МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

О ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К АБСОЛЮТНЫМ РЕТРАКТАМ

П. В. Черников

В [1] вводятся понятия абсолютного t-ретракта и абсолютного t^*-ретракта, с помощью которых обобщаются теоремы Н. Н. Лузина и М. Фреше о структуре измеримых функций. В настоящей работе приводится вариант теоремы К. Борсука о продолжении отображений в случае, когда продолжаемое отображение является измеримым. При этом используются результаты [1].

Напомним определения [1] (условимся, что слово «отображение» всюду далее означает «непрерывное отображение», если не оговорено противное).

Замкнутое подмножество A компактного метрического пространства X назовем *t-ретрактом* X, если для всякой меры Радона $\mu \geqslant 0$ на A и любого $\varepsilon > 0$ существуют компакт $A_\varepsilon^\mu \subset A$ такой, что $\mu(A \setminus A_\varepsilon^\mu) \leqslant \varepsilon$, и такое отображение $r_\varepsilon^\mu \colon X \to A$, что $r_\varepsilon^\mu(x) = x$ для всех $x \in A_\varepsilon^\mu$.

Компактное метрическое пространство Y назовем *абсолютным t-ретрактом*, если всякое замкнутое подмножество A любого компактного метрического пространства X, гомеоморфное Y, является t-ретрактом X.

Класс всех абсолютных t-ретрактов обозначим AR_t.

Замкнутое подмножество A компактного метрического пространства X назовем *t^*-ретрактом* X, если для всякой меры Радона $\mu \geqslant 0$ на A существует такая последовательность отображений $\{r_n^\mu\}_{n=1}^\infty$, $r_n^\mu \colon X \to A$, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует компакт $A_\varepsilon^\mu \subset A$ такой, что $\mu(A \setminus$

$\setminus A_\varepsilon^\mu) \leqslant \varepsilon$, и последовательность $\{r_n^\mu\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно на A_ε^μ к i_A.

Компактное метрическое пространство Y назовем *абсолютным t^*-ретрактом*, если всякое замкнутое подмножество A любого компактного метрического пространства X, гомеоморфное Y, является t^*-ретрактом X.

Класс всех абсолютных t^*-ретрактов обозначим AR_{t^*}. Очевидно, что класс $AR_t \subset AR_{t^*}$.

Далее потребуется следующий вариант теоремы Борсука о продолжении гомотопии:

Пусть Y — компактное метрическое пространство и $Y \in ANR$. Пусть A — замкнутое подмножество бинормального пространства X, G-отображение множества $X \times \{0\} \cup A \times I$ в Y. Тогда существует гомотопия F: $X \times I \to Y$ такая, что $F \mid X \times \{0\} \cup A \times I = G$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — бинормальное пространство, A — компактное подмножество X, $\mu \geqslant 0$ — мера Радона на A, Y_0 — компактное метрическое пространство, $Y_0 \in ANR$, f: $A \to Y_0$ — μ-измеримое отображение. Пусть существует компактное метрическое пространство $Y \in AR_{t^*}$, гомотопически доминирующее Y_0. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует компакт $A_\varepsilon \subset A$ такой, что $\mu (A \setminus A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, и существует такое отображение f_ε: $X \to Y_0$, что $f_\varepsilon (x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Доказательство. Так как пространство Y гомотопически доминирует Y_0, то существуют отображения φ: $Y_0 \to Y$ и ψ: $Y \to Y_0$ такие, что $\psi\varphi$ гомотопно тождественному отображению пространства Y_0 на себя. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Лузина [2] для данного $\varepsilon > 0$ существует компакт $A_{\varepsilon/2} \subset A$ такой, что $\mu (A \setminus A_{\varepsilon/2}) \leqslant \varepsilon/2$ и сужение $f \mid A_{\varepsilon/2}$ непрерывно. По теореме [1] существует последовательность отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, f_n: $X \to Y$, таких, что $f_n(x) \to \varphi f(x)$ μ-почти всюду на $A_{\varepsilon/2}$. По теореме Егорова [2] найдется такой компакт $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon/2}$, что $\mu (A_{\varepsilon/2} \setminus A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно на A_ε к φf. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если g_1, g_2 — два отображения некоторого топологического пространства $\tilde{X}$ в $Y_0 \in ANR$, обладающие свойством $\rho(g_1(x), g_2(x)) < \varepsilon_0$ для всех $x \in \tilde{X}$, то $g_1 \simeq g_2$. Существует $\sigma > 0$ такое, что если $\rho(x, y) < \sigma$, $x, y \in Y$, то $\rho(\psi(x), \psi(y)) < \varepsilon_0$.

Найдется номер N такой, что

$$\rho(\varphi f(x), \quad f_N(x)) < \sigma$$

для всех $x \in A_\varepsilon$. Следовательно,

$$\rho(\psi\varphi f(x),\ \psi f_N(x)) < \varepsilon_0$$

для всех $x \in A_\varepsilon$. Поэтому $\psi\varphi f \mid A_\varepsilon \simeq \psi f_N \mid A_\varepsilon$, т. е. $f \mid A_\varepsilon \simeq \psi f_N \mid A_\varepsilon$. Отсюда по теореме Борсука следует, что существует отображение f_ε: $X \to Y_0$ такое, что $f_\varepsilon \mid A_\varepsilon = f \mid A_\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $Y \in AR_{t^*} \cap ANR$, *то* $Y \in AR_t$.

Доказательство следует из теоремы 1 и соответствующего результата [1].

Аналогично теореме 1 доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X — бинормальное пространство, A — замкнутое подмножество X, Y — компактное метрическое пространство, гомотопически доминирующее компактное метрическое пространство $Y_0 \in ANR$.*

Тогда, если для всякого отображения f: $A \to Y$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует отображение f_ε: $X \to Y$ такое, что $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in A$, то для всякого отображения f': $A \to Y_0$ существует такое отображение g: $X \to Y_0$, что $g \mid A = f'$.

Следствие. *Класс* $\varepsilon - AR \cap ANR = AR$ (определение ε-AR-пространства содержится в [3]).

Теорема 2 и ее следствие дополняют результат [4, лемма 1.2].

Автор благодарит В. И. Кузьминова за внимание к работе.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
02.04.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Черников П. В. О теоремах Лузина и Фреше.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 216—217.
[2] Шварц Л. Анализ. т. 1.— М.: Мир, 1972.
[3] Noguchi H. A generalization of absolute neighborhood retracts.— Kōdai Math. Sem. Rep., 1953, v. 1, p. 20—22.
[4] Обуховский В. В., Скалецкий А. Г. Некоторые теоремы о продолжении и квазипродолжении непрерывных отображений.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 135—141.