A. I. Saksonov, Ring of classes and character ring of a finite group,
Mat. Zametki, 1979, Volume 26, Issue 1, 3–14

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

КОЛЬЦО КЛАССОВ И КОЛЬЦО ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А. И. Саксонов

Многие факты, относящиеся к арифметике представлений конечных групп, можно истолковать как проявление двойственности между классами сопряженных элементов группы и ее неприводимыми комплексными характерами. Хотя точный смысл этой двойственности удается придать лишь в абелевом случае, для неабелевых групп она все же сохраняет по меньшей мере эвристическое значение. Типичным примером двойственности между классами и характерами является следующий известный факт: степени всех характеров из главного p-блока p-разрешимой группы [1]) G взаимно просты с p тогда и только тогда, когда взаимно просты с p порядки всех классов сопряженных элементов из главного p-отдела [2]) G.

Попытка установить границы этой двойственности приводит к изучению аналогии в строении кольца классов и кольца характеров группы над кольцами различных типов. В [1] сравнивались кольца классов и характеров p-группы над полем рациональных чисел. Далее естественно обратиться к основным кольцам, лучше учитывающим арифметику представлений групп. В настоящей заметке изучаются модулярные и целочисленные кольца классов

---

[1]) Все группы, рассматриваемые в заметке, предполагаются конечными.

[2]) По определению, два элемента группы G принадлежат одному p-отделу, если их p'-части сопряжены в G. p-отдел называется главным, если он содержит единицу группы.

и характеров. Полученные результаты, так же как и в [1], имеют характер «теорем не двойственности».

Используются стандартные обозначения теории групп. Если A — коммутативное кольцо с 1, то через $\mathrm{Cl}_A(G)$ обозначается A-алгебра классов сопряженных элементов группы G, через $\mathrm{Ch}_A(G)$ — A-алгебра ее комплексных характеров.

Пусть R — нетерово дискретно нормированное кольцо характеристики 0 с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$, алгебраически замкнутым полем частных K и полем вычетов k характеристики $p > 0$. Как хорошо известно, для RG-модулей справедливы теорема Крулля — Шмидта и теория вертексов Грина. Для R-алгебр классов и характеров p-нильпотентных групп имеет место следующая структурная

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — p-нильпотентная группа, $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_l$ — полная система представителей классов сопряженных p'-элементов G, D_i — силовская p-подгруппа группы $C_G(g_i)$. Тогда*

$$\text{(i)} \quad \mathrm{Cl}_R(G) \cong \oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Cl}_R(D_i),$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{Ch}_R(G) \cong \oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Ch}_R(D_i).$$

Доказательство. Начнем с доказательства части (ii) теоремы. Как установил Роккет [2], для произвольной группы H блоки B_i из разложения $\mathrm{Ch}_R(H) = \oplus \sum_{i=1}^{l} B_i$ взаимно однозначно соответствуют классам сопряженных p'-элементов группы H. При этом для каждого $i = 1, \ldots, l$ алгебра B_i изоморфна некоторой подалгебре B_i' алгебры $\mathrm{Ch}_R(D_i)$, где D_i — силовская p-подгруппа централизатора элемента i-го класса.

Пусть G — p-нильпотентная группа с p'-ядром N и силовской p-подгруппой P. Очевидно, алгебра $\mathrm{Cl}_R(N)$ является естественным RP-модулем. Так как для всякой p-группы Q транзитивный подстановочный RQ-модуль неразложим [3], а стабилизатор точки является вертексом этого модуля, то в силу теоремы Крулля — Шмидта множество стабилизаторов точек любого подстановочного RQ-модуля M определяется модулем M однозначно с точностью до сопряженности в Q. Сравнивая два R-базиса RP-модуля $\mathrm{Cl}_R(N)$ (из примитивных идемпотентов и из «классовых сумм»), выводим отсюда, что между множеством P-централизаторов примитивных идемпотентов алгебры $\mathrm{Cl}_R(N)$ (по одному идемпотенту из каждой P-орбиты) и множеством P-нормализаторов классов сопряженных элементов группы N (также по одному классу из каждой P-орбиты) можно установить 1-1 соответствие, при котором соответствующие подгруппы сопряжены в P. Заметим теперь, что p-группа автоморфизмов p'-группы, оставляющая на месте класс сопряженных элементов последней, оставляет на месте по крайней мере один элемент этого класса, ибо порядок класса взаимно прост с p и, следовательно, должна существовать хотя бы одна 1-элементная орбита. Это означает, что P-нормализатор класса группы N является одновременно P-централизатором элемента этого класса. Поэтому из существования указанного выше 1-1 соответствия вытекает возможность такой нумерации P-орбит примитивных идемпотентов алгебры $\mathrm{Cl}_R(N)$ (и, следовательно, неприводимых комплексных характеров группы N), при которой P-централизатор идемпотента (или, что то же, P-стабилизатор характера) из i-орбиты изоморфен подгруппе D_i из условия теоремы.

Всякий неприводимый комплексный характер группы G имеет вид $\chi = (\widehat{\theta} \otimes \psi)^G$, где $\widehat{\theta}$ — продолжение неприводимого характера θ подгруппы N на G-стабилизатор θ, а ψ — неприводимый характер P-стабилизатора θ, интерпретируемый как характер G-стабилизатора θ. Если θ пробегает представители P-орбит характеров N, а ψ при каждом фиксированном θ — характеры P-стабилизатора θ, то χ пробегает все неприводимые характеры G. Поэтому

$$\dim_R \mathrm{Ch}_R(G) = \sum\nolimits_{i=1}^{l} \dim_R \mathrm{Ch}_R(D_i). \tag{1}$$

Отсюда и из упомянутого результата Роккета следует, что для p-нильпотентной G R-подмодуль $\oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} B_i'$ имеет конечный индекс в $\oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Ch}_R(D_i)$. Покажем, что этот индекс равен 0, т. е. что $\mathrm{Ch}_R(G) \cong \oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Ch}_R(D_i)$.

Легко проверить, что для произвольной группы H квадрат дискриминанта алгебры $\mathrm{Ch}_R(H)$ равен $\prod\nolimits_{j=1}^{k} |C_H(h_j)|$, где h_j пробегает представители всех классов сопряженных элементов H. Сравним квадраты дискриминантов R-алгебр $\mathrm{Ch}_R(G)$ и $\oplus \sum \mathrm{Ch}_R(D_i)$. Ввиду равенства $\dim_R \mathrm{Cl}_R(G) = \sum_{i=1}^{l} \dim_R \mathrm{Cl}_R(D_i)$, эквивалентного (1), отображение множества классов группы D_i на множество классов группы G, принадлежащих i-му p-отделу, задаваемое посредством $x \mapsto g_i x$ $(x \in D_i)$, является биекцией. Имеем $C_G(g_i x) = C_G(g_i) \cap C_G(x)$, откуда

$$S_p(C_G(g_i x)) = D_i \cap C_G(x) = C_{D_i}(x)$$

и, следовательно, p-часть $|C_G(g_i x)|$ равна $|C_{D_i}(x)|$. Но это означает, что квадраты дискриминантов алгебр $\mathrm{Ch}_R(G)$ и $\oplus\sum \mathrm{Ch}_R(D_i)$ отличаются лишь множителем, являющимся единицей кольца R, т. е. что индекс $\oplus\sum B_i'$ в $\oplus\sum \mathrm{Ch}_R(D_i)$ равен 0. Тем самым часть (ii) теоремы доказана.

Перейдем к доказательству части (i) теоремы. Пусть e_i $(i = 1, \ldots, l)$ — блочные идемпотенты алгебры RG, так что $\mathrm{Cl}_R(G) = \oplus\sum_{i=1}^{l} \mathrm{Cl}_R(G)\, e_i$. Тогда $e_i = \sum_j e_{ij}$, где e_{ij} — примитивные идемпотенты алгебры $\mathrm{Cl}_R(N)$, а сумма распространена на их i-ю P-орбиту. Обозначим через T_{ij} G-централизатор идемпотента $e_{ij} \in RG$ и зафиксируем некоторое i в дальнейших рассмотрениях. В соответствии с изложенным выше можно считать, что силовские p-подгруппы групп T_{ij} для различных j изоморфны подгруппе D_i из условия теоремы. Покажем, что

$$\mathrm{Cl}_R(G)\, e_i \cong \mathrm{Cl}_R(T_{ij})\, e_{ij}.$$

Заметим прежде всего, что отображение $x \mapsto x e_{ij}$ задает эпиморфизм α алгебр: $\mathrm{Cl}_R(G) e_i \to \mathrm{Cl}_R(G) e_{ij}$. Так как из $y e_{ij} = 0$, $y \in \mathrm{Cl}_R(G)$ вытекает, что для любого $g \in G$ $y e_{ij}^{g} = (y e_{ij})^g = 0$ и поэтому также $y e_i = 0$, то $\mathrm{Ker}\,\alpha = 0$ и, следовательно, α — изоморфизм.

Далее, пусть K_g (соответственно K_g') обозначает сумму элементов G (соответственно T_{ij}), G-сопряженных с $g \in G$ (если в T_{ij} таких элементов нет, то, по определению, $K_g' = 0$). Тогда $K_g e_{ij} = K_g' e_{ij}$, ибо

$$K_g e_{ij} = K_g e_{ij} \cdot e_{ij} = e_{ij} \cdot K_g \cdot e_{ij} = \sum_t e_{ij} \cdot t \cdot e_{ij} = \sum_t t \cdot e_{ij}^{t} \cdot e_{ij}$$

и $e_{ij}^{t} \cdot e_{ij} \neq 0$ в том и только в том случае, если $t \in T_{ij}$. Тем самым определен мономорфизм β алгебр: $\mathrm{Cl}_R(G) e_{ij} \to \mathrm{Cl}_R(T_{ij})\, e_{ij}$, причем, как легко видеть, $\beta(\mathrm{Cl}_R(G) e_{ij})$—

чистый R-подмодуль в $\mathrm{Cl}_R(T_{ij})e_{ij}$ и поэтому, если

$$\dim_R(\mathrm{Cl}_R(G)\,e_{ij}) = \dim_R(\mathrm{Cl}_R(T_{ij})\,e_{ij}),$$

то β — изоморфизм.

Обозначим через θ_{ij} неприводимый комплексный характер группы N, соответствующий идемпотенту $e_{ij} \in \mathrm{Cl}_R(N)$. В алгебре $\mathrm{Cl}_K(T_{ij})\,e_{ij}$ допускает разложение $e_{ij} = u_{ij}^{(1)} + \ldots + u_{ij}^{(r)}$, где $u_{ij}^{(1)}, \ldots, u_{ij}^{(r)}$ — примитивные идемпотенты, соответствующие неприводимым составляющим индуцированного характера $\theta_{ij}^{T_{ij}}$. Каждая такая составляющая имеет вид $\hat{\theta}_{ij} \otimes \psi_s$, где $\hat{\theta}_{ij}$ — продолжение θ_{ij} на T_{ij}, а ψ_s — неприводимый характер T_{ij}, ядро которого содержит N. Поскольку ψ_s $(s = 1, \ldots, r)$, интерпретируемые как характеры группы $D_i \cong T_{ij}/N$, исчерпывают все неприводимые характеры D_i, то

$$\dim_R(\mathrm{Cl}_R(T_{ij})\,e_{ij}) = r = \dim_R(\mathrm{Cl}_R(D_i)). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) теперь вытекает, что

$$\dim_R(\mathrm{Cl}_R(G)\,e_{ij}) = \dim_R(\mathrm{Cl}_R(T_{ij})\,e_{ij}),$$

т. е. что β — изоморфизм.

Пусть, наконец, $\hat{D}_i$ — фиксированная силовская p-подгруппа группы T_{ij} для некоторого j. Обозначим через K_a (соответственно через $\hat{K}_a$) сумму элементов T_{ij} (соответственно $\hat{D}_i$), сопряженных в T_{ij} (соответственно в $\hat{D}_i$) с $a \in \hat{D}_i$. Имеем

$$K_a e_{ij} = \sum_{s=1}^{r} K_a u_{ij}^{(s)} = \sum_s \frac{|T_{ij}|\cdot\theta_{ij}(a)\cdot\psi_s(a)}{|C_{T_{ij}}(a)|\cdot\theta_{ij}(1)\cdot\psi_s(1)}\, u_{ij}^{(s)} =$$

$$= \frac{|N|\cdot|C_{\hat{D}_i}(a)|\cdot\theta_{ij}(a)}{|C_{T_{ij}}(a)|\cdot\theta_{ij}(1)}\cdot\sum_s \frac{|\hat{D}_i|\cdot\psi_s(a)}{|C_{\hat{D}_i}(a)|\cdot\psi_s(1)}\, u_{ij}^{(s)},$$

$$\hat{K}_a = \sum_{s=1}^{r} \hat{K}_a v^{(s)} = \sum_s \frac{|\hat{D}_i|\cdot\psi_s(a)}{|C_{\hat{D}_i}(a)|\cdot\psi_s(1)}\, v^{(s)},$$

где $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ — полная система примитивных идемпотентов алгебры $\mathrm{Cl}_K(\hat{D}_i)$. Поскольку $\theta_{ij}(a) \equiv \theta_{ij}(1) \pmod{\mathfrak{p}}$, $\theta_{ij}(1) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то $\dfrac{|N|\cdot|C_{\hat{D}_i}(a)|\cdot\theta_{ij}(a)}{|C_{T_{ij}}(a)|\cdot\theta_{ij}(1)} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Поэтому отображение

$$K_a e_{ij} \mapsto \frac{|N|\cdot|C_{\hat{D}_i}(a)|\cdot\theta_{ij}(a)}{|C_{T_{ij}}(a)|\cdot\theta_{ij}(1)}\,\hat{K}_a$$

задает изоморфизм R-линейной оболочки элементов $K_a e_{ij}$ из $\mathrm{Cl}_R\,(T_{ij})e_{ij}$ на алгебру $\mathrm{Cl}_R\,(\hat{D}_i)$. Ввиду равенства (2) элементы $K_a e_{ij}$ образуют базис алгебры $\mathrm{Cl}_R\,(T_{ij})e_{ij}$ и, следовательно,

$$\mathrm{Cl}_R\,(T_{ij})\,e_{ij} \cong \mathrm{Cl}_R\,(\hat{D}_i) \cong \mathrm{Cl}_R\,(D_i),$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие. *В условиях теоремы* 1

$$\text{(i)}\quad \mathrm{Cl}_k\,(G) \cong \oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Cl}_k\,(D_i),$$

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{Ch}_k\,(G) \cong \oplus \sum\nolimits_{i=1}^{l} \mathrm{Ch}_k\,(D_i).$$

Используя доказанную структурную теорему, можно установить критерий изоморфизма модулярных и локально целочисленных алгебр классов и характеров, который оказывается также критерием фробениусовости модулярной алгебры классов.

ЛЕММА 1. *Для любой группы G алгебра* $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ *фробениусова.*

Доказательство. Обозначим через $X_{\rho'}$ характер группы G, комплексно сопряженный с абсолютно неприводимым характером X_ρ. Пусть $\{\gamma_{\rho\sigma}^{\tau}\}$ — структурные константы алгебры $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ в базисе $\{X_\mu\}$. Поскольку

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\tau} = (X_\rho \cdot X_\sigma,\ X_\tau) = (X_\rho \cdot X_{\tau'},\ X_{\sigma'}) = \gamma_{\rho\tau'}^{\sigma'},$$

подстановка $X_\mu \to X_{\mu'}$ на элементах базиса индуцирует переход в регулярном представлении алгебры $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ к транспонированным матрицам. Так как ввиду коммутативности $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ ее правое и левое регулярные представления совпадают, то это означает, что регулярное представление $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ эквивалентно корегулярному, т. е. $\mathrm{Ch}_k\,(G)$ — фробениусова алгебра.

ЛЕММА 2. *Пусть P — p-группа. Алгебра* $\mathrm{Cl}_k\,(P)$ *является фробениусовой в том и только в том случае, если P абелева.*

Доказательство. Если P абелева, то $\mathrm{Cl}_k\,(P) \cong kP$ — фробениусова алгебра [4]. Пусть теперь P не-абелева. Тогда $\mathfrak{Z}(P)P' \neq P$, ибо $P' \subseteq \Phi(P)$ и, следовательно, P' недополняем в P. Как известно, радикал алгебры $\mathrm{Cl}_k(P)$ имеет коразмерность 1 и его k-базис состоит из элементов вида $z_i - 1$, где $z_i \in \mathfrak{Z}(P)$, и K_j, где K_j — «классовая сумма», соответствующая j-му нецентральному классу. Между тем аннулятор этого радикала содержит по крайней мере два линейно независимых элемента: $\bar{x} = \sum_{x \in P} x$ и $\bar{y} = \sum_{y \in \mathfrak{Z}(P)P'} y$.

Действительно, $\bar{x}$ аннулирует радикал алгебры kP и тем более радикал алгебры $\mathrm{Cl}_k(P)$. Покажем, что $\bar{y}$ также аннулирует радикал $\mathrm{Cl}_k(P)$. Если $z \in \mathfrak{Z}(P)$, то $z \cdot \bar{y} = z$, т. е. $(z-1)\bar{y} = 0$. Если же K — «классовая сумма» нецентрального класса, то $K = g(1 + v + w + \ldots)$, где $g \in P$, слагаемые в скобке суть элементы P', а их число кратно p. Так как для всякого $v \in P'$ $v\bar{y} = \bar{y}$, то $K\bar{y} = 0$ и, таким образом, $\bar{y}$ аннулирует весь радикал алгебры $\mathrm{Cl}_k(P)$.

Поскольку коразмерность радикала фробениусовой алгебры равна размерности его аннулятора, получаем, что для неабелевой P алгебра $\mathrm{Cl}_k(P)$ не является фробениусовой.

С л е д с т в и е. *Пусть P — p-группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathrm{Cl}_k(P) \cong \mathrm{Ch}_k(P)$,

(ii) $\mathrm{Cl}_R(P) \cong \mathrm{Ch}_R(P)$,

(iii) *P абелева.*

Необходимые и достаточные условия изоморфизма модулярных и локально целочисленных алгебр классов и характеров произвольной группы G устанавливает

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — произвольная (конечная) группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathrm{Cl}_R(G) \cong \mathrm{Ch}_R(G)$,

(ii) $\mathrm{Cl}_k(G) \cong \mathrm{Ch}_k(G)$,

(iii) $\mathrm{Cl}_k(G)$ — *фробениусова алгебра*,

(iv) *G — p-нильпотентная группа с абелевой силовской p-подгруппой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна, а (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из леммы 1. Докажем, что (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Очевидно, некоторое R-кратное каждого примитивного идемпотента алгебры $\mathrm{Cl}_K(G)$ содержится в $\mathrm{Cl}_R(G)$ и порождает одномерный идеал алгебры $\mathrm{Cl}_R(G)$, причем различным идемпотентам соответствуют различные идеалы. Таким образом, существует инъективное отображение множества примитивных идемпотентов $\mathrm{Cl}_K(G)$ и, значит, множества обыкновенных неприводимых характеров G в множество одномерных идеалов $\mathrm{Cl}_R(G)$. При естественном гомоморфизме $\mathrm{Cl}_R(G) \to \mathrm{Cl}_k(G)$ одномерные идеалы алгебры $\mathrm{Cl}_R(G)$, соответствующие линейно независимым по $\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}$ характерам G, отображаются в различные идеалы алгебры $\mathrm{Cl}_k(G)$. Так как k-ранг матрицы обыкновенных характеров G равен числу l p'-классов G, то $\mathrm{Cl}_k(G)$ обладает по крайней мере l различными одномерными идеалами. С другой стороны, число одномерных идеалов фробениусовой алгебры $\mathrm{Cl}_k(G)$ равно числу ее гомоморфизмов в поле k, т. е. числу p-блоков группы G. Отсюда вытекает, что число p-блоков G не меньше числа ее p'-классов, т. е. что G p-нильпотентна.

Так как свойство фробениусовости алгебры наследственно на ее блоки, то из теоремы 1 и леммы 2 следует, что силовская p-подгруппа группы G абелева. Тем самым справедливость (iii) $\Rightarrow$ (iv) доказана.

Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) непосредственно вытекает из теоремы 1 и того факта, что для абелевой группы D

$$\mathrm{Cl}_R(D) \cong RD \cong \mathrm{Ch}_R(D).$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Дальнейшие результаты, относящиеся к целочисленным и локально целочисленным алгебрам классов и характеров, допускают более сильные формулировки: оказывается, что изоморфизм рассматриваемых алгебр даже для различных групп возможен лишь в исключительных случаях.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* G *и* $\tilde{G}$ — *произвольные (конечные) группы, а* $D_1, \ldots, D_{l(G)}$ *(соответственно* $\tilde{D}_1, \ldots, \tilde{D}_{l(\tilde{G})}$ *для* $\tilde{G}$*) определены так же, как и в условии теоремы* 1. *Тогда следующие условия эквивалентности*:

(i) $\mathrm{Cl}_R(G) \cong \mathrm{Ch}_R(\tilde{G})$,

(ii) G *и* $\tilde{G}$ — *p-нильпотентные группы с абелевыми силовскими p-подгруппами такие, что* $l(G) = l(\tilde{G})$ *и* $D_i \cong \tilde{D}_i$ $(i = 1, \ldots, l(G))$.

Доказательство. Если $\mathrm{Cl}_R(G) \cong \mathrm{Ch}_R(\tilde{G})$, то и $\mathrm{Cl}_k(G) \cong \mathrm{Ch}_k(\tilde{G})$. Тогда по лемме 1 $\mathrm{Cl}_k(G)$ — фробениусова алгебра, откуда ввиду теоремы 2 следует, что G — p-нильпотентная группа с абелевой силовской p-подгруппой. По теореме 1 $\mathrm{Cl}_R(G) \cong \oplus \sum_i RD_i$ и, таким образом, $\mathrm{Ch}_R(\widetilde{G}) \cong \oplus \sum_i RD_i$. Учитывая неразложимость RD_i и цитированный выше результат Роккета [2], получаем, что $l(G) = l(\widetilde{G})$ и $RD_i \cong \widetilde{B}_i \subseteq \mathrm{Ch}_R(\widetilde{D}_i)$ для $i = 1, \ldots, l(G)$.

Как известно [2], существует 1-1 соответствие между блочными идемпотентами алгебры $\mathrm{Ch}_R(\widetilde{G})$ и классами сопряженных p'-элементов (и, следовательно, p-отделами) группы $\widetilde{G}$. При этом каждый блочный идемпотент алгебры $\mathrm{Ch}_R(\widetilde{G})$ разлагается в $\mathrm{Ch}_K(\widetilde{G})$ в сумму примитивных идемпотентов, соответствующих классам группы $\widetilde{G}$, входящим в один p-отдел: если e_i — единичный элемент $\widetilde{B}_i$, то $e_i = \sum_j e_{ij}$ и

$$e_{ij} = \frac{1}{|C_{\widetilde{G}}(\widetilde{g}_{ij})|} \sum\nolimits_s \overline{\widetilde{\chi}_s(\widetilde{g}_{ij})}\, \widetilde{\chi}_s, \tag{3}$$

где $\{\widetilde{\chi}_s\}$ — естественный базис в $\mathrm{Ch}_R(\widetilde{G})$, а $\widetilde{\chi}_s(\widetilde{g}_{ij})$ — значение s-го неприводимого характера $\widetilde{G}$ на представителе $\widetilde{g}_{ij}$ j-го класса сопряженных элементов, входящих в i-й p-отдел $\widetilde{G}$.

Пусть S — некоторая R-алгебра, u — идемпотент K-алгебры $K \otimes_R S$. Назовем S-высотой идемпотента u наименьшее натуральное h такое, что $p^h u \in S$. Из формулы (3) видно, что $\widetilde{B}_i$-высота идемпотента $e_{ij} = K \otimes_R \widetilde{B}_i$ равна дефекту j-го класса i-го p-отдела $\widetilde{G}$. С другой стороны, RD_i-высота любого из примитивных идемпотентов алгебры $KD_i = K \otimes_R RD_i$, очевидно, равна d_i, определяемому равенством $p^{d_i} = |D_i|$. Так как $\widetilde{B}_i \cong RD_i$ и, следовательно, $K \otimes_R \widetilde{B}_i \cong KD_i$, то, сравнивая высоты идемпотентов алгебр $K \otimes_R \widetilde{B}_i$ и KD_i, получаем, что $|D_i| = |\widetilde{D}_i|$. Отсюда вытекает, что

$$\dim_R \widetilde{B}_i = \dim_R RD_i = |\widetilde{D}_i|,$$

а это ввиду

$$\dim_R \widetilde{B}_i \leqslant \dim_R \mathrm{Ch}_R(\widetilde{D}_i) \leqslant |\widetilde{D}_i|$$

означает, что $\dim_R \mathrm{Ch}_R(\widetilde{D}_i) = |\widetilde{D}_i|$, т. е. что $\widetilde{D}_i$ абелева и $\widetilde{B}_i \subseteq R\widetilde{D}_i$.

Таким образом, $RD_i \cong \widetilde{B}_i \subseteq R\widetilde{D}_i$ и $|D_i| = |\widetilde{D}_i|$. Применяя к абелевой группе $\widetilde{D}_i$ [5, следствие 1.4], получаем, что $RD_i \cong R\widetilde{D}_i$, откуда $D_i \cong \widetilde{D}_i$ $(i = 1, \ldots, l(G))$.

Наконец, из изоморфизма $\widetilde{B}_1 \cong \mathrm{Ch}_R(\widetilde{D}_1)$ и результатов работы [2] следует, что ограничения характеров $\widetilde{G}$

на силовской p-подгруппе $\widetilde{D}_1$ группы $\widetilde{G}$ образуют полную систему функций на классах сопряженных элементов $\widetilde{D}_1$. Это означает, что любые два элемента $\widetilde{D}_1$, сопряженные в $\widetilde{G}$, сопряжены уже в $\widetilde{D}_1$, или, как говорят, $\widetilde{D}_1$ c-замкнута в $\widetilde{G}$. Но известно (см., например, [6, теорема 3.4]), что в этом случае $\widetilde{G}$ p-нильпотентна. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть G и $\widetilde{G}$ — произвольные (конечные) группы, I — область целостности характеристики* 0, *в которой необратим любой (рациональный) простой делитель числа $|G|$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Cl}_I(G) \cong \mathrm{Ch}_I(\widetilde{G})$,

(ii) *G и $\widetilde{G}$ — изоморфные абелевы группы.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

Пусть Φ — поле частных кольца I, Ψ — поле, содержащее Φ, а также $|G|$-е и $|\widetilde{G}|$-е корни из 1.

Очевидно,

$$\mathrm{Cl}_I(G) \cong \mathrm{Ch}_I(\widetilde{G}) \Rightarrow \mathrm{Cl}_\Phi(G) \cong \mathrm{Ch}_\Phi(\widetilde{G}) \Rightarrow \mathrm{Cl}_\Psi(G) \cong \mathrm{Ch}_\Psi(\widetilde{G}).$$

Поэтому естественные базисы алгебр $\mathrm{Cl}_\Psi(G)$ и $\mathrm{Ch}_\Psi(\widetilde{G})$ можно считать двумя базисами одной и той же Ψ-алгебры L. Пусть Ξ — поле, порожденное над $\mathbf{Q}$ $|G|$-ми и $|\widetilde{G}|$-ми корнями из 1, а J — кольцо его целых величин.

Используя известные формулы перехода от естественного базиса $\{K_t\}$ алгебры $\mathrm{Cl}_\Psi(G)$ к базису из примитивных идемпотентов и, далее, от базиса алгебры $\mathrm{Ch}_\Psi(\widetilde{G})$ из примитивных идемпотентов к ее естественному базису $\{\widetilde{\mathrm{X}}_r\}$, получаем, что в L

$$\widetilde{\mathrm{X}}_r = \sum_t a_{rt}K_t = \sum_s \widetilde{\chi}_r(s)\,(\chi_s(1)/|G|)\sum_t \overline{\chi_s(t)}\,K_t,$$

т. е. $a_{rt} = (1/|G|)\sum_s \widetilde{\chi}_r(s)\,\chi_s(1)\,\overline{\chi_s(t)}$, причем ввиду изоморфизма $\mathrm{Cl}_I(G) \cong \mathrm{Ch}_I(\widetilde{G})$ можно считать, что $a_{rt} \in I$ для всех r, t.

Хорошо известно, что действие автоморфизма Галуа на таблицу характеров конечной группы эквивалентно, с одной стороны, некоторой перестановке строк этой таблицы (характеров), а с другой — некоторой перестановке ее столбцов (классов сопряженных элементов). Пусть $\omega \in \mathrm{Gal}(\Xi/\mathbf{Q})$. Будем интерпретировать действие ω на таблицу характеров G как перестановку классов, а на таблицу характеров $\widetilde{G}$ — как перестановку характеров. Тогда

$$(a_{rt})^{\omega} = (1/|G|) \sum_s \widetilde{\chi}_{r_\omega}(s)\, \chi_s(1)\, \overline{\chi_s(t_\omega)} = a_{r_\omega t_\omega}.$$

Таким образом, вместе с a_{rt} кольцу I принадлежат все алгебраически сопряженные с a_{rt}. Так как $|G|a_{rt} \in J$, то к a_{rt} применима следующая

ЛЕММА 3 [5, лемма 1.1]. *Пусть α — алгебраическое число, n — такое натуральное, что $n\alpha$ — целое. Пусть, далее, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ составляют полный набор чисел, алгебраически сопряженных относительно поля* $\mathbf{Q}$. *Тогда либо α — целое, либо в кольце* $\mathbf{Z}[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$ *хотя бы один простой (рациональный) делитель числа n обратим.*

Тем самым $a_{rt} \in J$ при всех r, t и, следовательно, $\mathrm{Cl}_J(G) \cong \mathrm{Ch}_J(\widetilde{G})$.

Как хорошо известно, локальное кольцо $J_{\mathfrak{g}}$, соответствующее максимальному идеалу $\mathfrak{g}$ кольца J, является нетеровым дискретно нормированным кольцом. Очевидно, далее, что $\mathrm{Cl}_J(G) \cong \mathrm{Ch}_J(\widetilde{G})$ влечет

$$\mathrm{Cl}_{J_{\mathfrak{g}}}(G) \cong \mathrm{Ch}_{J_{\mathfrak{g}}}(\widetilde{G}).$$

Как легко проверить, в доказательстве теоремы 3 использовалась не алгебраическая замкнутость поля частных K, а лишь тот факт, что K является полем разложения для всех рассматриваемых групп. Поэтому, заставляя $J_{\mathfrak{g}}$ пробегать все локализации кольца J такие, что $\mathfrak{g} \mid |G| \cdot |\widetilde{G}|$, и применяя теорему 3, получаем, что для всех $p \mid |G| \cdot |\widetilde{G}|$ группы G и $\widetilde{G}$ p-нильпонентны, а их силовские p-подгруппы абелевы и изоморфны. Это означает, что G и $\widetilde{G}$ — изоморфные абелевы группы.

Отметим, что доказанная теорема усиливает теорему 4 работы [7].

Научно-исследовательский
институт автоматизации
управления и производства

Поступило
16.I.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Thompson J. G., A non-duality theorem for finite groups, J. Algebra, 14, № 1 (1970), 1—4.

[2] Roquette P., Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe, J. Reine Angew. Math., 190 (1952), 148—168.

[3] Green J. A., Blocks of modular representations, Math. Z., 79, № 2 (1962), 100—115.
[4] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., «Наука», 1969.
[5] Саксонов А. И., О групповых кольцах конечных групп, I, Publ. Math., 18 №№ 1—4 (1971), 187—209.
[6] Sah C.-H., Existence of normal complements and extension of characters in finite groups, Illinois J. Math., 6, № 2 (1962), 282—291.
[7] Саксонов А. И., О целочисленном кольце характеров конечной группы, Изв. АН БССР, № 3 (1966), 69—76.