

8. В. А. Винокуров. Необходимое и достаточное условие регуляризуемости и общие свойства погрешности решения линейных задач. Дисс. канд. физ.-матем. н., М., МГУ, 1971.
9. В. А. Винокуров. Общие свойства погрешности приближенного решения линейных функциональных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 1, 22—28.
10. В. А. Винокуров. О погрешности решения линейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970, 10, № 4, 830—839.
11. В. К. Иванов. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 3, 410—421.

УДК 518:517.948

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

А. В. ГОНЧАРСКИЙ, А. С. ЛЕОНОВ, А. Г. ЯГОЛА

(Москва)

Предлагается новый метод получения оценок скорости сходимости регуляризованных приближений к точному решению для одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки. Метод основан на изучении поведения квадрата модуля фурье-образа ядра интегрального уравнения на бесконечности и в окрестности своих нулей на действительной оси.

Рассмотрим часто встречающееся в приложениях интегральное уравнение Фредгольма I рода типа свертки

$$(1) \quad A[x, z(s)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)z(s)ds = u(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Пусть входящие в уравнение функции удовлетворяют требованиям

$$K(y) \in L_1(E_y), \quad u(x) \in L_2(E_x), \quad z(s) \in W_2^1(E_s).$$

Пусть, далее, некоторой функции $u(x)$ соответствует единственное решение уравнения (1) — функция $z(s)$. Обычно при обработке экспериментальной информации известна не сама $u(x)$, а ее некоторое δ -приближение — функция $u_\delta(x)$ такая, что

$$\|u(x) - u_\delta(x)\|_{L_2} \leq \delta.$$

Рассмотрим функционал А. Н. Тихонова [1]

$$(2) \quad M^\alpha[z, u_\delta] = \|A[x, z(s)] - u_\delta(x)\|_{L_2(E_x)}^2 + \alpha \|z(s)\|_{W_2^1(E_s)}^2.$$

В [2] показано, что для любого $\alpha > 0$ существует единственный элемент $z_\delta^\alpha(s)$, реализующий минимум функционала (4), причем если $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ так, что $\delta^2 / \alpha(\delta) \rightarrow 0$, то последовательность $z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)$ сходится к $z(s)$ — точному решению (1) — по норме $W_2^1(E_s)$, а из теорем вложения [3] следует, что сходимостью приближений к точному решению является равномерной. Кроме того, если рассматривать функционал $M^\alpha[z, u]$, то найдется единственная функция $z^\alpha(s)$, на которой реализуется минимум $M^\alpha[z, u]$ при фиксированном $\alpha > 0$, причем $z^\alpha(s) \rightarrow z(s)$ при $\alpha \rightarrow 0$ [1, 2].

Воспользовавшись теоремой о свертке, равенством Планшереля [4] и проварьировав функционалы $M^\alpha[z, u_\delta]$, $M^\alpha[z, u]$ на множестве функций из W_2^1 , получим, что минимум функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ достигается на функции [5]

$$(3) \quad z_\delta^\alpha(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{K}^*(\omega) \tilde{u}_\delta(\omega) e^{i\omega s} d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)},$$

а минимум функционала $M^\alpha[z, u]$ — на функции

$$(4) \quad z^\alpha(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{K}^*(\omega) \tilde{u}(\omega) e^{i\omega s} d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)},$$

где $\bar{K}^*(\omega) = \bar{K}(-\omega)$, $L(\omega) = |\bar{K}(\omega)|^2 = \bar{K}(\omega) K^*(\omega)$, а $\bar{K}(\omega)$, $\tilde{u}_\delta(\omega)$, $\tilde{u}(\omega)$, $\tilde{z}(\omega)$ — фурье-образы функций $K(y)$, $u_\delta(x)$, $u(x)$, $z(s)$.

Заметим также, что из (1) следует

$$(5) \quad \tilde{z}(\omega) \bar{K}(\omega) = \tilde{u}(\omega).$$

Рассмотрим вопрос о скорости сходимости регуляризованных приближений к точному решению (1). Как будет показано ниже, оценки скорости сходимости существенно зависят от поведения квадрата модуля фурье-образа ядра на бесконечности и в окрестностях своих нулей на действительной оси ω . В [5-7] получены очень интересные оценки скорости сходимости, основанные на изучении поведения фурье-образа ядра на бесконечности, а также поведения функции, стоящей в знаменателе (3), в окрестностях своих нулей на комплексной плоскости ω . Предлагаемый ниже метод получения оценок скорости сходимости проще метода получения оценок, изложенного в [5-7], и позволяет получать оценки такого типа для более сложных классов ядер.

Обычно интерес представляет оценка точности приближения $z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)$ к точному решению $z(s)$ в норме некоторого банахова пространства B . В частности, ниже будут получены такие оценки для пространств C и L_2 .

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$(6) \quad \|z(s) - z_\delta^\alpha(s)\|_B \leq \|z(s) - z^\alpha(s)\|_B + \|z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)\|_B.$$

Из (5), (6), (7) следует

$$(7) \quad z(s) - z^\alpha(s) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega^2 + 1) \tilde{z}(\omega) e^{i\omega s} d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)},$$

$$(8) \quad z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{K}^*(\omega) [\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)] e^{i\omega s} d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)}.$$

Остается оценить (7) и (8) как функции α и δ . Покажем, что при сформулированных выше предположениях верны оценки (см. [8, 9])

$$(9) \quad \|z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)\|_{L_2} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}},$$

$$(10) \quad \|z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Воспользуемся теоремой Планшереля:

$$(11) \quad \|z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)\|_{L_2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{K}^*(\omega) [\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)] e^{i\omega s} d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \right\|_{L_2}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^*(\omega)K(\omega) |\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)|^2 d\omega}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2} \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)|^2 d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \leq \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)|^2 d\omega = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\alpha} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)] e^{i\omega s} d\omega \right\|_{L_2}^2 = \frac{\|u(x) - u_\delta(x)\|_{L_2}^2}{\alpha} \leq \frac{\delta^2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что

$$(12) \quad \frac{K^*(\omega)K(\omega)}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2} \leq \frac{1}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \leq \frac{1}{\alpha(\omega^2 + 1)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Из (11) следует оценка (9).

Далее,

$$\begin{aligned}
(13) \quad |z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|K^*(\omega)| |\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^*(\omega)K(\omega) d\omega}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2} \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\omega) - \tilde{u}_\delta(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Применяя (12) и теорему Планшереля, получим

$$|z^\alpha(s) - z_\delta^\alpha(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \left[\int_0^\infty \frac{d\omega}{1 + \omega^2} \right]^{1/2} \|u(x) - u_\delta(x)\|_{L_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Заметим, что полученные оценки зависят только от δ и α , но не зависят от точного решения $z(s)$.

Оценим (7) в метрике пространства C . В силу четности $|\tilde{z}(\omega)|$ из (7) получим

$$\|z(s) - z^\alpha(s)\|_C \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega^2 + 1) |\tilde{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)}.$$

Последний интеграл разобьем на два:

$$(14) \quad I(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^M \frac{(\omega^2 + 1) |\tilde{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} + \frac{\alpha}{\pi} \int_M^\infty \frac{(\omega^2 + 1) |\tilde{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \equiv I_1 + I_2,$$

$$\mu > 0.$$

Легко получить оценку $I(\alpha)$ снизу:

$$(15) \quad I(\alpha) \geq \text{const } \alpha.$$

Теперь получим оценку сверху:

$$(16) \quad I_2 \leq \frac{1}{\pi} \int_M^\infty |\tilde{z}(\omega)| d\omega \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_M^\infty \omega^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} \left\{ \int_M^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \right\}^{1/2} \leq \frac{A_1}{\sqrt{M}},$$

где

$$A_1 \equiv \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \omega^2 |\bar{z}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} < +\infty,$$

так как $z(s) \in W_2^1$.

Получим оценку для I_1 . При этом будем предполагать относительно образа Фурье ядра следующее:

1) $L(\omega) = |K(\omega)|^2$ имеет счетное число нулей на действительной оси ω (если нулей нет или их конечное число, то получаемая оценка и по-прежнему остается справедливой);

2) существует система непересекающихся ε -окрестностей нулей функции $L(\omega)$ на действительной полуоси $\omega \geq 0$ такая, что

$$L(\omega) \geq a_i (\omega_i - \omega)^{2p}, \quad \omega \in [\omega_i - \varepsilon_i, \omega_i + \varepsilon_i],$$

где $a_i \geq a = \text{const} > 0$, $p > 1/4$, $\omega_i > 0$ — нули $L(\omega)$, $i = 1, 2, \dots$; ε_i — радиус i -й ε -окрестности (точка $\omega = 0$ рассматривается особо);

3) вне указанных ε -окрестностей

$$L(\omega) \geq A_2 \omega^{-k}, \quad k > 0, \quad A_2 > 0;$$

4) не существует точек сгущения нулей $L(\omega)$ (за исключением, быть может, $\omega = +\infty$), причем если $N(M)$ — число нулей $L(\omega)$ на $(0, M)$, то

$$N(M) \leq CM^\gamma, \quad \gamma \geq 0, \quad C = \text{const} \geq 0$$

(случай $\gamma = 0$ соответствует конечному числу нулей).

Эти ограничения не слишком «жесткие», и существуют достаточно широкие классы ядер, встречающихся в приложениях, которые удовлетворяют сформулированным требованиям, например

$$L(\omega) = \frac{\sin^{2q} m\omega}{\omega^{2r}}, \quad m = \text{const}, \quad q > r > 1 \text{ п т. д.}$$

Вернемся к оценке I_1 :

$$(17) \quad I_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^{\varepsilon_0} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} + \int_{\varepsilon_0}^{\omega_1 - \varepsilon_1} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{N(M)} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} + \sum_{i=1}^{N(M)-1} \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} + \right. \\ \left. + \int_{\omega_{(N)M} + \varepsilon_{(N)M}}^M \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \right\} \equiv I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)} + I_1^{(4)} + I_1^{(5)}.$$

Для $I_1^{(4)}$ получим

$$(18) \quad \frac{\alpha}{\pi} \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{A_2 \omega^{-k}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\alpha}{\pi A_2} \left(1 + \frac{1}{\min_i (\omega_i + \varepsilon_i)^2} \right) \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \omega^{k+2} |\bar{z}(\omega)| d\omega \equiv \\ &\equiv \frac{\alpha A_3}{\pi} \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \omega^{k+2} |\bar{z}(\omega)| d\omega, \quad A_3 = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

так как

$$(19) \quad \omega^2 + 1 \leq (1 + \min_i (\omega_i + \varepsilon_i)^{-2}) \omega^2 \equiv \Omega \omega^2, \quad \Omega = \text{const} > 0$$

(здесь использовано свойство 3)).

Из (18) следует

$$I_1^{(4)} \leq \frac{\alpha A_3}{\pi} \sum_{i=1}^{N(M)-1} \int_{\omega_i + \varepsilon_i}^{\omega_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \omega^{k+2} |\bar{z}(\omega)| d\omega \leq \frac{\alpha A_3}{\pi} \int_0^M \omega^{k+2} |\bar{z}(\omega)| d\omega,$$

откуда, применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$(20) \quad I_1^{(4)} \leq \frac{\alpha A_3}{\pi} \left\{ \int_0^M \omega^2 |\bar{z}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^M \omega^{2k+2} d\omega \right\}^{1/2} \leq \alpha A_1 A_3 \frac{M^{k+3/2}}{(2k+3)^{1/2}}.$$

Аналогично, для $I_1^{(2)}$ (или $I_1^{(1)} + I_1^{(2)}$, если $L(0) \neq 0$) получим

$$I_1^{(2)} \leq \alpha B_1,$$

где

$$B_1 = \int_{\varepsilon_0}^{\omega_1 - \varepsilon_1} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega)} = \text{const} > 0.$$

Далее очевидно, что для $I_1^{(5)}$ также справедлива оценка (20). Оценим $I_1^{(3)}$. Для удобства обозначим $n = 1/\alpha$. Тогда, учитывая свойство 2) и (19), получаем

$$(21) \quad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{\pi} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_2 - \varepsilon_1}^{\omega_1 + \varepsilon_1} \frac{(\omega^2 + 1) |\bar{z}(\omega)| d\omega}{na_i(\omega - \omega_i)^{2p} + 1} \leq \\ &\leq \frac{\Omega}{\pi} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{\omega^2 |\bar{z}(\omega)| d\omega}{na(\omega - \omega_i)^{2p} + 1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$(22) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{\omega^2 |\bar{z}(\omega)| d\omega}{na(\omega - \omega_i)^{2p} + 1} \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \omega^2 |\bar{z}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{\omega^2 d\omega}{[na(\omega - \omega_i)^{2p} + 1]^2} \right\}^{1/2} \leq A_1 M \left\{ \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{d\omega}{[na(\omega - \omega_i)^{2p} + 1]^2} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$(23) \quad \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{d\omega}{[na(\omega - \omega_i)^{2p} + 1]^2} \leq \frac{1}{(an)^{1/2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[t^{2p} + 1]^2} \equiv \frac{C^2(p)}{n^{1/2p}}, \quad p > 1/4.$$

Из (21) — (23) следует

$$I_1^{(3)} \leq \sum_{i=1}^{N(M)} A_i C(p) \Omega \frac{M}{n^{1/4p}} \equiv D \alpha^{1/4p} M N(M).$$

Аналогично, если $L(0) = 0$, то

$$I_1^{(4)} \leq A_4 \alpha^{1/4p}, \quad A_4 = \text{const} > 0.$$

Окончательно для I_1 получаем

$$(24) \quad I_1 \leq A_4 \alpha^{1/4p} + B_1 \alpha + 2\alpha A_1 A_3 \frac{M^{k+3/2}}{(2k+3)^{1/2}} + DMN(M) \alpha^{1/4p}.$$

Поэтому из (14), (16) и (24) следует

$$I(\alpha) \leq \frac{A_1}{\sqrt[3]{M}} + A_5 \alpha M^{k+3/2} + D \alpha^{1/4p} M N(M) + B_1 \alpha + A_4 \alpha^{1/4p},$$

$$A_5 = \text{const} > 0.$$

Используя 4) и вводя $r = \max\{k + 1/2, \gamma\}$, получаем

$$I(\alpha) \leq \frac{A_1}{\sqrt[3]{M}} + (A_5 \alpha + B \alpha^{1/4p}) M^{r+1} + A_4 \alpha^{1/4p} + B_1 \alpha, \quad A, B = \text{const} > 0.$$

Минимизируя по M и отбрасывая члены более высокого порядка малости, приходим к оценке скорости сходимости

$$(25) \quad \|z^\alpha(s) - z(s)\|_C \leq I(\alpha) = O\{\alpha^{1/4p(2r+3)}\},$$

где O зависит от $z, K, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \omega_1, a, r, k, p$.

Тем самым доказано, что при выполнении условий 1) — 4) для (7) верна равномерная оценка (25).

Оценим (7) в метрике пространства L_2 . Теперь обозначим через $I(\alpha)$ интеграл

$$I(\alpha) \equiv \|z(s) - z^\alpha(s)\|_{L_2}^2 = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(\omega^2 + 1)^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2}.$$

Аналогично (15) найдем

$$(26) \quad I(\alpha) \geq \text{const} \alpha^2.$$

Для оценки $I(\alpha)$ сверху по-прежнему будем предполагать выполненными условия 1) — 4). Кроме того потребуем, чтобы

$$(27) \quad |\tilde{z}(\omega)| \leq F, \quad F = \text{const} > 0.$$

Разобьем интеграл $I(\alpha)$ на два:

$$I(\alpha) \equiv I_1 + I_2 = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int_0^M \frac{(\omega^2 + 1)^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int_M^\infty \frac{(\omega^2 + 1)^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega}{[L(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^2}.$$

Легко видеть, что

$$I_2 \leq C_1 / M^2, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Для оценки интеграла I_1 разобьем его на 5 интегралов по тем же областям интегрирования, что и в (17):

$$I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)} + I_1^{(4)} + I_1^{(5)}.$$

Интегралы $I_1^{(4)}$, $I_1^{(5)}$ оцениваются аналогично (20):

$$I_1^{(4)}, I_1^{(5)} \leq B_3 \alpha^2 M^{2k+2},$$

где $B_3 = B_3(k, \Omega, z, K)$.

Для $I_1^{(2)}$ (или $I_1^{(1)} + I_1^{(2)}$, если $L(0) \neq 0$) получим

$$I_1^{(2)} \leq B_4 \alpha^2, \quad B_4 = B_4(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \omega_1, z, K).$$

Оценим $I_1^{(3)}$. Вводя $n = 1/\alpha$, имеем

$$(28) \quad I_1^{(3)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{N(M)} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{(\omega^2 + 1)^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega}{[nL(\omega) + \omega^2 + 1]^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N(M)} Q_i(n).$$

Далее, учитывая 2), (25) и (41), получаем

$$(29) \quad Q_i(n) \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{\omega_i - \varepsilon_i}^{\omega_i + \varepsilon_i} \frac{(\omega^2 + 1)^2 |\tilde{z}(\omega)|^2 d\omega}{[n\bar{a}(\omega - \omega_i)^{2p} + 1]^2} \leq \\ \leq \frac{F^2}{\pi^2} \frac{[(\omega_i + \varepsilon_i)^2 + 1]^{+\infty}}{(an)^{1/2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{[\tau^{2p} + 1]^2}.$$

Используя $\omega_i + \varepsilon_i \leq M$, получаем

$$(30) \quad [(\omega_i + \varepsilon_i)^2 + 1]^2 \leq PM^4, \quad P = \text{const} > 0.$$

Поэтому из (28) — (30) с учетом (23) следует

$$I_1^{(3)} \leq \alpha^{1/2p} C^2(p) \frac{FP}{\pi^2} M^4 N(M).$$

Аналогично оценивается $I_1^{(4)}$ (если $L(0) = 0$):

$$I_1^{(4)} \leq C_2(p, \varepsilon_0) \alpha^{1/2p}.$$

Суммируя оценки для I_1 и I_2 , минимизируя по M и отбрасывая члены более высокого порядка малости по α , получаем

$$(31) \quad \|z(s) - z^\alpha(s)\|_{L_2} = \sqrt{I(\alpha)} = O\{\alpha^{1/2p(q+4)}\},$$

где $q = \max\{\gamma + 2, 2k\}$. Здесь O зависит от тех же величин, что и в (25), и кроме того от F .

Тем самым доказано, что при выполнении условий 1) — 4) для (7) в метрике L_2 выполняется (31).

Получены оценки интегралов (7), (8). Получим теперь оценку для (6).

Покажем, что при выполнении условий 1) — 4) справедливы следующие оценки скорости сходимости регуляризованных приближений к точному решению уравнения (1):

$$(32) \quad \|z(s) - z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)\|_C = O\{\delta^{1/[1+2p(r+3)]}\},$$

$$(33) \quad \|z(s) - z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)\|_{L_2} = O\{\delta^{1/[1+p(q+4)]}\}.$$

Действительно, из (6), (13) и (25) следует

$$\|z(s) - z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)\|_C \leq D_1 \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \alpha^{1/4p(2r+3)} \right), \quad D_1 = \text{const}.$$

Минимизируя по α , т. е. выбирая некоторым «оптимальным» образом параметр регуляризации, получаем (32), если

$$\alpha(\delta) = O\{\delta^{2-2/[1+2p(2r+3)]}\}, \quad r = \max\left\{k + \frac{1}{2}, \gamma\right\}.$$

Аналогично, из (6), (9) и (31) получим (33), если

$$\alpha(\delta) = O\{\delta^{2-2/[1+p(q+4)]}\}, \quad q = \max\{2k, \gamma + 2\}.$$

Как видно из полученных оценок, скорость сходимости регуляризованных приближений существенно зависит от поведения $L(\omega)$ в окрестностях своих нулей и на бесконечности. Так, оценки ухудшаются с ростом p , определяющего максимальный порядок нулей $L(\omega)$. Далее, величина r , входящая в (25), (32), определяет скорость убывания $L(\omega)$, а также поведение ее нулей при $\omega \rightarrow \infty$. Чем медленнее спадает $L(\omega)$ на бесконечности и чем более сгущаются ее нули в бесконечно удаленной точке, тем, вообще говоря, хуже оценка скорости сходимости регуляризованных приближений к точному решению. Оценки (15), (26) дают ограничения на скорость сходимости при $\alpha \rightarrow 0$ снизу.

Отметим, что, используя аналогичную методику, можно получить оценки типа (25), (32) для других классов ядер. Так, например, если требование 3) заменить следующим:

$$L(\omega) \geq A_2 e^{-m\omega}; \quad m > 0, \quad A_2 = \text{const} > 0,$$

то справедливы оценки

$$\|z(s) - z^\alpha(s)\|_C = O\left\{\frac{1}{\ln(1/\alpha)}\right\},$$

и, аналогично (32),

$$\|z(s) - z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)\|_C = O\left\{\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right\}.$$

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Тихонову за руководство работой, а также В. Я. Арсенину и В. Б. Гласко за неоднократные обсуждения и просмотр рукописи.

*Поступила в редакцию 21.05.1971
Переработанный вариант 27.07.1971*

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, 1963, 151, № 3, 501—504.
2. А. Б. Бакушинский. Некоторые вопросы теории регуляризирующих алгоритмов (РА). В сб. «Вычисл. методы и программирование». Вып. 12. М., Изд-во МГУ, 1969, 56—79.
3. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
4. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.
5. В. Я. Арсенин, В. В. Иванов. О решении некоторых интегральных уравнений I рода типа свертки методом регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 2, 310—321.
6. В. Я. Арсенин, В. В. Иванов. О влиянии регуляризации p -го порядка. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 3, 661—662.

7. В. Я. Арсенин, Ф. И. Савелова. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям I рода типа свертки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 6, 1392—1395.
8. В. В. Иванов, В. Ю. Кудринский. Приближенное решение линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве методом наименьших квадратов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 5, 831—841.
9. В. А. Морозов. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 2, 295—309.

УДК 518:517.944/.947

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
 $\varepsilon^2 t u_{xx} = u_t + [\varphi(u)]_x$, **ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПРИ $\varepsilon = 0$**
В ЗАДАЧУ О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА
ДЛЯ СЛУЧАЯ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

В. А. ТУПЧИЕВ

(Москва)

Строится асимптотическая формула для решения уравнения $\varepsilon^2 t u_{xx} = u_t + [\varphi(u)]_x$ с начальными условиями $u(x, 0) = u_0$ при $x \leq 0$ и u_1 при $x > 0$ с оценкой отклонения от решения в норме C порядка ε^n .

1. Рассмотрим задачу Коши

$$(1) \quad \varepsilon^2 t u_{xx} = u_t + [\varphi(u)]_x,$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \leq 0, \\ u_1, & x > 0. \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon = 0$, мы получим известную задачу о распаде произвольного разрыва, являющуюся модельной задачей теории квазилинейных уравнений [1].

Будем предполагать, что $\varphi_{u^2}(u) \geq a > 0$ на отрезке с концами в точках u_0 и u_1 .

Как доказано, в частности, в [2], решение задачи (1), (2) существует, единственно и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится для случая $u_1 > u_0$ к центрированной волне разрежения, а при $u_1 < u_0$ — к ударной волне.

В [3] для случая $u_1 > u_0$ был построен главный член асимптотики решения задачи (1), (2) с оценкой отклонения от точного решения в норме L_1 порядка ε^2 ; при этом в левой части уравнения (1) стоял член εu_{xx} .

Нашей целью является построение асимптотики решения задачи (1), (2) высокого порядка для случая $u_1 > u_0$ с оценкой отклонения от решения в норме C порядка ε^n (n — произвольное целое число, определяемое гладкостью функции $\varphi(u)$).

Асимптотика решения задачи Коши типа (1), (2) в случае сильного разрыва при более общих начальных данных, чем (2), построена в [4], а для задачи (1), (2), допускающей автомодельное решение, асимптотика в этом случае ($u_1 < u_0$) строится также методами работ [5, 6]. Применяемый метод близок к методу [7].

2. Путем перехода к переменной $y = x/t$ и введения функции $w = \int u dy$ задача (1), (2) приводится к краевой задаче

$$(3) \quad \varepsilon^2 du/dy = \varphi(u) - yu + w, \quad dw/dy = u,$$

$$(4) \quad u|_{y=-\infty} = u_0, \quad u|_{y=\infty} = u_1.$$