П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 362–386

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЁВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Аннотация. Введен класс функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1,1]$. Изучены приближения рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва на указанных классах. Установлены интегральные представления приближений и оценки сверху равномерных приближений. В случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1,1]$ степенную особенность, найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений посредством рациональных функций с фиксированным числом геометрически различных заданных полюсов. При двух геометрически различных полюсах четной кратности аппроксимирующей функции получены асимптотические оценки наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом, которые имеют более высокую скорость сходимости в сравнении с полиномиальными аналогами.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.209

Ключевые слова: класс интегралов Пуассона, рациональные интегральные операторы, ряды Фурье, поточечные и равномерные приближения, асимптотические оценки, точные константы.

Введение. В теории приближений актуальна задача об исследовании асимптотического поведения величин

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_n(f,x)\|_C,$$

где U_n — некоторый известный метод приближений, ставящий в соответствие функции f, принадлежащей к заданному компактному классу $\mathfrak{M}$, некоторый элемент $U_n(f,x)$. Данная задача имеет богатую историю, связанную с именами выдающихся специалистов в теории функций. Изучение аппроксимационных свойств конкретных методов суммирования на различных классах функций было и остается одним из наиболее важных направлений в теории приближений и в теории рядов Фурье.

Задача отыскания точных верхних граней на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона в полиномиальной аппроксимации, берет свое начало с

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269.

работы С. М. Никольского [1]. В 1946 г. им было показано, что для верхних граней отклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$ непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x,\ q) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \tag{1}$$

$q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\|\varphi(\cdot)\|_C \le 1$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f,\cdot)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \varepsilon_n q^n, \quad n\to\infty,$$

где $\mathbf{K}(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$. В 1980 г. С. Б. Стечкин [2] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f,\cdot)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q^{n+1}}{n(1-q)}, \quad n\to\infty,$$

где величина $O(1)$ равномерно ограничена относительно n, q и β.

В 1979 г. В. Г. Доронин и А. А. Лигун [3] нашли точные значения одностороннего приближения в интегральной метрике на классах Γ_1^r функций $f(x)\in C$, допускающих представление в виде

$$f(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt,$$

где $\varphi(x)\in L_1$, $\|\varphi(x)\|_{L_1} \le 1$, доказав справедливость асимптотического равенства

$$E^+_{n-1}\big(\Gamma_1^r\big)_1 = \sup_{f\in\Gamma_1^r}\ \inf_{f(x)-g(x),g\in T_{n-1}} \|f-g\|_{L_1} = \frac{2r^n}{1-r^n}.$$

На классах $C^q_\beta H_\omega$ непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки (1), при этом $\varphi\in H_\omega$, $H_\omega = \{\varphi\in C : \omega(\varphi,t)\le\omega(t)\}$, $\omega(\varphi,t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$, $\omega(t)$ — некоторый заданный модуль непрерывности, аналогичная задача решена в 2001 г. А. И. Степанцом [4]. Для верхних граней уклонений частичных сумм рядов Фурье им получено асимптотическое равенство при $n\to\infty$:

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f,\cdot)\|_C$$
$$= \frac{4q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q)\theta_n(\omega)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t,dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\theta_n(\omega)\in[1/2,1]$, причем $\theta_n(\omega)=1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Дальнейшее развитие данная проблематика нашла в работах математиков украинской математической школы (см., например, [5–8]). В этих и других работах установлены точные верхние грани уклонений различных методов суммирования полиномиальных рядов Фурье 2π-периодических функций на классах интегралов Пуассона $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$.

Между тем наряду с тригонометрическими интегралами Пуассона имеет смысл рассматривать класс функций, представимых алгебраическими интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$. Для каждой непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $\varphi(x)$ рассмотрим при $0 < r < 1$ ряд

$$f(x, r) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n c_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{2}$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $n = 0, 1, \ldots,$ — ортогональная с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$ на отрезке $[-1, 1]$ система полиномов Чебышёва первого рода и

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

— коэффициенты Фурье по этой системе.

Известно [9, 10], что для интегралов Пуассона (2) справедливо интегральное представление

$$\begin{gathered} f(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\cos\tau)[P_r(\tau - \theta) + P_r(\tau + \theta)]\, d\tau, \\ P_r(u) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos u + r^2}, \quad x = \cos\theta. \end{gathered} \tag{3}$$

Множество всех функций, которые допускают представление в виде (3) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L_1, обозначим, следуя [4], через $L_0^r \mathfrak{N}$.

Среди методов рациональной аппроксимации выделяется ряд операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [11, 12]. В 1979 г. Е. А. Ровба [13] ввел рациональный оператор на основании системы рациональных функций Чебышёва — Маркова, который является обобщением полиномиального оператора Фурье — Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k являются либо действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $1/\sqrt{1 - x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор типа Фурье — Чебышёва порядка не выше n (см. [13]):

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u, \tag{4}$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int\limits_u^v \lambda_n(y)\, dy, \quad \lambda_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2},$$

$$\alpha_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |\alpha_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ — множество рациональных функций вида $\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}$, A — множество наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, $p_n(x)$ — некоторый многочлен степени не выше n, коэффициенты которого зависят от a_k, является точным на константах.

В частности, если положить $a_k = 0,\ k = 1, \ldots, n,$, то $s_n(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышёва.

Представляет интерес исследовать приближения на отрезке $[-1, 1]$ интегралов Пуассона (3) рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (4) по двум направлениям. Во-первых, изучить приближения на классах интегралов Пуассона, когда граничная функция φ принадлежит некоторому функциональному пространству $\mathfrak{N}$, во-вторых изучить приближения некоторых индивидуальных функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$.

В данной работе рассматриваются оба вышеуказанных направления. В разд. 1 исследуются аппроксимации функций, представимых интегралом Пуассона (3), рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (4), когда в роли $\mathfrak{N}$ выступают множества

$$S_\infty^0[-1, 1] = \left\{ \varphi(t) \in L_1 : \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0,\ \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} \leq 1 \right\}.$$

В работе получены интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений интегралов Пуассона на отрезке $[-1, 1]$ рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва. В качестве следствия получены точные верхние грани уклонений частичных сумм полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва на классах интегралов Пуассона в алгебраическом случае. В разд. 2 исследуются приближения индивидуальных функций, задаваемых интегралами Пуассона в случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Получены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, точные в случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции. Найдена асимптотическая оценка мажоранты равномерных приближений рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных заданных полюсов в расширенной комплексной плоскости. В случае двух геометрически различных полюсов найдены наилучшая мажоранта равномерных приближений и асимптотическая оценка наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом, когда полюсы аппроксимирующей функции имеют четную кратность.

1. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональным интегральным оператором типа Фурье — Чебышёва. Изучим приближения на классах функций, представимых интегралами Пуассона на отрезке $[-1, 1]$, посредством рациональных интегральных операторов (4). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_n(x, A) = f(x, r) - s_n(f(\cdot, r), x), \quad x \in [-1, 1], \tag{5}$$

$$\varepsilon_n(A) = \|f(x, r) - s_n(f(\cdot, r), x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для приближений интегралов Пуассона* (3) *на отрезке* $[-1, 1]$ *с граничной функцией* $\varphi \in S_\infty^0[-1, 1]$ *рациональным интегральным оператором* (4) *имеют место*

(1) *интегральное представление*

$$\varepsilon_n(x,A) = -\frac{r}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\varphi(\cos\tau)}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}$$
$$\times\cos\psi_n(\tau,x,r)\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{r^2-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2}{1-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2 r^2}}\,d\tau; \quad (7)$$

(2) *равномерная оценка*

$$\varepsilon_n(A) \le \frac{r}{\pi}\max_{x\in[-1,1]}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{r^2-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2}{1-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2 r^2}}\,d\tau,$$

где

$$\psi_n(\tau,x,r) = \arg\left[\frac{r\xi-z}{\xi}\prod_{k=1}^{n}\frac{rz-\alpha_k}{1-\alpha_k rz}\cdot\frac{1-\alpha_k\xi}{\xi-\alpha_k}\right],$$
$$z=e^{i\tau},\quad \xi=e^{i\theta},\quad x=\cos\theta,\quad 0<r<1.$$

Доказательство. Из представления (3) нетрудно получить, что

$$f(x,r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\cos\tau)P_r(\tau-\theta)\,d\tau,\quad P_r(u)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2},\ x=\cos\theta.$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\tau+r^2}\,d\tau.$$

Воспользовавшись точностью оператора $s_n(\cdot,x)$ на константах, получим

$$\varepsilon_n(x,A)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\cos\tau)P_r(\tau-\theta)\,d\tau\right.$$
$$\left.-\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\cos\tau)P_r(\tau-v)\,d\tau\right]\mathfrak{D}_n(v,\theta)\,dv$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\cos\tau)[P_r(\tau-\theta)-P_r(\tau-v)]\,d\tau\right)\mathfrak{D}_n(v,\theta)\,dv,$$

где

$$\mathfrak{D}_n(v,\theta)=\left(\zeta\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)}-\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}\right)\frac{1}{\zeta-\xi},$$
$$\omega_n(u)=\prod_{k=1}^{n}\frac{u-\alpha_k}{1-\alpha_k u},\quad \zeta=e^{iv},\ \xi=e^{i\theta},\quad |\alpha_k|<1.$$

Применив теорему Фубини, в последнем интеграле поменяем порядок интегрирования. Имеем

$$\varepsilon_n(x, A) = \frac{2r(1-r^2)}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)}{1 - 2r\cos(\tau-\theta) + r^2} I_n(x, \tau, A)\, d\tau, \tag{8}$$

где

$$I_n(x, \tau, A) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(\tau-\theta) - \cos(\tau - v)}{1 - 2r\cos(\tau - v) + r^2} \mathfrak{D}_n(v, \theta)\, dv, \quad x = \cos\theta.$$

Займемся преобразованием последнего интеграла. Положим $z = e^{i\tau}, \xi = e^{i\theta}$ и выполним в интеграле замену переменного по формуле $\zeta = e^{iv}$. Учитывая, что

$$\frac{\cos(\tau-\theta) - \cos(\tau - v)}{1 - 2r\cos(\tau - v) + r^2} = \frac{(\zeta - \xi)(\xi\zeta - z^2)}{2\xi r(\zeta - rz)(\zeta - z/r)},$$

приходим к представлению

$$I_n(x, \tau, A) = \frac{1}{2\xi r i}[\overline{\omega_n(\xi)} I_1 - \xi\omega_n(\xi) I_2], \tag{9}$$

где

$$I_1 = \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \omega_n(\zeta)\, d\zeta, \quad I_2 = \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \frac{d\zeta}{\zeta\omega_n(\zeta)}.$$

Исследуем каждый из интегралов по отдельности. Так, подынтегральная функция первого интеграла имеет внутри единичной окружности единственную особую точку $\zeta = rz$, $r \in (0, 1)$, являющуюся для нее простым полюсом. Тогда, применяя теорему Коши о вычетах, находим

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\zeta = rz} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \omega_n(\zeta) = -2\pi i r \frac{r\xi - z}{1 - r^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k rz}. \tag{10}$$

Рассмотрим интеграл I_2. Его подынтегральная функция во внешности единичного круга имеет в конечной комплексной плоскости особую точку $\zeta = z/r$, являющуюся для нее простым полюсом, а на бесконечности имеет нуль не ниже второго порядка. Применяя интегральную теорему Коши к контуру $\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, обходимому по часовой стрелке, находим

$$I_2 = -2\pi i \operatorname*{Res}_{\zeta = z/r} \frac{\xi\zeta - z^2}{(\zeta - rz)(\zeta - z/r)} \frac{1}{\zeta\omega_n(\zeta)} = -2\pi i \frac{r}{z} \cdot \frac{\xi - rz}{1 - r^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r}. \tag{11}$$

Подставив (10), (11) в (9), получим

$$I_n(x, \tau, A) = -\frac{\pi}{1 - r^2} \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \overline{\omega_n(\xi)} \prod_{k=1}^{n} \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k rz} + \frac{rz - \xi}{z} \omega_n(\xi) \prod_{k=1}^{n} \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r} \right],$$

где $\xi = e^{i\theta}$, $x = \cos\theta$, $z = e^{i\tau}$, $0 < r < 1$. С учетом последнего равенства в (8) будем иметь

$$\varepsilon_n(x, A) = -\frac{r}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)}{1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2}$$

$$\times \left[\frac{r\xi - z}{\xi} \overline{\omega_n(\xi)} \prod_{k=1}^{n} \frac{rz - \alpha_k}{1 - \alpha_k rz} + \frac{rz - \xi}{z} \omega_n(\xi) \prod_{k=1}^{n} \frac{r - \alpha_k z}{z - \alpha_k r} \right] d\tau, \quad x = \cos\theta. \tag{12}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках последнего интеграла, представляет собой сумму взаимно комплексно сопряженных слагаемых. Выполнив необходимые преобразования, придем к (7).

Для того чтобы доказать второе утверждение настоящей теоремы, достаточно заметить, что $\varphi(t) \in S^0_\infty[-1,1]$, и воспользоваться оценкой $|\cos\psi_n(\tau,x,r)| \leq 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1 (полиномиальный случай). *Для приближений на классах интегралов Пуассона* $L_0^r S^0_\infty[-1,1]$ *частичными суммами полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва справедливо равенство*

$$\mathfrak{E}_n = \sup_{\varphi \in S^0_\infty[-1,1]} \|f(\cdot,r) - s_n(f,\cdot)\|_{C[-1,1]} = \frac{8r^{n+1}}{\pi^2}\mathbf{K}(r) + o(1)r^{n+1}, \qquad (13)$$

$0 < r < 1$, $n \to \infty$, *где* $\mathbf{K}(r)$ *— полный эллиптический интеграл первого рода.*

Доказательство. В представлении (7) положим $\alpha_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$. Тогда $\varepsilon_n(x,O) = \varepsilon_n^{(0)}(x)$, $\varepsilon_n(O) = \varepsilon_n^{(0)}$ соответственно поточечные (5) и равномерные (6) приближения интегралов Пуассона (3) частичными суммами полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва. В этом случае

$$\varepsilon_n^{(0)}(x) = -\frac{r^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}} \cos\arg\left[\left(r - \frac{z}{\xi}\right)\left(\frac{z}{\xi}\right)^n\right] d\tau$$

$$= -\frac{r^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)[r\cos n(\tau-\theta) - \cos(n+1)(\tau-\theta)]}{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}\, d\tau,\ x = \cos\theta,\ 0<r<1.$$

Если $\varphi \in S^0_\infty[-1,1]$, то из последнего соотношения следует, что

$$\left|\varepsilon_n^0(x)\right| \leq \frac{r^{n+1}}{\pi} I_n, \quad I_n = \int_0^{2\pi} \frac{|r\cos nt - \cos(n+1)t|}{1-2r\cos t + r^2}\, dt, \quad 0<r<1,\ n = 0,1,\ldots. \qquad (14)$$

Известно [1], что для интеграла I_n имеет место асимптотическое равенство

$$I_n = \frac{8}{\pi}\mathbf{K}(r) + o(1), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, в (14) приходим к оценке

$$\varepsilon_n^0 \leq \frac{8r^{n+1}}{\pi^2}\mathbf{K}(r) + o(1)r^{n+1}, \quad 0<r<1.$$

Данная оценка достижима на функции

$$\varphi_x(t) = \operatorname{sign}(r\cos n(\tau-\theta) - \cos(n+1)(\tau-\theta)), \quad x = \cos\theta,\ t = \cos\tau,$$

которая принадлежит классу $S^0_\infty[-1,1]$ (см. [1]). Учитывая изложенное, приходим к (13).

Замечание 1. Асимптотическое равенство (13) есть алгебраический аналог результата С. М. Никольского [1]. Значение данного результата в том, что он получен как следствие более общего рационального случая.

2. Приближения интегралов Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность. При решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге возникают случаи, когда граничная функция имеет вид $\varphi(\cos\theta) = M|\cos\theta|^s$, где M — некоторое число, $s > 0$. Такой случай будет рассматриваться далее.

Пусть параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{2n}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha_k = -\alpha_{n+k}, \quad \alpha_k \mapsto i\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ &\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad p = \left[\frac{s}{2}\right], \quad n > p. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. *Если $\varphi(t) = M|t|^s$, $s > 0$, то для приближений интегралов Пуассона (7) на отрезке $[-1, 1]$ интегральным рациональным оператором (4) при выполнении условий (15) имеют место*

(1) *интегральное представление*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) = &\frac{(-1)^n M}{2^{s-2}\pi r^s} \sin\frac{\pi s}{2} \\ &\times \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2\cos 2\theta + t^4}} \cos\psi_n(x, t, A)\chi_{2n}(t)\, dt, \quad x = \cos\theta, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\psi_n(x, t, A) = \arg\frac{\xi^2\omega_{2n}(\xi)}{1 + t^2\xi^2};$$

(2) *оценка поточечных приближений:*

$$|\varepsilon_{2n}(x, A)| \le \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2\cos 2\theta + t^4}} |\chi_{2n}(t)|\, dt, \quad x \in [-1, 1]; \tag{17}$$

(3) *оценка равномерных приближений:*

$$\varepsilon_{2n}(A) \le \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^r \frac{(r^2 - t^2)^s t^{1-s}}{1 - t^2} |\chi_{2n}(t)|\, dt, \tag{18}$$

где

$$\omega_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2\xi^2}, \quad \chi_{2n}(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 u^2}, \quad r \in (0, 1). \tag{19}$$

Неравенство (18) является точным в том смысле, что если функция $\chi_{2n}(t)$ имеет полюсы только четной кратности, то в (18) имеет место равенство. Неравенство (17) переходит в равенство при $x = 0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Очевидно, что без ограничения общности можно полагать $M = 1$. При выполнении условий (15) естественно рассматривать приближения (12) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, A) = -\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} &\frac{|\cos\tau|^s}{1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2}\left[\frac{r\xi - z}{\xi}\overline{\omega_{2n}(\xi)}\omega_{2n}(rz)\right. \\ &\left. + \frac{rz - \xi}{z}\omega_{2n}(\xi)\overline{\omega_{2n}(rz)}\right] d\tau, \quad \xi = e^{i\theta},\ z = e^{i\tau},\ x = \cos\theta. \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в правой части на три интеграла по промежуткам $[-\pi, -\pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$. В первом из них выполним замену $\tau \mapsto \tau - \pi$, а в третьем — $\tau \mapsto \tau + \pi$. После необходимых преобразований придем к выражению

$$\varepsilon_{2n}(x, A)$$
$$= -\frac{r}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^s \tau \left[\frac{\overline{\omega_{2n}(\xi)}}{\xi} \left(\frac{r\xi - z}{1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2} + \frac{r\xi + z}{1 - 2r\cos(\tau + \theta) + r^2} \right) \omega_{2n}(rz) \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_{2n}(\xi)}{z} \left(\frac{rz - \xi}{1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2} + \frac{rz + \xi}{1 - 2r\cos(\tau + \theta) + r^2} \right) \overline{\omega_{2n}(rz)} \right] d\tau.$$

Учитывая, что

$$1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2 = \frac{-(z - r\xi)(rz - \xi)}{\xi z}, \quad 1 - 2r\cos(\tau + \theta) + r^2 = \frac{(z + r\xi)(rz + \xi)}{\xi z},$$

из последнего равенства получим

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = -\frac{r^2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^s \tau \left[\frac{z^2 \overline{\omega_{2n}(\xi)}}{r^2 z^2 - \xi^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} \right.$$
$$\left. + \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{r^2 \xi^2 - z^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2} \right] d\tau,$$

где $\xi = e^{i\theta}, z = e^{i\tau}$, $x = \cos\theta$.

Для исследования интеграла справа воспользуемся методом, предложенным в [14]. Будем полагать, что $x \in (0, 1)$ и $\theta = \arccos x \in (0, \pi/2)$. В последнем интеграле выполним замену переменного по формуле $z = e^{i\tau}$, положив при этом $\xi = e^{i\theta}$. Тогда

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = -\frac{r^2}{\pi i} [\overline{\omega_{2n}(\xi)} I_1 + \xi^2 \omega_{2n}(\xi) I_2], \quad \xi = e^{i\theta},\ x = \cos\theta,\ s > 0, \tag{20}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2^s} \int\limits_C \frac{(z^2 + 1)^s}{z^{s-1}(r^2 z^2 - \xi^2)} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2} \, dz,$$

$$I_2 = \frac{1}{2^s} \int\limits_C \frac{(z^2 + 1)^s}{z^{s+1}(r^2 \xi^2 - z^2)} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 + \alpha_k^2 z^2}{z^2 + \alpha_k^2 r^2} \, dz,$$

$C = \left\{ z : z = e^{i\tau},\ -\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{\pi}{2} \right\}$. Другими словами, C — правая полуокружность единичной окружности. Отметим, что подынтегральные функции интегралов I_1 и I_2 имеют точки ветвления при $z = 0$, $z = \infty$, а также $z = \pm i$.

Исследуем каждый из интегралов по отдельности. Рассмотрим область, ограниченную контуром, состоящим из C, полуокружности $C_\delta = \left\{ z : z = \delta e^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{\pi}{2} \right\}$ достаточно малого радиуса δ, которая огибает точку $z = 0$ по часовой стрелке, дуг окружностей

$$C_{\delta_1} = \left\{ z : z - i = \delta_1 e^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \le \tau \le \tau_1 \right\}, \quad C_{\delta_2} = \left\{ z : z + i = \delta_2 e^{i\tau}, \tau_2 \le \tau \le \frac{\pi}{2} \right\},$$

огибающих соответственно точки $z = i$ и $z = -i$ по часовой стрелке, и отрезка мнимой оси от точки i до $-i$ с изъятым диаметром полуокружности C_δ и соответствующими отрезками радиусов окружностей $|z-i| = \delta_1$ и $|z+i| = \delta_2$. Очевидно, что $\tau_k > 0,\ k = 1, 2$, и $\tau_k \to 0$ при $\delta_k \to 0$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим подынтегральную функцию первого интеграла:

$$\varphi_1(z,\xi) = \frac{g(z,s)z}{r^2z^2 - \xi^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}, \quad g(z,s) = \frac{1}{2^s}\left(z + \frac{1}{z}\right)^s.$$

Функция $g(z,s)$ в указанной выше области распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g(1,s) = e^{2\pi k s i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $g_0(z,s)$ — ветвь, для которой выполняется условие $g_0(1,s) = 1$. Тогда в данной области функция

$$\varphi_1(z,\xi) = \frac{g_0(z,s)z}{r^2z^2 - \xi^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}$$

регулярна. Применяя интегральную теорему Коши, найдем

$$I_1 + \left(\int\limits_{C_{\delta_1}} + \int\limits_{i-\delta_1}^{i\delta} + \int\limits_{C_\delta} + \int\limits_{-i\delta}^{-i+\delta_2} + \int\limits_{C_{\delta_2}}\right)\varphi_1(z,\xi)\,dz = 0, \tag{21}$$

где третий и пятый интегралы берутся по соответствующим отрезкам мнимой оси. Исследуем интеграл по полуокружности C_δ. Положив $z = \delta e^{i\tau}$, получим

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(z,\xi)\,dz = \frac{i\delta^{2-s}}{2^s}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{(\delta^2 e^{2i\tau} + 1)^s e^{i\tau(2-s)}}{r^2\delta^2 e^{2i\tau} - \xi^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2\delta^2 e^{2i\tau} + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2\delta^2 e^{2i\tau}}d\tau.$$

Отсюда приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(z,\xi)\,dz \sim (-1)^p 2^{1-s} i \sin\frac{\pi s}{2}\frac{r^{2p}\delta^{2-s+2p}}{\xi^2(2-s+2p)}\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k^2, \quad \delta \to 0.$$

Так как $2 - s + 2p > 0$ (см. (15)), значение интеграла по полуокружности C_δ при стягивании контура C_δ в точку стремится к нулю. Проведя аналогичные действия с интегралами по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2}, приходим к асимптотическим равенствам:

$$\int\limits_{C_{\delta_1}}\varphi_1(z,\xi)\,dz \sim (-1)^{n+1}\frac{\delta^{s+1}(1 - e^{-i\frac{\pi(s+1)}{2}})}{(r^2+\xi^2)(s+1)i}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2 - \alpha_k^2}{1 - r^2\alpha_k^2}, \quad \delta_1 \to 0,$$

$$\int\limits_{C_{\delta_2}}\varphi_1(z,\xi)\,dz \sim (-1)^{n+1}\frac{\delta^{s+1}(1 - e^{i\frac{\pi(s+1)}{2}})}{(r^2+\xi^2)(s+1)i}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2 - \alpha_k^2}{1 - r^2\alpha_k^2}, \quad \delta_2 \to 0.$$

Из них следует, что при стягивании дуг C_{δ_1} и C_{δ_2} в точку значения соответствующих интегралов стремятся к нулю. Отсюда при $\delta, \delta_1, \delta_2 \to 0$ выражение (21) примет вид

$$I_1 = \frac{1}{2^s}\left(\int\limits_{-i}^{0} + \int\limits_{0}^{i}\right)\varphi_1(z,\xi)\,dz.$$

В интегралах справа положим $z = it$. Тогда

$$I_1 = \frac{(-1)^n}{2^s i^s}\left(\int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1}\right)\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{r^2t^2+\xi^2}\chi_{2n}(rt)\,dt,$$

где $\chi_{2n}(t)$ определена в (19). Выполнив в первом интеграле справа замену $t \mapsto -t$, после несложных преобразований получим

$$I_1 = \frac{(-1)^{n+1}i}{2^{s-1}}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{r^2t^2+\xi^2}\chi_{2n}(rt)\,dt, \quad \xi = e^{i\theta},\ x = \cos\theta. \tag{22}$$

Займемся интегралом I_2. Рассмотрим область, ограниченную контуром, состоящим из C, полуокружности $C_R = \left\{z : z = Re^{i\tau}, -\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{\pi}{2}\right\}$ достаточно большого радиуса R, которая огибает точку $z = \infty$ против часовой стрелки, дуг окружностей

$$C_{\delta_1} = \{z : z - i = \delta_1 e^{i\tau}, \tau_1 \le \tau \le \pi/2\}, \quad C_{\delta_2} = \{z : z + i = \delta_2 e^{i\tau}, -\pi/2 \le \tau \le \tau_2\},$$

огибающих соответственно точки $z = i$ и $z = -i$ по часовой стрелке, и отрезков мнимой оси $[i(1+\delta_1), +iR]$ и $[-iR, -i(1+\delta_2)]$. Очевидно, что $\tau_k > 0$, $k = 1, 2$, и $\tau_k \to 0$ при $\delta_k \to 0$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим подынтегральную функцию интеграла I_2:

$$\varphi_2(z,\xi) = \frac{g(z,s)}{z(r^2\xi^2 - z^2)}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2+\alpha_k^2 z^2}{z^2+\alpha_k^2 r^2}, \quad g(z,s) = \frac{1}{2^s}\left(z + \frac{1}{z}\right)^s.$$

Функция $g(z,s)$ в указанной выше области распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g(1,s) = e^{2\pi k s i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $g_0(z,s)$ — ветвь, для которой $g_0(1,s) = 1$. Тогда в данной области функция

$$\varphi_2(z,\xi) = \frac{g_0(z,s)z}{z(r^2\xi^2 - z^2)}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2+\alpha_k^2 z^2}{z^2+\alpha_k^2 r^2}$$

регулярна. Используя теорему Коши о вычетах, находим, что

$$\left(\int\limits_{iR}^{i(1+\delta_1)} + \int\limits_{C_{\delta_1}} + \int\limits_{C_{\delta_2}} + \int\limits_{-i(1+\delta_2)}^{-iR} + \int\limits_{C_R}\right)\varphi_2(z,\xi)\,dz - I_2 = 0. \tag{23}$$

Рассуждая, как в случае с интегралом I_1, заключаем, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} при $\delta_k \to 0$, $k = 1, 2$, стремятся к нулю. Исследуем интеграл по дуге C_R. Положим $z = Re^{i\tau}$. Тогда

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(z,\xi)\,dz = \frac{i}{2^s R^s}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R^2e^{2i\tau}+1)^s}{e^{i\tau s}(r^2\xi^2 - R^2e^{2i\tau})}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2+\alpha_k^2R^2e^{2i\tau}}{R^2e^{2i\tau}+\alpha_k^2r^2}\,d\tau.$$

Отсюда приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(z,\xi)\,dz \sim (-1)^{p+1}2^{1-s}i\sin\frac{\pi s}{2}\frac{r^{2p}}{\xi^2(2-s+2p)R^{2-s+2p}}\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k^2, \quad R \to \infty.$$

Так как $2 - s + 2p > 0$ (см. (15)), значение интеграла по полуокружности C_R при $R \to \infty$ стремится к нулю. Из этого следует, что при $\delta_k \to 0$, $k = 1, 2$, и $R \to \infty$ в (23) получим

$$\int\limits_{+i\infty}^{i} \varphi_2(z, \xi)\, dz + \int\limits_{-i}^{-i\infty} \varphi_2(z, \xi)\, dz - I_2 = 0,$$

где первый и третий интегралы взяты вдоль соответствующих лучей мнимой оси. В интегралах выполним замену $z \mapsto z^{-1}$. Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2^s} \left(\int\limits_{-i}^{0} + \int\limits_{0}^{i} \right) \frac{(z^2+1)^s z^{1-s}}{r^2\xi^2 z^2 - 1} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}\, dz.$$

Выполнив в первом интеграле еще одну замену $z \mapsto -z$, получим

$$I_2 = \frac{1 + (-1)^{1-s}}{2^s} \int\limits_{0}^{i} \frac{(z^2+1)^s z^{1-s}}{r^2\xi^2 z^2 - 1} \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 z^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 r^2 z^2}\, dz.$$

Положив $z = it$, найдем

$$I_2 = \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{1-s}} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1 + r^2 t^2 \xi^2} \chi_{2n}(rt)\, dt, \quad \xi = e^{i\theta},\ x = \cos\theta. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (24) в (20), будем иметь

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = (-1)^n \frac{r^2}{2^{s-1}\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_{0}^{1} (1-t^2)^s t^{1-s} \times \left[\frac{\overline{\omega_{2n}(\xi)}}{r^2 t^2 + \bar{\xi}^2} + \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2} \right] \chi_{2n}(rt)\, dt.$$

Заметим, что слагаемые, стоящие в квадратных скобках в подынтегральном выражении, взаимно комплексно сопряжены, а значит, их сумма является действительной функцией. Поскольку

$$\frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2} = \frac{\exp[i\psi_n^*(x, t, A)]}{\sqrt{1 + 2r^2 t^2 \cos 2\theta + r^4 t^4}}, \quad \psi_n^*(x, t, A) = \arg \frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1 + r^2 t^2 \xi^2},\ \xi = e^{i\theta},$$

то

$$\varepsilon_{2n}(x, A) = (-1)^n \frac{r^2}{2^{s-2}\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} \cos\psi_n^*(x, t, A)}{\sqrt{1 + 2r^2 t^2 \cos 2\theta + r^4 t^4}} \chi_{2n}(rt)\, dt,\ x = \cos\theta.$$

Выполняя в последнем интеграле замену $rt \mapsto t$ и возвращаясь к константе M, получим (16).

Для исследования выражения (16) мы полагали, что $x \in (0, 1)$. Однако из свойств четности функции $|x|^s, s > 0$, и интегрального рационального оператора (4) следует, что представление (16) справедливо также и при $x \in (-1, 0)$. Его справедливость в точках $x = 0$ и $x = \pm 1$ следует из непрерывности левой и правой частей относительно переменной x на $[-1,1]$, что доказывает утверждение (1).

Чтобы доказать утверждение (2), достаточно в (16) воспользоваться неравенством $|\cos\psi_n(x,t,A)|\le 1$.

Заметив, что

$$\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}\ge 1-t^2,\quad t\in[0,1],$$

из (17) получим (18).

Если функция $\chi_{2n}(t)$ неотрицательна на отрезке $[0,1]$, то легко видеть, что

$$\varepsilon_{2n}(A)=|\varepsilon_{2n}(0,A)|=\frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^r\frac{\left(r^2-t^2\right)^s t^{1-s}}{1-t^2}\chi_{2n}(t)\,dt,$$

$r\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$. Аналогичный результат имеет место в этом случае в точках $x=\pm1$. Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на то, что при $\alpha_k=0$, $k=1,\ldots,n$, величины $\varepsilon_{2n}(x,O)=\varepsilon_{2n}(x)$, $\varepsilon_{2n}(O)=\varepsilon_{2n}^{(0)}$ соответственно поточечные и равномерные приближения интегралов Пуассона частичными суммами ряда Фурье по системе полиномов Чебышёва первого рода. Отсюда получим

Следствие 2 (полиномиальный случай). *В условиях теоремы* 2 *для приближений интегралов Пуассона частичными суммами полиномиального ряда Фурье — Чебышёва справедливы соотношения*

$$|\varepsilon_{2n}(x)|\le\frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^r\frac{\left(r^2-t^2\right)^s t^{2n+1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}\,dt,\quad x\in[-1,1];$$

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}=\frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^r\frac{\left(r^2-t^2\right)^s t^{2n+1-s}}{1-t^2}\,dt,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Как известно [15], интеграл Пуассона является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом на границе области $f(x,1)=\varphi(x)$ для любой кусочно непрерывной граничной функции $\varphi(x)$, $x\in[-1,1]$. Тогда из теоремы 2 получим

Следствие 3 (приближения функций со степенной особенностью). *Для приближений функции* $|x|^s$ *на отрезке* $[-1,1]$ *рациональным интегральным оператором* (4) *имеют место*

(1) *интегральное представление*

$$\varepsilon_{2n}(x,A)=\frac{(-1)^n}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}\cos\psi_n(x,t,A)\chi_{2n}(t)\,dt,\ x=\cos\theta; \tag{25}$$

(2) *оценка поточечных приближений:*

$$|\varepsilon_{2n}(x,A)|\le\frac{1}{2^{s-2}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}|\chi_{2n}(t)|\,dt,\quad x\in[-1,1]; \tag{26}$$

(3) *оценка равномерных приближений:*

$$\varepsilon_{2n}(A) \le \frac{1}{2^{s-2}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1} |\chi_{2n}(t)|\, dt, \quad s>0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{27}$$

где $\omega_{2n}(\xi), \chi_{2n}(u)$ *из* (19), $\psi_n(x,t,A)$ *из* (16).

Неравенство (27) *точное в том смысле, что если функция* $\chi_{2n}(t)$ *имеет полюсы только четной кратности, то в* (27) *имеет место равенство. При тех же условиях на полюсы неравенство* (26) *переходит в равенство при* $x=0$, *а также на концах отрезка.*

Исследование приближений функции $|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$ рациональными интегральными операторами типа Фурье, т. е. выражений (25)–(27), представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Замечание 2. Соотношения (25)–(27) получены нами в [16] при изучении приближений функции $|x|^s$, $s\in(0,2)$, частичными суммами ряда Фурье по системе рациональных функций Чебышёва — Маркова в случае двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

3. Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений интегралов Пуассона в случае фиксированного числа полюсов. Выше найдены оценки поточечных и равномерных приближений функций, задаваемых интегралами Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность, рациональным интегральным оператором (4). Найдем асимптотическое выражение интеграла, стоящего в правой части (18) при $n\to\infty$ при специальном выборе полюсов аппроксимирующей рациональной функции. Для решения поставленной задачи в вышеуказанном интеграле выполним замену переменного по формуле $t^2=(1-u)/(1+u)$, $dt=-du/((1-u)^{1/2}(1+u)^{3/2})$. Тогда

$$\varepsilon^*_{2n}(A) = \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_R^1 \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left|\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right| du,\ s>0,\ n\in\mathbb{N},$$

где $R=(1-r^2)/(1+r^2)$, $R\in(0,1)$, $\beta_k=\left(1-\alpha_k^2\right)/\left(1+\alpha_k^2\right)$, $k=1,\dots,n$.

Пусть $n>p$, $p=[s/2]$, $n_1=n-p$ и q — произвольное натуральное число, $0<q<n_1$, A_q — множество наборов параметров $(0,\dots,0,\alpha_{p+1},\dots,\alpha_{p+mq})\in A$ таких, что среди чисел $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_{p+mq}$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, m=[n_1/q]$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка $2p$ и $2q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый. В этом случае

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q) = \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \times \int\limits_R^1 \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \left|\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|^m du, \quad n>p. \tag{28}$$

Положим, что параметры $\beta_k, k=1,\dots,q$, упорядочены следующим образом:

$$R<\beta_q<\beta_{q-1}<\dots<\beta_1\le 1.$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 для любых натуральных n и q, $0 < q < n_1$, $m = [n_1/q]$, при $m \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q) \sim \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \left[\frac{\Gamma(s+1)\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p \left(\prod\limits_{k=1}^{q} \frac{\beta_k - R}{\beta_k + R}\right)^m}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{\beta_k^2 - R^2}\right)^{s+1}} \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{(1-b_j^2)^{\frac{s}{2}}(1+b_j)b_j^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{j}\frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum\limits_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{(b_j^2-\beta_k^2)^2}}}$$

$$\left. + \frac{(1-R)^s\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{2^{2p+2}\left(m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}}\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m\right], \quad (29)$$

если $r \in (0,1)$, и

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q) \sim \frac{2M}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \left[\frac{\Gamma(s)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}\right.$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{b_j^{s-\frac{3}{2}}\left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p\left(\prod\limits_{k=1}^{j}\frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j}\prod\limits_{k=j+1}^{q}\frac{b_j-\beta_k}{b_j+\beta_k}\right)^m}{\left(1-b_j^2\right)^{\frac{s}{2}}(1+b_j)\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{j}\frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}+\sum\limits_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{(b_j^2-\beta_k^2)^2}}}$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{2^{2p+2}\left(m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}}\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m\right], \quad (30)$$

если $r = 1$, где $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, $j = 1, \ldots, q-1$, — единственный корень уравнения

$$-\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{u^2 - \beta_k^2} = 0,$$

$R \in (0,1)$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Введем обозначения

$$I_1(A_q, n) = \int\limits_{R}^{\beta_q} \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right)^m du,$$

$$I_2(A_q, n) = \sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^m du,$$

$$I_3(A_q,n)=\int\limits_{\beta_1}^{1}\frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^m du.$$

Тогда

$$\varepsilon_{2n}^*(A)=\frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_1(A_q,n)+I_2(A_q,n)+I_3(A_q,n)\right]. \tag{31}$$

Исследуем каждый из интегралов $I_1(A_q,n), I_2(A_q,n), I_3(A_q,n)$ по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $n\to\infty$. Дальнейшему доказательству теоремы 3 предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_1(A_q,n)\sim\begin{cases}\dfrac{\Gamma(s+1)\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p\left(\prod\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-R}{\beta_k+R}\right)^m}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{\beta_k^2-R^2}\right)^{s+1}}, & r\in(0,1),\\[2ex] \dfrac{\Gamma(s)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{s}}, & r=1,\ m\to\infty,\end{cases} \tag{32}$$

где $\Gamma(s+1)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Для исследования асимптотики интеграла $I_1(A_q,n)$ воспользуемся методом Лапласа [17, 18]. Приведем последний интеграл к виду, при котором реализуется указанный метод. Имеем

$$I_1(A_q,n)=\int\limits_{R}^{\beta_q}\frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p e^{mS(u)}\,du,\quad S(u)=\sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}.$$

Функция $S(u)$ убывает на промежутке $[R,\beta_q]$, поскольку $S'(u)<0$, и, следовательно, достигает максимума при $u=R$. Отсюда заключаем, что при $m\to\infty$ значение исходного интеграла приближенно равно значению интеграла по малому отрезку $[R,R+\varepsilon]$. Используя асимптотические равенства

$$S(u)=\sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k-R}{\beta_k+R}-2\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{\beta_k^2-R^2}(u-R)+o((u-R)),$$

$$\frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p=\frac{(u-R)^s}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R}\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p+o((u-R)^s),$$

справедливые при $u\to R$, для достаточно малого $\varepsilon>0$ и $m\to\infty$, находим

$$I_1(A_q,n)\sim\frac{1}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R}\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-R}{\beta_k+R}\right)^m$$

$$\times\int\limits_{R}^{R+\varepsilon}(u-R)^s\exp\left[-2m\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{\beta_k^2-R^2}(u-R)\right]du,\quad m\to\infty.$$

После соответствующей замены переменных в интеграле справа последнее асимптотическое равенство примет вид

$$I_1(A_q,n)\sim\frac{\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p\left(\prod\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-R}{\beta_k+R}\right)^m}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{\beta_k^2-R^2}\right)^{s+1}}\int\limits_{0}^{\varphi(m,\varepsilon)}t^se^{-t}\,dt,\quad m\to\infty,$$

где $\varphi(m,\varepsilon) = 2m\varepsilon \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k/\big(\beta_k^2 - R^2\big) \to \infty$ при $m \to \infty$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(s), \quad s > 0,$$

приходим к первому асимптотическому равенству в (32). Рассуждая совершенно аналогично при $R = 0$, получим второе равенство. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(A_q,n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{\big(1-b_j^2\big)^{\frac{s}{2}}(1+b_j)b_j} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{b_j\left(\sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum\limits_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{(b_j^2-\beta_k^2)^2}\right)}}, \quad r \in (0,1], \quad m \to \infty, \tag{33}$$

где b_j, $j = 1,\ldots,q-1$, *определены в формулировке теоремы* 3.

Доказательство. Запишем

$$I_2(A_q,n) = \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f(u)e^{mS(u)}\,du,$$

где

$$f(u) = \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p, \quad S(u) = \sum_{k=1}^{j} \ln\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} + \sum_{k=j+1}^{q} \ln\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}.$$

Поскольку

$$S'(u) = \sum_{k=1}^{j} \frac{-2\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{2\beta_k}{u^2 - \beta_k^2},$$

$$S''(u) = \sum_{k=1}^{j} \frac{-4\beta_k u}{\big(\beta_k^2 - u^2\big)^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{-4\beta_k u}{\big(u^2-\beta_k^2\big)^2} < 0,$$

причем $S'(\beta_{j+1}) = +\infty$, $S'(\beta_j) = -\infty$, заключаем, что существует внутренняя точка $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, в которой функция $S(u)$ достигает на данном интервале максимума. При этом $S'(b_j) = 0$. Используя асимптотические разложения

$$S(u) \sim \sum_{k=1}^{j} \ln\frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} + \sum_{k=j+1}^{q} \ln\frac{b_j-\beta_k}{b_j+\beta_k} - 2b_j$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{\big(\beta_k^2 - b_j^2\big)^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{\big(b_j^2-\beta_k^2\big)^2}\right](u-b_j)^2,$$

$$f(u) \sim \frac{(b_j - R)^s}{\big(1-b_j^2\big)^{\frac{s}{2}}(1+b_j)b_j}\left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p,$$

справедливые при $u \to b_j$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ находим, что

$$I_2(A_q, n) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(b_j - R)^s}{\left(1 - b_j^2\right)^{\frac{s}{2}} (1 + b_j) b_j} \left(\frac{1 - b_j}{1 + b_j}\right)^p \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m$$

$$\times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left[-2b_j m \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{\left(\beta_k^2 - b_j^2\right)^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{\left(b_j^2 - \beta_k^2\right)^2}\right) u^2\right] du.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi},$$

из последнего асимптотического равенства при $m \to \infty$ придем к (33). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_3(A_q, n) \sim \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+2} \left(m \sum\limits_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2}\right)^{1 + p - \frac{s}{2}}} \Gamma\left(1 + p - \frac{s}{2}\right) \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k}\right)^m, \quad m \to \infty, \tag{34}$$

где $r \in (0, 1]$, $p = [s/2]$, $s > 0$.

Доказательство. В интеграле $I_3(A_q, n)$ выполним замену переменного по формуле $u = \cos\theta$. Имеем

$$I_3(A_q, n) = \int_0^{\arccos \beta_1} f(\theta) e^{mS(\theta)}\, d\theta,$$

где

$$f(\theta) = \frac{(\cos\theta - R)^s \sin^{1-s}\theta}{(1 + \cos\theta)\cos\theta} \left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right)^p, \quad S(\theta) = \sum_{k=1}^{q} \ln \frac{\cos\theta - \beta_k}{\cos\theta + \beta_k}.$$

Функция $S(\theta)$ убывает при $\theta \in (0, \arccos \beta_1)$, поскольку $S'(\theta) < 0$, следовательно, достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Учитывая разложения

$$S(\theta) = \sum_{k=1}^{q} \ln \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \theta^2 + o(\theta^2), \quad f(\theta) = \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+1}} \theta^{1+2p-s} + o(\theta^{1+2p-s}),$$

справедливые при $\theta \to 0$, находим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$

$$I_3(A_q, n) \sim \frac{(1 - R)^s}{2^{2p+1}} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k}\right)^m \int_0^{\varepsilon} \theta^{1+2p-s} \exp\left[-m \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \theta^2\right] d\theta.$$

Выполнив в интеграле справа замену переменного по формуле

$$m \sum_{k=1}^{q} \beta_k / \left(1 - \beta_k^2\right) \theta^2 \mapsto \theta^2,$$

приходим к асимптотическому равенству

$$I_3(A_q,n) \sim \frac{(1-R)^s}{2^{2p+1}\left(m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\frac{s}{2}}}$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m \int\limits_0^{\varphi(\varepsilon,m)} \theta^{1+2p-s}e^{-\theta^2}\,d\theta, \quad m\to\infty,$$

где $\varphi(\varepsilon,m)=\varepsilon\sqrt{m\sum\limits_{k=1}^{q}\beta_k/\bigl(1-\beta_k^2\bigr)}\to\infty$ при $m\to\infty$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\theta^{1+2p-s}e^{-\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\Gamma\Bigl(1+p-\frac{s}{2}\Bigr), \quad p=\left[\frac{s}{2}\right],\ s>0,$$

из последнего асимптотического равенства придем к (34). Лемма 3 доказана.

Подставив асимптотические равенства (32), (33) и (34) в (31), получим (29), чем завершим доказательство теоремы 3.

Следствие 4 (полиномиальный случай). *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией $M|x|^s$, $s>0$, $M>0$, на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами полиномиального ряда Фурье — Чебышёва справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{4M}{\pi(1-r^2)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s+1)\frac{r^{2n+2}}{(2n)^{s+1}}, \quad s>0,\ r\in(0,1),\ n\to\infty.$$

Доказательство следует непосредственно из (29), если положить $\beta_k=1$, $k=1,\ldots,q$. Отметим, что аналогичный результат можно получить, исследовав асимптотическое поведение интеграла в следствии 2 при $n\to\infty$.

Следствие 5 (полиномиальный случай). *Для равномерных приближений функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad s>0,\ n\to\infty.$$

Доказательство следует непосредственно из (30), если положить $\beta_k=1$, $k=1,\ldots,q$. Данный результат содержится в [19].

4. Случай двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Рассмотрим приближения интегралов Пуассона в условиях теоремы 2 при $q=1$, $n_1=m$. Для мажоранты равномерных приближений находим, что

$$\varepsilon_{2n,2}^{*}(\alpha) \sim \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\sigma_1(\beta,r,s,n)+\sigma_2(\beta,r,s,n)\right], \qquad (35)$$

$s>0$, $\beta=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, $n\to\infty$, где

$$\sigma_1(\beta,r,s,n)=\frac{\Gamma(s+1)(\beta^2-R^2)^{s+1}}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1+R)R(2n_1\beta)^{s+1}}\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^p\left(\frac{\beta-R}{\beta+R}\right)^{n_1},$$

$$\sigma_2(\beta, r, s, n) = \frac{(1-R)^s(1-\beta^2)^{1+p-\frac{s}{2}}}{2^{2p+2}(n_1\beta)^{1+p-\frac{s}{2}}}\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n_1},$$

если $r \in (0,1)$, и

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\alpha) \sim \frac{2M}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\frac{\Gamma(s)\beta^s}{(2n_1)^s} + \frac{(1-\beta^2)^{1+p-\frac{s}{2}}}{2^{2p+2}(n_1\beta)^{1+p-\frac{s}{2}}}\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n_1}\right], \tag{36}$$

$n \to \infty$, если $r = 1$, где $p = \left[\frac{s}{2}\right]$, $s > 0$.

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (35) и (36) посредством выбора оптимального для каждой задачи параметра $\alpha = \alpha^*$, $\alpha \in [0, r]$. Другими словами, будем искать оценку наилучшего равномерного приближения интегралов Пуассона с граничной функцией $M|x|^s$, $s > 0$, $M > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором (4). Для решения этой задачи положим

$$\varepsilon_{2n,2} = \inf_{\alpha\in[0,r]}\varepsilon_{2n,2}(\alpha), \quad \varepsilon^*_{2n,2} = \inf_{\alpha\in[0,r]}\varepsilon^*_{2n,2}(\alpha), \tag{37}$$

Теорема 4. *Имеют место*

(1) *асимптотическая оценка наилучшей мажоранты* (37) *при* $r \in (0,1)$*:*

$$\varepsilon^*_{2n,2} \sim \frac{M}{2^{2s}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\frac{\Gamma(s+1)(1+r^2)^{1-\frac{s}{2}}}{(1-r^4)^{\frac{1-s}{2}}} + \frac{2^{\frac{3s}{2}-p}\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{(1-r^4)^{\frac{2+2p-s}{4}}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^{n-p}\frac{r^{2+2p}(1+r^2)^{\frac{s}{2}}}{n^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}\right], \quad n \to \infty;$$

(2) *асимптотическая оценка наилучшей мажоранты* (37) *при* $r = 1$*:*

$$\varepsilon^*_{2n,2} \sim \frac{2M}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\left(\frac{s}{2}\right)^s\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^s, \quad n \to \infty;$$

(3) $\varepsilon_{2n,2} = \varepsilon^*_{2n,2}$, *если* $n - p$ *четное,* $r \in (0, 1]$, *где* $\Gamma(s)$ — *гамма-функция Эйлера,* $p = [s/2]$, $s > 0$.

Доказательство. Отметим, что при $\beta = 1$, а также $\beta = R$ порядок наилучших равномерных приближений не отличается от полиномиального. Положим

$$\beta = \sqrt{R}(1+\rho_n),$$

где $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. При данном β из равенства (35) находим

$$\sigma_1(\beta, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{(2n_1)^{s+1}}R^{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^{1+p+\frac{s}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1}$$
$$\times\exp\left[n_1\rho_n\frac{2\sqrt{R}}{1-R}\right], \quad n_1 \to \infty.$$

Аналогичным образом получим

$$\sigma_2(\beta, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2}n_1^{1+p-\frac{s}{2}}}\frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}}\left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1}\exp^{-1}\left[n_1\rho_n\frac{2\sqrt{R}}{1-R}\right],$$

$n_1 \to \infty$. Положим $\rho^*_n = \frac{C\ln n_1}{n_1}$, $n_1 = n - p$, $n \in \mathbb{N}$, и $\beta^* = \sqrt{R}(1+\rho^*_n)$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от n, но зависящая от s и r.

Покажем, что указанное значение β^* решает сформулированную выше задачу минимизации (см. (37)). В этом случае

$$\sigma_1(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{(2n_1)^{s+1}} R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^{1+p+\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{R}C}{1-R}},$$

$$\sigma_2(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2} n_1^{1+p-\frac{s}{2}}} \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n^{\frac{2\sqrt{R}C}{1-R}}}, \quad n \to \infty.$$

Оптимальную константу C^* будем искать из условия

$$s+1-\frac{2\sqrt{R}C}{1-R} = 1+p-\frac{s}{2}+\frac{2\sqrt{R}C}{1-R}.$$

Отсюда находим

$$C^* = \frac{(3s-2p)(1-R)}{8\sqrt{R}},$$

и правые части асимптотических равенств $\sigma_1(\beta^*, r, s, n)$ и $\sigma_2(\beta^*, r, s, n)$ соответственно примут вид

$$\sigma_1(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(s+1)}{2^{s+1}} R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^{1+p+\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}},$$

$$\sigma_2(\beta^*, r, s, n) \sim \frac{\Gamma(1+p-s/2)}{2^{2p+2}} \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{R^{\frac{2+2p-s}{4}}} \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}, \quad n \to \infty.$$

Подставив последние равенства в (35), при $n \to \infty$ получим

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\alpha^*) \sim \frac{M}{2^s \pi (1-R^2)^{\frac{s}{2}}} \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \left[\Gamma(s+1) R^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^{1+p+\frac{s}{2}} \right.$$
$$\left. + \Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right) \frac{(1-R)^{1+p+\frac{s}{2}}}{2^{1+2p-s} R^{\frac{2+2p-s}{4}}}\right] \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}.$$

Возвращаясь к величине r по формуле $r = \sqrt{(1-R)/(1+R)}$, находим

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\alpha^*) \sim \frac{M}{2^{2s}\pi} \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \left[\frac{\Gamma(s+1)(1+r^2)^{1-\frac{s}{2}}}{(1-r^4)^{\frac{1-s}{2}}} + \frac{2^{\frac{3s}{2}-p}\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)}{(1-r^4)^{\frac{2+2p-s}{4}}}\right]$$
$$\times \left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^{n_1} \frac{r^{2+2p}(1+r^2)^{\frac{s}{2}}}{n_1^{1+\frac{p}{2}+\frac{s}{4}}}, \quad n_1 = n-p, \ n \to \infty. \qquad (38)$$

Отметим, что правая часть последнего асимптотического равенства ввиду очевидного соотношения

$$r^{2p+2}\left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^{n_1} = \frac{r^{2n+2}}{(1+\sqrt{1-r^4})^{n_1}} = o\left(r^{2n+2}\right), \quad n \to \infty,$$

убывает при $n \to \infty$ значительно быстрее полиномиального аналога, найденного в следствии 3.

Покажем, что найденное значение β^* является оптимальным в том смысле, что доставляет выражению $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$ асимптотически минимальное значение.

Зафиксируем некоторое $\delta > 0$. С одной стороны, при

$$\beta^+ = \sqrt{R}(1+\delta+\rho^*_n)$$

находим, что

$$\left(\frac{\beta^+ - R}{\beta^+ + R}\right)^{n_1} = \left(\frac{\sqrt{R}(1+\delta+\rho_n^*) - R}{\sqrt{R}(1+\delta+\rho_n^*) + R}\right)^{n_1} = \left(\frac{1+\delta-\sqrt{R}}{1+\delta+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \left(\frac{1+\frac{\rho_n^*}{1+\delta-\sqrt{R}}}{1+\frac{\rho_n^*}{1+\delta+\sqrt{R}}}\right)^{n_1}$$

$$\sim \left(\frac{1+\delta-\sqrt{R}}{1+\delta+\sqrt{R}}\right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{(1+\delta)^2-R}} > \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1-R}}, \quad n \to \infty.$$

Последняя оценка справедлива при достаточно больших n ввиду того, что функция $(t-a)/(t+a)$, $a > 0$, переменного t возрастает. Отсюда заключаем, что при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^+) > \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad \alpha^+ = \sqrt{\frac{1-\beta^+}{1+\beta^+}}. \tag{39}$$

С другой стороны, при $\beta^- = \sqrt{R}(1-\delta+\rho_n^*)$ исследуем выражение $\sigma_2(\beta^*, r, s, n)$. Имеем

$$\left(\frac{1-\beta^-}{1+\beta^-}\right)^{n_1} = \left(\frac{1-\sqrt{R}(1-\delta+\rho_n^*)}{1+\sqrt{R}(1-\delta+\rho_n^*)}\right)^{n_1}$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{R}(1-\delta)}{1+\sqrt{R}(1-\delta)}\right)^{n_1} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{R}\rho_n^*}{1-\sqrt{R}(1-\delta)}}{1+\frac{\sqrt{R}\rho_n^*}{1+\sqrt{R}(1-\delta)}}\right)^{n_1}$$

$$\sim \left(\frac{1-\sqrt{R}(1-\delta)}{1+\sqrt{R}(1-\delta)}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1-R(1-\delta)^2}}} > \left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1^{\frac{2\sqrt{R}C^*}{1-R}}}, \quad n \to \infty,$$

что справедливо при достаточно больших n ввиду убывания функции $(1-at)/(1+at)$, $a > 0$, по t. Отсюда заключаем, что при достаточно больших n будет

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^-) > \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad \alpha^- = \sqrt{\frac{1-\beta^-}{1+\beta^-}}. \tag{40}$$

Из соотношений (39) и (40) следует, что

$$\varepsilon_{2n,2}^* = \inf_{\alpha\in[0,r]} \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha) \sim \varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*), \quad n \to \infty,$$

где $\varepsilon_{2n,2}^*(\alpha^*)$ из (38). Из последнего соотношения вытекает утверждение (1).

Для доказательства утверждения (3) при $r \in (0,1)$ воспользуемся точностью оценки (18) при четных значениях n_1. В случае, когда полюсы имеют четную кратность, вышеуказанная оценка примет вид

$$\varepsilon_{2n,2}(\alpha) = \frac{M}{2^{s-2}\pi r^s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^r \frac{(r^2-t^2)^s t^{1+2p-s}}{1-t^2}\left(\frac{\alpha^2-t^2}{1-\alpha^2t^2}\right)^{n_1} dt,$$

$s > 0$, $n_1 = n-p$, $n \in \mathbb{N}$. Заменой переменного по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du/((1-u)^{1/2}(1+u)^{3/2})$, этот интеграл приводится к виду

$$\varepsilon_{2n,2}(\alpha) = \frac{2M}{\pi(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_R^1 \frac{(u-R)^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)u}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{n_1} du,$$

$s>0$, где $R=(1-r^2)/(1+r^2)$, $R\in[0,1)$, $\beta=(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$.

Поскольку интеграл справа совпадает с правой частью соотношения (28) при $q=1$ и четном n_1, то $\varepsilon_{2n,2}(\alpha)=\varepsilon^*_{2n,2}(\alpha)$ при любом $\alpha\in[0,1)$. Следовательно, $\varepsilon_{2n,2}=\varepsilon^*_{2n,2}$ и имеет место утверждение (3) при $r\in(0,1]$.

Займемся случаем $r=1$. Задача поиска оптимального параметра, доставляющего асимптотически минимальное значение правой части асимптотического равенства (36), подробно рассмотрена нами в [16], когда в качестве метода рациональной аппроксимации применялись частичные суммы ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами. Повторяя рассуждения из вышеуказанной работы, находим, что при заданном $s>0$ оптимальным параметром, доставляющим асимптотически минимальное значение правой части равенства (36), будет

$$\beta^*=\frac{s\ln n}{n},\quad s>0,\ n\in\mathbb{N}. \tag{41}$$

При этом выполняется утверждение (2). Таким образом, теорема 4 доказана полностью.

Замечание 3. Асимптотическая оценка наилучших равномерных приближений в теореме 4 при $r=1$ получена в [16]. Она также совпадает по порядку с оценкой наилучших равномерных приближений функции $|x|^s$ в случае двух геометрически различных полюсов в работе Е. А. Ровбы и Е. Г. Микулича [20] об аппроксимациях функций Маркова на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных функций, введенных М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [21].

Замечание 4. В теореме 4 установлено значение параметра

$$\beta^*=\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}+\frac{(3s-2p)r^2}{4(1+r^2)}\frac{\ln n}{n}},\quad s>0,\ n\in\mathbb{N},$$

оптимальное в том смысле, что при нем равномерные приближения на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором типа Фурье (4) функций, задаваемых интегралами Пуассона в условиях теоремы 2, при $r\in(0,1)$ обладают наибольшей скоростью. Представляет интерес сравнить это значение со значением β^*, указанным в формуле (41) и оптимальным при $r=1$.

Заключение. В работе изучены аппроксимации на классах функций, представимых на отрезке $[-1,1]$ интегралами Пуассона, а также некоторых индивидуальных функций из данного класса рациональными интегральными операторами типа Фурье на основании системы алгебраических дробей Чебышёва — Маркова. Найдены интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений, когда граничная функция φ принадлежит $S^0_\infty[-1,1]$. В случае, когда граничная функция имеет на отрезке $[-1,1]$ степенную особенность, получены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, точные в случае четного количества полюсов аппроксимирующей функции. В случае фиксированного числа геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции установлено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Если аппроксимирующая функция имеет два геометрически различных комплексно сопряженных полюса в открытой комплексной плоскости, то найдены асимптотические оценки наилучших мажорант равномерных приближений функций, представимых интегралами Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность, и асимптотически точная оценка наилучших равномерных приближений рассматриваемым методом при условии их четной кратности.

Из полученных результатов можно заключить, что порядок приближений функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ интегралами Пуассона, в случае, когда граничная функция имеет степенную особенность, рациональным интегральным оператором типа Фурье оказываются в значительной степени выше соответствующих полиномиальных аналогов, т. е. исследуемый метод приближений отражает особенности рациональной аппроксимации функций из классов Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

2. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

3. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1979. № 8. С. 20–25.

4. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова — Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.

5. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. 2003. Т. 55, № 6. С. 806–816.

6. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2009. V. 6. P. 34–39.

7. *Serdyuk A. S., Sokolenko I. V.* Asymptotic behavior of best approximations of classes of Poisson integrals of functions from H_ω // J. Approx. Theory. 2011. V. 163. P. 1692–1706.

8. *Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7, № 4. С. 813–819.

9. *Русецкий Ю. И.* О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля — Пуассона // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 136–144.

10. *Жигалло Т. В.* Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона — Чебышёва // Проблемы управления и информатики. 2018. Т. 3. С. 1–14.

11. *Русак В. Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1978. Т. 3. С. 15–20.

12. *Ровба Е. А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. БГУ. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.

13. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

14. *Ровба Е. А.* О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 4. С. 52–59.

15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

16. *Ровба Е. А., Поцейко П. Г.* Аппроксимация функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами рационального ряда Фурье — Чебышёва // Весн. Гродзенскага дзяржачнага чніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 3. С. 16–28.

17. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

18. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

19. *Поцейко П. Г.* Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ // Весн. Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 2. С. 22–38.

20. *Rovba E. A., Mikulich E. G.* Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles // Vesn. Yanka Kupala State University. 2013. V. 1. P. 12–20.

21. *Джрбашян М. М.* Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

Поступила в редакцию 26 августа 2020 г.
После доработки 26 августа 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Поцейко Павел Геннадьевич, Ровба Евгений Алексеевич
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
кафедра фундаментальной и прикладной математики,
ул. Ожешко, 22, Гродно 230023, Беларусь
`pahamatby@gmail.com`, `rovba.ea@gmail.com`