L. Yu. Kolotilina, On the normalizer of the diagonal subgroup in the general linear group over a ring, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 132, 114–118

Л.Ю.Колотилина

О НОРМАЛИЗАТОРЕ ПОДГРУППЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ НАД КОЛЬЦОМ

Известно, что над телом, отличным от поля $\mathbb{F}_2$ из двух элементов, нормализатор подгруппы диагональных матриц в полной линейной группе совпадает с группой мономиальных матриц. В этой заметке мы показываем, что при некоторых ограничениях на кольцо нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в полной линейной группе $GL(n,\Lambda)$ совпадает с группой обобщенно-мономиальных матриц, и приводим некоторые условия, достаточные для его мономиальности.

Пусть Λ - ассоциативное кольцо с единицей, Λ^* - группа обратимых элементов в Λ, $G=GL(n,\Lambda)$ - полная линейная группа степени $n \geqslant 2$ над Λ, $D=D(n,\Lambda)$ - подгруппа диагональных матриц в G и $N(n,\Lambda)$ - нормализатор подгруппы D в G. Матрицу $a=(a_{ij})$ из G мы называем обобщенно-мономиальной, если она представима в виде произведения $a=db$, где $d\in D$ и $b=(b_{ij})$ - ортогональная матрица, составленная из идемпотентов кольца Λ, такая, что $b_{ir}\Lambda b_{is}=b_{rj}\Lambda b_{sj}=0$ при $r\neq s$, $1\leqslant i,j,r,s\leqslant n$ т.е. различные элементы каждой строки и каждого столбца матрицы b попарно "сильно" ортогональны.

ТЕОРЕМА I. Нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в полной линейной группе $GL(n,\Lambda)$ степени $n\geqslant 2$ над кольцом Λ совпадает с группой обобщенно-мономиальных матриц, если выполнено одно из следующих условий:

I) $\Lambda=R$ - коммутативное кольцо, в котором идеал, порожденный всеми элементами вида $\varepsilon-1$, где $\varepsilon\in R^*$, совпадает с R;

2) в кольце Λ существует такой элемент ε, что $\varepsilon(\varepsilon+1)\in\Lambda^*$ и Λ аддитивно порождается своими обратимыми элементами;

3) Λ - полное кольцо матриц над ассоциативным кольцом с единицей степени $\geqslant 2$ или D-сетевое кольцо $M(\sigma)$ при $h(\sigma)\geqslant 2$ (относительно определений сети σ и связанных с ней объектов см., например, [I],[2]);

4) Λ - прямая сумма колец, удовлетворяющих одному из условий I)-3).

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

ЛЕММА I. Пусть $\sigma=(\sigma_{ij})$ - D-сеть идеалов порядка $n\geqslant 2$ над ассоциативным кольцом с единицей Λ, такая что $h(\sigma)\geqslant 2$. Тогда если матрица $a=(a_{ij})$ нормализует сетевую подгруппу $G(\sigma)$, то она нормализует и сетевое подкольцо $M(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g=(g_{ij})\in M(\sigma)$; покажем, что $aga^{-1}\in$ $\in M(\sigma)$. Представим матрицу g в виде суммы

$$g=\sum_{r\neq s}(e+g_{rs}e_{rs})-\sum_{r\neq s}e+\sum_{r}g_{rr}e_{rr}$$

(e - единичная матрица, e_{rs} - матричная единица, т.е. матрица, у которой на позиции (r,s) стоит единица, а на прочих позициях - нули). Поскольку единичная матрица и матрицы $e+g_{rs}e_{rs}$ при $r\neq s$ содержатся в $G(\sigma)$, а $a\in N(\sigma)$, то

$$(aga^{-1})_{ij}\equiv\sum_{r}a_{ir}g_{rr}a'_{rj}\pmod{\sigma_{ij}}$$

(штрихами отмечены элементы обратной матрицы a^{-1}), так что нам достаточно показать, что $a_{ir}\Lambda a'_{rj}\subseteq\sigma_{ij}$ при $i\neq j$. Зафиксируем индекс r. Так как $h(\sigma)\geqslant 2$, найдется отличный от r индекс s, такой, что $\sigma_{rs}=\sigma_{sr}=\Lambda$. Воспользовавшись леммой 3 из [2] при $t=r$, получим, что $a_{ir}\Lambda a'_{rj}\subseteq\sigma_{ij}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы I для элементов матриц $a=(a_{ij})$ и $a^{-1}=(a'_{ij})$, нормализующих подгруппу диагональных матриц $D(n,\Lambda)$, имеют место соотношения

$$a_{ir}\Lambda a'_{rj}=0 \text{ при } i\neq j. \tag{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диагональную матрицу $d_r(\varepsilon)=$ $=e+(\varepsilon-1)e_{rr}, \varepsilon\in\Lambda^*$. Тогда поскольку $a\in N(n,\Lambda)$, матрица $b=$ $=ad_r(\varepsilon)a^{-1}=e+\sum_{ij}a_{ir}(\varepsilon-1)a'_{rj}e_{ij}$ диагональна, а значит, при $i\neq j$ $a_{ir}(\varepsilon-1)a'_{rj}=0$. Если $\Lambda=R$ - коммутативное кольцо и идеал, порожденный элементами вида $\varepsilon-1$, где $\varepsilon\in R^*$, совпадает с R, то равенства (I) очевидны. Если в кольце Λ существует элемент ε, такой, что $\varepsilon(\varepsilon+1)\in\Lambda^*$, то, рассмотрев наряду с матрицей b матрицу $c=ad_r(\varepsilon+1)a^{-1}$, получим, что при $i\neq j$ $a_{ir}a'_{rj}=0$, а поскольку для любого обратимого элемента $h\in\Lambda^*$ $a_{ir}(h-1)a'_{rj}=0$, то и $a_{ir}ha'_{rj}=0$ при $i\neq j$. Так как по условию любой элемент кольца Λ представим в виде суммы обратимых, то равенства (I) справедливы и в этом случае.

Пусть теперь $\Lambda=M(\sigma)$ - D-сетевое подкольцо полного кольца матриц $M(m,\tilde{\Lambda})$ степени $m\geqslant 2$ над некоторым ассоциативным кольцом с единицей $\tilde{\Lambda}$, причем $h(\sigma)\geqslant 2$. Обозначим через $\Delta=$ $=\Delta(n,\Lambda)$ подкольцо диагональных матриц кольца $M(n,\Lambda)$, тогда $\Delta^*=D$. Элемент α кольца $M(n,\Lambda)$, рассматриваемый как матрица порядка $m\times n$ над кольцом $\widetilde{\Lambda}$, будем обозначать через $\widetilde{\alpha}$. Ясно, что множество $\widetilde{\Delta}=\{\widetilde{\alpha}:\alpha\in\Delta\}$ является сетевым подкольцом $M(\tau)$ кольца $M(m\times n,\widetilde{\Lambda})$, где τ - D-сеть идеалов порядка $m\times n$ над $\widetilde{\Lambda}$ вида

$$\begin{pmatrix} \sigma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma \end{pmatrix},$$

причем $h(\tau)=h(\sigma)\geqslant 2$. Тогда $\widetilde{D}=G(\tau)=[M(\tau)]^*$. Так как $aDa^{-1}\leqslant D$, то и $\widetilde{a}\widetilde{D}\widetilde{a}^{-1}\leqslant\widetilde{D}$, т.е. $\widetilde{a}\in N(\tau)$. По лемме I имеем тогда, что $\widetilde{a}M(\tau)\widetilde{a}^{-1}=\widetilde{a}\widetilde{\Delta}\widetilde{a}^{-1}\subseteq M(\tau)=\widetilde{\Delta}$, так что $a\Delta a^{-1}\subseteq\Delta$, откуда следует, что $a_{ir}\Lambda a'_{rj}=0$ при $i\neq j$, т.е. равенства (I).

Нетрудно убедиться также, что если Λ - прямая сумма колец, над которыми матрицы, нормализующие соответствующие диагональные подгруппы, описываются условиями (I), то эти условия справедливы и для кольца Λ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Поскольку в силу леммы 2 для элементов матрицы $a=(a_{ij})\in GL(n,\Lambda)$, нормализующей подгруппу $D(n,\Lambda)$, выполнены равенства (I), нам достаточно показать, что матрица, удовлетворяющая этим равенствам, обобщенно-мономиальна. Умножим очевидное равенство $1=\sum_k a'_{rk}a_{kr}$ слева на a_{sr}, тогда в силу (I) получим, что $a_{sr}=a_{sr}a'_{rs}a_{sr}$. Умножив это последнее равенство слева на $a_{pr}\lambda$ и справа на λa_{sp}, $\lambda\in\Lambda$, и снова воспользовавшись (I), получим, что

$$\begin{aligned} a_{pr}\Lambda a_{sr}&=0 \text{ при } p\neq s,\\ a_{sr}\Lambda a_{sp}&=0 \text{ при } p\neq r. \end{aligned}\tag{2}$$

Рассмотрим теперь матрицу $C=aa^t$ (a^t - транспонированная матрица a). В силу соотношений (2) матрица C диагональна и $c_{ii}=\sum_k a_{ik}^2=\left(\sum_k a_{ik}\right)^2\in\Lambda^*$, так что $d_i=\sum_k a_{ik}\in\Lambda^*$. Составим диагональную матрицу $d=diag(d_1,\dots,d_n)$ и положим $b=d^{-1}a$, тогда ввиду (2)

$$b_{ir}\Lambda b_{is}=b_{rj}\Lambda b_{sj}=0 \text{ при } r\neq s, \tag{3}$$

так что различные элементы каждой строки и каждого столбца матрицы b попарно "сильно" ортогональны. Все элементы матрицы b являются идемпотентами, действительно, $\sum_k b_{ik}=\sum_k d_i^{-1}a_{ik}=d_i^{-1}\sum_k a_{ik}=$

$= d_i^{-1} d_i = 1$, а тогда в силу (3) $b_{ij} = b_{ij} \sum_k b_{ik} = b_{ij}^2$. Ортогональность матрицы b уже очевидна.

Для завершения доказательства остается заметить, что над любым кольцом обобщенно-мономиальные матрицы содержатся в нормализаторе диагональной подгруппы.

Обратимся теперь к рассмотрению условий, при которых нормализатор подгруппы диагональных матриц совпадает с группой собственно мономиальных матриц. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если кольцо Λ удовлетворяет одному из условий I)-3) теоремы I и не содержит ненулевых идемпотентов e и f таких, что $e\Lambda f = f\Lambda e = 0$, то нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в $GL(n,\Lambda)$ при $n \geqslant 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ТЕОРЕМА 2. Если в кольце Λ существует такой элемент ε, что $\varepsilon(\varepsilon+1) \in \Lambda^*$ и Λ не содержит отличных от нуля идемпотентов e и f, таких, что $e\Lambda^* f = f\Lambda^* e = 0$, то нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в $GL(n,\Lambda)$ при $n \geqslant 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in N(n,\Lambda)$, повторяя рассуждение, использованное в доказательстве теоремы I, получим, что

$$a_{ir} \Lambda^* a'_{rj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{4}$$

Умножив равенство $1 = \sum_k a'_{rk} a_{kr}$ слева на a_{sr}, получим в силу (4) для всех r и s

$$a_{sr} = a_{sr} a'_{rs} a_{sr}, \tag{5}$$

откуда следует, что $f_{sr} = a_{sr} a'_{rs}$ - идемпотент, $1 \leqslant s, r \leqslant n$, и

$$f_{sr} \Lambda^* f_{sq} = 0 \quad \text{при} \quad q \neq r. \tag{6}$$

Зафиксируем индекс s. Поскольку $\sum_q f_{sq} = \sum_q a_{sq} a'_{qs} = 1$, то найдется индекс r, такой, что $f_{sr} \neq 0$, а тогда в силу (6) в условиях теоремы получим, что $f_{sq} = 0$ при $q \neq r$, а, значит, $f_{sr} = a_{sr} a'_{rs} = 1$, так что элементы a_{sr} и a'_{rs} обратимы, но тогда ввиду (4) $a_{pr} = 0$ при $p \neq s$, а так как $f_{sq} = 0$, то из (5) следует, что и $a_{sq} = 0$ при $q \neq r$. Полученные равенства показывают, что матрица a мономиальна.

ЛЕММА 3. Пусть в кольце Λ правый идеал, порожденный всеми элементами вида $\varepsilon - 1$, где $\varepsilon \in \Lambda^*$, совпадает с Λ и пусть нормализатор $N(n, \Lambda/J)$ подгруппы диагональных матриц над фактор-кольцом кольца Λ по его радикалу Джекобсона J совпадает с группой мономиальных матриц. Тогда нормализатор $N(n,\Lambda)$ подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в $GL(n,\Lambda)$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in N(n,\Lambda)$, тогда над Λ/J имеем $\bar{a}=\bar{d}(\bar{\pi})$, где черта означает образ при естественном эпиморфизме $GL(n,\Lambda)\to GL(n,\Lambda/J)$, $(\pi)=\sum_i e_{i\pi(i)}$, π - элемент симметрической группы S_n. Положим $a=\delta(\pi)$, тогда $\delta \equiv d (\mathrm{mod}\ J)$ и $\delta \in N(n,\Lambda)$; по лемме 8 из [I] имеем тогда, что $\delta \in D$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в кольце Λ правый идеал, порожденный всеми элементами вида $\varepsilon - 1$, где $\varepsilon \in \Lambda^*$, совпадает с Λ и пусть фактор-кольцо $\bar{\Lambda}=\Lambda/J$ кольца Λ по его радикалу Джекобсона J не содержит отличных от нуля идемпотентов $\bar{e}$ и $\bar{f}$, таких, что $\bar{e}\bar{\Lambda}^*\bar{f}=\bar{f}\bar{\Lambda}^*\bar{e}=0$ и удовлетворяет одному из условий теоремы I или условию теоремы 2. Тогда нормализатор $N(n,\Lambda)$ подгруппы диагональных матриц $D(n,\Lambda)$ в $GL(n,\Lambda)$ при $n\geqslant 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

Теорема 3 следует непосредственно из теорем I и 2 и леммы 3.

Из описания нормализатора диагонали легко вытекает ее слабая нормальность в смысле Мюллера (см.[2]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть кольцо Λ не содержит поле $\mathbb{F}_3$ в качестве прямого слагаемого и удовлетворяет одному из условий теоремы I или условию теоремы 2. Тогда при $n \geqslant 2$ подгруппа $D(n,\Lambda)$ слабо нормальна в $GL(n,\Lambda)$.

Литература

I. Б о р е в и ч З.И., В а в и л о в Н.А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.148, с.43-57.

2. Б о р е в и ч З.И., К о л о т и л и н а Л.Ю. О субнормализаторе сетевых подгрупп в полной линейной группе над кольцом. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1982, т.116, с.14-19.