А. А. Ильюшин, Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 6–14

А. А. Ильюшин проявляет постоянную заботу о развитии современной науки и о представительной роли в ней механико-математического факультета.

Поздравляем Алексея Антоновича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья и новых творческих успехов.

Коллектив механико-математического факультета

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.2:3

А. А. Ильюшин

НЕСИММЕТРИЯ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Сплошная среда как образ реальных материальных тел в твердом, жидком и газообразном состоянии в линейном трехмерном векторном метрическом пространстве R^3, присоединенном к евклидову E^3, сначала представляется множеством чисто геометрических элементов: точек, векторов, линейных подмножеств в виде отрезков прямых и кривых линий и других. Многообразие этих элементов приводит к одномерным множествам, двумерным — типа плоскостей и поверхностей, трехмерным — в виде различных фигур; на их основе строятся образы различных материальных элементов типа волокон, физических площадок, элементарных объемов. Материализация образов требует введения в пространстве R^3 различных размерных констант и функций поля, т. е. других векторных и скалярных функций координаты $\bar{x}$.

Геометрические многообразия и геометрические движения, т. е. параллельные переносы, совмещения и повороты фигур, находящихся в различных местах R^3, являются топологическими, используются при доказательстве свойств геометрических фигур, их сравнении (больше, меньше, равны). Эти движения, например перемещения, при малых деформациях не требуют введения физического времени, так как при этом необходим только параметр λ, указывающий порядковый номер события (первое, второе и т. д.).

Движение сплошной среды рассматривается как движение множества материальных элементов в R^3, т. е. изменение со временем t в пространстве $R^3=R_э$ эйлеровых координат элементов $\bar{x}(\lambda, \bar{\mathrm{x}})$, где $\bar{\mathrm{x}}$ — лагранжева координата или векторный номер частицы, а параметр $\lambda=t$ одинаков для всех $\bar{\mathrm{x}}$; при этом однозначной является не только последовательность событий в частицах, но и их одновременность.

Эйлеровы декартовы координаты материальных точек $\bar{x}(\bar{\mathrm{x}}, t)$ определяются начальным условием $\bar{x}(t_0)=\bar{\mathrm{x}}$ и заданным для любого t полем вектора скорости $\bar{v}(\bar{x}, t)$, т. е. находятся из решения задачи Коши интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для $\bar{x}=\bar{x}(\bar{\mathrm{x}}, t)$, $t>t_0$

$$\dot{\bar{x}}\equiv \frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{v}(\bar{x}, t, a) \tag{1}$$

при начальном условии $t=t_0$:

$$d\bar{x}=Ad\bar{\mathrm{x}}, \ \det A=1, \ \bar{x}=\bar{\mathrm{x}}. \tag{2}$$

Вектором перемещения точки среды называется равный нулю в начальный момент t_0 вектор

$$\bar{u}(\bar{\mathrm{x}}, t)=\bar{x}-\bar{\mathrm{x}}\equiv U(\bar{x}, t, a).$$

Существенная трудность определения вектора $\bar{x}(\bar{\mathrm{x}}, t)$ состоит в эффективном задании поля вектора скорости (1), содержащего некоторые постоянные параметры a, и решении задачи Коши (1), (2). По вопросам устойчивости решения системы (1), (2) относительно параметров a известны классические результаты А. Н. Колмогорова, значение которых для МСС трудно переоценить (теория изотропной турбулентности, исследования симметрии кристаллов в теории упругости), и работы его школы. Но остается неясным, следует ли функцию $\bar{v}(\bar{x}, t, a)$ при $t \geqslant t_0$ считать заданной, детерминированной или случайной.

Такие вопросы возникают при первой попытке перехода от эйлеровой системы координат к лагранжевой, т. е. когда мы еще не касаемся замкнутой системы уравнений МСС. Тем не менее технологические задачи теории пластичности и гидродинамики реальной вязкой жидкости чаще всего ставятся и решаются в эйлеровом пространстве с привлечением эйлеровых и лагранжевых координат $(\bar{x}, \bar{\mathrm{x}})$.

Эти трудности теории деформации в МСС обходятся основным утверждением о непрерывности, а точнее, предположением о взаимно однозначном соответствии постановок задач в эйлеровых и лагранжевых координатах. Сформулируем основное утверждение о непрерывности в теории деформации.

Утверждение 1. *Векторы скорости $\bar{v}(\bar{x}, t, a)$ и перемещения $\bar{u}(\bar{\mathrm{x}}, t)=U(\bar{x}, t, a)$ являются непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями $\bar{\mathrm{x}}$ и $\bar{x}$, т. е. почти всюду в эйлеровом пространстве $R_э$ существуют лагранжев репер $\bar{э}_i=\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial \mathrm{x}^i}$ и декартовы векторы дисторсии $\bar{D}(u)$ и $\bar{D}(v)$, иначе тензоры-аффиноры или тривекторы $(i=1, 2, 3)$*

$$\bar{D}(u)=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial \mathrm{x}^j}=\left(\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial \mathrm{x}^j}\right); \ \bar{D}(v)=\frac{\partial\bar{v}^i}{\partial x^j}=\left(\frac{\partial\bar{v}^i}{\partial x^j}\right) \quad (i, j=1, 2, 3).$$

Существенно, что все девять компонент тензора (тривектора) дисторсии являются первыми производными (линейными операторами от $\bar{u}$ и $\bar{v}$ по $\bar{\mathrm{x}}$ и $\bar{x}$). Тензоры дисторсии представляются суммами симметричных и кососимметричных частей:

$$\bar{D}(u)=\bar{e}(u)+\bar{\varphi}(u),$$
$$\bar{D}(v)=\bar{v}(v)+\bar{\omega}(v). \tag{3}$$

Тензоры $\bar{e}(u)$ и $\bar{v}(v)$ есть симметрии $\bar{D}(u)$, $\bar{D}(v)$:

$$2\bar{e}(u)=\bar{D}(u)+\bar{D}^{\mathsf{T}}(u), \ 2\bar{v}(v)=\bar{D}(v)+\bar{D}^{\mathsf{T}}(v),$$

а $\bar{\varphi}(u)$, $\bar{\omega}(v)$ — антисимметрии (при малых деформациях $\bar{\omega}=\dot{\bar{\varphi}}$):

$$2\bar{\varphi}(u)=\bar{D}(u)-\bar{D}^{\mathsf{T}}(u), \ 2\bar{\omega}(v)=\bar{D}(v)-\bar{D}^{\mathsf{T}}(v).$$

Симметричный тензор конечной деформации $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$ представляется квадратичной формой:

$$2\varepsilon=2e+D(u)^{\mathsf{T}} D(u).$$

Очевидно, что в деформирующейся сплошной среде ни в какой точке $\bar{x}=\bar{x}(\bar{\mathrm{x}}, t)$, $\mathrm{x}=\mathrm{const}$, не существует тройки вмороженных ортогональных физических волокон, т. е. местной физической ортогональной декартовой системы координат. Следовательно, поворот окрестности физической точки среды (вектор $\bar{\varphi}$) нельзя вполне строго рассматривать как поворот абсолютно твердого тела, а только как величину, характеризующую некоторое статистическое пространственно-временное свойство ориентации.

Тензор конечной деформации ε однозначно выражается через дисторсию $D(u)$. Но он доопределен условием, по которому его компоненты имеют геометрический смысл удлинений и сдвигов координатных физических волокон. Однако в таком случае он не является обобщенным перемещением для тензора напряжения в смысле Лагранжа, т. е. в выражении работы внутренних сил.

Взаимность основных понятий и определений МСС — тензора внутренних напряжений $\tilde{S}$ и тензора деформаций ε — как соответствующих в смысле Лагранжа обобщенных сил и обобщенных перемещений отражается в фундаментальном определении работы внутренних сил на бесконечно малом перемещении $\bar{v}(\bar{x}, t)\delta t$. Объемная плотность работы внутренних сил δW получается при вычислении работы всех внешних массовых (по Даламберу) и поверхностных сил в произвольном объеме ΔV на возможном перемещении центра масс частицы $\bar{v}(\bar{x}, t)\delta t$:

$$\int\limits_{\Delta V} \rho(\bar{F}-\bar{w})\,\bar{v}\delta t dV+\int\limits_{\Sigma}(\bar{P}^{\nu}\bar{v})\,\delta t d\Sigma\equiv\int\limits_{\Delta V}\delta W dV=\int\limits_{\Delta V}\sigma^{ij}\nabla_j v_i\delta t dV,$$

$$\delta W=\sigma^{ij}\nabla_j v_i\delta t\equiv\sigma^{ij}D_{ij}\delta t. \tag{4}$$

Как видно, взаимными термодинамическими (обобщенными силами и перемещениями) являются несимметричный тензор напряжений Коши и несимметричный тензор дисторсий скорости D_{ij}. Следует обратить внимание на то, что обычно используемое выражение работы

$$\delta W=\sigma^{ij}v_{ij}\delta t=\frac{1}{2}\sigma^{ij}(\nabla_j v_i+\nabla_i v_j)\,\delta t=\tilde{S}\delta\tilde{\varepsilon}$$

верно только для симметричного тензора напряжений $\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$ и отличается от точного выражения (4) на величину

$$\frac{1}{4}(\sigma^{ij}-\sigma^{ji})(\nabla_j v_i-\nabla_i v_j)\,\delta t.$$

Итак, можно сказать, что все виды деформации: дисторсии $D(u)$ и $D(v)$, малые деформации $e(e_{ij}=e_{ji})$ и повороты $\varphi(\varphi_{ij}=-\varphi_{ji})$, конечные деформации $\varepsilon(\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji})$ — порождаются первыми производными непрерывно дифференцируемых векторов перемещения и скорости ($\bar{u}$ и $\bar{v}$). В соответствии с этим сформулируем

Утверждение 2. *Действующие в среде внешние силы: объемная $\rho\bar{F}$ и поверхностная $\bar{P}^{\nu}$ — порождают в ней внутренние силы — тензор (тривектор) напряжения $\tilde{S}=(\bar{S}^1, \bar{S}^2, \bar{S}^3)$.*

Объемная плотность полной массовой силы равна

$$\rho\bar{F}_{\text{полн}}=\rho(\bar{F}-\bar{w}).$$

Работы основателей МСС: Эйлера, Коши, Лагранжа, Даламбера, Навье, Стокса и других известных математиков и механиков, — по существу, содержат

Утверждение. *Всякий непрерывно дифференцируемый в R^3 вектор $\bar{\Phi}$ в области движения среды $G\in R^3$ с границей $\partial G\in R^3$ может быть представлен в виде дивергенции соответствующего тривектора*

$(\bar{S}^1, \bar{S}^2, \bar{S}^3)$ *или несимметричного тензора второго ранга* $\tilde{S}$, *т. е. компоненты* $\bar{\Phi}$ *в декартовых координатах суть дивергенции соответствующих векторов*

$$\bar{\Phi} = \sum_{\alpha} \Phi_\alpha \bar{e}^\alpha = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Phi_\alpha \bar{e}_\beta \times \bar{e}_\gamma \equiv \operatorname{div} \tilde{S}. \qquad (5)$$

Поскольку в общем случае несимметричный тривектор $\bar{S}^\alpha$ выражается через компоненты тензора $\tilde{S}$, то получаем

$$\bar{S}^\alpha = S^{\alpha i} \bar{э}_i \equiv \sum_{i=1}^{3} \sigma^{\alpha i} \bar{e}_i, \quad \Phi_\alpha = \operatorname{div} \bar{S}^\alpha = \nabla_i S^{\alpha i}.$$

Таким образом, вектор $\bar{\Phi}$ можно записать в виде

$$\bar{\Phi} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \operatorname{div} \bar{S}^\alpha \bar{э}_\beta \times \bar{э}_\gamma.$$

Представление (5), которое назовем формулой ЭКЛ, по существу вытекает из классических работ, хотя почему-то в таком виде в математических справочниках не встречается. В работах по механике и физике она дает прямой повод ставить в соответствие векторам ньютоновских сил тензоры внутренних напряжений. Применительно к закону сохранения импульсов в МСС (уравнениям движения) $\bar{F}_{\text{полн}} = 0$ формула ЭКЛ позволяет считать тензор $\tilde{S}$ именно тензором внутренних напряжений по определению:

$$\operatorname{div} \tilde{S} = \rho(\bar{F} - \bar{w}). \qquad (6)$$

Если проинтегрировать это уравнение по объему области G и считать, что на границе ∂G сила $\bar{P}^\nu$ есть плотность вектора внешней силы, рассчитанная на единицу площади, то получим известную формулу связи между компонентами тензора напряжения, вектором $\bar{P}^\nu$ и вектором нормали к поверхности $\bar{\nu}$

$$\bar{P}^\nu = \tilde{S} \cdot \bar{\nu}, \qquad (7)$$

которую часто используют в виде определения напряжения $\tilde{S}$ *.

Если обе части равенства (6) векторно умножить на $\bar{x}$ и проинтегрировать по малому объему ΔV области G, получим равенство, которое называется законом сохранения момента количества движения. При этом необходимо иметь в виду единственную в механике трактовку распределенного по объему и поверхности момента внешних сил как предела момента пары сил, когда расстояние между ними стремится к нулю, а силы — к бесконечности.

Вычислим на основе (6) момент частицы ΔV:

$$\int_{\Delta V} \bar{x} \times \operatorname{div} \tilde{S} dV = \int_{\Delta V} \rho \bar{x} \times (\bar{F} - \bar{w})\, dV \equiv \bar{m} \Delta V. \qquad (8)$$

Рассматривая частицу объема ΔV как косоугольный параллелепипед с ребрами $\bar{э}_1 dx^1$, $\bar{э}_2 dx^2$, $\bar{э}_3 dx^3$ и вычисляя интеграл от $\bar{x} \times \operatorname{div} \tilde{S}_i$ как предел суммы по всем шести граням частицы, получим (см. [1, с. 97])

$$\int_{\Delta V} \bar{x} \times \operatorname{div} \tilde{S} dV = \int_{\Delta V} S^{ij} \bar{э}_j \times \bar{э}_i dV \equiv \bar{m}_\sigma \Delta V,$$

$$\bar{m}_\sigma \equiv S^{ij} \bar{э}_j \times \bar{э}_i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} m_{\alpha\beta} \bar{э}^\gamma \sqrt{g}, \quad m_{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - S^{\beta\alpha}.$$

* Причина и следствие поменялись местами.

Согласно [1, с. 97] интеграл левой части (8) при $\Delta V \to 0$ равен $\Delta V \overline{m}_\sigma$, где объемная плотность момента внутренних напряжений ввиду (7) равна

$$\overline{m}_\sigma = S^{ij} \overline{\text{э}}_j \times \overline{\text{э}}_i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (S^{\alpha\beta} - S^{\beta\alpha}) \overline{\text{э}}^{\gamma} \sqrt{g},$$

и уравнение сохранения моментов имеет вид

$$\overline{m}_{\text{полн}} \Delta V \equiv \int_{\Delta V} \rho \overline{x} \times (\overline{F} - \overline{w})\, dV = \overline{m}_\sigma \Delta V. \qquad (9)$$

Из уравнения сохранения моментов следует известный вывод о симметрии тензора напряжений при $\overline{m}_{\text{полн}} = 0 : S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$.

Но мы рассматриваем неоднородную сплошную среду сложной геометрической и физической структуры. Следовательно, как тело в целом, так и любые окрестности двух физических точек являются евклидовыми пространствами со своими физически ориентированными ортогональными декартовыми системами координат. Сложность геометрического расположения соседних окрестностей неоднородной структуры (различие материальных объектов в восьми октантах) не позволяет представить себе простого совместного их движения без сложных контактных (парных, тройных и т. п.) взаимодействий отдельных частей. Поэтому естественно предположить возникновение дисторсийного момента объемной плотности $\overline{m}_D$ как результата многих парных контактных взаимодействий. Эффекты таких взаимодействий имеют чисто термомеханический, кинематический и геометрический характер и никак не связаны с наличием или отсутствием электромагнитного поля. Отсюда выводим новое утверждение (точнее гипотезу).

Утверждение 3. *Условие безмоментности внешних объемных $\rho\overline{F}$ и поверхностных $\overline{P}^\nu$ сил имеет вид*

$$\operatorname{rot}(\rho\overline{F}) = 0, \ \overline{x} \in G; \ \operatorname{rot}\overline{P}^\nu = 0, \ \overline{x} \in \partial G.$$

Несимметрия тензора дисторсии $\tilde{D}(v)$ приводит к сложной 9-параметрической кинематике движения окрестностей двух соседних точек M и $M'(\overline{x}+d\overline{x})$.

Контактные взаимодействия могут порождать пары сил, статически эквивалентные внутренним дисторсийным моментам объемной плотности $\overline{m}_D$. При отсутствии других внешних моментов из уравнения моментов (9) при $\overline{m}_{\text{полн}} = \overline{m}_D$ и находим тензор несимметрии

$$\overline{m}_\sigma = \overline{m}_D \equiv \overline{m}^t_D (\tilde{D}(\tau)). \qquad (10)$$

Функционал объемной (или массовой) плотности дисторсийных внутренних моментов $\overline{m}^t_D (\tilde{D}(\tau))$ для каждого материала (вещества) находится из специальных дисторсийных моментных опытов, которые и решают вопрос симметрии тензора $\tilde{S}$, поскольку они утверждают равенство (10). Необходимым и достаточным условием симметрии теории является тождество $\overline{m}^t_D \equiv 0$.

Альтернативой экспериментальному определению функционала дисторсийных моментов является его нахождение из основного термодинамического функционального уравнения, в котором должны быть рассмотрены различные возможные представления основного функционала $\overline{V}^t$ на множествах различных возможных процессов. Существенным уточнением основного термодинамического тождества [1—3] является замена процесса, определяемого множеством функций конечных деформаций, на процесс, определяемый множеством дисторсий.

Закон сохранения энергии и баланса энтропии вместе с постулатом макроскопической определимости приводит к фундаментальному термодинамическому тождеству, которое имеет вид [1—3]

$$\dot{\bar{V}}^t(\pi(\tau)) = r^t(\pi(\tau))\,\dot{\pi}(t), \tag{11}$$

здесь $\pi(t)$ — десятимерное множество заданных функций времени — называется процессом и представляет десятимерный вектор энтропии и дисторсии:

$$\pi(t) = (\eta(t),\ D(u(t))) \equiv (\eta(t),\ D(t)).$$

Функционал $r^t(\pi(\tau))$ называется откликом или реакцией системы на процесс и представляет десятимерный вектор температуры и напряжений:

$$r^t(\pi(\tau)) = r(t) = (T(t),\ \widetilde{S}(t)).$$

Если $\bar{V}^t(\pi(\tau))$ — заданный априори скалярный функционал процесса $\pi(\tau)$, то (11) является сложным функциональным уравнением, которому должен удовлетворять функционал реакции $r^t(\pi)$, и потому он из него находится. Как выбрать функционал $\bar{V}^t(\pi)$ и в какой норме существует решение уравнения (11) в виде (10) — фундаментальный вопрос теории.

В случае обратимых процессов $\bar{V}^t(\pi)$ представляет просто функцию процесса $\pi(t)$, и поэтому из (11) получаем уравнение для реакции

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \pi(t)} - r^t(\pi)\right]\dot{\pi}(t) = 0,$$

т. е. когда V^t — квадратичная функция $\pi(t)$, а следовательно, r^t — линейная функция $\pi(t)$, имеем закон термоупругости [2]

$$r^t(\pi) = \frac{\partial V}{\partial \pi(t)}.$$

Если движение среды среди допустимых имеет и вихревое, т. е. функционал (11) зависит от вихря, например аддитивно содержит квадрат $\bar{\omega} \sim \bar{\nabla} \times \bar{V}$, то из (11) получится дисторсийный момент (10), пропорциональный ω.

Множество дисторсий (3) в значительной мере упорядоченное: содержит парные компоненты, следовательно, симметричные и билинейные кососимметричные коммутаторы, векторы и тензоры, образующие симметричные тензоры второго ранга; скалярные и векторные произведения приводят к контравариантным метрическим тензорам и деформациям.

Скалярный функционал $\dot{V}^t(\pi) = r^t\dot{\pi}$ представляет собой мощность работы всех обобщенных внутренних сил r^t, включая работу напряжений σ на дисторсиях и температуры T на скорости энтропии. Сложность математической структуры функционала $V^t(\pi)$ коррелирует со сложной физической структурой среды в макроскопически малых объемах.

В нелинейной теории упругости и пластичности функционал $\bar{V}^t(\pi(\tau))$ можно аппроксимировать конечным полиномом по дисторсиям и энтропии и тогда в выражение основного термодинамического функционала $V^t = V(t)$ будут входить всевозможные произведения дисторсий, т. е. коммутаторы компонент векторов дисторсий.

Для упруговязких жидкостей и композитов со сложной микроструктурой функционал V^t должен отражать возможные симметричные и кососимметричные композиции элементов процесса π. Следовательно, кроме коммутаторов самих дисторсий могут входить интегралы по времени от произведений скоростей тривекторов дисторсий с некоторыми ядрами. Простейшие варианты парных векторных произведений, подобно тому как это происходит в симметричной теории термовязкоупругости, будут приводить к дисторсийным вариантам термовязкоупругости.

В вышедшей недавно книге В. В. Козлова [4], которая, как видно из вышеизложенного, представляет безусловный интерес для специалистов по несимметричной теории упругости, дается развитие вопросов симметрии в динамике гамильтоновых систем, теории коммутаторов, включая скобки Пуассона, и дан список новой литературы. Полагаю, что в развитии несимметричной теории упругости и гидродинамики кососимметричные билинейные и другие нелинейные коммутаторы, построенные на дисторсиях, будут играть существенную роль как возможные комплексные аргументы основного скалярного функционала $V^t(D(\tau))$, при которых возникают новые типы определяющих соотношений. Антисимметричный или кососимметричный билинейный коммутатор дисторсий приводит к обобщению понятия тензора поворота $\bar{\varphi}$.

Декартову систему координат в окрестности точки $M(\bar{x})$ называем γ-ориентированной, если она физически ориентирована относительно вектора $\bar{э}_\gamma$ лагранжева репера $(\bar{э}_\alpha, \bar{э}_\beta, \bar{э}_\gamma)$ в данный момент t; углы Эйлера ее декартова репера различны для каждого из трех $(\bar{э}_\alpha, \bar{э}_\beta, \bar{э}_\gamma)$, и поэтому строится условная декартова система, которая наиболее полно следит за движением окрестности M, т. е. углы отклоняются от средних в допустимых пределах. Внутри малых окрестностей соседних точек $M(\bar{x})$ и $M'(\bar{x}+d\bar{x})$ движение может приводить к заметным (конечным) изменениям дисторсий.

Конечным приращением угла $\varphi(D)$ на пути $\Delta\bar{x}$ назовем

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{D}}\Delta D = \frac{\partial\varphi}{\partial D_j^i}\Delta D_j^i. \tag{12}$$

Здесь $\Delta\varphi$, $\partial\varphi/\partial D_j{}^i$ понимаются как средние значения наблюдаемых в опыте величин. Формула (12) относится ко всем величинам, связанным с физически ориентированными реперами. Принятая ранее ориентация декартовой системы на лагранжев репер $\bar{э}_i$ может быть заменена другими ориентациями, например по осям анизотропии или осям симметрии зернистой структуры. Формула (12) сохранится для различных функций дисторсий $\bar{D}$, $\bar{m}_\sigma$, $\bar{m}_D$ и др. Существенным в нелинейной теории может быть билинейный коммутатор, записанный в виде векторного произведения пар из тривекторов дисторсий перемещений $\bar{D}^\alpha\times\bar{D}^\beta$.

Если вектор $\bar{u}$, кроме первой, имеет еще высшие производные, то в (12) приращение дисторсии ΔD представляет линейную функцию $\bar{D}=\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$, т. е. высших производных, которые в моментной теории упругости называются кривизнами, искривлениями, дисторсиями высшего порядка и т. п.:

$$\Delta\bar{D} = \left[\bar{D}(\bar{u}) + \frac{\partial\bar{D}}{\partial\bar{x}'}d\bar{x}' + \ldots\right]d\bar{x} \equiv \bar{L}(\bar{u})\,d\bar{x}.$$

В теории деформации сложных структур нецелесообразно вводить сильно дифференцируемые и очень гладкие функции в малых линейных масштабах структуры. Поскольку теория деформации представляет теорию дисторсий, с нашей точки зрения для сложных и неоднородных структур существование непрерывных первых производных по координатам вектора перемещения и скорости представляется сильным утверждением, достаточным для введения феноменологических понятий деформации.

Контравариантный репер $\bar{э}^{\alpha}$ основного лагранжева репера $\bar{э}_i$ является его кососимметричным коммутатором [1]:

$$\bar{э}^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\bar{э}_{\beta}\times\bar{э}_{\gamma}).$$

Поскольку контравариантный метрический тензор однозначно выражается через ковариантный

$$g^{ij}=\frac{\partial \ln g}{\partial g_{ij}},\quad g^{\alpha\beta}=\bar{э}^{\alpha}\bar{э}^{\beta}$$

и, следовательно, также является симметричным, построенная на нем теория контравариантна относительно классической симметричной теории.

В теории упругости, конечно, нет доказательства того, что симметричная теория упругости есть единственный ее вариант. Необходимый признак симметрии теории упругости — ее безмоментность в виде условия (9) — не является достаточным. Необходимое и достаточное условие симметрии теории — равенство нулю дисторсийного момента, но его существование экспериментально еще не доказано, а сам функционал дисторсийного момента, очень важный для несимметричной теории упругости, построен лишь качественно, а не как решение термодинамического тождества.

Для математической постановки конкретных краевых задач МСС надо иметь необходимый и достаточный признаки безусловной правильности принимаемого варианта: симметричной или несимметричной теории, следовательно, иметь необходимые и достаточные условия для такого выбора. Останавливаясь на общепринятой симметричной теории, надо проверить выполнение необходимых признаков безмоментности внешних нагрузок и симметрию заданных на границе дисторсий (равенство нулю несимметричных компонент). В контактных задачах со смешанными граничными условиями это не всегда возможно, и точность решения должна проверяться экспериментально или теоретически, апостериори.

В неоднородных твердых телах сложной структуры (включая микронеоднородные) при неупругих и упругопластических деформациях сильными источниками дисторсийных моментов и несимметрии напряжений являются области концентрации напряжений и деформаций.

К сожалению, я не имел возможности сделать хотя бы краткий обзор этапных работ по несимметрии в механике сплошной среды и привести сопоставление основных направлений и результатов (обзор англо-американских работ приведен в [5]). Надеюсь, что содержание монографии ММ. Е. и Ф. Коссера [6], представляющее собой, по существу, обширную программу новых направлений развития теории деформации в твердых телах, будет понято и принято читателями в дальнейшем более полно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
2. Ильюшина Г. А. О решении термомеханических уравнений для функционала

реакции в пространстве непрерывно дифференцируемых процессов//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1996. № 2. 75—79.
3. Ильюшин А. А. Функционалы и меры необратимости термодинамических процессов в механике сплошной среды (МСС)//Докл. РАН. 1994. 337(1). 48—50.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновом пространстве. Ижевск, 1995.
5. Ostoja-Starzewski M., Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity//Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. 451. 453—470.
6. Cosserat MM. E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.

Поступила в редакцию
13.05.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 517.9

О. А. Олейник, Ж. Тронель, Т. А. Шапошникова

ОБ УСРЕДНЕНИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ, ЧАСТЬ КОТОРОЙ СОДЕРЖИТ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫЕ КАНАЛЫ С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА НА ИХ ГРАНИЦЕ

Посвящается Алексею Антоновичу Ильюшину

В работе исследуется задача об усреднении решения уравнения Пуассона в частично перфорированной области в случае, когда перфорированная часть области содержит периодически расположенные узкие каналы, оси которых перпендикулярны плоскости раздела перфорированной и неперфорированной частей области. На границе каналов заданы условия Неймана. Отметим, что усредненная задача имеет на плоскости раздела условия сопряжения, отличные от тех, которые возникают в случаях, рассмотренных в [1—3], когда оси каналов параллельны одной из осей, лежащих в плоскости раздела.

Пусть $\omega^{(n-1)}$ — неограниченная область с 1-периодической структурой в $R^{n-1}_{\hat{x}}$, $\hat{x}=(x_2, \dots, x_n)$, $\partial\omega^{(n-1)} \in C^1$, $\omega_\varepsilon^{(n-1)}=\varepsilon\omega^{(n-1)}$ — периодическая неограниченная область в $R^{n-1}_{\hat{x}}$ с периодом ε, $R^n_+=\{x\in R^n_x : x_1>0\}$, $\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^{(n-1)}\times R_{x_1}$, $\omega_\varepsilon^+=\omega_\varepsilon\cap R^n_+$, $G_1^{(n-1)}=R^{n-1}_{\hat{x}}\setminus\overline{\omega^{(n-1)}}$, $Q=\{\hat{x}\in R^{n-1}_{\hat{x}} : 0<x_j<1,\ j=2, \dots, n\}$, $G_0=G_1^{(n-1)}\cap Q$, $\omega_0=\omega^{(n-1)}\cap Q$, $G_\varepsilon=\varepsilon G_1^{(n-1)}$, $\varepsilon^{-1}\in N$.

Положим:

$$\Omega=\{x\in R^n_x : -l<x_1<l,\ 0<x_j<1,\ j=2, \dots, n\},$$

$$\Gamma_{+l}=\{x\in\partial\Omega : x_1=l\},\quad \Gamma_{-l}=\{x\in\partial\Omega : x_1=-l\},$$

$$\Omega_\varepsilon^+=\Omega\cap\omega_\varepsilon^+,\quad \Omega^-=\{x : x_1<0\}\cap\Omega,\quad \Omega^+=\{x : x_1>0\}\cap\Omega,$$

$$\gamma=\Omega\cap\{x : x_1=0\},\quad \gamma_\varepsilon=\gamma\cap\omega_\varepsilon^{(n-1)},$$

$$\sigma_\varepsilon=\gamma\cap G_\varepsilon,\quad \Omega_\varepsilon=\Omega_\varepsilon^+\cup\Omega^-\cup\gamma_\varepsilon,$$

$$S_\varepsilon=\partial\omega_\varepsilon\cap\overline{\Omega_\varepsilon^+},\quad \Gamma^\varepsilon_{+l}=\partial\Omega_\varepsilon^+\cap\Gamma_{+l},$$

$$\Gamma^\varepsilon_{-l}=\{x\in\partial\Omega_\varepsilon : x_1=-l\},\quad \Gamma_\varepsilon=\Gamma^\varepsilon_{+l}\cup\Gamma^\varepsilon_{-l}.$$

Рассмотрим в области Ω_ε задачу

$$-\Delta u_\varepsilon=f(x),\quad \partial u_\varepsilon/\partial\nu=0 \text{ на } S_\varepsilon;$$