Г. Ю. Панина, Виртуальные многогранники и классические вопросы геометрии, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 5, 152–170

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 5

ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И КЛАССИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ

© Г. Ю. Панина

Виртуальный многогранник — это разность Минковского двух выпуклых многогранников. В статье поставленны и частично решены аналоги классических вопросов геометрии для виртуальных многогранников. Изучены свойства вееров, смешанных объемов, вопросы жесткости и теорема Минковского.

Введение

Виртуальные многогранники удачно обобщают понятие выпуклых могогранников. Группа виртуальных многогранников порождена полугруппой многогранников с операцией сложения по Минковскому. Ее полезно рассматривать как подгруппу (по умножению) алгебры политопов, введенной независимо в работах [KP, McM1, Mo]. Изучение последней было черезвычайно плодотворным и привело как к решению некоторых старых проблем геометрии (например, задачи об f-векторе многогранников [McM2]), так и к открытию новых параллелей между геометрией многогранников и геометрией торических многообразий [FS].

В терминах виртуальных многогранников автором была сформулирована и решена задача о критерии представимости n-мерного многогранника в виде суммы Минковского k-мерных многогранников [P1].

С другой стороны, к этой тематике примыкает изучение разностей Минковского гладких выпуклых тел [LRR, RR, M-M1, M-M2]. Один из наиболее интересных результатов в этой области — построение контрпримера к известной старой гипотезе о характеризации сферы [M-M2].

Ключевые слова: виртуальные многогранники, веер, теорема Минковского, изгибания, жесткость.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №02-01-00908.

Структура статьи. В §1 содержатся основные определения и примеры.

В §2 изучается поведение виртуальных многогранников и многогранных функций при вычислении смешанных объемов. Описан оператор σ, сопоставляющий с каждой многогранной функцией F виртуальный многогранник σF, поведение которого совпадает с поведением функции F.

В §3 изучаются веера виртуальных многогранников. В отличие от выпуклого случая, веер виртуального многогранника может не только быть нерегулярным, но и содержать невыпуклые и несвязные клетки. В отличие от выпуклого случая, виртуальный многогранник не определяется однозначно набором нормалей к его гиперплоским граням и значений опорной функции на этих нормалях. Теорема 3.2 обсуждает в этой связи, какой набор данных задает виртуальный многогранник. Приведен важный пример виртуального тетраэдра — многогранника в $\mathbb{R}^3$ с 4 вершинами и 4 гранями и с равными между собой невыпуклыми клетками веера.

В §4 изучаются вопросы жесткости виртуальных многогранников. Теорема 4.3 утверждает, что виртуальный многогранник все клетки веера которого выпуклы, — жесткий. Эта теорема обобщает результат о жесткости виртуальных многогранников из статьи [RR]. При этом существуют нежесткие виртуальные многогранники. Известный пример изгибаемой многогранной поверхности — „второй изгибаемый октаэдр Брикара" — может быть снабжен структурой виртуального многогранника.

В §5 изучается теорема Минковского в классической постановке для виртуальных многогранников. Утверждение о единственности многогранника с заданным набором нормалей гиперплоских граней и заданными значениями объемов этих граней оказывается неверным для виртуальных многогранников. Вопрос существования остается весьма сложной открытой проблемой.

§1. Виртуальные многогранники. Грани. Проекции

Зафиксируем вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ с началом координат в точке O.

Многогранник всегда предполагается выпуклым, компактным и непустым, но возможно вырожденным (таким образом, отрезки и точки тоже считаются многогранниками).

Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ множество всех многогранников в $\mathbb{R}^n$.

Множество $\mathcal{P}$, снабженное операцией сложения по Минковскому $\otimes$, образует коммутативную полугруппу с обычным законом сокращения: $K \otimes L = K \otimes M$ влечет $L = M$. Роль единицы полугруппы играет многогранник $E = \{O\}$. Следовательно, существует единственная минимальная группа $\mathcal{P}^*$, содержащая $\mathcal{P}$, которую будем называть *группой виртуальных многогранников*. Ее элементы называются *виртуальными многогранниками*.

Группу виртуальных многогранников можно интерпретировать разными способами:

1. Как группу формальных выражений вида $K \otimes L^{-1}$ (K, L — выпуклые многогранники).

2. Как группу непрерывных кусочно-линейных (относительно некоторого веера) функций, профакторизованную по подгруппе глобально линейных функций. При этом операция $\otimes$ соответствует поточечному суммированию. (Вспомним, что опорная функция выпуклого многогранника является непрерывной выпуклой и кусочно-линейной относительно веера многогранника функцией.)

3. Как прямой предел групп Пикара торических многообразий. При этом операции $\otimes$ соответствует тензорное произведение линейных расслоений. (Подробности и детали — см. [FS].)

4. И наконец, как подгруппу по умножению алгебры политопов $\mathcal{M}$.

Последнее требует следующих подробных пояснений.

Функция $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ называется *многогранной*, если она представима в виде

$$F = \sum_i a_i I_{K_i}, \quad \text{где } a_i \in \mathbb{R},\ K_i \in \mathcal{P}$$

и где I_{K_i} — характеристическая функция многогранника K_i:

$$I_{K_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех многогранных функций. Оно снабжено двумя операциями, задающими кольцевую структуру. Роль сложения играет операция поточечного сложения $+$. Операция умножения порождена операцией $\otimes$ и обозначается тем же символом. Более того, кольцо $\mathcal{M}$ после факторизации по параллельным переносам допускает введение структуры градуированной алгебры [McM1].

Произведение двух многогранных функций может быть определено согласно дистрибутивному закону:

$$F \otimes G = \sum_i a_i I_{K_i} \otimes \sum_i b_i I_{L_i} := \sum_{i,j} a_i b_j I_{K_i \otimes L_i},$$

но следующая формула удобнее:

$$(F \otimes G)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x-y)G(y)d\chi(y).$$

(Здесь используется интегрирование по эйлеровой характеристике [V, KP].)

Единицей алгебры $\mathcal{M}$ служит функция $E = I_{\{O\}}$.

Эйлеровой характеристикой многогранной функции $F = \sum_i a_i I_{K_i}$ называется число $\chi(F) = \sum_i a_i$.

Отождествляя выпуклые многогранники с их характеристическими функциями, получаем естественное включение $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$. Имея это в виду, в дальнейшем мы будем писать K вместо I_K.

Все элементы полугруппы $\mathcal{P}$ обратимы в алгебре $\mathcal{M}$:

Теорема 1.1 (об обращении по Минковскому) [KP]. *Для всякого многогранника $A \in \mathcal{P}$ справедливо равенство*

$$(-1)^{\dim A}\,\mathrm{Int}(sA) \otimes A = E,$$

где s — центральная симметрия относительно O, $\mathrm{Int}(sA)$ — относительная внутренность многогранника sA (т.е. внутренность в аффинной оболочке). •

Следовательно, включение $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ порождает вложение $\mathcal{P}^*$ в мультипликативную группу алгебры $\mathcal{M}$.

1.2. Следующие примеры иллюстрируют разнообразие типов виртуальных многогранников даже в двумерном случае.

1. Виртуальный многогранник,обратный к треугольнику, — это открытый треугольник (см. теорему 1.1.)

2. Разность Минковского треугольника и отрезка.

3. Фигура „звезда“ (с любым числом лучей) при правильном задании значений многогранной функции становится виртуальным многогранником.

4. Здесь указаны все типы виртуальных треугольников. Этот пример показывает, что виртуальный многогранник не восстанавливается однозначно по множеству своих вершин.

С другой стороны, далеко не всякая многогранная функция является виртуальным многогранником. Необходимые и достаточные условия этого обсуждаются в предложении 1.12.

Определение 1.3. Пусть $K = \sum_i a_i K_i$, где $K_i \in \mathcal{P}$. Пусть $l_i(\xi)$ — опорная плоскость к K_i с внешней нормалью ξ. Многогранник $K_i^\xi = K_i \cap l_i(\xi)$ называется *гранью многогранника K_i с нормалью ξ*. Многогранная функция $K^\xi = \sum_i a_i K_i^\xi$ называется *гранью многогранной функции K с нормалью ξ*.

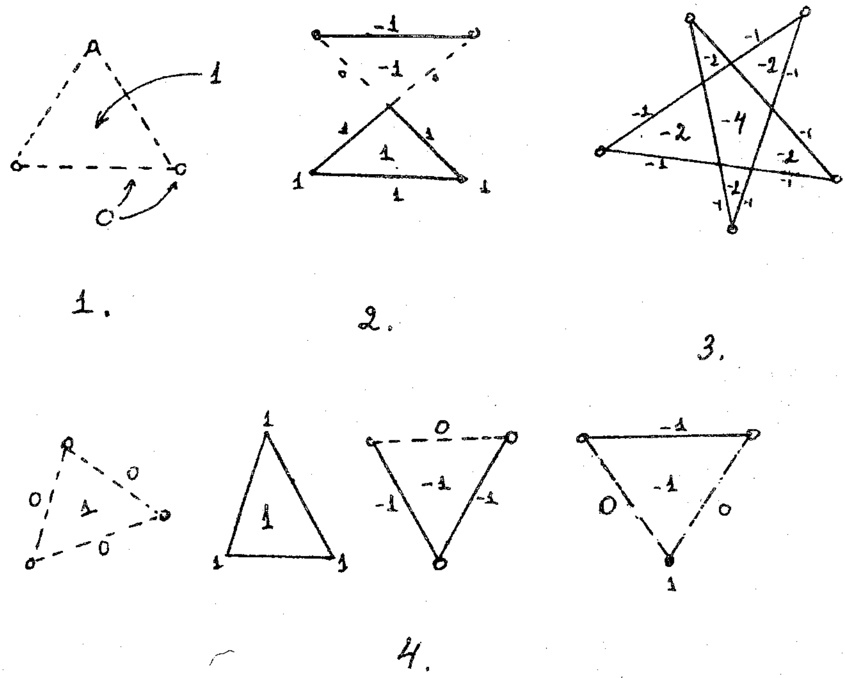


Рис. 1

Это определение корректно, поскольку допускает следующую переформулировку.

Определение 1.4. Грань K^ξ функции $K \in \mathcal{M}$ определяется как предел

$$K^\xi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{C(x,\varepsilon,\xi)} K(t-x)d\chi(t),$$

где

$$C(x,\varepsilon,\xi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \varepsilon, \varepsilon(y-x,\varepsilon) > (y-x)^2 - (y-x,\varepsilon)^2\}.$$

Теорема 1.5. *Пусть* K, $M \in \mathcal{P}^*$. *Тогда*

$$(K \otimes M)^\xi = K^\xi \otimes M^\xi.$$

1.6. Перейдем к рассмотрению опорных функций виртуальных многогранников и многогранных функций. Все эти определения и результаты фактически содержатся в [KP].

Пусть $\mathbb{R}[\mathbb{R}]$ — групповая $\mathbb{R}$-алгебра. Его элементами являются формальные суммы вида $\sum_i a_i[x_i]$ где $a_i, x_i \in \mathbb{R}$. Умножение в алгебре задано соотношением

$$[x] \cdot [y] = [x + y].$$

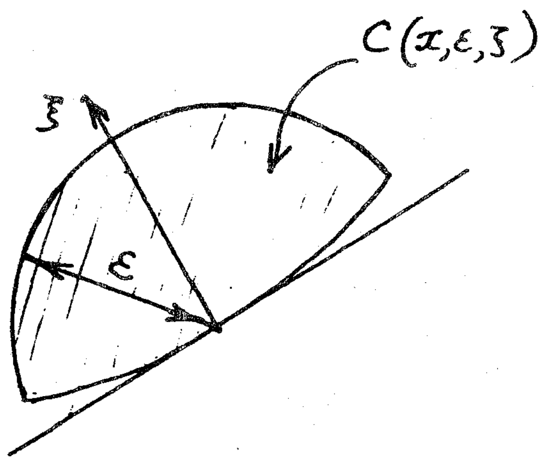


Рис. 2

Элементы вида $1 \cdot [x]$ называются *простыми*.

Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — единичная сфера с центром в точке O. Пусть также $\xi \in S^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $e(\xi)$ гиперплоскость с нормалью ξ, содержащую O, а через $T_{x\xi}$ — параллельный перенос на вектор $x\xi$. Для $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество точек

$$S(\xi, a, \varepsilon) = \bigcup_{x \in [a; a+\varepsilon)} T_{x\xi}(e(\xi)).$$

1.7. Дадим два определения опорной функции. Корректность второго следует из их эквивалентности.

Определение 1.8. Пусть $F \in \mathcal{M}$ — многогранная функция. Ее опорной функцией называется функция

$$H_F : S^{n-1} \to \mathbb{R}[\mathbb{R}], \quad \xi \mapsto \sum_{a \in \mathbb{R}} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S(\xi, a, \varepsilon)} F(x) d\chi(x) \right) [a].$$

(Здесь используется интегрирование по эйлеровой характеристике $d\chi$ [V, KP].) Заметим, что значение предела равно нулю для почти всех $a \in \mathbb{R}$. Поэтому сумма в правой части является конечной.

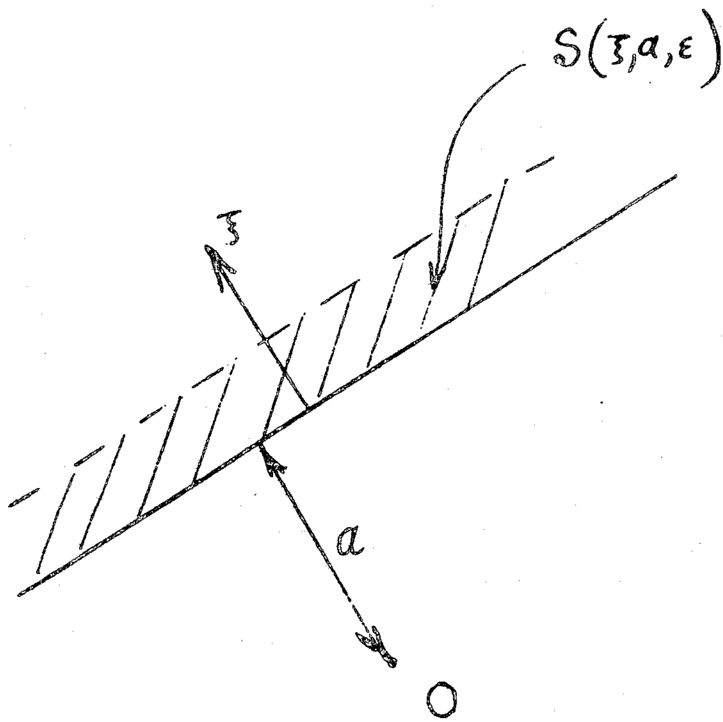


Рис. 3

Определение 1.9. *Опорной функцией* многогранной функции $F = \sum_i a_i K_i$, где $K_i \in \mathcal{P}$, $a_i \in \mathbb{R}$, называется функция

$$H_F\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}[\mathbb{R}], \quad \xi \mapsto \sum_i a_i[h_i(\xi)],$$

где h_i — опорная функция многогранника K_i в обычном смысле [KP].

Предложение 1.10.

1. *$F \in \mathcal{P}^*$ тогда и только тогда, когда элемент $H_F(\xi)$ прост для всех $\xi \in S^{n-1}$.*

2. *Многогранная функция F однозначно восстанавливается по своей опорной функции H_F.*

3. *Для любых виртуальных многогранников* F_1 *и* F_2, *справедливы равенства*

$$H_{F_1 \otimes F_2} = H_{F_1} \cdot H_{F_2}, \quad H_{F_1+F_2} = H_{F_1} + H_{F_2}, \quad H_{aF_1} = aH_{F_1}.$$

4. *Пусть* $H_K = [h]$ — *опорная функция виртуального многогранника* K, $a \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$H_{K^{-1}} = [-h], \quad H_{K^a} = [ah].$$

Определение 1.11. *Проекция* $\mathrm{Proj}_l F$ многогранной функции $F \in \mathcal{M}$ на аффинную плоскость l — это многогранная функция, заданная на l формулой

$$\mathrm{Proj}_l F(x) = \int\limits_{x^*} F(t) d\chi(t),$$

где x^* — аффинная плоскость дополнительной к l размерности, ортогональная l и содержащая точку x.

Предложение 1.12. *Для всякой многогранной функции* F *следующие утверждения* 1–4 *эквивалентны.*

1. F — *виртуальный многогранник.*

2. *Для всякого единичного вектора* ξ *существует единственная опорная гиперплоскость с нормалью* ξ. *При этом* $\chi(F) = 1$.

3. *Все проекции* F — *виртуальные многогранники.*

4. *Все одномерные проекции* F — *виртуальные многогранники.* •

§2. Объем и смешанный объем виртуальных многогранников

Смешанный объем однозначно продолжается на множество многогранных функций таким образом, что:

для выпуклых многогранников расширенное понятие совпадает с классическим;

смешанный объем линеен по каждому аргументу относительно операции $+$.

Иначе говоря, корректно следующее определение.

Определение 2.1. Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — многогранные функции. Определим их *смешанный объем* формулой

$$V(F_1, \dots, F_n)$$
$$= V\left(\sum_i a_{1,i}K_{1,i}, \dots, \sum_i a_{n,i}K_{n,i}\right) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \prod_{j=1}^{n} a_{j,i_j} V(K_{1,i_1}, \dots, K_{n,i_n}).$$

Теорема 2.2. *Пусть K — виртуальный многогранник.* 1. *Справедливо равенство $V(K, \dots, K) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx$.*

Эта величина называется объемом виртуального многогранника K.

2. *Справедливо равенство $V(K, \dots, K) = 1/n \sum_{\xi \in S^{n-1}} h_K(\xi) V(K^\xi, \dots, K^\xi)$.* •

Первое утверждение этой теоремы неверно для произвольных многогранных функций, не являющихся виртуальными многогранниками. Так, например, если $F = 2K$, где K — выпуклый многогранник, то

$$V(F, \dots, F) = 2^n V(K) \neq 2V(K) = \int_{\mathbb{R}^n} F dx.$$

Теорема 2.3. *Пусть $K_1, \dots, K_n$ — виртуальные многогранники. $V(K_1^{\lambda_n} \otimes \dots \otimes K_n^{\lambda_n})$ есть однородный многочлен степени n от переменных $\lambda_1, \dots \lambda_n$. При этом (как и в классическом случае) его коэффициент при $\lambda_1 \dots \lambda_n$ равен $V(K_1, \dots, K_n)$.* •

Определение 2.4. *Будем говорить, что две многогранные функции F и F' ведут себя одинаково при вычислении смешанного объема, если для любых $F_1, \dots, F_{n-1} \in \mathcal{M}$ справедливо равенство*

$$V(F, F_1, \dots, F_{n-1}) = V(F', F_1, \dots, F_{n-1}).$$

Нам понадобится следующий оператор σ. Мы даем для него два разных (но эквивалентных) определения. Их корректность следует из их эквивалентности.

Определение 2.5. Пусть $F \in \mathcal{M}$ — многогранная функция. Обозначим опорную функцию F через $H_F = \sum_i a_i[h_i]$. Определим оператор $\sigma \colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}^*$ следующим образом: σF — виртуальный многогранник, опорная функция которого удовлетворяет условию

$$H_{\sigma F} = \left[\sum_i a_i h_i\right].$$

Определение 2.6. Пусть $F = \sum_i b_i K_i \in \mathcal{M}$, $K_i \in \mathcal{P}$. Введем отображение

$$\sigma\colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}^*, \quad F \mapsto \prod_i^{\otimes} K_i^{b_i}.$$

Предложение 2.7. (свойства σ). *Пусть $K, M \in \mathcal{M}$. Тогда*

1) K — виртуальный многогранник в том и только в том случае, если $\sigma K = K$;

2) $\sigma(K \otimes M) = \sigma K \otimes \sigma M$, если $\chi(K) = \chi(M) = 1$;

3) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\sigma(aK + bM) = (\sigma K)^a \otimes (\sigma M)^b$;

4) пусть u — параллельный перенос; тогда виртуальные многогранники σK и $\sigma(uK)$ равны с точностью до параллельного переноса.

Теорема 2.8. *Многогранные функции F и F' ведут себя одинаково при вычислении смешанных объемов тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(F) = \sigma(F').$$

Для всякой многогранной функции F существует единственный виртуальный многогранник K, который ведет себя при вычислении смешанных объемов так же, как и F. При этом $K = \sigma F$.

Доказательство. Заметим, что смешанный объем линеен не только по отношению к операции $+$, но также и по отношению к операции $\otimes$. Иными словами, справедливо равенство

$$V(M_1 \otimes M_1', M_2, \ldots, M_n) = V(M_1, M_2, \ldots, M_n) + V(M_1', M_2, \ldots, M_n).$$

Действительно, это утверждение справедливо для выпуклых многогранников, а значит, распространяется по линейности на все многогранные функции.

Следовательно, F и σF ведут себя одинаково для всякой $F \in \mathcal{M}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что два виртуальных многогранника ведут себя одинаково тогда и только тогда, когда они совпадают с точностью до параллельного переноса. •

§3. Вееры виртуальных многогранников

Определим *веер* виртуального многогранника так же, как и в выпуклом случае.

Определение 3.1. *Веером* называется конечный набор $\Sigma = \{U_i\}$ замкнутых сферически многогранных подмножеств единичной сферы S^{n-1}, обладающий следующими свойствами:

1) $\bigcup_i U_i = S^{n-1}$;

2) для любых i, j, $U_i \cap U_j \in \Sigma$;

3) относительные внутренности множеств U_i не пересекаются: $\operatorname{relint} U_i \cap \operatorname{relint} U_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$.

Эти многогранные множества называются *клетками* веера. 0-мерные клетки называются *вершинами* веера. Множество всех вершин веера обозначим через Σ^0.

В отличии от классического определения мы не требуем ни выпуклости, ни даже связности клеток.

Будем говорить, что веер $\Sigma = \{U_i\}$ — *измельчение* веера $\Sigma' = \{U_j'\}$, если для каждого j найдутся такие $U_{i_1}, \ldots U_{i_k}$, что $\cup_m U_{i_m} = U_j'$.

Внешним нормальным веером Σ (или просто *веером*) виртуального многогранника $K \in \mathcal{P}$ называется набор сферических многогранных множеств $\{\Sigma_K(\nu)\}$, где ν пробегает множество граней K:

$$\Sigma_K(\nu) = \left\{ \xi \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi \text{ — нормальный вектор касательной к } K \text{ гиперплос-} \\ \text{кости такой, что } K^\xi \supseteq \nu \end{array} \right\}.$$

Будем говорить, что виртуальный многогранник K *подчинен* вееру Σ, если Σ — измельчение веера Σ_K.

Для единичного вектора ξ и вещественного h обозначим через $e(\xi, h)$ гиперплоскость, заданную уравнением $(x, \xi) = h$.

Замечание. Выпуклый многогранник $K \in \mathcal{P}$ однозначно восстанавливается по множеству $\Sigma^0 = \{\xi_i\}$ и значениям опорной функции $h_K(\xi_i) = h_i$.

Условие согласованности. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ — множество вершин некоторой клетки виртуального многогранника K. Тогда гиперплоскости $e(\xi_1, h_1), \ldots, e(\xi_k, h_k)$ имеют общую точку.

Будем говорить, что веер Σ и функция $h : \Sigma^0 \to \mathbb{R}$ удовлетворяют *условию согласованности*, если гиперплоскости $e(\xi_1, h_1), \ldots, e(\xi_k, h_k)$ имеют общую точку для всякой клетки веера.

Следующая теорема показывает, что виртуальный многогранник неоднозначно восстанавливается по множеству $\{\xi_i\}$ и значениям h_i.

Кроме того, клетки веера виртуального многогранника могут быть невыпуклыми, несвязными и(или) сложной топологической формы.

Теорема 3.2. *Пусть веер Σ и функция $h : \Sigma^0 \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию согласованности. Тогда существует единственный виртуальный многогранник K такой, что*

$$\Sigma_K \text{ подчинен } \Sigma \text{ и } h_K(\xi_i) = h_i.$$

Доказательство. Благодаря условию согласованности, функция h единственным образом продолжается до непрерывной кусочно-линейной относительно Σ_K функции. Это и есть опорная функция искомого виртуального многогранника. •

3.3. Пример. Рассмотрим пять плоскостей в $\mathbb{R}^3$, ограничивающих многогранник K (рис. 4). Вершины веера Σ_K могут служить вершинами другого веера Σ', и новый веер вместе с теми же пятью плоскостями задают виртуальный многогранник K'.

3.4. Пример. Виртуальный тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Пусть $e_1, \ldots, e_4$ — четыре неориентированные плоскости, ограничивающие выпуклый тетраэдр. Сколько виртуальных многогранников связано с этим набором плоскостей? Мы можем выбрать ориентации плоскостей произвольно (16 возможностей!), а затем соединить на сфере концы нормалей отрезками больших кругов так, чтобы получился веер. Это может быть сделано несколькими способами. Так получаются разные виртуальные тетраэдры. Рассмотрим один из них.

Выберем „правильную" ориентацию плоскостей (нормали смотрят наружу) и соединим их, как показано на рис 4. Сфера оказывается разделенной на 4 равные невыпуклые части.

Заметим, что можно построить еще 2 веера с данными вершинами, отличающихся от построенного поворотом сферы, поскольку каждое такое построение фиксирует пару противоположных ребер.

Виртуальный многогранник, соответствующий этому вееру и плоскостям (рис. 5) представляет собой функцию, равную -1 всюду на тетраэдре, за исключением двух противоположных ребер. На этих ребрах значения функции равны 0.

§4. Хериссоны, виртуальные многогранники и некоторые вопросы жесткости

Определение 4.1 [RR]. Гомеоморфный сфере многогранный комплекс в $\mathbb{R}^3$ называется (*дискретным*) *хериссоном*, если его грани можно ориентировать (выбором нормали) таким образом, что если при обходе звезды любой вершины A_i комплекса соединить на единичной сфере концы нормалей кратчайшими геодезическими в порядке обхода, то результатом будет граница

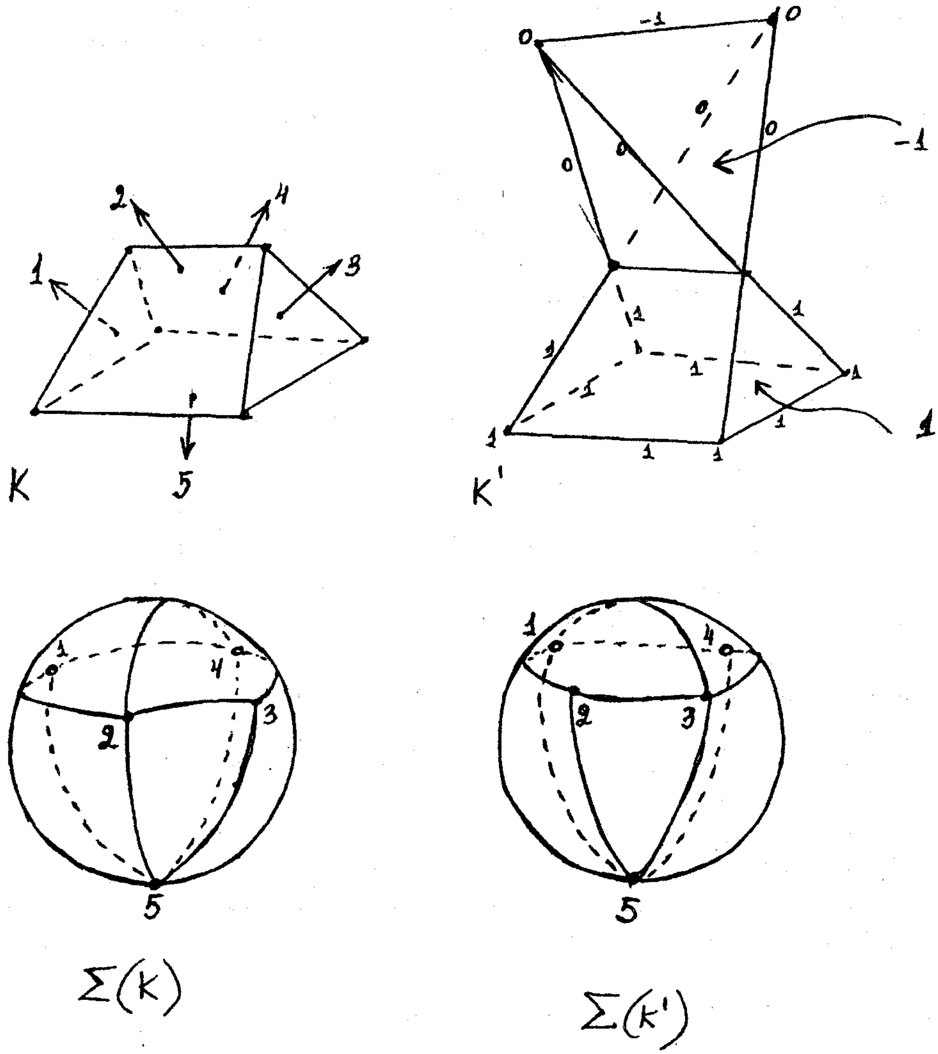


Рис. 4

некоторого сферически-выпуклого многогранника A^*. Кроме того, мы требуем, чтобы совокупность всех A^* задавала бы разбиение сферы.

Следующее предложение показывает, что хериссоны являются частным случаем виртуальных многогранников.

Предложение 4.2. *Пусть P — произвольный хериссон. Существует виртуальный многогранник K и такое взаимно-однозначное соответствие между гра-*

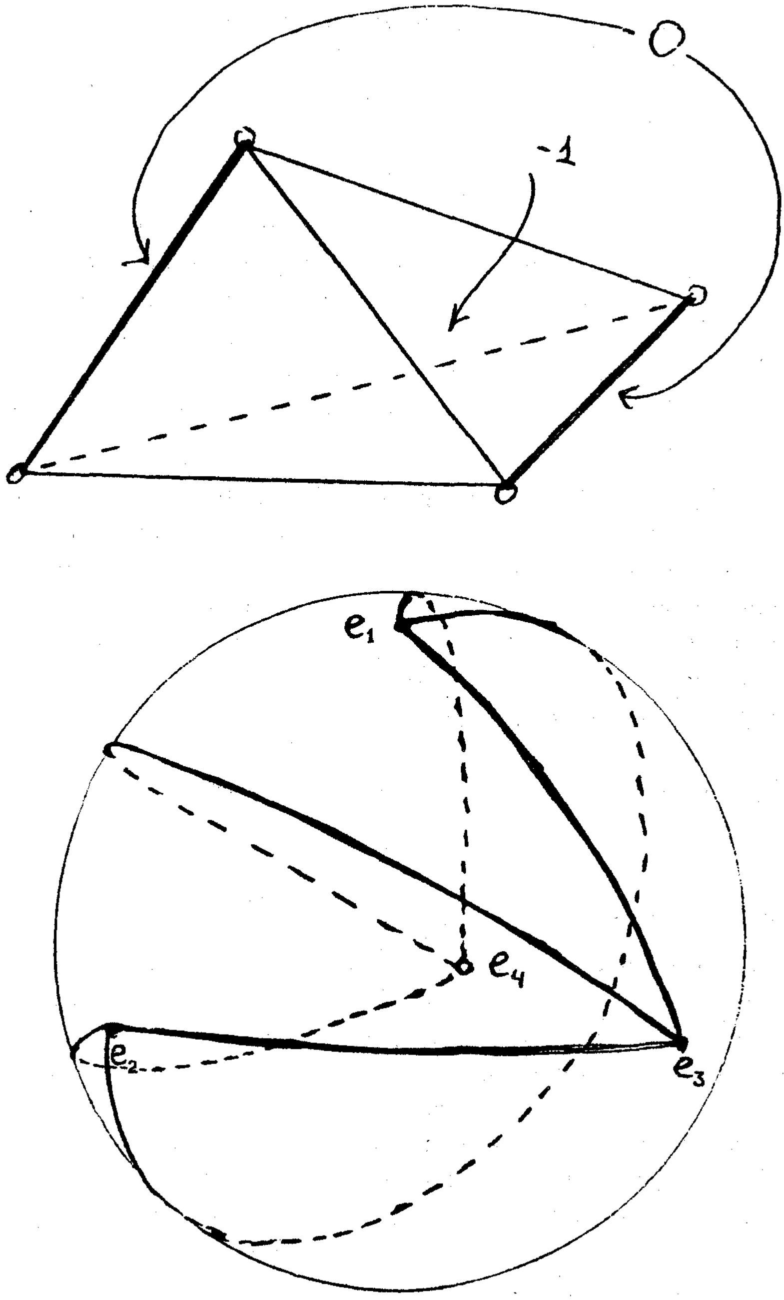


Рис. 5

нями P_i *комплекса* P *и гранями* K_i *многогранника* K, *что*

$$P_i = \operatorname{supp} K_i$$

Кроме того, ориентации у P_i *и* K_i *совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность ориентированных плоскостей $\{e_i\} = \{\operatorname{aff}(P_i)\}$, ориентация которых унаследована от ориентации P. Рассмотрим также веер Σ, порожденный набором сферических многогранников A_i^*. Пусть K — виртуальный многогранник, соответствующий (согласно теореме 3.2) этому вееру и плоскостям. Как легко видеть, его вершины совпадают с вершинами P. Комбинаторная структура K также совпадает со структурой P, что завершает доказательство. •

Определение. Виртуальный многогранник K называется *изгибаемым*, если существует такое непрерывное семейство виртуальных многогранников K_t , $0 \leqslant t \leqslant 1$, $K_0 = K$ (которое называется *изгибанием* многогранника K) такое, что комбинаторная структура K_t совпадает с комбинаторной структурой K, и соответствующие грани равны с точностью до движения пространства. При этом семейство K_t не должно порождаться движениями пространства.

Если виртуальный многогранник не изгибаем, то он называется *жестким*.

Теорема 4.3. *Если все клетки виртуального многогранника выпуклы, то он жесткий.*

Следствие. *Херрисоны — жесткие.*

Доказательство теоремы. Пусть K — виртуальный многогранник. Предположим, что он изгибаем, и K_t — его изгибание. Мы следуем схеме доказательства жесткости выпуклых многогранников [A]. Рассмотрим граф, образованный всеми ребрами веера Σ многогранника K. Ниже мы припишем некоторым ребрам этого графа знак + или – таким образом, что окажемся в условии леммы Коши [A]. Отсюда будет следовать жесткость K.

Пусть A — вершина виртуального многогранника K, а $C(K, A)$ - виртуальный конус многогранника K при вершине A. Рассмотрим *регуляризацию* конуса $C(K, A)$. Это выпуклый конус $C^R(K, A)$ с вершиной A и с такими же нормалями граней, как и конус $C(K, A)$.

Каждое изгибание конуса $C^R(K, A)$ порождает изгибание $C(K, A)$ и наоборот. Далее, если в течение изгибания некоторый двугранный угол конуса $C(K, A)$ увеличивается, то соответствующий ему двугранный угол $C^R(K, A)$

также увеличивается, и наоборот. Теперь ясно, что, приписав каждому ребру знак + или – в соответствии с увеличением или уменьшением соответствующего двугранного угла, мы окажемся в условии леммы Коши. •

4.4. Пример изгибаемого виртуального многогранника. Интересный пример изгибаемого виртуального многогранника может быть получен из второго изгибаемого октаэдра Брикара [RR].

Первоначально второй октаэдр Брикара — это гомеоморфный сфере симплициальный комплекс в $\mathbb{R}^3$, построенный следующим образом. Зафиксируем декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим окружность S с центром в точке O лежащую в плоскости (x, y). Выберем 4 точки $A, B, C, D \in S$ так, чтобы $|AB| = |CD|$ (рис. 6).

Пусть $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -1)$. Совокупность треугольников

$$B = \{\Delta ABP, \Delta BDP, \Delta DCP, \Delta ACP, \Delta ABQ, \Delta BDQ, \Delta DCQ, \Delta ACQ\}$$

образует симплициальный комплекс, который называется *вторым изгибаемым октаэдром Брикара*. Комплекс B изгибаем, причем в процессе изгибания точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

На рис. 6 представлен виртуальный многогранник K с $\partial(\operatorname{supp} K) = |B|$. Он изгибаем так же, как и B. Для удобства изображена только его верхняя часть; нижняя часть симметрична верхней. Разумеется, веер многогранника K имеет невыпуклые клетки.

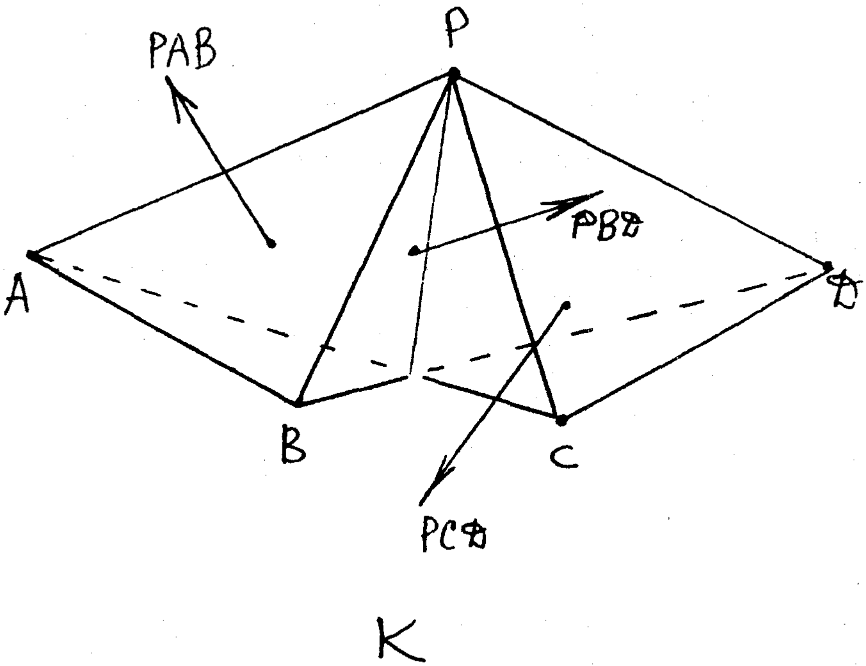
§5. Теорема Минковского и виртуальные многогранники

Напомним формулировку теоремы Минковского.

Теорема 5.1. 1. *Пусть K — многогранник в $\mathbb{R}^n$, пусть $\{\xi_i\}$ — множество внешних нормалей его граней максимальной размерности и V_i — $(n-1)$-мерные объемы этих граней. Тогда*

$$\sum_i V_i \xi_i = 0.$$

2. *Пусть $\sum_i V_i \xi_i = 0$ для некоторого набора векторов $\{\xi_i\}$, порождающих $\mathbb{R}^n$, и некоторого набора положительных вещественных V_i. Тогда существует единственный (с точностью до параллельного переноса) многогранник K такой, что ξ_i — нормали его граней, а V_i — объемы этих граней.*



Предложение 5.2. 1. *Утверждение 1 теоремы 5.1 остается справедливым для виртуальных многогранников.*

2. *Пусть набор векторов ξ_i и набор чисел V_i (возможно, некоторые из этих чисел отрицательны или равны нулю) таковы, что $\sum_i V_i \xi_i = 0$. В этом случае утверждение 2 теоремы 5.1. может быть неверным для виртуальных многогранников. Таким образом, утверждение о единственности не сохраняется.*

3. *Вопрос существования виртуального многогранника, отвечающего данному набору векторов и чисел, остается открытым.*

Доказательство. Действительно, утверждение 1 справедливо по линейности.

Пример двух разных виртуальных многогранников в $\mathbb{R}^3$ с одним и тем же набором нормалей граней и одинаковыми площадями граней возникает из примера 3.4. У виртуального тетраэдра есть пара выделенных ребер (это ребра, на которых значения функции равны 0). Их можно выбрать тремя разными способами. При этом можно получить 3 разных виртуальных многогранника с одинаковыми направлениями нормалей и площадями граней. •

Список литературы

[A] Александров А. Д., *Выпуклые многогранники*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

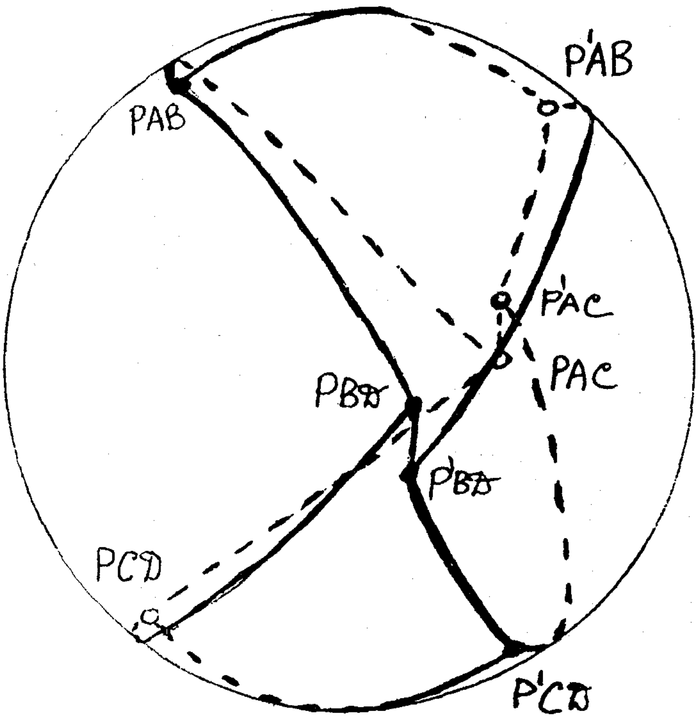


Рис. 6

[B] Brion M., *The structure of the polytope algebra*, Tôhoku Math. J. (2) **49** (1997), no. 1, 1–32.

[C] Connelly R., *Rigidity*, Handbook of Convex Geometry. Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 223–271.

[CSW] Connelly R., Sabitov I., Walz A., *The bellows conjecture*, Beiträge Algebra Geom. **38** (1997), no. 1, 1–10.

[FS] Fulton W., Sturmfels B., *Intersection theory on toric varieties*, Topology **36** (1997), no. 2, 335–353.

[KP] Пухликов А. В., Хованский А. Г., *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*, Алгебра и анализ **4** (1992), №2, 161–185.

[LLR] Langevin R., Levitt G., Rosenberg H., *Hérissons et multihérissons (enveloppes parametrées par leur application de Gauss)*, Singularities (Warsaw, 1985), Banach Center Publ., vol. 20, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245–253.

[L] Leichtweiss K., *Konvexe Mengen*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.

[M-M1] Martinez-Maure Y., *Indice d'un hérisson: étude et applications*, Publ. Mat. **44** (2000), 237–255.

[M-M2] Martinez-Maure Y., *Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **332** (2001), no. 1, 41–44.

[McM1] McMullen P., *The polytope algebra*, Adv. Math. **78** (1989), no. 1, 76–130.

[McM2] McMullen P., *On simple polytopes*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 419–444.

[Mo] Morelli R., *A theory of polyhedra*, Adv. Math. **97** (1993), no. 1, 1–73.

[P1] Панина Г. Ю., *Структура группы виртуальных многогранников относительно подгрупп цилиндров*, Алгебра и анализ **13** (2001), №3, 179–197.

[P2] Панина Г. Ю., *Смешанные объемы для невыпуклых тел*, Изв. Нац. АН Армении. Мат. **28** (1993), №1, 72–81.

[RR] Rodriguez L., Rosenberg H., *Rigidity of certain polyhedra in* $\mathbb{R}^3$, Comment. Math. Helv. 75 (2000), 478–503.

[S1] Сабитов И. Х., *Локальная теория изгибаний поверхностей*, Геометрия-3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 48, ВИНИТИ, М., 1989, сс. 196–270.

[S2] Sabitov I., *On some recent results in the metric theory of polyhedra*, III International Conference in Stochastic Geometry, Convex Bodies and Empirical Measures, Part II (Mazara del Vallo, 1999), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **65** (2000), no. 2, 167–177.

[V] Viro O. Ya., *Some integral calculus based on Euler characteristic*, Topology and Geometry-Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., Vol. 1346, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988, pp. 127–138.

С.-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН
E-mail: panina@iias.spb.su

Поступило 31 января 2002 г.