V. B. Larionov, On distribution of some classes of monotone k-valued functions on the lattice of closed classes,
Diskr. Mat., 2009, Volume 21, Issue 1, 66–77

Дискретная математика

том 21 выпуск 1 * 2009

УДК 519.7

О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов

© 2009 г. В. Б. Ларионов

В данной работе рассматривается одно из семейств замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций в многозначных логиках — семейство монотонных классов. Изучается вопрос о положении данных классов в решетке всех замкнутых классов функций в случае, когда они не являются предполными. Описано семейство монотонных классов, над которыми расположены бесконечные цепочки замкнутых классов, а также доказано, что в случае рассмотрения монотонных классов функций, сохраняющих частично упорядоченное множество с одним минимальным или одним максимальным элементом, минимальной многозначной логикой с подобным классом на бесконечной глубине является P_5.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06–01–00438а.

Введем обозначение $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Определение 1. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется функцией k-значной логики, $k \geqslant 2$, если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A множества P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка r и писать $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, если для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо неравенство $a_i \leqslant_r b_i$.

Определение 2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной относительно частичного порядка r, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, выполнено неравенство $f(\tilde{a}) \leqslant_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k, монотонных относительно r, называется монотонным классом M_r.

Для краткости мы будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k, а соответствующий монотонный класс обозначать M_H.

Определение 3. Пусть $p(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый предикат, определенный на E_k^n, $f(y_1, \ldots, y_m)$ — функция из P_k. Функция $f(y_1, \ldots, y_m)$ сохраняет предикат $p(x_1, \ldots, x_n)$, если для любых m наборов $(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, (a_{1m}, \ldots, a_{nm})$, удовлетворяющих предикату p, набор $f(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, f(a_{n1}, \ldots, a_{nm})$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = \text{TRUE} \iff x \leqslant_r y$ [1]. Везде далее, когда мы будем писать, что монотонный класс задается предикатом R, мы будем подразумевать именно описанный предикат $R(x, y)$.

В 1965 году Розенберг описал все предполные классы функций в k-значных логиках, $k \geqslant 3$ ([2]). Было показано, что они образуют шесть семейств: **C**, **B**, **S**, **M**, **U**, **L**. Детальное описание этих семейств можно найти в [1].

Семейство **M** является подмножеством множества классов монотонных функций. Известно [3], что монотонный класс является предполным (принадлежит множеству **M**) тогда и только тогда, когда частичный порядок, сохраняемый им, обладает в точности одним минимальным и одним максимальным элементом. В связи с этим возникает вопрос о том, какое положение в решетке замкнутых классов занимают остальные монотонные классы, а именно, может ли бесконечное множество замкнутых классов находиться над каким-либо из монотонных классов.

Далее мы расширим класс рассматриваемых частичных порядков и потребуем наличие единственного минимального или максимального элемента в частичном порядке, и покажем, что при этом найдутся монотонные классы с бесконечными цепочками классов сверху.

Нам также в дальнейшем понадобится семейство **C**.

Определение 4. Класс функций A принадлежит семейству **C**, если A — множество функций, сохраняющих центральный предикат p, то есть предикат, обладающий следующими свойствами.

(1) **Абсолютная симметричность.** Для любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, n\}$ и любого набора $\tilde{a} \in E_k^n$

$$p(a_1, \ldots, a_n) = \text{TRUE} \iff p(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = \text{TRUE}.$$

(2) **Абсолютная рефлексивность.** Предикат p истинен на любом наборе $\tilde{a}$ таком, что $a_i = a_j$ (в $\tilde{a}$ присутствуют хотя бы две равные компоненты).

(3) **Предикат p имеет центр**, то есть существует $h \in E_k$ такой, что для любого набора $\tilde{a} \in E_k^n$, у которого есть компонента равная h, справедливо равенство $p(\tilde{a}) = \text{TRUE}$.

Далее мы приведем некоторые результаты о соответствии Галуа между замкнутыми классами предикатов и функций.

Пусть T — некоторая система предикатов.

Определение 5 ([5]). (1) Если p — обозначение m-местного предиката из T, $x_1, \ldots, x_m$ — некоторые различные символы переменных, то $p(x_1, \ldots, x_m)$ — формула над T, реализующая предикат $p(x_1, \ldots, x_m)$. В этой формуле все переменные $x_1, \ldots, x_m$ — свободные, связанные переменные отсутствуют.

(2) Пусть $A(y_1, \dots, y_l)$ — формула над T со свободными переменными $y_1, \dots, y_l$, реализующая предикат $p(y_1, \dots, y_l)$. Тогда $(\exists y_i)A(y_1, \dots, y_i, \dots, y_l)$ — формула над T со свободными переменными $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_l$ и связанными переменными такими же, как у $A(y_1, \dots, y_l)$, с добавлением y_i, реализующая предикат $\exists y_i\, p(y_1, \dots, y_i, \dots, y_l)$.

(3) Пусть $A(y_1, \dots, y_l)$ — формула над T со свободными переменными $y_1, \dots, y_l$, реализующая предикат $p(y_1, \dots, y_l)$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ — не обязательно различные символы переменных, отличающиеся от символов связанных переменных формулы $A(y_1, \dots, y_l)$. Тогда $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$ — формула над T со свободными переменными $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ (тут имеются в виду все различные переменные из списка $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$) и связанными переменными такими же, как у $A(y_1, \dots, y_l)$, реализующая предикат $p(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$.

(4) Пусть $A(x_1, \dots, x_l)$ и $B(y_1, \dots, y_m)$ — формулы над T с множествами свободных переменных соответственно $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_m$, реализующие предикаты $p_1(x_1, \dots, x_l)$ и $p_2(y_1, \dots, y_m)$, множества всех переменных этих формул (свободных и связанных) не пересекаются. Тогда $A(x_1, \dots, x_l)\,\&\,B(y_1, \dots, y_m)$ — формула над T со свободными переменными $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m$, реализующая предикат $p_1(x_1, \dots, x_l)\,\&\,p_2(y_1, \dots, y_m)$. Множество связанных переменных этой формулы — объединение множеств связанных переменных формул $A(x_1, \dots, x_l)$, $B(y_1, \dots, y_m)$.

Замыканием $[T]$ системы T называется множество предикатов, реализуемых формулами над T.

Далее для простоты изложения будем называть операции над предикатами следующим образом: добавление квантора существования (п. 2 определения) — проекцией по соответствующей переменной, подстановку вместо $y_{j_1}, \dots, y_{j_h}$ одного и того же символа переменной (п. 3 определения) — отождествлением переменных $y_{j_1}, \dots, y_{j_h}$, операцию, описанную в п. 4 — произведением предикатов p_1 и p_2.

Обозначим через A_R класс функций, сохраняющих предикат R.

Определение 6. Предикаты R_1 и R_2 называются эквивалентными, если $A_{R_1} = A_{R_2}$. Под $R_1 = R_2$ будем подразумевать равенство предикатов как функций.

Если $R_1 \in [R_2]$, то $A_{R_2} \subseteq A_{R_1}$ ([1]). Этот факт будем обозначать $(*)$.

Обозначим через $\Phi(f)$ множество предикатов, каждый из которых сохраняется функцией f, а $\Psi(p)$ — множество всех функций, сохраняющих предикат p. Для произвольных множества функций A и множества предикатов T положим

$$\Phi(A) = \bigcap_{f \in A} \Phi(f), \qquad \Psi(T) = \bigcap_{p \in T} \Psi(p).$$

Основными результатами теории Галуа для замкнутых классов являются соотношения [4]

$$A = \Psi(\Phi(A)), \qquad T = \Phi(\Psi(T)), \tag{1}$$

где A — замкнутый класс функций, содержащий все селекторные функции (функции вида $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$), а T — замкнутый класс предикатов, содержащий все диагональные отношения (отношения вида $p(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_{i_1} = x_{j_1}) \dots (x_{i_l} = x_{j_l})$).

Пусть предикат $p \in [R]$, где R — предикат, задающий монотонный класс. Запишем p в виде формулы F. Заметим, что в формуле F можно вынести вперед все кванторы существования, не изменив предикат p. Везде далее мы будем считать, что предикат задается формулой именно такого вида.

Сопоставим F ориентированный граф G_F по следующему правилу: между множеством вершин G_F и множеством переменных F (учитываем и свободные и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, будем обозначать v_x. В графе G_F есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R(y, x)$.

Лемма 1. *Для любого предиката $p \in [R]$, где R задает монотонный класс, существует эквивалентный ему предикат p', задаваемый формулой F' такой, что в графе $G_{F'}$ отсутствуют ориентированные циклы.*

Доказательство. Напомним, мы предполагаем, что в формуле F вынесены вперед все кванторы существования. По сути, граф G_F задает внутреннюю часть формулы (без кванторов существования), поэтому описанные ниже операции над графом являются корректными.

Предположим, что в графе G_F есть ориентированные циклы. Выберем любой из них. Пусть он состоит из вершин, отвечающих свободным переменным $x_1, \ldots, x_l$ и связанным $y_1, \ldots, y_m$. Отождествим в предикате p переменные $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m$ и обозначим полученную переменную z (при этом из формулы выбросим кванторы существования $\exists y_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$). Возможны два случая: если в цикле не было ни одной свободной переменной (то есть $l = 0$), то объявим z связанной переменной (добавим в формулу квантор $\exists z$), в противном случае — свободной. Полученный предикат обозначим p'_1. Докажем теперь, что предикаты p и p'_1 эквивалентны. Для этого нам достаточно показать (в силу $(*)$), что $p \in [p'_1]$ и $p'_1 \in [p]$.

Пусть $l \neq 0$. Докажем первое включение. Пусть предикат

$$\tilde{p}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) = \exists z p'_1(z, x_{l+1}, \ldots, x_n) p_d(z, x_1) \ldots p_d(z, x_l),$$

где $p_d(x, y) = \mathrm{TRUE} \iff x = y$ — диагональ. Отметим, что согласно (1) $A_{p_d} = P_k$ и $p_d \in [p'_1]$ (любая функция из $A_{p'_1}$ сохраняет предикат p_d). Таким образом, $\tilde{p} \in [p'_1]$. Остается заметить, что $p = \tilde{p}$, поскольку если $p(\tilde{a}) = \mathrm{TRUE}$, то все переменные, соответствующие вершинам из цикла, обязаны принять равные значения (так как по построению графа формулы переменные, соответствующие соседним вершинам цикла, связаны отношением R).

Докажем теперь второе включение. Пусть предикат $\hat{p}$ получен из предиката p отождествлением первых l переменных (как описано в определении 3). Тогда $\hat{p} \in [p]$. Аналогично предыдущему случаю, $\hat{p} = p'_1$.

Если $l = 0$, то положим в доказательствах выше $\tilde{p} = p'_1$ и $\hat{p} = p$ соответственно, то есть в этом случае предикаты p и p'_1 равны.

Далее, если граф p'_1 содержит цикл, повторив описанную процедуру уже для p'_1, получим p'_2, эквивалентный p'_1 и p, и так далее, пока не получим предикат p' с графом без циклов (процесс конечен, так как на каждом шаге не может появиться новый цикл).

Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет сопоставить каждому предикату $p \in [R]$ ЧУМ. Сначала переходим к эквивалентному предикату p', заданному формулой F', как описано в лемме. Пусть между множеством элементов ЧУМ $L_{F'}$ и множеством всех переменных в формуле F' существует взаимно однозначное соответствие (опять обозначим это так: элемент $v_x \in L_{F'}$ соответствует переменной $x \in F'$). Если формула F' содержит запись

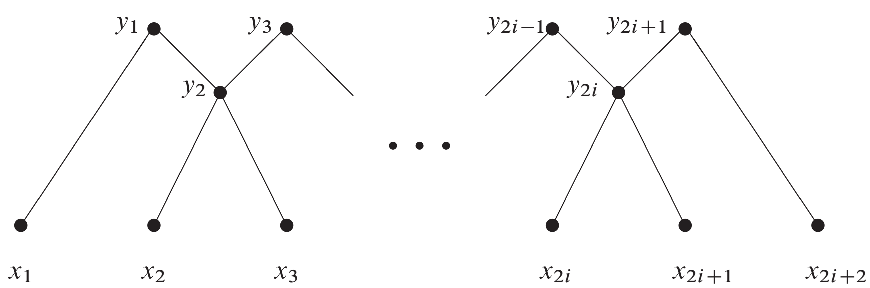

Рис. 1.

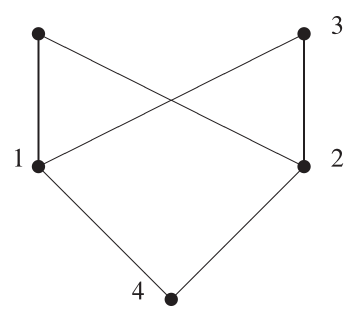

Рис. 2.

$R(x, y)$, то полагаем $v_x \leqslant v_y$. Замыканием по транзитивности получаем искомое ЧУМ $L_{F'}$ (поскольку R — отношение частичного порядка).

В дальнейшем будем задавать предикаты частично упорядоченными множествами с указанием того, какие переменные являются свободными, какие — связанными (считаем, что в формуле вынесены вперед все кванторы существования).

Будем задавать ЧУМ предикатов диаграммами Хассе (очевидно, можно удалить без потери информации ребра, соединяющие вершины, не являющиеся соседними), в которых из двух вершин, соединенных ребром, больше та, что выше. Поскольку по ЧУМ можно построить различные формулы, задающие один и тот же предикат, для определенности будем полагать, что в формулу предиката входят те и только те подформулы $R(x, y)$, которые соответствуют ребрам, изображенным на диаграмме Хассе.

Определим $(2i + 2)$-местный предикат R_i, $i \geqslant 1$, ЧУМ, изображенным на рис. 1.

Минимальные вершины соответствуют свободным переменным (кроме двух крайних, всего i пучков по две переменные), остальные — связанным.

Рассмотрим k-значную логику P_k.

Определение 7. Определим T как множество, состоящее из всех ЧУМ L, которые содержат подмножество H, изображенное на рис. 2. Причем в L не появляются пути из 0 в 3 по вершинам, являющимися максимумами 1 и 2 (под максимумом тут и далее мы подразумеваем вершину, большую указанных). Уточним это понятие: не существует последовательности вершин $z_1, \ldots, z_m$ в L такой, что $z_1 = 0$, $z_m = 3$, z_i сравнимо с z_{i+1}, $i = 1, \ldots, m-1$ (то есть либо $z_i \leqslant z_{i+1}$, либо $z_{i+1} \leqslant z_i$), все z_i — максимумы 1 и 2.

Таблица 1.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_{i-1}	x_i	$f(\tilde{x})$
0	0	0	$\ldots$	0	0	0
1	1	1	$\ldots$	1	4	1
2	2	2	$\ldots$	2	4	2
1	1	1	$\ldots$	4	1	1
2	2	2	$\ldots$	4	2	2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	4	$\ldots$	1	1	1
2	2	4	$\ldots$	2	2	2
1	4	1	$\ldots$	1	1	1
2	4	2	$\ldots$	2	2	2
4	1	1	$\ldots$	1	1	1
4	2	2	$\ldots$	2	2	2
3	3	3	$\ldots$	3	3	3

Обозначим множество вершин в L, являющихся максимумами 1 и 2, в которые можно попасть из вершины 0 (3), проходя только по максимумам 1 и 2 (в указанном в определении 7 смысле), через M_1 (соответственно M_2). Это условие означает, что $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Далее докажем, что над любым монотонным классом, сохраняющим некоторый частичный порядок из множества T, находится бесконечная цепочка классов.

Определим функции f_i в P_k как в табл. 1, и положим их равными 4 на остальных наборах.

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{a} \in E_k^{2h+2}$, $h \geqslant 1$. Разрежем его на $h+2$ куска: первая компонента $\{a_1\}$, h кусков размера 2 $\{a_{2(s+1)}, a_{1+2(s+1)}\}$, $s = 0, 1, \ldots, h-1$, последняя компонента $\{a_{2h+2}\}$. Будем говорить, что $\tilde{a} \in T_h$, тогда и только тогда, когда один кусок или два соседних куска $\tilde{a}$ содержат 0 и 3 или между кусками с этими значениями идут только куски со значениями $1, 2$ (с точностью до порядка) каждый (имеется в виду, что в каждом таком куске встречаются сразу и 1 и 2).

Возьмем любое ЧУМ $L \in T$ на E_k с подмножеством H, соответствующий ему монотонный класс обозначим M_L, а предикат — R. Рассмотрим функции f_i в P_k и предикаты $R_h \in [R]$, заданные описанным выше образом. Предположим, что мы выбираем из табл. 1 для функции f_i $2h+2$ строки для проверки предиката R_h. Получившиеся при этом столбцы обозначим соответственно через $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \bar{f}$.

Лемма 2. $R_h(\bar{f}) = \mathrm{TRUE}$ *тогда и только тогда, когда* $\bar{f} \notin T_h$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $R_h(\bar{f}) = \mathrm{TRUE}$. Предположим, что $\bar{f} \in T_h$. Если в $\bar{f}$ в одном или соседних кусках есть значения 0 и 3, то получаем, что $R_h(\bar{f}) = \mathrm{FALSE}$, поскольку 0 и 3 не имеют максимума в L, а в предикате есть связанная переменная, большая свободных переменных из любых двух соседних кусков (предполагаем, что свободные переменные предиката разбиты на такие же куски, как и наборы из E_k^{2h+2}).

В ином случае покажем, что не существует подходящего набора значений для связанных переменных предиката R_h, чтобы на наборе $\bar{f}$ он был истинен. Будем помечать вершины ЧУМ, задающего предикат R_h, значениями, которые принимают соответствующие им переменные. Пусть нижний слой вершин уже помечен значениями набора $\bar{f}$. Рассмотрим путь (в отличие от определения множества T, тут под этим понятием будем иметь в виду обычную последовательность вершин без пропусков) в ЧУМ от вершины со значением 0 к вершине со значением 3. Предположим для определенности, что 0 встречается в паре (x_i, x_{i+1}), а 3 в паре с большими номерами (x_j, x_{j+1}) (очевидно, этим не ограничивается общность рассуждений). Указанный путь выглядит так: $v_{y_i}, v_{y_{i+1}}, \dots, v_{y_{j-1}}, v_{y_j}$. Чтобы не нарушить монотонность, мы должны присвоить переменной y_{i+1} значение, являющееся максимумом 0, 1, 2, переменной y_{i+2} — значение, меньшее значения y_{i+1}, являющееся максимумом 1, 2 и т. д. Таким образом, на указанном пути мы можем присваивать связанным переменным только значения из множества M_1, определенного выше. Следовательно, для переменной y_{j-1}, находящейся на этом пути, получаем противоречие, поскольку $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Итак, снова $R_h(\bar{f}) = \text{FALSE}$.

Получаем, что $\bar{f} \notin T_h$.

Докажем достаточность. Пусть $\bar{f} \notin T_h$. Рассмотрим два случая.

1. В $\bar{f}$ вообще нет нуля (или 3). Тогда легко проверить, что, присвоив связанным переменным значение 3 (0), мы получим $R_h(\bar{f}) = \text{TRUE}$.

2. В $\bar{f}$ есть и 0, и 3. Здесь необходимо показать, что существует подходящий набор значений для связанных переменных, чтобы $R_h(\bar{f}) = \text{TRUE}$. Опять будем двигаться от вершины со значением 0 к вершине со значением 3 (подробно этот процесс описан в предыдущей части). Связанным переменным, соответствующим вершинам над первой, придадим значения 0. По определению множества T_h, на пути к вершине со значением 3 мы встретим кусок, в котором значения свободных переменных отличны от 1, 2 (с точностью до порядка) и нет 0 и 3. Пусть это произошло в l-м пучке, мы уже присвоили y_{2l-1} значение 0. Тогда мы присвоим значение 3 переменной y_{2l+1} и подходящее значение из множества $\{1, 2\}$ переменной y_{2l}. Далее на пути к вершине со значением 3 присвоим всем свободным переменным значение 3. Итак, получаем, что при данном расположении переменных со значениями 0 и 3 (первая имеет меньший номер), $y_m = 0$ при $m < 2l$, $y_m = 3$ при $m > 2l$. Снова получаем, что $R_h(\bar{f}) = \text{TRUE}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *$f_{2i} \notin A_{R_i}$ при $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Функция f_{2i} от $2i$ переменных, ее таблица 1 содержит $4i + 2$ строки (на остальных наборах значения равны 4). Найдем $2i + 2$ строки таблицы 1 для функции f_{2i}, которые по вертикали образуют векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2i}$ (для столбцов $x_1, \dots, x_{2i}$), и вектор $\bar{f}$ для столбца значений такие, что $R_i(\bar{x}_j) = \text{TRUE}$ для любых $j = 1, \dots, 2i$ и $R_i(\bar{f}) = \text{FALSE}$. Этим требуемое в лемме будет доказано.

Возьмем в таблице 1 для функции f_{2i} строки с номерами $1, 2, 5, 6, 9, \dots, 2 + 4p, 5 + 4p, \dots, 2i + 2$. Иными словами, возьмем первую строку (с нулями), из первого блока таблицы (то есть строк с номерами $1, 2$) возьмем строку, где значение функции равно 1, из второго — где 2, из третьего — где 1, из четвертого — где 2, и т. д.; наконец, из $(2i)$-го блока — где 2 и $(4i+2)$-ю строку со значениями 3. Из каждого блока таблицы мы возьмем ровно по одной строке. Всего блоков в таблице столько, сколько переменных у функции, то есть $2i$. Итого мы взяли $2i + 2$ строки. Согласно указанному выбору получаем, что $\bar{f} = (0, 1, 2, \dots, 1, 2, \dots, 1, 2, 3)$, где кусок $(1, 2)$ повторяется $2i$ раз. Очевидно, $\tilde{b} \in T_i$ и по лемме 2 $R_i(\bar{f}) = \text{FALSE}$.

С другой стороны, поскольку из каждого блока таблицы было взято по строке, в получившихся при этом векторах $\bar{x}_j$, $j = 1, \dots, 2i$ (которые образовались от столбцов $x_1, \dots, x_{2i}$) будет по одному разряду, равному 4 (каждый столбец x_j таблицы 1 содержит блок размера два, целиком равный 4). Значит, $\bar{x}_j \notin T_i$ для всех $j = 1, \dots, 2i$. По лемме 2 $R_i(\bar{x}_j) = \text{TRUE}$. Итак, требуемые вектора построены.

Лемма 4. *$f_{2i} \in A_{R_{i-1}}$ при $i \geqslant 2$.*

Доказательство. Предположим, что мы взяли какие-то $2(i-1)+2$ строки из таблицы 1 для f_{2i}. Снова обозначим (как в доказательстве леммы 3) получившиеся векторы (по вертикали) $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2i}$ и $\bar{f}$. Предположим, что $R_{i-1}(\bar{f}) = \text{FALSE}$. По лемме 2 $\bar{f} \in T_{i-1}$. Это означает, что вектор $\bar{f}$ после куска с 0 содержит двойки со значениями $1, 2$ и потом кусок с 3. Отметим, что по определению предиката R_{i-1}, число указанных двоек не превосходит $i-1$. Пусть эти двойки располагаются в строках таблицы 1 с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{2r}$, где $r \leqslant i-1$. Эти строки в свою очередь располагаются в не более, чем $2r$ блоках таблицы 1 для f_{2i}. Поскольку всего в этой таблице блоков $2i$, то найдется вектор $\bar{x}_j$, где в указанных $2r \leqslant 2(i-1)$ кусках не будет значений 4. Это означает, что $\bar{x}_j$ содержит те же двойки со значениями $1, 2$ между кусками с 0 и 3, то есть $\bar{x}_j \in T_{i-1}$ и по лемме 2 $R_{i-1}(\bar{x}_j) = \text{FALSE}$.

Итак, берем в левой части таблицы наборы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2i}$, которые удовлетворяют $R_{i-1}(\bar{x}_j) = \text{TRUE}$. Получаем, что соответствующий столбец справа (столбец значений) $\bar{f}$ удовлетворяет $R_{i-1}(\bar{f}) = \text{TRUE}$ (иначе, согласно приведенным выше рассуждениям, нашелся бы столбец слева, на котором предикат ложен).

Лемма 5. *$A_{R_i} \subseteq A_{R_{i-1}}$ при $i \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть некоторая функция от s переменных $f \in A_{R_i}$. Предположим, что $f \notin A_{R_{i-1}}$. Следовательно, как мы делали в предыдущих леммах, возьмем из таблицы для f векторы-столбцы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$ и $\bar{f}$ размера $2(i-1)+2$ такие, что $R_{i-1}(\bar{x}_j) = \text{TRUE}$ и $R_{i-1}(\bar{f}) = \text{FALSE}$. Возьмем в этом случае следующие строки таблицы функции f для предиката R_i: первые $2(i-1)+1$ строки — те же, что и для предиката R_{i-1}, а последнюю повторим 3 раза. Получившиеся векторы по аналогии обозначим $\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_s$ и $\bar{f}'$. Очевидно, что $R_i(\bar{x}'_j) = \text{TRUE}$ (в новых связанных переменных $R_i(\bar{x}'_j)$ мы просто повторим значение последней связанной переменной из $R_{i-1}(\bar{x}'_j)$). Однако, $R_i(\bar{f}') = \text{FALSE}$, поскольку иначе легко проверить, что, придав связанным переменным $R_{i-1}(\bar{f}')$ значения связанных переменных $R_i(\bar{f}')$ кроме последних двух, мы получили бы $R_{i-1}(\bar{f}') = \text{TRUE}$, что неверно.

Итак, мы получаем, что $f \notin A_{R_i}$, что приводит нас к противоречию. Это означает, что $f \in A_{R_{i-1}}$.

Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Над монотонным классом, сохраняющим любое ЧУМ из определенного выше множества T, находится бесконечная цепочка замкнутых классов.*

Отметим, что в [3] доказано, что при инвертировании ЧУМ соответствующий монотонный класс не меняется. Поэтому наши результаты справедливы и для всех монотонных классов, сохраняющих ЧУМ, получающийся инвертированием ЧУМ из множества T.

Рассмотрим теперь вопрос о минимальном k таком, что в P_k есть монотонный класс с бесконечным множеством замкнутых классов над ним в случае множеств с одним максимальным или одним минимальным элементом. С учетом сказанного выше достаточно исследовать только второй случай.

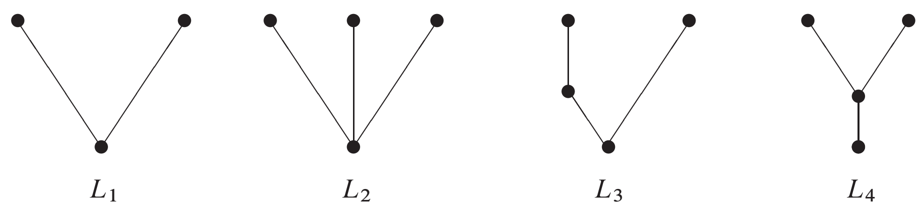

Рис. 3.

Рассмотрим пятизначную логику P_5 и монотонный класс функций, сохраняющих ЧУМ H, определенное выше. По доказанному над ним находится бесконечная цепочка классов. Покажем, что при меньших k искомых монотонных классов не будет.

Теорема 2. *Все монотонные классы в P_k, где $k \leqslant 4$, построенные на ЧУМ с одним минимальным или одним максимальным элементом и не являющиеся предполными, находятся непосредственно под некоторым предполным классом (иными словами, являются предпредполными).*

Доказательство. Рассмотрим некоторый монотонный класс M_H в P_3 или P_4 (напомним, M_H — класс функций, монотонных относительно частичного порядка, заданного ЧУМ H), заданный предикатом R, как описано выше, притом ЧУМ H имеет ровно один минимальный элемент и более одного максимального элемента. Нетрудно проверить, что H может быть одним из четырех множеств, чьи диаграммы Хассе приведены на рис. 3.

Нам достаточно показать, что любой класс A такой, что $M_H \subseteq A$ является либо P_k (мы уточним $k = 3$ или $k = 4$, когда это будет необходимо), либо самим M_H, либо некоторым предполным классом $A_{p'}$.

Очевидно, что M_H содержит все селекторные функции. Откуда получаем, что любой замкнутый класс A, содержащий класс M_H, также содержит все селекторные функции. Это означает, что для класса A (согласно (1)) справедливо равенство

$$A = \Psi(\Phi(A)).$$

Напомним, что $\Phi(A)$ — множество предикатов, каждый из которых сохраняет любая функция из A, причем Φ содержит все диагональные отношения.

Определим двуместный предикат p' следующим образом:

$$p'(x_1, x_2) = \exists y R(x_1, y) R(x_2, y). \tag{2}$$

Лемма 6. *Класс $A_{p'}$ является предполным классом из семейства* **C**.

Доказательство. Согласно определению класса из семейства **C**, достаточно доказать, что предикат $p'(x_1, x_2)$ является центральным.

Абсолютная рефлексивность и абсолютная симметричность очевидны. Центром предиката является m (минимум в ЧУМ H), так как $p'(m, x) = \exists y R(m, y) R(x, y)$ можно сделать истинным, придав значение связанной переменной y, равное x.

Лемма доказана.

Итак, пусть справедливо включение $M_H \subseteq A$, причем $\Phi(A) = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots\}$. Множество $\Phi(A)$ не обязательно конечно. Возьмем произвольный предикат $p \in \Phi(A)$. Справедливо включение $p \in [R]$ ([4]).

Покажем, что A_p совпадает либо с P_k, либо с M_H, либо с $A_{p'}$.

Применим к предикату p процедуру удаления циклов из его графа из леммы 1. Будем далее обозначать через p уже предикат с формулой F без циклов в графе. Построим ЧУМ L_F.

Лемма 7. *Если p не зависит существенно ни от одной переменной, то $A_p = P_k$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть тождественно истинный и тождественно ложный предикаты в определении сохранения предиката функцией.

Лемма 8. *Если в ЧУМ L_F найдется пара вершин $v_x \leqslant v_y$, отвечающих свободным переменным, то $A_p = M_H$.*

Доказательство. Возьмем в p проекции по всем переменным, кроме x, y. Покажем, что полученный предикат $r(x, y) = R(x, y)$ (R — предикат, задающий класс M_H). Очевидно, что из $r(a, b) = \text{TRUE}$, $a, b \in E_k$, следует, что $R(a, b) = \text{TRUE}$. Если $R(a, b) = \text{TRUE}$, присвоим связанным переменным предиката p, соответствующим вершинам, большим v_y в ЧУМ L, значение b, остальным связанным переменным — значение a. При этом получим, что $r(a, b) = \text{TRUE}$. Итак, $R \in [p]$. Это означает, что предикаты p и R эквивалентны и $A_p = M_H$.

Лемма доказана.

Будем далее рассматривать только ЧУМ L_p, в которых вершины, соответствующие свободным переменным, несравнимы.

Лемма 9. *Можно преобразовать ЧУМ L_p так, чтобы соответствующие свободным переменным вершины и только они являлись минимумами. При этом предикат p не изменится.*

Доказательство. Удалим из L_p все вершины (и инцидентные им ребра), соответствующие связанным переменным предиката p, ниже которых нет ни одной вершины, соответствующей свободной переменной. Полученный предикат обозначим r. Покажем, что $r = p$.

Если $p(\tilde{a}) = \text{TRUE}$, очевидно, что $r(\tilde{a}) = \text{TRUE}$. Обратно, пусть $r(\tilde{a}) = \text{TRUE}$. Придадим удаленным связанным переменным в p значение минимума m, остальным — те же значения, что и в r. При этом получим, что $p(\tilde{a}) = \text{TRUE}$.

Лемма доказана.

Осуществим указанное преобразование с L_p.

Итак, остался вариант, когда p зависит существенно хотя бы от одной переменной, и в L_p все вершины, соответствующие свободным переменным, и только они, являются минимумами.

Построим по предикату p предикат $\hat{p}$ по следующему правилу. В $\hat{p}$ входит сомножитель $\exists y R(x_i, y) R(x_j, y)$ (в каждом таком сомножителе связанная переменная y своя, переменные x_l свободные) тогда и только тогда, когда в ЧУМ L_p предиката p есть вершина v_y, большая вершин v_{x_i} и v_{x_j} (понятно, что y является связанной переменной предиката p). Других сомножителей в $\hat{p}$ нет.

Лемма 10. *Предикаты $\hat{p}$ и p' эквивалентны.*

Доказательство. Включение $\hat{p} \in [p']$ очевидно по построению предиката $\hat{p}$.

Поскольку предикат p существенно зависит хотя бы от одной переменной, в ЧУМ L_p есть компонента связности, содержащая хотя бы две вершины, отвечающие некоторым свободным переменным x_i и x_j. Поскольку мы удалили все вершины, соответствующие связанным переменным, ниже которых нет вершин, соответствующих свободным переменным, в p найдется вершина v_y такая, что $v_{x_i} \leqslant v_y$ и $v_{x_j} \leqslant v_y$. Этим же свойством будет обладать и ЧУМ $L_{\hat{p}}$ предиката $\hat{p}$. Возьмем в $\hat{p}$ проекции по всем переменным кроме x_i и x_j. Покажем, что полученный при этом предикат $r = p'$.

Очевидно, что $r(a,b) = \mathrm{TRUE} \;\Rightarrow\; p'(a,b) = \mathrm{TRUE}$. Пусть $p'(a,b) = \mathrm{TRUE}$. Придадим связанной переменной y предиката $\hat{p}$ значение, которая приняла единственная связанная переменная в $p'(a,b) = \mathrm{TRUE}$; связанным переменным, которым соответствуют вершины в $L_{\hat{p}}$, большие v_{x_i} (v_{x_j}), значения a (соответственно b), остальным связанным переменным предиката $\hat{p}$ — значение m. Легко понять, что при этом $r(a,b) = \mathrm{TRUE}$. Получаем, что $p' \in [\hat{p}]$.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Для изображенных на рис.* 3 *ЧУМ* $p = \hat{p}$.

Доказательство. Возьмем произвольный набор $\tilde{a} \in E_3^n$, если мы рассматриваем монотонный класс с ЧУМ L_1 и $\tilde{a} \in E_4^n$ в случае L_2, L_3, L_4.

Рассмотрим следующие два случая.

1. В ЧУМ L_F предиката p есть вершина v_y, которая больше двух вершин v_{x_i} и v_{x_j}, соответствующих свободным переменным, и при этом значения a_i и a_j, которые приняли эти свободные переменные, не имеют максимума в рассматриваемом L_i, $i = 1,2,3,4$. Понятно, что в этом случае такое же отношение из трех вершин будет и в ЧУМ $L_{\hat{F}}$. Следовательно, $\hat{p}(\tilde{a}) = p(\tilde{a}) = \mathrm{FALSE}$ (мы не найдем подходящего значения для связанной переменной y).

2. Пусть для каждой вершины v_y в L_F, соответствующей связанной переменной y, все значения $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$, которые приняли свободные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, для которых $v_{x_{i_j}} \leqslant v_y$, имеют максимум $y_{\max}$ в L_i. Очевидно, что $\hat{p}(\tilde{a}) = \mathrm{TRUE}$.

Присвоим в $p(\tilde{a})$ каждой связанной переменной y значение $y_{\max}$, как будет описано ниже. Пусть $i = 1,2,3$. Если оказалось, что все $a_{i_j} = m$, положим $y_{\max} = m$, в противном случае положим $y_{\max}$ равным одному из максимальных элементов L_i (не нарушая при этом то свойство, что $y_{\max}$ — максимум указанных выше значений). В случае $i = 4$ придадим $y_{\max}$ значение элемента m' из L_4, находящегося непосредственно над m, если все a_{i_j} равны m или m'. В противном случае поступаем аналогично рассмотренному случаю $i = 1,2,3$.

Предположим, что $p(\tilde{a}) = \mathrm{FALSE}$. Это значит, что у нас в присвоении выше найдется пара вершин $v_{y_1} \leqslant v_{y_2}$ такая, что мы присвоили y_1 значение, несравнимое по L со значением y_2 (легко понять, что согласно выбору $y_{\max}$ не может быть значение, присвоенное y_1, больше, чем значение, присвоенное y_2). Это может только означать, что найдутся вершины v_{x_i} и v_{x_j} такие, что $v_{x_i} \leqslant v_{y_1}$ и $v_{x_j} \leqslant v_{y_2}$, переменные x_i и x_j приняли несравнимые значения $a_i \leqslant y_{1\max}$ и $a_j \leqslant y_{2\max}$. По ЧУМ L_i видно, что любые такие значения не имеют максимума. Однако, большая из двух вершин v_{y_1}, v_{y_2} (мы предположили, что они сравнимы, у нас это v_{y_2}) является максимумом v_{x_i} и v_{x_j}. Получаем противоречие с определением второго случая (это было рассмотрено в первой части).

Итак, $p(\tilde{a}) = \mathrm{TRUE}$ и $p = \hat{p}$.

Лемма доказана.

Итак, по леммам 10, 11 получаем, что в оставшемся случае $A_p = A_{p'}$. Отметим, что это справедливо для любого предиката $p \in \Phi(A)$, а класс A является пересечением всех таких A_p.

Напомним, что мы рассмотрели произвольный класс A, включающий в себя один из четырех монотонных классов M_H, задаваемых множествами L_i. Мы показали, что A является одним из трех замкнутых классов P_k, $A_{p'}$, M_H. По лемме 6 $A_{p'}$ является предполным классом семейства **C**. Отсюда следует и то, что эти три класса различны.

Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы следует, что в рассматриваемом классе монотонных функций минимальной логикой с монотонным классом на бесконечной глубине (с бесконечной цепочкой над ним) является P_5.

Примечательным является то, что рассмотренное ЧУМ H помимо единственного минимума имеет всего два максимума.

Список литературы

1. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А., *Предполные классы в многозначных логиках*. Издательский дом МЭИ, Москва, 1997.

2. Rosenberg I., La structure des fonctions de plusieur variables sur un ensemble fini. *C. R. Acad. Sci., Paris* (1965) **260**, 3817–3819.

3. Мартынюк В. В., Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках. *Пробл. киберн.* (1960) **3**, 49–61.

4. Бондарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., Теория Галуа для алгебр Поста. *Кибернетика* (1969), №3, 5, 1–10, 1–9.

5. Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2000.

Статья поступила 19.08.2008.