Э. Ф. Оя, Критерии M-идеалов компактных операторов, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 145–147

Аналогично тому, как в [5] проверялась вещественность решений уравнения Ландау—Лифшица, легко проверить, что вектор **S**, определенный в [4], будет вещественным.

При каждом t наше решение почтипериодично по x^2. Зависимость от t является более сложной и требует отдельного анализа.

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступило 12.04.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А. // УМН. 1981. Т. 36, № 2. С. 11—81. **2.** Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 55—137. **3.** Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. **4.** Бобенко А. И. // Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 1. С. 15—31. **5.** Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. Уравнение Ландау — Лифшица. Теория точных решений (1, 2) // Препринт ДонФТИ — 84—6,7 (81, 82). Донецк, 1984. **6.** Бурцев С. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. // ТМФ. 1987. Т. 70, № 3. С. 323—341. **7.** Короткин Д. А. // ТМФ. 1988. Т. 77, № 1. С. 25—41. **8.** Короткин Д. А., Матвеев В. Б. // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 2. С. 77—102.

КРИТЕРИИ M-ИДЕАЛОВ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Э. Ф. Оя

1. Пусть X — банахово пространство (над полем вещественных или комплексных чисел) и Y — его подпространство. Обозначим через $Y^{\perp}$ аннулятор подпространства Y в сопряженном пространстве X^*. Говорят, что Y есть M-идеал в X, если существует такой непрерывный линейный проектор P в X^*, что $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$ и $\| f \| = \| Pf \| + \| f - Pf \|$ при всех $f \in X^*$.

Свыше десяти лет интенсивно изучается вопрос, для каких X подпространство компактных операторов $K(X)$ является M-идеалом в банаховом пространстве $L(X)$ всех непрерывных линейных операторов в X (см., например, [1—4] и содержащиеся там библиографии). Один из наиболее общих результатов в этой области принадлежит П. Харманду и О. Лима [2] и гласит: *если $K(X)$ является M-идеалом в $L(X)$, то существует такая сеть операторов (T_α), $T_\alpha \in K(X)$, $\| T_\alpha \| \leqslant 1$, что*

$$\lim_\alpha T_\alpha x = x \quad \forall x \in X, \qquad \lim_\alpha T_\alpha^* g = g \ \forall g \in X^*. \tag{1}$$

Цель настоящей работы — дополнить эти необходимые условия до достаточных. Это делается в теореме 2, доказательство которой опирается на теорему 1, устанавливающую общий критерий M-идеала. Отметим, что в отличие от общепринятой методики, в своих доказательствах мы не пользуемся свойством трех шаров Альфсена—Эффроса.

2. Обозначим через I единичный оператор в X, а через $B_X = \{x \in X: \| x \| \leqslant 1\}$ и $S_X = \{x \in X: \| x \| = 1\}$ — единичные шар и сферу пространства X. Если $U_\alpha \in L(X)$, то положим $U^\alpha = I - U_\alpha$.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует такая сеть (U_α), $U_\alpha \in B_{L(X)}$, что $\operatorname{Im} U_\alpha \subset Y$ при всех α и $\lim_\alpha g(U_\alpha y) = g(y)$ при всех $y \in Y$ и $g \in Y^*$, то Y является M-идеалом в X тогда и только тогда, когда при всех $f \in B_{X^*}$, $x \in B_X$, $y \in B_Y$ или при всех $f \in S_{X^*}$, $x \in S_X$, $y \in S_Y$*

$$\overline{\lim}_\alpha | f(U_\alpha y + U^\alpha x) | \leqslant 1. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Y является M-идеалом в X. Тогда (см. [5, теорема, $1° \Rightarrow 10°$]) существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^* такой, что $f - \varkappa j^* f \in Y^\perp$ при всех $f \in X^*$, где j — тождественное отображение из Y в X. В силу теорем 1 и 2 из [6], $\varkappa$ определяется равенством

$$(\varkappa g)(x) = \lim_\alpha g\,(U_\alpha x), \quad g \in Y^*, \ x \in X. \tag{3}$$

Согласно следствию 1 и лемме из [6], проектор P в определении M-идеала единственен, $P = \varkappa j^*$ и $j^* \varkappa g = g$, $g \in Y^*$. Рассмотрим $f \in B_{X^*}$, $x \in B_X$, $y \in B_Y$. Положим $g = j^* f$, $h = f - \varkappa g$. Поскольку $f\,(U_\alpha y) = (\varkappa g)(U_\alpha y) = g\,(U_\alpha y) \to_\alpha (\varkappa g)(y)$ и $f\,(U^\alpha x) = h\,(x) + (\varkappa g)(x) - g\,(U_\alpha x) \to_\alpha h\,(x)$, так как $h \in Y^\perp$ и $(\varkappa g)(z) = (j^* \varkappa g)(z) = g\,(z)$, $z \in Y$, то существует предел

$$\lim_\alpha |\, f\,(U_\alpha y + U^\alpha x)\,| \leqslant \|(\varkappa g)(y)\,| + h\,(x)\,| \leqslant \|\varkappa j^* f\| + \|h\| = \|f\| \leqslant 1.$$

Достаточность. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы 1 из [7], и переходя к подсети сети (U_α), можно считать что существует такой изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^*, определяемый равенством (3), что $\varkappa j^*$ — проектор в X^* с $\operatorname{Ker}(\varkappa j^*) = Y^\perp$, причем $j^* \varkappa g = g$, $g \in Y^*$. Рассмотрим $f \in S_{X^*}$. Положим $g = j^* f$, $h = f - \varkappa g$. Ясно, что Y будет M-идеалом в X, если $1 \geqslant \|g\| + \|h\|$. Чтобы доказать это неравенство, зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем $x \in S_X$ и $y \in S_Y$ так, что $\operatorname{Re} h\,(x) > \|h\| - \varepsilon$ и $\operatorname{Re} g\,(y) > \|g\| - \varepsilon/2$. Поскольку $g\,(U_\alpha y) \to_\alpha g\,(y)$ и $(\varkappa g)(U^\alpha x) = (\varkappa g)(x) - g\,(U_\alpha x) \to_\alpha 0$, то существует такой индекс α_0, что $\operatorname{Re} g\,(U_\alpha y) > \|g\| - \varepsilon$ и $|\,(\varkappa g)(U^\alpha x)\,| < \varepsilon$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Ввиду (2) существует такой индекс $\alpha \geqslant \alpha_0$, что $|\, f\,(U_\alpha y + U^\alpha x)\,| < 1 + \varepsilon$. Поэтому $1 + \varepsilon > \operatorname{Re} f\,(U_\alpha y + U^\alpha x) = \operatorname{Re} g\,(U_\alpha y) + \operatorname{Re}(\varkappa g)(U^\alpha x) + \operatorname{Re} h\,(x) > \|g\| + \|h\| - 3\varepsilon$, откуда и вытекает требуемое неравенство.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждения равносильны:*

1°) *$K\,(X)$ есть M-идеал в $L\,(X)$;*

2°) *существует такая сеть (T_α), $T_\alpha \in B_{K(X)}$, что*

$$\lim_\alpha T_\alpha x = x \quad \forall x \in X, \tag{4}$$

$$\overline{\lim}_\alpha |\, f\,(T_\alpha A + T^\alpha B)\,| \leqslant 1 \quad \forall f \in B_{L(X)^*}, \quad \forall A \in B_{K(X)}, \quad \forall B \in B_{L(X)}; \tag{5}$$

3°) *существует такая сеть (T_α), $T_\alpha \in B_{K(X)}$, что*

$$\lim_\alpha T_\alpha^* g = g \quad \forall g \in X^*, \tag{6}$$

$$\overline{\lim}_\alpha |\, f\,(A\,T_\alpha + B\,T^\alpha)\,| \leqslant 1 \quad \forall f \in B_{L(X)^*}, \quad \forall A \in B_{K(X)}, \quad \forall B \in B_{L(X)}. \tag{7}$$

Доказательство. Условие 1° вытекает из 2° (соответственно из 3°) по теореме 1, если ввести $U_\alpha \in L\,(L\,(X))$ равенством $U_\alpha\,(A) = T_\alpha A$ (соответственно, $U_\alpha\,(A) = A\,T_\alpha$), $A \in L\,(X)$. Пусть выполняется 1°. Тогда согласно [2] существует сеть $(T_\alpha) \subset B_{K(X)}$, удовлетворяющая (1), т. е. (4) и (6). Если ввести U_α, как выше, то в силу теоремы 1 выполняются и условия (5) и (7).

3. Теоремы 1 и 2 позволяют получить новое простое доказательство следующего результата О. Лима [8]: *если $K\,(X)$ есть M-идеал в $L\,(X)$, то X является M-идеалом в X^{**}.* Действительно, пусть (T_α) — сеть из теоремы 2 (2°). Применяем теорему 1 к сети $U_\alpha = T_\alpha^{**} \in L\,(X^{**})$. Имеем $\|U_\alpha\| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} U_\alpha \subset X$ при всех α и $U_\alpha z \to z$ при всех $z \in X$. Пусть $f \in S_{X^{***}}$, $y \in S_X$, $x \in S_{X^{**}}$. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем $g \in X^*$ так, что

$g \| \leqslant 1 + \varepsilon$, $x(g) = 1$. Определим $F \in B_{L(X)^*}$ и $A \in K(X)$ формулами $F(B) = f(B^{**}x)$, $B \in L(X)$, и $Az = g(z)\,y$, $z \in X$. Поскольку $\|A\| \leqslant \leqslant 1 + \varepsilon$ и $A^{**}x = y$, то $1 + \varepsilon \geqslant \overline{\lim}_\alpha |F(T_\alpha A + T^\alpha I)| = \overline{\lim}_\alpha |f(T_\alpha^{**}y + T^{\alpha**}x)|$, откуда вытекает (2). По теореме 1 пространство X есть M-идеал в X^{**}.

Тартусский государственный университет

Поступило 13.03.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saatkamp K. // Math. Z. 1978. V. 158. P. 235—263. 2. Harmand P., Lima Å. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 283, N 1. P. 253—264. 3. Cho C. M., Johnson W. B. // J. Oper. Theory. 1986. V. 16, N 2. P. 245—260. 4. Oja E. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1989. T. 309, sér. I. P. 983—986. 5. Оя Э. Ф. // Математические заметки. 1988. Т. 43, вып. 2. С. 237—246. 6. Оя Э. Ф. // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1989. Вып. 846. С. 41—49. 7. Оя Э. Ф. // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. 1984. Т. 33, № 4. С. 424—438. 8. Lima Å. // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 27—36.

ГОЛОМОРФНОСТЬ CR-ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВО БОЛЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. Ю. Пушников

ТЕОРЕМА. *Пусть $M_1 \subset U \subset \mathbf{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ — вещественно-аналитическая гиперповерхность с невырожденной формой Леви в области U пространства $\mathbf{C}^n$; $M_2 \subset \mathbf{C}^N$ — общее множество нулей некоторого числа вещественных полиномов, причем M_2 не содержит никаких голоморфных кривых; $f\colon M_1 \to M_2$ — CR-отображение класса C^∞. Тогда f голоморфно в окрестности M_1.*

Следствие. *Пусть $D_1 \subset \mathbf{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ — область с вещественно-аналитической границей, форма Леви которой невырождена; $D_2 \subset \mathbf{C}^N$ $(N \geqslant n)$ — область с алгебраической границей, не содержащей никаких голоморфных кривых; $f\colon D_1 \to D_2$ — собственное голоморфное отображение класса $C^\infty(\overline{D}_1)$. Тогда f продолжается голоморфно в окрестность $\overline{D}_1$.*

Доказательство теоремы. В силу невырожденности формы Леви M_1 можно считать, что f является граничными значениями отображения, голоморфного в области $D = \{z \in U\colon\ \rho(z, \bar z) < 0\}$, где $\rho(z, \bar z)$ — определяющая функция M_1.

Будем говорить, что f продолжается как алгеброидное отображение в окрестность M_1, если в $D \cup M_1$ каждая компонента f_i удовлетворяет некоторому уравнению

$$F_i(z, f_i) = \sum\nolimits_{k=0}^{p_i} a_k^i(z)\,(f_i)^k = 0, \tag{1}$$

где a_k^i голоморфны в окрестности M_1.

ЛЕММА 1. *Если в условиях теоремы f продолжается алгеброидно в окрестности M_1, то f голоморфно в окрестности M_1.*

Данная лемма сформулирована и доказана в [1] для случая $n = N$. На случай произвольного N доказательство переносится автоматически.

С учетом леммы 1 достаточно показать алгеброидность в окрестности M_1.

Пусть $P_l(\omega, \bar\omega)$, $l \in L$ — полиномы, определяющие M_2. Для $z \in M_1$ выполняются равенства

$$P_l(f(z), \overline{f(z)}) = 0, \qquad l \in L. \tag{2}$$

Пусть $m \geqslant 0$ — максимальное целое число, такое что с точностью до перенумерации компонент отображения f первые m компонент $f_1, \ldots, f_m$