



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Shamolin, New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of two-dimensional manifolds,

Dokl. RAN. Math. Inf. Proc. Upr., 2020, Volume 494, 105–111

<https://www.mathnet.ru/eng/danma120>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 22, 2025, 12:55:17



УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 08.07.2020 г.

Поступило 15.07.2020 г.

После доработки 21.07.2020 г.

Принято к публикации 21.07.2020 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954320050422

Изучение интегрируемости автономных динамических систем на двумерном конфигурационном многообразии M^2 приводит к изучению систем четвертого порядка на касательном расслоении TM^2 . При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^2 , является структура силового поля, присутствующего в системе. Так, например, известная задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Иногда в системах с диссипацией все же удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку о полном списке даже непрерывных автономных первых интегралов приходится забыть. Полученные результаты особенно важны в смыс-

ле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе предложена методика интегрирования классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом вводимые внешние силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

1. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ

Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α, β) и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\begin{aligned} \alpha^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\alpha'^2 + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\alpha'\beta' + \\ + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\beta'^2 = 0, \\ \beta^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta)\alpha'^2 + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\alpha'\beta' + \\ + \Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\beta'^2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^2 . Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@imec.msu.ru

$$\alpha^* = R_1 z_1 + R_2 z_2, \quad \beta^* = R_3 z_1 + R_4 z_2, \quad (2)$$

которая обращается

$$z_1 = T_1 \alpha^* + T_2 \beta^*, \quad z_2 = T_3 \alpha^* + T_4 \beta^*,$$

при этом $R_k, T_k, k = 1, \dots, 4$, – функции от $\alpha, \beta, RT = E$,

где $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^2 . Справедливы равенства

$$\begin{aligned} z_1^* &= \alpha^{*2} \{T_{1\alpha} - T_1 \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha - T_2 \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta\} + \\ &+ \alpha^* \beta^* \{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1 \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - 2T_2 \Gamma_{\alpha\beta}^\beta\} + \\ &+ \beta^{*2} \{T_{2\beta} - T_1 \Gamma_{\beta\beta}^\alpha - T_2 \Gamma_{\beta\beta}^\beta\} = \\ &= U_1(\alpha, \beta) z_1^2 + U(\alpha, \beta) z_1 z_2 + U_2(\alpha, \beta) z_2^2, \\ z_2^* &= \alpha^{*2} \{T_{3\alpha} - T_3 \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha - T_4 \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta\} + \\ &+ \alpha^* \beta^* \{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3 \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - 2T_4 \Gamma_{\alpha\beta}^\beta\} + \\ &+ \beta^{*2} \{T_{4\beta} - T_3 \Gamma_{\beta\beta}^\alpha - T_4 \Gamma_{\beta\beta}^\beta\} = \\ &= V_1(\alpha, \beta) z_1^2 + V(\alpha, \beta) z_1 z_2 + V_2(\alpha, \beta) z_2^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_{k\alpha} = \frac{\partial T_k}{\partial \alpha}, \quad T_{k\beta} = \frac{\partial T_k}{\partial \beta}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad \text{при этом в (3)}$$

вместо α^*, β^* подставляются соотношения (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям z_1, z_2 .

Предложение 1. Система (1) в той области, где $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, эквивалентна составной системе (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^* = z_2 f_2(\alpha), \quad \beta^* = z_1 f_1(\alpha), \quad (4)$$

где $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [3, 4], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned} \alpha^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{*2} + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \beta^{*2} &= 0, \\ \beta^{**} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \alpha^* \beta^* &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

т.е. выполнены равенства $\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0$. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} z_1^* &= -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ z_2^* &= -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

и уравнения (1) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$. В нашем случае уравнения (5) почти всюду переписутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha^* &= z_2 f_2(\alpha), \\ z_2^* &= -f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1^* &= -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \beta^* &= z_1 f_1(\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Для полного интегрирования системы (7) необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла. При этом первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Предложение 2. Если всюду справедлива система дифференциальных равенств

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) + \\ + f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (8)$$

то система (7) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (9)$$

Пример 1. В случае цилиндрических координат всеобъемлющего трехмерного пространства $(\rho, \varphi = \beta, z = \alpha)$, в которых задана поверхность вращения $\rho = \rho(\alpha)$, уравнения (5) примут вид (штрихом обозначена производная по α)

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_2(\alpha)\beta^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} + \Gamma_3(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\alpha) &= \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \\ \Gamma_2(\alpha) &= \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \quad \Gamma_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)}. \end{aligned}$$

Двухпараметрическая система, эквивалентная при $\mu_1 \neq 0, \mu_2 > 0$ уравнениям (10) геодезических и имеющая первый интеграл вида (9), имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= z_2 \frac{\mu_1}{\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}}, \quad z_2^{\bullet} = -z_1^2 \Gamma(\alpha), \\ z_1^{\bullet} &= z_1 z_2 \Gamma(\alpha), \\ \Gamma(\alpha) &= \frac{\mu_1 \rho'(\alpha)}{\rho(\alpha) \sqrt{1 + \rho^2(\alpha)} (\mu_2 \mu_1^2 \rho^2(\alpha) - 1)}, \\ \beta^{\bullet} &= z_1 \frac{\mu_1}{\rho(\alpha) \sqrt{\mu_2 \mu_1^2 \rho^2(\alpha) - 1}}, \end{aligned}$$

если первое и четвертое уравнения этой системы рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 2. Уравнения (5) геодезических на плоскости Лобачевского с координатами ($x = \beta, y = \alpha$) примут вид

$$\alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta^{\bullet 2}) = 0, \quad \beta^{\bullet\bullet} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0. \quad (11)$$

Двухпараметрическая система, эквивалентная при $\mu_1 \neq 0, \alpha \neq 0$ уравнениям (11) геодезических и имеющая первый интеграл вида (9), имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= z_2 \mu_1 \alpha, \quad z_2^{\bullet} = -z_1^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2 \mu_1^2}, \\ z_1^{\bullet} &= z_1 z_2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2 \mu_1^2}, \quad \beta^{\bullet} = z_1 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_2 \mu_1^2}}, \end{aligned}$$

если первое и четвертое уравнения этой системы рассматривать как новые кинематические соотношения.

Система равенств (8) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (9) (или см. ниже (17)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]).

Поиск как интеграла (9), так и (13) (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 6].

Предложение 3. Если функция $\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)$ является функцией лишь α :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha), \quad (12)$$

то система (7) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z_1; \alpha) &= z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) &= f_1(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если выполнено свойство (12) и функции $\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)$ и $\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)$ также являются функциями лишь α :

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha), \quad \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha), \quad (14)$$

то в системе (7) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на β^{\bullet} отделяется).

В частности, если выполнены свойства (8), (12), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 4. Если выполнены условия (8), (12), то система (7) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) &= \\ &= \beta \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(b) - C_2^2}} db = C_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (15)$$

где, после взятия интеграла (15), вместо постоянных C_1^2, C_2 можно подставить левые части равенств (9), (13) соответственно.

Теорема 1. Если выполнены условия (8), (12), то система (7) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида (9), (13), (15).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Несколько модифицируем систему (7), получив систему консервативную. А именно, вводится гладкое силовое поле в проекциях на оси z_1^{\bullet} и z_2^{\bullet} , соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_2 f_2(\alpha), \\ z_2^\bullet &= F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1^\bullet &= F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \beta^\bullet &= z_1 f_1(\alpha), \end{aligned} \tag{16}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \beta^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta^\bullet &= 0. \end{aligned}$$

Предложение 5. Если всюду справедливы равенства (8), то система (16) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_2, z_1; \alpha) &= z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) &= V_2(\alpha) + V_1(\beta) = \\ &= -2 \int_{\alpha_0}^\alpha F_2(a) da - 2 \int_{\beta_0}^\beta F_1(b) db. \end{aligned} \tag{17}$$

Предложение 6. Пусть $F_1(\beta) \equiv 0$. Если функция $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)$ является функцией лишь α (условие (12)), то система (16) имеет первый интеграл вида (13).

Пусть $F_1(\beta) \equiv F_1^0 = \text{const}$. Если выполнено свойство (12) и функции $\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)$ и $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)$ также являются функциями лишь α (условия (14)), то в системе (16) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на β^\bullet отделяется).

В частности, если выполнены свойства (8), (12), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 7. Пусть $F_1(\beta) \equiv 0$. Если выполнены условия (8), (12), то система (16) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) &= \\ = \beta \mp \int_{\alpha_0}^\alpha \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{\Phi_0^2(b) [C_1 - V(b)] - C_2^2}} db &= C_3 = \text{const}, \end{aligned} \tag{18}$$

где, после взятия интеграла (18), вместо постоянных C_1, C_2 можно подставить левые части равенств (17), (13) соответственно.

Теорема 2. Если выполнены условия (8), (12), то система (16) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида (13), (17), (18).

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (16). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (19) (в отличие от системы (16)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси z_1^\bullet и z_2^\bullet , соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_2^\bullet &= F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ z_1^\bullet &= F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \beta^\bullet &= z_1 f_1(\alpha), \end{aligned} \tag{19}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \right\} \times \\ \times \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \alpha^\bullet - \\ - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + b^2 \delta^2(\alpha) \times \\ \times \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \\ + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \beta^{\bullet 2} = 0, \end{aligned}$$

$$\beta^{**} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \beta^* - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \alpha^* \beta^* = 0,$$

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (19) при выполнении свойств (8), (12), а также при $F_1(\beta) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\alpha^* = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha),$$

$$z_2^* = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \quad (20)$$

$$z_1^* = \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),$$

$$\beta^* = z_1 f_1(\alpha). \quad (21)$$

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad (22)$$

$$\Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)},$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_2(\alpha) = \lambda_2^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad (23)$$

$$F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_2(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad k = 1, 2.$$

Условие (22) назовем “геометрическим”, а условия из группы (23) – “энергетическими”.

Условие (22) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha)$, приводя соответствующим

коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (23) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (22) и (23). Тогда система (20), (21) обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [7, 8] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = G_1 \left(\frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1) z_2 \delta(\alpha) f_2(\alpha) - \lambda_2^0 \delta^2(\alpha)}{z_1 \delta(\alpha) f_2(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (24)$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (25)$$

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_3 \left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_3 = \text{const}. \quad (26)$$

Выражение первых интегралов (24)–(26) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ дополнительный первый интеграл системы (20) найдется из соотношения

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b - u_2) du_2}{2(u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0)} \right\} / 2}, \quad u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (24). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Теорема 4. Условия (8), (12), (22), (23) (например, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$) являются необходимыми

условиями существования первого интеграла (24) для системы (20), (21).

4. СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π , то система (20), (21) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом при $b = -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(-b; z_2, z_1; \alpha) = \\ = z_1^2 + z_2^2 + 2bz_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha) = \text{const}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1\Delta(\alpha) = \text{const}. \quad (28)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (27), (28) также является первым интегралом системы (20), (21) при $b = -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$. Но при $b \neq -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$ каждая из функций

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda_1^1; z_2, z_1; \alpha) = \\ = z_1^2 + z_2^2 + (b - \lambda_1^1)z_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha) \end{aligned} \quad (29)$$

и (28) по отдельности не является первым интегралом системы (20), (21). Однако отношение функций (29), (28) является первым интегралом системы (20), (21) (при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$) при любом b .

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

5. СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и плоскость Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, определяющее метрику на двумерной сфере:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R}, \\ f_2(\alpha) \equiv -1, \end{aligned}$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \quad (30)$$

$$\mu_1 = -1. \quad (31)$$

Случай (30) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динами-

чески симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (31) формирует класс систем, соответствующих движению точки на сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего трехмерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_2(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (30) если $\delta(\alpha) = F_2(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F_2(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_2(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого двумерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
4. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4-е, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to two-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral