А. В. Дернов, Н. А. Магницкий, О переходе к хаосу в одной неклассической системе уравнений реакция-диффузия,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 12, 1675–1679

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1675–1679

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ В ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ

© 2005 г. А. В. Дернов, Н. А. Магницкий

Введение. Системы уравнений типа реакция-диффузия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $D = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$, $d_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, возникают во многих математических моделях биофизики и экологии. Современная теория таких систем изложена, например, в монографии [1] и в работах, приведенных в ее библиографии. Диагональность матрицы D играет здесь существенную роль и означает, что пространственная диффузия реагента u_i происходит по направлению скорейшего убывания концентрации этого же реагента; миграция особей происходит в направлении наименьшей плотности заселения и т.д.

Модели, где данное условие не выполняется, стали актуальными сравнительно недавно, и они гораздо хуже изучены. Однако на практике все чаще возникают задачи, позволяющие рассматривать некоторые экономические и социальные явления как процессы в непрерывных распределенных средах [2]. В частности, модель, предложенная в работе [3] и позже развитая в [4], описывает движение капитала в технологическом пространстве с использованием естественного предположения о диффузии капитала в сторону наибольшей нормы прибыли, что приводит к неклассической системе реакции-диффузии с недиагональной матрицей D. Особенности перехода к хаосу в данной системе рассмотрены в настоящей работе.

Бесконечномерно-вырожденная бифуркация пространственно-однородного состояния равновесия. Будем рассматривать следующий одномерный вариант неклассической системы реакция-диффузия

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\varkappa\frac{\partial^2 z}{\partial c^2} + bx((1-\sigma)z - \delta y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = x(1-(1-\delta)y + \sigma z), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = a(y - dx). \tag{$2_\varkappa$}$$

Параметры $\varkappa$, a, b, d, σ, δ положительны по смыслу задачи. Предполагаем, что функции $x(c,t)$, $y(c,t)$, $z(c,t)$ принадлежат соболевскому пространству $W_2^2([0,\pi], R)$ и удовлетворяют граничным условиям

$$\left.\frac{\partial x}{\partial c}\right|_{c=0} = \left.\frac{\partial x}{\partial c}\right|_{c=\pi} = \left.\frac{\partial y}{\partial c}\right|_{c=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial c}\right|_{c=\pi} = \left.\frac{\partial z}{\partial c}\right|_{c=0} = \left.\frac{\partial z}{\partial c}\right|_{c=\pi} = 0.$$

В работе [4] показано, что при условии $1 - \sigma - \delta > 0$ система (2) имеет пространственно-однородное стационарное решение

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1-\sigma}{d(1-\sigma-\delta)}, \frac{1-\sigma}{1-\sigma-\delta}, \frac{\delta}{1-\sigma-\delta}\right),$$

условием устойчивости по первому приближению которого является неравенство

$$\delta > \delta^* = \frac{1}{bd+1}. \tag{3}$$

Рассмотрим это условие более подробно. Линеаризуем систему (2) вблизи (x^*, y^*, z^*) и рассмотрим первое приближение $\partial u/\partial t = Lu$, где

$$L(w) = \begin{pmatrix} 0 & -b\delta x^* & b(1-\sigma)x^* + \varkappa w \\ 0 & -(1-\delta)x^* & \sigma x^* \\ -ad & a & 0 \end{pmatrix}, \quad w = -\frac{\partial^2}{\partial c^2}.$$

Поскольку оператор $\partial^2/\partial c^2$ с граничными условиями второго рода на $[0,\pi]$ имеет собственные значения $-n^2$, $n=0,1,\ldots$, и соответствующие собственные функции $\cos nc$, то оператор L будет иметь собственные векторы вида $u_{n1,2,3}=v_{n1,2,3}\cos nc$, где $v_{n1,2,3}$ являются собственными векторами матрицы $A^{(n)}=L(n^2)$, нормированными на единицу. Соответствующие им собственные значения являются корнями кубического уравнения

$$\lambda_n^3+(1-\delta)x^*\lambda_n^2+a(bdx^*(1-\sigma)-\sigma x^*+d\varkappa n^2)\lambda_n+ax^*(b(1-\sigma)+d(1-\delta)\varkappa n^2)=0. \tag{4}$$

Исследовав устойчивость многочлена в уравнении (4) с помощью критерия Гурвица, нетрудно получить его условие в виде (3), не зависящем от n. Далее, вычисляя собственные значения в критический момент $\delta=\delta^*$, получаем

$$\lambda_{n1,2}=\pm i\sqrt{a(bdx^*(1-\sigma)-\sigma x^*+d(1-\delta)\varkappa n^2)},\quad \lambda_{n3}=-(1-\delta)x^*,$$

где подкоренное выражение всегда положительно при выполнении условия $1-\sigma-\delta>0$. Таким образом, в данной задаче происходит бесконечномерное вырождение с переходом через мнимую ось одновременно счетного числа собственных значений оператора L.

Это означает, что в данном случае не может быть применен классический геометрический подход, состоящий в сведении исходной задачи на конечномерное центральное многообразие и позволяющий применить хорошо развитую теорию бифуркации положения равновесия в конечномерных системах [5]. Однако оказывается, что и в данном случае при бесконечномерно-вырожденной бифуркации потери устойчивости состояния равновесия системы (2) образуется пространственно-однородный устойчивый предельный цикл.

Для доказательства этого факта воспользуемся математическим аппаратом анализа автоколебаний распределенных систем в окрестности бесконечномерного вырождения с помощью нормальных форм, развитым Ю.С. Колесовым и его учениками, изложенным в [6] и в работах, указанных в приведенной там библиографии. Положив

$$u=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}=(x-x^*,y-y^*,z-z^*)^{\mathrm{T}},\quad \varepsilon=\delta^*-\delta,$$

представим систему $(2_\varkappa)$ в виде

$$\dot u=(L_0+\varepsilon L_1)u+F_0(u,u)+\varepsilon F_1(u,u), \tag{5}$$

где

$$L_0=\begin{pmatrix}0 & -b\delta^*x^* & b(1-\sigma)x^*-\varkappa\,\partial^2/\partial c^2\\ 0 & -(1-\delta^*)x^* & \sigma x^*\\ -ad & a & 0\end{pmatrix},\quad L_1=\begin{pmatrix}0 & bx^* & 0\\ 0 & -x^* & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$F_0(u,v)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b(1-\sigma)(u_1v_3+v_1u_3)-b\delta^*(u_1v_2+v_1u_2)\\ (1-\delta^*)(u_1v_2+v_1u_2)+\sigma(u_1v_3+v_1u_3)\\ 0\end{pmatrix},\quad F_1(u,v)=\frac{1}{2}(u_1v_2+v_1u_2)\begin{pmatrix}b\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственные значения оператора L_0 являются корнями семейства уравнений (4) и найдены выше. Особо выделим собственное значение $i\omega=i\sqrt{a(bdx^*(1-\sigma)-\sigma x^*)}$, соответствующее пространственно-однородному собственному вектору a_0 оператора L_0.

Теорема. *При любом положительном $\varkappa$ в некоторой положительной области значений параметров a, b, d, σ существует $\delta_1^*<\delta^*$ такое, что при всех $\varepsilon<\delta^*-\delta_1^*$ в системе (5) существует асимптотически орбитально устойчивый пространственно-однородный цикл вида*

$$u=\sqrt{\varepsilon\eta}a_0e^{i\omega t}+\text{c.c.}+O(\varepsilon),$$

где a_0 – собственный вектор оператора L_0, соответствующий собственному значению $i\omega$, η – некоторая положительная постоянная, c.c. *– комплексно сопряженное.*

Доказательство. Будем искать решение системы (5) в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u=\sqrt{\varepsilon}u^{(0)}(\varphi)+\varepsilon u^{(1)}(\varphi)+\varepsilon^{3/2}u^{(2)}(\varphi)+\ldots, \tag{6}$$

где $\varphi = \omega(1+\varepsilon\alpha)t$, все функции $u^{(k)}(\varphi)$ 2π-периодичны,

$$u^{(0)} = \xi a_0 e^{i\varphi} + \bar{\xi}\bar{a}_0 e^{-i\varphi}, \tag{7}$$

постоянные α и ξ будут определены ниже. Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (5) и приравнивая коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$, соответственно для нахождения $u^{(k)}$, $k=1,2$, получаем линейные неоднородные уравнения вида

$$\omega\frac{du^{(k)}}{d\varphi} = L_0 u^{(k)} + g^{(k)}(\varphi).$$

Для $k=1$ имеем

$$g^{(1)}(\varphi) = \xi^2 F_0(a_0,a_0)e^{2i\varphi} + \xi\bar{\xi}F_0(a_0,\bar{a}_0) + \text{c.c.}$$

Ищем решение в виде полинома по $e^{i\varphi}$ нулевой и второй степени $u^{(1)}(\varphi) = v_0^{(1)} + v_2^{(1)}e^{2i\varphi} + \text{c.c.}$ Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $e^{i\varphi}$, находим

$$v_0^{(1)} = -\xi\bar{\xi}L_0^{-1}F_0(a_0,\bar{a}_0), \quad v_2^{(1)} = \xi^2[2i\omega I - L_0]^{-1}F_0(a_0,a_0).$$

Принимая во внимание вычисленные ранее собственные значения оператора L_0, нетрудно видеть, что операторы L_0 и $2i\omega I - L_0$ обратимы.

Аналогично для $k=2$ получаем полином

$$g^{(2)}(\varphi) = L_1 u^{(0)} + 2F_0(u^{(0)},u^{(1)}) - \alpha\omega\frac{du^{(0)}}{d\varphi},$$

содержащий только первые и третьи гармоники:

$$g^{(2)}(\varphi) = \xi([L_1 a_0 - i\alpha\omega a_0] + |\xi|^2 q)e^{i\varphi} + 2\xi F_0(a_0, v_2^{(1)})e^{3i\varphi} + \text{c.c.},$$

где

$$q = -4F_0(a_0,[L_0^{-1}F_0(a_0,\bar{a}_0)]) + 2F_0(\bar{a}_0,\{[2i\omega I - L_0]^{-1}F_0(a_0,a_0)\}).$$

Ищем решение в виде тригонометрического полинома той же структуры

$$u^{(2)}(\varphi) = v_1^{(2)}e^{i\varphi} + v_3^{(2)}e^{3i\varphi} + \text{c.c.}$$

Коэффициент $v_3^{(2)}$ при $e^{3i\varphi}$ находится из уравнения

$$[3i\omega I - L_0]v_3^{(2)} = 2\xi F_0(a_0, v_2^{(1)}),$$

разрешимость которого следует из вычисленных выше собственных значений оператора L.

Для определения коэффициента $v_1^{(2)}$ получим вырожденное операторное уравнение

$$[i\omega I - L_0]v_1^{(2)} = f,$$

где $f = \xi([L_1 a_0 - i\alpha\omega a_0] + |\xi|^2 q)$. Как известно, данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(f, b_0) = 0$, где b_0 – собственный вектор сопряженного оператора L_0^*, соответствующий собственному значению $-i\omega$, $(a_0, b_0) = 1$. Подставляя выражение для f, получаем условие

$$[[(L_1 a_0, b_0) - i\alpha\omega] + (q, b_0)|\xi|^2]\xi = 0. \tag{8}$$

Попытаемся найти ненулевые постоянные ξ и α, чтобы удовлетворить этому условию. Проверим знак величины $\eta = -\operatorname{Re}(L_1 a_0, b_0)/\operatorname{Re}(q, b_0)$. Если $\eta > 0$, то, положив

$$\xi = \sqrt{\eta}, \quad \alpha = (\operatorname{Im}(L_1 a_0, b_0) + \eta\operatorname{Im}(q, b_0))/\omega,$$

мы удовлетворим условию (8). Более того, в этом случае выполняются все условия основной бифуркационной теоремы работы [6, с. 78], утверждающей, что в системе (5) существует асимптотически орбитально устойчивый цикл, заданный в виде (6). Отсюда будет следовать утверждение исходной теоремы.

Для величины η построено достаточно сложное, но вычислимое выражение, поэтому в принципе можно численно с заданной точностью указать положительные значения a, b, d, σ, при которых η будет положительно и отделено от нуля на конечную величину.

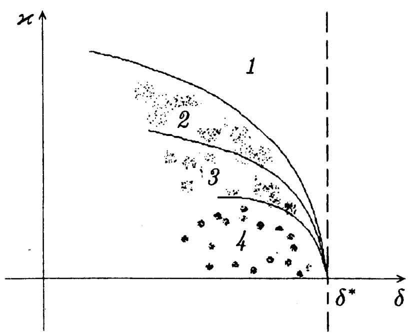

Рис. 1.

В настоящей работе для доказательства положительности η мы воспользуемся другими соображениями, которые позволяют универсальным образом анализировать бесконечномерно-вырожденную бифуркацию при условии, что соответствующая сосредоточенная система имеет устойчивый предельный цикл. Как показано в работе [4], в некоторой положительной области значений параметров a, b, d, σ в сосредоточенной системе (2_0) происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла из положения равновесия при переходе двух собственных значений $\pm i\omega$ через мнимую ось. Очевидно, что в данном случае предельный цикл системы (2_0) соответствует пространственно-однородному циклу системы $(2_\varkappa)$. Заметим, что основная бифуркационная теорема работы [6, с. 78] справедлива и в конечномерном случае. По указанному выше алгоритму для системы (2_0) можно построить нормальную форму и сделать соответствующий вывод о возникающем там предельном цикле. Повторяя алгоритм, нетрудно убедиться в том, что результирующее условие (8) в распределенной и сосредоточенной системах будет определяться тем же самым выражением. Таким образом, зная о существовании устойчивого цикла в системе (2_0), мы получаем утверждение о положительности величины η, которая обеспечивает устойчивость пространственно-однородного цикла в распределенной системе $(2_\varkappa)$. Теорема доказана.

Более сложные аттракторы и сценарии перехода к хаосу. Как показал численный эксперимент, при $\delta = \delta_1^*$ пространственно-однородный цикл теряет устойчивость, причем чем меньше коэффициент диффузии $\varkappa$, тем меньше разность $\delta^* - \delta_1^*$ (область *1*, рис. 1).

Как показано в работе [4], сосредоточенная система (2_0) при уменьшении параметра δ претерпевает каскад бифуркаций Фейгенбаума с образованием сингулярного аттрактора Фейгенбаума. То же самое численно подтверждено и для распределенной системы $(2_\varkappa)$ при достаточно большом коэффициенте диффузии $\varkappa$, когда система по своим свойствам близка к сосредоточенной. Будем называть этот каскад по-прежнему каскадом Фейгенбаума.

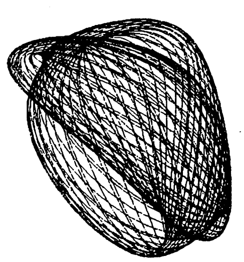

Рис. 2.

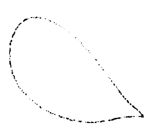

Рис. 3.

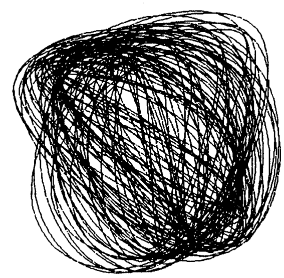

Рис. 4.

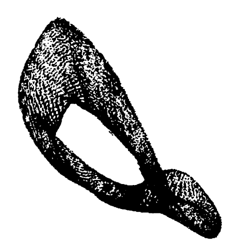

Рис. 5.

Однако при уменьшении значения коэффициента диффузии $\varkappa$ наблюдается качественно иная картина, которая проиллюстрирована на бифуркационной диаграмме (рис. 1): пространственно-однородный цикл (область *1*) теряет устойчивость и образуется пространственно-неоднородный устойчивый цикл (область *2*), который бифурцирует с образованием устойчивого двумерного тора (область *3*). Его проекция и проекция его сечения Пуанкаре показаны соответственно на рис. 2 и 3.

Далее двумерный тор бифурцирует с образованием еще более сложных аттракторов (область *4*, рис. 1). На рис. 4 и 5 показаны соответственно проекция траектории на аттракторе и сечение Пуанкаре системы при значениях параметров из области *4*.

Данный сценарий назовем каскадом пространственной хаотизации. Являются ли аттракторы из области (5) торами большей размерности и как они бифурцируют дальше, пока не решенная проблема.

Заключение. В работе исследована бифуркация потери устойчивости и переход к хаосу в неклассической системе с диффузией, описывающей распределенную экономическую систему. Построена бифуркационная диаграмма и выделены два различных сценария усложнения решений: сценарий Фейгенбаума и сценарий пространственной хаотизации.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 04-01-0225а) и программой ОИТВС РАН (проект 1.12)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М., 2005.
2. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной теории: Пер. с англ. М., 1999.
3. *Магницкий Н.А.* // Тр. ВНИИСИ. 1991. С. 16–22.
4. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* // Нелинейная динамика и управление / Под ред. Емельянова С.В., Коровина С.К. Вып. 2. М., 2002. С. 243–262.
5. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения: Пер. с англ. М., 1980.
6. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: Учебн. пособие. Ярославль, 2003.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт системного анализа РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
02.06.2005 г.