И. Н. Бернштейн, О. В. Шварцман, Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических кокстеровских групп, *Функц. анализ и его прил.*, 1978, том 12, выпуск 4, 79–80

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 4, 1978, 79—80

УДК 519.45

ТЕОРЕМА ШЕВАЛЛЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ КОКСТЕРОВСКИХ ГРУПП

И. Н. Бернштейн, О. В. Шварцман

1. Рассмотрим *комплексную кристаллографическую группу* W, т. е. дискретную группу аффинных преобразований комплексного аффинного пространства V с компактным фактором $X = V/W$. Предположим, что W порождена аффинными отражениями (W — *ccr*-группа). Будем называть *ccr*-группу W *кокстеровской* (*ccc*-группой), если группа dW линейных частей W — группа Кокстера (т. е. в некотором базисе записывается вещественными матрицами). Мы ограничимся далее случаем, когда группа W неприводима (как аффинная группа).

Цель этой заметки — описание структуры аналитического пространства $X = V/W$ для *ccc*-группы W. Оказывается, X является рациональным многообразием (с особенностями), а точнее *«взвешенным»* проективным пространством. Это является аналогом для *ccc*-групп классической теоремы Шевалле об инвариантах [1]. По-видимому, аналогичный результат верен для любых *ccr*-групп.

2. Классификация *ccc*-групп приведена в [3]. Пусть S — аффинная система корней на вещественном аффинном пространстве $V(\mathbf{R})$ (см. [2]). Мы будем считать, что конечная система корней dS неприводима и приведена и минимальная постоянная функция c в решетке функций, порожденной S, равна 1 (см. [2], § 6). Пусть $\tau \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$, V — комплексификация пространства $V(\mathbf{R})$. Для каждой пары $\alpha \in S$, $k \in \mathbf{Z}$ рассмотрим в V гиперплоскость $\pi(\alpha, k) = \{z \in V \mid \tau\alpha(z) = k\}$; группу движений пространства V, порожденную отражениями второго порядка в гиперплоскостях $\pi(\alpha, k)$, $\alpha \in S$, $k \in \mathbf{Z}$, обозначим через $W(S, \tau)$. Как показано в [3], $W(S, \tau)$ — неприводимая *ccc*-группа, и любая (неприводимая) *ccc*-группа изоморфна некоторой группе $W(S, \tau)$.

Определим число $p = p(S)$: $p = 2$ для систем типа $B_l^\vee$, $C_l^\vee$, $F_4^\vee$, $p = 3$ для $G_2^\vee$ и $p = 1$ для остальных систем (в частности, для всех систем типа $S(R)$) (см. [2], § 5)). Пусть $\Gamma_0(p)$ — группа преобразований верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \tau > 0$, имеющих вид $\tau \to (a\tau + b)/(c\tau + d)$, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $ad - bc = 1$ и $c \in p\mathbf{Z}$. Тогда $W(S, \tau) \approx W(S, \tau')$, если $\tau \sim \tau' \pmod{\Gamma_0(p)}$ и $W(S(R)^\vee, \tau) \approx W(S(R^\vee)^\vee, \tau')$, если $\tau' \sim -1/p\tau \pmod{\Gamma_0(p)}$; этим исчерпываются все изоморфизмы между группами $W(S, \tau)$ (см. [3]).

3. Пусть $W = W(S, \tau)$ — *ccc*-группа, действующая в l-мерном пространстве V, $n_0, \ldots, n_l$ — числовые отметки, сопоставленные вершинам схемы Дынкина системы $S^\vee$, двойственной S (см. [2], приложение 1).

Теорема. *Аналитическое пространство $X = V/W$ изоморфно «взвешенному» проективному пространству типа $n_0, \ldots, n_l$, т. е. фактор-пространству пространства $\mathbf{C}^{l+1} \setminus \{0\}$ по действию группы $\mathbf{C}^*$, заданному формулой $(z_0, \ldots, z_l) \mapsto (t^{n_0} z_0, \ldots, t^{n_l} z_l)$, $t \in \mathbf{C}^*$.*

В следующих пунктах мы приведем схему доказательства этой теоремы, основанного на теории θ-функций и автоморфных форм.

Аналогичными методами можно получить тождества Макдональда [2] и некоторые похожие тождества. На последнем этапе (см. п. 9) мы ограничимся для экономии места случаем $S = S(R)$. Заметим, что этот случай разбирается (с другой точки зрения) в [4]. Однако приведенное там доказательство опирается на ошибочное утверждение, что все эллиптические кривые изоморфны как вещественные алгебраические многообразия (см. [4], стр. 29).

4. Пусть C — камера системы S с вершинами $x_0, \ldots, x_l$ (x_0 — специальная точка для $S^\vee$), $\alpha_0, \ldots, \alpha_l$ — соответствующая база S, σ_i — отражение в корне α_i (см. [2]). Легко построить такие квадратичные функции $U_0, \ldots, U_l$ на V, что

$$\sigma_j(U_i) = U_i + \delta_{ij}\alpha_j \quad (j = 0, \ldots, l), \qquad U_i(x_0) = 0.$$

Пусть Λ — полугруппа по сложению, порожденная функциями U_i, $P = U_0 + \ldots + U_l \in \Lambda$. Для каждой функции $U \in \Lambda$ положим

$$M(U) = \min U(x),\ x \in V(\mathbf{R}),\ \text{и}\ N(U) = \widetilde{U}/\widetilde{U}_0 \in \mathbf{Z},$$

где $\widetilde{U}$ — квадратичная часть функции U. Положим

$$n_i = N(U_i), \quad g = N(P) = n_0 + \ldots + n_l.$$

Пусть W_S — аффинная группа Вейля системы S, $T \subset W$ — подгруппа сдвигов в направлении $\tau^{-1} V(\mathbf{R})$. Тогда $W = W_S \times T$.

5. 1-коцикл $\gamma = \{\gamma_w\}$ группы W со значениями в группе $\mathcal{O}^*(V)$ обратимых голоморфных функций на V назовем *четным*, если для любого отражения $\sigma \in W$ $\gamma_\sigma(z) = 1$ при $\sigma(z) = z$. Пусть $\widetilde{H}^1(W, \mathcal{O}^*(V))$ — подгруппа классов четных коциклов.

Предложение. *Группа* $\widetilde{H}^1(W, \mathcal{O}^*(V)) \approx \mathbf{Z}$. *В качестве образующей можно выбрать класс коцикла* γ: $\gamma_w = 1$ *при* $w \in T$, $\gamma_w = \exp[\nu(U_0 - w(U_0))]$ *при* $w \in W_S$ (*здесь и далее* $\nu = 2\pi i\tau$).

Для $k \geqslant 0$ рассмотрим коциклы $\gamma_w^k = (\gamma_w)^k$ и $\delta_w^k = (\det w)\,\gamma_w^{k+g}$ (здесь $\det w = \det(dw) = \pm 1$). Обозначим через A_k и B_k соответствующие пространства θ-функций ($A_k = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid wf = (\gamma_w)^k f$ для всех $w \in W\}$ и аналогично для B_k). Теорема стандартным образом вытекает из леммы.

Лемма. *Найдутся такие функции* $f_i \in A_{n_i}$, *что кольцо* $A = \oplus A_k$ *изоморфно* $\mathbf{C}[f_0, \ldots, f_l]$.

6. Каждой функции $U \in \Lambda$ сопоставим θ-функцию $\Sigma_U \in B_{N(U)}$, заданную рядом

$$\Sigma_U = \exp[-\nu(N(U+P)\,U_0 + M(U+P))]\sum(\det w)\,\exp[\nu w(U+P)]$$

(сумма по $w \in W_S$).

Введем в пространстве B_k скалярное произведение Зигеля, полагая

$$\| f \|^2 = \int | f(z) \exp(k\nu U_0(\varkappa(z))) |^2 \, d\mu(z),$$

где $\varkappa$: $V \to V(\mathbf{R})$ — проекция вдоль $\tau^{-1}V(\mathbf{R})$, интеграл берется по V/W, а μ — мера Лебега, нормированная условием $\mu(V/W) = 1$. Так же, как и в классической теории (см. [5], ch. III), доказывается, что функции Σ_U с $N(U) = k$ образуют ортогональный базис в B_k, причем $\| \Sigma_U \|^2 = \mathrm{const}\,(\operatorname{Im}\tau)^{l/2}$.

Отметим, что отображение $\theta \mapsto \Sigma_0 \cdot \theta$ задает изоморфизм A_k с B_k; в частности, $B_0 = \mathbf{C} \cdot \Sigma_0$.

7. Рассмотрим дифференцирования D_i: $A \to \mathcal{O}(V)$, где при $i = 1, \ldots, l$ D_i — производная по вектору $\tau^{-1}\operatorname{grad}\alpha_i$, а $D_0(f) = kf$ для всех $f \in A_k$. Если $f_i \in A_{n_i}$, то обозначим через $J(f_0, \ldots, f_l)$ определитель матрицы $D_i f_j$; легко видеть, что $J(f_0, \ldots, f_l) \in B_0$. Мы докажем, что $J(f_0, \ldots, f_l) \neq 0$ для некоторого набора f_i; отсюда вытекает, что функции $f_i \in A$ алгебраически независимы. Тогда несложное вычисление размерностей A_k (см. п. 6) показывает, что $A = \mathbf{C}[f_0, \ldots, f_l]$.

8. Рассмотрим пространство полилинейных форм $B_{n_0} \times B_{n_1} \times \ldots \times B_{n_l} \to \mathbf{C}$ и введем в нем скалярное произведение с помощью скалярного произведения Зигеля на пространствах B_k. Зададим форму L формулой $L(b_0, \ldots, b_l) = J(b_0/\Sigma_0, \ldots, b_l/\Sigma_0)/\Sigma_0$ и положим $F(\tau) = \| L \|^2$. Нам нужно доказать, что $F(\tau) \neq 0$ при любом τ, т. е. $L \not\equiv 0$.

9. Пусть S — система типа $S(R)$. Рассмотрим функцию $H(\tau) = F(\tau)\,(\operatorname{Im}\tau)^{l/2} \times \times |\eta(\tau)^{-l}|^2$, где η—функция Дедекинда (см. [2]). Используя инвариантность скалярного произведения Зигеля при изоморфизмах $W(S, \tau) \approx W(S, \tau')$ и свойства функций Σ_U (см. п. 6), можно показать, что функция $H(\tau)$ инвариантна относительно группы $\Gamma_0(1)$, является суммой квадратов модулей аналитических функций и допускает оценку $H(\tau)\,|\exp(\nu/3)|^2 \to 0$ при $\operatorname{Im}\tau \to +\infty$. Из этих свойств вытекает, что $H(\tau)$ нигде не обращается в нуль, ибо $H(\tau) \not\equiv 0$.

Заметим, что оценка для $H(\tau)$ выводится отдельно для каждой системы корней. Это очень грубая оценка; например, для систем A_l и C_l $H(\tau) = \mathrm{const}$.

Московский государственный университет
Московский электротехнический институт связи

Поступило в редакцию 2 августа 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Chevalley C., Amer. J. Math. 77, № 4 (1955), 778—782. 2. Macdonald I. G., Invent Math. 15, № 2 (1972), 91—143. 3. Бернштейн И. Н., Шварцман О. В., Деп. 4Е122, РЖ Физика твердого тела 18 Е, № 4 (1977). 4. Looijenga E., Invent. Math. 38, №1 (1976), 17—32. 5. Igusa C. I., Theta-functions, Berlin, Springer-Verlag, 1972.