И.В.Андронов

# ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ОСОБЕННОСТЬ

При исследовании явления дифракции волн на препятствиях в форме отрезка метод функции Грина приводит к интегральным уравнениям свертки. Для волновых явлений, описываемых в стационарном режиме уравнением Гельмгольца, такие интегральные уравнения широко известны [I]. Ядра в этих уравнениях имеют логарифмическую особенность. Однако при исследовании дифракции волн, описываемых дифференциальными уравнениями более высокого, чем оператор Гельмгольца, порядка, класс уравнений свертки расширяется. Так, задача дифракции изгибных волн в тонкой упругой пластине, описываемых уравнением четвертого порядка, на конечной прямолинейной трещине сводится к интегральным уравнениям с гиперсингулярными ядрами [2] (Особенности $\partial^2/\partial x^2 \ln|x-t|$ и $\partial^4/\partial x^4 \ln|x-t|$). При переходе к уточненным моделям колебаний пластин и оболочек [3] могут возникать интегральные уравнения, имеющие более высокие сингулярности ядер. Во всех этих случаях интегралы должны пониматься в некотором обобщенном смысле.

В работе проводится исследование свойств решений уравнений свертки на отрезке с ядрами вида:

$$K(x,t) = \partial^{2n}/\partial x^{2n}\left(\ln|x-t| + K'(x-t)\right) \quad (\mathrm{I})$$

В формуле (I) параметр $n$ принимает целые положительные значения. Функция $K'$ представима в виде

$$K'(s) = a(s^2)\ln|s| + b(s^2), \quad (2)$$

где $a(z)$ и $b(z)$ – бесконечно дифференцируемые, убывающие на бесконечности функции и $a(0)=0$. Кроме того, предполагается, что Фурье-символ ядра является секториальным, то есть имеет знакоопределенную проекцию на некоторое направление в комплексной плоскости. Для указанных уравнений устанавливаются теоремы существования и единственности решений в определенных пространствах, исследуются свойства гладкости решений.

Процедура регуляризации интегральных уравнений с ядрами (I) состоит в смене порядка интегрирования и дифференцирования, что приводит к интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t|+K'(x-t)\right)\varphi(t)\,dt=f(x),\quad |x|<1. \qquad (3)$$

При $n=0$ разрешимость уравнений (3) исследована в [I], гладкость решений для случая ядер (I) с $a(z)\equiv 0$ исследована в [4]. В частности в этих работах показано, что для интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t|+M(x,t)\right)\varphi(t)\,dt=f(x),\quad |x|<1, \qquad (4)$$

с функцией $M(x,t)$, удовлетворяющей условию Гельдера по обеим переменным, возможны две ситуации:

I. интегральное уравнение однозначно разрешимо для любой гладкой $f(x)$;

2. существует отличное от нуля решение $\Phi(x)$ однородного уравнения, союзного (4). Для разрешимости (4) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-1}^{1}\Phi(x)f(x)\,dx=0.$$

При этом решение $\varphi(t)$ содержит однопараметрический произвол.

ЛЕММА I. Для интегрального уравнения (4) с разностным ядром $M(x,t)=K'(x-t)$ и секториальным символом реализуется лишь случай I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ядро является разностным, союзное уравнение совпадает с исходным

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t|+K'(x-t)\right)\Phi(t)\,dt=0,\quad |x|<1. \qquad (5)$$

Домножим уравнение (5) на $\overline{\Phi(x)}$ (черта - символ комплексного сопряжения) и проинтегрируем по $x$. После перехода к преобразованию Фурье имеем

$$\int_{0}^{\infty}k(\tau)|v(\tau)|^2d\tau=0,\quad v(\tau)=\int_{-1}^{1}\Phi(x)e^{i\tau x}dx.$$

Откуда с учетом секториальности $k(\tau)$ приходим к $v(\tau)\equiv 0$ и, следовательно, $\varphi(t) \equiv 0$. То есть союзное уравнение не имеет отличного от нуля решения.

Относительно структуры и гладкости решений воспользуемся следующим результатом [4] (утверждение несколько загрублено): Решение интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \left( \ln|x-t| + L(x-t) \right) \varphi(t) \quad dt = f(x), \ |x| < 1$$

для $L(s) \in C^{\infty}$ и $f(x) \in C^{M+2}[-1,1]$ представимо в виде

$$\varphi(t) = \frac{\chi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{6}$$

где $\chi(t) \in C^{M}[-1,1]$.

Обобщим этот результат для интегральных уравнений вида (2) $n = 0$.

ЛЕММА 2. Если интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-t| \sum_{\ell=0}^{N} \mu_\ell (x-t)^\ell \varphi(t) dt = f(x),$$

безусловно разрешимо, то его решение для любого $f(x)$ из $C^{M+2}[-1,1]$ представимо в виде (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро уравнения может быть легко переписано в виде

$$\sum_{\ell=0}^{N} \mu'_\ell \frac{d^{N-\ell}}{dx^{N-\ell}} \left( \ln|x-t| (x-t)^N \right) + R(x-t),$$

где $R$ – некоторый полином. Меняя порядок дифференцирования и интегрирования, относительно функции

$$w(x) = L^N \varphi = \int_{-1}^{1} \ln|x-t| (x-t)^N \varphi(t) dt$$

получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{\ell=0}^{N} \mu'_\ell \frac{d^{N-\ell}}{dx^{N-\ell}} w(x) = f(x) - \int_{-1}^{1} R(x-t) \varphi(t) dt .$$

Поскольку правая часть этого уравнения лежит в $C^{M+2}[-1,1]$, решение $W(X)$ является функцией из $C^{N+M+2}$ и $d^N W(X)/dX^N \in$ $\in C^{M+2}$. Выражение $d^N L^N \varphi(X)/dX^N$ будем теперь понимать как результат действия на функцию $\varphi(t)$ оператора $L^0 \equiv d^N L^N/dX^N$ с ядром $\ln|X-t| + \mathrm{const}$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ является решением интегрального уравнения $L^0\varphi = W(X)$ с правой частью $W(X)$ из $C^{M+2}[-1,1]$. Как было отмечено выше, решение такого уравнения представимо в требуемом виде.

ЛЕММА 3. Решение интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t| + K'(x-t)\right)\varphi(t)\,dt = f(x),$$

где $K'$ имеет вид (2), для любого $f(X)$ из $C^{M+2}[-1,1]$, представимо в виде (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть $N$-я производная $\chi(t)$ разрывна. Тогда разложим $a(s)$ в ряд Тейлора и удержим в левой части $N+1$ член, а остаток перенесем в правую вместе со сверткой $\varphi(t)$ с $b(t)$. Выполняя дифференцирование под знаком интеграла, легко показать, что правая часть является функцией из $C^{N+2}[-1,1]$ и, согласно лемме 2, $\chi \in C^N[-1,1]$. Таким образом, мы пришли к противоречию, что ввиду единственности решения и доказывает лемму.

Теперь вернемся к интегро-дифференциальным уравнениям (3) при $n>0$. Обобщая представление (6), введем для решений следующие пространства функций на отрезке $[-1,1]$. Будем говорить, что функция $\varphi(t) \in S_n$, если она представима в виде

$$\varphi(t) = (1-t^2)^{\delta_n}\psi(t),\ \delta_n = n-1+\varepsilon,\ \varepsilon>0, \psi \in C^1[-1,1]. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА. Решение интегрального уравнения (3) в пространстве $S_n$ для любой непрерывной $f(X)$ существует и единственное. При этом в представлении (7) $\varepsilon = 1/2$, а функция $\psi(t) \in C^M[-1,1]$, где $M = N-2+n$ для $f(X) \in C^N[-1,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n=0$ утверждение теоремы объединяет леммы I и 3. Для $n>0$ доказательство проведем по индукции.

Пусть теорема верна для некоторого $n=n'$. Интегрируя (3) дважды по $X$ имеем

$$\frac{d^{2n'}}{dx^{2n'}}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t| + K'(x-t)\right)\varphi(t)\,dt = F(X) + c_0 + c_1 x.$$

Согласно предположению о справедливости теоремы для $n=n'$, решение $\varphi(x)$ представим в виде $\varphi(x)=(1-x^2)^{n'-1/2}\chi(x)$ с функцией $\chi(x)$ из $C^{N-2+n'}[-1,1]$, для доказательства теоремы остается показать, что постоянные интегрирования $C_0$ и $C_1$ могут быть подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\chi(\pm 1)=0. \tag{8}$$

Используя решения $\varphi_I(t), \varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{2n'}}{dx^{2n'}}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t|+K'(x-t)\right)\begin{bmatrix}\varphi_I(t)\\ \varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}F(x)\\ 1\\ x\end{bmatrix}, \tag{9}$$

условия (7) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}C_0\chi_0(+1)+C_1\chi_1(+1)&=\chi_I(+1),\\ C_0\chi_0(-1)+C_1\chi_1(-1)&=\chi_I(-1).\end{aligned} \tag{I0}$$

Здесь $\chi_0(t), \chi_1(t)$ и $\chi_I(t)$ - функции из представления (7) для решений $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ и $\varphi_I(t)$ соответственно.

Поскольку $\chi_0(t)$ - четная, а $\chi_1(t)$ - нечетная функции, определитель системы (I0) отличен от нуля в том случае, если $\chi_0(\pm1)\neq 0$ и $\chi_1(\pm1)\neq 0$, то есть $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)\notin S_{n'+1}$.

Для доказательства этого факта произведем в (8) для $\varphi_0$ и $\varphi_1$ интегрирование по частям, а затем продифференцируем уравнения по $x$

$$\frac{d^{2n'}}{dx^{2n'}}\int_{-1}^{1}\left(\ln|x-t|+K'(x-t)\right)d\varphi_j(t)/dt\,dt=j, \quad |x|<1.$$

Откуда, предположив, что $\varphi_0\in S_{n'+1}$, приходим, ввиду единственности решения, к $\varphi_0(t)\equiv 0$, противоречащему (9). Для $\varphi_1$ такое представление приводит к

$$\varphi_1(t)=\int_{-1}^{t}\varphi_0(t')\,dt'. \tag{II}$$

Домножим уравнение (9) для $\varphi_0$ на $\overline{\varphi_0(x)}$ и проинтегрируем по по $x$ на интервале $[-1,1]$. С учетом (II) имеем

$$\int_{-1}^{1} \overline{\varphi_0(x)} \frac{d^{2n'}}{dx^{2n'}} \int_{-1}^{1} \left( \ln|x-t| + K'(x-t) \right) \varphi_0(t)\, dt\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \overline{\varphi_0(t)}\, dt = \lim_{t \to 1} \overline{\varphi_1(t)} = 0 .$$

Производя $n'$ -кратное интегрирование по частям (внеинтегральные члены отсутствуют ввиду $\varphi_0 \in S_{n'}$ ) и переходя к преобразованию Фурье-ядра, имеем

$$\int_{0}^{\infty} K(\omega) |u(\omega)|^2 d\omega = 0 ,$$

где

$$u(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} d^{n'} \varphi_0(t) / dt^{n'} dt .$$

С учетом свойства секториальности символа это дает $u(\omega) \equiv 0$ и, следовательно, $d^{n'} \varphi_0(t) / dt^{n'} \equiv 0$ , что противоречит структуре (7) решения уравнения (9). Таким образом предположение неверно, то есть решения $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ не лежат в $S_{n'+1}$ .

Существование в $S_{n'+1}$ и единственность решения интегро-дифференциального уравнения (3) для $n = n'+1$ при любой гладкой правой части доказаны. Докажем свойство гладкости функции $\psi(t)$ в представлении (7) этого решения. Очевидно, что для $f(x) \in C^N[-1,1]$ функция $F(x) \in C^{N+2}[-1,1]$ и, согласно предположению о справедливости теоремы для $n = n'$, $\chi(t) \in C^{N+n'}[-1,1]$ . Очевидно, что после деления $\chi(t)$ на $1-t^2$, показатель гладкости может уменьшиться лишь на единицу, то есть $\psi(t) \in C^{N-1+n'}[-1,1]$.

Таким образом, теорема доказана для $n = n'+1$ и, тем самым, ввиду её справедливости для $n = 0$ - для любого положительного $n$ .

Литература


1. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. М. 1977 .
2. А н д р о н о в И.В. Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине. ПММ, 1990, Т.54, вып.2. С.312-321.

3. Бобровницкий Ю.И., Мальцев К.И. Инженерные колебания стержней. Акуст.ж., 1983, Т.29, вып.4, С.428-434.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974.

I.V.Andronov. Integro-differential equations of the convolution on a finite interval with a kernel having logarithmic singularity.

Integro-differential equations of the convolution are examined

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\int_{-1}^{1}\left(a\left((x-t)^2\right)\ln|x-t|+b\left((x-t)^2\right)\right)\varphi(t)\,dt=f(x).$$

Here functions $a(s)$ and $b(s)$ belong to $C^{\infty}$ and decrease at infinity. The Fourier transform of the kernel is supposed to be sectorial, i.e. it has a positive projection on some direction in complex plane. The theorem of existence and uniqueness of solutions in spaces defined by the representation

$$\varphi(t)=(1-t^2)^{\delta_n}\psi(t),\ \delta_n=n-1+\varepsilon\quad \varepsilon>0,\psi\in C^1[-1,1],$$

is proved. The proprieties of continuity of solutions are established.