точку $x = \gamma(a)$, то, как легко видеть, проколотый шар $B_r(x) \setminus x$ стягиваем для всех достаточно малых $r > 0$.

Таким образом, если линк Λ_x любой точки x 2-полиэдра X не стягиваем, то для любой полной метрики ограниченной сверху кривизны на X геодезические продолжимы.

Возможность продолжать геодезические играет важную роль в доказательстве теоремы аппроксимации. С другой стороны, в большинстве точек краевого ребра 2-полиэдра некоторые геодезические не продолжимы. Эта коллизия не существенна, поскольку как раз в таких точках локальная геометрия полиэдра хорошо известна. Более того, благодаря условию ограниченности вариации поворота краевых ребер (см. 1.B.5) всегда можно считать, что 2-полиэдр $X \in \mathcal{R}_\kappa$ изометрически вложен в больший 2-полиэдр $X' \in \mathcal{R}_\kappa$ с продолжимыми геодезическими (см. §2).

1.C. Различные типы сходимости метрических пространств. Из спектра различных типов сходимости метрических пространств мы используем сходимость по Громову–Хаусдорфу и равномерную. К ним мы добавляем так называемую гомотопическую сходимость, которая занимает промежуточное положение между первыми двумя. Эти сходимости, как и соответствующие метрики, можно ввести по схожим схемам.

1.С.1. *Искажением* отображения $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется величина

$$\operatorname{dis}(f) = \sup_{x,x' \in X} \left| d_Y\left(f(x), f(x')\right) - d_X(x, x') \right|.$$

Пусть A — класс всех отображений $X \to Y$. Положим

$$\delta(X, Y) = \inf_{f \in A} \operatorname{dis}(f)$$

и определим

$$|XY|_{\mathrm{GH}} = \max\{\delta(X,Y), \delta(Y,X)\}.$$

Неравенство треугольника для $|\ |_{\mathrm{GH}}$ следует из очевидного неравенства $\operatorname{dis}(g \circ f) \leqslant \operatorname{dis}(g) + \operatorname{dis}(f)$, в то время как для компактных метрических пространств X, Y равенство $|XY|_{\mathrm{GH}} = 0$ влечет их изометричность. Тем самым $|\ |_{\mathrm{GH}}$ есть метрика на множестве классов изометричных компактных метрических пространств. Сходимость $X_n \to X$ относительно этой метрики эквивалентна сходимости по Громову–Хаусдорфу (см. [G]), т.е. для любого $\delta > 0$ существует δ-сеть $X_\delta \subset X$, которая может быть аппроксимирована δ-сетями $X_{n,\delta} \subset X_n$ при $n \to \infty$.

1.С.2. Если заменить в определении метрики $|\ |_{\mathrm{GH}}$ класс A *всех* отображений классом всех *гомеоморфизмов*, мы придем к равномерной метрике $|\ |_{\mathrm{u}}$; пространства, не гомеоморфные друг другу, отстоят в ней на бесконечное расстояние.

Метрические пространства, гомеоморфные друг другу, можно заменить метриками, заданными на одном и том же пространстве X (мы предполагаем, что метрические топологии совпадают с исходной); тогда сходимость относительно равномерной метрики означает (с точностью до изометрии) обычную равномерную сходимость функций расстояния на X^2.

Детальное обсуждение свойств равномерной сходимости имеется в [А3, гл. IV].

1.С.3. Определим еще *гомотопическую* метрику, поскольку в ряде важных случаев к ней хорошо адаптируется условие ограниченности кривизны сверху (см.

теорему 0.10 и проблемы 0.14 b, c). Пусть $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность с гомотопически обратным $g\colon Y \to X$. Для метрических компактов X, Y полагаем

$$|XY|_{\mathrm{h}} = \inf_{(f,g)} \max\{\mathrm{dis}(f), \mathrm{dis}(g)\},$$

где инфимум берется по всем гомотопическим эквивалентностям $(f,g) : X \leftrightarrow Y$. Как и выше, гомотопическое расстояние $|\ |_{\mathrm{h}}$ определяет метрику на множестве классов изометричных компактных метрических пространств (возможность $|XY|_{\mathrm{h}} = \infty$ не исключается).

1.D. Иерархия масштабов. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем пользоваться следующим (неформальным) соглашением. *Иерархия масштабов*

$$\epsilon_k \prec \epsilon_{k-1} \prec \cdots \prec \epsilon_1 \prec \epsilon_0 = \theta$$

позволяет отнести те или иные величины, которые рассматриваются как „малые“, к различным масштабам малости. При этом мы пользуемся следующими правилами:

— масштаб θ рассматривается как основной и фиксирован;
— масштаб ϵ_{i+1} может быть выбран произвольно малым относительно масштаба ϵ_i, когда $\epsilon_i, \epsilon_{i-1}, \dots, \epsilon_0$ фиксированы;
— уменьшение масштаба ϵ_i автоматически ведет к соответствующему уменьшению масштаба ϵ_{i+1};
— принадлежность величины x к масштабу ϵ_i обозначается как $x \simeq \epsilon_i$ (x есть величина порядка ϵ_i).

Таким образом, для любого фиксированного $p > 0$ имеем

$$p\epsilon_i \simeq \epsilon_i, \quad \epsilon_i^p \simeq \epsilon_i, \quad \epsilon_i \pm \epsilon_j \simeq \epsilon_i \quad \text{для } j > i \text{ и т.д.}$$

Мы надеемся, что использование иерархий масштабов при изложении рассуждений позволит читателю отвлечься от несущественного выбора множителей типа 0.01 или 0.999 и более выпукло представить геометрические эффекты, которые всегда стоят за формальным рассуждением.

§2. Доказательство теоремы о предельной метрике и теоремы о склеивании

2.A. Доказательство теоремы 0.5 опирается на теорему 0.8, с доказательства которой мы и начнем.

2.A.1. Доказательство теоремы 0.8 использует следующий вариант известной в случае римановых многообразий леммы Клингенберга [ГКМ].

2.1 Лемма Клингенберга. *Пусть X — полное пространство кривизны кривизны не более κ. Тогда каждая гомотопия H между различными геодезическими $\gamma_0 = H(\cdot, 0)$ и $\gamma_1 = H(\cdot, 1)$ с общими концами $x = H(0, s)$ и $y = H(1, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, содержит кривую $\gamma_s = H(\cdot, s)$ длины $l(\gamma_s) \geqslant \pi/\sqrt{\kappa}$.*

Доказательство получается стандартными (для римановых многообразий) рассуждениями с помощью теоремы Александер–Бишопа [AB] об отсутствии сопряженных точек. Детали можно найти в лекциях [Бу] второго автора. См. также обсуждение близкого к этому вопроса в [Ba1].

2.A.2. Заметим, что теорему 0.8 достаточно доказать для случая *кусочно-гладких* метрик d_n. Действительно, мы можем воспользоваться теоремой 0.11, поскольку ее доказательство не опирается на теорему 0.8, и перейти от исходных метрик к аппроксимирующим их кусочно-гладким. Итак, мы считаем метрики d_n кусочно-гладкими. Следующий общий факт немедленно вытекает из определения пространства кривизны не более κ.

2.2. Предложение. *Допустим, что $|X_n X|_{\mathrm{GH}} \to 0$ при $n \to \infty$, где каждое X_n имеет кривизну не более κ. Если радиусы выпуклости r_n пространств X_n равномерно отделены от нуля, то X является пространством кривизны не более κ.* •

Следовательно, для доказательства теоремы 0.8 достаточно получить оценку $r_n \geqslant \rho > 0$. Далее, легко видеть, что если X полно и для радиуса выпуклости $r > 0$ в точке $x \in X$ выполняется $r < R(\kappa)/4$, то замыкание $\overline{B}_r(x)$ содержит геодезическую петлю. В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим замечанием.

2.A.3. Рассмотрим сначала частный случай теоремы 0.8.

2.3. Лемма. *Если метрики $d_n \in \mathcal{R}_\kappa$ на компактном двумерном многообразии M (быть может, с краем) равномерно сходятся к метрике d на M, а положительные части кривизны $\omega_n^+(M \setminus \partial M)$ и вариации поворота края ∂M ограничены равномерно по n, то $d \in \mathcal{R}_\kappa$.*

2.4. Замечание. Сформулированный факт кажется хорошо известным, однако к своему удивлению мы не смогли обнаружить подходящую ссылку. Поясним причину затруднений. Ограничимся случаем, когда M не имеет края и абсолютные кривизны метрик d_n равномерно ограничены. Тогда, согласно общим теоремам „о предельной метрике“ [АЗ], d есть метрика ограниченной (интегральной) кривизны, причем по теореме 6 из [АЗ, гл. VII] кривизны ω_n метрик d_n локально слабо сходятся к кривизне ω метрики d. Отсюда сразу следует, что для любого компакта $A \subset M$ ненулевой площади выполняется неравенство

$$\omega(A) \leqslant \kappa \operatorname{Area} A.$$

Пусть $\overline{T}$ — замкнутый выпуклый треугольник, лежащий в односвязной подобласти M, α — его угол, а α_κ — соответствуюший угол треугольника сравнения модельного пространства M_κ. По аналогии с хорошо известной оценкой

$$\alpha - \alpha_0 \leqslant \omega^+(\overline{T}), \qquad (*)$$

где ω^+ — положительная часть кривизны, естественно ожидать оценку

$$\alpha - \alpha_\kappa \leqslant \omega_\kappa^+(\overline{T}) \overset{\text{def}}{=} \sup_{A \subset \overline{T}} \{\omega(A) - \kappa \operatorname{Area} A\}, \qquad (**)$$

из которой немедленно следовала бы лемма 2.3. Скорее всего, $(**)$ доказывается вполне аналогично $(*)$, но нам не удалось найти соответствующее изложение (полное доказательство $(*)$ в общем случае весьма длинное [АЗ]). Поэтому мы приводим альтернативное доказательство леммы 2.3, тем более что предлагаемый ниже подход используется еще раз при доказательстве теоремы 0.8.

Доказательство леммы 2.3. Ввиду теоремы 0.10 мы можем ограничиться случаем $\kappa > 0$, а ввиду локальности утверждения считать, что M гомеоморфно замкнутому диску.

Согласно предложению 2.2, для доказательства того, что d есть метрика кривизны не более κ, достаточно показать, что радиусы выпуклости метрик d_n равномерно отделены от нуля (хотя бы для некоторой подпоследовательности). Если это не так, то для каждой метрики d_n найдется простая геодезическая петля γ_n в M длины $l_n(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через diam_n диаметр в метрике d_n. Тогда для каждого фиксированного n мы имеем $\operatorname{diam}_n(\gamma_{n+i}) \to 0$ при $i \to \infty$, поскольку d является метрикой (не псевдометрикой!), и $d_n \to d$ равномерно (последнее условие можно ослабить до $d \leqslant \liminf_n d_n$ на M^2. Мы воспользуемся этим замечанием при доказательстве теоремы 0.8). Таким образом, можно считать, что $\gamma_n \to x \in M$. Петля γ_n ограничивает диск D_n в M.

Заметим, что $\operatorname{diam}_n(D_n) \to 0$. Действительно, для каждого n существует выпуклая окрестность U_n точки x относительно метрики d_n такая, что $\operatorname{diam}_n(U_n) < 1/n$. Тогда при всех достаточно больших i петли γ_{n+i} содержатся в U_n. Тем самым $D_{n+i} \subset U_n$ и $\operatorname{diam}_n D_{n+i} \leqslant \operatorname{diam}_n U_n < 1/n$. Отсюда ввиду равномерной сходимости метрик следует и малость $\operatorname{diam}_{n+i} D_{n+i}$.

Для замкнутой поверхности F, являющейся удвоением диска D_n, имеем, согласно [БЗ, теорема 4.2.1],

$$\operatorname{Area} F \leqslant (-\pi + \omega^+(F)/2) \operatorname{diam}^2 F.$$

Поскольку $\omega^+(F) \leqslant 2\pi + \kappa \operatorname{Area} F$, получаем $(2 \operatorname{diam}_n D_n)^2 \geqslant \operatorname{diam}^2 F \geqslant 1/\kappa$, что противоречит тому, что $\operatorname{diam}_n D_n \to 0$.

Остается показать, что край ∂M имеет конечную вариацию поворота относительно метрики d. Соответствующий результат доказан в [Бур, теорема 1]. Однако для применения [Бур] формально необходимо, чтобы метрики d_n, d (ограниченной вариации кривизны) были определены на большем многообразии M', содержащим M внутри. Этого можно достичь, приклеивая кольцо $R = S^1 \times I$ к краю ∂M. Мы требуем, чтобы R было изометрично метрическому произведению окружности длины $l_n(\partial M)$ и отрезка $I = [0, 1]$ для каждой метрики d_n, d ($n = d$ в последнем случае). Обозначим через d'_n, d' продолженные метрики на $M' = M \cup (S^1 \times I)$. (Конструкция удвоения в этом случае не работает, поскольку могут существовать точки $x \in \partial M$ с нулевым углом между ветвями края ∂M, выходящими из x. На метрическом удвоении такие точки дают точки с мерой кривизны $\geqslant 2\pi$, так называемые точки острия. Однако известно, что точки острия являются основным источником различных контрпримеров, см. [За]).

Имея универсальную оценку снизу для радиуса выпуклости метрик d_n, d и оценку сверху для вариации поворота края $|\tau_n|(\partial M)$, мы можем применить рассуждения из [АрБу, лемма 3.4], согласно которым $l_n(\partial M) \to l_d(\partial M)$ при $n \to \infty$. Это влечет равномерную сходимость $d'_n \to d'$ и, следовательно, возможность применить [Бур]. •

2.А.4. Идея доказательства теоремы 0.8. Теорема носит локальный характер, так что можно считать полиэдр X компактным. В силу теоремы 0.10 можно также считать, что $\kappa > 0$. Фиксируем иерархию масштабов $\epsilon \prec \theta$, где $R(\kappa) \simeq \theta$. Предположим, что утверждение неверно, т.е. что $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, где r_n — радиус выпуклости метрики d_n. Как и в доказательстве леммы 2.3, находим геодезические петли γ_n относительно d_n такие, что $l_n(\gamma_n) \to 0$ и $\gamma_n \to x \in X$ при $n \to \infty$. У точки x найдется окрестность U, гомеоморфная конусу над линком Λ_x и с $\operatorname{diam}_d(U) \simeq \epsilon$. Можно считать, что $\gamma_n \subset U$ для всех n, в частности петля γ_n стягиваема в U. Нашей целью является построение стягивающей гомотопии $H\colon U \times I \to U$ такой, что $H|(U \times 0) = \mathrm{id}_U$, $H|(U \times 1)$ — постоянное отображение в x, *короткой* в том смысле, что $l_n(u \times I) \simeq \epsilon$ для каждого $u \in U$. Тогда геодезическую петлю γ_n можно стянуть в ее вершину с помощью семейства кривых, длины которых $\simeq \epsilon$ в метрике d_n. Поскольку $\epsilon \prec \theta$ и $R(\kappa) \simeq \theta$, то это будет противоречить лемме Клингенберга.

2.А.5. Мы можем считать, что окрестность U точки x, выбранная выше, является внутренностью звезды $\operatorname{St} x$ для достаточно мелкой триангуляции полиэдра X. Каждому простому циклу $c \subset \Lambda_x$ соответствует (сингулярный) диск $\overline{D} = \overline{D}_c \subset \operatorname{St} x$ с центром в x (см. [АрБу]), являющийся конусом над c с вершиной x. Поэтому замыкание $\overline{D}$ гомеоморфно замкнутому диску. Каждая метрика d_n индуцирует кусочно-гладкую метрику $d_{n,D}$ на открытом диске D. Метрики $d_{n,D}$ имеют кривизну не более κ по теореме 0.5 (которая доказана для кусочно-гладких метрик в [BaBu]).

Согласно теореме 1.5.3 из [АрБу], вариация поворота существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ относительно метрики d_n ограничена равномерно по n (в [АрБу] теорема 1.5.3 доказана для полиэдров без граничных ребер, однако оценка вариации поворота для $\mathrm{esk}_1 X$, полученная в этой теореме, легко переносится на общий случай). Пользуясь этим, нетрудно найти замкнутую подобласть $B_n \subset D$, гомеоморфную диску, содержащую x, и такую, что ее кусочно-гладкая граница обладает следующими свойствами:

(1) $d(x, \partial B_n) \geqslant \epsilon$ для всех n;

(2) вариация поворота границы ∂B_n относительно метрики $d_{n,D}$ ограничена равномерно по n.

2.5. Лемма. *Радиусы выпуклости метрик $d_{n,D}$ на B_n отделены от нуля равномерно по n, $r_n \geqslant r_0 > 0$.*

Доказательство. Можно считать, что все области B_n лежат в фиксированном компакте D. Предположим, что утверждение неверно. Рассуждая, как в доказательстве леммы 2.3, находим последовательность геодезических петель $\sigma_n \subset B_n$ с длинами $l_n(\sigma_n) \to 0$, сходящуюся к точке $x' \in D$. (Мы не предполагаем, что последовательность метрик $d_{n,D}$ предкомпактна в равномерной топологии; однако условие $d \leqslant \liminf_n d_{n,D}$, очевидно, выполнено на D^2.) Петля σ_n ограничивает диск $D_n \subset B_n$. Как и в лемме 2.3, получаем, что площадь и диаметр D_n достаточно велики ($\geqslant 1/\kappa$) относительно метрики $d_{n,D}$.

Тогда, поскольку длины $l_n(\mathrm{esk}_1 X)$ равномерно ограничены, существует точка $x_n \in D_n$, удаленная от $\mathrm{esk}_1 X$ на расстояние $d_n(x_n, \mathrm{esk}_1 X) = d_{n,D}(x_n, \mathrm{esk}_1 X) \geqslant c_0$ для некоторой постоянной $c_0 > 0$, которая не зависит от n. Это легко следует из того, что для масштаба $\delta \prec \epsilon$ любая δ-сеть в D_n содержит $\simeq 1/\delta^2$ точек, поскольку положительные части кривизны $\omega^+_{n,D}(D_n)$ метрик $d_{n,D}$ равномерно ограничены. Поэтому если упомянутая оценка не выполняется, то существуют $1/\delta^2$ δ-разделенных точек на $\mathrm{esk}_1 X \cap D_n$, следовательно, $l_n(\mathrm{esk}_1 X) \geqslant 1/\delta$ для всех достаточно малых $\delta > 0$. Это противоречит условию.

Теперь, пользуясь равномерной сходимостью $d_n \to d$, получаем

$$\mathrm{diam}_d(U) \geqslant \mathrm{diam}_d(D_n) \geqslant c_0,$$

что противоречит тому, что, по выбору, $\mathrm{diam}_d(U) \simeq \epsilon$. •

Пусть $B \subset \{x' \in D \mid d(x, x') < \epsilon\}$ — открытая подобласть, содержащая точку x. По определению $B \subset B_n$ для всех n.

2.6. Лемма. *Последовательность метрик $d_{n,D}$, суженных на B, относительно компактна в равномерной топологии. Любой ее предельный элемент $\bar{d}_D$ является метрикой кривизны не более κ на B.*

Доказательство. Мы адаптируем рассуждения из теории субгармонических метрик Решетняка [Ре1]. Пользуясь аппроксимацией гладкими метриками, можно считать без потери общности, что метрики $d_{n,D}$ и кривые $\partial B_n \subset D$ являются гладкими. Для каждой метрики $d_{n,D}$ рассмотрим в B_n *изотермические* координаты $\{z=(u,v) \mid u^2+v^2 \leqslant 1\} = B_1$ с $x=(0,0)$. Риманова метрика $d_{n,D}$ имеет вид $ds_n^2 = \lambda_n(z)(du^2+dv^2)$, где

$$\ln \lambda_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{B_1} \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\omega_n(d\zeta) + h_n(z),$$

ω_n — заряд кривизны метрики $d_{n,D}$, а h_n — гармоническая функция. Метрические пространства $(B_n, d_{n,D})$ и (B_1, ds_n^2) изометричны через изотермические координаты. Функция h_n может быть представлена как логарифмический потенциал с массой, сосредоточенной на границе $S^1 = \partial B_1$:

$$h_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{B_1} \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\psi_n(d\zeta) + C_n,$$

где C_n — постоянная, $\psi_n(E) = \int_{E\cap S^1} \frac{\partial h_n(e^{i\phi})}{\partial\nu}d\phi$ для любого борелевского множества $E \subset B_1$, и последнее подынтегральное выражение есть нормальная производная.

Согласно условию теоремы, положительные части кривизны $\omega_n^+(B_1)$ метрик ds_n^2 равномерно ограничены. Из условия (2) и формулы Гаусса–Бонне вытекает, что вариации мер $|\omega_n| = \omega_n^+ + \omega_n^-$ ограничены на B_1 равномерно по n. Из условия (2) также следует, что вариации мер $|\psi_n|$ ограничены равномерно по n ввиду следующего представления для поворота дуги $L(\alpha) = \{z = e^{it} \mid 0 \leqslant t \leqslant \alpha\} \subset S^1$:

$$\tau_n(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_1} \phi(\zeta,\alpha)\omega_n(d\zeta) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha \frac{\partial h_n(e^{i\phi})}{\partial\nu}d\alpha,$$

где $\phi(\zeta,\alpha)$ есть угол, под которым дуга $L(\alpha)$ видна из точки $\zeta \in B_1$ (см. [Pe1]). Таким образом, вариации зарядов $\widetilde{\omega}_n = \omega_n + \psi_n$ ограничены равномерно по n, поэтому последовательности мер $\{\widetilde{\omega}_n^+\}$, $\{\widetilde{\omega}_n^-\}$ относительно компактны в слабой топологии. Не ограничивая общности, считаем, что эти последовательности слабо сходятся к некоторым мерам $\widetilde{\omega}^+$, $\widetilde{\omega}^-$ на B_1 соответственно. Положим $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}^+ - \widetilde{\omega}^-$ и рассмотрим в B_1 внутренние метрики $\widetilde{d}_n$, $\widetilde{d}$, ассоциированные с субгармоническими метриками $d\widetilde{s}_n$, $d\widetilde{s}$, которые соответствуют функциям $\widetilde{\lambda}_n = e^{-C_n}\lambda_n$,

$$\widetilde{\lambda}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{B_1} \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\widetilde{\omega}(d\zeta).$$

Согласно теореме 7.3.1 из [Ре1], метрики $\widetilde{d}_n$ сходятся к метрике $\widetilde{d}$ равномерно на каждом замкнутом множестве $A \subset B_1$ без точек острия z метрики $\widetilde{d}$, т.е. таких, что $\widetilde{\omega}(z) \geqslant 2\pi$. В силу ограниченности меры $\widetilde{\omega}^+$ таких точек может быть лишь конечное число. Отсюда и из условия (1) сразу следует, что постоянные C_n ограничены снизу равномерно по n. Вспоминая теперь, что $d_n \to d$ равномерно на X, и рассматривая фиксированную окрестность $V \subset B_n \setminus \mathrm{esk}_1 X$, получаем, что постоянные C_n ограничены сверху равномерно по n. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $\widetilde{d}_n \to \overline{d}$ равномерно на A для некоторой метрики $\overline{d}$, гомотетичной метрике $\widetilde{d}$.

Согласно лемме 2.5, радиусы выпуклости метрик $\widetilde{d}_n$ равномерно отделены от нуля. Отсюда немедленно следует, что любая точка острия z метрики $\overline{d}$ внутри диска B_1 является бесконечно удаленной, так как иначе можно найти геодезические двуугольники метрик $\widetilde{d}_n$ в произвольно малой окрестности точки z для всех достаточно больших n. Точка z не может быть изолирована от образов существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ в B_1 при отображении изотермических координат метрик $d_{n,D}$ ввиду равномерной сходимости $d_n \to d$. Отсюда следует, что длины $\mathrm{esk}_1 X$ не ограничены для метрик d_n, противоречие. Таким образом, внутри диска B_1 нет точек острия вообще, поэтому $\widetilde{d}_n \to \overline{d}$ равномерно на $B_{1-\epsilon} = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 1-\epsilon\}$, и $\overline{d}$ является там метрикой кривизны не более κ.

Замена изотермических координат

$$(B_n, d_{n,D}) \to (B_1, ds_n^2) \xrightarrow{\mathrm{id}} (B_1, ds_m^2) \to (B_m, d_{m,D})$$

имеет искажение на $B_{1-\epsilon}$, стремящееся к нулю при $m, n \to \infty$. Поэтому изотермические координаты $(B_n, d_{n,D}) \to (B_1, ds_n^2)$ сходятся к гомеоморфизму области $B \subset D$ на некоторую окрестность точки $(0,0) \in B_1$. Пользуясь этим гомеоморфизмом, мы поднимаем метрику $\overline{d}$ до искомой метрики $\overline{d}_D$ на B. •

Из леммы 2.6 и [Бур, теоремы 1, 6] немедленно вытекает

2.7. Следствие. *Часть существенного* 1*-остова, лежащая в* B*, имеет конечную вариацию поворота. Длины относительно метрик* d_n $(d_{n,D})$ *сходятся*

$$l_n(\mathrm{esk}_1 X \cap B) \to l_{\overline{d}_D}(\mathrm{esk}_1 X \cap B)$$

при $n \to \infty$. •

2.A.6. Пусть $f \subset X$ — максимальная грань, в замыкании которой лежит точка x, $\mathrm{Cl}\, f$ — соответствующая поверхность с краем ∂f. Рассмотрим внутренние метрики $d_{n,f}$ на $\mathrm{Cl}\, f$, индуцированные метриками d_n. Каждая метрика $d_{n,f}$ является кусочно-гладкой, и поверхность $\mathrm{Cl}\, f$ является метрическим пополнением грани f относительно $d_{n,f}$. Следующие три условия гарантируют существование требуемой короткой гомотопии H:

(a) $\mathrm{diam}_{d_{n,f}}(U \cap \mathrm{Cl}\, f) \simeq \epsilon$;

(b) любые две точки из $U \cap \mathrm{Cl}\, f$ соединимы единственной кратчайшей относительно метрики $d_{n,f}$;

(c) $l_{n,f}(\partial f \cap U) \simeq \epsilon$ для длины $l_{n,f}$ относительно метрики $d_{n,f}$.

Действительно, пользуясь (a) и (b), легко построить короткую гомотопию между тождественным отображением $\mathrm{Cl}\, f \cap U \to \mathrm{Cl}\, f \cap U$ и некоторой ретракцией $\mathrm{Cl}\, f \cap U \to \mathrm{esk}_1 X$. Требуемая короткая стягивающая гомотопия H составлена из указанных гомотопий, построенных для каждой максимальной грани f, смежной с x, и стягивания $\mathrm{esk}_1 X \cap U$ по себе в точку x. Последняя гомотопия является короткой ввиду условия (c).

2.A.7. Условие (a) вытекает из условия (c) в силу того, что $\mathrm{diam}_d(U) \simeq \epsilon$ и метрики d_n равномерно сходятся к метрике d.

2.A.8. Из следствия 2.7 вытекает, что если $x_n \to x$ для последовательности $x_n \in \partial f$, то $l_{n,f}(\overline{x\,x_n}) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\overline{x\,x_n} \subset \partial f$ есть дуга между x и x_n. Это немедленно влечет свойство (c).

По лемме 2.5 радиусы выпуклости метрик $d_{n,f}$ отделены от нуля на $B \cap \mathrm{Cl}\, f$ равномерно по n, поскольку метрика на $B \cap \mathrm{Cl}\, f$, индуцированная метрикой $d_{n,D}$ (см. A.5), совпадает с соответствующим ограничением метрики $d_{n,f}$. Отсюда, очевидно, следует свойство (b). Доказательство теоремы 0.8 для случая кусочно-гладких метрик завершено. •

2.B. Доказательство теоремы склеивания.

2.B.1. Если X — поверхность, то условия (i) и (ii) являются достаточными по теореме склеивания для двумерных многообразий ([А3, гл. IX, теорема 6]).

Докажем теперь необходимость условий (i) и (ii) в общем случае.

2.B.2. Необходимость условия (ii) очевидна, поскольку оно является условием для *касательного конуса* в вершине, и если допустить, что оно нарушается, то в произвольно малой окрестности вершины появляются геодезические двуугольники.

2.B.3. Сначала докажем необходимость условия (i) для случая, когда X является поверхностью. Пусть $B \subset X$ — ограниченное борелевское подмножество. В силу ограниченности кривизны сверху числом κ имеем $\omega(B) \leqslant \kappa \operatorname{Area} B$, где ω — мера кривизны метрики d. Поскольку ребро склейки e имеет нулевую площадь, то

$$\tau_i(B) + \tau_j(B) = \omega(B) \leqslant 0$$

для любого борелевского $B \subset e$.

2.B.4. В общем случае, согласно теореме 0.11, метрику d на X можно равномерно аппроксимировать кусочно-гладкими метриками d_n кривизны не более κ с равномерно ограниченными положительными частями кривизны $\omega_n^+(X \backslash \operatorname{esk}_1 X)$. В силу теоремы 1.8.4 из [АрБу] внутренние метрики $d_{n,F}$ на поверхности $F = \overline{M}_i \cup \overline{M}_j$, индуцированные метриками d_n, сходятся равномерно к метрике d_F, индуцированной метрикой d. Согласно п. 2.B.1, $d_{n,F}$ являются метриками кривизны не более κ. Поэтому, согласно лемме 2.3, метрика d_F имеет кривизну не более κ и для любого борелевского $B \subset e$ выполняется неравенство

$$\tau_i(B) + \tau_j(B) = \omega(B) \leqslant 0.$$

Этим завершается доказательство необходимости условий (i) и (ii).

Доказательство достаточности следует той же схеме, что и доказательство для случая кусочно-гладких метрик, приведенное в [BaBu].

2.B.5. Предварительное замечание. Пусть X — поверхность кривизны не более κ с продолжимыми геодезическими, $x \in X$, v — направление в точке x. Для любой конечной последовательности пар чисел $\{t_i, \tau_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, таких что $0 < t_i < t_{i+1}$ и $|\tau_i| < \pi$, мы можем строить геодезическую ломаную γ, выходящую из x в направлении v, с последовательными звеньями длины $t_{i+1} - t_i$ и поворотами (скажем, справа) в точках $\gamma(t_i)$, равными τ_i (до тех пор, пока такая ломаная еще умещается в X).

Пусть $X = M_\kappa$. Тогда предельный переход от ломаных немедленно доказывает, что для любого заряда τ, заданного на некотором интервале $[0, s]$ и не имеющего точечных нагрузок, по абсолютной величине превосходящих π, существует параметризованная длиной кривая γ, для которой поворот с одной стороны совпадает с τ. (Это утверждение верно и в случае общего X, но доказательство сложнее. Нам этот общий случай не понадобится).

2.B.6. Теорема 0.5 также носит локальный характер, так что будем рассматривать полиэдр X вблизи фиксированной точки $x \in X$. Фиксируем иерархию масштабов $\epsilon \prec \theta$, где $R(\kappa) \simeq \theta$, и выберем достаточно мелкую триангуляцию полиэдра X так, чтобы точка x была одной из вершин триангуляции и окрестность $V = \mathrm{St}(x)$ удовлетворяла условиям: вариация кривизны $|\omega|(V \setminus \mathrm{esk}_1 X) \simeq \epsilon$ и вариация поворотов существенных ребер, лежащих в $V \setminus x$, со стороны поверхности $S = X \setminus \mathrm{esk}_1 X$ имеет порядок ϵ. Фиксируем также проекцию $V \setminus x \to \Lambda_x$, являющуюся гомотопической эквивалентностью, при которой каждая грань в $V \setminus x$ переходит в некоторое ребро линка Λ_x.

2.B.7. Из п. 2.B.5 и 2.B.1 следует, что метрика каждой грани $f \subset V$ может быть продолжена за границу этой грани метрикой постоянной кривизны κ так, что на новой поверхности $\widetilde{f}$ граница ∂f имеет нулевую кривизну всюду, кроме, быть может, точки x. Для того чтобы обеспечить условие $\widetilde{\omega}(x) = 0$, где $\widetilde{\omega}$ — кривизна поверхности $\widetilde{f}$, сделаем, за счет дополнительных ребер, все углы секторов в точке x между соседними ребрами, меньшими чем π. (Иными словами, повороты границы грани в $\widetilde{f}$ справа и слева отличаются лишь знаком).

2.B.8. Если исходящие из x ребра все являются кратчайшими, то доказательство просто (ср. [Ba2]). Действительно, можно считать окрестность V столь малой, что любая геодезическая каждой грани является кратчайшей в метрике грани. Теперь ясно, что стороны треугольника Δ с вершинами в V пересекают ребра лишь конечное число раз, проходя в каждой грани как кратчайшие. Предположим сначала, что стороны Δ не проходят через x. Склеим грани, через которые проходит сторона ab треугольника Δ в той последовательности, в которой они пересекаются с ab (априори некоторые грани могут встречаться несколько раз). Ввиду 2.B.1 получим многообразие кривизны $\leqslant \kappa$. Применяя к треугольнику xab в этом многообразии теорему сравнения углов, видим, что $\angle axb < \pi$. В частности, никакая грань при таком склеивании не повторяется.

Рассмотрим теперь замкнутую кривую $\gamma = \partial\Delta$. Соединяя ее точки с x кратчайшими в тех гранях, где лежат эти точки, мы, как и в [BaBu], найдем поверхность кривизны не более κ, ограниченную кривой γ (эта поверхность не содержит x, если проекция кривой γ в Λ_x стягиваема, и содержит x в противном случае; при этом мы пользуемся условием (ii)). Таким образом, треугольник Δ тоньше, чем треугольник сравнения $\overline{\Delta} \subset M_\kappa$.

Случай, когда точка x лежит на γ, легко сводится (разрезанием треугольника на части) к случаю, когда x является одной из вершин Δ. Кроме того, можно считать, что никакие две стороны Δ не совпадают между собой вблизи вершины. В этом случае нахождение вложенного в X диска с границей γ лишь упрощается.

2.B.9. Рассмотрим общий случай. Пусть $e \subset \mathrm{esk}_1 X \cap V$ — существенное ребро (дополнительные несущественные ребра, упомянутые в 2.B.7, всегда можно считать геодезическими), f — смежная с e грань, τ — поворот e со стороны f. Грань f считаем частью большего многообразия $\widetilde{f}$ (см. 2.B.7). Разобъем e на m участков $(t_i, t_{i+1}]$ равной длины, $t_0 = 0$, где t — длина дуги на e. Пусть τ_i — поворот участка $(t_i, t_{i+1}]$ со стороны f. Рассмотрим m-звенную ломаную геодезическую на $\widetilde{f}$ с началом в x, имеющую звенья длины $t_{i+1} - t_i$ и повороты τ_i в вершинах t_{i+1} (с соответствующей стороны). Направление ломаной в x выберем очень близким к направлению e, но наружу от f. Легко видеть, что при достаточной близости и больших m ломаная вся пройдет вне f (напомним, что поворот ребра e есть величина $\simeq \epsilon$). Такие ломаные выделят новые грани $f' \subset \widetilde{f}$, близкие к f. Мы можем склеить новые грани по построенным ломаным, сохранив прежнее комбинаторное строение. Для нового полиэдра V_m, склеенного из граней вида f', условия теоремы 0.5 выполняются. Согласно 2.B.8, V_m есть пространство кривизны не более κ. Нетрудно видеть, что при $m \to \infty$ метрики V_m равномерно сходятся к метрике V и, значит, по теореме 0.8, V есть пространство кривизны не более κ. •

§3. Результаты о локальной структуре

3.A. Шары близкие к евклидову шару по Громову–Хаусдорфу. Пусть $\sigma \prec \delta \prec \theta$ — иерархия масштабов с $1 \simeq \theta$.

3.1. Теорема (Б. Кляйнер). *Пусть X — полное метрическое пространство кривизны не более κ, $|\kappa| \simeq \sigma$, с продолжимыми геодезическими. Допустим, что*

$$\left|B_\theta(x_0)B_\theta(0)\right|_{\mathrm{GH}} < \sigma$$

для шаров $B_\theta(x_0) \subset X$ и $B_\theta(0) \subset \mathbb{R}^n$ радиусов θ. Тогда любой шар $B_\delta(x_0) \subset B_\theta(x_0)$ билипшицево гомеоморфен открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.

3.2. Замечание. Эта теорема сходна с теоремой 5.4 из [БГП], и ее доказательство, приведенное здесь, является вариантом доказательства последней, адаптированным для случая кривизны, ограниченной сверху. Новым моментом здесь является оценка снизу на углы в лемме 3.7. Эта оценка использует продолжимость геодезических.

Доказательство леммы 3.7 является примером рассуждений, типичных для данной работы: ограниченность сверху кривизны позволяет получить оценки сверху для рассматриваемых углов, в то время как продолжимость геодезических, вместе с аппроксимацией по Громову–Хаусдорфу стандартными пространствами, дает в ряде случаев необходимые оценки снизу.

Доказательство теоремы 3.1 начнем с рассмотрения дистанционных отображений и дистанционных реперов. Эти понятия (в форме дистанционных координат) были введены и эффективно использовались в работе [Бер1].

3.A.1. Дистанционные отображения. Пусть Y — метрическое пространство. Отображение $f\colon Y \to \mathbb{R}^n$ называется *дистанционным*, если его координатные функции являются 1-липшицевыми. Например, для a, $b \in Y$ функция $f_{a,b}\colon Y \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = (|bx| - |ax|)/2$ является дистанционной.

Пусть $s > 0$ и Z — метрическое пространство. Будем говорить, что точки x, $y \in Y$ s-разделены отображением $f\colon Y \to Z$, если $\bigl|f(x)f(y)\bigr| \geqslant s|xy|$.

Отображение $f\colon Y \to Z$ называется *s-открытым*, если для любых $y \in Y$, $z \in Z$ с $\bigl|f(y)z\bigr| < \sigma$ найдется точка $x \in Y$ с $f(x) = z$, s-разделенная с y отображением f.

3.3. Лемма. *Пусть точки x_0, a, $b \in X$ удовлетворяют условиям*

(i) $|x_0a|, |x_0b| \simeq \theta$;

(ii) $|\pi - \angle axb| < \delta$ *для всех* $x \in B_\delta(x_0)$.

Тогда дистанционное отображение $f = f_{a,b}\colon B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ является $(1-\delta)$-открытым.

Доказательство. Пусть $y \in B_\delta(x_0)$, $z \in \mathbb{R}$ таковы, что $\bigl|f(y)z\bigr| < \sigma$. Сравнивая с модельным пространством, получаем из (i), (ii), что $|ab| \simeq \theta$ и найдется точка $x \in \bigl(ay \cup yb\bigr) \cap B_\delta(x_0)$ с $f(x) = z$. Пусть для определенности $x \in ay$. Тогда $\angle byx = \angle bya$, и сравнение дает $|bx| - |by| \geqslant (1-\delta)|xy|$. Поскольку $|ay| - |ax| = |xy|$, то $\bigl|f(x)f(y)\bigr| \geqslant (1-\delta)|xy|$. •

3.А.2. Дистанционное отображение $f\colon Y \to \mathbb{R}^n$ называется *δ-прямым*, если его координатные функции $(1-\delta)$-открыты и для любого $j \in \{1,\dots,n\}$ и любых точек x, $y \in Y$, $(1-\delta)$-разделенных координатой f_j, выполняется неравенство

$$\bigl|f_i(x)f_i(y)\bigr| \leqslant \delta|xy|$$

для всех $i \neq j$.

Ключевым свойством δ-прямого отображения является его θ-открытость. В следующей лемме удобно воспользоваться l^1-нормой $|x| = \sum_i |x_i|$ на $\mathbb{R}^n$.

3.4. Лемма. *Если Y — полное метрическое пространство, то любое δ-прямое дистанционное отображение $f\colon Y \to (\mathbb{R}^n, |\ |)$ является θ-открытым.*

Доказательство. Пусть точки $y \in Y$, $z \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $|f(x)z| < \sigma$. Достаточно найти $x \in Y$ с $|f(x)z| \leqslant \delta\,|f(y)z|$ и $\theta|xy| \leqslant |f(y)z|$. Это позволяет построить рекурсивно последовательность Коши $\{x_k\} \subset Y$ с $|f(x_k)z| \leqslant \delta^k\,|f(y)z| \to 0$ при $k \to \infty$ и $\theta|x_k y| \leqslant |f(y)z|$. Для ее предела x_∞ будем иметь $f(x_\infty) = z$ и $\theta|yx_\infty| \leqslant |f(y)f(x_\infty)|$.

Пусть $f = (f_1,\dots,f_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n)$. Согласно условию, $\bigl|f_1(y)z_1\bigr| \leqslant \bigl|f(y)z\bigr| < \sigma$. Поэтому найдется точка $y_1 \in Y$ с $f_1(y_1) = z_1$ и $\bigl|f_1(y_1)f_1(y)\bigr| \geqslant (1-\delta)|yy_1|$. Тогда для $i \geqslant 2$ имеем

$$\bigl|f_i(y)f_i(y_1)\bigr| \leqslant \delta|yy_1| \leqslant \delta\bigl|f(y)z\bigr|.$$

В частности,

$$\bigl|f_2(y_1)z_2\bigr| \leqslant \bigl|f_2(y_1)f_2(y)\bigr| + \bigl|f_2(y)z_2)\bigr| \leqslant (1+\delta)\bigl|f(y)z\bigr| \simeq \bigl|f(y)z\bigr|.$$

Повторяя это рассуждение для f_2, находим $y_2 \in Y$ с $f_2(y_2) = z_2$, $\bigl|f_2(y_1)f_2(y_2)\bigr| \geqslant (1-\delta)|y_1y_2|$ и $\bigl|f_i(y_1)f_i(y_2)\bigr| \leqslant \delta|y_1y_2|$ для $i \neq 2$. В частности,

$$\bigl|f_1(y_2)z_1\bigr| = \bigl|f_1(y_2)f_1(y_1)\bigr| \leqslant \delta|y_1y_2| \leqslant \delta\bigl|f_2(y_1)z_2\bigr| \leqslant \delta\bigl|f(y)z\bigr|.$$

После n шагов находим требуемую точку $x = y_n$, для которой $s|xy| \leqslant |f(y)z|$ с $s = (1-\delta)/n \simeq \theta$. $\bullet$

3.A.3. Основным примером δ-прямого дистанционного отображения является отображение, ассоциированное с дистанционным репером.

Набор $\Phi = \{x_0; a_i, b_i, i = 1, \dots, n\}$ точек пространства X называется *дистанционным репером*, если

(i) $|x_0 a_i|, |x_0 b_i| \simeq \theta$, $i = 1, \dots, n$;

(ii) $|\pi - \angle a_i x b_i|, |\pi/2 - \angle a_i x a_j|, |\pi/2 - \angle a_i x b_j|, |\pi/2 - \angle b_i x b_j| < \delta$ для всех $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, $i \neq j$ и всех точек $x \in B_\delta(x_0)$.

Такой дистанционный репер определяет ассоциированное с ним дистанционное отображение $f = f_\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ с координатными функциями $f_i = f_{a_i, b_i}$.

Будем говорить, что точка $c \in Y$ лежит δ-между точками a, $b \in Y$, если

$$|ac| + |cb| \leqslant |ab| + \delta \min\{|ac|, |cb|\}.$$

3.5. Лемма. *Пусть* $\Phi = \{x_0; a_i, b_i, i = 1, \dots, n\}$ *— дистанционный репер в* X. *Тогда ассоциированное дистанционное отображение* $f = f_\Phi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n$ *является δ-прямым.*

Доказательство. Из A.1 и леммы 3.3 следует, что f является дистанционным отображением, координатные функции которого $(1-\delta)$-открыты.

Пусть $j \in \{1, \dots, n\}$ и точки x, $y \in B_\delta(x_0)$ $(1-\delta)$ разделены функцией f_j. Тогда поскольку функция f_j является 1-липшицевой, то каждая из точек x, y δ-разделяет другую с одной из вершин a_j, b_j репера. Для определенности считаем, что y лежит δ-между b_j и x, а точка x лежит δ-между a_j и y.

Пусть точка $y' \in x b_j$ определена условием $|xy'| = |xy|$. Тогда, пользуясь сравнением, получаем $|yy'| \leqslant \delta^{1/2}|xy| \simeq \delta|xy|$ и $|f_i(y) f_i(y')| \leqslant |yy'| \leqslant \delta|xy|$. С другой стороны, в силу свойства (ii) из определения дистанционного репера имеем $|f_i(x) f_i(y')| \leqslant \delta|xy|$ для $i \neq j$, а значит, $|f_i(x) f_i(y)| \leqslant \delta|xy|$. •

Теорема 3.1 вытекает из лемм 3.4, 3.5 и следующего предложения.

3.6. Предложение. *В условиях теоремы* 3.1 *найдется дистанционный репер* $\Phi = \{x_0; a_i, b_i, i = 1, \dots, n\}$ *в шаре* $B_\theta(x_0)$, *для которого ассоциированное дистанционное отображение* $f_\Phi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n$ *является инъективным.*

Так как шары $B_\theta(x_0)$, $B_\theta(0)$ являются σ-близкими в метрике $|\ |_{\mathrm{GH}}$, то найдутся δ-сети $G \subset B_\theta(x_0)$, $H \subset B_\theta(0)$ и биекция $h : G \to H$ с искажением $\mathrm{dis}(h) < \sigma$. Пусть $\underline{\Phi} = \{0; e_i, -e_i, i = 1, \dots, n\}$ — стандартный дистанционный репер в

$B_\theta(0) \subset \mathbb{R}^n$, где $\{e_i\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ (здесь мы используем l^2-норму $\|x\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ на $\mathbb{R}^n$). Не ограничивая общности, считаем, что $\underline{\Phi} \subset H$, $x_0 \in G$ и $h(x_0) = 0$. Положим $\Phi = h^{-1}(\underline{\Phi})$. Тот факт, что Φ является дистанционным репером, вытекает из следующей оценки углов, где оценка снизу является ключевой.

3.7. Лемма. *Если a, $b \in G$ и $|ax_0|$, $|bx_0| \simeq \theta$, то в условиях предложения 3.6 для $\underline{a} = h(a)$, $\underline{b} = h(b) \in H$ имеем*

$$\angle \underline{a}0\underline{b} - \delta \leqslant \angle axb \leqslant \angle \underline{a}0\underline{b} + \delta$$

для всех $x \in B_\delta(x_0)$.

Доказательство. Оценка сверху очевидна: длины сторон $\overline{a}\,\overline{b}$, $\underline{a}\,\underline{b}$ треугольника сравнения $\overline{a}\,\overline{x}\,\overline{b} \subset M_\kappa$ и треугольника $\underline{a}0\underline{b} \subset \mathbb{R}^n$ отличаются не более, чем на σ, поскольку $|\kappa| \simeq \sigma$, стороны $\overline{a}\,\overline{x}$, $\underline{a}0$ и $\overline{b}\,\overline{x}$, $\underline{b}0$ имеют длины $\simeq \theta$, а их отличия имеют масштаб $\delta \prec \theta$. Поэтому

$$\angle axb \leqslant \angle \overline{a}\,\overline{x}\,\overline{b} \leqslant \angle \underline{a}0\underline{b} + \delta.$$

Оценка снизу опирается на продолжимость геодезических. Найдется такая точка $c' \in B_\theta(x_0)$, что $|c'x_0| \simeq \theta$ и $ax \subset ac'$. Возьмем ближайшую к c' точку $c \in G$, $|cc'| < \delta$. Сравнение углов дает неравенство $\angle cxc' < \delta\theta^{-1} \simeq \delta$, а значит, $\angle axc \geqslant \pi - \delta$. Согласно оценке, сверху имеем

$$\angle \underline{a}0\underline{c} \geqslant \angle axc - \delta \geqslant \pi - \delta.$$

Пользуясь тем, что точки $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, 0 лежат в $\mathbb{R}^n$, отсюда получаем неравенство

$$\angle \underline{a}0\underline{b} + \angle \underline{b}0\underline{c} \leqslant \pi + \delta.$$

Поэтому $\angle axb \geqslant \angle axc - \angle bxc \geqslant \pi - \delta - (\angle \underline{b}0\underline{c} + \delta) \geqslant \angle \underline{a}0\underline{b} - \delta$. •

Для завершения доказательства предложения 3.6, а вместе с этим и теоремы 3.1, остается доказать инъективность дистанционного отображения.

Допустим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых x, $y \in B_\delta(x_0)$, $x \neq y$. Пользуясь продолжимостью геодезических, находим точки c', $d' \in B_\theta(x_0)$, $|c'x_0|$, $|d'x_0| \simeq \theta$, для которых $x \in yc'$, $y \in xd'$. Выберем точки c, $d \in G$, ближайшие к c' и d' соответственно, и положим $\underline{c} = h(c)$, $\underline{d} = h(d)$.

Представим множество $\{1, \ldots, n\}$ как дизъюнктное объединение $I_c \cup I_d$, где $i \in I_c$ тогда и только тогда, когда $|b_i x| - |b_i y| = |a_i x| - |a_i y| \geqslant 0$.

Если $i \in I_c$, то $\angle yxa_i$, $\angle yxb_i < \pi/2$, а значит, $\angle a_i xc'$, $\angle b_i xc' > \pi/2$. Поэтому

$$\|\underline{c}\,\underline{a}_i\| \geqslant \left(\|\underline{a}_i\|^2 + \|\underline{c}\|^2\right)^{1/2} - \delta, \qquad \|\underline{c}\,\underline{b}_i\| \geqslant \left(\|\underline{b}_i\|^2 + \|\underline{c}\|^2\right)^{1/2} - \delta$$

и аналогичные неравенства имеют место для $\|\underline{d}\,\underline{a}_j\|$, $\|\underline{d}\,\underline{b}_j\|$, $j \in I_d$.

Эти неравенства вместе с $\|\underline{c}\|$, $\|\underline{d}\| \simeq \theta$ означают, что $\underline{c}$ лежит δ-почти в ортогональном дополнении к подпространству $\langle \underline{a}_i \mid i \in I_c \rangle \subset \mathbb{R}^n$, а $\underline{d}$ лежит δ-почти в ортогональном дополнении к $\langle \underline{a}_j \mid j \in I_d \rangle$, в частности множества I_c, I_d не пусты. В этом случае $\|\underline{c}\,\underline{d}\| \leqslant \left(\|\underline{c}\|^2 + \|\underline{d}\|^2\right)^{1/2} + \delta$. С другой стороны, $\|\underline{c}\,\underline{d}\| \geqslant |\underline{c}'\,\underline{d}'| - \delta \geqslant \|\underline{c}\| + \|\underline{d}\| - \delta$, что невозможно ввиду того, что $\|\underline{c}\|$, $\|\underline{d}\| \simeq \theta$ и $\delta \prec \theta$. Этим завершается доказательство предложения 3.6 и теоремы 3.1. ●

3.B. Структура пространства направлений. Пространства направлений для пространств ограниченной сверху кривизны изучались в работах [H1, N2, KL, LS1, LS2].

3.B.1. В пространстве X ограниченной сверху кривизны для любых двух геодезических отрезков с общей вершиной определен угол $\alpha \in [0, \pi]$ между ними в этой вершине. Для точки $x \in X$ определяют Σ_x^* как множество классов эквивалентных геодезических отрезков с общей вершиной x, причем два таких отрезка эквивалентны, если угол между ними в точке x равен нулю. Угол определяет *угловую метрику* на Σ_x^*, которая, вообще говоря, не является полной (угловая метрика полна, если, например, X локально компактно и имеет продолжимые геодезические).

Пространством направлений в точке x называется пополнение Σ_x пространства Σ_x^* в угловой метрике. Далее мы рассматриваем на Σ_x наряду с угловой метрикой соответствующую внутреннюю метрику α (при этом $\alpha(v, w) = \infty$ для v, $w \in \Sigma_x$, лежащих в различных компонентах связности). Угловая метрика совпадает с α на расстояниях $< \pi$.

3.8. Теорема. *Пусть X — локально-компактный 2-полиэдр с метрикой ограниченной сверху кривизны и продолжимыми геодезическими. Тогда для любой точки $x \in X$ пространство направлений Σ_x с внутренней метрикой α является конечным графом без периферических вершин и с систолой $\mathrm{sys}_\alpha(\Sigma_x) \geqslant 2\pi$.*

Касательный конус T_xX пространства X ограниченной сверху кривизны в точке $x \in X$ определяется как евклидов конус над пространством направлений, $T_xX = C\Sigma_x$. Имеется естественное отображение $\log_x : U \to T_xX$, определенное в $U = B_r(x) \subset X$ для $0 < r < r(x)$, $\log_x(x') = (v, |xx'|)$, где $v \in \Sigma_x$ — направление геодезического отрезка xx' в x. При этом $\mathrm{Lip}(\log_x) \leqslant 1 + o(r)$, и если X — пространство неположительной кривизны, то $\mathrm{Lip}(\log_x) \leqslant 1$. Используя это отображение, нетрудно показать (см. [N2, KL, Бу]), что если X локально-компактно и имеет продолжимые геодезические, то T_xX является пределом по Громову–Хаусдорфу последовательности пунктированных пространств $(\lambda X, x)$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому T_xX является полным локально-компактным пространством неположительной кривизны с продолжимыми геодезическими. Следовательно, пространство направлений Σ_x имеет кривизну $\leqslant 1$, и $\mathrm{sys}_\alpha(\Sigma_x) \geqslant 2\pi$. Таким образом, для доказательства теоремы 3.8 достаточно показать, что пространство Σ_x одномерно. Для этого мы рассмотрим цепи направлений и итерированные касательные конусы и воспользуемся теоремой 3.1.

3.B.2. Цепи направлений и итерированные касательные конусы. Пусть X — локально-компактное пространство ограниченной сверху кривизны с продолжимыми геодезическими. Согласно предыдущему, для любой точки $x \in X$ пространство направлений Σ_x компактно, имеет кривизну $\leqslant 1$ и продолжимые геодезические. Это позволяет индуктивно определить пространство направлений $\Sigma_{x;v_1,\dots,v_k}$ пространства $\Sigma_{x;v_1,\dots,v_{k-1}}$ в точке $v_k \in \Sigma_{x;v_1,\dots,v_{k-1}}$, где $\Sigma_{x;v_1,\dots,v_{k-1}} \rightleftharpoons \Sigma_x$ для $k = 1$. Набор $c = (x; v_1, \dots, v_k)$ называется *цепью направлений* в точке x, число $|c| = k$ — *длиной* цепи c. Ясно, что цепь c является максимальной тогда и только тогда, когда v_k — изолированная точка пространства $\Sigma_{x;v_1,\dots,v_{k-1}}$.

С учетом сказанного выше теорема 3.8 непосредственно вытекает из следующего утверждения.

3.9. Предложение. *Любая цепь направлений c в локально-конечном 2-полиэдре X с полной метрикой ограниченной сверху кривизны имеет длину $|c| \leqslant 2$.*

Для доказательства привлечем итерированные касательные конусы.

Пространство направлений касательного конуса T_xX в точке (v,t), $t>0$ изометрично сферической надстройке над $\Sigma_{x;v}$. Поэтому касательный конус $T_{(v,t)}(T_xX)$ изометричен метрическому произведению $(C\Sigma_{x;v})\times\mathbb{R}$. Для цепи направлений $c=(x;v_1,\dots,v_k)$ и набора $t=(t_1,\dots,t_k)$ положительных чисел (обозначение: $t>0$) определим $T_{tc}X$ индуктивно как касательный конус к $T_{t'c'}X$ в точке (v_k,t_k), где $t'=(t_1,\dots,t_{k-1})$, $c'=(x;v_1,\dots,v_{k-1})$. Ясно, что пространство $T_{tc}X$ изометрично произведению $(C\Sigma_c)\times\mathbb{R}^k$. Если цепь c максимальна, то $T_{tc}X=\mathbb{R}^{|c|}$.

Для каждой точки $q=(v,t)\in T_xX$ определен логарифм $\log_q\colon T_xX\to T_q(T_xX)$, который является сюръективным и нерастягивающим отображением, поскольку касательный конус T_xX является полным односвязным пространством неположительной кривизны. Это позволяет индуктивно определить отображение $\log_{q,tc}\colon T_xX\to T_{tc}X$ для любой цепи направлений $c=(x;v_1,\dots,v_k)$ и любого набора $t=(t_1,\dots,t_k)>0$ как композицию соответствующих логарифмов. При этом $\log_{q,tc}$ не растягивает.

Для метрического компакта K и числа $\nu>0$, очевидно, имеем $c_K(\nu)=\sup_A|A|<\infty$, где супремум берется по всем подмножествам $A\subset K$, состоящим из ν-разделенных точек.

3.10. Лемма. *Пусть X — полное локально-компактное пространство ограниченной сверху кривизны с продолжимыми геодезическими и пусть $x\in X$. Тогда длина любой цепи направлений c в X с началом в x не превосходит $c_K(\nu)/2$, где $K\subset T_xX$ — единичный шар с центром в вершине o конуса T_xX, $\nu=\sqrt{2}/2$.*

Доказательство. Допустим, что найдется цепь направлений c длины $|c|>c_K(\nu)/2$. Выберем набор $t=(t_1,\dots,t_{|c|})>0$ с $|t|=t_1+\dots+t_{|c|}\leqslant 1/2$. Так как $T_{tc}X=(C\Sigma_c)\times\mathbb{R}^{|c|}$, то в замкнутом шаре $B\subset T_{tc}X$ радиуса $1/2$ с центром в вершине конуса $T_{tc}X$ найдется не менее $2|c|$ ν-разделенных точек. Их прообразы при отображении $\log_{o,tc}\colon T_xX\to T_{tc}$ лежат в K, так как $1/2+|t|\leqslant 1$. Выбирая в каждом из прообразов по точке, получаем ν-разделенное множество мощности $2|c|>c_K(\nu)$ в K, поскольку $\log_{o,tc}$ не растягивает. Противоречие. •

Доказательство предложения 3.9. Допустим, что найдется цепь направлений $c=(x;v_1,\dots,v_k)$ в X с $k\geqslant 3$. В силу леммы 3.10 можно считать, что цепь c максимальна, в частности, для любого набора $t=(t_1,\dots,t_k)>0$ имеем $T_{tc}X=\mathbb{R}^k$.

Пусть $\sigma\prec\delta\prec\theta$ — иерархия масштабов с $1\simeq\theta$. Так как касательный конус T_xX является пределом по Громову–Хаусдорфу пунктированных пространств

$(\lambda X, x)$ при $\lambda \to \infty$, то найдется такое $\lambda > 0$ с $\lambda^{-1} \simeq \sigma$, что

$$|B_\theta(x)B_\theta(o)|_{\mathrm{GH}} < \sigma$$

для шаров $B_\theta(x) \subset \lambda X$, $B_\theta(o) \subset T_x X$, где o — вершина конуса $T_x X$. Итерируя эту конструкцию и пользуясь тем, что $T_{tc}X = \mathbb{R}^k$, для любой грани $f \subset X$, смежной с x, находим точку $x' \in f$, сколь угодно близкую к x в X, и такую, что

$$|B_\theta(x')B_\theta(0)|_{\mathrm{GH}} < \sigma$$

для шаров $B_\theta(x') \subset f \subset \lambda X$, $B_\theta(0) \subset \mathbb{R}^k$. Согласно теореме 3.1, шар $B_\delta(x') \subset f$ билипшицево гомеоморфен открытому подмножеству в $\mathbb{R}^k$. Это противоречит тому предположению, что $k \geqslant 3$, поскольку грань f — двумерная поверхность. •

3.C. Гомотопическая эквивалентность пространства направлений линку.

3.11. Предложение. *Пусть X — локально-конечный 2-полиэдр с полной метрикой ограниченной сверху кривизны. Тогда для любой точки $x \in X$ пространство направлений Σ_x гомотопически эквивалентно линку Λ_x.*

Известно, что если (связные) пространства X, Y клеточны, то всякая слабая гомотопическая эквивалентность $X \to Y$, т.е. отображение, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп π_n при всех $n \geqslant 0$, является гомотопической эквивалентностью (см. [РФ, гл. 5, §4]). В условиях предложения 3.11 пространство Σ_x является конечным графом, согласно теореме 3.1, в частности, Σ_x — клеточное пространство. Поэтому предложение 3.11 непосредственно вытекает из следующего утверждения.

3.12. Предложение. *Пусть X — локально-конечный симплициальный комплекс с полной метрикой ограниченной сверху кривизны и продолжимыми геодезическими. Тогда для любой точки $x \in X$ пространство направлений Σ_x слабо гомотопически эквивалентно линку Λ_x.*

3.13. Замечание. Напомним, что известны примеры метрик кривизны $\leqslant 1$ на сфере S^n, $n \geqslant 5$, в которых для некоторых точек $x \in S^n$ пространство направлений Σ_x не гомеоморфно линку $\Lambda_x = S^{n-1}$ для стандартной PL-структуры на S^n (см. [Бер2]). В этих примерах Σ_x является надстройкой над неодносвязной гомологической сферой и гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}. Это согласуется с предложением 3.12 и не противоречит решению гипотезы Пуанкаре в размерностях $\geqslant 4$, поскольку Σ_x не является многообразием. Вопрос А. Д. Александрова, гомеоморфно ли пространство направлений Σ_x n-мерного многообразия X с полной метрикой ограниченной сверху кривизны сфере S^{n-1}, остается открытым для $n = 3, 4$. Из предложения 3.12 вытекает лишь, что Σ_x слабо гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}. Мы не знаем даже для $n = 3$, является ли Σ_x конечным 2-полиэдром? С другой стороны, нетрудно привести примеры конечных 2-полиэдров Σ с полной метрикой ограниченной кривизны и продолжимыми геодезическими, гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных сфере S^2.

Пусть X — полное локально-компактное пространство ограниченной сверху кривизны с продолжимыми геодезическими, $x \in X$, $r(x)$ — радиус выпуклости в точке x, $0 < r < r(x)$. Фиксируем иерархию масштабов $\delta \prec \epsilon \prec \theta$ с $r \simeq \theta$.

3.C.1. Прямые симплексы. Пусть Δ — стандартный упорядоченный симплекс. Предположим, что отображение $f_0\colon \mathrm{ske}_0(\Delta) \to B_r(x)$ удовлетворяет условиям

(i) $|xf_0(v)| \simeq \theta$;
(ii) $|f_0(v)f_0(w)| \leqslant \epsilon$

для всех $v, w \in \mathrm{ske}_0(\Delta)$. Тогда формула $f(vt) = f(v)f(t)$, $v \in \mathrm{ske}_0(\Delta)$, t — точка на грани, младшей для v, индуктивно определяет прямой сингулярный симплекс $f\colon \Delta \to B_r(x) \setminus x$ продолжающий f_0.

3.C.2. Выпрямление сингулярного симплекса. *Пусть $g\colon \Delta \to B_r(x)$ — сингулярный симплекс диаметра $\leqslant \epsilon$, удаленный на расстояние $\simeq \theta$ от центра x. Тогда существует прямой симплекс $f\colon \Delta \to B_r(x) \setminus x$, гомотопный симплексу g в $B_r(x) \setminus x$, связанно на $\mathrm{ske}_0(\Delta)$.*

Доказательство стандартно и проводится индукцией по числу вершин. Сравнение с модельным пространством позволяет контролировать размер изготовляемой гомотопии. •

3.C.3. Спуск из пространства направлений. *Для любого конечного набора $\alpha_i\colon \Delta_i \to \Sigma_x$ сингулярных симплексов диаметра $\leqslant \epsilon$ существует $\rho \simeq \delta$ со свойством:*

для любого i можно найти такой прямой симплекс $\beta_i\colon \Delta_i \to B_\rho(x) \setminus x$, что отображение $\log_x \circ \beta_i$ гомотопно α_i при помощи гомотопии H_i, связанной в вершинах барицентрического подразделения $\mathrm{ba}\,\Delta_i$. При этом если $\Delta_j \subset \Delta_i$ — грань, то $\beta_j = \beta_i|\Delta_j$ и $H_j = H_i|\Delta_j \times [0,1]$.

Доказательство. Согласование достигается переходом к барицентрическому подразделению $\mathrm{ba}\,\Delta_i$, поскольку симплексы из $\mathrm{ba}\,\Delta_i$ канонически упорядочены. Выберем точку $v' \in \log_x^{-1}(v)$ в прообразе каждой вершины $v \in \mathrm{ba}\,\alpha_i$ с $|xv'| \simeq \theta$. Так как число выбранных точек конечно, то найдется $\rho \simeq \delta$ со следующим свойством. Пусть $\underline{v} \in xv'$, $|x\underline{v}| = \rho$. Тогда $|\angle vow - \angle \widetilde{\underline{v}}\,\widetilde{x}\,\widetilde{\underline{w}}| \leqslant \delta$ для любых вершин $v, w \in \mathrm{ba}\,\alpha_i$ и каждого i. Здесь $\widetilde{\underline{v}}\,\widetilde{x}\,\widetilde{\underline{w}} \subset M_\kappa$ — треугольник сравнения для $\underline{v}x\underline{w}$, o — вершина конуса T_xX. В частности, $|\underline{v}\,\underline{w}|/\rho \leqslant |vw| + \delta \leqslant \epsilon$. Поскольку $\epsilon\rho \prec \rho$, то 3.C.1 позволяет строить прямые симплексы $\beta_i\colon \Delta_i \to B_r(x)\setminus x$ с вершинами $\{\underline{v} \mid v \in \mathrm{ske}_0(\Delta_i)\}$. При этом $\mathrm{diam}(\beta_i) \simeq \epsilon\rho$, а следовательно, $\mathrm{diam}(\log_x \circ\beta_i) \simeq \epsilon$. Так как $\log_x \circ\beta_i$ и α_i совпадают на $\mathrm{ske}_0(\Delta_i)$, то утверждение 3.C.2, примененное к пространству направлений Σ_x, завершает доказательство. •

Из 3.C.3 немедленно получаем следующий результат.

3.14. Лемма. *Пусть X — полное локально-компактное пространство ограниченной сверху кривизны с продолжимыми геодезическими. Для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $U \in B_r(x)$, $0 < r < r(x)$, отображение $\log_x\colon U\backslash x \to \Sigma_x$ индуцирует эпиморфизм гомотопических групп $\pi_n(U\backslash x) \to \pi_n(\Sigma_x)$ для всех $n \geqslant 0$.* •

Доказательство предложения 3.12. Пусть $V = \mathrm{St}(x)$ — замкнутая окрестность точки x. Пользуясь PL-структурой на V и применяя гомотетию λ с центром в x и коэффициентом < 1, находим окрестность $U = \lambda(V)$, лежащую в шаре $B_r(x) \subset V$ для некоторого $0 < r < r(x)$. Так как $U \setminus x$ гомотопически эквивалентно линку Λ_x, достаточно доказать, что отображение $\log_x\colon U \setminus x \to \Sigma_x$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Согласно лемме 3.14, $\log_x$ индуцирует эпиморфизм всех гомотопических групп.

Допустим, что отображение $\log_x \circ f\colon K \to \Sigma_x$ стягиваемо для некоторого непрерывного отображения $f\colon K \to U \setminus x$, где K — конечный симплициальный комплекс. Для завершения доказательства достаточно показать, что f стягиваемо в $U \setminus x$. Измельчая K и применяя 3.C.2, можно считать, что сужение f на каждый симплекс $\Delta \subset K$ является прямым и $\mathrm{diam}(\Delta) \leqslant \epsilon$. С помощью 3.C.3 находим стягивающую прямую гомотопию $h\colon K \times I \to B_\rho(x) \setminus x \subset U \setminus x$, для которой $\log_x \circ h|K \times 0$ гомотопно $\log_x \circ f$, связанно в вершинах. Остается убедиться, что $h_0 = h|K \times 0$ гомотопно отображению f в $U \setminus x$. Можно считать, что $h_0(v) \in xf(v)$, $|xh_0(v)| = \rho$ для любой вершины $v \in K$, где $\rho \simeq \delta$. Тогда диаметр любого симплекса $h_0(\Delta)$ не превосходит $\rho\epsilon/r \prec \rho$, что позволяет построить гомотопию между f и h_0, лежащую в $B_r(x) \setminus x$. Применяя PL-ретракцию $V \to U$, выдавливаем эту гомотопию в $U \setminus x$. •

§4. Доказательство теорем характеризации (0.6) и аппроксимации (0.8)

4.A. Теорема 0.6 о характеризации вытекает из теорем 0.5, 0.8 и 0.11 следующим образом. Ясно, что полиэдр $X \in \mathcal{R}_\kappa$ получается склеиванием из своих замкнутых максимальных граней $\mathrm{Cl}\, f$, где, напомним, f — компонента связности дополнения $X \setminus \mathrm{esk}_1 X$. Поэтому достаточно доказать, что внутренняя метрика d_f, индуцированная на $\mathrm{Cl}\, f$ метрикой d полиэдра X, принадлежит классу $\mathcal{R}_\kappa$ (см. теорему 0.7), поскольку тогда условия (i) и (ii) (см. Введение) выполняются в силу теоремы 0.5. Согласно теореме 0.11, метрика d может быть равномерно аппроксимирована кусочно-гладкими метриками $d_n \in \mathcal{R}_\kappa$ с равномерно ограниченными вариациями кривизны $|\omega_n|(X \setminus \mathrm{esk}_1 X)$ и поворота краевых ребер (для простоты считаем, что полиэдр X компактен). Поскольку $d \in \mathcal{R}_\kappa$, мы можем воспользоваться теоремой 1.8.4 из [АрБу], согласно которой метрика d_f является равномерным пределом внутренних метрик $d_{n,f}$, индуцированных на $\mathrm{Cl}\, f$ метриками d_n. Будучи кусочно-гладкими, метрики $d_{n,f}$ принадлежат классу $\mathcal{R}_\kappa$ и, согласно теореме 1.5.3 из [АрБу], имеют равномерно ограниченную вариацию поворота края ∂f. По теореме 0.8 (а, точнее, по лемме 2.3) метрика d_f принадлежит классу $\mathcal{R}_\kappa$. •

4.0. Следствие. *Любое существенное ребро 2-полиэдра $X \in \mathcal{R}_\kappa$ является кривой с конечной вариацией поворота со стороны любой максимальной грани, смежной с этим ребром.* •

Доказательство теоремы аппроксимации. Оно требует тщательного изучения локальной геометрии существенного 1-остова. Такое изучение проводится в разделах 4.B и 4.C, где ключевой является лемма 4.6. Сама аппроксимация строится в разделе 4.D.

4.B. Регулярные и сингулярные направления. Пусть X — локально конечный 2-полиэдр с метрикой ограниченной сверху кривизны и продолжимыми геодезическими. Согласно теореме 3.8 и предложению 3.11, пространство направлений Σ_x в точке $x \in X$ является конечным графом без периферических вершин, гомотопически эквивалентным линку Λ_x. Считаем, что каждая вершина $v \in \Sigma_x$ имеет степень по меньшей мере три, т.е. не имеет окрестности, гомеоморфной интервалу.

Вершины графа Σ_x будем называть *сингулярными* направлениями, а остальные точки — *регулярными* направлениями.

Регулярные направления обладают следующим естественным свойством.

4.1. Лемма. *Для любого ребра $\xi \subset \Sigma_x$ имеется единственная грань $f_\xi \subset X$, смежная с x, такая, что если $v \in \xi$, то некоторый начальный интервал $(xx']$ любого геодезического отрезка $xx'' \in v$ лежит в f_ξ.*

Доказательство. Фиксируем иерархию масштабов $\sigma \prec \delta \prec \theta$ с $1 \simeq \theta$. Пусть $v \in \xi$. Найдется такое $R = R(v) \simeq \theta$, что шар $B_\theta(Rv) \subset T_xX$ изометричен евклидову шару $B_\theta(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $xx'' \in v$ для некоторой точки $x'' \in X$. Найдутся точка $x' \in xx''$ с $|xx'| \simeq \sigma$ и число $\lambda > 0$ с $\lambda^{-1} \simeq \sigma$ такие, что шар $B_\theta(x') \subset \lambda X$ σ-близок к шару $B_\theta(Rv)$ в метрике $|\ |_{\mathrm{GH}}$, точнее, $\log_x$ является биекцией между некоторыми δ-сетями $A' \subset B_\theta(x')$ и $A \subset B_\theta(Rv)$ с искажением $\simeq \sigma$. Согласно теореме 3.1, шар $B_\delta(x') \subset B_\theta(x')$ билипшицево гомеоморфен открытому подмножеству в $\mathbb{R}^2$. Поэтому $x' \in f_v$ для некоторой грани $f_v \subset X$.

Более того, из предыдущего вытекает, что для любого положительного $t \leqslant \lambda^{-1}$ шар $B_\theta(x'_t) \subset t^{-1}X$ также σ-близок к шару $B_\theta(Rv)$, где $x'_t \in xx'$, $|xx'_t| = t|xx'|$ в исходной метрике пространства X. Поэтому

$$\bigcup_{0<t\leqslant\lambda^{-1}} B_{\delta t}(x'_t) \subset f_v,$$

где шары берутся в X. В частности, $(xx'] \subset f_v$, грань f_v смежна с x, и для всех $v' \in \xi$, достаточно близких к v, имеем $f_{v'} = f_v$. Поэтому $f_v = f_\xi$ не зависит от выбора $v \in \xi$. $\bullet$

Пусть $x \in \mathrm{esk}_1 X$. Будем говорить, что существенное ребро $e \subset X$, выходящее из x, имеет направление $v_e \in \Sigma_x$, если направления геодезических отрезков xx', $x' \in e$, сходятся к v_e в Σ_x при $x' \to x$.

4.2. Предложение. *Пусть X — локально-конечный 2-полиэдр с метрикой ограниченной сверху кривизны и продолжимыми геодезическими и пусть $x \in \mathrm{esk}_1 X$. Тогда любое существенное ребро $e \subset X$, выходящее из x, имеет направление $v_e \in \Sigma_x$, и при этом v_e сингулярно.*

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда множество направлений $A \subset \Sigma_x$, предельных для xx' при $e \ni x' \to x$, содержит регулярное направление $v \in \xi$, где ξ — ребро графа Σ_x. Согласно лемме 4.1, для направлений v', $v'' \in \xi$, разделенных на ξ направлением v, начальные интервалы $(xy]$ и $(xz]$ геодезических отрезков в направлениях v' и v'' соответственно, лежат в грани

f_ξ. Поэтому для точек $x' \in e$, достаточно близких к x, геодезический отрезок xx' пересекает один из отрезков xy, xz по крайней мере в двух точках и не совпадает с ним. Это противоречит тому, что X — пространство ограниченной сверху кривизны. •

4.3. Лемма. *В условиях предложения* 4.2 *каждое сингулярное направление* $v \in \Sigma_x$ *является предельным для некоторой последовательности направлений* $v_n \in \Sigma_x$ *геодезических отрезков* xx_n, *где* $x_n \in \mathrm{esk}_1 X$.

Доказательство. Фиксируем иерархию масштабов $\sigma \prec \delta \prec \theta$, где $1 \simeq \theta$, и допустим, что утверждение неверно. Тогда в силу предложения 4.2 можно считать, что угол $|vv_e|$ не меньше θ для направления $v_e \in \Sigma_x$ любого существенного ребра $e \subset X$, выходящего из x.

Найдется такая точка $x' \in X$ с $xx' \in v$, $|xx'| \simeq \sigma$, и такое число $\lambda > 0$ с $\lambda^{-1} \simeq \sigma$, что шар $B_r(x') \subset \lambda X$ σ-близок в метрике $|\ |_{\mathrm{GH}}$ к шару $B_r(v) \subset T_x X$, $r \simeq \theta$, где мы отождествляем точку $v \in \Sigma_x$ с $(v, 1) \in T_x X$. Можно считать, что шар $B_r(v)$ изометричен объединению p евклидовых полукругов D_i радиуса r с общим диаметром $v'v''$, где $p \geqslant 3$ — степень вершины v в графе Σ_x. Пусть $w_i \in D_i$ — наиболее удаленная от диаметра точка. Тогда найдутся такие точки y', y'', $z_i \in B_r(x')$, что отображение $v \mapsto x'$, $v' \mapsto y'$, $v'' \mapsto y''$, $w_i \mapsto z_i$, $i = 1, \ldots, p$, является биекцией между этими наборами точек с искажением $\simeq \delta$. Поэтому $|y'z_i| \leqslant r\sqrt{2} + \delta$ для $i = 1, \ldots, p$ (здесь и далее мы пользуемся метрикой пространства λX).

С другой стороны, из того, что $|vv_e| \geqslant \theta$, следует, что шар $B_r(x')$ лежит в некоторой грани $f \subset X$. Тогда для некоторого $i \in \{1, \ldots, p\}$ точка x' удалена от отрезка $y'z_i$ на расстояние $\simeq \delta$, поскольку $|z_i z_j| \geqslant |z_i x'| + |x' z_j| - \delta$ для $i \neq j$ и $p \geqslant 3$. Поэтому $|y'z_i| \geqslant |y'x'| + |x'z_i| - \delta \geqslant 2r - \delta$, что противоречит оценке $|y'z_i| \leqslant r\sqrt{2} + \delta$. •

Из предложений 3.11, 4.2 и леммы 4.3 немедленно получаем следствие.

4.4. Следствие. *В условиях предложения* 4.2 *для любой точки* $x \in X$ *имеется такой (быть может, пустой) набор* F *поддеревьев линка* Λ_x, *что пространство направлений* Σ_x *получается из* Λ_x *стягиванием поддеревьев из* $T \in F$. •

4.C. Точки с заметной отрицательной кривизной. Пусть X — локально-конечный 2-полиэдр с полной метрикой кривизны не более κ и с продолжимыми геодезическими. *Кривизна* точки $x \in X$ определяется как

$$\omega(x) = (2 - \chi(\Sigma_x))\,\pi - \alpha(\Sigma_x),$$

где $\chi(\Sigma_x)$ — эйлерова характеристика пространства направлений Σ_x, $\alpha(\Sigma_x)$ — его длина относительно внутренней метрики α (см. [BaBu, АрБу]).

4.5. Предложение. *Для любого $\epsilon > 0$ множество*

$$\Omega_\epsilon = \{x \in X \mid \omega(x) \leqslant -\epsilon\}$$

не имеет точек сгущения в X.

Для $p \geqslant 2$ обозначим через $D(p)$ объединение p евклидовых полукругов единичного радиуса с общим диаметром. Пусть точка $x \in X$ не является существенной вершиной. Тогда ее линк Λ_x гомеоморфен границе $\partial D(p)$, где $p = p(x) \geqslant 2$ — степень соответствующего ребра и $p = 2$ тогда и только тогда, когда $x \notin \mathrm{esk}_1 X$. Согласно следствию 4.4, пространство направлений Σ_x гомеоморфно линку Λ_x или букету из $p-1$ окружностей. В первом случае для его длины в угловой метрике, очевидно, имеем $\alpha(\Sigma_x) \geqslant p\pi$. Во втором случае $\alpha(\Sigma_x) \geqslant 2(p-1)\pi$. Так как $\chi(\Sigma_x) = 2 - p$, кривизна $\omega(x) = p\pi - \alpha(\Sigma_x)$ точки x неположительна. Считая, не ограничивая общности, что $\kappa > 0$, фиксируем иерархию масштабов $\sigma \prec \epsilon \prec \theta$ с $1/\sqrt{\kappa} \simeq \theta$. Ключевым моментом доказательства предложения 4.5 является следующее утверждение.

4.6. Лемма. *Если для $n \geqslant 2$ и $\lambda > 0$ с $\lambda^{-1} \simeq \sigma$ единичный шар $B_1(x) \subset \lambda X$ удовлетворяет условию*

$$|B_1(x)\,D(n)|_{\mathrm{GH}} < \sigma,$$

то $p = p(x) \leqslant n$ и $\alpha(\Sigma_x) < p\pi + \epsilon$. В частности, $\omega(x) > -\epsilon$, и если $\epsilon < (p-2)\pi$ для $p \geqslant 3$, то пространство направлений Σ_x гомеоморфно линку Λ_x и его кратчайшее ребро $\xi \subset \Sigma_x$ имеет длину $\alpha(\xi) \geqslant \pi - \epsilon/(p-2)$.

Доказательство. Дополним нашу иерархию масштабом δ с $\sigma \prec \delta \prec \epsilon$. С помощью стандартной квадратной решетки в $\mathbb{R}^2$ с шагом $\delta/\sqrt{2}$ находим δ-сеть в 2-полиэдре $D(n)$ с числом элементов $N = N(\delta)$, удовлетворяющим условию

$\delta^2 N \leqslant n\pi + \delta$. Поскольку шар $B_1(x)$ σ-близок к $D(n)$, найдется δ-сеть A в $B_1(x)$ с числом элементов не более N. Тогда множество $A' = \log_x(A)$ является δ-сетью в шаре $B_1(o) \subset T_x X$ в силу продолжимости геодезических в X и того, что $\mathrm{Lip}(\log_x) \leqslant 1 + \sigma$.

С другой стороны, любая δ-сеть в $B_1(o)$ содержит не менее $N' = 2\delta^{-2} H_2(B_1(o))$ элементов, где H_2 — двумерная мера Хаусдорфа. Так как $2H_2(B_1(o)) = \alpha(\Sigma_x)$, то из предположения $p > n$ следует, что $\delta^2 N' \geqslant p\pi > n\pi + \delta$, в противоречии с оценкой $\delta^2 N \leqslant n\pi + \delta$. Поэтому $p \leqslant n$. Предположение $p = n$ и $\alpha(\Sigma_x) \geqslant p\pi + \epsilon$ приводит к противоречию так же, поскольку $\delta \prec \epsilon$.

Остается рассмотреть более тонкий случай $p < n$. Пользуясь тем, что шар $B_1(x)$ σ-близок к $D(n)$, находим множество $C \subset B_1(x)$, которое является δ-аппроксимацией границы $\partial D(n)$, $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, причем $|C_i| \leqslant \pi/\delta$ для $i = 1, \ldots, n$, и для любого направления $v \in \Sigma_x$ найдется точка $x' \in B_1(x)$ с $xx' \in v$, $|xx'| = 1$ и $|x'C| \leqslant \delta$.

Пусть d, $d' \in D(n)$ — концы сингулярного диаметра полиэдра $D(n)$, $\underline{d}$, $\underline{d}' \in B_1(x)$ — аппроксимирующие их точки. Шары U, $U' \subset \Sigma_x$ радиуса $\simeq \delta$ (метрике α) с центром в $x\underline{d}$, $x\underline{d}' \in \Sigma_x$ соответственно назовем *δ-сингулярными направлениями* (δ-сингулярные направления не обязаны содержать сингулярные направления пространства Σ_x, которых может и не быть вовсе, если $p = 2$).

Допустим, что $\alpha(\Sigma_x) \geqslant p\pi + \epsilon$. Тогда найдется геодезическая ξ длины $\alpha(\xi) \geqslant \pi + \epsilon$ в $\Sigma_x \setminus (U \cup U')$ между U и U'. Выберем точку $v \in \xi$, удаленную от δ-сингулярного направления U на расстояние $\pi/2$. Тогда середина $\overline{v}$ любой кривой $\overline{\xi} \subset \Sigma_x$ длины $\alpha(\overline{\xi}) \leqslant \pi + \delta$ между U и U' удалена на расстояние $\simeq \theta$ от v, поскольку $\delta \prec \epsilon$ и $\mathrm{sys}(\Sigma_x) \geqslant 2\pi$.

Пользуясь продолжимостью геодезических в X, находим точку $x' \in B_1(x)$ с $xx' \in v$, $|xx'| = 1$. Точка x' лежит достаточно далеко от точек $\underline{d}$, $\underline{d}'$, поэтому ближайшая к ней точка $c \in C$, $|x'c| \leqslant \delta$, однозначно определяет δ-дугу C_i, для которой $c \in C_i$. Положим $\underline{C} = \log_x(C_i)$. Можно считать, что на C_i имеется линейный порядок, для которого любые две соседние точки удалены на расстояние $\leqslant \delta$. Тогда то же верно и для $\underline{C}$. Это дает ломаную $\overline{\xi} \subset \Sigma_x$ с множеством вершин $\underline{C}$ между δ-сингулярными направлениями U, U', которая имеет длину $\alpha(\overline{\xi}) \leqslant \delta|C_i| \leqslant \pi + \delta$. При этом ее δ-середина $\overline{v} = \log_x(c)$ удалена от v на расстояние $\simeq \delta \prec \theta$, что противоречит предыдущему. Поэтому $\alpha(\Sigma_x) < p\pi + \epsilon$. •

Доказательство предложения 4.5. Допустим, что $x \in X$ — точка сгущения множества Ω_ϵ. Существенные вершины 2-полиэдра X изолированы, поэтому можно считать, что $x_m \to x$ при $m \to \infty$ для последовательности точек $x_m \in \Omega_\epsilon$, которые не являются существенными вершинами. Более того, считаем, что направления $xx_m \in \Sigma_x$ сходятся к направлению $v \in \Sigma_x$. Пусть θ — угол между v и ближайшим к v сингулярным направлением Σ_x, отличным от v. Для $m \geqslant 1$ положим $\lambda_m = 2\min\{1, \operatorname{tg}\theta\}/|xx_m|$. Тогда для шара $B_1(x_m) \subset \lambda_m X$ имеем

$$|B_1(x_m)\, D(n)|_{\mathrm{GH}} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

где $n \geqslant 2$ — степень вершины v в графе Σ_x. По лемме 4.6 имеем $\omega(x_m) > -\epsilon$ для всех достаточно больших m, что противоречит тому, что $x_m \in \Omega_\epsilon$. •

4.7. Замечание. Одновременно доказано, что множество точек в X, для которых линк не гомеоморфен пространству направлений, не имеет точек сгущения.

Закончим этот раздел двумя леммами, которые будут использоваться при доказательстве теоремы аппроксимации 0.11.

4.8. Лемма. *Допустим, что в условиях леммы* 4.6 $p = p(x) \geqslant 3$. *Пусть точки* $\underline{d}$, $\underline{d}' \in B_1(x)$ δ*-аппроксимируют концы* d, $d' \in D(n)$ *сингулярного диаметра полиэдра* $D(n)$, *где* $\sigma \prec \delta \prec \epsilon$. *Тогда сингулярные направления* v, $v' \in \Sigma_x$ ϵ*-близки к направлениям* $x\underline{d}$, $x\underline{d}' \in \Sigma_x$ *соответственно.*

Доказательство. Если точка x является δ-серединой отрезка $\underline{d}y$ для точки $y \in B_1(x)$, то имеем $|y\underline{d}'| \simeq \sqrt{\delta} \simeq \delta$, поскольку шар $B_1(x)$ σ-близок к $D(n)$. Допустим, что утверждение неверно. Согласно лемме 4.6, для длины $\alpha(\xi)$ любого ребра $\xi \subset \Sigma_x$, имеем $|\alpha(\xi) - \pi| \leqslant \epsilon$. Поэтому можно считать, что направление $x\underline{d}$ составляет угол меньше $\pi - \epsilon$ с сингулярными направлениями v, v'. Так как $p \geqslant 3$, то найдутся по крайней мере два направления w, $w' \in \Sigma_x$, составляющие с $x\underline{d}$ угол π, причем $\alpha(w, w') \geqslant 2\epsilon$. Пользуясь продолжимостью геодезических, находим точки y, $y' \in B_1(x)$ с $xy \in w$, $xy' \in w'$, для которых точка x является δ-серединой отрезков $\underline{d}y$, $\underline{d}y'$. Из оценки $\alpha(w, w') \geqslant 2\epsilon$ следует, что $|yy'| \geqslant \epsilon$. Это противоречит тому, что $|y\underline{d}'|$, $|y'\underline{d}'| \simeq \delta$, так как $\delta \prec \epsilon$. •

4.9. Замечание. Из леммы 4.8 вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ и любой точки $x \in \mathrm{esk}_1 X$ найдется такая ее окрестность U, что для всех $x' \in \mathrm{esk}_1 X \cap U$ направление $x'x \in \Sigma_{x'}$ ϵ-близко к сингулярному направлению $v \in \Sigma_{x'}$, соответствующему отрезку существенного ребра между x и x'. В силу леммы 4.6 можно считать, что при этом угол между сингулярными направлениями v, $v' \in \Sigma_{x'}$ не меньше $\pi - \epsilon$. Поэтому для всех точек $x'' \in \mathrm{esk}_1 X$, достаточно близких к x', имеем

$$|d_x(x') - d_x(x'')| \geqslant (1 - \epsilon^2)|xx'|,$$

где $d_x(x') = |xx'|$. Отсюда, очевидно, следует спрямляемость существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$. Это рассуждение принадлежит Б. Кляйнеру.

4.10. Лемма. *Пусть в условиях леммы 4.8 $|x\underline{d}| = |x'\underline{d}|$ для некоторой точки $x' \in B_\delta(x)$, отличной от x. Тогда угол между направлениями xx', $x\underline{d} \in \Sigma_x$ ϵ-близок к $\pi/2$.*

Доказательство. Ближайшая к $\underline{d}$ точка z отрезка xx' является внутренней и $\angle x'x\underline{d} \leqslant \pi/2$, поскольку $|x\underline{d}| = |x'\underline{d}|$. Пользуясь продолжимостью геодезических, находим точку $y \in B_1(x)$, для которой точка $z \in \underline{d}y$ является δ-серединой отрезка $\underline{d}y$. Допустим, что утверждение неверно. Тогда $\angle \underline{d}'xz \geqslant \pi/2+\epsilon$ и $\angle xz\underline{d}' \leqslant \pi/2-\epsilon$. Поэтому $\angle \underline{d}'zy \geqslant \epsilon$ и $|\underline{d}'y| \simeq \epsilon$. С другой стороны, $|\underline{d}'y| \simeq \delta \prec \epsilon$, поскольку шар $B_1(x)$ σ-близок к $D(n)$ и $|zx| < \delta$. Это противоречит предыдущему. •

4.D. Аппроксимация кусочно-гладкими метриками. Пусть X — компактный 2-полиэдр с метрикой d кривизны не более κ. Аппроксимация метрики d кусочно-гладкими метриками строится следующим образом. Пусть r_d — минимум радиуса выпуклости метрики d.

4.D.1. Изоляция существенных вершин и точек с заметной отрицательной кривизной. Для достаточно малого ϵ, $0 < \epsilon < r_d$, рассмотрим множество $A_\epsilon \subset X$, состоящее из всех существенных вершин и точек $x \in \mathrm{esk}_1 X$ с кривизной $\omega(x) \leqslant -\epsilon$. Нижняя грань α_0 значений угла между различными сингулярными направлениями пространства Σ_x, $x \in X$, положительна, поскольку множество всех существенных вершин конечно, а для точки $x \notin A_\epsilon$ существенного ребра угол между сингулярными направлениями в Σ_x не меньше $\pi-\epsilon$ (см. лемму 4.6), и множество A_ϵ конечно (см. предложение 4.5). Считаем, что $\epsilon \prec \alpha_0$. Найдется такое $\rho > 0$, $\rho \prec \epsilon$, что шары $B_\rho(x)$ с центром в точках $x \in A_\epsilon$ попарно не пересекаются. Более того, считаем ρ настолько малым, что для любой точки $x \in A_\epsilon$ выполнены следующие условия:

1) шар $B_\rho(x)$ не содержит точек $x' \in X$ с $\omega(x') \leqslant -\epsilon$ (см. предложение 4.5);
2) для любого ребра $e \subset \mathrm{esk}_1 X$, выходящего из x, и любой точки $x' \in e \cap B_\rho(x)$ направление $xx' \in \Sigma_x$ ϵ-близко к сингулярному направлению $v_e \in \Sigma_x$, соответствующему ребру e (см. предложение 4.2), а направление $x'x \in \Sigma_{x'}$ ϵ-близко к сингулярному направлению $v'_e \in \Sigma_{x'}$, соответствующему ребру e (см. лемму 4.8).

4.D.2. Триангуляция окрестностей изолированных точек. Пусть $x \in A_\epsilon$. Выберем на каждом существенном ребре e, выходящем из x, точку x_e с $|xx_e| = \rho$.

Пусть F — набор поддеревьев в линке Λ_x, стягиванием которых получается пространство направлений Σ_x (см. следствие 4.4). Тогда из леммы 4.10 и условия 2) легко следует, что для любого дерева $T \in F$ и любых его соседних вершин e, $e' \in T$ отрезок $x_e x_{e'}$ лежит (за исключением своих концов) в грани $f \subset X$, смежной с существенными ребрами e, e', а направление $x_e x_{e'} \in \Sigma_{x_e}$ образует с сингулярными направлениями пространства Σ_{x_e} угол, ϵ-близкий к $\pi/2$.

Любое ребро $\xi \subset \Lambda_x$, не лежащее в F, мы отождествляем с соответствующим ребром пространства Σ_x. Пользуясь продолжимостью геодезических и близостью по Громову-Хаусдорфу шара $\rho^{-1}B_\rho(x)$ к единичному шару в касательном конусе $T_x X$, находим ломаную геодезическую c_ξ в грани f_ξ, соответствующей ребру ξ, между точками x_e, $x_{e'}$, соответствующими концам ребра ξ. При этом можно добиться того, что вершины ломаной c_ξ удалены на расстояние ρ от x, длина любого звена не превосходит $\epsilon \cdot \rho$, а его конечные звенья ϵ-ортогональны сингулярным направлениям в точках x_e, $x_{e'}$.

Так построенные геодезические ломаные все вместе ограничивают окрестность $U_\rho(x) \subset B_\rho(x)$ точки x. Рассматривая для каждого звена $yy' \subset c_\xi \subset \partial U_\rho(x)$ треугольник сравнения $\bar{x}\bar{y}\bar{y}' \subset M_\kappa$ для треугольника xyy' и склеивая очевидным образом такие треугольники, получаем кусочно-гладкую метрику d_x на $U_\rho(x)$. Эта метрика имеет кривизну не более κ, поскольку $\log_x$ отображает границу $\partial U_\rho(x)$ на Σ_x π_1-инъективно (см. доказательство предложения 3.12).

4.D.3. Триангуляция окрестностей существенных ребер. Дополнение

$$Y_\rho = X \setminus \bigcup_{x \in A_\epsilon} U_\rho(x)$$

является компактным 2-полиэдром с кусочно-геодезической границей, без существенных вершин, и для любой точки $x \in \mathrm{esk}_1 X \cap Y_\rho$ угол между сингулярными направлениями пространства Σ_x не меньше $\pi - \epsilon$. Считаем также, что любое существенное ребро $e \subset Y_\rho$ гомеоморфно отрезку. Найдется такое σ, $0 < \sigma < \epsilon \cdot \rho$, что σ-окрестности различных максимальных существенных ребер Y_ρ попарно не пересекаются.

Рассмотрим такое ребро $e \subset Y_\rho$ и его окрестность $U_\sigma(e)$.

4.11. Лемма. *Найдется такое $\eta_0 > 0$, что для любых различных точек x, $x' \in e$ с $|xx'| < \eta_0$ отрезок xx' образует углы меньше ϵ с сингулярными направлениями пространств Σ_x, $\Sigma_{x'}$, соответствующими отрезку ребра e между x и x'.*

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда найдутся две такие последовательности точек $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \subset e$, что $x_n \neq x'_n$, для отрезка $x_n x'_n$ по крайней мере один из углов, указанных в условии, $\geqslant \epsilon$ для всех $n \geqslant 1$, и $|x_n x'_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Можно считать, что x_n, $x'_n \to x \in e$ и $x \neq x_n$, x'_n.

Предположим сначала, что точка x разделяет на ребре e точки x_n и x'_n для бесконечного набора значений n. Переходя к подпоследовательности, считаем, что это происходит для всех n. Тогда $\angle x_n x x'_n \geqslant \pi - \epsilon$ для всех достаточно больших n, поскольку угол между сингулярными направлениями пространства Σ_x не меньше $\pi - \epsilon$. Поэтому $\angle x x_n x'_n$, $\angle x x'_n x_n \leqslant \epsilon$. С другой стороны, угол между направлением $x_n x \in \Sigma_{x_n}$ и соответствующим сингулярным направлением пространства Σ_{x_n} становится сколь угодно малым при $n \to \infty$ в силу леммы 4.8, и то же верно для $x'_n x \in \Sigma_{x'_n}$. Поэтому для достаточно больших n и для отрезка $x_n x'_n$ выполняется заключение леммы, что противоречит нашему предположению.

Считаем далее, что точка x_n лежит на ребре e между точками x и x'_n.

Пусть $v_n \in \Sigma_{x_n}$, $v'_n \in \Sigma_{x'_n}$ — сингулярные направления, соответствующие отрезку ребра e между точками x_n и x'_n. Можно считать, что угол между направлениями $x_n x'_n$ и v_n не меньше ϵ, так как иначе $\angle x x_n x'_n \geqslant \pi - \epsilon$, и мы приходим к противоречию как выше. Можно считать, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n x'_n|}{|x x'_n|} = \mu.$$

Возможны два случая.

(1) $\mu > 0$. Положим $\lambda_n = 1/|x x'_n|$. Для наглядности в дальнейших рассуждениях будем пользоваться расстоянием в $\lambda_n X$. Шары $B_1(x) \subset \lambda_n X$ сходятся по Громову–Хаусдорфу к шару $B_1(o) \subset T_x X$ при $n \to \infty$. Считаем, что $\log_x$ является биекцией между δ-сетями в $B_1(x)$ и $B_1(o)$ с искажением $< \sigma$ для иерархии масштабов $\sigma \prec \delta \prec \epsilon$. Найдется точка $y_n \in B_1(x)$, $|x y_n| = 1$, для которой $x_n \in x y_n$. Угол между направлениями $x_n x$, $v_n \in \Sigma_{x_n}$ ϵ-близок к π, поэтому $\angle y_n x_n x'_n \geqslant \epsilon$ и $|x'_n y_n| \geqslant \epsilon \cdot \mu$. Считая, что $\delta \prec \epsilon \cdot \mu$, получаем, что направление $x y_n \in \Sigma_x$ достаточно удалено от сингулярных направлений, чтобы отрезок не содержал точек ребра e внутри отрезка $x y_n$ (ср. с леммой 4.1). Это противоречит тому, что $x_n \in x y_n$.

(2) $\mu = 0$. Шар $B_1(x'_n) \in \lambda_n X$ сколь угодно близок по Громову–Хаусдорфу к полиэдру $D(p)$, где $p \geqslant 3$ — степень ребра e, для всех достаточно больших n. Считаем, как выше, что $\log_x$ является биекцией между δ-сетями в $B_1(x'_n)$ и

$D(p) \subset T_xX$ с искажением $< \sigma$ для иерархии масштабов $\sigma \prec \delta \prec \epsilon$. При этом $|x_nx'_n| < \delta$, $|xx_n| \simeq |xx'_n| = 1$ (в метрике λ_nX). Для точки $y_n \in e$ с $|x'_ny_n| = 1$ направление $x'_ny_n \in \Sigma_{x'_n}$ ϵ-близко к сингулярному направлению, соответствующему отрезку ребра e между точками x'_n и y_n, а направление $x_ny_n \in \Sigma_{x_n}$ ϵ-близко к v_n, согласно лемме 4.8. Поэтому, если направление $x'_nx_n \in \Sigma_{x'_n}$ ϵ-близко к v'_n, то $\angle x_nx'_ny \geqslant \pi - \epsilon$ и направление $x_nx'_n \in \Sigma_{x_n}$ ϵ-близко к v_n. Это противоречит нашему предположению. Таким образом, отрезок $x_nx'_n$ образует углы не меньше ϵ с направлениями v_n и v'_n.

Имеются $p-1$ продолжений $s_1x'_n, \dots, s_{p-1}x'_n$ длины 1 отрезка $x_nx'_n$, соответствующих ребрам графа Σ_{x_n}, не содержащих направления $x_nx'_n$. Аналогично имеются $p-1$ продолжений $x_nq_1, \dots, x_nq_{p-1}$ длины 1 отрезка $x_nx'_n$, соответствующих ребрам графа $\Sigma_{x'_n}$, не содержащих направления x'_nx_n. Для соответствующих δ-аппроксимаций s'_i, $q'_j \in D(p)$ имеем $|s'_iq'_j| \geqslant 2 - \delta$, и точки s'_i, q'_j удалены на расстояние $\simeq \epsilon$ от сингулярного диаметра полиэдра $D(p)$ для $1 \leqslant i, j \leqslant p-1$. Поскольку $p \geqslant 3$, имеется по крайней мере одна пара точек s'_i, q'_j, лежащих в одном полукруге, из которых составлен полиэдр $D(p)$. Для этой пары имеем $|s'_iq'_j| \leqslant 2 - \epsilon^2$, что противоречит условию $\delta \prec \epsilon$. •

Отметим два свойства, которые легко вытекают из леммы 4.11.

4.12. Следствие. 1. *Для любых точек x, $x' \in e$ с $|xx'| < \eta_0$ любая точка ребра e между x и x' удалена на расстояние $< \epsilon|xx'|$ от отрезка xx'.*

2. *Для любой точки $y \in Y_\rho$, $|ye| < \eta_0/2$, и любых точек x, $x' \in e$, ближайших к y, $|xy| = |x'y| = |ye|$, имеем $|xx'| < \epsilon|ye|$.* •

4.13. Лемма. *Найдется такое η_1, $0 < \eta_1 < \eta_0$, что для любой (упорядоченной) пары точек x, $x' \in e$ с $|xx'| < \eta_1$ выполняется следующее. Пусть точка $y \in Y_\rho$ такова, что $|xy| \simeq |xx'|/\epsilon$, и направление $xy \in \Sigma_x$ составляет углы, ϵ-близкие к $\pi/2$, с сингулярными направлениями пространства Σ_x. Тогда направление $x'y \in \Sigma_{x'}$ также составляет углы, ϵ-близкие к $\pi/2$, с сингулярными направлениями пространства $\Sigma_{x'}$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 4.11: следует предположить, что утверждение неверно, рассмотреть соответствующую предельную точку $x \in e$ и воспользоваться близостью по Громову-Хаусдорфу ее достаточно малой раздутой окрестности к шару $B_1(o) \subset T_xX$, геометрия которого стандартна. Детали мы оставляем читателю. •

Возвращаясь к триангуляции окрестности $U_\sigma(e)$, выберем η с $0 < \eta < \eta_1$, $\eta/\epsilon \prec \sigma$ и рассмотрим триангуляцию τ ребра e с шагом η, т. е. $|xx'| \simeq \eta$ для любых соседних вершин x, $x' \in e$ триангуляции τ.

Для каждой вершины $x \in \tau$ в каждой грани f, смежной с e, выберем точку $y = y_{x,f}$ так, чтобы $|xy| \simeq \eta/\epsilon$ и направление $xy \in \Sigma_x$ было серединой ребра $\xi \subset \Sigma_x$, соответствующего грани f (см. лемму 4.1). Тогда отрезок xy (за исключением точки x) лежит в f. Если $x' \in \tau$ — соседняя с x вершина и $y' = y_{x',f}$, то $|yy'| \simeq \eta$, $yy' \subset f$, треугольники $xx'y$, $yy'x'$ невырождены, а геодезическая ломаная $c_f \subset f$ с вершинами $y_{x,f}$, $x \in \tau$, не имеет самопересечений и соединяет соответствующие точки границы полиэдра Y_ρ. Это легко вытекает из лемм 4.11, 4.13 и следствия 4.12.

Ломаные c_f, взятые в каждой грани f, смежной с e, ограничивают окрестность $V_\sigma(e) \subset U_\sigma(e)$ ребра e. Рассматривая треугольники сравнения $\overline{x}\,\overline{x}'\overline{y}$, $\overline{y}\,\overline{y}'\overline{x}' \subset M_\kappa$ для треугольников $xx'y$, $yy'x'$, как выше, где x, $x' \in e$ — последовательные вершины триангуляции τ, и склеивая очевидным образом такие треугольники, получаем кусочно-гладкую метрику d_e на $V_\sigma(e)$. Из невырожденности треугольников следует, что эта метрика имеет кривизну не более κ. Более того, объединяя метрики d_e с метриками d_x, $x \in A_\epsilon$ (см. 4.D.2), получаем кусочно-гладкую метрику d_ϵ кривизны не более κ на окрестности

$$W_\epsilon = \bigcup_{x \in A_\epsilon} U_\rho(x) \bigcup_e V_\sigma(e)$$

существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$, в которой он является кусочно-геодезическим. Дополнение $X \setminus W_\epsilon$ является компактной поверхностью кривизны не более κ с кусочно-геодезическим краем. Заметим, что здесь параметр ϵ не является размером окрестности W_ϵ, который есть, скорее, ρ с $\rho|A_\epsilon| \prec \epsilon$.

4.14. Замечание. Чтобы определить метрику d_ϵ, мы следующим образом отождествляем полиэдр P, склеенный из треугольников сравнения, с замкнутой окрестностью $\overline{W}_\epsilon$. Вершины треугольников отображаем в соответствующие им точки в $\overline{W}_\epsilon$, а стороны, не являющиеся существенными ребрами в P, изометрично отображаем в соответствующие им геодезические отрезки (по построению каждый такой отрезок не имеет внутри точек из $\mathrm{esk}_1 X$). Наконец, пользуясь спрямляемостью остова $\mathrm{esk}_1 X$ (см. замечание 4.9), параметризуем пропорционально длине отрезки существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$, соответствующие сторонам треугольников, являющиеся существенными ребрами в P, этими сторонами. Тогда образ границы каждого треугольника в P ограничивает в X область, гомеоморфную диску, и мы продолжаем отображение на весь треугольник, получая требуемый гомеоморфизм $P \to \overline{W}_\epsilon$. Из свойств треугольников сравнения, 4.D.2 и следствия 4.12,1 вытекает, что для любых точек $\overline{x}, \overline{x}' \in P$, лежащих на сторонах некоторого треугольника триангуляции, и их образов x, $x' \in \overline{W}_\epsilon$ имеем $|xx'| \leqslant (1+\epsilon)|\overline{x}\,\overline{x}'|$, или

$$d(x, x') \leqslant (1+\epsilon) d_\epsilon(x, x')$$

в терминах метрик d, d_ϵ.

4.D.4. Триангуляция 2-полиэдра X и равномерная сходимость. Методы равномерной аппроксимации метрик ограниченной сверху кривизны (и даже более общих классов метрик) на компактных поверхностях с кусочно-геодезическим краем описаны в [А3, гл. III]. Аппроксимирующие метрики получаются в результате склеивания рассматриваемой поверхности из треугольников модельного пространства M_κ, диаметры которых $\to 0$. При этом все склеиваемые треугольники невырождены, поэтому аппроксимирующие метрики имеют кривизну не более κ.

Таким образом, для каждого $\epsilon > 0$ находим кусочно-гладкую метрику d_ϵ кривизны не более κ на X, которая равномерно близка к исходной метрике d полиэдра X на компактной поверхности $X \setminus W_\epsilon$, где окрестность W_ϵ существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ описана в 4.D.3. При этом $\bigcap_{\epsilon>0} W_\epsilon = \mathrm{esk}_1 X$ и $\mathrm{esk}_1 X$ является кусочно-геодезическим для любой метрики d_ϵ.

4.15. Лемма. *Метрики d_ϵ сходятся равномерно на X к метрике d при $\epsilon \to 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых точек x, $x' \in X$ и любых $x_\epsilon \to x$, $x'_\epsilon \to x'$ выполняется $d_\epsilon(x_\epsilon, x'_\epsilon) \to d(x, x')$ при $\epsilon \to 0$ (см. [А3, гл. IV]). Поскольку $d_\epsilon \to d$ равномерно на любой компактной поверхности $X \setminus W_{\epsilon_0}$, можно считать, что $x \in \mathrm{esk}_1 X$. Если $x' = x$, то требуемая сходимость $d_\epsilon(x_\epsilon, x'_\epsilon) \to 0$ следует из спрямляемости 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ в метрике d (см. замечание 4.9) и того, что $d_\epsilon \leqslant d$ на $\mathrm{esk}_1 X$ для $\epsilon > 0$ по построению. Теперь можно считать, что $x_\epsilon = x$ и $x'_\epsilon = x' \notin \mathrm{esk}_1 X$ для всех $\epsilon > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда отрезок xx' (в метрике d) пересекает $\mathrm{esk}_1 X$ только в точке x. Тогда для максимального интервала $y_\epsilon x' \subset xx'$, лежащего в $X \setminus W_\epsilon$, имеем $y_\epsilon \to x$ при

$\epsilon \to 0$. Пользуясь равномерной сходимостью $d_\epsilon \to d$ на $X \setminus W_{\epsilon_0}$ и рассмотренным случаем $x' = x$, получаем неравенство

$$\limsup_{\epsilon \to 0} d_\epsilon(x_\epsilon, x'_\epsilon) \leqslant d(x, x'). \qquad (*)$$

В общем случае расстояние $d(x, x')$ можно аппроксимировать длинами геодезических ломаных в X, пересекающих $\mathrm{esk}_1 X$ только в их вершинах и имеющих не более n звеньев, при $n \to \infty$. Индукция по n дает неравенство $(*)$ в общем случае.

Неравенство $d(x, x') \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} d_\epsilon(x_\epsilon, x'_\epsilon)$ вытекает из замечания 4.14, согласно которому $d(x, x') \leqslant (1 + \epsilon) d_\epsilon(x, x')$ для фиксированных x, $x' \in X$ и всех достаточно малых $\epsilon > 0$. •

Теорема 0.11 об аппроксимации для случая $\kappa \leqslant 0$ следует из леммы 4.15, поскольку в этом случае положительная часть кривизны метрики d_ϵ равна нулю, $\omega_\epsilon^+(X \setminus \mathrm{esk}_1 X) = 0$ для любого $\epsilon > 0$.

Считаем далее, что $\kappa > 0$. Для завершения доказательства теоремы аппроксимации достаточно доказать, что площади поверхности $X \setminus \mathrm{esk}_1 X$ относительно метрик d_ϵ равномерно ограничены при $\epsilon \to 0$, $\mathrm{Area}_\epsilon(X \setminus \mathrm{esk}_1 X) \leqslant C < \infty$, где постоянная C не зависит от ϵ. С этой целью воспользуемся основным результатом работы [Pe2], который утверждает следующее.

4.16. Теорема [Pe2]. *Пусть γ — замкнутая спрямляемая кривая длины $< 2\pi/\sqrt{\kappa}$, лежащая в шаре $B_r(x) \subset X$, $r < r(x)$, полного пространства X кривизны не более κ. Тогда в модельном пространстве M_κ существует выпуклая область V и нерастягивающее отображение $\phi\colon V \to X$ (т.е. $\mathrm{Lip}(\phi) \leqslant 1$) с $\phi(\partial V) = \gamma$, которое отображает каждую дугу границы ∂V на дугу кривой γ той же длины.*

Можно считать, что метрика d_ϵ совпадает с метрикой d на поверхности $X \setminus W_\epsilon$. Из построений в 4.D.2 и 4.D.3 легко видеть, что $\mathrm{Area}_\epsilon(W_\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$, поскольку существенный 1-остов $\mathrm{esk}_1 X$ спрямляем относительно метрики d и $d_\epsilon \leqslant d$ вдоль него. Поэтому достаточно доказать, что (некомпактная) поверхность $X \setminus \mathrm{esk}_1 X$ имеет конечную площадь (двумерную меру Хаусдорфа H_2) относительно метрики d. Фиксируем достаточно малое $\epsilon_0 > 0$ и рассмотрим окрестность $W = W_{\epsilon_0}$ существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$. Пользуясь построениями из 4.D.2, 4.D.3 и спрямляемостью $\mathrm{esk}_1 X$, находим конечный набор кривых $\gamma_j \subset W$, удовлетворяющих условию теоремы 4.16, таких, что каждая кривая γ_j

ограничивает область $U_j \subset W \setminus \mathrm{esk}_1 X$, гомеоморфную диску и $\bigcup_j U_j = W \setminus \mathrm{esk}_1 X$. Из теоремы 4.16 немедленно следует, что $H_2(W \setminus \mathrm{esk}_1 X) < \infty$ и, следовательно, $H_2(X \setminus \mathrm{esk}_1 X) < \infty$, поскольку $X \setminus W$ — компактная поверхность. Это завершает доказательство теоремы 0.11. •

4.17. Замечания. 1) В работе [АрБу] с помощью формулы Гаусса–Бонне получена оценка

$$|\tau|(\mathrm{esk}_1 X) \leqslant c_1 + c_2 \cdot \omega^+(X \setminus \mathrm{esk}_1 X)$$

для вариации поворота 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ относительно кусочно-гладкой метрики ограниченной сверху кривизны на замкнутом 2-полиэдре X. Здесь постоянные c_1, c_2 зависят только от топологии полиэдра X, ω^+ — положительная часть кривизны метрики. Если $\mathrm{esk}_1 X$ является кусочно-гладким, то

$$|\tau|(\mathrm{esk}_1 X) = \sum_v \sum_{f|v} |\tau_f(v)|,$$

где внешнее суммирование производится по всем вершинам v геодезической триангуляции остова $\mathrm{esk}_1 X$, внутреннее — по всем граням f, смежным с вершиной v, τ_f — поворот со стороны грани f.

Таким образом, в условиях теоремы 0.11 метрики d_ϵ, аппроксимирующие метрику d, имеют равномерно ограниченные вариации поворота остова $\mathrm{esk}_1 X$. Приведем доводы, не использующие глобальных фактов типа формулы Гаусса–Бонне и опирающиеся только на локальные свойства, согласно которым вариации поворота существенного 1-остова $\mathrm{esk}_1 X$ относительно метрик d_ϵ равномерно ограничены при $\epsilon \to 0$.

Если для внутренней вершины v какого-либо ребра $e \subset \mathrm{esk}_1 X$ и грани f, смежной с v, имеем $\tau_f(v) = \pi - \alpha(v, f) > 0$, то для любых двух других граней f' и f'', смежных с v, полный угол вокруг v на поверхности $\overline{f}' \cup \overline{f}''$ не меньше $2(2\pi - \alpha(v, f)) = 2\pi + 2\tau_f(v)$ в силу ограниченности сверху кривизны метрики d_ϵ. Поэтому для кривизны $\omega_{f',f''}(v)$ точки v на $\overline{f}' \cup \overline{f}''$ имеем $\omega_{f',f''}(v) \leqslant -2\tau_f(v)$.

Таким образом, из неограниченности вариаций поворота $\mathrm{esk}_1 X$ при $\epsilon \to 0$ следует, что существуют точка $x \in \mathrm{esk}_1 X$, ребро $e \subset \mathrm{esk}_1 X$, выходящее из x, и две грани f, f', смежные с e, такие, что в сколь угодно малой окрестности точки x на ребре e при $\epsilon \to 0$ накапливается неограниченно много точек v с отрицательной кривизной $\omega_\epsilon(v) = \omega_{f,f',\epsilon}(v)$ на поверхности $\overline{f} \cup \overline{f}'$ и $\sum_v \omega_\epsilon(v) \to -\infty$.

Такое накапливание отрицательной кривизны приводит к тому, что любая достаточно малая фиксированная окрестность U точки x на $\overline{f} \cup \overline{f}'$ имеет площадь $\mathrm{Area}_\epsilon \to \infty$ при $\epsilon \to 0$. Этот эффект заметен на уровне δ-сетей, число точек в любой из которых в λU неограниченно растет при $\epsilon \to 0$, где $\lambda \cdot (\mathrm{diam}_\epsilon)^{-1} \simeq 1$. С другой стороны, из равномерной сходимости $d_\epsilon \to d$ следует близость по Громову–Хаусдорфу окрестности λU к ограниченному подмножеству в $\mathbb{R}^2$ при достаточно большом λ и достаточно малых ϵ, что несовместимо с предыдущим. •

2) Пусть d — метрика ограниченной сверху кривизны на 2-полиэдре X. Согласно следствию 4.4, внутренняя метрика α на пространстве направлений Σ_x, $x \in X$, поднимается до (псевдо)метрики на линке Λ_x, которая обозначается также через α; при этом для любых двух точек v, v' из дерева $T \in F$ имеем $\alpha(v, v') = 0$. Поэтому для кривизны $\omega(x)$ точки x (см. С) имеем

$$\omega(x) = (2 - \chi(\Lambda_x))\,\pi - \alpha(\Lambda_x).$$

Согласно теореме 0.11, метрика d является ручной. С другой стороны, в работе [АрБу] доказана формула Гаусса–Бонне для ручной метрики, и кривизна точки при этом определялась слегка иначе

$$\underline{\omega}(x) = (2 - \chi(\Lambda_x))\,\pi - \underline{\alpha}(\Lambda_x),$$

где (псевдо)метрика $\underline{\alpha}$ на Λ_x определялась длинами всевозможных замкнутых кривых без точек возврата в линке Λ_x. Длина $l(c)$ такой кривой c в свою очередь определялась из соотношения $\omega_c(x) = 2\pi - l(c)$, где $\omega_c(x)$ — кривизна точки x относительно метрики, индуцированной метрикой d, на сингулярном диске D_c, ассоциированном с циклом c.

Утверждается, что эти два определения кривизны точки x дают одну и ту же величину, $\omega(x) = \underline{\omega}(x)$. Это немедленно следует из того факта, что для метрики ограниченной сверху кривизны на поверхности D_c кривизна $\omega_c(x)$ точки x равна $2\pi - \alpha(x)$, где $\alpha(x) = \alpha(\Sigma_x)$ — полный угол вокруг x. Это доказано в [АЗ, гл. V, теорема 8] для более общего класса метрик ограниченной интегральной кривизны.

Список литературы

[AB] Alexander S. B., Bishop R. L., *The Hadamard-Cartan theorem in locally convex metric spaces*, Enseign. Math. (2) **36** (1990), 309–320.

[АБН] Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г., *Обобщенные римановы пространства*, Успехи мат. наук **41** (1986), № 3, 3–44.

[АЗ] Александров А. Д., Залгаллер В. А., *Двумерные многообразия ограниченной кривизны*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **63** (1962), 1–262.

[АрБу] Аршинова И. А., Буяло С. В., *Метрики ограниченной сверху кривизны на 2-полиэдрах*, Алгебра и анализ **8** (1996), № 5, 163–188.

[Ba1] Ballmann W., *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Sem., Bd. 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[Ba2] Ballmann W., *Singular spaces of nonpositive curvature*, Sur les Groupes Hyperboliques d'après M. Gromov (Bern, 1988), Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990, pp. 189–201.

[BaBr] Ballmann W., Brin M., *Orbihedra of nonpositive curvature*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. № 82 (1995), 169–209 (1996).

[BaBu] Ballmann W., Buyalo S., *Nonpositively curved metrics on 2-polyhedra*, Math. Z. **222** (1996), 97–134.

[Bav] Bavard C., *Courbure presque négative en dimension* 3, Compositio Math. **63** (1987), 223–236.

[Бер1] Берестовский В. Н., *Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах*, Сиб. мат. ж. **16** (1975), № 4, 651–662.

[Бер2] Берестовский В. Н., *Многообразия с внутренней метрикой односторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизны*, Мат. физ., анал., геом. **1** (1994), № 1, 41–59.

[БН] Берестовский В. Н., Николаев И. Г., *Многомерные обобщенные римановы пространства*, Геометрия-4. Нерегулярная риманова геометрия (Ю. Г. Решетняк, ред.), Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 70, ВИНИТИ, М., 1989, сс. 190–277.

[Бур] Бураго Ю. Д., *Кривые в сходящихся пространствах*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **76** (1965), 5–25.

[БГП] Бураго Ю., Громов М., Перельман Г., *Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами*, Успехи мат. наук **47** (1992), № 2, 3–51.

[БЗ] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., *Геометрические неравенства*, Наука, Л., 1980.

[BuI] Burago D., Ivanov S., *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 3, 259–269.

[Бу] Буяло С. В., *Пространства ограниченной сверху кривизны*, Курс лекций, Образование, СПб, 1997.

[ГКМ] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

[G] Gromov M., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes* (J. Lafontaine, P. Pansu, eds.), CEDIC, Paris, 1981.

[И] Иванов С. В., *О сходящихся метриках ограниченной сверху кривизны на двумерных полиэдрах*, Алгебра и анализ **10** (1998), № 4.

[K1] Kleiner B., *Outline of proof of rectifiability of the branch curve*, Private communication, 1994.

[K2] Kleiner B., *The local structure of length spaces with curvature bounded above*, Preprint, 1997.

[KL] Kleiner B., Leeb B., *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*, Preprint, 1996.

[LS1] Lang U., Schroeder V., *Kirszbraun's theorem and metric spaces of bounded curvature*, Preprint, 1996.

[LS2] Lang U., Schroeder V., *Jung's theorem for Alexandrov spaces of curvature bounded above*, Preprint, 1996.

[H1] Николаев И. Г., *Пространство направлений в точке пространства кривизны, небольшей K*, Сиб. мат. ж. **19** (1978), № 6, 1341–1348.

[N2] Nikolaev I. G., *The tangent cone of an Aleksandrov space of curvature $\leqslant K$*, Manuscripta Math. **86** (1995), no. 2, 137–147.

[Ре1] Решетняк Ю. Г., *Двумерные многообразия ограниченной кривизны*, Геометрия-4. Нерегулярная риманова геометрия (Ю. Г. Решетняк, ред.), Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 70, ВИНИТИ, М., 1989, сс. 7–189.

[Ре2] Решетняк Ю. Г., *Нерастягивающие отображения в пространстве кривизны, не большей K*, Сиб. мат. ж. **9** (1968), № 4, 918–927.

[РФ] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.

[За] Залгаллер В. А., *Кривые на поверхности вблизи точек типа острия*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **76** (1965), 64–66.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
191011, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки, 27,
Россия

Поступило 27 октября 1997 г.