Доклады Академии наук СССР
1960. Том 132, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР С. Н. МЕРГЕЛЯН

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ С ВЕСОМ НА ПРЯМОЙ

Пусть $0 < h(x) < 1$, $f(x)$ непрерывна на оси $-\infty < x < \infty$ и

$$\lim_{|x|\to\infty} h(x) f(x) = 0. \tag{1}$$

Через $E_n(h, f)$ обозначим нижнюю грань чисел

$$\sup_{-\infty<x<\infty} h(x)\,|f(x) - P_n(x)|$$

в классе всех полиномов степени не выше n.

В случае, когда соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(g, f) = 0$ выполняется для любой непрерывной функции $f(x)$ с условием (1), говорят, что *система полиномов полна с весом* $h(x)$ на прямой $-\infty < x < \infty$.

Скорость стремления к нулю чисел $E_n(h, f)$ при $n \to \infty$ в случае полноты зависит от свойств весовой функции $h(x)$ и аппроксимируемой функции $f(x)$.

Целью настоящей заметки является оценка скорости убывания к нулю $E_n(h, f)$, т. е. установление теоремы о наилучшем весовом приближении для определенного класса весовых функций $h(x)$.

Относительно $h(x)$ мы предположим, во-первых, что $h(x)$ допускает представление

$$h(x) = h(0)\exp\left\{-\int_0^{|x|} \frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

в котором $0 \leqslant \omega(t) < \infty$, $\omega(t)$ монтонно возрастает, и, во-вторых, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi$ расходится.

Первое требование относится к правильности убывания $h(x)$ на бесконечности, второе требование естественно и не снижает общности рассмотрений, так как является необходимым и достаточным условием полноты для функций $h(x)$, удовлетворяющих первому требованию.

В качестве аппроксимируемой функции в настоящей заметке рассматривается ядро Коши, т. е. функция вида $\frac{1}{x-a}$, где $\operatorname{Im} a \neq 0$.

Введем обозначения: $H(x) = \frac{1}{h(x)}$; $p(x) = \ln H(x)$; $q(x)$ — функция, обратная к функции $p(x)$; θ — произвольное число в пределах $0<\theta<1$ и $\varkappa = \frac{\theta^{2n+2}}{1-\theta^2}$. Пусть $\delta = \ln\frac{19h(0)}{eh(1)}$.

Теорема. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что неравенство*

$$E_n\left(h, \frac{1}{x-a}\right) < C\frac{h^2(1)}{h(0)}\frac{1-\varkappa}{|\operatorname{Im} a|}\exp\left\{\frac{|\operatorname{Im} a|}{\pi(1+|a|^2)}\int_0^{e^{-1}\theta q(n-\delta)} \frac{P(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi\right\}$$

справедливо для всех n, удовлетворяющих условиям $\varkappa < 1$ и $n > \delta$.

Доказательство. Можем, очевидно, считать, что $\alpha = \operatorname{Im} a > 0$. Через $M_{n,h}(z)$ обозначим $\sup|P(z)|$ среди всех полиномов степени не выше n, удовлетворяющих на действительной оси неравенству

$$h(x)\,|P(x)| \leqslant 1 + |x|. \tag{3}$$

Займемся сейчас оценкой $M_{n,h}(z)$ снизу, из которой легко будет следовать теорема. Вначале предположим, что функция $H(x)$ является целой четной функцией с неотрицательными коэффициентами

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \quad a_0 \geqslant 1, \quad a_k \geqslant 0.$$

Обозначим

$$\mu_{2k} = \max_{x \geqslant 0} [H(x)]^{-1/2k} x.$$

Из неравенства Коши следует, что

$$0 \leqslant a_k \leqslant \min_{x \geqslant 0} \frac{H(x)}{x^{2k}} = \left(\frac{1}{\mu_{2k}}\right)^{2k}, \quad k \geqslant 0.$$

Поэтому для отрезков ряда Тейлора будем иметь

$$0 \leqslant H(x) - P_{2n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^{2k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{x}{\mu_{2k}}\right)^{2k}.$$

Если $\lambda_n = \theta\mu_{2n+2}$, то, в силу монотонности чисел μ_{2n}, всюду на отрезке $|x| \leqslant \lambda_n$

$$H(x) - P_{2n}(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta^{2k} = \varkappa.$$

Полином $P_{2n}(z)$ имеет $2n$ корней, симметрично расположенных относительно действительной оси, вне этой оси.

Пусть $Q_n(z)$ означает полином степени n, корни которого совпадают с корнями $P_{2n}(z)$, расположенными в нижней полуплоскости. Соответствующей нормировкой $Q_n(z)$ можно добиться выполнения тождество

$$Q_n(z)\,\overline{Q}_n(z) \equiv P_{2n}(z),$$

в котором $\overline{Q}_n(z)$ имеет коэффициенты, комплексно сопряженные с коэффициентами полинома $Q_n(z)$. На отрезке $-\lambda_n \leqslant x \leqslant \lambda_n$ из неравенства

$$H(x) - P_{2n}(x) \leqslant \varkappa$$

с учетом $H(x) \geqslant 1$ получаем

$$|Q_n^2(x)| = |Q_n(x)\,\overline{Q}_n(x)| \geqslant (1 - \varkappa)\,H(x).$$

Кроме того, всюду на действительной оси

$$|Q_n^2(x)| = |P_{2n}(x)| \geqslant 1.$$

Поскольку все нули $Q_n(z)$ расположены в области $\operatorname{Im} z < 0$, к функции $\ln|Q_n^2(z)|$ применима формула Пуассона для представления гармонических функций в верхней полуплоскости. Из этой формулы при $z = a$ следует

$$\ln|Q_n^2(a)| = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|Q_n^2(\xi)|}{(\xi - \gamma)^2 + \alpha^2}\, d\xi.$$

Учитывая приведенные выше два неравенства для $Q_n^2(x)$, а также легко доказываемое неравенство

$$\frac{1}{1 + |a|^2}\,\frac{1}{1 + \xi^2} \leqslant \frac{1}{(\xi - \gamma)^2 + \alpha^2},$$

находим

$$\ln |Q_n^2(a)| \geqslant \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} \frac{\ln(1-\varkappa) H(\xi)}{(\xi-\gamma)^2+\alpha^2} d\xi \geqslant \frac{\alpha}{\pi(1+|a|^2)} \int_0^{\lambda_n} \frac{\ln H(\xi)}{1+\xi^2} d\xi + \ln(1-\varkappa).$$

Из определения μ_{2n} следует, что при любом $x > 0$

$$\mu_{2n} \geqslant x / \sqrt[2n]{H(x)}\,.$$

Выбирая x из условия $\ln H(x) = 2n$, получаем, в частности,

$$\mu_{2n} \geqslant e^{-1} q(2n),$$

откуда

$$\lambda_n \geqslant \theta e^{-1} q(2n+2).$$

Полином $Q_n^2(z)$ степени $2n$ удовлетворяет условию (3), поэтому

$$M_{2n,h}(a) \geqslant |Q_n^2(a)|.$$

Но, очевидно,

$$M_{2n+1,h}(a) \geqslant M_{2n,h}(a),$$

следовательно, независимо от четности числа $n \geqslant 0$, имеем

$$M_{n,h}(a) \geqslant (1-\varkappa) \exp\left\{\frac{\alpha}{\pi(1+|a|^2)} \int_0^{\theta e^{-1} q(n+1)} \frac{\ln H(\xi)}{1+\xi^2} d\xi\right\}. \tag{4}$$

Перейдем теперь к выводу аналогичного неравенства без предположения о том, что $H(x)$ является целой, четной функцией с неотрицательными коэффициентами, сохранив, однако, требование о представимости $h(x)$ в форме (2).

В. С. Виденским было установлено ([1]), что для любой функции $h(x)$ вида (2) существует функция $F(x)$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}, \quad b_0 > 0, \quad b_k \geqslant 0, \tag{5}$$

удовлетворяющая при достаточно больших $|x|$ неравенствам

$$x^{-2} F\left(\frac{x}{2}\right) < H(x) < F(x).$$

В дальнейшем Виденский улучшил этот результат, установив при тех же предположениях существование функции $F(x)$ вида (5) с условием $F(0) \geqslant 1$, для которой справедливы неравенства

$$\frac{1}{19} F(x) < H(x) < x^2 F(x) \quad \text{при } |x| > 1. \tag{6}$$

Воспользуемся существованием этой функции $F(x)$; для нее на всей оси выполняются, очевидно, соотношения

$$\frac{1}{19} \frac{H(0)}{H(1)} F(x) < H(x) < x^2 F(x) + H(1). \tag{7}$$

Из левого неравенства следует, что любой полином $R(x)$ с условием $|R(x)| \leqslant F(x)(1+|x|)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{H(0)}{19 H(1)} R(x)\right| \leqslant H(x)(1+|x|), \quad -\infty < x < \infty,$$

поэтому

$$M_{n,h}(\alpha) \geqslant \frac{h(1)}{19 h(0)} M_{n,\,1/F}(a).$$

Но для функции $1/F(x)$ выполняются те условия, при которых выведено неравенство (4). Мы можем поэтому для оценки $M_{n,\,1/F}(a)$ воспользоваться неравенством (4) с очевидной заменой в правой части функции $\ln H(x)$

на $\ln F(x)$ и $q(x)$ на $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная к $\ln F(x)$. Таким образом, мы имеем оценку снизу для $M_{n,h}(a)$ в терминах функции $F(x)$:

$$M_{n,h}(a) \geqslant \frac{h(1)}{19h(0)}(1-\varkappa)\exp\left\{\frac{\alpha}{\pi(1+|a|^2)}\int_0^{\theta e^{-1}\varphi(n+1)}\frac{\ln F(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\}. \tag{8}$$

Остается перейти при помощи неравенств (6) и (7) к оценке в терминах $h(x)$. Из левой части (7) находим оценку

$$\varphi(x+1) \geqslant q(x-\delta), \text{ где } \delta = \ln\frac{19h(0)}{eh(1)}.$$

Записывая неравенство (8) кратко в форме

$$M_{n,h}(a) \geqslant A\exp\left\{B\int_0^L \frac{\ln F(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\},$$

имеем

$$M_{n,h}(a) \geqslant A\exp\left\{B\int_0^L\frac{\ln H(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\}\cdot\exp\left\{B\int_0^L\frac{\ln F(\xi)-\ln H(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\},$$

причем $B \leqslant 1/\pi$ и

$$\exp\left\{B\int_0^2\frac{\ln F(\xi)-\ln H(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left\{-B\ln H(1)\int_0^1\frac{d\xi}{1+\xi^2}-2B\int_1^\infty\frac{\ln\xi}{1+\xi^2}d\xi\right\} \geqslant \theta_1[h(1)]^{\theta_2};$$

здесь $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ — абсолютные постоянные, $\theta_2 < 1$.

Учитывая эти соотношения, получаем окончательно

$$M_{n,h}(a) \geqslant C_0\frac{h^2(1)}{h(0)}(1-\varkappa)\exp\left\{\frac{\alpha}{\pi(1+|a|^2)}\int_0^{\theta e^{-1}q(n-\delta)}\frac{P(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\},\quad n \geqslant \delta,$$

где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

Переходя к наилучшим приближениям, заметим, что если $P(z)$ — произвольный полином степени $n+1$ с условием (3), то для полинома $S_n(z) = \dfrac{P(z)-P(a)}{(a-z)P(a)}$ будем иметь

$$\sup h(x)\left|S_n(x)-\frac{1}{x-a}\right| \leqslant \frac{C_1}{\alpha}\frac{1}{|P(a)|},$$

где $C_1 > 0$ — абсолютная постоянная.

Правая часть может быть сделана сколь угодно близкой к $\dfrac{C_1}{\alpha}\dfrac{1}{M_{n+1,h}(a)}$, левая часть при этом всегда не меньше $E_n\left(h, \dfrac{1}{x-a}\right)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно получить оценки наилучшего весового приближения для различных классов аппроксимируемых функций $f(x)$, которые могут быть охарактеризованы теми или иными дифференциальными свойствами. Для этого необходимо предварительно функцию $f(x)$ аппроксимировать линейными комбинациями функций $\dfrac{1}{x-a_1}, \ldots, \dfrac{1}{x-a_m}$ и выбрать оптимальным образом число полюсов m и их расположение.

Пользуюсь случаем выразить благодарность М. М. Джрбашяну за обсуждение и замечания, оказавшиеся весьма существенными при выполнении настоящей работы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 II 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Виденский, УМН, 9, № 2 (60), 212 (1954).