S. A. Stepanyants, Tauberian-type theorems for Cesàro summability methods, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 40–44

4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.
5. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem//Math. Ann. 1982. **261**. 43—46.
6. Данилов В .И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов//Изв. АН СССР. Матем. 1980. **44**, № 2. 465—477.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., 1981.
8. Horikawa E. Algebraic surfaces of general type with small c^2_1, I//Ann. Math. 1976. **104**. 357—387.
9. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., 1982.
10. Fujita T. On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II// //J. Math. Soc. Japan. 1981. **33**. 415—434.
11. Ando J. On extremal rays of higher dimensional varieties//Inv. Math. 1985. **81**. 347—357.

Поступила в редакцию
15.05.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.52.75

С. А. Степанянц

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

Изучение тауберовых условий, появившихся в конце прошлого века в работах Таубера (см., например, [1]), занимает важное место в теории рядов. В данной работе будет рассмотрено некоторое обобщение тауберовых условий, а именно $T_Q(P)$-условие (где Q и P — некоторые методы суммирования рядов).

Пусть для последовательностей действительных чисел введено некоторое условие R. Будем говорить, что условие является $T_Q(P)$-условием, если любой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R, будет суммируем и методом Q (здесь и в дальнейшем рассматриваются последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и соответствующие им ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Если Q — обычная сходимость, то $T_Q(P)$-условие есть просто тауберово условие для метода P. В качестве Q и P будем рассматривать методы суммирования Чезаро (C, α) с различными α; $\alpha \geqslant 0$. Определение и простейшие свойства методов Чезаро можно найти в [2, § 5.4, 5.5, 5.7] и [3, § 15].

Так как мы в основном ограничиваемся методами суммирования Чезаро целого порядка, то везде далее, если не оговорено противное, k — целое число, $k \geqslant 0$; α — действительное число, $\alpha \geqslant 0$.

Обозначения $a_n = O(c_n)$ и $a_n = o(c_n)$, где $\{c_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, будем понимать в обычном смысле, т. е. $a_n = O(c_n)$ тогда и только тогда, когда существует действительное положительное число M, такое, что $|a_n| \leqslant M\, c_n$ для всех n; $a_n = o(c_n)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что для любого $n > N$ верно неравенство $|a_n| \leqslant \varepsilon\, c_n$.

Далее будем неоднократно пользоваться следующим определением.

Последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ называется лакунарной по Адамару, если существует действительное число λ, такое, что $\lambda > 1$ и $n_{r+1}/n_r \geqslant \lambda$ для $r = 1, 2, 3 \ldots$.

Для последовательностей с неотрицательными членами приведем известное условие (D).

Последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ($c_n \geqslant 0$ для всех n) удовлетворяет условию (D) (запись $\{c_n\} \in (D)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует лакунарная по Адамару последовательность $\{n_r\}$, такая, что $\sum_{\nu=n_r+1}^{n_{r+1}-1} c_\nu < \varepsilon$ для всех r.

В работе [4] было доказано, что при $k'=0$, $k>k'$, требование $\{c_n\} \in (D)$ есть необходимое и достаточное условие того, что $a_n = O(c_n)$ является $T_{(C,k')}$ $((C, k))$-условием.

Но если это верно для любого $k \in \mathbf{N}$, то может возникнуть предположение, что требование $\{c_n\} \in (D)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы соотношение $a_n = O(c_n)$ было $T_{(C,k')}$ $((C, k))$-условием для любых целых k и k', таких, что $0<k'<k$. Причем, очевидно, что достаточность здесь действительно имеет место (так как если $-1 < \beta < \gamma$ и ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем к числу A методом (C, β), то ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем к числу A и методом (C, γ) [2, с. 131]).

Введем для последовательностей с неотрицательными членами условие (D, k).

Последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ (где $c_n \geqslant 0$ для всех n) удовлетворяет условию (D, k) (запись $\{c_n\} \in (D, k)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует лакунарная по Адамару последовательность $\{n_r\}$, такая, что

$$\sum_{\nu=n_r+1}^{n_{r+1}-1} c_\nu (n_{r+1} - \nu)^k < \varepsilon n_r^k \text{ для любого } r.$$

В новых обозначениях условие (D) — это в точности условие $(D, 0)$.

Укажем некоторые свойства введенных условий (D, k).

1. Последовательность $\{c_n\}$ удовлетворяет условию (D, k) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $q > 1$ и последовательность натуральных чисел $\{n_r\}$ $(r=1, 2, \ldots)$, такая, что $1 < q \leqslant n_{r+1}/n_r \leqslant q^3 < 2$ и $\sum_{\nu=n_r+1}^{n_{r+1}-1} c_\nu (n_{r+1} - \nu)^k < \varepsilon n_r^k$ для любого r.

2. Если $\{c_n\} \in (D, k)$, то $\{c_n\} \in (D, k')$, где $k' > k$.

3. Для любых k и k' целых, фиксированных, таких, что $k' > k \geqslant 0$, существует последовательность $\{c_n\}$, такая, что $c_n \geqslant 0$ для всех n и $\{c_n\} \in (D, k')$, но $\{c_n\} \notin (D, k)$.

Смысл введения условий (D, k) выяснится позднее в теоремах 1 и 2, а пока приведем несколько вспомогательных утверждений, используемых при доказательстве теорем.

Лемма 1. *Если* $\sum_{\nu=0}^{n} (n - \nu + 1) \ldots (n - \nu + r_1) a_\nu = o(n^p)$, *где* r_1 *и* p — *фиксированные числа, причем* $r_1 \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{R}$, *то* $\sum_{\nu=0}^{n} (n - \nu + 1)^{r_1} a_\nu = o(n^p)$.

Лемма 2. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *суммируется к нулю методом Чезаро* (C, p) *с некоторым целым* $p \geqslant 0$, *то* $\sum_{\nu=0}^{n} (n-\nu+1)^p a_\nu = o(n^p)$.

Лемма 3. *Пусть* n_r, i, k, l — *фиксированные натуральные числа* $(n_r \leqslant l < i < 2n_r)$ *и* R_1 — *некоторая константа* $(R_1 > 0)$. *Тогда, если* $\left|\sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{k+m} a_\nu\right| < R_1 \varepsilon (i-l)^m n_r^k$ *для всех* $m \in [t, k+1]$, $m \in \mathbf{Z}$, *где* t — *фиксированное целое число,* $t \in [-k+1, 1]$, *то*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{k+m} (l-\nu+1)^{m_1} a_\nu\right| < 2^{m_1} R_1 \varepsilon (i-l)^{m+m_1} n_r^k$$

для всех целых m, *таких, что* $m \in [t, k+1]$, *и для всех целых* m_1, *таких, что* $m_1 \in [0, k+1-m]$.

Лемма 4. *Пусть* n_r, i, k, l — *фиксированные натуральные числа, связанные соотношением* $n_r \leqslant l < i < 2 \cdot n_r$, *и* R_2 — *некоторая константа* $(R_2 > 0)$. *Тогда, если*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l} (l-\nu+1)^{k+m} a_\nu\right| < R_2 \varepsilon (i-l)^m n_r^k$$

для всех $m \in [t, k+1]$, $m \in \mathbf{Z}$, *где* t — *фиксированное целое число,* $t \in [-k+1, 1]$, *то*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l} (l-\nu+1)^{k+m} (i-\nu+1)^{m_1} a_\nu\right| < 2^{m_1} R_2 \varepsilon (i-l)^{m+m_1} \cdot n_r^k$$

для всех целых m, *таких, что* $m \in [t, k+1]$, *и для всех целых* m_1, *таких, что* $m_1 \in [0, k+1-m]$.

Введем следующее обозначение: $\binom{t}{r} = \Gamma(t+1)/(\Gamma(r+1)\,\Gamma(t-r+1))$.

В случае, если t и r — целые $(t \geqslant r \geqslant 0)$, будем иметь $\binom{t}{r} = t!/(r!\,(t-r)!)$.

Лемма 5. *Пусть* i, k_1, l — *фиксированные натуральные числа, причем* $i > l$. *Тогда справедливы равенства:*

$$(i-l)^{k_1} \sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{k_1} a_\nu = \binom{k_1}{0} \sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{2k_1} a_\nu -$$
$$-\binom{k_1}{1} \sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{2k_1-1} (l-\nu+1) a_\nu + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k_1} \binom{k_1}{k_1} \sum_{\nu=0}^{l} (i-\nu+1)^{k_1} (l-\nu+1)^{k_1} a_\nu, \tag{1}$$

$$(i-l)^{k_1} \sum_{\nu=0}^{l} (l-\nu+1)^{k_1} a_\nu = (-1)^{k_1} \binom{k_1}{0} \sum_{\nu=0}^{l} (l-\nu+1)^{2k_1} a_\nu +$$

$$+(-1)^{k_1-1}\binom{k_1}{1}\sum_{\nu=0}^{l}(l-\nu+1)^{2k_1-1}(i-\nu+1)a_\nu+\ldots$$

$$\ldots+\binom{k_1}{k_1}\sum_{\nu=0}^{l}(l-\nu+1)^{k_1}(i-\nu+1)^{k_1}a_\nu. \tag{2}$$

Лемма 6. *Пусть n_r, i, k, l — некоторые фиксированные целые числа, такие, что $0<n_r\leqslant l<i<2n_r$; $k\geqslant 0$ и R_3 — некоторая положительная константа. Тогда, если*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l}(i-\nu+1)^{k+m}a_\nu\right|<R_3\varepsilon(i-l)^m n_r^k$$

и

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l}(l-\nu+1)^{k+m}a_\nu\right|<R_3\varepsilon(i-l)^m n_r^k$$

для всех целых $m\in[t, k+1]$, где t — фиксированное целое число, принимающее значение в интервале $[-k+1, 1]$, то

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l}(i-\nu-1)^{k+t-1}a_\nu\right|<2^{4k+1}R_3\varepsilon(i-l)^{t-1}\,n_r^k$$

и

$$\left|\sum_{\nu=0}^{l}(l-\nu+1)^{k+t-1}a_\nu\right|<2^{4k+1}R_3\varepsilon(i-l)^{t-1}\,n_r^k.$$

Лемма 6 представляет собой уже нетривиальное утверждение, при доказательстве которого используются леммы 3—5. Лемма 2 следует из леммы 1. Леммы 1, 3—5 устанавливаются непосредственно. В доказательстве приводимой ниже теоремы используются явно лишь леммы 2 и 6.

Теорема 1. *Пусть k—фиксированное целое число ($k\geqslant 0$) и пусть $\{c_n\}\in(D, k)$. Тогда $a_n=O(c_n)$ является $T_{(C,k)}((C, k+1))$-условием.*

Из теоремы 1 сразу получается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть k — фиксированное целое число, α — любое действительное число, причем $\alpha>k\geqslant 0$, и пусть $\{c_n\}\in(D, k)$. Тогда $a_n=O(c_n)$ является $T_{(C,k)}((C, \alpha))$-условием.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что требование $\{c_n\}\in(D, 0)$ не является необходимым для того, чтобы $a_n=O(c_n)$ было $T_{(C,k)}((C, k'))$-условием (где k и k' — целые, $0<k<k'$), поскольку условие (D, k), как следует из свойств 2 и 3, слабее условия $(D, 0)$.

Приведем еще одно следствие теорем 1, 2. Но сначала введем следующее определение.

Последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ будем называть k-лакунарной или, что то же самое, удовлетворяющей условию (G, k) (запись $\{a_n\}\in(G, k)$), если существуют натуральное число C и лакунарная по Адамару последовательность $\{n_r\}$, такая, что $a_n=0$, если $n\notin(n_r-C, n_r]$, а в каждом из полуинтервалов $(n_r-C, n_r]$ может быть не более k ненулевых элементов последовательности $\{a_n\}$.

Для k-лакунарных последовательностей с использованием леммы 6 и теорем 1, 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть k — фиксированное целое число ($k \geqslant 1$) и пусть $\{a_n\}$ — k-лакунарная последовательность. Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируется к числу A некоторым методом Чезаро (C, α), где α — действительное число ($\alpha > k-1$), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем к числу A и методом $(C, k-1)$.*

Замечание. Для любого целого k ($k \geqslant 1$) существует $(k+1)$-лакунарная последовательность $\{a_n\}$, такая, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ суммируем методом (C, α) при любом $\alpha > k-1$, но ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ не является суммируемым методом $(C, k-1)$.

В терминах $T_Q(P)$-условий, которых мы придерживались ранее, теорема 3 утверждает, что требование $\{a_n\} \in (G, k)$ является $T_{(C,k-1)}((C, \alpha))$- условием при $\alpha > (k-1) \geqslant 0$.

Автор глубоко признателен научному руководителю чл.-корр. РАН П. Л. Ульянову и к. ф. м. н. Ю. Е. Куприкову за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tauber A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen//Monatsh. Math. und Phys. 1897. 8. 273—277.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
3. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1967.
4. Lorentz G. G. Tauberian theorems and tauberian conditions//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **63**, N 2. 226—234.

Поступила в редакцию
02.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 513.6

Р. А. Горак

О ФОРМУЛАХ НЕТЕРА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ КРЕМОНОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Введение. В классической работе [1, гл. 11] приведены формулы Нетера, описывающие некоторые численные характеристики трехмерных кремоновых преобразований. В настоящей статье представлено доказательство этих формул с современной точки зрения.

Вначале напомним определения. Пусть $T: S \to S'$ — преобразование Кремоны трехмерного проективного пространства, $S \simeq S' \simeq \mathbf{P}^3$. Множество неопределенности, или фундаментальное множество, преобразования T состоит из точек и кривых с учетом их кратностей. В [1] оно называется F-системой преобразования T.

Обозначим через p число независимых условий, накладываемых заданным F-множеством (набором точек и кривых с учетом кратнос-