Т. Г. СУКАЧЕВА

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается первая начально-краевая задача для системы уравнений Осколкова, моделирующей в линейном приближении динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта нулевого порядка. Данная задача исследуется в рамках теории линейных неоднородных уравнений соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее расширенного фазового пространства.

Ключевые слова: *расширенное фазовое пространство, уравнение соболевского типа, относительно p-ограниченный оператор, система уравнений Осколкова.*

Введение

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (\tilde{v}\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v \end{array} \right. \tag{1}$$

моделирует в линейном приближении течение вязкоупругой несжимаемой жидкости [1, 2]. Здесь $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$, $k = \overline{1,n}$, соответствует вектору скорости жидкости; функция $p = p\,(x,t)$ отвечает давлению жидкости; вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_k = f_k(x,t)$, характеризует объемные силы; а вектор-функция $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ соответствует стационарному решению исходной системы. (Поскольку таких стационарных решений может быть несколько [3], то мы не должны ограничиваться рассмотрением только одного — нулевого стационарного решения). Параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкие, а параметр $æ \in \mathbb{R}$ — упругие свойства жидкости. Обоснование системы (1) содержится в [4].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$. Рассмотрим задачу Коши—Дирихле

$$\begin{array}{ll} v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}; \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \tag{2}$$

для системы (1). В случае, когда $f = f(x)$, задача (1), (2), изучалась в [4]. Нашей целью является изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене $f = f(x,t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории линейных уравнений соболевского типа. Поэтому сначала рассматривается абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а затем задача (1), (2) изучается как конкретная интерпретация абстрактной задачи.

1. Абстрактная задача

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т. е. линеен и непрерывен) и $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен). Пусть интервал $I_a^b = (a,b)$ содержит точку 0 и вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для линейного операторного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{4}$$

Хорошо известно, что задача (3), (4) однозначно разрешима не для всех начальных данных u_0 из банахова пространства $\mathcal{U}$. Поэтому актуальным является описание множества корректности указанной задачи. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 1. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ назовем *расширенным фазовым пространством* уравнения (4), если:

(i) любое решение $u \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{U})$ уравнения (4) лежит в $\mathcal{B}^t$, т. е. $(u(t),t) \in \mathcal{B}^t$ для любого $t \in I_a^b$;

(ii) при любом $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4).

Замечание 1. Понятие расширенного фазового пространства обобщает понятие фазового пространства [4] на неавтономный случай, и представленные в этом параграфе результаты изложены в соответствии с цитируемой работой и работой [5].

Замечание 2. Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство» использовался термин «конфигурационное пространство» [6], что вносило некоторую путаницу в терминологию (см. по этому поводу [5]).

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда задача (3), (4) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{cases} R\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}f^0, & u^0(0) = u_0^0, \\ \dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}f^1, & u^1(0) = u_0^1, \end{cases} \tag{5}$$

где $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $u^k \in \mathcal{U}^k$, $f^k \in \mathcal{F}^k$, $k = 0,1$; $\mathcal{U}^k$, $(\mathcal{F}^k)$ — подпространства банахова пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$ такие, что $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$ $(\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 = \mathcal{F})$; M_k и L_k — сужения операторов M и L соответственно на подпространство $\mathcal{U}^k$. По построению $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$. Тогда вторая задача (5) имеет единственное решение $u^1 \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{U}^1)$, представимое в виде

$$u^1(t) = \exp(tS)u_0^1 + \int_0^t \exp((t-s)S)L_1^{-1}f^1(s)\,ds, \quad t \in I_a^b,$$

причем $\exp(tS) = U_1^t$ — полугруппа, являющаяся сужением разрешающей полугруппы U^t уравнения (4) на $\mathcal{U}^1$. Для рассмотрения первой задачи (5) предположим, что ∞ — устранимая особая точка либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M, т. е. оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$ [5]. Тогда, последовательно дифференцируя p раз первое уравнение (5) по t и умножая слева на оператор R, получим

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(t), \quad t \in I_a^b. \tag{6}$$

Отсюда видно, что первая задача (5) неразрешима, если

$$u_0^0 \neq -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(0).$$

С другой стороны, если (6) выполняется в нуле, то первая задача имеет единственное решение $u^0 \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{U}^0)$.

Из соотношения (6) следует, что расширенное фазовое пространство задачи (5), а следовательно, и задачи (3), (4) имеет вид

$$\mathcal{B}^t = \left\{ (u(t),t) : u(t) \in \mathrm{dom}M,\, (I-Q)\left(Mu(t) + \sum_{q=0}^{p} \tilde{R}^q \frac{d^q f}{dt^q}(t) \right) = 0,\ t \in I_a^b, \right\},$$

где $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1}(I-Q)$, Q — проектор на подпространство $\mathcal{F}^1$.

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$. Тогда при любом $f \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{F})$ и при любом u_0 таком, что $(u_0,0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение $u \in \mathcal{C}^\infty(I_a^b;\mathcal{U})$ задачи (3), (4), имеющее вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1}(I-Q)\frac{d^q f}{dt^q}(t) + U_1^t u_0^1 + \int_0^t U_1^{t-s} L^{-1} Q f(s)\, ds.$$

2. Конкретная интерпретация

Перед тем как приступить к исследованию задачи (1), (2), сделаем два замечания.

Сначала заметим, что уравнение несжимаемости $0 = \nabla \cdot v$ можно заменить уравнением

$$0 = \nabla(\nabla \cdot v). \tag{7}$$

Мы получили систему уравнений, эквивалентную исходной, так как по формуле Гаусса—Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} \sum v_k \cos(\overrightarrow{n}, x_k)\, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \overrightarrow{v}\, dV.$$

Учитывая,что $\nabla \cdot \overrightarrow{v} = \mathrm{Const}(t)$ (это вытекает из (7)) и $\overrightarrow{v}(x,t) = 0$ для всех $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$, получим $\mathrm{Const}(t) \equiv 0$. Далее, положим $\nabla p = \overrightarrow{p}$, так как во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [7]. Итак, рассмотрим задачу (2) для системы Осколкова, представленной в виде

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (\tilde{v}\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} - \overrightarrow{p} + f, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot v). \end{cases} \tag{8}$$

Задачу (2), (8) будем рассматривать как конкретную интерпретацию абстрактной задачи (3), (4). Поэтому редуцируем ее к задаче Коши для линейного неоднородного уравнения соболевского типа. Редукцию проведем, следуя [8]. Обозначим через $\mathbf{H}^2 = (W_2^2)^n$, $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}_2^1)^n$, $\mathbf{L} = (L^2)^n$ — соболевские пространства вектор-функций $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, определенных в области Ω. Рассмотрим линеал $\mathcal{L} = \{v \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v = 0\}$ вектор-функций, соленоидальных и финитных в области Ω. Замыкание $\mathcal{L}$ по норме $\mathbf{L}^2$ обозначим через $\mathbf{H}_\sigma$. $\mathbf{H}_\sigma$ — гильбертово пространство со скалярным произведением, унаследованным из $\mathbf{L}^2$. Кроме того, существует расщепление $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где $\mathbf{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbf{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{H}_\pi$ ортопроектор. Сужение проектора Π на пространство $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 \subset \mathbf{L}^2$ является непрерывным оператором $\Pi : \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 \to \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$. (Обсуждение этого круга вопросов см. в [9].) Представим пространство $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$ в виде прямой суммы $\mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2$, где $\mathbf{H}_\sigma^2 = \ker\Pi$, $\mathbf{H}_\pi^2 = \mathrm{im}\Pi$. Имеет место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbf{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения $\mathbf{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\pi$. Пространство $\mathbf{H}_\pi^2$ состоит из вектор-функций, равных нулю на $\partial\Omega$ и являющихся градиентами функций $\varphi \in W_2^3(\Omega)$.

Формулой $A = \nabla^2$ зададим линейный непрерывный оператор $A : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{L}^2$ с дискретным, отрицательным, конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Пусть $\tilde{u} \in \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2$. Тогда формулой

$$B : u \to \nu\nabla^2 u - (\tilde{u}\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)\tilde{u}$$

зададим линейный непрерывный оператор $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{L}^2$. Выражением $C : u \to \nabla(\nabla \cdot u)$ зададим линейный непрерывный оператор $C : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{L}^2$, причем $\mathrm{im}C = \mathbf{H}_\pi$, $\ker C = \mathbf{H}_\sigma^2$.

Положим $\Sigma = I - \Pi$ и обозначим через $\tilde{A}$ ($\tilde{B}$) сужение оператора ΣA (ΣB) на $\mathbf{H}_\sigma^2$. Оператор $\tilde{A} : \mathbf{H}_\sigma \to \mathbf{H}_\sigma$ линеен и замкнут, его спектр $\sigma(\tilde{A})$ дискретен, отрицателен, конечнократен, сгущается лишь на $-\infty$.

Положим $A_æ = I - æA$. Выберем параметр æ таким, чтобы $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cap \sigma(\tilde{A})$. Обозначим через $A_{æ\sigma}$ ($A_{æ\pi}$) сужение оператора $\Sigma A_æ$ ($\Pi A_æ$) на $\mathbf{H}_\sigma^2$ ($\mathbf{H}_\pi^2$). Тогда оператор $A_{æ\sigma} : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \to \mathbf{H}_\sigma$ ($A_{æ\pi} : \mathbf{H}_\pi \to {\mathbf{H}_\pi}^2$) — топлинейный изоморфизм.

Представим пространства: $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$. Положим

$$\mathcal{U} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p, \quad \mathcal{F} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p, \quad \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi. \tag{9}$$

Элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид: $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$, где $u_\sigma = \Sigma u$, $u_\pi = \Pi u$, $u_p = \overrightarrow{p}$. Элемент $f \in \mathcal{F}$ имеет аналогичный вид: $f = (f_\sigma, f_\pi, 0)$, где $f_\sigma = \Sigma f$, $f_\pi = \Pi f$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ определены в* (9). *Тогда*

(i) *формулой*

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma A_{æ}\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A_{æ}\Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

определяется линейный непрерывный оператор $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$. *Если* $æ^{-1} \notin \sigma(A)$, *то* $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p$, $\operatorname{im} L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\}$;

(ii) *если* $\tilde{u} \in \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi$, *то формулой*

$$M = \begin{pmatrix} \Sigma B\Sigma & \Sigma B\Pi & 0 \\ \Pi B\Sigma & \Pi B\Pi & -\Pi \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

определяется линейный непрерывный оператор $M : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$.

Редукция задачи (2), (8) к задаче Коши (3) для уравнения (4) закончена.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{F}$ *определены в* (9), *а* L *и* M *— в (10) и (11) соответственно,* $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$. *Тогда оператор* M $(L, 1)$*-ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 1 оператор L бирасщепляющий. Поэтому для доказательства леммы ввиду результатов [4] достаточно показать, что, во-первых, каждый вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один M-присоединенный вектор и, во-вторых, $M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

Пусть $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$, тогда в силу леммы 1 (i) вектор $\varphi = (0, 0, \varphi_p), \varphi_p \neq 0$. Отсюда $M\varphi = (0, -\varphi_p, 0) \in \operatorname{im} L$. Найдем такой $\psi \notin \ker L \setminus \{0\}$, что $L\psi = M\varphi$. Используя (10), получаем

$$A_{æ\sigma}\psi_\sigma = 0, \quad \Pi A_{æ}\psi_\pi = -\varphi_p. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что $\psi_\pi \neq 0$, так как $\varphi_p \neq 0$ по условию, а значит, $C\psi_\pi \neq 0$. Отсюда

$$M\psi = \begin{pmatrix} \Sigma(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) \\ \Pi(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) - \psi_p \\ C\psi_\pi \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} L.$$

Осталось доказать существование вектора $\psi \notin \ker L \setminus \{0\}$, удовлетворяющего системе (12). Для этого рассмотрим оператор

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A^{-1}_{æ\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A^{-1}_{æ\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{L}^{-1}L = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad L\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}),$$

то компоненты ψ_σ и ψ_π вектора ψ можно найти из равенств: $\psi_\sigma = 0, \psi_\pi = -A^{-1}_{æ\pi}\varphi_p$, а компоненту ψ_p можно выбрать произвольно.

Проверим второе условие: $M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \mathrm{im}L = \mathcal{F}$. Положим

$$\mathcal{U}^{00} = \mathrm{ker}L, \quad \mathrm{coim}L = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \{0\}.$$

Пользуясь оператором $\tilde{L}^{-1}$, получим $\mathcal{F}^{00} = M[\mathcal{U}^{00}] = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \subset \mathrm{im}L$,

$$\mathcal{U}^{01} = \tilde{L}^{-1}[\mathcal{F}^{00}] = \Sigma A^{-1}_{æ}[\mathbf{H}_\pi] \times \Pi A^{-1}_{æ\pi}[\mathbf{H}_\pi] \times \{0\}.$$

Поскольку $A_{æ\pi}[\mathbf{H}_\pi] = \mathbf{H}^2_\pi$, то

$$\mathcal{U}^{01} = \Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi}[\mathbf{H}^2_\pi] \times \mathbf{H}^2_\pi \times \{0\} \subset \mathrm{coim}L.$$

Отсюда

$$\mathcal{F}^{01} = M[\mathcal{U}^{01}] = \Sigma B(\Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} + I)[\mathbf{H}^2_\pi] \times \Pi B(\Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} + I)[\mathbf{H}^2_\pi] \times C[\mathbf{H}^2_\pi].$$

Имеем

$$\Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} + I = \Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} + A_{æ\pi} A^{-1}_{æ\pi} = (\Sigma A^{-1}_{æ} + \Pi A^{-1}_{æ}) A^{-1}_{æ\pi} = A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi},$$

поэтому $\mathcal{F}^{01} = \Sigma B A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} \tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi B A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} \tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p \not\subset \mathrm{im}L$, где оператор $\tilde{C}^{-1}$ — обратный к сужению $\tilde{C}$ оператора C на $\mathbf{H}^2_\pi$.

Далее, положим

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $P_1^{12} = \Sigma A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi}$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & Q_0^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} \\ 0 & 0 & Q_1^{23} \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix},$$

где $Q_1^{13} = \Sigma B A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} \tilde{C}^{-1}$, $Q_1^{23} = \Pi B A^{-1}_{æ} A^{-1}_{æ\pi} \tilde{C}^{-1}$, $Q_0^{23} = -Q_1^{23}$.

Нетрудно проверить, что операторы $P_k : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{0k}$, $Q_k : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{0k}$ при $k = 0, 1$ — проекторы, причем $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$, $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = 0$. Поэтому оператор $\tilde{Q} = I - Q_1$ тоже является проектором, причем $\mathrm{im}\tilde{Q} = \mathrm{im}L$, $\mathrm{ker}\tilde{Q} = \mathcal{F}^{01}$. Значит, $\mathcal{F}^{01} \oplus \mathrm{im}L = \mathcal{F}$. □

Для нашей задачи (2), (8) расширенное фазовое пространство $\mathcal{B}^t$ определяется равенством

$$(I - Q)\left(Mu + \tilde{R}^0 \frac{d^0 f}{dt^0} + \tilde{R}^1 \frac{d^1 f}{dt^1}\right) = 0$$

или $(I - Q)v = 0$, где

$$v = Mu + f(t) + \tilde{R}\frac{df(t)}{dt}, \quad \tilde{R} = L_0 M_0^{-1}(I - Q) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{F}^0),$$

а проектор $I - Q = Q_0 + Q_1$. Поскольку $Q_0Q_1 = Q_1Q_0 = 0$, то $(Q_0 + Q_1)v = 0$ тогда и только тогда, когда $(Q_0v = 0) \wedge (Q_1v = 0)$. Первое из этих равенств эквивалентно условию $u_\pi = 0$, а второе выполняется тогда и только тогда, когда

$$\Pi B u_\sigma + f_\pi(t) + \tilde{R}\frac{df_\pi(t)}{dt} = u_p.$$

Итак, расширенное фазовое пространство имеет вид

$$\mathcal{B}^t = \left\{(u,t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} : u_\pi = 0,\ u_p = \Pi B u_\sigma + f_\pi(t) + \tilde{R}\frac{df_\pi(t)}{dt}.\right\}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого $f \in \mathcal{F}$, $f = (f_\sigma, f_\pi, 0)$, и любого u_0 такого, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение задачи* (1), (2).

Автор выражает благодарность профессору Г. А. Свиридюку за внимание и интерес к данным исследованиям.

Список литературы

1. **Осколков, А. П.** *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта* / А. П. Осколков // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1988. — № 179. — С. 126—164.
2. **Осколков, А. П.** *Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева* / А. П. Осколков // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1991. — Т. 198. — С. 31—48.
3. **Осколков, А. П.** *Об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решений начально-краевых задач для уравнений движения вязкоупругих жидкостей* / А. П. Осколков // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1989. — Т. 171. — С. 174—181.
4. **Свиридюк, Г. А.** *К общей теории полугрупп операторов* / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47—74.
5. **Свиридюк, Г. А.** *Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред* / Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. Математика. — Вып. 8. — С. 5—33.
6. **Сукачева, Т. Г.** *Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей* / Т. Г. Сукачева // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Новгород. гос. ун-т.— Великий Новгород, 2004.
7. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986.
8. **Свиридюк, Г. А.** *Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* / Г. А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. — 1994. — № 1. — С. 62—70.
9. **Ладыженская, О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская — М. : Наука, 1970.