В. Н. Желябин, П. С. Колесников, Дуальные коалгебры n-лиевых алгебр якобиана колец многочленов,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 992–1008

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 512.554.7

ДУАЛЬНЫЕ КОАЛГЕБРЫ n–ЛИЕВЫХ АЛГЕБР ЯКОБИАНА КОЛЕЦ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. Желябин, П. С. Колесников

Аннотация. Установлено строение дуальной коалгебры для алгебры Ли, построенной на алгебре многочленов от четного числа переменных при помощи симплектической скобки Пуассона (скобки Пуассона якобианного типа). Над полем характеристики нуль показано, что для n-лиевой алгебры якобиана на алгебре многочленов от n переменных ее дуальная коалгебра состоит из тех же линейных функционалов, что и дуальная коалгебра для коммутативной алгебры многочленов.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.508

Ключевые слова: коалгебра, скобка Пуассона, алгебра Филиппова, якобиан.

Введение

Понятие коалгебры является дуальным к понятию алгебры над полем. Одним из основных результатов ассоциативных (коассоциативных) коалгебр является теорема о локальной конечности ассоциативной коалгебры (см. [1]). Первые примеры неассоциативных коалгебр — это коалгебры Ли, которые были введены в [2]. Там же было показано, что существуют коалгебры Ли, которые не являются локально конечными.

Каждой коалгебре можно сопоставить ее дуальную алгебру. Как известно, дуальная алгебра ассоциативной (лиевой) коалгебры является ассоциативной (лиевой) алгеброй.

В 1994 г. было введено понятие коалгебры, связанное с определенным многообразием алгебр [3]. В частности, были определены альтернативные и йордановы коалгебры и доказана их локальная конечность. В 1995 г. была доказана локальная конечность структуризуемых коалгебр [4]. В работе [5] были найдены необходимые и достаточные условия локальной конечности коалгебр Ли. В [6] доказана локальная конечность йордановых копар. В [7] доказана локальная конечность бинарно $(-1, 1)$-коалгебр и правоальтернативных мальцевски допустимых коалгебр.

В отличие от йордановых коалгебр существуют не локально конечные йордановы суперкоалгебры [8]. В [9] был построен пример ассоциативно коммутативной (кокоммутативной) дифференциальной коалгебры, которая не является локально конечной. Там же с помощью этого примера был построен ряд примеров неассоциативных коалгебр, которые не являются локально конечными коалгебрами. В частности, пример не локально конечной коалгебры Ли из [2] может быть

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН, проект FWNF-2022-0002.

получен из примера не локально конечной ассоциативно коммутативной дифференциальной коалгебры. Хорошо известна конструкция Гельфанда — Дорфман [10], которая позволяет строить алгебры Новикова по ассоциативным коммутативным дифференциальным алгебрам. В [9] приведен дуальный аналог этой конструкции и построен пример не локально конечной коалгебры Новикова. Наконец, с помощью дуального аналога конструкции Кантора для йордановых супералгебр [11, 12] построен пример не локально конечной йордановой суперкоалгебры.

Для произвольной алгебры также можно построить ее дуальную коалгебру. Однако, в отличие от дуальных алгебр, дуальная коалгебра может оказаться нулевой даже в ассоциативном случае. Если многообразие алгебр таково, что коалгебры этого многообразия локально конечны, то дуальная коалгебра для алгебры этого многообразия состоит из тех линейных функционалов на этой алгебре, которые содержат в своих ядрах идеалы конечной коразмерности (см. [3]). Кроме того, дуальная коалгебра является коалгеброй того же однородного многообразия, что и исходная алгебра (см. [3]).

В [13] была исследована структура дуальной коалгебры W_1° алгебры Витта W_1 индекса 1. В частности, показано, что коалгебра W_1° ненулевая и не содержит ненулевых конечномерных подкоалгебр, если основное поле имеет характеристику нуль. Аналогичный результат для дуальной суперкоалгебры $J\big(P_1, \frac{d}{d\,x}\big)^\circ$ йордановой супералгебры $J\big(P_1, \frac{d}{d\,x}\big)$ доказан в [14].

В [15, 16] дано описание коалгебры W_1°, а именно, показано, что $W_1^\circ = P_1^\circ$ над полем характеристики не 2. Здесь P_1° — дуальная коалгебра алгебры многочленов P_1 от одной переменной. В [15] также показано, что над полем характеристики не 2 W_1° и, в частности, P_1° состоят из линейно рекурсивных последовательностей. В [17] показано, что над произвольным полем коалгебра P_1° состоит из линейно рекурсивных последовательностей. Там же описаны дуальная коалгебра левосимметрической алгебры $\mathscr{L}_1$, введенной в [18], и дуальная суперкоалгебра йордановой супералгебры $J\big(P_1, \frac{d}{d\,x}\big)$.

В [8, 19] и в [20, 21] описаны дуальные аналоги конструкции Кёхера — Титса — Кантора для йордановых алгебр и конструкции Михеева для алгебр Мальцева.

В данной работе мы рассматриваем алгебру Пуассона $L_{2n} = (P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})$, определенную на алгебре всех многочленов P_{2n} от $2n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)$$

и изучаем структуру ее дуальной коалгебры $L_{2n}^\circ = (P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})^\circ$. Если пара $(P_{2n}^\circ, \Delta_{P_{2n}^\circ})$ — дуальная коалгебра алгебры P_{2n} и характеристика поля равна нулю, то

$$(P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})^\circ = (P_{2n}^\circ, \Delta_{Lie}),$$

причем коумножение Δ_{Lie} задано правилом

$$\Delta_{Lie} = \sum_{i=1}^{n} (X_i \otimes Y_i - Y_i \otimes X_i) \Delta_{P_{2n}^\circ},$$

где X_i, Y_i — сопряженные отображения к дифференцированиям $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Если поле имеет характеристику $p > 0$, то $L_2^\circ = (P_2, \{\cdot,\cdot\})^\circ \neq P_2^\circ$. Для $p > 2$ найдено полное описание пространства L_2°.

В 1985 г. В. Т. Филипповым в [22] было введено понятие n-лиевой алгебры. Согласно определению n-лиева алгебра (или алгебра Филиппова) — это линейное пространство с полилинейной кососимметрической n-арной операцией $\{\cdot, \dots, \cdot\}$, которая удовлетворяет n-арному аналогу тождества Лейбница. В [23] была определена n-лиева алгебра якобиана.

В настоящей работе изучается структура дуальной коалгебры n-лиевой алгебры якобиана на алгебре многочленов от n переменных. Для n-лиевой алгебры $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})$, где

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n},$$

доказано, что над полем характеристики нуль $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})^\circ = P_{2n}^\circ$ и n-лиева коалгебра $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})^\circ$ не содержит ненулевых конечномерных подкоалгебр.

1. *n*-Арные коалгебры

Пусть F — поле. Для векторного пространства V через $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n}$ или $V^{\otimes n}$ обозначим его n-ю тензорную степень над F. Через V^* обозначим дуальное векторное пространство векторного пространства V, т. е. $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ — пространство всех линейных функционалов на V. Всюду далее будем применять обозначение $\langle f, v\rangle$ для обозначения значения функционала $f \in V^*$ на элементе $v \in V$.

Для натурального числа n определим отображение

$$\rho : \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{n} \to (\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n})^*,$$

заданное правилом

$$\left\langle \rho(f_1 \otimes \dots \otimes f_n), \sum_{i_1,\dots,i_n} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n} \right\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_n} \langle f_1, v_{i_1}\rangle \dots \langle f_n, v_{i_n}\rangle.$$

Отображение ρ является инъективным вложением. Поэтому можно предполагать, что

$$\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{n} \subseteq (\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n})^*.$$

Если $\phi : V \to U$ — линейное отображение векторных пространств, то сопряженное к нему отображение $\phi^* : U^* \to V^*$ задается правилом $\langle \phi^*(\alpha), v\rangle = \langle \alpha, \phi(v)\rangle$, здесь $v \in V$, $\alpha \in U^*$.

Определение 1. Пусть C — векторное пространство над F. Тогда пара (C, Δ_n), где

$$\Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \dots \otimes C}_{n}$$

— линейное отображение векторных пространств, называется *n-арной коалгеброй.* Отображение Δ_n называется *n-арным коумножением.* Для элемента $a \in C$ будем использовать запись $\Delta_n(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \dots \otimes a_{(n)}$.

Если $n = 2$, то получаем известное определение коалгебры.

Каждой n-арной коалгебре (C, Δ_n) соответствует n-арная алгебра. В самом деле, зададим на дуальном пространстве C^* n-арную операцию умножения $[\cdot, \dots, \cdot]$, полагая

$$\langle [f_1, \dots, f_n], a\rangle = \langle \rho(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n), \Delta_n(a)\rangle = \sum_{(a)} \langle f_1, a_{(1)}\rangle \ldots \langle f_n, a_{(n)}\rangle,$$

где $f_1, \dots, f_n \in C^*$. Пару $(C^*, [\cdot, \dots, \cdot])$ будем называть *дуальной n-арной алгеброй* n-арной коалгебры (C, Δ_n).

Определение 2. Линейное отображение $d : C \to C$ называется *кодифференцированием* n-арной коалгебры (C, Δ_n), если

$$\Delta_n d = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \underset{i}{d} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id})\Delta_n,$$

т. е. для любого $a \in C$

$$\Delta_n(d(a)) = \sum_{(a)} \sum_{i=1}^{n} (a_{(1)} \otimes \ldots \otimes d(a_{(i)}) \otimes \ldots \otimes a_{(n)}).$$

Лемма 1. *Пусть d — кодифференцирование n-арной коалгебры (C, Δ_n). Тогда его сопряженное отображение d^* — дифференцирование дуальной n-арной алгебры C^*, т. е. в дуальной n-арной алгебре C^* имеет место*

$$d^*([f_1, \dots, f_n]) = \sum_{i=1}^{n} [f_1, \dots, d^*(f_i), \dots, f_n].$$

Как известно (см. [3]), для каждого многообразия алгебр (ассоциативных, Ли, йордановых и т. п.) можно определить класс коалгебр этого же многообразия. Следуя [3], дадим следующее определение n-арной коалгебры для данного многообразия n-арных алгебр.

Определение 3. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое многообразие n-арных алгебр. Тогда n-арная коалгебра (C, Δ_n) называется *$\mathscr{M}$-n-арной коалгеброй*, если ее дуальная n-арная алгебра $(C^*, [\cdot, \dots, \cdot])$ является n-арной алгеброй многообразия $\mathscr{M}$.

Хорошо известно, что коалгебра (C, Δ) ассоциативна (коассоциативна) тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = 0.$$

Пусть V — векторное пространство и $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ — линейное преобразование такое, что $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Коалгебра (C, Δ) коммутативна (кокоммутативна) тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:

$$\Delta = \tau\Delta.$$

Пусть (C, Δ_n) — произвольная n-арная коалгебра. Подпространство B в C называется *n-арной подкоалгеброй* (или просто *подкоалгеброй*) коалгебры (C, Δ_n), если

$$\Delta(B) \subseteq \underbrace{B \otimes \ldots \otimes B}_{n}.$$

Пусть (C, Δ_n) — n-арная коалгебра и S — подмножество в C. Тогда наименьшую подкоалгебру в C, содержащую S, обозначим через $\mathrm{Coalg}(S)$ и назовем *подкоалгеброй, порожденной* S.

Определение 4. Коалгебра (C, Δ_n) называется *локально конечной* (*конечномерной*), если каждая конечнопорожденная n-арная подкоалгебра из C конечномерна.

Пусть A — n-арная алгебра над полем F с n-арной операцией $m : A \otimes \ldots \otimes A \to A$, т. е. $m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = [a_1, \ldots, a_n]$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогда имеем сопряженное к m отображение $m^* : A^* \to (A \otimes \ldots \otimes A)^*$. Векторное подпространство V в A^* называется *хорошим*, если

$$m^*(V) \subseteq \rho\underbrace{(V \otimes \ldots \otimes V)}_{n}.$$

Если V — хорошее подпространство, то на V можно определить n-арное коумножение $\Delta_{n,V} = \rho^{-1}m^*$. Следовательно, пара $(V, \Delta_{n,V})$ — n-арная коалгебра.

Пусть A° — сумма всех хороших подпространств из A^*. Тогда A° — наибольшее хорошее подпространство, поэтому $(A^\circ, \Delta_n^\circ)$, где $\Delta_n^\circ = \Delta_{n,A^\circ}$, — коалгебра с n-арным коумножением. Для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого $f \in A^\circ$ имеет место

$$\langle f, m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)\rangle = \sum_{(f)} \langle f_{(1)}, a_1\rangle \ldots \langle f_{(n)}, a_n\rangle,$$

где $\Delta_n^\circ(f) = \sum\limits_{(f)} f_{(1)} \otimes \ldots \otimes f_{(n)}$.

Коалгебра $(A^\circ, \Delta_n^\circ)$ называется *дуальной n-арной коалгеброй* для n-арной алгебры A.

Если n-арная алгебра A конечномерна, то отображение ρ является изоморфизмом. Поэтому $A^\circ = A^*$.

Идеалом n-арной алгебры A называется векторное подпространство I в A такое, что для любого $i = 1, \ldots, n$

$$[A, \ldots, \underset{i}{I}, \ldots A] \subseteq I.$$

Пусть $\mathscr{I}$ — множество идеалов конечной коразмерности n-арной алгебры A. Положим

$$A^*_{\mathscr{I}} = \{\alpha \in A^* \mid \exists I \in \mathscr{I} \text{ такой, что } I \subseteq \ker\alpha\}.$$

Для любой n-арной алгебры A имеем $A^*_{\mathscr{I}} \subseteq A^\circ$. Действительно, пусть $\alpha \in A^*_{\mathscr{I}}$. Тогда $\langle\alpha, I\rangle = 0$ для некоторого идеала I конечной коразмерности n-арной алгебры A. Поэтому можно считать, что $\alpha \in (A/I)^*$, полагая

$$\langle\alpha, a + I\rangle = \langle\alpha, a\rangle$$

для $a \in A$. Так как фактор-алгебра A/I конечномерна, то $(A/I)^*$ — n-арная коалгебра с коумножением $\Delta = \rho^{-1}m^*$, где $m : A/I \otimes \ldots \otimes A/I \to A/I$ — умножение алгебры A/I. Тогда

$$\Delta(\alpha) = \sum_{(a)} \alpha_{(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{(n)} \in (A/I)^* \otimes \ldots \otimes (A/I)^*$$

и $\langle\alpha, [a_1 \ldots a_n]\rangle = \sum\limits_{(\alpha)} \langle\alpha_{(1)}, a_1\rangle \ldots \langle\alpha_{(1)}, a_n\rangle$, где $a_1, \ldots, a_n \in A/I$.

Можно считать, что $(A/I)^* \subseteq A^*$, полагая $\langle\alpha, I\rangle = 0$ для каждого функционала $\alpha \in (A/I)^*$. Поэтому $(A/I)^*$ — хорошее подпространство в A^*. Следовательно, $A^*_{\mathscr{I}} \subseteq A^\circ$.

Если n-арная коалгебра A° локально конечна, то $A^*_{\mathscr{I}} = A^\circ$.

Действительно, пусть дуальная n-коалгебра $(A^\circ, \Delta^\circ_n)$ локально конечна и $\alpha \in A^\circ$. Тогда подкоалгебра $\mathrm{Coalg}(\alpha)$ конечномерна. Ясно, что ортогональное дополнение $\mathrm{Coalg}(\alpha)^\perp$ — идеал конечной коразмерности в A и $\mathrm{Coalg}(\alpha)^\perp \subseteq \ker\alpha$. Следовательно, $\alpha \in A^*_{\mathscr{I}}$.

Таким образом, $A^*_{\mathscr{I}} = A^\circ$ для алгебр из таких классов $\mathscr{M}$, что $\mathscr{M}$-n-арные коалгебры локально конечны. В частности, для ассоциативных алгебр имеем $A^*_{\mathscr{I}} = A^\circ$.

Лемма 2. *Пусть $(A, [\cdot, \dots, \cdot])$ — некоторая n-арная алгебра, $[\cdot, \dots, \cdot]_1$ — операция на дуальной n-арной алгебре $(A^\circ)^*$, построенной по n-арной коалгебре A°. Тогда отображение $\phi : A \to (A^\circ)^*$, заданное правилом $\langle\phi(a), \alpha\rangle = \langle\alpha, a\rangle$, где $a \in A$, $\alpha \in A^\circ$, является гомоморфизмом n-арных алгебр. Более того, $A^\circ \cong (A/\ker\phi)^\circ$ — изоморфизм коалгебр.*

Доказательство. Ясно, что $\ker\phi = (A^\circ)^\perp$. Пусть $a_1, \dots, a_n \in A$. Тогда для любого $\alpha \in A^\circ$ получаем

$$\langle\phi([a_1, \dots, a_n]), \alpha\rangle = \langle\alpha, [a_1, \dots, a_n]\rangle = \sum_{(\alpha)} \langle\alpha_{(1)}, a_1\rangle \dots \langle\alpha_{(n)}, a_n\rangle$$
$$= \sum_{(\alpha)} \langle\phi(a_1), \alpha_{(1)}\rangle \dots \langle\phi(a_n), \alpha_{(n)}\rangle = \langle[\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)]_1, \alpha\rangle.$$

Поэтому $\phi([a_1, \dots, a_n]) = [\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)]_1$.

Каждый линейный функционал $\alpha \in A^\circ$ индуцирует линейный функционал $\overline{\alpha}$ на $A/\ker\phi$, заданный правилом

$$\langle\overline{\alpha}, a + \ker\phi\rangle = \langle\alpha, a\rangle.$$

Кроме того, для любых $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\langle\overline{\alpha}, [a_1 + \ker\phi, \dots, a_n + \ker\phi]\rangle = \langle\overline{\alpha}, [a_1, \dots, a_n] + \ker\phi\rangle = \langle\alpha, [a_1, \dots, a_n]\rangle$$
$$= \sum_{(\alpha)} \langle\alpha_{(1)}, a_1\rangle \dots \langle\alpha_{(n)}, a_n\rangle = \sum_{(\alpha)} \langle\overline{\alpha_{(1)}}, a_1 + \ker\phi\rangle \dots \langle\overline{\alpha_{(n)}}, a_n + \ker\phi\rangle.$$

Поэтому отображение $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ является гомоморфизмом из коалгебры A° в коалгебру $(A/\ker\phi)^\circ$.

Пусть теперь $\overline{\alpha} \in (A/\ker\phi)^\circ$. Тогда $\overline{\alpha}$ индуцирует линейный функционал α на A, заданный по правилу

$$\langle\alpha, a\rangle = \langle\overline{\alpha}, a + \ker\phi\rangle.$$

Пусть $V = \{\alpha \in A^* \mid \overline{\alpha} \in (A/\ker\phi)^\circ\}$. Определим коумножение $\Delta_V : V \to V \otimes \dots \otimes V$ следующим образом. Пусть Δ° — коумножение коалгебры $(A/\ker\phi)^\circ$ и

$$\Delta^\circ(\overline{\alpha}) = \sum_{(\overline{\alpha})} \overline{\alpha_{(1)}} \otimes \dots \otimes \overline{\alpha_{(n)}}.$$

Положим

$$\Delta_V(\alpha) = \sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{(n)}.$$

Тогда для $a_1, \dots, a_n \in A$ получаем

$$\begin{aligned}\langle\alpha, [a_1, \dots, a_n]\rangle &= \langle\overline{\alpha}, [a_1, \dots, a_n] + \ker\phi\rangle \\ &= \sum_{(\overline{\alpha})}\langle\overline{\alpha_{(1)}}, a_1 + \ker\phi\rangle \dots \langle\overline{\alpha_{(n)}}, a_n + \ker\phi\rangle = \sum_{(\alpha)}\langle\alpha_{(1)}, a_1\rangle \dots \langle\alpha_{(n)}, a_n\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, V — хорошее подпространство в A^*.

Таким образом, отображение $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ является изоморфизмом коалгебр A° и $(A/\ker\phi)^\circ$.

Теорема 1. *Пусть A — n-арная алгебра некоторого однородного многообразия $\mathscr{M}$, заданного полилинейными тождествами. Тогда дуальная n-арная коалгебра A° является коалгеброй многообразия $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Пусть $((A^\circ)^*, [\cdot, \dots, \cdot]_1)$ — дуальная n-арная алгебра n-арной коалгебры A°. В силу леммы 2 можно считать, что A — подалгебра в $(A^\circ)^*$.

Пусть $[\cdot, \dots, \cdot]$ — n-арная операция на A, а $t = t(x_1, \dots, x_k)$ — произвольный терм сигнатуры $\{[\cdot, \dots, \cdot]\}$ от пропозициональных переменных $\{x_1, \dots, x_k\}$ такой, что каждая из переменных входит в t ровно один раз. Тогда определено линейное отображение

$$t : \underbrace{(A \otimes \dots \otimes A)}_{k} \to A,$$

заданное правилом $t(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) = t(a_1, \dots, a_k)$. Поэтому для сопряженного отображения t^*, ограниченного на A°, имеем

$$t^* : A^\circ \to \underbrace{A^\circ \otimes \dots \otimes A^\circ}_{k}$$

и $\langle t^*(f), a_1 \otimes \dots \otimes a_k\rangle = \langle f, t(a_1, \dots, a_k)\rangle$, где $f \in A^\circ$, $a_1, \dots, a_k \in A$.

Индукцией по длине терма t легко доказать, что для любых $\alpha_1 \dots, \alpha_k \in (A^\circ)^*$ и любого $f \in A^\circ$ имеет место

$$\langle\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k, t^*(f)\rangle = \langle t(\alpha_1, \dots, \alpha_k), f\rangle. \tag{1}$$

Далее, пусть $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_k)$ — однородное полилинейное тождество n-арной алгебры A. Тогда $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_i$, где $a_i \in F$, t_i — полилинейные термы сигнатуры $\{[\cdot, \dots, \cdot]\}$. Поэтому для любых $b_1, \dots, b_k \in A$ и любого $f \in A^\circ$ имеем

$$0 = \langle f, \Phi(b_1, \dots, b_k)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\langle f, t_i(b_1, \dots, b_k)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^*(f), b_1 \otimes \dots \otimes b_k \right\rangle.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^*(f) = 0$.

В силу (1) для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (A^\circ)^*$ и любого $f \in A^\circ$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}\langle\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k), f\rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i\langle t_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k), f\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\langle\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k, t_i^*(f)\rangle = \left\langle \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k, \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^*(f) \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, Φ — тождество n-арной алгебры $(A^\circ)^*$.

2. Дуальные скобки Пуассона якобианного типа

Пусть $P_n = F[x_1, \dots, x_n,]$ — коммутативная алгебра многочленов от n переменных и $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $(P_n^\circ, \Delta_{P_n^\circ})$ — дуальная коалгебра алгебры P_n. Тогда (см. [3])

$$P_n^\circ = \{\alpha \in P_n^* \mid \exists\, I \triangleleft P_n,\ \operatorname{codim}(I) < \infty \text{ и } I \subseteq \ker \alpha\}.$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Идеал I алгебры P_n имеет конечную коразмерность тогда и только тогда, когда существуют многочлены*

$$f_1 \in F[x_1], \dots, f_n \in F[x_n]$$

такие, что $f_1, \dots, f_n \in I$. Кроме того, если I — идеал конечной коразмерности, то I^2 — тоже идеал конечной коразмерности.

Действительно, если $\operatorname{codim}(I) < \infty$, то степени любой переменной x_i линейно зависимы по модулю I: в эту сторону утверждение верно для любого подпространства в P_n. Обратное (для идеалов) очевидно.

Пусть $X_i : P_n^* \to P_n^*$ — сопряженное отображение к дифференцированию d_i.

Лемма 4. *Справедливо включение $X_i(P_n^\circ) \subseteq P_n^\circ$. Более того, X_i — кодифференцирование коалгебры P_n°.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in P_n^\circ$. Тогда существует идеал I конечной коразмерности такой, что $\langle \alpha, I\rangle = 0$. Тогда

$$\langle X_i(\alpha), I^2\rangle \subseteq \langle \alpha, d_i(I^2)\rangle \subseteq \langle \alpha, I d_i(I)\rangle \subseteq \langle \alpha, I\rangle = 0.$$

По лемме 3 I^2 — идеал конечной коразмерности, следовательно, $X_i(\alpha) \subseteq P_n^\circ$.

Отображение X_i является кодифференцированием коалгебры P_n°.

Пусть $P_{2n} = F[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ — коммутативная алгебра многочленов от $2n$ переменных. Определим на P_{2n} скобку $\{\cdot,\cdot\}$, полагая

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad f, g \in P_{2n}. \tag{2}$$

Тогда $L_{2n} = (P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})$ — алгебра Ли.

Обозначим через $(P_{2n}^\circ, \Delta_{P_{2n}^\circ})$ и $(L_{2n}^\circ, \Delta_{L_{2n}^\circ})$ дуальные коалгебры алгебр P_{2n} и L_{2n} соответственно.

Пусть X_i и Y_i — сопряженные отображения к дифференцированиям $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Тогда по лемме 4 $X_i(P_{2n}^\circ)$, $Y_i(P_{2n}^\circ) \subseteq P_{2n}^\circ$. Определим на P_{2n}° коумножение Δ_{Lie}, полагая

$$\Delta_{Lie} = \sum_{i=1}^n (X_i \otimes Y_i - Y_i \otimes X_i)\Delta_{P_{2n}^\circ}.$$

Тогда для $\alpha \in P_{2n}^\circ$, $f, g \in P_{2n}$ и $\Delta_{P_{2n}^\circ}(\alpha) = \sum\limits_{(\alpha)} \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)}$ получаем

$$\begin{aligned}\langle \rho(\Delta_{Lie}(\alpha)), f \otimes g\rangle &= \sum_{(\alpha)} \left\langle \alpha_{(1)}, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle \left\langle \alpha_{(2)}, \frac{\partial g}{\partial y_i}\right\rangle - \sum_{(\alpha)} \left\langle \alpha_{(1)}, \frac{\partial f}{\partial y_i}\right\rangle \left\langle \alpha_{(2)}, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle = \langle \alpha, \{f, g\}\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому P_{2n}° — хорошее подпространство в L_{2n}^*.

Наша главная задача состоит в том, чтобы сравнить коалгебры $(P_{2n}^\circ, \Delta_{P_{2n}^\circ})$ и $(L_{2n}^\circ, \Delta_{L_{2n}^\circ})$, где $\Delta_{L_{2n}^\circ}$ — ограничение на L_{2n}° дуальной операции $L_{2n}^* \to (L_{2n} \otimes L_{2n})^*$ к скобке Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$.

2.1. Случай характеристики нуль

Теорема 2. *Коалгебра $(P_{2n}^\circ, \Delta_{Lie})$ — подкоалгебра в $(L_{2n}^\circ, \Delta_{L_{2n}^\circ})$. Если характеристика поля F равна нулю, то $L_{2n}^\circ = P_{2n}^\circ$ и*

$$\Delta_{L_{2n}^\circ} = \Delta_{Lie}.$$

Доказательство. Так как P_{2n}° — хорошее подпространство в L_{2n}^* для алгебры $(P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})$, то $(P_{2n}^\circ, \Delta_{Lie})$ — подкоалгебра в $(L_{2n}^\circ, \Delta_{L_{2n}^\circ})$.

Предположим, что характеристика поля F равна нулю. Пусть $\alpha \in L^\circ = L_{2n}^\circ$ и

$$\Delta_{L^\circ}(\alpha) = \sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)} = \sum_i \alpha_{1i} \otimes \alpha_{2i} \in L^\circ \otimes L^\circ.$$

Рассмотрим векторное подпространство V, порожденное всеми тензорными множителями α_{1i}. Так как V — пространство конечной размерности, то коразмерность ортогонального дополнения $V^\perp \subseteq P_{2n}$ конечна и $V^\perp \neq 0$. Тогда существует многочлен $f \in F[x_1]$, $\deg(f) > 0$, такой, что $f \in V^\perp$.

Пусть $f_1 \in F[x_1]$ — такой многочлен, что $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. Так как характеристика поля равна нулю, то $f_1 \neq 0$. Заметим, что для любого многочлена $h_1 \in P_{2n}$ существует $h \in P_{2n}$ такой, что $h_1 = \frac{\partial h}{\partial y_1}$. Тогда

$$\langle \alpha, f_1 h_1 \rangle = \left\langle \alpha, \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial y_1} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \alpha, \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} \right\rangle$$
$$= \langle \alpha, \{f, h\} \rangle = \sum_i \langle \alpha_{1i}, f \rangle \langle \alpha_{2i}, h \rangle = 0$$

так как $\langle \alpha_{1i}, f \rangle = 0$ для всех i. Следовательно, $f_1 P_{2n} \subseteq \ker \alpha$.

Аналогично получаем, что для каждого $i = 1, \dots, n$ найдутся ненулевые многочлены $f_i \in F[x_i]$ и $g_i \in F[y_i]$ такие, что $f_i P_{2n} \subseteq \ker \alpha$ и $g_i P_{2n} \subseteq \ker \alpha$. Следовательно, $\ker \alpha$ содержит идеал конечной коразмерности

$$I = \sum_{i=1}^n (f_i P_{2n} + g_i P_{2n}).$$

Таким образом, $\alpha \in P_{2n}^\circ$.

Докажем, что $\Delta_{L_{2n}^\circ} = \Delta_{Lie}$. Пусть $f, g \in P_{2n}$ и $\alpha \in L_{2n}^\circ = P_{2n}^\circ$, тогда

$$\langle \rho(\Delta_{L_{2n}^\circ})(\alpha), f \otimes g \rangle = \langle \alpha, \{f, g\} \rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \alpha, \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle$$
$$= \left\langle \rho\left(\sum_{i=1}^n (X_i \otimes Y_i - Y_i \otimes X_i) \Delta_{P_{2n}^\circ}(\alpha) \right), f \otimes g \right\rangle = \langle \rho(\Delta_{Lie}(\alpha)), f \otimes g \rangle.$$

Следовательно, $\Delta_{L_{2n}^\circ} = \Delta_{Lie}$.

Заметим, что $F \cdot 1$ — единственный собственный идеал алгебры L_{2n}, если F — поле характеристики нуль. Более того, $F \cdot 1$ — идеал бесконечной коразмерности.

Теорема 3. *Подпространство $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}\neq 0$ является подкоалгеброй в L_{2n}°. Кроме того, $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}\cong(L_{2n}/F\cdot 1)^{\circ}$ — изоморфизм коалгебр. Пусть F — поле характеристики нуль. Тогда коалгебры $(L_{2n}^{\circ},\Delta_{L_{2n}^{\circ}})$ и $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}$ не содержат ненулевых конечномерных подкоалгебр.*

Доказательство. Покажем, что $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}\neq 0$. Пусть $\alpha\in L_{2n}^{\circ}$ и

$$\Delta_{L_{2n}^{\circ}}(\alpha)=\sum_{(\alpha)}\alpha_{(1)}\otimes\alpha_{(2)}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_{1i}\otimes\alpha_{2i}.$$

Можно предполагать, что все $\{\alpha_{2i}\}_{i=1,\dots,N}$ линейно независимы. Пусть $f_1,\dots,f_N$ — дуальный базис для $\{\alpha_{21},\dots,\alpha_{2N}\}$. Тогда

$$0=\langle\alpha,\{1,f_i\}\rangle=\sum_{j=1}^{N}\langle\alpha_{1j},1\rangle\langle\alpha_{2j},f_i\rangle=\langle\alpha_{1i},1\rangle.$$

Поэтому $\langle\alpha_{1i},1\rangle=0$ для всех α_{1i}. Если бы $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}=0$, то мы бы получили $\alpha_{1i}=0$ для всех $i=1,\dots,N$, т. е. $\Delta_{L_{2n}^{\circ}}(\alpha)=0$. Поскольку коумножение $\Delta_{L_{2n}^{\circ}}$ не равно тождественно нулю, то $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}\neq 0$.

Очевидно, что $L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}$ — подкоалгебра в L_{2n}°.

Каждый линейный функционал $\alpha\in L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}$ индуцирует линейный функционал $\overline{\alpha}$ на $L_{2n}/F\cdot 1$, заданный по правилу

$$\langle\overline{\alpha},f+F\cdot 1\rangle=\langle\alpha,f\rangle.$$

Кроме того, для $f,g\in P_{2n}$

$$\begin{aligned}\langle\overline{\alpha},\{f+F\cdot 1,g+F\cdot 1\}\rangle&=\langle\alpha,\{f,g\}\rangle=\langle\rho(\Delta_{L_{2n}^{\circ}}(\alpha)),f\otimes g\rangle\\&=\sum_{(\alpha)}\langle\alpha_{(1)},f\rangle\langle\alpha_{(2)},g\rangle=\sum_{(\alpha)}\langle\overline{\alpha_{(1)}},f+F\cdot 1\rangle\langle\overline{\alpha_{(2)}},g+F\cdot 1\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому отображение $\alpha\mapsto\overline{\alpha}$ является мономорфизмом коалгебр

$$L_{2n}^{\circ}\cap(F\cdot 1)^{\perp}\to(L_{2n}/F\cdot 1)^{\circ}.$$

Обратно, пусть $\overline{\alpha}\in(L_{2n}/F\cdot 1)^{\circ}$. Тогда $\overline{\alpha}$ индуцирует линейный функционал α на пространстве L_{2n}, заданный по правилу

$$\langle\alpha,f\rangle=\langle\overline{\alpha},f+F\cdot 1\rangle.$$

Рассмотрим $V=\{\alpha\in L_{2n}^{*}\mid\overline{\alpha}\in(L_{2n}/F\cdot 1)^{\circ}\}$. Определим коумножение $\Delta_V:V\to V\otimes V$ следующим образом. Пусть Δ — коумножение коалгебры $(L_{2n}/F\cdot 1)^{\circ}$ и

$$\Delta(\overline{\alpha})=\sum_{(\overline{\alpha})}\overline{\alpha_{(1)}}\otimes\overline{\alpha_{(2)}}.$$

Положим

$$\Delta_V(\alpha)=\sum_{(\alpha)}\alpha_{(1)}\otimes\alpha_{(2)}.$$

Тогда для $f,g\in L_{2n}$ получаем

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\{f,g\}\rangle&=\langle\overline{\alpha},\{f,g\}+F\cdot 1\rangle\\&=\sum_{(\overline{\alpha})}\langle\overline{\alpha_{(1)}},f+F\cdot 1\rangle\langle\overline{\alpha_{(2)}},g+F\cdot 1\rangle=\sum_{(\alpha)}\langle\alpha_{(1)},f\rangle\langle\alpha_{(2)},g\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, V — хорошее подпространство в L_{2n}^*.

Таким образом, отображение $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ — изоморфизм подкоалгебры $L_{2n}^\circ \cap (F \cdot 1)^\perp$ в L_{2n}° и коалгебры $(L_{2n}/F \cdot 1)^\circ$.

Пусть F — поле характеристики нуль. Предположим, что B — конечномерная подкоалгебра коалгебры L_{2n}°. Тогда ортогональное дополнение $B^\perp = \{f \in L_{2n} \mid \langle B, f\rangle = 0\}$ — идеал конечной коразмерности в L_{2n}. Следовательно, $B^\perp = L_{2n}$ и тогда $B = 0$. Поэтому $L_{2n}^\circ \cap (F \cdot 1)^\perp$ также не содержит ненулевых конечномерных подкоалгебр.

Опишем строение коалгебр $(P_{2n}^\circ, \Delta_{P_{2n}^\circ})$ и $L_{2n}^\circ = (P_{2n}^\circ, \Delta_{Lie})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Пусть $P_1 = F[x]$. Определим элемент $\alpha_m \in P_1^*$, $m \geq -1$, с помощью равенств $\langle \alpha_m, x^{i+1}\rangle = \delta_{m,i}$, где $i \geq -1$. Пусть $U_0 = \operatorname{span}(\alpha_m \mid m \geq -1)$ и

$$\Delta_{U_0}(\alpha_m) = \sum_{i+j=m-1} \alpha_i \otimes \alpha_j.$$

Тогда (U_0, Δ_{U_0}) — подкоалгебра $(P_1^\circ, \Delta_{P_1^\circ}^\circ)$ (см. [17]).

Пусть теперь $0 \neq a \in F$ и $j \geq -1$. Определим $\alpha_{a,j} \in P_1^*$, полагая

$$\langle \alpha_{a,j}, x^{i+1}\rangle = a^i \binom{i+1}{j+1},$$

где $i \geq -1$. Пусть $U_a = \operatorname{span}(\alpha_{a,j} \mid j \geq -1)$ и

$$\Delta_{U_a}(\alpha_{a,m}) = \sum_{i+j=m-1,\, i,j\geq -1} a(\alpha_{a,i} \otimes \alpha_{a,j}).$$

Пусть $d = \frac{d}{d\,x}$ и $d^\circ = d^*|_{P_1^\circ}$. Тогда справедлива

Лемма 5 (см. [17]). *Для любого $a \in F$ подпространство U_a является хорошим подпространством в P_1^* и $(U_a, \Delta_{U_a}, d^\circ)$ — дифференциальной подкоалгеброй в $(P_1^\circ, \Delta_{P_1^\circ}, d^\circ)$. Если F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, то $P_1^\circ = \oplus_{a\in F} U_a$.*

Так как $P_{2n} = F[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n] \cong F[x]^{\otimes 2n}$, в силу леммы 6.0.1 из [1] получаем изоморфизм коалгебр

$$P_{2n}^\circ \cong \underbrace{P_1^\circ \otimes \ldots \otimes P_1^\circ}_{2n}.$$

Поэтому в дальнейшем отождествим эти коалгебры, полагая, что коумножение на P_{2n}° определяется равенством $\Delta_{P_{2n}^\circ} = \sigma_{n,n}^{-1}(\Delta_{P_1^\circ} \otimes \ldots \otimes \Delta_{P_1^\circ})$, где $\sigma_{n,n} \in S_{2n}$ — перестановка тензорных множителей, приводящая $\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_n$ к $\alpha_1 \otimes \beta_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \beta_n$, $\alpha_i, \beta_j \in P_1^\circ$. Для кодифференцирований X_i, Y_i имеем

$$X_i = \mathrm{id}_{P_1^\circ}^{\otimes(i-1)} \otimes d^\circ \otimes \mathrm{id}_{P_1^\circ}^{\otimes(2n-i)}, \quad Y_i = \mathrm{id}_{P_1^\circ}^{\otimes(n+i-1)} \otimes d^\circ \otimes \mathrm{id}_{P_1^\circ}^{\otimes(n-i)}.$$

Тогда для любых $a_i, b_i \in F$, $i = 1, \dots, n$, подпространство $U_{a_1,\dots,a_n}^{b_1,\dots,b_n} = U_{a_1} \otimes U_{b_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n} \otimes U_{b_n}$ — дифференциальная подкоалгебра в P_{2n}° с кодифференцированиями X_i, Y_i, $i = 1, \dots, n$.

Пусть

$$\Delta_L = \sum_{i=1}^n (X_i \otimes Y_i - Y_i \otimes X_i)\Delta_{P_{2n}^\circ}. \tag{3}$$

Тогда (P_{2n}°, Δ_L) и $(U_{a_1,\dots,a_n}^{b_1,\dots,b_n}, \Delta_L)$ — подкоалгебры в $(L_{2n}^\circ, \Delta_{L_{2n}^\circ}) = (P_{2n}, \{\cdot,\cdot\})^\circ$, где скобка $\{f, g\}$ задана формулой (2).

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть $a_i, b_i \in F$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $U^{b_1,\dots,b_n}_{a_1,\dots,a_n}$ — хорошее подпространство в P^*_{2n} и $(U^{b_1,\dots,b_n}_{a_1,\dots,a_n}, \Delta_{P^\circ_{2n}}, D)$, $D = X_i, Y_i$, $i = 1, \dots, n$, — дифференциальные подкоалгебры в $(P^\circ_{2n}, \Delta_{P^\circ_{2n}})$. Если F — алгебраически замкнутое поле характеристики* 0, *то $P^\circ_{2n} = \bigoplus\limits_{a,b\in F^n} U^{b_1,\dots,b_n}_{a_1,\dots,a_n}$ и $\Delta_{L^\circ_2}$ задано формулой* (3).

2.2. Случай положительной характеристики. Покажем, что в случае положительной характеристики основного поля F равенство пространств P°_{2n} и L°_{2n} не выполняется. Поскольку $P_{2n} \simeq P_2 \otimes \dots \otimes P_2$, начнем со случая $n = 1$, $P_2 = F[x, y]$. Допустим, $\operatorname{char} F = p > 0$.

Пусть $e_{i,j} = x^i y^j$, $i, j \geq 0$, — базис P_2 над F, $e^{i,j}$ — соответствующий дуальный (топологический) базис в P^*_2.

Зададим на алгебре P_2 градуировку группой $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ следующим образом:

$$P_2 = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} P_2(r, s),$$

где $P_2(r, s)$ — линейная оболочка мономов $x^i y^j$ для $i \equiv r \pmod p$, $j \equiv s \pmod p$. Будем называть идеал I алгебры P_2 *однородным по модулю* p, если

$$I = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} I(r, s), \quad I(r, s) = I \cap P_2(r, s).$$

Лемма 6. *Следующие условия эквивалентны:* (1) $i \equiv -1 \pmod p$, $j \equiv -1 \pmod p$; (2) $\langle e^{i,j}, \{f, g\}\rangle = 0$ *для всех* $f, g \in P_2$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следующего очевидного замечания: $\{P_2, P_2\} = \bigoplus\limits_{(r,s)\neq(-1,-1)} P_2(r, s)$.

Обозначим через W пространство функционалов вида

$$\alpha = \sum_{i,j\geq 1} \xi_{ij} e^{pi-1,pj-1}, \quad \xi_{ij} \in F.$$

Из леммы 6 следует, что $\langle e^{pi-1,pj-1}, \{f, g\}\rangle = 0$ для любых $f, g \in P_2$, т. е. $\Delta_{L^\circ_2}(e^{pi-1,pj-1}) = 0$, в частности, $W \subseteq L^\circ_2$.

Заметим, что те элементы из W, в которых число ненулевых коэффициентов ξ_{ij} бесконечно, не лежат в P°_2: их ядро не содержит идеала конечной коразмерности. Следовательно, $W \subseteq L^\circ_2$, но $W \nsubseteq P^\circ_2$.

Теорема 5. *Если* $\operatorname{char} F = p > 2$ *то* $L^\circ_2 = P^\circ_2 + W$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\alpha \in L^\circ_2$ найдется однородный по модулю p идеал I алгебры P_2 конечной коразмерности такой, что $\langle \alpha, I(r, s)\rangle = 0$ для всех $(r, s) \neq (-1, -1)$.

В самом деле, если это доказано, то для

$$\beta = \sum_{i,j\geq 1} \langle \alpha, x^{pi-1} y^{pj-1}\rangle e^{pi-1,pj-1} \in W$$

функционал $\alpha - \beta$ аннулирует все однородные компоненты идеала I, включая $I(-1, -1)$, т. е. $\alpha - \beta \in P^\circ_2$.

Для данного $\alpha \in L^\circ_2$ рассмотрим пространство V, натянутое на все первые тензорные множители элементов $\Delta_{L^\circ_2}(\alpha) \in L^\circ_2 \otimes L^\circ_2$ и $(\Delta_{L^\circ_2} \otimes \mathrm{id})\Delta_{L^\circ_2}(\alpha) \in \left(L^\circ_2\right)^{\otimes 3}$.

В частности, $\langle\alpha, \{f, g\}\rangle = \langle\alpha, \{\{f, g\}, h\}\rangle = 0$ для всех $f \in V^\perp$, $g, h \in P_2$. Коразмерность пространства $V^\perp$ конечна, поэтому множество $\{x, x^{p+1}, x^{2p+1}, \dots\}$ линейно зависимо по модулю $V^\perp$ и, следовательно, найдется ненулевой многочлен вида $f(x) = xf_1(x^p) \in V^\perp$. Заметим, что $f'(x) = f_1(x^p) \in P_2(0, 0)$. Положим $I_1 = f_1(x^p)P_2$.

Для $j \geq 1$ вычислим $\{f, xy^{ip-1}\} = f_1(x^p)x(ip-1)y^{ip-2} = -fy^{ip-2}$,

$$-\{\{f, xy^{ip-1}\}, x^jy^2\} = \{fy^{ip-2}, x^jy^2\} = \\ f_1(x^p)y^{ip-2}\cdot 2x^jy - (ip-2)fy^{ip-3}\cdot jx^{j-1}y^2 = (2+2j)f_1(x^p)\cdot x^jy^{ip-1}.$$

Коэффициент $(2+2j)$ не равен нулю при $j+1 \not\equiv 0 \pmod p$, следовательно, любой элемент из $I_1(r, -1)$, $r \not\equiv -1 \pmod p$, может быть получен как $\{\{f, g\}, h\}$ для подходящих $g, h \in P_2$. Таким образом, $I_1(r, -1) \subseteq \ker\alpha$.

С другой стороны, для любого $j \not\equiv -1 \pmod p$

$$\{f, x^ry^{j+1}\} = (j+1)f_1(x^p)x^ry^j \in I(r, j),$$

откуда $I_1(r, j) \subseteq \ker\alpha$ для любого r.

Аналогичным образом можно найти ненулевой многочлен $g_1(y^p) \in F[y]$ такой, что для идеала $I_2 = g_1(y^p)P_2$ выполнено $I_2(r, s) \subseteq \ker\alpha$ при $(r, s) \neq (-1, -1) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Итого, искомый идеал конечной коразмерности равен $I = I_1 + I_2$: все его однородные компоненты $I(r, s)$ лежат в ядре данного $\alpha \in L_2^\circ$, кроме $(r, s) = (-1, -1)$.

3. Дуальная коалгебра n-лиевой алгебры якобиана

Напомним, что n-арная полилинейная операция $[\cdot, \dots, \cdot]$ на векторном пространстве V называется кососимметрической, если $[v_1, \dots, v_n] = 0$ всякий раз, когда $v_i = v_j$ для некоторых $i \neq j$. Над полем характеристики $\neq 2$ это эквивалентно условию

$$[v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}] = (-1)^\sigma[v_1, \dots, v_n]$$

для любой подстановки σ из группы подстановок S_n, где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки σ.

Векторное пространство L над полем F с n-арной кососимметрической операцией $[\cdot, \dots, \cdot]$ называется *n-лиевой алгеброй* (или *алгеброй Филиппова*), если выполняется следующий аналог тождества Якоби:

$$[[u_1, \dots, u_n], v_1, \dots, v_{n-1}] = \sum_{i=1}^n [u_1, \dots, u_{i-1}, [u_i, v_1, \dots, v_{n-1}], u_{i+1}, \dots, u_n] \quad (4)$$

для любых $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1} \in V$. Другими словами, линейное отображение $\mathrm{ad}_{v_1,\dots,v_{n-1}} : L \to L$, заданное правилом

$$\mathrm{ad}_{v_1,\dots,v_{n-1}}(v) = [v, v_1, \dots, v_{n-1}],$$

является дифференцированием n-арной алгебры L.

Пусть (C, Δ_n) — n-арная коалгебра. Тогда (C, Δ_n) — n-лиева коалгебра, если ее дуальная алгебра является n-лиевой алгеброй.

На векторном пространстве $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{2n-1}$ определим линейное преобразование $\tau_{n,i}$, полагая

$$\tau_{i,n}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_{i+n-1} \otimes v_{i+n} \otimes \ldots \otimes v_{2n-1}) \\ = v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes v_{i+n} \otimes \ldots \otimes v_{2n-1} \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_{i+n-1}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что выполняется следующая

Теорема 6. *Векторное пространство C с n-арным коумножением Δ_n над полем характеристики не 2 является n-лиевой коалгеброй тогда и только тогда, когда для любого $a \in C$ и любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняются равенства*

$$\Delta_n(a) = (-1)^\sigma \sum_{(a)} a_{(\sigma(1))} \otimes \ldots \otimes a_{(\sigma(n))},$$

$$(\Delta_n \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-1)})\Delta_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \tau_{i,n}(a_{(1)} \otimes \ldots \otimes \Delta_n(a_{(i)}) \otimes \ldots \otimes a_{(n)}).$$

Пример 1. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in P_n$. Обозначим через $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n)$ якобиан многочленов $f_1, \ldots, f_n$, т. е.

$$\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Тогда (см. [23]) n-арная алгебра $(P_n, \{\cdot, \ldots, \cdot\})$ с n-арной операцией

$$\{f_1, \ldots, f_n\} = \mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n)$$

является n-лиевой алгеброй. Обозначим полученную n-лиеву алгебру через $\mathrm{Jac}(P_n)$.

Пусть $(\mathrm{Jac}(P_n)^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$ — дуальная n-арная коалгебра n-лиевой алгебры $\mathrm{Jac}(P_n)$. По теореме 1 $(\mathrm{Jac}(P_n)^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$ — n-лиева коалгебра.

Для всех $k \geq 1$ определим отображение $\Delta^{(k)}_{P_n^\circ} : P_n^\circ \to \underbrace{P_n^\circ \otimes \ldots \otimes P_n^\circ}_{k+1}$, полагая $\Delta^{(1)}_{P_n^\circ} = \Delta_{P_n^\circ}$ и $\Delta^{(k)}_{P_n^\circ} = \underbrace{(\Delta_{P_n^\circ} \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id})}_{k} \Delta^{(k-1)}_{P_n^\circ}$. Зададим на пространстве P_n° n-арное коумножение

$$\Delta_{n,L} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma (X_{\sigma(1)} \otimes, \ldots \otimes X_{\sigma(n)}) \Delta^{(n-1)}_{P_n^\circ}, \tag{5}$$

где, как и ранее, X_i — сопряженное отображение к дифференцированию $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\langle \rho(\Delta_{n,L}(\alpha)), f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \rangle = \sum_{(\alpha)} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \langle \alpha_{(1)}, d_{\sigma(1)}(f_1) \rangle \ldots \langle \alpha_{(n)}, d_{\sigma(n)}(f_n) \rangle$$

$$= \left\langle \alpha, \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma d_{\sigma(1)}(f_1) \ldots d_{\sigma(n)}(f_n) \right\rangle = \langle \alpha, \mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_n) \rangle = \langle \alpha, \{f_1, \ldots, f_n\} \rangle.$$

Поэтому $(P_n^\circ, \Delta_{n,L})$ — n-лиева подкоалгебра в $(\mathrm{Jac}(P_n)^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$.

Теорема 7. *Коалгебра $(P_n^\circ, \Delta_{n,L})$ является n-лиевой подкоалгеброй коалгебры $(\mathrm{Jac}(P_n)^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$. Если $\mathrm{char}\, F = 0$, то $\mathrm{Jac}(P_n)^\circ = P_n^\circ$ и*

$$\Delta_{\mathrm{Jac}} = \Delta_{n,L},$$

где $\Delta_{n,L}$ задано формулой (5).

Доказательство. Осталось доказать вторую часть утверждения. Предположим, что характеристика поля F равна нулю. Обозначим пространство $\mathrm{Jac}(P_n)^\circ$ через L для краткости. Пусть $\alpha \in L$ и

$$\Delta_{\mathrm{Jac}}(\alpha) = \sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{(n)} = \sum_i \alpha_{1i} \otimes \ldots \otimes \alpha_{ni} \in L^{\otimes n}.$$

Рассмотрим векторное подпространство V, порожденное всеми элементами α_{1i}. Так как V — пространство конечной размерности, коразмерность ортогонального дополнения $V^\perp$ конечна. Следовательно, $V^\perp \neq 0$. Тогда существует ненулевой многочлен $g_1 \in F[x_1]$ такой, что $g_1 \in V^\perp$ и $f_1 = d_1(g_1) \neq 0$.

Ввиду того, что $\operatorname{char} F = 0$, для любого многочлена $g \in P_n$ существует $g_2 \in P_n$ такой, что $g = d_2(g_2)$. Тогда $f_1 g = \operatorname{Jac}(g_1, g_2, x_3, \dots, x_n)$ и поэтому

$$\begin{aligned}\langle \alpha, f_1 g\rangle &= \langle \alpha, \{g_1, g_2, x_3, \dots, x_n\}\rangle \\ &= \sum_{(\alpha)} \langle \alpha_{(1)}, g_1\rangle\langle \alpha_{(2)}, g_2\rangle\langle \alpha_{(3)}, x_3\rangle \dots \langle \alpha_{(n)}, x_n\rangle = 0,\end{aligned}$$

так как $\langle \alpha_{1i}, g_1\rangle = 0$ для всех α_{1i}. Следовательно, $f_1 P_n \subseteq \ker \alpha$.

Аналогично получаем, что для любого $i = 1, \dots, n$ найдется $f_i \in F[x_i]$ такой, что $f_i P_n \subseteq \ker \alpha$. Следовательно, $\ker \alpha$ содержит идеал конечной коразмерности $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i P_n$. Таким образом, $\alpha \in P_n^\circ$, т. е. $L = P_n^\circ$.

Далее, пусть $f_1, \dots f_n \in P_n$ и $\alpha \in L$. Так как $\alpha \in P_n^\circ$ и коалгебра $(P_n^\circ, \Delta_{P_n^\circ})$ ассоциативна, то

$$\begin{aligned}\langle \rho(\Delta_{\mathrm{Jac}}(\alpha)), f_1 \otimes \dots \otimes f_n\rangle &= \langle \alpha, \{f_1, \dots, f_n\}\rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \big\langle \rho\big(\Delta^{(n)}_{P_n^\circ}(\alpha)\big), d_{\sigma(1)}(f_1) \otimes \dots \otimes d_{\sigma(n)}(f_n)\big\rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \big\langle (X_{\sigma(1)} \otimes, \dots \otimes X_{\sigma(n)}) \rho\big(\Delta^{(n)}_{P^\circ}(\alpha)\big), f_1 \otimes \dots \otimes f_n\big\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_{\mathrm{Jac}} = \Delta_{n,L}$.

Векторное подпространство V n-лиевой алгебры $(L, [\cdot, \dots, \cdot])$ является идеалом, если

$$[V, L, \dots, L] \subseteq V.$$

Например, векторное пространство $F \cdot 1$ — собственный идеал n-лиевой алгебры $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})$. Заметим, что если F — поле характеристики нуль, то $F \cdot 1$ — единственный ненулевой собственный идеал n-лиевой алгебры $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})$.

Действительно, пусть V — идеал n-лиевой алгебры $(P_n, \{\cdot, \dots, \cdot\})$. Тогда $d_i(V) \subseteq V$ для всех $i = 1, \dots, n$, поскольку

$$d_i(f) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, f, x_{i+1}, \dots, x_n\} \in V$$

для $f \in V$. Поэтому если $V \neq 0$ и $V \neq F \cdot 1$, то в V обязательно найдется многочлен первой степени $0 \neq f = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i$. Легко видеть, что если $\xi_j \neq 0$ для какого-то j, то $F[x_i] \subset V$ для всех $i \neq j$. Но если существует хоть одно $x_i \in V$, то $d_j(h) \in V$ для каждого $h \in P_n$ при всех $j \neq i$, т. е. $V = P_n$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 8. *Подпространство $V_n^\circ \cap (F \cdot 1)^\perp$ ненулевое и является подкоалгеброй в $L = (V_n^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$. Кроме того, $V_n^\circ \cap (F \cdot 1)^\perp \cong ((P_n, \{\cdot, \dots \cdot\})/F \cdot 1)^\circ$ — изоморфизм коалгебр. Если $\operatorname{char} F = 0$, то коалгебры L и $P_n^\circ \cap (F \cdot 1)^\perp \neq 0$ не содержат ненулевых конечномерных подкоалгебр.*

В заключение установим строение пространства P_n° в случае нулевой характеристики по аналогии с теоремой 4.

Так как алгебра многочленов P_n изоморфна тензорной степени $P_1 \otimes \ldots \otimes P_1$ алгебры $P_1 = F[x]$, то в силу леммы 6.0.1 из [1] получаем изоморфизм коалгебр $P_n^\circ \cong P_1^\circ \otimes \ldots \otimes P_1^\circ$. Отождествим коалгебры P_n° и $P_1^\circ \otimes \ldots \otimes P_1^\circ$. Для элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P_1^\circ$ имеем следующее выражение для кодифференцирований $X_1, \ldots, X_n$:

$$X_i(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_i \otimes \ldots \otimes \alpha_n) = \alpha_1 \otimes \ldots \otimes d_1^\circ(\alpha_i) \otimes \ldots \otimes \alpha_n.$$

Для любых $a_1, \ldots, a_n \in F$ подпространство $U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}$ является дифференциальной подкоалгеброй в P_n° с кодифференцированиями $X_1, \ldots, X_n$. Поэтому $(U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}, \Delta_{n,L})$ — подкоалгебра коалгебры $(P_n^\circ, \Delta_{n,L})$. Следовательно, $(U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}, \Delta_{n,L})$ подкоалгебра в $(\mathrm{Jac}(P_n)^\circ, \Delta_{\mathrm{Jac}})$.

Справедлива

Теорема 9. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in F$. Тогда $U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}$ — хорошее подпространство в P_n^* и $(U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}, \Delta_{P_2^\circ}, X_1, \ldots, X_n)$ — дифференциальная подкоалгебра в $(P_n^\circ, \Delta_{P_n^\circ}, X_1, \ldots, X_n)$. Если F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, то*

$$P_n^\circ = \bigoplus_{a_1, \ldots, a_n \in F} U_{a_1} \otimes \ldots \otimes U_{a_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sweedler M.* Hopf algebras. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1969.
2. *Michaelis W.* Lie coalgebras // Adv. Math. 1980. V. 38. P. 1–54.
3. *Anquella J., Cortes T., Montaner F.* Nonassociative coalgebras // Commun. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
4. *Желябин В. Н.* Структуризуемые коалгебры // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 5. С. 529–542.
5. *Slinko A. M.* Local finiteness of coalgebraic Lie coalgebras // Commun. Algebra. 1995. V. 23, N 5. P. 1165–1170.
6. *Zhelyabin V. N.* Embedding of Jordan copairs into Lie coalgebras // Commun. Algebra. 2007. V. 35, N 2. P. 561–576.
7. *Santos Filho G., Murakami L., Shestakov I.* Locally finite coalgebras and the locally nilpotent radical. I // Linear Algebra Appl. 2021. V. 621. P. 235–253.
8. *Желябин В. Н.* Йордановы (супер)коалгебры и (супер)коалгебры Ли // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 1. С. 87–111.
9. *Kozybaev D., Umirbaev U., Zhelyabin V.* Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras // Linear Algebra Appl. 2022. V. 643. P. 235–257.
10. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 4. С. 13–30.
11. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Commun. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.
12. *McCrimmon K.* Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 326–351.
13. *Michaelis W.* An example of a non-zero Lie coalgebra M for which Loc(M) = 0 // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 341–348.
14. *Желябин В. Н.* Дуальные коалгебры йордановых биалгебр и суперoccupation алгебр // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1302–1315.
15. *Nichols W. D.* The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebra // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 359–364.
16. *Nichols W. D.* On Lie and associative duals // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V. 87. P. 313–320.
17. *Zhelyabin V. N., Kolesnikov P. S.* Dual coalgebra of the differential polynomial algebra in one variable and related coalgebras // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 792–803.
18. *Kozybaev D., Umirbaev U.* Identities of the left-symmetric Witt algebras // Intern. J. Algebra Comput. 2016. V. 26, N 2. P. 435–450.

19. *Желябин В. Н.* Конструкция Кантора — Кехера — Титса для йордановых коалгебр // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 2. С. 173–189.
20. *Гончаров М. Е., Желябин В. Н.* Конструкция Михеева для коалгебр Мальцева // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 5. С. 668–671.
21. *Гончаров М. Е., Желябин В. Н.* Вложение коалгебр Мальцева в коалгебры Ли с тройственностью // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 34–56.
22. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
23. *Филиппов В. Т.* Об n-лиевой алгебре якобиана // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669.

Поступила в редакцию 10 апреля 2023 г.
После доработки 10 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Желябин Виктор Николаевич (ORCID 0000-0001-9371-6363)
Колесников Павел Сергеевич (ORCID 0000-0002-7534-1534)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`vicnic@math.nsc.ru, pavelsk@math.nsc.ru`