А. А. Ладилова, О деформациях алгебр Ли серии Z,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 4, 138–145

https://www.mathnet.ru/cheb311

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК512.554

О ДЕФОРМАЦИЯХ АЛГЕБР ЛИ СЕРИИ Z

А. А. Ладилова (г. Нижний Новгород)

Аннотация

В работе построено семейство фильтрованных деформаций алгебр Ли серии Z. Показано, что эти алгебры являются новыми.

Ключевые слова: модулярные алгебры Ли, фильтрованные деформации.

ON THE DEFORMATIONS OF LIE ALGEBRAS OF SERIES Z

A. A. Ladilova

Abstract

In the work, the family of filtered deformations of Lie algebras of series Z was constructed. Proved that these algebras are new.

Keywords: modular Lie algebras, filtered deformations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование фильтрованных деформаций алгебр Ли представляет интерес в связи с задачей о классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями. В данный момент остается неизвестной классификация алгебр Ли в характеристике $p = 2, 3$, что отчасти обусловлено появлением здесь большого числа так называемых исключительных алгебр Ли. Исключительными алгебрами Ли мы называем алгебры, которые не изоморфны ни классическим, ни алгебрам Ли картановского типа. Таковыми в частности являются алгебры Меликяна при $p = 5$, а также алгебры Франк, алгебры Ли серий R, X, Y, Z в характеристике $p = 3$. Ранее в работах [1, 3, 4, 5] было показано, что алгебры Меликяна, алгебры Франк и алгебры серий R и Y являются жесткими относительно фильтрованных деформаций.

Однако, существуют исключительные алгебры Ли, обладающие нетривиальными фильтрованными деформациями. Так С. М. Скрябин в работе [6] построил не только $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры серии X, но и их фильтрованные деформации, зависящие от формы объема ω. До настоящего момента оставалось неизвестным, существуют ли фильтрованные деформации алгебр серии Z, неизоморфные соответствующим градуированным алгебрам. В данной работе строится пример фильтрованной деформации алгебры Ли серии Z и доказывается, что эти алгебры не изоморфны другим алгебрам Ли этой же серии.

Исключительные градуированные алгебры Ли серии Z, существующие только над полями характеристики $p = 3$, были построены С. М. Скрябиным в работе [6]. Ниже мы приведем геометрическую реализацию этих алгебр, а также сопутствующую терминологию и обозначения (см. [2], [6]).

Пусть E — трехмерное векторное пространство, $\mathcal{F}$ — некоторый флаг в E. В пространстве E зафиксируем базис x_1, x_2, x_3, согласованный с флагом, тогда $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ — вектор высот, соответствующий $\mathcal{F}$. Обозначения $\mathcal{F}$ и $\overline{m}$ мы считаем взаимозаменяемыми. Для флага $\mathcal{F}$ определены алгебра разделенных степеней $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{F})$, общая алгебра Ли картановского типа $W = W(\mathcal{F})$, комплекс дифференциальных форм $\Omega = \Omega(\mathcal{F})$. Через $Z(\Omega)$ и $B(\Omega)$ мы обозначаем подкомплексы точных и замкнутых форм, соответственно.

Для формы $\omega \in \Omega^k$ и $D \in W$ через $D \lrcorner \omega \in \Omega^{k-1}$ обозначается форма, определенная соотношением $\langle (D \lrcorner \omega), D_1 \wedge \ldots \wedge D_{k-1} \rangle = \langle \omega, D \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge D_{k-1} \rangle$, где $\langle , \rangle$ — спаривание двойственных модулей Ω^k и $\wedge^k_{\mathcal{O}} W$. Аналогично, для элемента $t \in \wedge^k_{\mathcal{O}} W$ и 1-формы φ через $\varphi \lrcorner t$ обозначается элемент из $\wedge^{k-1}_{\mathcal{O}} W$, определенный условием $\langle \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k-1}, \varphi \lrcorner t \rangle = \langle \varphi \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k-1}, t \rangle$, где $\varphi_i \in \Omega^1$.

Под $(\mathcal{O}, W)$-модулем мы понимаем $\mathcal{O}$-модуль M, наделенный дополнительно структурой W-модуля, причем $D(fa) = (Df)a + f(Da)$ для произвольных $f \in \mathcal{O}$, $D \in W$ и $a \in M$. Свободный $(\mathcal{O}, W)$-модуль M ранга 1 мы называем обратимым. Обратимые модули, изоморфные $\mathcal{O}$, называются тривиальными обратимыми. Они характеризуются тем, что в качестве их базисного элемента можно выбрать такой элемент e, что $We = 0$, причем e определяется однозначно с точностью до ненулевого скаляра. Последнее влечет за собой тот факт, что для любого обратимого модуля M с образующим элементом e, модуль $\otimes^3_{\mathcal{O}} M$ над полем характеристики $p = 3$ является тривиальным, т.к. $W(e \otimes e \otimes e) = 0$. Таким образом, существует изоморфизм

$$\lambda \colon \otimes^3_{\mathcal{O}} M \to \mathcal{O} \colon f(e \otimes e \otimes e) \mapsto f.$$

Кроме того, определен изоморфизм $\mu' \colon \otimes^2_{\mathcal{O}} M \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$ из соотношения $\langle m, \mu'(m_1 \otimes m_2) \rangle = \lambda(m_1 \otimes m_2 \otimes m)$, где $m, m_1, m_2 \in M$.

Для определения операции умножения в алгебрах Ли серии Z изоморфизм μ' нам понадобится в следующих частных случаях. Во-первых, при $M = \Omega^3$ мы получаем изоморфизм

$$\mu \colon \otimes^2_{\mathcal{O}} \Omega^3 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^3, \mathcal{O}) \cong \wedge^3_{\mathcal{O}} W.$$

Во-вторых, используя μ' для модуля $M = \wedge^3_{\mathcal{O}} W$, определим отображение $(\mathcal{O}, W)$-модулей

$$\{ , \} \colon (\wedge^3_{\mathcal{O}} W) \wedge (\wedge^3_{\mathcal{O}} W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\wedge^3_{\mathcal{O}} W, \mathcal{O})) \cong \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$$

по правилу: $\{t_1,t_2\}(D) = \mu'(t_1 \otimes Dt_2 - Dt_1 \otimes t_2)$, где $D \in W, t_1, t_2 \in \wedge^3_{\mathcal{O}} W$. Наконец, определим изоморфизм $(\mathcal{O}, W)$-модулей $\kappa\colon \wedge^2_{\mathcal{O}} \Omega^2 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(W, \Omega^3)$ соотношением

$$\kappa(\Theta_1 \wedge \Theta_2)(D) = (D \lrcorner \Theta_1) \wedge \Theta_2$$

для $\Theta_i \in \Omega^2$, $D \in W$. Кроме того, для невырожденной формы объема ω определен изоморфизм $\mathcal{O}$-модулей $i_\omega\colon W \to \Omega^2$, отображающий дифференцирование D в 2-форму $D \lrcorner \omega$.

Теперь мы можем непосредственно перейти к описанию алгебр Ли серии Z. Рассмотрим $\mathbb{Z}_4$-градуированные пространства

$$Z(\mathcal{F}) = Z_{\overline{0}} \oplus Z_{\overline{1}} \oplus Z_{\overline{2}} \oplus Z_{\overline{3}},$$

где $Z_{\overline{0}} = W$, $Z_{\overline{1}} = \wedge^3_{\mathcal{O}} W$, $Z_{\overline{2}} = \Omega^3 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1$, $B^2(\Omega) \subseteq Z_{\overline{3}} \subseteq Z^2(\Omega)$.

Далее через ω мы будем обозначать порождающий элемент в модуле Ω^3, а через t — порождающий элемент из $\wedge^3_{\mathcal{O}} W$, для которых выполнены соотношения $\lambda(\omega \otimes \omega \otimes \omega) = 1$ и $\langle \omega, t \rangle = 1$. Определим умножение $Z_{\overline{i}} \wedge Z_{\overline{j}} \to Z_{\overline{i+j}}$ следующим образом:

a) для $\overline{i} = 0$ это естественное действие W на модуле $Z_{\overline{j}}$;

b) $Z_{\overline{1}} \wedge Z_{\overline{1}} \to Z_{\overline{2}}$: $[ft, gt] = \{ft, gt\} = \omega \otimes (g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g)$;

c) $Z_{\overline{1}} \times Z_{\overline{2}} \to Z_{\overline{3}}$: $[ft, \omega \otimes \varphi] = -\mathrm{d}(f\langle \omega, t\rangle \varphi) = -\mathrm{d}(f\varphi)$;

d) $Z_{\overline{1}} \times Z_{\overline{3}} \to Z_{\overline{0}}$: $[ft, \Theta] = -\Theta \lrcorner ft = fD$, где элемент D таков, что $\Theta = D \lrcorner \omega$;

e) $Z_{\overline{2}} \times Z_{\overline{2}} \to Z_{\overline{0}}$: $[\omega \otimes \varphi_1, \omega \otimes \varphi_2] = i_\omega^{-1}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$;

f) $Z_{\overline{2}} \times Z_{\overline{3}} \to Z_{\overline{1}}$: $[\omega \otimes \varphi, \Theta] = \mu(\omega \otimes (\varphi \wedge \Theta)) = \varphi(D)t$, где D определяется условием $\Theta = D \lrcorner \omega$;

g) $Z_{\overline{3}} \times Z_{\overline{3}} \to Z_{\overline{2}}$: $[\Theta, \Theta'] = \kappa(\Theta, \Theta') = -\omega \otimes (D' \lrcorner \Theta)$, где $\Theta' = D' \lrcorner \omega$.

Если $Z_{\overline{3}} = B^2(\Omega)$, то алгебра $Z(\mathcal{F})$ проста. Отметим, что алгебры Ли $Z(\mathcal{F})$ естественным образом наделяются целочисленной градуировкой, индуцированной с $\mathcal{O}$, и согласованной с $\mathbb{Z}_4$-градуировкой, которую мы и будем рассматривать.

Бесконечномерную алгебру Ли, соответствующую максимальному флагу $\mathcal{F}' : E = E_0 = E_1 = \ldots$, будем обозначать через $Z(E)$.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ ФИЛЬТРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРЫ СЕРИИ Z

Пусть $x^{(\delta)} \in \mathcal{O}$ — элемент максимальной степени. Обозначим через Θ_0 произвольную 2-форму в $\Omega^2(E)$, мономы в которой имеют степень не меньше δ и высоту не более $|\delta|+1$, удовлетворяющую условию $\mathrm{d}\Theta_0 = x^{(\delta)}\omega$, и через D_0 — специальное дифференцирование, соответствующее Θ_0 при биекции $W(E) \to \Omega^2(E)$: $D \mapsto D\lrcorner\omega$. Определим линейное подпространство $L = L(\mathcal{F})$ в $Z(E)$, порожденное элементами

$$\begin{gathered} D + \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0), \text{ где } D \in Z(\mathcal{F})_{\overline{0}}, \\ ft + fD_0, \text{ где } ft \in Z(\mathcal{F})_{\overline{1}}, \\ \omega\otimes\varphi + \varphi(D_0)t, \text{ где } \omega\otimes\varphi \in Z(\mathcal{F})_{\overline{2}}, \\ \Theta - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta), \text{ где } \Theta \in Z(\mathcal{F})_{\overline{3}}. \end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 1. *Подпространство L является подалгеброй в $Z(E)$.*

Доказательство. Проведем непосредственную проверку: покажем, что произведение любых двух элементов из L содержится в L.

В процессе вычислений нам потребуется несколько легко проверяемых тождеств, доказательство которых можно найти, например, в [7]:

$$D_1(D_2\lrcorner\Theta) = D_2\lrcorner(D_1\Theta) + [D_1, D_2]\lrcorner\Theta \tag{2}$$

для произвольных дифференцирований $D_1, D_2 \in W$ и произвольной формы $\Theta \in \Omega^*$,

$$\mathrm{d}(D\lrcorner\Theta) = D\Theta - D\lrcorner\mathrm{d}\Theta \tag{3}$$

для произвольного дифференцирования $D \in W$ и произвольной формы $\Theta \in \Omega^2$,

$$\mathrm{div}_\omega(fD) = Df + f\mathrm{div}_\omega D \tag{4}$$

для $D \in W$, $f \in \mathcal{O}$ и формы объема ω.

1. Пусть $a = D_1 + \mathrm{d}(D_1\lrcorner\Theta_0)$, $b = D_2 + \mathrm{d}(D_2\lrcorner\Theta_0)$, тогда

$$[a,b] = [D_1, D_2] + \mathrm{d}(D_1(D_2\lrcorner\Theta_0) - D_2(D_1\lrcorner\Theta_0)) + [\mathrm{d}(D_1\lrcorner\Theta_0), \mathrm{d}(D_2\lrcorner\Theta_0)].$$

Легко видеть, что последнее слагаемое этого выражения равно нулю по определению формы Θ_0. С учетом (2) получаем, что $D_1(D_2\lrcorner\Theta_0) - D_2(D_1\lrcorner\Theta_0) = [D_1, D_2]\lrcorner\Theta_0 + +D_2\lrcorner(D_1\Theta_0) - D_1\lrcorner(D_2\Theta_0) + [D_1, D_2]\lrcorner\Theta_0$, откуда

$$[a,b] = [D_1, D_2] + \mathrm{d}([D_1, D_2]\lrcorner\Theta_0) + \Psi,$$

где $\Psi = \mathrm{d}(D_2\lrcorner(D_1\Theta_0) - D_1\lrcorner(D_2\Theta_0) + [D_1, D_2]\lrcorner\Theta_0)$. Очевидно, $[a,b]$ лежит в L тогда и только тогда, когда $\Psi \in L(\mathcal{F})$, то есть, как следует из (1), когда $D_0\lrcorner\Psi = 0$. Из выбора формы Θ_0 и соответствующего ей дифференцирования D_0 следует, что $D_0\lrcorner\Psi = 0$.

2. Пусть $a = D + \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)$, $b = ft + fD_0$, тогда

$$[a,b] = [D, ft] + [D, fD_0] + [\mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0), ft] + [\mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0), fD_0],$$

где последнее слагаемое тривиально по выбору формы Θ_0.

Из (3) и определения Θ_0 следует, что

$$[ft, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)] = [ft, [D_0, D]\lrcorner\omega + D_0\lrcorner(D\omega) - D\lrcorner x^{(\delta)}\omega] =$$
$$= f[D_0, D] - x^{(\delta)}fD + f(\mathrm{div}_\omega D)D_0.$$

Здесь для получения последнего равенства мы использовали спаривание, определяющее операцию умножения в алгебре $Z(E)$.

Тогда $[a,b] = (Df - f\mathrm{div}_\omega D)t - f(\mathrm{div}_\omega D)D_0 + (Df)D_0 + f[D_0, D] + x^{(\delta)}fD$, откуда видно, что если $x^{(\delta)}fD \in L$, то $[a,b] \in L$. Но элемент $x^{(\delta)}fD\lrcorner\Theta_0$, очевидно, нулевой, а значит, $x^{(\delta)}fD \in L$.

3. Пусть $a = D + \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)$, $b = \omega\otimes\varphi + \varphi(D_0)t$, тогда

$$[a,b] = [D, \omega\otimes\varphi] + [D, \varphi(D_0)t] - [\omega\otimes\varphi, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)] - [\varphi(D_0)t, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)],$$

где последнее слагаемое тривиально.

Из (3) и определения Θ_0, используя изоморфизм μ, задающий умножение в алгебре $Z(E)$, получаем: $[\omega\otimes\varphi, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)] = [\omega\otimes\varphi, [D, D_0]\lrcorner\omega + (\mathrm{div}_\omega D)D_0\lrcorner\omega - D\lrcorner x^{(\delta)}\omega] = = (\varphi([D, D_0]) + (\mathrm{div}_\omega D)\varphi(D_0) - x^{(\delta)}\varphi(D))t$.

Таким образом, применяя (2) для 1-формы φ, имеем $[a,b] = (\mathrm{div}_\omega D)\omega\otimes\varphi + (\mathrm{div}_\omega D)\varphi(D_0)t + \omega\otimes D\varphi + (D\varphi)(D_0)t + x^{(\delta)}\varphi(D)t$.

Очевидно, что $x^{(\delta)}\varphi(D)D_0 = 0$, поэтому $x^{(\delta)}\varphi(D)t \in L$, и по определению пространства L, произведение $[a,b]$ в нем содержится.

4. Пусть $a = D + \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)$, $b = \Theta - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)$. Имеем

$$[a,b] = [D, \Theta] - [\Theta, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)] - [D, \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)] - [\mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0), \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)].$$

Последнее слагаемое тривиально, что следует из выбора Θ_0.

Снова используя (3), определение Θ_0 и изоморфизм модулей κ, определяющий умножение в $Z(E)$, получим $[\Theta, \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)] = [\Theta, [D, D_0]\lrcorner\omega + (\mathrm{div}_\omega D)D_0\lrcorner\omega - D\lrcorner x^{(\delta)}\omega] = = \omega\otimes([D_0, D]\lrcorner\Theta) - \omega\otimes((\mathrm{div}_\omega D)D_0\lrcorner\Theta) + \omega\otimes(x^{(\delta)}D\lrcorner\Theta)$.

Применяя соотношение (2) при вычислении $[D, \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)]$, получим, что $[a,b] = D\Theta - \omega\otimes(D_0\lrcorner D\Theta) - \omega\otimes(x^{(\delta)}D\lrcorner\Theta)$. Последнее слагаемое $\omega\otimes(x^{(\delta)}D\lrcorner\Theta)$ принадлежит L, а значит, $[a,b] \in L$.

5. Пусть $a = ft + fD_0$, $b = gt + gD_0$, тогда

$$[a,b] = [ft, gt] + [fD_0, gt] - [gD_0, ft] + [fD_0, gD_0],$$

где снова последнее слагаемое тривиально.

Учитывая соотношение (4), получим $[a,b] = \omega\otimes(gdf - fdg) - D_0(g)ft + D_0(f)gt$, лежит в L.

6. Пусть $a = ft + fD_0$, $b = \omega\otimes\varphi + \varphi(D_0)t$, тогда

$$[a,b] = [ft, \omega\otimes\varphi] + [ft, \varphi(D_0)t] + [fD_0, \omega\otimes\varphi] + [fD_0, \varphi(D_0)t].$$

С учетом тривиальности последнего слагаемого, а также формул (3) и (4) получаем: $[a,b] = -\mathrm{d}(f\varphi) + \omega\otimes\varphi(D_0)\mathrm{d}f + f\omega\otimes(D_0\lrcorner\mathrm{d}\varphi) + (D_0 f)\omega\otimes\varphi + fx^{(\delta)}\omega\otimes\varphi$. Ясно, что $fx^{(\delta)}\omega\otimes\varphi \in L$. Кроме того, $D_0\lrcorner\mathrm{d}(f\varphi) = \varphi(D_0)\mathrm{d}f + f(D_0\lrcorner\mathrm{d}\varphi) + (D_0 f)\varphi$, поэтому из (1) следует, что $[a,b]$ лежит в L.

7. Пусть $a = ft + fD_0$, $b = \Theta - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)$. Обозначим через D такое специальное дифференцирование, что $\Theta = D\lrcorner\omega$. Тогда

$$[a,b] = [ft,\Theta] - [ft,\omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)] + [fD_0,\Theta] - [fD_0,\omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)].$$

С учетом соотношений $fD_0\Theta = \mathrm{d}(fD_0\lrcorner\Theta)$ и $D_0\lrcorner\Theta + D\lrcorner\Theta_0 = 0$ имеем: $[a,b] = fD+ +\mathrm{d}(fD\lrcorner\Theta_0)$ — лежит в L.

8. Пусть $a = \omega\otimes\varphi_1 + \varphi_1(D_0)t$, $b = \omega\otimes\varphi_2 + \varphi_2(D_0)t$. Пусть, кроме того, дифференцирование $D \in W$ определяется из условия $D\lrcorner\omega = \varphi_1\wedge\varphi_2$, то есть $D = i_\omega^{-1}(\varphi_1\wedge\varphi_2)$. По определению операции умножения в $Z(E)$ получаем, что

$$[a,b] = i_\omega^{-1}(\varphi_1\wedge\varphi_2) - \mathrm{d}(\varphi_1(D_0)\varphi_2) + \mathrm{d}(\varphi_2(D_0)\varphi_1).$$

Т.к. $\varphi_1(D_0)\varphi_2 - \varphi_2(D_0)\varphi_1 = D_0\lrcorner(\varphi_1\wedge\varphi_2)$ и $D_0\lrcorner\Theta + D\lrcorner\Theta_0 = 0$, то $[a,b] = D + \mathrm{d}(D\lrcorner\Theta_0)$.

9. Пусть $a = \omega\otimes\varphi_1 + \varphi_1(D_0)t$, $b = \Theta - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta)$, где $\Theta = D\lrcorner\omega$ для некоторого $D \in W$.

$$[a,b] = \varphi(D)t - i_\omega^{-1}(\varphi\wedge(D_0\lrcorner\Theta)) + \varphi(D_0)D.$$

Заметим, что $0 = D_0\lrcorner(D\lrcorner(\varphi\wedge\omega)) = \varphi(D)\Theta_0 - \varphi(\Theta_0)\Theta + \varphi\wedge(D_0\lrcorner(D\lrcorner\omega))$, откуда $\varphi(D)t - i_\omega^{-1}(\varphi\wedge(D_0\lrcorner\Theta)) = \varphi(D_0)D - \varphi(D)D_0$. Следовательно, $[a,b] = \varphi(D)t+ +\varphi(D)D_0 \in L$.

10. Пусть $a = \Theta_1 - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta_1)$, $b = \Theta_2 - \omega\otimes(D_0\lrcorner\Theta_2)$. Определим $D_1, D_2 \in W$ из условий $\Theta_i = D_i\lrcorner\omega$ для $i = 1,2$. Тогда

$$[a,b] = -\omega\otimes(D_2\lrcorner\Theta_1) + (D_0\lrcorner\Theta_2)(D_1)t - (D_0\lrcorner\Theta_1)(D_2)t.$$

Поскольку $D_2\lrcorner\Theta_1 + D_2\lrcorner\Theta_2 = 0$, то $[a,b]$ также элемент из L.

Итак, мы доказали, что L — подалгебра Ли в $Z(E)$. $\square$

Далее вместо флага $\mathcal{F}$ будем использовать соответствующий ему вектор высот $\overline{m}$.

Теорема 2. *Подалгебра $L \subset Z(E)$, соответствующая 2-форме Θ_0, — фильтрованная деформация алгебры $Z(\overline{m})$, ей неизоморфная.*

Доказательство. Алгебра Ли $L = L(\overline{m})$ является фильтрованной деформацией $Z(\overline{m})$ по построению. Нужно лишь доказать, что $L(\overline{m}) \ncong Z(\overline{m})$. Из [6] следует, что p-замыкание алгебры $Z(\overline{m})$ в ее алгебре дифференцирований есть линейная оболочка внутренних дифференцирований $Z(\mathcal{F})$ и элементов $\mathrm{ad}^{p^k}\,\partial_i$, $0 < k < m_i$, то есть имеет размерность $\dim Z(\overline{m}) + |\overline{m}| - 3$. Покажем, что для алгебры L ее p-замыкание имеет большую размерность. Заметим, что базис пространства $\mathrm{ad}\, L$ и элементы $\mathrm{ad}^{p^k}(\partial_i + \mathrm{d}(\partial_i \lrcorner \Theta_0))$, $0 < k < m_i$ линейно независимы и содержатся в p-замыкании L. Очевидно, их линейная оболочка имеет размерность $\dim L + |m| - 3 = \dim Z(\overline{m}) + |m| - 3$. Рассмотрим действие дифференцирования $D_i = \mathrm{ad}^{p^{m_i}}(\partial_i + \mathrm{d}(\partial_i \lrcorner \Theta_0))$ на элементе $\partial_j + \mathrm{d}(\partial_j \lrcorner \Theta_0)$. Легко видеть, что

$$\mathrm{ad}^{p^{m_i}}(\partial_i + \mathrm{d}(\partial_i \lrcorner \Theta_0))(\partial_j + \mathrm{d}(\partial_j \lrcorner \Theta_0)) = \partial_i \lrcorner (\mathrm{ad}^{p^{m_i}-1} \partial_i \mathrm{ad} \partial_j (x^{(\delta)}\omega)) + \Phi,$$

где Φ — некоторая сумма однородных элементов из $Z(E)$ степени большей, чем $\partial_i \lrcorner (\mathrm{ad}^{p^{m_i}-1} \partial_i \mathrm{ad} \partial_j (x^{(\delta)}\omega))$. Если $i \neq j$, то элемент $\partial_i \lrcorner (\mathrm{ad}^{p^{m_i}-1} \partial_i \mathrm{ad} \partial_j (x^{(\delta)}\omega))$ ненулевой. Сравнивая степени элементов, мы видим, что для простой алгебры Ли серии Z не существует такого элемента вида

$$ad\, x = y + \sum_{s=1}^{3} \sum_{k_s=1}^{m_s-1} \alpha_{sk_s} \mathrm{ad}^{p^{k_s}}(\partial_s + \ \mathrm{d}\ (\partial_s \lrcorner \Theta_0)),$$

чтобы $\mathrm{ad}\ x(\partial_j + \mathrm{d}(\partial_j \lrcorner \Theta_0)) = D_i(\partial_j + \mathrm{d}(\partial_j \lrcorner \Theta_0))$. То есть D_i линейно независимо с $\mathrm{ad}\ L$ и $\mathrm{ad}^{p_s^k}(\partial_s + \mathrm{d}(\partial_s \lrcorner \Theta_0))$, $0 < k_s < m_s$. Таким образом, размерность p-замыкания L больше размерности p-замыкания $Z(\overline{m})$.

Пусть теперь $Z(\overline{m})$ не является простой. По построению ее деформация L также не простая и $[L, L]$ — ее единственный ненулевой минимальный идеал. Кроме того, $[L, L]$ является фильтрованной деформацией простой алгебры Ли $[Z(\overline{m}), Z(\overline{m})]$, которая в свою очередь является единственным ненулевым минимальным идеалом алгебры $Z(\overline{m})$. Таким образом, $[L, L] \ncong [Z(\overline{m}), Z(\overline{m})]$, откуда следует неизоморфность L и $Z(\overline{m})$. Теорема доказана. □

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (*проект* НК-13П-13, *контракт* П945)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuznetsov M. I. The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2 // Comm. Algebra, 1991. Vol. 19. P. 1281-1312.

2. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1969. Т. 33. С. 251-322. [Kostrikin A. I., Shafarevic I. R. Graded Lie algebras of finite characteristic // Math. USSR izv., 1969. Vol. 3(2). C. 237-304.]

3. Кузнецов М. И., Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии R // Мат. заметки. 2012. Т. 91(3). С. 400-406. [Kuznetsov M. I., Ladilova A. A. Filtered deformations of Lie algebras of the series R // Math. Notes, 2012. Vol. 91(3). P. 378-383.]

4. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14(6). С. 135-140. [Ladilova A. A. Filtered deformations of Lie algebras of series Y // J. Math. Sc., 2010. Vol. 164(1). P. 91-94.]

5. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Франк // Изв. вузов. Математика. 2009. №. 8. С. 53-56. [Ladilova A. A. Filtered deformations of the Frank algebras // Russ. Math., 2009. Vol. 53(8). P. 43-45.]

6. Скрябин С. М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Мат. сб., 1992. Т. 183(8). С. 3-22. [Skryabin S. M. New series of simple Lie algebras of characteristic 3 // Russ. Ac. Sc. Sb. Math., 1993. Vol. 76(2). P. 389-406.]

7. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с. [Sternberg S. Lectures on differential geometry. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964. 15+390 pp.]

ООО "СЗД Лабс"
Поступило 14.09.2013