Н. М. Адрианов, Об обобщённых многочленах Чебышёва, соответствующих плоским деревьям диаметра 4, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2007, том 13, выпуск 6, 19–33

Об обобщённых многочленах Чебышёва, соответствующих плоским деревьям диаметра 4

Н. М. АДРИАНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nikolai_adrianov@cnit.msu.ru

УДК 519.17+512.622

Ключевые слова: детские рисунки, деревья диаметра 4, группа Галуа, дискриминанты.

Аннотация

Комбинаторная классификация плоских деревьев по количеству реализаций их наборов валентностей выделила несколько специальных классов плоских деревьев. Один из них, деревья диаметра 4, оказался весьма интересным объектом с точки зрения действия группы Галуа. В настоящей работе мы предлагаем системы уравнений для некоторых подклассов деревьев диаметра 4, вычисляем дискриминанты соответствующих обобщённых многочленов Чебышёва, некоторых связанных с ними многочленов, их полей определения и используем это, чтобы получить некоторую информацию о действии группы Галуа на плоских деревьях.

Abstract

N. M. Adrianov, On the generalized Chebyshev polynomials corresponding to plane trees of diameter 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 19—33.

The combinatorial classification of plane trees by the number of realizations of their valency sets has distinguished some special classes of plane trees. One of them, the plane trees of diameter 4, turned out to be a very interesting object of investigation from the Galois action point of view. In this paper, we present equation sets for some subclasses of trees of diameter 4, calculate discriminants of the corresponding generalized Chebyshev polynomials, some related polynomials, and their fields of definitions, and use this to get some information about the Galois action on plane trees.

Общая теория «детских рисунков» Гротендика устанавливает соответствие между рисунками и парами Белого, которое в частном случае плоских деревьев превращается в соответствие между плоскими деревьями и многочленами с не более чем двумя критическими значениями (так называемыми обобщёнными многочленами Чебышёва).

Классификация плоских двукрашенных деревьев по количеству реализаций набора их валентностей (см. [1]) выделила три специальных класса плоских деревьев: цепочки, деревья диаметра 4 и специальные деревья диаметра 6. Что

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 19—33.

можно сказать о соответствующих обобщённых многочленах Чебышёва и их полях определения?

Цепочкам, т. е. деревьям класса I_e, соответствуют классические многочлены Чебышёва, их поле определения — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Многочлены, соответствующие специальным деревья диаметра 6, могут быть представлены в виде композиции многочленов, соответствующих деревьям диаметра 2 и 3 (см. [6, 7]). Поле определения деревьев $\mathrm{VI}[m,c,n]$ — циклотомическое поле, если $m \neq n$, или вещественное подполе циклотомического поля индекса 2, если $m = n$.

Обобщённые многочлены Чебышёва деревьев диаметра 4 не допускают столь простого описания и оказались весьма интересным объектом исследования. Имеется изрядное количество работ, посвящённых плоским деревьям диаметра 4 (см. [5, 9, 10, 13]).

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые классы деревьев диаметра 4 и описываем системы уравнений для этих классов. В некоторых случаях поля определения задаются «гипергеометрическими многочленами», т. е. вырожденной гипергеометрической функцией Гаусса. Мы также вычисляем дискриминанты обобщённых многочленов Чебышёва, дискриминанты некоторых связанных многочленов и дискриминанты их полей определения. Мы используем вычисленные дискриминанты, для того чтобы получить некоторую информацию о полях определения и действии группы Галуа на плоских деревьях.

1. Системы уравнений для деревьев общего вида

Определение 1.1. Комплексное число $c \in \mathbb{C}$ называется *критическим значением* многочлена с комплексными коэффициентами $P \in \mathbb{C}[z]$ степени $n = \deg P$, если количество прообразов $\#P^{-1}(c)$ меньше n.

Определение 1.2. *Обобщённым многочленом Чебышёва* называется многочлен $P \in \mathbb{C}[z]$, имеющий не более двух критических значений c_- и c_+.

Другими словами, многочлен $P \in \mathbb{C}[z]$ является обобщённым многочленом Чебышёва, если для любого $z_0 \in \mathbb{C}$, такого что $P'(z_0) = 0$, справедливо $P(z_0) \in \in \{c_-, c_+\}$.

Прообраз $T_P = P^{-1}[c_-, c_+]$ отрезка, соединяющего критические значения обобщённого многочлена Чебышёва, является двукрашенным деревом, вложенным в комплексную плоскость. Множества чёрных и белых вершин V_+ и V_- определяются как $V_\pm = P^{-1}(c_\pm)$.

В случае плоских деревьев соответствие между «детскими рисунками» и функциями Белого принимает следующий вид: всякому плоскому дереву T соответствует некоторый обобщённый многочлен Чебышёва, такой что дерево $T_P = P^{-1}[c_-, c_+]$ изоморфно T. Такой обобщённый многочлен Чебышёва определён однозначно с точностью до линейных замен

$$P(z) \to AP(az+b) + B, \quad A \neq 0, \quad a \neq 0.$$

Предположим, что плоское дерево T уже вложено в своей истинной форме в комплексную плоскость, т. е. $T = P^{-1}[c_-, c_+]$, где P — соответствующий обобщённый многочлен Чебышёва. Тогда мы можем рассматривать множества вершин $V_\pm$ дерева T как конечные подмножества $\mathbb{C}$. При таких соглашениях многочлен P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} P(z) - c_+ = \prod\limits_{x \in V_+} (z-x)^{v_+(x)}, \\ P(z) - c_- = \prod\limits_{x \in V_-} (z-x)^{v_-(x)}, \end{cases}$$

или уравнению

$$\prod_{x \in V_+} (z-x)^{v_+(x)} + c_+ = \prod_{x \in V_-} (z-x)^{v_-(x)} + c_-. \tag{1}$$

Равенство многочленов в левой и правой частях уравнения (1) даёт систему из $m_+ + m_- - 2$ уравнений на $m_+ + m_-$ переменных $x \in V_+ \cup V_-$. Остающиеся две степени свободы соответствуют допустимой замене $P(x) \to P(Ax+B)$.

Предложение 1.3. *Уравнение* (1) *эквивалентно системе уравнений*

$$\left\{ \sum_{x \in V_+} v_+(x) x^k = \sum_{x \in V_-} v_-(x) x^k \quad (k = 1, 2, \ldots, m_+ + m_- - 2). \right. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \text{ —}$$

элементарный симметрический многочлен степени k, а

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k \text{ —}$$

k-я степенная сумма переменных $x_1, \ldots, x_n$. Из формул Ньютона (см., например, [3]) следует, что системы

$$\{ s_i(x_1, \ldots, x_n) = s_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

и

$$\{ p_i(x_1, \ldots, x_n) = p_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

эквивалентны. Пользуясь теоремой Виета, получаем эквивалентность уравнения (1) и системы (2). □

Мы будем называть систему (2) *антивандермондовой системой*.

Несколько следующих предложений дают формулы дискриминантов обобщённых многочленов Чебышёва и связанных с ними многочленов. Напомним (см., например, [2]), что дискриминантом многочлена f называется величина

$$\operatorname{Discr}(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

где α_i — корни многочлена f степени n, a_0 — старший коэффициент многочлена f. Дискриминант может быть вычислен с помощью результанта многочлена и его производной:

$$\operatorname{Discr}(f) = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{-1} \operatorname{Res}(f, f'),$$

$$\operatorname{Res}(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j),$$

где a_0, b_0 — старший коэффициенты, n, m — степени, α_i, β_j — корни многочленов f и g соответственно.

Предложение 1.4. *Пусть P — обобщённый многочлен Чебышёва степени e со старшим членом a_0 и критическими значениями $c_\pm$. Тогда его дискриминант равен*

$$\operatorname{Discr}(P) = (-1)^{e(e-1)/2} e^e a_0^{e-1} c_+^{e-\#V_+} c_-^{e-\#V_-}.$$

Доказательство. Для произвольного многочлена P степени e имеем

$$\operatorname{Discr}(P) = (-1)^{e(e-1)/2} e^e a_0^{e-1} \prod_{\beta:\ P'(\beta)=0} P(\beta),$$

где произведение берётся по всем корням производной P' с учётом их кратности. Если P — обобщённый многочлен Чебышёва, то из условия $P'(\beta) = 0$ следует, что $\beta \in V_+ \cup V_-$, т. е. $P(\beta) = c_+$ или $P(\beta) = c_-$. Количество корней β многочлена P', таких что $\beta \in V_\pm$, с учётом кратности равно $\sum\limits_{x \in V_\pm} (v_\pm(x) - 1) = e - \#V_\pm$. Предложение доказано. □

Предложение 1.5. *Пусть P — обобщённый многочлен Чебышёва степени e с критическими значениями $c_\pm$. Определим многочлен*

$$h(z) = \prod_{x \in V_+ \cup V_-} (z - x)$$

степени $e + 1$. Тогда дискриминант многочлена h равен

$$\operatorname{Discr}(h) = (-1)^{(e+1)e/2} \frac{(e(c_+ - c_-))^{\#V_+} (e(c_- - c_+))^{\#V_-}}{a_0^{e+1} \prod\limits_{x \in V_+} v_+(x) \prod\limits_{x \in V_-} v_-(x)}.$$

Доказательство. Обобщённый многочлен Чебышёва должен удовлетворять соотношению $e(P(z) - c_+)(P(z) - c_-) = a_0 P'(z) h(z)$. Следовательно,

$$\frac{e(c_+ - c_-)}{a_0} = \frac{P'(z) h(z) (c_+ - c_-)}{(P(z) - c_+)(P(z) - c_-)} =$$
$$= h(z) \left(\frac{P'(z)}{P(z) - c_+} - \frac{P'(z)}{P(z) - c_-} \right) = h(z) \Bigg(\sum_{x \in V_+} \frac{v_+(x)}{z - x} - \sum_{x \in V_-} \frac{v_-(x)}{z - x} \Bigg).$$

Подставляя $z = x \in V_\pm$, имеем

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{e(c_+ - c_-)}{a_0 v_+(x)}, & \text{если } x \in V_+, \\ \frac{e(c_- - c_+)}{a_0 v_-(x)}, & \text{если } x \in V_-, \end{cases}$$

и, следовательно, в силу равенства

$$\operatorname{Discr}(h) = (-1)^{(e+1)e/2} \prod_{x \in V_+ \cup V_-} h'(x)$$

получаем утверждение предложения. □

2. Системы уравнений для деревьев диаметра 4

Пусть T — плоское дерево типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$. Далее мы всегда будем считать, что оно расположено на комплексной плоскости так, что его центральная вершина находится в точке 0. Тогда соседние с ней вершины валентностей $m_1, \ldots, m_c$ окажутся в некоторых точках $z_1, \ldots, z_c$. Положим $x_i = 1/z_i$. Соответствующий обобщённый многочлен Чебышёва имеет степень $e = m_1 + \ldots + m_c$ и удовлетворяет соотношению

$$P(z) - c_- = \mathrm{const} \cdot \prod_{i=1}^{c} (z - z_i)^{m_i} = \mathrm{const}' \cdot \prod_{i=1}^{c} (z x_i - 1)^{m_i}. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$P(z) - c_+ = z^c Q(z),$$

где Q — некоторый многочлен степени $e - c$.

Предложение 2.1. *Обобщённый многочлен Чебышёва P для дерева типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$ может быть записан в виде* (3), *где величины x_i удовлетворяют следующей системе уравнений*:

$$\Big\{ \sum m_i x_i^k = 0 \quad (k = 1, \ldots, c-1). \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.3.

Замечание. Сходство систем (2) и (4) очевидно. Положив в системе (2) одну из вершин дерева в 0 и перенеся всё в левую часть, мы получим в точности систему (4), в которой, однако, коэффициенты m_i отрицательны. Известно, что действие группы Галуа на множестве всех плоских деревьев точно. Представляется интересным исследовать действие группы Галуа на множестве деревьев диаметра 4.

Предложение 2.2. *Пусть обобщённый многочлен Чебышёва для плоского дерева типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$ записан в виде* (3). *Тогда дискриминант многочлена*

$$h(z) = \prod_{i=1}^{c} (z - z_i)$$

равен

$$\mathrm{Discr}(h) = (-1)^{c(c-1)/2} \frac{(m_1 + \ldots + m_c)^c}{\prod\limits_{i=1}^{c} m_i} \left(\prod_{i=1}^{c} z_i \right)^{c-1}.$$

Доказательство. Продифференцируем многочлен P:

$$P'(z) = (z - z_1)^{m_1 - 1} \ldots (z - z_c)^{m_c - 1} \left(\frac{m_1 h}{z - z_1} + \ldots + \frac{m_c h}{z - z_c} \right).$$

С другой стороны, P' делится на z^{c-1}, значит,

$$\left(\frac{m_1 h}{z - z_1} + \ldots + \frac{m_c h}{z - z_c} \right) = (m_1 + \ldots + m_c) z^{c-1}.$$

Подставляя $z = z_i$, мы получаем, что

$$h'(z_i) = \frac{m_1 + \ldots + m_c}{m_i} z_i^{c-1},$$

поэтому

$$\mathrm{Discr}(h) = (-1)^{c(c-1)/2} \prod_{i=1}^{c} h'(z_i) = \\ = (-1)^{c(c-1)/2} \frac{(m_1 + \ldots + m_c)^c}{\prod\limits_{i=1}^{c} m_i} \left(\prod_{i=1}^{c} z_i \right)^{c-1}. \quad \square$$

Замечание. Результат предложения 2.2 был получен Л. Цаппони [13], который применил его для нахождения нового инварианта Галуа, который, в частности, объясняет распадение орбит так называемых «цветков Лейлы».

В [10] Лейла Шнепс рассмотрела деревья типов $\mathrm{IV}[1,2,3,4,6]$ и $\mathrm{IV}[2,3,4,5,6]$, которые дают интересные примеры нетранзитивного действия группы Галуа. (Одно из деревьев типа $\mathrm{IV}[2,3,4,5,6]$ изображено на титульном листе сборника [12].) Решение системы (4) приводит к уравнению $f(x) = 0$ от одной неизвестной степени 24, которое для указанных значений m_i оказывается приводимым над $\mathbb{Q}$ и раскладывается в произведение двух многочленов $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ степени 12. Выяснилось к тому же, что

$$f_1(x) - f_2(x) = x^3 (x-1)^3 g(x) \qquad (5)$$

для некоторого многочлена $g(x)$ степени 3.

Ю. Ю. Кочетков [9] обнаружил большое количество аналогичных примеров и предположил, что этот феномен имеет место всегда, как только величина $m_1 \ldots m_c (m_1 + \ldots + m_c)$ является полным квадратом. Эта гипотеза была доказана Л. Цаппони в следующем более общем виде.

Следствие 2.3. *Пусть c нечётно, $m_1, \ldots, m_c$ — попарно различные натуральные числа, $\Delta = (-1)^{(c-1)/2} m_1 \ldots m_c (m_1 + \ldots + m_c)$. Тогда поле определения деревьев типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$ содержит квадратичное подполе $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$.*

Для величины

$$\delta_T = \frac{\prod\limits_{i<j}(z_i - z_j)}{(z_1 \dots z_n)^{(c-1)/2}}$$

имеется лишь два возможных значения для любого дерева T из множества деревьев типа $\mathrm{IV}[m_1, \dots, m_c]$. Множество всех деревьев типа $\mathrm{IV}[m_1, \dots, m_c]$ распадается на два класса в зависимости от значения δ_T, действие группы Галуа $\mathrm{Gal}\big(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})\big)$ сохраняет эти классы.

Доказательство. Поле определения обобщённого многочлена Чебышёва (3) дерева T типа $\mathrm{IV}[m_1, \dots, m_c]$, где m_i попарно различны, есть поле $K_T = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_c)$, z_i — координаты околоцентральных вершин. Очевидно, $\delta_T \in K_T$. С другой стороны, в силу предложения 2.2 $\delta_T^2 = \Delta \cdot D^2$, где

$$D = \frac{(m_1 + \dots + m_c)^{(c-1)/2}}{\prod\limits_{i=1}^{c} m_i} \in \mathbb{Q}.$$

Это доказывает утверждение. □

Отметим, что соотношение (5) остаётся на настоящий момент необъяснённым. Также неизвестно выражение для коэффициентов многочлена $g(x)$ через параметры m_i.

3. Деревья типа $\mathrm{IV}[l_1, \dots, l_m, k, \dots, k]$

Система (4) содержит c неизвестных и состоит из $c - 1$ однородного уравнения, что соответствует оставшейся возможной мультипликативной замене $P(z) \to P(az)$. То, что количество уравнений не зависит от общего числа рёбер e дерева T, делает класс деревьев диаметра 4 весьма удобным для исследования и позволяет (хотя бы для небольших значений c) выписывать общее решение, зависящее от параметров $m_1, \dots, m_c$. В этом разделе мы рассмотрим специальный подкласс деревьев диаметра 4, для которого возможно сделать даже большее, а именно привести к системе, число уравнений в которой не зависит от величины c.

Рассмотрим деревья класса $\mathrm{IV}\Big[l_1, l_2, \dots, l_m, \underbrace{k, k, \dots, k}_{c-m}\Big]$. Положим $\lambda_i = l_i/k$, через $(\lambda)_n$ будем обозначать сдвинутый факториал $\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)$.

Предложение 3.1. *Обобщённый многочлен Чебышёва P для дерева типа $\mathrm{IV}\Big[l_1, l_2, \dots, l_m, \underbrace{k, k, \dots, k}_{c-m}\Big]$ может быть записан в виде*

$$P(z) = \prod_{i=1}^{m}(1 - x_i z)^{l_i} Q(z)^k + \mathrm{const}, \quad Q(z) = \sum_{r=0}^{c-m} a_r z^r,$$

где

$$a_r = \sum_{k_1+\ldots+k_m=r} \binom{r}{k_1 \ldots k_m} (\lambda_1)_{k_1} \ldots (\lambda_m)_{k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m},$$

величины x_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{c-m+1}(x_1, \ldots, x_m) = 0, \\ a_{c-m+2}(x_1, \ldots, x_m) = 0, \\ \quad \ldots \\ a_{c-1}(x_1, \ldots, x_m) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Поместим, как и ранее, центральную вершину дерева в 0. Тогда соответствующий обобщённый многочлен Чебышёва P удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} P(z) - c_+ = z^c R(z), \\ P(z) - c_- = (1 - x_1 z)^{l_1} \ldots (1 - x_m z)^{l_m} Q(z)^k, \end{cases} \tag{7}$$

где Q и R — многочлены, $\deg Q = c - m$.

Выбирая основное значение корня (т. е. считая, что $(1 - x_i z)^{\lambda_i}$ равно 1 при $x = 0$), мы определяем функцию

$$F(z) = (1 - x_1 z)^{\lambda_1} \ldots (1 - x_m z)^{\lambda_m} Q(z),$$

аналитическую в некоторой окрестности нуля. Тогда из соотношений (7) следует, что

$$F(z)^k = c_+ - c_- + z^c R(z).$$

Пусть $c_+ - c_- = 1$, тогда $F(0) = Q(0) = 1$. Ряд Тейлора для функции F в нуле имеет вид

$$F(z) = Q \prod_{i=1}^{m} (1 - x_i z)^{\lambda_i} = 1 + b_c z^c + b_{c+1} z^{c+1} + \ldots.$$

Отсюда мы заключаем, что $Q = [q]_{c-1}$, где

$$q(z) = \prod_{i=1}^{m} (1 - x_i z)^{-\lambda_i},$$

а $[q]_n$ есть сумма первых n членов ряда Тейлора для q.

Пользуясь соотношением

$$(1 - z)^\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda)_j}{j!} z^j,$$

мы выводим, что $q = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z^i$, где a_i такие, как указано в формулировке предложения. Итак,

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{c-1} a_i z^i.$$

Вспоминая о том, что степень многочлена Q в действительности должна равняться $c-m$, мы получаем систему (6). $\square$

Может оказаться полезной следующая характеризация многочлена Q.

Предложение 3.2. *Многочлен Q, участвующий в формулировке предложения* 3.1, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2} - \left(c-1+z\sum_{i=1}^{m}\frac{(\lambda_i+1)x_i}{1-x_iz}\right)\frac{d}{dz} + \right. \\ \left. + \left(\sum_{i<j}\frac{(\lambda_i+\lambda_j)x_ix_j}{(1-x_iz)(1-x_jz)} + (c-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_ix_i}{1-x_iz}\right)\right]Q = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Дифференцируя оба уравнения системы (7) по z и полагая $h(z) = (1-x_1z)\dots(1-x_mz)$, мы получаем, что

$$\frac{dP}{dz} = (1-x_1z)^{l_1-1}\dots(1-x_mz)^{l_m-1}Q^{k-1}\cdot k\left(\frac{dQ}{dz}h - \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_ihx_i}{1-x_iz}Q\right) = \\ = z^{c-1}(cR+R'z),$$

откуда следует, что

$$\frac{dQ}{dz}h - \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_ihx_i}{1-x_iz}Q = \mathrm{const}\cdot z^{c-1}.$$

Применяя к обеим частям полученного равенства дифференциальный оператор $z\frac{d}{dz}+1-c$, после несложных преобразований получаем утверждение предложения. $\square$

Пример 3.3. Пусть $m=1$, т. е. мы имеем дело с серией $\mathrm{IV}\Big[l, \underbrace{k, k, \dots, k}_{c-1}\Big]$. В силу оставшейся ещё мультипликативной свободы мы можем положить $x_1 = 1$, тогда, домножая уравнение (8) на $1-z$ и полагая $\alpha = \lambda$, $\beta = \gamma = 1-c$, мы приходим к гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{d}{dz} - \alpha\beta\right]Q = 0.$$

Таким образом, $Q = {}_2F_1(l/k, 1-c; 1-c; z)$ и обобщённый многочлен Чебышёва для этой серии записывается в виде

$$P = (z-1)^l{}_2F_1\left(\frac{l}{k}, 1-c; 1-c; z\right)^k.$$

Пример 3.4. Пусть $m=2$, т. е. мы имеем дело с серией $\mathrm{IV}[l_1, l_2, k, \dots, k]$, где l_1, l_2 и k попарно различны. В этом случае система (6) состоит из единственного уравнения $a_{c-1}(x_1, x_2) = 0$. Полагая $x_2 = 1$, мы получаем

$$\sum_{k_1+k_2=c-1} \frac{c-1}{k_1!\,k_2!}(\lambda_1)_{k_1}(\lambda)_{k_2}x_1^{k_1} = 0. \tag{9}$$

Предложение 3.5. *Уравнение* (9) *эквивалентно уравнению*

$${}_2F_1(\lambda_1, 1-c; 2-c-\lambda_2; x) = 0, \tag{10}$$

где ${}_2F_1(a, b; c; x)$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Доказательство. Преобразуем многочлен в правой части (9) следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c-1)!}{k!(c-1-k)!}(\lambda_1)_k(\lambda_2)_{c-k-1}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c-1)(c-2)\dots(c-k)(\lambda_1)_k(\lambda_2)_{c-1}}{k!(\lambda_2+c-2)(\lambda_2+c-3)\dots(\lambda_2+c-k-1)}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(\lambda_1)_k(\lambda_2)_{c-1}(1-c)(1-c+1)\dots(1-c+k-1)}{k!(2-c-\lambda_2)(2-c-\lambda_2+1)\dots(2-c-\lambda_2+k-1)}x^k =$$

$$= (\lambda_2)_{c-1}\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(\lambda_1)_k(1-c)_k}{k!(2-c-\lambda_2)_k}x^k = (\lambda_2)_{c-1} \cdot {}_2F_1(\lambda_1, 1-c; 2-c-\lambda_2; x). \quad \square$$

Пример 3.6. Рассмотрим деревья типа $\mathrm{IV}[m_1, m_2, m_3]$. Подставляя в уравнение (9) $\lambda_1 = m_2/m_1$, $\lambda_2 = m_3/m_1$, мы получаем следующее квадратное уравнение, задающее поле определения этих деревьев:

$$m_2(m_1+m_2)x^2 + 2m_2m_3x + m_3(m_1+m_3) = 0.$$

Получаем $D/4 = -m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)$.

Рассмотрим серию $\mathrm{IV}[l, l, k, \dots, k]$, где $l \neq k$. В этом случае система (6) состоит из единственного уравнения $a_{c-1}(x_1, x_2) = 0$, которое теперь будет симметрическим относительно x_1 и x_2 (так как $l_1 = l_2 = l$). Нас интересует поле определения деревьев этого класса, для его описания мы перепишем последнее уравнение в терминах симметрических функций $\xi_1 = x_1 + x_2$ и $\xi_2 = x_1x_2$. Полагая затем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \xi$, мы получим уравнение, задающее поле определения серии $\mathrm{IV}[l, l, k, \dots, k]$.

Предложение 3.7. *Поле определения деревьев типа* $\mathrm{IV}\Big[l, l, \underbrace{k, \dots, k}_{c-2}\Big]$ *задаётся уравнением*

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \frac{n!}{i!\,(n-2i)!}\,\frac{\xi^i}{(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\dots(n+\lambda-i)} = 0, \tag{11}$$

где $n = c-1$.

Доказательство. Пусть $\alpha_n(\xi_1, \xi_2) = a_n(x_1, x_2)$, где

$$a_n = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k_1\, k_2} (\lambda)_{k_1} (\lambda)_{k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2},$$

$\lambda = l/k$. Многочлен $a_n(x_1, x_2)$ обнуляется дифференциальным оператором

$$D_{x_1 x_2} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 - x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Делая замену переменных, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + (x_1 + x_2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2},$$

$$D_{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left[(\lambda + 1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right].$$

Следовательно, многочлен $\alpha_n(\xi_1, \xi_2)$ аннулируется дифференциальным оператором

$$\mathcal{D}_{\xi_1 \xi_2} = (\lambda + 1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Поскольку $a_n(x_1, x_2)$ является однородным многочленом степени n, то многочлен $\alpha_n(\xi_1, \xi_2)$ имеет вид

$$\alpha_n(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^{[n/2]} A_i \xi_1^{n-2i} \xi_2^i.$$

Из условия $\mathcal{D}_{\xi_1 \xi_2} \alpha_n(\xi_1, \xi_2) = 0$ выводим, что

$$A_{i+1} = -\frac{(n - 2i)(n - 2i - 1)}{(i + 1)(n - i - 1 + \lambda)} A_i$$

и

$$A_i = (-1)^i \frac{n!}{i!\,(n - 2i)!\,(n - 1 + \lambda)(n - 2 + \lambda) \ldots (n - i + \lambda)} A_0.$$

Полагая $A_0 = 1$, $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta$ и $n = c - 1$, получаем утверждение предложения. □

Предложение 3.8. *Уравнение* (11) *эквивалентно уравнению*

$$_2F_1 \left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; 1 - \lambda - n; 4\xi \right) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (11) следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{n!}{i!\,(n-2i)!}\,\frac{\xi^i}{(1-(\lambda+n))(2-(\lambda+n))\dots(i-(\lambda+n))} =$$

$$= \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{n(n-2)\dots(n-2i+2)\times(n-1)(n-3)\dots(n-2i+1)}{i!\,(1-(\lambda+n))_i}\xi^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-n/2)_i(-(n-1)/2)_i}{i!\,(1-(\lambda+n))_i}(4\xi)^i = {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; 1-\lambda-n; 4\xi\right). \quad \square$$

Пример 3.9. Рассмотрим деревья типа $\mathrm{IV}[l,l,k,k,k]$, где $l \neq k$. Уравнение (11), задающее поле определения, принимает вид

$$1 - \frac{12x}{\lambda+3} + \frac{12x^2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} = 0.$$

Его дискриминант с точностью до квадрата равен $3(\lambda+2)(2\lambda+3)$, или $3(2k+l)(3k+2l)$.

Пример 3.10. Рассмотрим деревья типа $\mathrm{IV}[l,l,k,k,k,k]$, где $l \neq k$. Существуют три различных дерева этого типа, одно из которых центрально-симметрично. Уравнение (11), задающее поле определения деревьев без симметрии, принимает вид

$$1 - \frac{20x}{\lambda+4} + \frac{60x^2}{(\lambda+3)(\lambda+4)} = 0.$$

Его дискриминант с точностью до квадрата равен $5(\lambda+3)(2\lambda+3)$, или $5(3k+l)(3k+2l)$.

Замечание. Существует бесконечно много значений k и l, для которых дискриминант поля определения деревьев серий, рассмотренных в примерах 3.9 и 3.10, оказывается полным квадратом. В этих случаях соответствующие обобщённые многочлены Чебышёва оказываются определёнными над $\mathbb{Q}$ и не образуют одной орбиты Галуа.

Дискриминанты полей определения деревьев серий $\mathrm{IV}[m_1,m_2,m_3]$, $\mathrm{IV}[l,l,k,k,k]$, $\mathrm{IV}[l,l,k,k,k,k]$ в рассмотренных примерах являются произведением линейных форм от валентностей околоцентральных вершин. Воспользовавшись формулой дискриминанта для многочленов Якоби (см. [4]), можно вычислить дискриминанты многочленов (10) и (12), которые и в общем случае окажутся произведением линейных форм.

А. Звонкин в своём докладе на конференции по теории детских рисунков Гротендика в Люмини в 1993 г. (см. [12]) высказал гипотезу, что для произвольных натуральных чисел $m_1,\dots,m_c$ дискриминант поля определения деревьев серии $\mathrm{IV}[m_1,\dots,m_c]$ будет, с точностью до мультипликативной константы, произведением линейных форм от $m_1,\dots,m_c$, причём коэффициент при m_i в каждой из них равен либо 0, либо 1. Набросок доказательства этого факта был дан Б. Бёрчем в [8].

Квадратичные и кубические поля как поля определения деревьев диаметра 4

Предложение 3.11. *Всякое квадратичное поле является полем определения некоторого дерева диаметра* 4.

Доказательство. Пусть K — квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$. Возможны два следующих случая.

1. K — мнимое поле, т. е. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, где $D > 0$. Можно считать, что $D \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим серию $\mathrm{IV}[m_1, m_2, m_3]$ и положим $m_1 = 1$, $m_2 = 4D$ и $m_3 = 4D^2$. Поле определения такого дерева квадратично, и его дискриминант (см. пример 3.6) с точностью до квадрата равен $-m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3) = -D \cdot \big(2(1+2D)\big)^2$, т. е. совпадает с полем K.

2. K — вещественное поле, т. е. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $D > 0$. Рассмотрим серию $\mathrm{IV}[k, k, k, l, l]$. Поле определения таких деревьев квадратично, и его дискриминант равен $3(2k+l)(3k+2l)$ (см. пример 3.9). Нетрудно убедиться, что существует бесконечно много таких пар натуральных (и даже взаимно простых) k и l, что этот дискриминант, с точностью до квадрата, равен D. □

Предложение 3.12. *Всякое кубическое не вполне вещественное поле является полем определения некоторого дерева диаметра* 4.

Доказательство. Всякое кубическое уравнение может быть приведено к виду
$$x^3 + Ax + B = 0,$$
а затем с помощью преобразования $x = y - B/A$ к уравнению вида
$$y^3 + ay + a = 0 \tag{13}$$
с дискриминантом $D = -27a^2 - 4a^3$. Кубические не вполне вещественные поля соответствуют значениям $a > -27/4$, $a \neq 0$. Если $-27/4 < a < 0$, то, применяя преобразование Чирнгаузена $y = z^2 - 3/2z + 2/3a$ и приводя результат к виду (13), получим
$$z^3 - \frac{27a}{4a+27}z - \frac{27a}{4a+27} = 0 \text{ —}$$
уравнение вида (13) с параметром $a > 0$.

Таким образом, все кубические не вполне вещественные поля можно получить, рассматривая уравнения вида (13) с параметром $a > 0$.

Рассмотрим серию $\mathrm{IV}[k, k, l, m]$ (k, l, m — различные натуральные числа). Для каждого набора k, l, m имеются три таких дерева, два асимметричных и одно обладающее осью симметрии. Поле определения рассматриваемых деревьев задаётся уравнением
$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)x^3 + 3\lambda(\lambda+1)\mu x^2 + 3\lambda\mu(\mu+1)x + \mu(\mu+1)(\mu+2) = 0,$$
где $\lambda = l/k$, $\mu = m/k$, причём
$$\lambda \neq 1, \quad \mu \neq 1, \quad \lambda \neq \mu. \tag{14}$$

Это уравнение сводится к уравнению вида (13) с параметром
$$a = \frac{27\lambda^2\mu(\lambda+\mu+2)}{4(\lambda+1)(\lambda+2\mu+2)^2}.$$

Для любого рационального $a' > 0$ уравнение
$$a' = \frac{\lambda^2\mu(\lambda+\mu+2)}{(\lambda+1)(\lambda+2\mu+2)^2}$$
разрешимо в положительных рациональных числах. Действительно, мы можем взять $\lambda = 4a'+1$, $\mu = 2a'(4a'+3)$. При таком выборе λ и μ условия (14) выполнены всегда, кроме случая $a' = 1/4$.

Итак, для любого значения $a > 0$, $a \neq 27/16$, мы указываем такие k, l, m, что поле определения рассматриваемых деревьев совпадает с полем, определяемым уравнением (13) (для $a = 27/16$ уравнение (13) приводимо). Таким образом, всякое кубическое не вполне вещественное поле реализуется как поле определения деревьев типа $\mathrm{IV}[k,k,l,m]$. □

Пример 3.13. Используем приведённые выше формулы для построения бесконечной серии примеров деревьев типа $\mathrm{IV}[k,k,l,m]$ с нетранзитивным действием абсолютной группы Галуа.

Кубическое уравнение, имеющее рациональный корень, может быть приведено линейной заменой к виду
$$x^3 + bx + (b+1) = 0$$
или дальнейшей заменой $x = y(b+1)/b$ к виду
$$y^3 + \frac{b^3}{(b+1)^2}y + \frac{b^3}{(b+1)^2} = 0.$$

Полагая
$$\lambda = \frac{16b^3}{27(b+1)^2} + 1, \quad \mu = \frac{8b^3}{27(b+1)^2}\left(\frac{16b^3}{27(b+1)^2} + 3\right)$$
и выбирая взаимно простые k, l и m так, что $l/k = \lambda$, $m/k = \mu$, получаем для каждого рационального $b > 0$ пример распадения орбиты Галуа.

Литература

[1] Адрианов Н. М. О плоских деревьях с заданным количеством реализаций наборов валентностей // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 9—17.
[2] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
[3] Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985.
[4] Сегё Г. Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.
[5] Шабат Г. Б. Мнимо-квадратичные решения антивандермондовых систем с 4 неизвестными и орбиты Галуа деревьев диаметра 4 // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 229—236.

[6] Adrianov N., Shabat G. Plane trees and classical mathematics // J. Math. Sci. — 1996. — Vol. 82, no. 6. — P. 3747—3753.

[7] Adrianov N., Zvonkin A. Composition of plane trees // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 52, no. 1-3. — P. 239—245.

[8] Birch B. Noncongruence subgroups, covers and drawings // The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200). — P. 25—46.

[9] Kochetkov Yu. Yu. Trees of diameter 4 // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Proc. of the 12th Int. Conf., FPSAC '00, Moscow, Russia, June 26—30, 2000 / D. Krob, ed. — Berlin: Springer, 2000. — P. 447—475.

[10] Schneps L. Dessins d'enfants on the Riemann sphere // The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200). — Cambridge Univ. Press, 1994. — P. 47—78.

[11] Shabat G. B., Zvonkin A. K. Plane trees and algebraic numbers // Jerusalem Combinatorics '93 / H. Barcelo, G. Kalai, eds. — Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 178). — P. 233—275.

[12] The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200).

[13] Zapponi L. Fleurs, arbres et cellules: Un invariant galoisien pour une famille d'arbres // Compositio Math. — 2000. — Vol. 122, no. 2. — P. 113—133.