Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Р. Л. Добрушин, С. З. Стамблер, Теоремы кодирования для классов произвольно изменяющихся во времени дискретных каналов без памяти, *Пробл. передачи информ.*, 1975, том 11, выпуск 2, 3–22

https://www.mathnet.ru/ppi1581

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
20 января 2026 г., 21:10:35

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XI 1975 Вып. 2

УДК 621.391.15:51

ТЕОРЕМЫ КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ ПРОИЗВОЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ ДИСКРЕТНЫХ КАНАЛОВ БЕЗ ПАМЯТИ

Р. Л. Добрушин, С. З. Стамблер

В работе найдено при некоторых ограничениях выражение пропускной способности классов произвольно изменяющихся во времени каналов для кодов с вероятностью ошибки, определяемой как среднее по кодовым словам.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1. В обычных формулировках теории Шеннона предполагается, что кодирование и декодирование сигналов основано на полном знании статических свойств используемого канала связи. Однако во многих реальных ситуациях такое предположение не оправдано и естественно предполагать, что известны лишь некоторые частичные сведения о статистике канала, которые можно математически описать, указав, что рассматриваемый канал принадлежит некоторому классу каналов. Пропускную способность такого класса каналов определяют на основе минимаксного подхода как максимальную скорость передачи, для которой существуют коды, не зависящие от выбора канала из заданного класса, и такие, что вероятность ошибочной передачи стремится к нулю при увеличении длины блока сразу для всех каналов из заданного класса. Изучению классов каналов посвящено много работ. В [1] решена задача о вычислении пропускной способности для классов каналов без памяти, статистические свойства которых неизменны в ходе передачи — составные каналы (некоторые простые обобщения см. в [2]). Однако для другого не менее естественного случая, когда переходные вероятности канала могут изменяться во времени так, что в каждый момент времени передачей управляет произвольная функция из заданного (допустимого) множества (так называемый полный класс каналов), она оказалась существенно более трудной (в [3] доказано, что проблема нахождения пропускной способности в случае полного класса каналов для обычных кодов с фиксированным уровнем максимальной по кодовым словам ошибки включает в себя известную проблему нахождения пропускной способности C_0 при нулевой вероятности ошибки для одного дискретного канала без памяти), и решение ее известно лишь в очень частных случаях. Для обычных кодов с вероятностью ошибки, определяемой как максимум по кодовым словам, в [4] найдена пропускная способность для каналов с выходным алфавитом, состоящим из двух элементов, а в [5] при наличии обратной связи. В работах [6, 7] была приведена без доказательства формула пропускной способности класса каналов при рандомизованном кодировании, которая оказалась неверной (см. контрпример в [8]). Результаты [6, 7] по поводу классов сообщений верны и их доказательство опубликовано в [9]. В данной работе на основе соображений, подразумевавшихся в [6], и некоторых

дополнительных соображений найдено для некоторой довольно общей ситуации выражение пропускной способности полного класса дискретных каналов без памяти с конечным множеством допустимых переходных функций для обычных кодов с вероятностью ошибки, определяемой как среднее по всем значениям передаваемого сообщения. Ограничение (1.20), при котором справедливы доказываемые в данной работе теоремы кодирования, связано с методом случайного кодирования, с помощью которого они доказываются, и означает по существу требование, чтобы вероятность множества выходных сигналов, в которые в «подавляющем» большинстве случаев переходит фиксированный входной сигнал, в выходной мере произвольного канала из данного класса стремилась к нулю при времени передачи, стремящемся к бесконечности. По-видимому, при нарушении условия (1.20) пропускная способность уже не может быть выражена в общих «энтропийных» терминах, а определяется много более тонкими комбинаторными структурами. В этом смысле условие (1.20) можно сравнить с известным условием $R>R_{\text{crit}}$, появляющимся при исследовании экспоненты вероятности ошибки в обычных каналах без памяти. В силу теоремы 4 (см. ниже) ограничение (1.20) эквивалентно требованию, чтобы множество допустимых переходных функций занимало «не слишком большую» часть пространства всех переходных функций.

Обобщение результатов данной статьи на случай полного класса дискретных каналов без памяти с произвольным множеством допустимых переходных функций для обычных кодов, а также для рандомизованных кодов будет изложено в другой статье.

2. Перейдем к точным формулировкам. Пусть X, Y и S — непустые конечные множества, и пусть $W_1=\{w_s(\cdot,\cdot):s\in S\}$ — некоторое множество переходных функций из X в Y, т. е. таких функций $w(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, что

$$w(x,y)\geqslant 0,\qquad \sum_{y\in Y} w(x,y)=1. \tag{1.1}$$

Обозначим через X^n, Y^n и S^n множества всех последовательностей длины n с элементами из X, Y и S соответственно. Для каждого $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in S^n$ определим переходную функцию $w_{\mathbf{s}}(\cdot,\cdot)$ из X^n в Y^n равенством

$$w_{\mathbf{s}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\prod_{i=1}^{n} w_{s_i}(x_i,y_i),\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in X^n,\quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in Y^n. \tag{1.2}$$

Пусть

$$W_n=\{w_{\mathbf{s}}(\cdot,\cdot):\mathbf{s}\in S^n\}. \tag{1.3}$$

Определение 1. Последовательность $\{W_n,\ n=1,2,\ldots\}$ назовем полным классом дискретных каналов без памяти, множество W_1 — множеством допустимых переходных функций, X — входным алфавитом, Y — выходным алфавитом.

Положим для любой переходной функции $w(\cdot,\cdot)\in W_n$ и любого множества $A\subseteq Y^n$

$$w(\mathbf{x},A)=\sum_{\mathbf{y}\in A} w(\mathbf{x},\mathbf{y}),\quad \mathbf{x}\in X^n. \tag{1.4}$$

Определение 2. (n,N)-код $\mathfrak{A}$ — это система

$$\mathfrak{A}=\{(\mathbf{x}_i,A_i):\ i=\overline{1,N}\} \tag{1.5}$$

такая, что

$$A_i \cap A_j = \phi, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad A_i \subseteq Y^n, \quad \mathbf{x}_i \in X^n, \quad i = \overline{1, N}. \tag{1.6}$$

Слова $\mathbf{x}_i$ назовем кодовыми словами, а A_i — множеством декодирования слова $\mathbf{x}_i$.

Определение 3. $(n, N, \bar{\lambda})$-код для $\{W_n\}$, $0<\lambda<1$ — это (n, N)-код $\mathfrak{A} = \{(\mathbf{x}_i, A_i): i = \overline{1, N}\}$ такой, что

$$\bar{r}(\mathfrak{A}, W_n) = \sup_{s \in S^n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_s(\mathbf{x}_i, A_i^c) \leqslant \lambda, \tag{1.7}$$

где $A_i^c = Y^n \setminus A_i$. Величину $\bar{r}(\mathfrak{A}, W_n)$ назовем средней ошибкой (n, N)-кода $\mathfrak{A}$.

Положим для двух переходных функций w_1 и w_2 из X в Y

$$\rho(w_1, w_2) = \max_{x \in X} \frac{1}{2} \sum_{y \in Y} |w_1(x, y) - w_2(x, y)|. \tag{1.8}$$

Очевидно, что $\rho(\cdot, \cdot)$ является метрикой в пространстве всех переходных функций из X в Y. Обозначим через $\overline{W}_1$ выпуклое линейное замыкание в метрике (1.8) множества W_1, т. е. минимальное выпуклое множество переходных функций из X в Y, содержащее W_1 и замкнутое в метрике (1.8). Поскольку мы рассматриваем лишь конечные W_1, то в данном случае $\overline{W}_1$ совпадает с выпуклой оболочкой W_1.

Рассмотрим далее для любого распределения вероятностей $p(\cdot)$ на X и любой переходной функции w из X в Y количество информации

$$I(p, w) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x) w(x, y) \log w(x, y) \left(\sum_{x' \in X} p(x') w(x', y) \right)^{-1}. \tag{1.9}$$

Известно (см. [10]), что $I(p, w)$ в дискретном случае является* непрерывной функцией от пары переменных (p, w), выпуклой по w и вогнутой по p. Положим

$$C_p(\overline{W}_1) = \min_{w \in \overline{W}_1} I(p, w), \qquad p \in \mathscr{P}, \tag{1.10}$$

и

$$C(\overline{W}_1) = \max_{p \in \mathscr{P}} \min_{w \in \overline{W}_1} I(p, w), \tag{1.11}$$

где $\mathscr{P}$ — совокупность всех распределений вероятностей на X.

Заметим, что из непрерывности $I(p, w)$ и компактности $\mathscr{P}$ и $\overline{W}_1$ вытекает существование минимума по w и максимума по p.

3. Для любого распределения вероятностей $p \in \mathscr{P}$ и любого $s \in S$ обозначим через $p_s(\cdot)$ распределение вероятностей на Y такое, что

$$p_s(y) = \sum_{x \in X} p(x) w_s(x, y), \qquad y \in Y. \tag{1.12}$$

---

* Здесь и далее используются двоичные логарифмы. Кроме того, будем считать, что $0 \log (0/a) = 0$ при $a \geqslant 0$ и $a \log (a/0) = +\infty$ при $a > 0$.

Рассмотрим множество $\mathscr{R}$ всех переходных функций $r(y|x,s)$ из $X\times S$ в Y, т. е. таких функций, что

$$(1.13)\qquad r(y|x,s)\geqslant 0,\quad \sum_{y\in Y} r(y|x,s)=1,\quad x\in X,\quad y\in Y,\quad s\in S.$$

Пусть Q — совокупность всех переходных функций $q(s|x)$ из X в S, т. е. таких функций, что

$$(1.14)\qquad q(s|x)\geqslant 0,\quad \sum_{s\in S} q(s|x)=1,\quad x\in X,\quad s\in S.$$

Положим для $r\in\mathscr{R}$ при каждом фиксированном $x\in X$ и $s\in S$

$$(1.15)\qquad H_p(r(\cdot|x,s)\,|\,p_s(\cdot))=\sum_{y\in Y} r(y|x,s)\log\frac{r(y|x,s)}{p_s(y)}.$$

Положим для $r\in\mathscr{R}$ и $q\in Q$

$$(1.16)\qquad H(p,q,r)=\sum_{x\in X}\sum_{s\in S} p(x)q(s|x)H_p(r(\cdot|x,s)\,|\,p_s(\cdot)).$$

Заметим, что из-за неотрицательности $H_p(r(\cdot\,|x,s)\,|\,p_s(\cdot))$ (см. [11]) величина $H(p,q,r)$ всегда неотрицательна. Обозначим через $V(w)$, $w\in\overline{W}_1$ множество всех пар (q,r), $q\in Q$, $r\in\mathscr{R}$, таких, что

$$(1.17)\qquad w(x,y)=\sum_{s\in S} q(s|x)r(y|x,s),\quad x\in X,\quad y\in Y.$$

Заметим, что при любом $w\in\overline{W}_1$ множество $V(w)\neq\phi$, так как при любом $q\in Q$ и $r(y|x,s)=w(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, $s\in S$ пара $(q,r)\in V(w)$. Положим

$$(1.18)\qquad H(p,W_1)=\inf_{w\in\overline{W}_1}\ \inf_{(q,r)\in V(w)} H(p,q,r).$$

4. Определение 4. Величину C назовем пропускной способностью полного класса каналов $\{W_n\}$ для $(n,N,\bar\lambda)$-кодов, если при любом λ, $0<\lambda<1$, любом $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших n существует $(n,[2^{n(C-\varepsilon)}],\bar\lambda)$-код и не существует $(n,[2^{n(C+\varepsilon)}],\bar\lambda)$-кодов. Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если множество допустимых переходных функций W_1 таково, что существует распределение вероятностей $P(x)$, удовлетворяющее соотношениям*

$$(1.19)\qquad C(\overline{W}_1)=C_P(\overline{W}_1)$$

и

$$(1.20)\qquad H(P,W_1)>0,$$

то пропускная способность полного класса дискретных каналов без памяти $\{W_n\}$ для $(n,N,\bar\lambda)$-кодов равна $C(\overline{W}_1)$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из теорем 2 и 3.

Теорема 2 (теорема кодирования). *Для любого распределения вероятностей $P(x)$, удовлетворяющего* (1.20) *при любом $R<C_P(\overline{W}_1)$, любом λ, $0<\lambda<1$ и всех достаточно больших n, существует $(n,[2^{nR}],\bar\lambda)$-код для $\{W_n\}$.*

Теорема 3 (сильное обращение). *Для любого W_1 при любом $\gamma>0$, любом λ, $0<\lambda<1$ и всех достаточно больших n не существует $(n, [2^{n(C(\overline{W}_1)+\gamma)}], \bar{\lambda})$-кодов.*

Нахождение пропускной способности в случае, когда $H(P, W_1)=0$, остается открытой проблемой. Как следует из примеров, приведенных в § 3, методы данной работы в этом случае непосредственно не применимы. В одном из примеров § 3 величина $H(P, W_1)=0$, а пропускная способность C равна $C(\overline{W}_1)\neq 0$. В другом примере $C(\overline{W}_1)\neq 0$, однако пропускная способность $C=0$ (и следовательно, $H(P, W_1)=0$).

5. Пусть фиксировано распределение вероятностей $p(\cdot)\in\mathscr{P}$ и

$$X_p=\{x:p(x)>0\}. \tag{1.21}$$

Пусть W_1^p — совокупность всех переходных функций $w_s'(\cdot, \cdot)$ из X_p в Y вида

$$w_s'(x, y)=w_s(x, y), \quad x\in X_p, \quad y\in Y, \quad s\in S, \tag{1.22}$$

и пусть $U(p, W_1)$ — совокупность всех переходных функций из X_p в Y вида

$$w(x, y)=\sum_{s\in S} q(s|x)p_s(y), \quad x\in X_p, \quad y\in Y, \quad q(\cdot|\cdot)\in Q. \tag{1.23}$$

Очевидно, что $U(p, W_1)$ — выпуклое и замкнутое множество.

Теорема 4. *$H(p, W_1)>0$ тогда и только тогда, когда*

$$U(p, W_1)\cap\overline{W_1^p}=\phi, \tag{1.24}$$

где через $\overline{W_1^p}$ обозначено выпуклое замыкание W_1^p.

Теорема 4 дает явное описание классов каналов, для которых справедлива теорема 2. В частности, из нее следует, что если w_0 — переходная функция обычного канала без памяти с ненулевой пропускной способностью, то для классов канала с W_1, содержащимся в достаточно малой окрестности w_0, справедлива теорема 2.

§ 2. Доказательство теоремы 2

1. Пусть распределение вероятностей $P(x)$ удовлетворяет (1.20). Предположим, что $C_P(\overline{W}_1)>0$, так как в противном случае доказательство теоремы 2 тривиально. Пусть фиксировано λ, $0<\lambda<1$ и $R<C_P(\overline{W}_1)$. Зафиксируем $\gamma>0$ так, чтобы

$$R+\gamma<C_P(\overline{W}_1) \tag{2.1}$$

и выполнялось некоторое условие, которое явно будет указано ниже (см. (2.25)).

В этом параграфе будем предполагать, что

$$b=\min_{x\in X} P(x)>0. \tag{2.2}$$

Если (2.2) не выполнено, то можно рассмотреть вспомогательный полный класс каналов $\{W_n'\}$ с входным алфавитом $X_p=\{x:P(x)>0\}$ и множеством допустимых переходных функций W_1' из X_P в Y, состоящим из всех переходных функций вида (1.22). Для $\{W_n'\}$ выполнено условие (2.2). При этом $C_P(\overline{W}_1)=C_P(\overline{W}_1')$ и $H(P, W_1)=H(P, W_1')$. Кроме того, очевидно, любой $(n, N, \bar{\lambda})$-код для $\{W_n'\}$ является $(n, N, \bar{\lambda})$-кодом для $\{W_n\}$. Итак, достаточно доказать теорему 2 в предположении (2.2).

В дополнение к обозначениям, введенным в § 1, введем еще некоторые обозначения. Обозначим через $P_n(\cdot)$ распределение вероятностей на X^n,

такое, что

$$(2.3)\qquad P_n(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n}P(x_i),\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in X^n.$$

Для любого $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in S^n$ обозначим через $P_{\mathbf{s}}(\cdot)$ распределение вероятностей на Y^n, такое, что

$$(2.4)\qquad P_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})=\sum_{\mathbf{x}\in X^n}P_n(\mathbf{x})\,w_{\mathbf{s}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\prod_{i=1}^{n}P_{s_i}(y_i),\quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in Y^n.$$

Через $P_n w_{\mathbf{s}}(\cdot)$ обозначим распределение вероятностей на $Z^n=X^n\times Y^n$, такое, что

$$(2.5)\qquad P_n w_{\mathbf{s}}(z)=P_n(\mathbf{x})\,w_{\mathbf{s}}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\quad z=(\mathbf{x},\mathbf{y})\in Z^n.$$

Для $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)$ будем обозначать через $N(x|\mathbf{x})$, $N(y|\mathbf{y})$, $N(s|\mathbf{s})$ число компонент i, таких, что $x_i=x$, $y_i=y$, $s_i=s$ соответственно. Далее положим $N(x,s|\mathbf{x},\mathbf{s})$ равным числу компонент i, таких, что $x_i=x$, $s_i=s$. Аналогично $N(x,y|\mathbf{x},\mathbf{y})$ — число компонент i, таких, что $x_i=x$, $y_i=y$, а $N(x,y,s|\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s})$ — число компонент i, таких, что $x_i=x$, $y_i=y$, $s_i=s$. Через $\tilde{p}_{\mathbf{s}}(\cdot)$ обозначим распределение вероятностей на S, такое, что

$$(2.6)\qquad \tilde{p}_{\mathbf{s}}(s)=n^{-1}N(s|\mathbf{s}),\quad s\in S.$$

Обозначим через $w^{\mathbf{s}}(\cdot,\cdot)$ переходную функцию из X в Y, такую, что

$$(2.7)\qquad w^{\mathbf{s}}(x,y)=\sum_{s\in S}\tilde{p}_{\mathbf{s}}(s)\,w_s(x,y),\quad x\in X,\quad y\in Y.$$

Через $|A|$ будем обозначать число элементов в множестве A.

2. Наметим основные идеи доказательства. Строится некоторый ансамбль кодов. Кодовые слова выбираются случайным образом с распределением вероятностей $P_n(\cdot)$ независимо друг от друга. В качестве множества декодирования слова $\mathbf{x}$ выбирается множество (веер) $F_{\mathbf{x}}{}^n$ таким образом, что при использовании любого канала $w_{\mathbf{s}}$ для «подавляющего» большинства передаваемых сигналов $\mathbf{x}$ принимаемый сигнал с «подавляющей» вероятностью попадает в веер $F_{\mathbf{x}}{}^n$. Поэтому в «подавляющем» большинстве случаев для пар $(\mathbf{x}_i, F_{\mathbf{x}_i}{}^n)$ будет выполнено (1.7). Однако построенные веера могут пересекаться. Поэтому, чтобы удовлетворить (1.6), заменим $F^n_{\mathbf{x}_i}$ на «усеченные» веера $F_i{}^n=F_{\mathbf{x}_i}^n\setminus\bigcup F_{\mathbf{x}_j}^n$. При этом может нарушиться (1.7). Однако, учитывая, что доля (вероятность в выходной мере $P_{\mathbf{s}}(\cdot)$ канала $w_{\mathbf{s}}$), занимаемая веером $F_{\mathbf{x}}{}^n$ в пространстве Y^n, зависит от совместного расположения символов в словах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$, из леммы 7 получаем, что в среднем объединение вееров $\bigcup_{i=1}^{2^{nR}}F_{\mathbf{x}_i}^n$ занимает не более чем $2^{n(R-C_P(\overline{W}_1))}$-ю часть Y^n. Поэтому при $R<C_P(\overline{W}_1)$ можно рассчитывать, что при использовании «усеченных» вееров в качестве множеств декодирования (1.7) будет выполняться в «подавляющем» большинстве случаев. Действительно, оказывается, что доля кодов в ансамбле, для которых средняя ошибка мала для каждого данного канала, не меньше $1-e^{-n^2/6}$. Такая оценка получается из-за того, что ошибка кода для данного канала опре-

деляется как среднее по кодовым словам, т. е. по существу как сумма экспоненциального числа «почти» независимых одинаково распределенных слагаемых. Сверхэкспоненциальный характер оценки существен, так как экспоненциальной скорости стремления к единице доли хороших кодов для данного канала было бы недостаточно для получения кодов хороших для класса из-за того, что число каналов с ростом n растет как $|S|^n$. В силу этой оценки доля кодов в ансамбле, хороших для всего класса каналов, не меньше $1-|S|^n e^{-n^2/6}\to 1$. Отсюда и следует существование хотя бы одного хорошего кода.

3. Перейдем к построению вееров. Фиксировав $\varepsilon>0$, которое явно будет выбрано ниже, положим

$$F^n(\tilde{p}_s)=\bigcap_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\{(\mathbf{x},\mathbf{y}):|N(x,y|\mathbf{x},\mathbf{y})-nP(x)w^s(x,y)|\leqslant \leqslant n\varepsilon,\ \mathbf{x}\in X^n,\ \mathbf{y}\in Y^n\},\qquad \mathbf{s}\in S^n, \tag{2.8}$$

и

$$F^n=\bigcup_{\mathbf{s}\in S^n}F^n(\tilde{p}_s). \tag{2.9}$$

Лемма 1. *При всех достаточно больших n равномерно по* $\mathbf{s}\in S^n$

$$P_n w_s(F^n)\geqslant 1-\lambda/4. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть фиксировано $\mathbf{s}\in S^n$. Рассмотрим пару случайных величин (ξ,η) с совместным распределением $P_n w_s(\cdot)$. Тогда математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}N(x,y|\xi,\eta)=nP(x)w^s(x,y),\\ &\mathbf{D}N(x,y|\xi,\eta)=n\sum_{s\in S}\tilde{p}_s(s)P(x)w_s(x,y)(1-P(x)w_s(x,y)),\\ &x\in X,\quad y\in Y.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Поэтому из неравенства Чебышева следует утверждение леммы.

Положим

$$F_{\mathbf{x}}^n(\tilde{p}_s)=\{\mathbf{y}:\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in F^n(\tilde{p}_s)\} \tag{2.12}$$

и веер

$$F_{\mathbf{x}}^n=\{\mathbf{y}:(\mathbf{x},\mathbf{y})\in F^n\}=\bigcup_{\mathbf{s}\in S^n}F_{\mathbf{x}}^n(\tilde{p}_s). \tag{2.13}$$

Обозначим для фиксированного $\mathbf{x}\in X^n$ через $p_{\mathbf{x}}(\cdot)$ распределение вероятностей на X, равное

$$p_{\mathbf{x}}(x)=n^{-1}N(x|\mathbf{x}),\qquad x\in X. \tag{2.14}$$

Рассмотрим множество

$$A(P,\varepsilon)=\{\mathbf{x}:\ |p_{\mathbf{x}}(x)-P(x)|\leqslant\varepsilon|Y|,\ x\in X,\ \mathbf{x}\in X^n\}. \tag{2.15}$$

Заметим, что из (2.8) следует, что при $\mathbf{x}\notin A(P,\varepsilon)$

$$F_{\mathbf{x}}^n=\phi. \tag{2.16}$$

4. Для любого $w\in\overline{W}_1$ обозначим через $V(w,\varepsilon)$ совокупность пар переходных функций: (q,r), $q\in Q$, $r\in\mathscr{R}$, таких, что

$$\Big|\sum_{s\in S}q(s|x)r(y|x,s)-w(x,y)\Big|\leqslant\varepsilon,\quad x\in X,\quad y\in Y. \tag{2.17}$$

Положим (сравни с (1.18))

$$H(P, W_1, \varepsilon) = \inf_{w \in \overline{W}_1} \inf_{(q,r) \in V(w,\varepsilon)} H(P, q, r). \tag{2.18}$$

Обозначим через $\mathscr{R}(w, q, \varepsilon)$, $w \in \overline{W}_1$, $q \in Q$ множество

$$\mathscr{R}(w, q, \varepsilon) = \{r\colon\ r \in R,\ (q, r) \in V(w, \varepsilon)\}. \tag{2.19}$$

Заметим, что

$$H(P, W_1, \varepsilon) = \inf_{w \in \overline{W}_1} \inf_{q \in Q} \inf_{r \in \mathscr{R}(w,q,\varepsilon)} H(P, q, r). \tag{2.20}$$

Лемма 2. *Если $H(P, W_1) > 0$, то существует $\varepsilon_1 > 0$, такое, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем*

$$H(P, W_1, \varepsilon) > 0. \tag{2.21}$$

Доказательство. Доказывать будем от противного. Пусть $H(P, W_1) > 0$, но при всех ε величина $H(P, W_1, \varepsilon) = 0$. Выберем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Тогда существует последовательность $(q_n, r_n) \in V(w_n, \varepsilon_n)$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} H(P, q_n, r_n) = 0. \tag{2.22}$$

В силу компактности Q и $\mathscr{R}$ существует последовательность $\{(q_{n_i}, r_{n_i})\}$, такая, что $\{q_{n_i}\}$ сходится к некоторому $q_0 \in Q$, а $\{r_{n_i}\}$ сходится к $r_0 \in \mathscr{R}$. Поскольку $\overline{W}_1$ — компакт, то при этом переходные функции

$$w_{n_i}(x, y) = \sum_{s \in S} q_{n_i}(s|x) r_{n_i}(y|x, s), \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{2.23}$$

сходятся в метрике (1.8) к $w_0 \in \overline{W}_1$, определяемой из (2.23) при подстановке в нее q_0 и r_0 вместо q_{n_i} и r_{n_i}. Заметим, что $H(P, q, r)$ является при фиксированном P полунепрерывной снизу функцией от (q, r). Поэтому из предыдущего следует, что

$$H(P, q_0, r_0) \leqslant \lim_{n_i \to \infty} H(P, q_{n_i}, r_{n_i}) = 0. \tag{2.24}$$

Значит $H(P, q_0, r_0) = 0$. Но так как $w_0 \in \overline{W}_1$ и по построению $(q_0, r_0) \in V(w_0)$, то $H(P, W_1) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что существует $\varepsilon_1 > 0$, такое, что $H(P, W_1, \varepsilon_1) > 0$. Учитывая, что $H(P, W_1, \varepsilon)$ является невозрастающей функцией от ε, получаем утверждение леммы.

Предположим теперь, что значение $\gamma > 0$, зафиксированное в начале параграфа, удовлетворяет (2.1) и неравенству

$$\gamma < H(P, W_1, \varepsilon_1). \tag{2.25}$$

Обозначим через $H_{p_{\mathbf{x}}}(P, q, r)$, $\mathbf{x} \in X^n$, $q \in Q$, $r \in \mathscr{R}$ величину

$$H_{p_{\mathbf{x}}}(P, q, r) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \sum_{s \in S} p_{\mathbf{x}}(x) q(s|x) H_P(r(\cdot|x, s) | P_s(\cdot)). \tag{2.26}$$

Лемма 3. *Для любого $\alpha > 0$ найдется $\varepsilon(\alpha) > 0$, такое, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\alpha)$ и любых $q \in Q$, $r \in \mathscr{R}$, $\mathbf{x} \in A(P, \varepsilon)$*

$$H_{p_{\mathbf{x}}}(P, q, r) \geqslant H(P, q, r) - \alpha. \tag{2.27}$$

Доказательство. Заметим, что если при некотором $x_0 \in X$ и $s_0 \in S$ величина $H_P(r(\cdot|x_0, s_0)|P_{s_0}(\cdot)) < \infty$, то

$$H_P(r(\cdot|x_0, s_0)|P_{s_0}(\cdot)) \leqslant |\log(\min_{(s,y):P_s(y)>0} P_s(y))|. \tag{2.28}$$

Кроме того, заметим, что если $\varepsilon < b(2|Y|)^{-1}$ и при некоторых $x_1 \in X$, $s_1 \in S$ величина $p_{\mathbf{x}}(x_1)q(s_1|x_1) > 0$, а $H_P(r(\cdot|x_1, s_1)|P_{s_1}(\cdot)) = +\infty$, то из (2.15) следует, что

$$P(x_1)q(s_1|x_1)H_P(r(\cdot|x_1, s_1)|P_{s_1}(\cdot)) = +\infty. \tag{2.29}$$

Из (2.26), (2.28) и (2.29) вытекает утверждение леммы.

Положим для любого $q \in Q$

$$\mathscr{H}_\varepsilon(P, q) = \inf_{w \in \overline{W}_1} \inf_{r \in \mathscr{R}(w, q, 2\varepsilon|Y|b^{-1})} H(P, q, r). \tag{2.30}$$

Обозначим через $q_{\mathbf{s}, \mathbf{x}}$, $\mathbf{s} \in S^n$, $\mathbf{x} \in X^n$ переходную функцию из X в S, равную

$$q_{\mathbf{s},\mathbf{x}}(s|x) = \frac{N(x, s|\mathbf{x}, \mathbf{s})}{N(x|\mathbf{x})}, \quad x \in X, \quad s \in S. \tag{2.31}$$

Лемма 4. *Существует* $\varepsilon_2 > 0$, *такое, что при* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ *и всех достаточно больших* n *равномерно по* $x \in A(P, \varepsilon)$ *и* * $\mathbf{s} \in S^n$

$$P_{\mathbf{s}}(F_{\mathbf{x}}^n) \leqslant \exp_2\{-n(H_\varepsilon(P, q_{\mathbf{s}, \mathbf{x}}) - {}^1/_3\gamma)\}. \tag{2.32}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{R}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{x}}$, $\mathbf{s} \in S^n$, $\mathbf{x} \in X^n$ множество всех переходных функций $r(\cdot|\cdot, \cdot)$ из $X \times S$ в Y, значения которых $r(\cdot|x, s)$ при фиксированных $x \in X$ и $s \in S$ является целыми кратными $N(x, s|\mathbf{x}, \mathbf{s})^{-1}$, если $N(x, s|\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0$, и равны $|Y|^{-1}$ в противном случае. Заметим, что

$$|\mathscr{R}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{x}}| \leqslant (n+1)^{|X|\cdot|Y|\cdot|S|}. \tag{2.33}$$

Зафиксируем $\mathbf{s} \in S^n$ и $\mathbf{x} \in A(P, \varepsilon)$. Рассмотрим множество A_r, $r \in \mathscr{R}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned} A_r = \{\mathbf{y}:\ & \mathbf{y} \in Y^n, N(x, y, s|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = \\ & = N(x, s|\mathbf{x}, \mathbf{s})r(y|x, s), x \in X, y \in Y, s \in S\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Тогда вероятность (см. (2.4))

$$P_{\mathbf{s}}(A_r) = \prod_{s \in S} \prod_{x \in X} \left(\frac{N(x, s|\mathbf{x}, \mathbf{s})!}{\prod_{y \in Y} N(x, y, s|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s})!} \prod_{y \in Y} P_s(y)^{N(x,y,s|\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{s})} \right). \tag{2.35}$$

Из формулы Стирлинга

$$m! = \nu_m m^m e^{-m}, \ \nu_m = \sqrt{2\pi m} e^{\theta_m/12m}, \quad |\theta_m| \leqslant 1, \tag{2.36}$$

а также из (2.34) и (2.26) следует, что

$$P_{\mathbf{s}}(A_r) \leqslant \exp_2\{-n(H_{P_{\mathbf{x}}}(P, q_{\mathbf{s}, \mathbf{x}}, r) + f(n))\}, \tag{2.37}$$

где $f(n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\mathbf{s} \in S^n$ и $\mathbf{x} \in A(P, \varepsilon)$.

Заметим, что (см. 2.8)

$$F_{\mathbf{x}}^n \subseteq \bigcup_{\mathbf{s}' \in S^n} \Big(\bigcup_{r \in \mathscr{R}(w^{\mathbf{s}'}, q_{\mathbf{s}, \mathbf{x}}, 2\varepsilon|Y|b^{-1}) \cap \mathscr{R}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{x}}} A_r \Big). \tag{2.38}$$

---

* Здесь и далее через $\exp_2(a)$ будем обозначать 2^a.

Поэтому из (2.33), (2.37), (2.30) и леммы 3 следует доказываемое нами утверждение.

Рассмотрим при любом $\mathrm{s}\in S^n$ множество

$$\mathscr{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)=\{(p_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{s},\mathrm{x}}):\ \mathrm{x}\in A(P,\varepsilon)\}. \tag{2.39}$$

Нетрудно показать, что

$$|\mathscr{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)|\leqslant(n+1)^{|X|\cdot|S|}. \tag{2.40}$$

Рассмотрим, далее, при любой паре $(\hat{p}, \hat{q})\in\mathscr{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)$, $\mathrm{s}\in S^n$ множество

$$X_{\hat{q}}^{\hat{p}}=\{\mathrm{x}: p_{\mathrm{x}}(x)\,q_{\mathrm{s},\mathrm{x}}(s\,|\,x)=\hat{p}(x)\,\hat{q}(s\,|\,x),\ x\in X,\ s\in S\}. \tag{2.41}$$

Лемма 5. *Существует* $\varepsilon_3>0$, *такое, что при* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_3$ *и всех достаточно больших* n *равномерно по* $\mathrm{s}\in S^n$ *и парам* $(\hat{p}, \hat{q})\in\mathscr{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)$

$$P_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}})\leqslant\exp_2\{-n\,(I\,(P,\ \hat{q})-{}^1/_3\gamma)\}. \tag{2.42}$$

Доказательство. Пусть фиксировано $\mathrm{s}\in S^n$ и пара $(\hat{p}, \hat{q})\in\mathscr{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)$. Тогда найдется $\mathrm{x}\in A(P,\varepsilon)$, такое, что $p_{\mathrm{x}}=\hat{p}$ и $q_{\mathrm{s},\mathrm{x}}=q$. Поэтому вероятность

$$P_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}})=\prod_{s\in S}\left(\frac{N(s\,|\,\mathrm{s})!}{\prod\limits_{x\in X}N(x,s\,|\,\mathrm{x},\mathrm{s})!}\prod_{x\in X}P(x)^{N(x,s|\mathrm{x},\mathrm{s})}\right). \tag{2.43}$$

Положим

$$I_{P_{\mathrm{x}}}(P,\hat{q})=\sum_{x\in X}\sum_{s\in S}p_{\mathrm{x}}(x)\,\hat{q}(s|x)\log\frac{p_{\mathrm{x}}(x)\,\hat{q}(s|x)}{P(x)\,\tilde{p}_{\mathrm{s}}(s)}. \tag{2.44}$$

Применяя к (2.43) формулу Стирлинга, получаем, что при всех достаточно больших n (см. также (2.6), (2.14) и (2.31))

$$P_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}})\leqslant\exp_2\{-n\,(I_{P_{\mathrm{x}}}(P,\ \hat{q})-{}^1/_6\gamma)\}. \tag{2.45}$$

Далее, из (2.15) и (2.44) в силу равномерной непрерывности функции $\log t$ при $b/2\leqslant t\leqslant 1$ получаем, что при всех достаточно малых ε

$$I_{P_{\mathrm{x}}}(P,\hat{q})\geqslant I(p_{\mathrm{x}},\hat{q})-{}^1/_{12}\gamma. \tag{2.46}$$

В силу равномерной непрерывности $I(p,\ \hat{q})$ по p из (2.15) следует, что при всех достаточно малых ε

$$I(p_{\mathrm{x}},\hat{q})\geqslant I(P,\hat{q})-{}^1/_{12}\gamma. \tag{2.47}$$

Из (2.45)—(2.47) следует утверждение леммы.

Положим при фиксированных $q\in Q$, $r\in\mathscr{R}$

$$\mathscr{H}(P,q,r)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}\sum_{s\in S}P(x)\,q(s|x)\,r(y|x,s)\times$$
$$\times\log(q(s|x)\,r(y|x,s)/\tilde{p}(s)\,P_{\mathrm{s}}(y)), \tag{2.48}$$

где $\tilde{p}(s)=\sum\limits_{x\in X}P(x)\,q(s|x)$.

Лемма 6. *При любых* $q \in Q$, $r \in R$ *и* $w = w(q, r)$ *вида* (1.17)

$$\mathscr{H}(P, q, r) \geqslant I(P, w). \tag{2.49}$$

Доказательство. В силу известного неравенства (см., например, [12])

$$\sum_{i=1}^{l} r_i \log \frac{r_i}{u_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{l} r_i\right) \log \left(\sum_{i=1}^{l} r_i \Big/ \sum_{i=1}^{l} u_i\right), \tag{2.50}$$

справедливого при любых наборах неотрицательных чисел r_i, u_i, имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(P, q, r) &\geqslant \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x) w(x, y) \log \left(w(x, y) \Big/ \sum_{s \in S} \tilde{p}(s) P_s(y) \right) = \\ &= I(P, w) + \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} P(x) w(x, y) \right) \times \\ &\times \log \left(\sum_{x \in X} P(x) w(x, y) \Big/ \sum_{s \in S} \tilde{p}(s) P_s(y) \right) \geqslant I(P, w), \end{aligned} \tag{2.51}$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 6 вытекает следующее утверждение, на котором основаны приведенные ниже рассуждения, хотя само оно явно в дальнейшем не используется.

Утверждение. Пусть

$$\tilde{C}_P(W_1) = \inf_{w \in \overline{W}_1} \inf_{(q, r) \in V(w)} \mathscr{H}(P, q, r). \tag{2.52}$$

Тогда $\tilde{C}_P(W_1) = C_P(\overline{W}_1)$ (см. (1.10).

Доказательство. Из леммы 6 следует, что

$$\tilde{C}_P(W_1) \geqslant C_P(\overline{W}_1). \tag{2.53}$$

Пусть $w_0 \in \overline{W}_1$ таково, что $I(P, w_0) = C_P(\overline{W}_1)$. Так как $\overline{W}_1$ совпадает с выпуклой оболочкой W_1, то существует распределение вероятностей $\tilde{p}_0(s)$, $s \in S$ такое, что

$$w_0(x, y) = \sum_{s \in S} \tilde{p}_0(s) w_s(x, y), \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{2.54}$$

Рассмотрим $q_0 \in Q$ и $r_0 \in \mathscr{R}$, определяемые очевидным образом из уравнения

$$\begin{aligned} q_0(s|x) r_0(y|x, s) &= \tilde{p}_0(s) w_0(x, y) P_s(y) \times \\ &\times \left(\sum_{s' \in S} \tilde{p}_0(s') P_{s'}(y) \right)^{-1}, \qquad s \in S, \quad x \in X, \quad y \in Y. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Очевидно, что $(q_0, r_0) \in V(w_0)$ и

$$\mathscr{H}(P, q_0, r_0) = I(P, w_0) = C_P(\overline{W}_1). \tag{2.56}$$

Из (2.53) и (2.56) вытекает доказываемое нами утверждение.

Лемма 7. *Существует* $\varepsilon_4 > 0$, *такое, что при* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ *и любом* $q \in Q$

$$I(P, q) + \mathscr{H}_\varepsilon(P, q) \geqslant C_P(\overline{W}_1) - {}^1/_3\gamma. \tag{2.57}$$

Доказательство. При любых $q \in Q$ и $r \in \mathscr{R}$, как следует из (1.16) и (2.48),

$$I(P, q)+H(P, q, r)=\mathscr{H}(P, q, r). \tag{2.58}$$

Обозначим через $\overline{W}_1(\varepsilon)$ совокупность всех переходных функций из X в Y, таких, что для каждой $w \in \overline{W}_1(\varepsilon)$ найдется $w' \in \overline{W}_1$, удовлетворяющая неравенству (см. (1.8))

$$\rho(w, w') \leqslant \varepsilon |Y|^2 b^{-1}. \tag{2.59}$$

Заметим, что $\overline{W}_1(\varepsilon)$ является замкнутым множеством. Поэтому из (2.58), (2.30), (1.10) и леммы 6 следует, что

$$I(P, q)+\mathscr{H}_\varepsilon(P, q) \geqslant C_P(\overline{W}_1(\varepsilon)). \tag{2.60}$$

Далее из равномерной непрерывности $I(p, w)$ по w на $\overline{W}_1(\varepsilon)$ следует, что при всех достаточно малых ε

$$C_P(\overline{W}_1(\varepsilon)) \geqslant C_P(\overline{W}_1)-{}^1/_3\gamma. \tag{2.61}$$

Из (2.60) и (2.61) вытекает утверждение леммы.

5. Предположим теперь, что ε, фиксированное в начале параграфа (см. (2.1)), равно

$$\varepsilon=\min\,(b\varepsilon_1/2|Y|, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4). \tag{2.62}$$

Тогда справедливы формулы (2.10), (2.21), (2.32), (2.42), (2.57).

Перейдем к построению случайного кода. Рассмотрим систему

$$N=[2^{nR}] \tag{2.63}$$

независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, принимающих значения в X^n с распределением вероятностей $P_n(\cdot)$.

Будем считать, что они определены на вспомогательном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \Pr)$, так что будем писать иногда $\xi_j(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Зафиксируем произвольное $s \in S^n$. Положим

$$\begin{aligned} v_1&=\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j<i} F_{\xi_j}^n),\\ v_2&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j>i} F_{\xi_j}^n). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Тогда вероятность

$$\begin{aligned} \pi(s)&=\Pr\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j\neq i} F_{\xi_j}^n)<\lambda/2\right\} \geqslant\\ &\geqslant \Pr\{v_1+v_2<\lambda/2\} \geqslant \Pr\{\max(v_1, v_2)<\lambda/4\}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Поэтому для оценки $\pi(s)$ достаточно оценить

$$\begin{aligned} \pi_1(s)&=\Pr\,(v_1<\lambda/4),\\ \pi_2(s)&=\Pr\,(v_2<\lambda/4). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Пусть $\chi_{\hat{p},\hat{q}}$, $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathscr{M}_s(\varepsilon)$ (см. (2.39)) есть характеристическая функция множества $X_{\hat{q}}^{\hat{p}}$ (см. (2.41)). Тогда случайные величины

$$\chi_{\hat{p},\hat{q}}^{j} = \chi_{\hat{p},\hat{q}}(\xi_j), \quad j = \overline{1, N} \tag{2.67}$$

взаимно независимы и имеют математическое ожидание $\mathbf{M}\chi_{\hat{p},\hat{q}}^{j} = P_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}})$.

Положим при $i=\overline{1, N}$

$$L_i^{\hat{p},\hat{q}} = \sum_{j=1}^{i} \chi_{\hat{p},\hat{q}}^{j}, \tag{2.68}$$

т. е. при фиксированном $\omega \in \Omega$ значение $L_i^{\hat{p},\hat{q}}$ равно числу слов в наборе $\xi_j(\omega)$, $j=\overline{1, i}$, таких, что

$$p_{\xi_j(\omega)}(x)\, q_{s,\xi_j(\omega)}(s|x) = \hat{p}(x)\,\hat{q}(s|x), \quad x \in X, \quad s \in S. \tag{2.69}$$

Рассмотрим при фиксированном $i=\overline{1, N}$ и фиксированных $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathscr{M}_s(\varepsilon)$ множество $\Omega_i(\hat{p}, \hat{q})$ всех элементарных событий $\omega \in \Omega$, таких, что

$$L_i^{\hat{p},\hat{q}} - iP_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}}) \leqslant n^2\,(iP_n(X_{\hat{q}}^{\hat{p}}) + 1). \tag{2.70}$$

Из леммы 9 следует, что

$$\Pr\{\Omega_i(\hat{p}, \hat{q})\} \geqslant 1 - e^{-n^2/4}, \quad i=\overline{1, N}, \ (\hat{p}, \hat{q}) \in \mathscr{M}_s(\varepsilon). \tag{2.71}$$

Положим

$$\Omega_i(\mathrm{s}) = \bigcap_{(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathscr{M}_s(\varepsilon)} \Omega_i(\hat{p}, \hat{q}). \tag{2.72}$$

Из (2.71) и (2.40) следует, что при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$

$$\Pr\{\Omega_i(\mathrm{s})\} \geqslant 1 - e^{-n^2/5}. \tag{2.73}$$

6. Из-за независимости ξ_i при любом $i=\overline{2, N}$, любом наборе $\hat{x} = \{\mathrm{x}_j\colon \mathrm{x}_j \in X^n,\ j=\overline{1, i-1}\}$ и любом вещественном a условная вероятность

$$\begin{aligned} &p\{w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j<i} F_{\xi_j}^n) < a \,|\, \xi_j = \mathrm{x}_j, \quad j=\overline{1, i-1}\} = \\ &= \Pr\{w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j<i} F_{\mathrm{x}_j}^n) < a\}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} w_s(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j<i} F_{\mathrm{x}_j}^n) = P_n w_s\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in F^n\}, \\ &\mathrm{y} \in \bigcup_{j<i} F_{\mathrm{x}_j}^n\} \leqslant P_s(\bigcup_{j<i} F_{\mathrm{x}_j}^n) \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} P_s(F_{\mathrm{x}_j}^n). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Для любого набора $\hat{x} = \{\mathrm{x}_j\colon j=\overline{1, i-1}\}$ положим $J(\hat{x}) = \{j\colon \mathrm{x}_j \in A(P, \varepsilon),\ j=\overline{1, i-1}\}$.

Согласно (2.16), при $\mathrm{x}_j \notin A(P, \varepsilon)$ значение $\mathbf{P}_s(F_{\mathrm{x}_j}) = 0$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{i-1} P_s(F_{\mathrm{x}_j}^n) = \sum_{j \in J(\hat{x})} P_s(F_{\mathrm{x}_j}^n). \tag{2.76}$$

Воспользовавшись леммой 4, получаем

$$(2.77)\qquad \sum_{j=1}^{i-1} P_{\mathrm{s}}(F^n_{\mathrm{x}_j}) \leqslant \sum_{(\hat p,\hat q)\in\mathcal{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)} L^{\hat p,\hat q}_{i-1} \exp_2\{-n(\mathcal{H}_\varepsilon(\hat p,\hat q)-{}^1/_3\gamma)\}.$$

Рассмотрим при любом $i=\overline{2,N}$ множество K_i наборов $\hat x$

$$(2.78)\qquad K_i=\{\hat x:\ \hat x=\{\mathrm{x}_j:\ \mathrm{x}_j=\xi_j(\omega),\ j=\overline{1,i-1}\},\ \omega\in\Omega_{i-1}(\mathrm{s})\}.$$

Тогда из (2.40), (2.77) и (2.70) следует, что при любом наборе $\hat x=\{\mathrm{x}_j\}\in K_i$

$$(2.79)\qquad \sum_{j=1}^{i-1} P_{\mathrm{s}}(F^n_{\mathrm{x}_j}) \leqslant (n+1)^{|X|\cdot|S|} \max_{(\hat p,\hat q)\in\mathcal{M}_{\mathrm{s}}(\varepsilon)} (n^2(2iP_n(X^{\hat p}_{\hat q})+1)\times$$
$$\times\exp_2\{-n(\mathcal{H}_\varepsilon(P,\hat q)-{}^1/_3\gamma)\}).$$

Отсюда в силу (2.42), (2.57) и (2.63) имеем

$$(2.80)\qquad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{i-1} P_{\mathrm{s}}(F^n_{\mathrm{x}_j}) \leqslant (n+1)^{|X|\cdot|S|}(2n^2[2^{nR}]\exp_2\{-n(C_P(\overline{W}_1)-\gamma)\}+\\ &+n^2\exp_2\{-n(\inf_{q\in Q}\mathcal{H}_\varepsilon(P,q)-{}^1/_3\gamma)\}).\end{aligned}$$

Согласно (2.20) и (2.30),

$$(2.81)\qquad \inf_{q\in Q}\mathcal{H}_\varepsilon(P,q)=H(P,W_1,2\varepsilon|Y|b^{-1}).$$

Так как $H(P,W_1,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией от ε, то из (2.80), (2.1), (2.62), (2.81), (2.21) и (2.25) следует, что

$$(2.82)\qquad \sum_{j=1}^{i-1} P_{\mathrm{s}}(F^n_{\mathrm{x}_j}) \leqslant \lambda^2/256$$

при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s}\in S^n$, $i=\overline{2,N}$ и наборам $\hat x\in K_i$.

Положим для любого вещественного a, $i=\overline{2,N}$

$$(2.83)\qquad \mathcal{F}_i(a)=\min_{\hat x\in K_i}\Pr\{\omega: w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F^n_{\xi_i}\cap\bigcup_{j<i}F^n_{\mathrm{x}_j})<a\}.$$

Так как число наборов $\hat x\in K_i$ конечно, то можно показать, что $\mathcal{F}_i(\cdot)$ является неубывающей неотрицательной и непрерывной слева функцией. Кроме того, $\mathcal{F}_i(0)=0$ и $\mathcal{F}_i(1)=1$. Значит, $\mathcal{F}_i(\cdot)$ — функция распределения некоторой вещественной случайной величины ζ_i. При этом из (2.75), (2.82), (2.83) и неравенства Чебышева следует, что

$$(2.84)\qquad 1-\mathcal{F}_i(\lambda/16)\leqslant(\lambda^2/256)\cdot(16/\lambda)=\lambda/16$$

при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s}\in S^n$. Поэтому

$$(2.85)\qquad \mathbf{M}\zeta_i=\int_0^1(1-\mathcal{F}_i(a))\,da=\int_0^{\lambda/16}(1-\mathcal{F}_i(a))\,da+\int_{\lambda/16}^1(1-\mathcal{F}_i(a))\,da\leqslant\frac{\lambda}{8}$$

при всех достаточно больших n равномерно $i=\overline{2,N}$ и $\mathrm{s}\in S^n$. Применяя к случайным величинам ζ_i и $\mu_i=w_{\mathrm{s}}(\xi_i,F^n_{\xi_i}\cap\bigcup_{j<i}F^n_{\xi_j})$ лемму 8 (в качестве мно-

жеств B_i выбраны $\Omega_i(\mathrm{s})$ (см. (2.72) и (2.73)), имеем, согласно (2.66),

$$\pi_1(\mathrm{s}) \geqslant p\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} \zeta_i < \lambda/4\right\} - Ne^{-n^2/5}. \tag{2.86}$$

Из (2.85) и леммы 10 следует

$$p\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} \zeta_i < \frac{\lambda}{4}\right\} \geqslant p\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} (\zeta_i - \mathbf{M}\zeta_i) < \frac{\lambda}{8}\right\} \geqslant 1 - \exp\left(-N\frac{\lambda^2}{128}\right). \tag{2.87}$$

Поэтому из (2.86) получаем, что

$$\pi_1(\mathrm{s}) \geqslant 1 - e^{-n^2/6} \tag{2.88}$$

при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$. Те же рассуждения показывают, что при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$

$$\pi_2(\mathrm{s}) \geqslant 1 - e^{-n^2/6}. \tag{2.89}$$

Значит (см. (2.65)), при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$

$$\pi(\mathrm{s}) \geqslant 1 - 2e^{-n^2/6}. \tag{2.90}$$

Пусть

$$\widetilde{B}_1 = \left\{\omega : \max_{\mathrm{s} \in S^n} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F_{\xi_i}^n \cap \bigcup_{j \neq i} F_{\xi_j}^n) < \frac{\lambda}{2}\right\}. \tag{2.91}$$

Тогда из (2.90) следует, что при всех достаточно больших n

$$\Pr(\widetilde{B}_1) \geqslant 1 - 2|S|^n e^{-n^2/6} \geqslant 1 - e^{-n^2/8}. \tag{2.92}$$

7. Согласно (2.10), при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$

$$\mathbf{M} w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F_{\xi_i}^n) = P_n w_{\mathrm{s}}(F^n) \geqslant 1 - \frac{\lambda}{4}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.93}$$

Из взаимной независимости при фиксированном $\mathrm{s} \in S^n$ случайных величин $w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F_{\xi_i}^n)$, $i = \overline{1, N}$, в силу леммы 10 получаем, что при всех достаточно больших n равномерно по $\mathrm{s} \in S^n$

$$\Pr\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F_{\xi_i}^n) \geqslant 1 - \frac{\lambda}{2}\right\} \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{\lambda^2}{32}[2^{nR}]\right). \tag{2.94}$$

Пусть

$$\widetilde{B}_2 = \left\{\omega : \min_{\mathrm{s} \in S^n} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_{\mathrm{s}}(\xi_i, F_{\xi_i}^n) \geqslant 1 - \frac{\lambda}{2}\right\}. \tag{2.95}$$

Тогда из (2.94) следует, что при всех достаточно больших n

$$\Pr(\widetilde{B}_2) \geqslant 1 - |S|^n \exp\left(-\frac{\lambda^2}{32}[2^{nR}]\right). \tag{2.96}$$

Из (2.92) и (2.96) следует, что при всех достаточно больших n

$$\Pr(\widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2) > {}^3/_4. \tag{2.97}$$

Поэтому найдется $\omega_0 \in \Omega$, такое, что

$$\min_{s \in S^n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_s(\xi_i(\omega_0), (F^n_{\xi_i(\omega_0)} \setminus \bigcup_{j \neq i} F^n_{\xi_j(\omega_0)})) \geqslant 1-\lambda. \tag{2.98}$$

Значит (см. определение 3), система

$$\{(\xi_i(\omega_0), (F^n_{\xi_i(\omega_0)} \setminus \bigcup_{j \neq i} F^n_{\xi_j(\omega_0)})) : i=\overline{1, N}\} \tag{2.99}$$

есть $(n, [2^{nR}], \bar{\lambda})$-код. Теорема 2 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 3, 4

Доказательство теоремы 3. Из непрерывности количества информации $I(p, w)$ по обеим переменным, выпуклости по w и вогнутости по p, а также компактности $\mathscr{P}$ и $\overline{W}_1$ в силу теоремы о минимаксе (см., например, [13]) имеем

$$C(\overline{W}_1) = \min_{w \in \overline{W}_1} \max_{p \in \mathscr{P}} I(p, w) \tag{3.1}$$

(эта формула впервые получена в [14]). Пусть $w_0 \in \overline{W}_1$ таково, что

$$C(\overline{W}_1) = \max_{p \in \mathscr{P}} I(p, w_0), \tag{3.2}$$

и пусть $\{w_0{}^n, n=1, 2, \ldots\}$ дискретный стационарный канал без памяти с матрицей переходных вероятностей w_0. Пусть $\mathfrak{A}=\{(\mathbf{x}_i, A_i)\}$ — любой фиксированный $(n, N, \bar{\lambda})$-код для $\{W_n\}$. Из линейности по w функции (см. (1.7))

$$\bar{r}(\mathfrak{A}, w) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w(\mathbf{x}_i, A_i{}^c) \tag{3.3}$$

следует, что $\mathfrak{A}$ является $(n, N, \bar{\lambda})$-кодом для полного класса $\{W_n{}'\}$ с множеством допустимых переходных функций $W_1{}'$, являющимся выпуклой линейной оболочкой W_1. Поскольку в рассматриваемом нами случае $\overline{W}_1$ совпадает с выпуклой оболочкой W_1, то $\mathfrak{A}$ является $(n, N, \bar{\lambda})$-кодом для $\{w_0{}^n, n=1, 2, \ldots\}$. Поэтому из теоремы 3.3.1 в [15] следует утверждение теоремы 3.

Следующий пример показывает, что условие (1.20) является достаточным, но не необходимым для выполнения теорем 1, 2.

Пример 1. Пусть $X=Y=\{1, 2\}$, $S=\{1, 2, 3, 4\}$, $W_1=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$,

$$w_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{Vmatrix}, \quad w_2 = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad w_3 = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{Vmatrix}, \quad w_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.4}$$

Пусть $\overline{\overline{W}}_1$ – выпуклое построчное замыкание W_1. Легко показать, что $\overline{W}_1 = \overline{\overline{W}}_1$. Поэтому

$$C(\overline{\overline{W}}_1) = \max_{p \in \mathscr{P}} \min_{w \in \overline{\overline{W}}_1} I(p, w) = C(\overline{W}_1). \tag{3.5}$$

Пусть распределение вероятностей $p_0(x)={}^1/_2$, $x=1, 2$. Нетрудно показать, что p_0 – единственное распределение вероятностей, удовлетворяющее (1.19).

Покажем, что $H(p_0, W_1)=0$. Распределения вероятностей $P_s(\cdot)$ в данном случае равны

$$P_1(y)=\begin{cases}0{,}7, & y=1,\\ 0{,}3, & y=2,\end{cases}\qquad P_2(y)=\begin{cases}0{,}3, & y=1,\\ 0{,}7, & y=2,\end{cases}$$

(3.6)
$$P_3(y)=P_4(y)=0{,}5,\qquad y=1,\ 2.$$

Рассмотрим переходную функцию $q_0(s|x)\in Q$, равную

$$q_0(\cdot|\cdot)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{Vmatrix}. \tag{3.7}$$

Пусть $r_0(y|x, s)\in\mathscr{R}$ равна

$$r_0(\cdot|1,\cdot)=\begin{Vmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad r_0(\cdot|2,\cdot)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}5 & 0{,}5\\ 1 & 0\end{Vmatrix}. \tag{3.8}$$

Пусть $w_0(x, y)\in\overline{W}_1$ равна

$$w_0=\frac{1}{4}w_1+\frac{3}{4}w_3=\begin{Vmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{Vmatrix}. \tag{3.9}$$

Тогда легко проверить, что $(q_0, r_0)\in V(w_0)$ и $H(p_0, q_0, r_0)=0$. Значит, в данном случае $H(p_0, W_1)=0$. С другой стороны, по теореме 1 из [4] пропускная способность класса $\{W_n\}$ для (n, N, λ)-кодов равна $C(\overline{\overline{W}}_1)\neq 0$. Значит, и для кодов из теоремы 1 пропускная способность равна $C(\overline{W}_1)$.

Пример 2 (заимствован из [16]). Пусть $X=S=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$

$$w_1=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\qquad w_2=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}. \tag{3.10}$$

Единственное распределение вероятностей, удовлетворяющее (1.19), есть $p_0(x)={}^1/_2$, $x=1, 2$. В [16] доказано, что пропускная способность $C=0$.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что

$$\min_{x\in X} p(x)=b>0. \tag{3.11}$$

Это предположение не ограничивает общности, так как, заменив X на X_p, а W_1 на W_1^p (см. (1.21) и (1.22)), получаем множество переходных функций, для которого $H(p, W_1^p)=H(p, W_1)$ и выполняется (3.11).

Пусть

$$U(p, W_1)\cap\overline{W}_1\neq\varnothing. \tag{3.12}$$

Тогда существуют $w\in\overline{W}_1$ и $q\in Q$, такие, что

$$w(x, y)=\sum_{s\in S} q(s|x)\,p_s(y),\ x\in X,\ y\in Y. \tag{3.13}$$

Полагая $r\in\mathscr{R}$ равным

$$r(y|x, s)=p_s(y),\quad x\in X,\quad y\in Y,\quad s\in S, \tag{3.14}$$

имеем пару $(q, r)\in V(w)$, и такую, что (см. (1.16))

$$H(p, q, r)=0. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что если выполнено (3.12), то $H(p, W_1)=0$.

Пусть

$$H(p, W_1)=0. \tag{3.16}$$

Тогда легко видеть, что из компактности $\overline{W}_1$, Q и $\mathscr{R}$, а также из полунепрерывности снизу $H(p, q, r)$ (см. (1.16)) по парам (q, r) следует, что существует $w_0 \in \overline{W}_1$ и пара $(q_0, r_0) \in V(w_0)$, такие, что

$$H(p, q_0, r_0) = 0. \tag{3.17}$$

Покажем, что $w_0 \in U(p, W_1)$. Из (3.11) и (3.17) следует (см. также (1.16)), что

$$\sum_{s \in S} \sum_{y \in Y} q_0(s|x) r_0(y|x, s) \log \frac{q_0(s|x) r_0(y_0|x, s)}{q_0(s|x) p_s(y)} = 0, \qquad x \in X. \tag{3.18}$$

Тогда из свойств энтропии одной вероятностной меры по другой (см. [11]) следует, что для множеств Γ_x, $x \in X$

$$\Gamma_x = \{(s, y):\ r_0(y|x, s) = p_s(y),\ s \in S,\ y \in Y\} \tag{3.19}$$

имеет место равенство

$$\sum_{(s,y) \in \Gamma_x} q_0(s|x) r_0(y|x, s) = 1. \tag{3.20}$$

Пусть

$$w_0'(x, y) = \sum_{s \in S} q_0(s|x) p_s(y),\ x \in X,\ y \in Y, \tag{3.21}$$

и пусть $S_{y,x} = \{s:\ (s, y) \in \Gamma_x,\ s \in S\}$, $x \in X$, $y \in Y$. Тогда, поскольку $(q_0, r_0) \in V(w_0)$ (см. (1.17)), из (3.19) — (3.21) следует, что

$$w_0'(x, y) - w_0(x, y) = \sum_{s \in S \setminus S_{y,x}} q_0(s|x) p_s(y). \tag{3.22}$$

Просуммировав (3.22) по всем $y \in Y$, имеем

$$0 = \sum_{y \in Y} \Big(\sum_{s \in S \setminus S_{y,x}} q_0(s|x) p_s(y) \Big), \quad x \in X \tag{3.23}$$

откуда в силу (3.23) следует, что

$$w_0(x, y) = w_0'(x, y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{3.24}$$

т. е. $w_0 \in U(p, W_1)$. Итак, если $H(p, W_1) = 0$, то $U(p, W_1) \cap \overline{W}_1 = \varnothing$. Теорема 4 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $\{\zeta_j\}$, $j = \overline{1, n}$ — набор дискретных случайных величин, принимающих значения в некотором пространстве Z. Обозначим при натуральном i через Z^i пространство всех последовательностей длины i элементов из Z. Предположим, что при некотором $\alpha > 0$ выделены при каждом $i = \overline{1, n}$ множества $B_i \subseteq Z^i$, такие, что

$$p_{\zeta_1^i}(B_i) \geqslant 1 - \alpha_1, \tag{П.1}$$

где $p_{\zeta_1^i}(\cdot)$ — мера, задающая совместное распределение вероятностей случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_i$. Пусть вещественные случайные величины

$$\mu_i = f_i(\zeta_i) \tag{П.2}$$

таковы, что найдется набор $\mathscr{F}_1(\cdot), \ldots, \mathscr{F}_n(\cdot)$ функций распределения, для которого при любом вещественном a, всех $i = \overline{2, n}$ и всех $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_{i-1}) \in B_{i-1}$ условная веро-

ятность

(П.3) $$p\{\mu_i<a|\zeta_j=z_j,\ j=\overline{1,\ i-1}\}\geqslant\mathcal{F}_i(a)$$

и

(П.4) $$p(\mu_1<a)\geqslant\mathcal{F}_1(a).$$

Обозначим через $\Phi_i(\cdot)$ свертку функций распределения $\mathcal{F}_1(\cdot),\ldots,\mathcal{F}_i(\cdot)$.

Лемма 8. *При всех* $i=\overline{1,\ n}$

(П.5) $$p\left\{\sum_{j=1}^{i}\mu_j<a\right\}\geqslant\Phi_i(a)-i\alpha.$$

Доказательство. При $i=1$ неравенство (П.5) следует из (П.4). Предположим, что лемма доказана при $i=l$. Обозначим левую часть (П.5) через $G_i(a)$ и рассмотрим независимый от $\{\zeta_j\}$ набор $\{\xi_j\}$, $j=\overline{1,\ n}$, взаимно независимых случайных величин, таких, что ξ_j имеет функцию распределения $\mathcal{F}_j(\cdot)$. Пусть

(П.6) $$u_j=f_j(z_j),\quad j=\overline{1,\ l},\quad (z_1,\ldots,z_l)\in Z^l.$$

Тогда из (П.5) следует

(П.7)
$$\begin{aligned}G_{l+1}(a)&=\int_{Z^l}p\left\{\mu_{l+1}<a-\sum_{j=1}^{l}u_j/\zeta_j=z_j,\ j=\overline{1,\ l}\right\}p_{\zeta_1^l}(dz_1,\ldots,dz_l)\geqslant\\&\geqslant\int_{B_l}\mathcal{F}_{l+1}\left(a-\sum_{j=1}^{l}u_j\right)p_{\zeta_1^l}(dz_1,\ldots,dz_l)\geqslant\\&\geqslant\int_{Z^l}\mathcal{F}_{l+1}\left(a-\sum_{j=1}^{l}u_j\right)p_{\zeta_1^l}(dz_1,\ldots,dz_l)-\alpha=\\&=p\left\{\sum_{j=1}^{l}\mu_j+\xi_{l+1}<a\right\}-\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}G_l(a-k)\,d\mathcal{F}_{l+1}(k)-\alpha.\end{aligned}$$

С другой стороны,

(П.8) $$\Phi_{l+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_l(d-k)\,d\mathcal{F}_{l+1}(k).$$

Из предположения индукции, (П.7) и (П.8) следует, что (П.5) справедливо при $i=l+1$. Лемма доказана.

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, такие, что

(П.9) $$\mathbf{M}\xi_i=0,\quad |\xi_i|\leqslant1,\quad i=\overline{1,\ n},$$

тогда имеют место леммы.

Лемма 9 (частный случай теоремы 17 из [17], гл. III, § 4). *Пусть* $B_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i$. *Тогда если* $a\geqslant B_n$, *то*

(П.10) $$p\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i>a\right\}\leqslant e^{-a/4}.$$

Лемма 10 (частный случай теоремы Хэфдинга, см. [18]). *При любом* δ, $0<\delta<1$,

(П.11) $$p\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\geqslant n\delta\right\}\leqslant e^{-n\delta^2/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blekwell D., Breiman L., Thomasian A. G.* The Capacity of a Class of Channels. Ann. Math. Stat., 1959, 30, *4*, 1229–1241.
2. *Kaufman I. S.* Capacity of Classes of Time Varying Discrete Memoryless Channels. Proc. 14th Midwest Symp. Circuit Theory, 1971, Denver, Colo, 1971, 15.7/1–15.7/8.
3. *Ahlswede R.* A Note on the Existence of the Weak Capacity for Channels with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions and its Relation to Shannon's Zero Error Capacity. Ann. Math. Stat., 1970, 41, *3*, 1027–1033.
4. *Ahlswede R., Wolfowitz J.* The Capacity of a Channel with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions and Binary Output Alphabet. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1970, 15, *3*, 186–194.
5. *Ahlswede R.* Channels with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions in the Presence of Noiseless Feedback. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 25, *3*, 239–252.
6. *Добрушин Р. Л.* Единые способы передачи информации для дискретных каналов без памяти и сообщений с независимыми компонентами. Докл. АН СССР, 1963, 148, *6*, 1245–1248.
7. *Добрушин Р. Л.* Единые способы передачи информации – общий случай. Докл. АН СССР, 1963, 149, *1*, 16–19.
8. *Ahlswede R., Wolfowitz J.* Correlated Decoding for Channels with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions. Inform. and Control, 1969, 14, *5*, 457–473.
9. *Добрушин Р. Л.* Единые способы оптимального квантования сообщения. Проблемы кибернетики, *22*, М., «Наука», 1970, 107–156.
10. *Shannon C.* Geometrische Deutung einiger Ergebnisse bei der Berechnung der Kanalkapazität, Nachrichtentechnische Z., 1957, 10, *1*. (Русск. перев.: *Шеннон К.* Геометрический подход к теории пропускной способности каналов связи. Сб. «Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике». М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963, 488—496).
11. *Пинскер М. С.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. Сб. «Проблемы передачи информации», *7*, М., Изд-во АН СССР, 1960.
12. *Добрушин Р. Л.* Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации. Успехи матем. наук, 1959, 14, *6*, 3—104.
13. *Сайон М.* Некоторые общие теоремы о минимаксе. Сб. «Бесконечные антагонистические игры». М., Физматгиз, 1963, 40—46.
14. *Stiglitz I. G.* Coding for a Class of Unknown Channels. IEEE Trans. Inform. Theory, 1966, 12, *2*, 189–195.
15. *Вольфовиц Дж.* Теоремы кодирования теории информации. М., «Мир», 1967.
16. *Blackwell D., Breiman L., Thomasian A. G.* The Capacities of Certain Classes under Random Coding. Ann. Math. Stat., 1960, 31, *3*, 558—577.
17. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972.
18. *Hoeffding W.* Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables. J. Amer. Stat. Assoc., 1963, 58, *301*, 13–30.

Поступила в редакцию
15 июня 1970 г.
После переработки
23 декабря 1974 г.