М. Х. Халлаев, Некоторые теоремы типа Фрагмена–Линделефа для решений полулинейных параболических неравенств, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 151–153

При $|ab| = 2$ в случае $a \neq b$, $a \neq b^{-1}$ ребрами мы будем соединять такие элементы $g_i, g_j \in G$, для которых $g_i^{-1}g_j = a, b, a^{-1}$ или b^{-1}, и объявим многоугольниками, соприкасающимися в точке $g \in G$, следующие множества элементов: $M_a(g)$, $M_b(g)$, как и для случая $|ab| > 2$, а также четырехугольники

$$M_{ab}(g) = \{g, ga, gab, gaba\},$$

$$M_{ba}(g) = \{g, gb, gba, gbab\}.$$

Триангуляцию всех многоугольников (в том числе $M_{ab}(g)$ и $M_{ba}(g)$) мы проводим, как и выше. Число всех четырехугольников $M_{ab}(g)$ и $M_{ba}(g)$ равно $2|G|/4 = |G|/|ab|$, G действует на них транзитивно, как на левых смежных классах по подгруппе $\langle ab \rangle$. Это вытекает из того, что каждый из этих четырехугольников содержит левый смежный класс группы G по подгруппе $\langle ab \rangle$, причем разные четырехугольники содержат и разные классы. Следовательно, $\varphi^{(0)} = R + 1^G_{\langle a \rangle} + 1^G_{\langle b \rangle} + 1^G_{\langle ab \rangle}$. Число ребер равно $6|G|$ и представление $\varphi^{(1)}$ есть сумма шести экземпляров представления R. Число двумерных симплексов равно $|a|(|G|/|a|) + |b|(|G|/|b|) + 4(|G|/|ab|) = 4|G|$ и отображение φ_x при $x \neq 1$ не имеет на них неподвижных точек, т. е. $\varphi^{(2)} = R + R + R + R$. Подставляя значения $\varphi^{(i)}$ в формулу Хопфа, снова получаем равенство $R + 1_G + 1_G = 1^G_{\langle a \rangle} + 1^G_{\langle b \rangle} + 1^G_{\langle ab \rangle} + \tilde{\varphi}^{(1)}$.

При подсчете числа ребер мы пользовались тем, что $a \neq b$, $a \neq b^{-1}$. Если $a = b$ или $a = b^{-1}$, то G — циклическая группа и наше утверждение для регулярного представления выполняется также. Теорема тем самым полностью доказана.

Следствие. *Пусть конечная группа $G = \langle a, b \rangle$, причем $|a| > 2$, $|b| > 2$, F — ее произвольное абсолютно неприводимое нееденичное обыкновенное представление. Обозначим через k_x кратность вхождения F в представление $1^G_{\langle x \rangle}$. Тогда $k_a + k_b + k_{ab} \leqslant n$, где n — степень представления F.*

Замечание. Легко показать, что при $|a| = 3$, $|b| = 3$, $|ab| = 2$ порядок группы G равен 12, а при $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|ab| = 2$ он равен 60. В обоих этих случаях $H_1(S) = 0$ и, следовательно, представление T в формуле разложения регулярного представления отсутствует.

Московский
инженерно-физический институт

Поступило
18.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.; Л.: ГОНТИ, 1938.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

М. Х. Халлаев

Пусть функции $\psi_1(\tau, \eta)$ и $\psi_2(\tau, \eta)$ определены на всей плоскости (τ, η), дифференцируемы по первому аргументу и непрерывно дифференцируемы по второму. Положим $\rho(\tau, \eta) = \frac{1}{2}[\psi_2(\tau, \eta) - \psi_1(\tau, \eta)]$ и обозначим через $K(\eta)$ кривизну линии $z = \psi_2(\tau, \eta)$, $\tau = \mathrm{const}$. Пусть выполнены следующие условия:

1) $0 < \rho(\tau, \eta) < h$, $h = \mathrm{const}$;
2) $\rho(-\tau, \eta) = \rho(\tau, \eta)$;

3) $|\rho'_\tau(\tau, \eta)| < \frac{\nu}{bh}$, где ν и b — достаточно малые константы;

4) $|\rho'_\eta(\tau, \eta)| < \frac{\nu}{10}$;

5) $|\psi'_{2,\tau}(\tau, \eta)| \leqslant \frac{\gamma}{\rho(\tau, \eta)}$, $\gamma = \mathrm{const}$;

6) $K(\eta) \leqslant \frac{1}{4\rho(\tau, \eta)}$.

Пусть в неограниченной области

$$G = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t < 0,\ \psi_1(t, r) < x_1 < \psi_2(t, r),\ -\infty < x_i < +\infty,\ i = \overline{2, n}\},$$

где $r = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} x_i^2}$, определен оператор

$$L - \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}$$

с ограниченными измеримыми коэффициентами a_{ij}, $a_{ij} = a_{ji}$ и имеется константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lambda |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leqslant \lambda^{-1} |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Будем рассматривать решения в области G неравенства

$$\left| Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leqslant \varphi(|\nabla u|), \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$u(t, x)|_{x_1 = \psi_1(t, r)} = u(t, x)|_{x_2 = \psi_2(t, r)} = 0. \tag{2}$$

Под решением задачи (1)—(2) в области G будем понимать функцию $u(t, x)$ из класса $C^{1,2}(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющую этим соотношениям.

Обозначим $U^{\tau, 0}_{0, R} = \{(t, x) \in G \mid -\tau < t < 0,\ \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant R^2\}$; $M(R) = \sup_{\partial U^{\frac{b}{81}R^2,\ 0}_{0, R}} |u(t, x)|$, где $\partial U^{\tau, 0}_{0, R}$ — параболическая граница области $U^{\tau, 0}_{0, R}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть заданы постоянные $C > 0$ и $\alpha > 0$. Пусть $\varphi(\xi) = C\xi^{1+\alpha}$ и $u(t, x)$ — решение задачи (1)—(2) в области G. Тогда либо 1) $u \equiv 0$ в G, либо 2) $\exists N = N(n, \lambda, \alpha)$ такое, что для достаточно больших r*

$$M(r) > N \int_0^{\frac{b}{81} r^2} \frac{d\tau}{[\rho(\tau, 0)]^{1 + \frac{1}{\alpha}}} + N \int_0^r \frac{d\xi}{[\rho(0, \xi)]^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть задано произвольное $N > 1$. Существует такое $C > 0$, что справедливо следующее. Пусть $\varphi(\xi) = C\xi |\ln \xi|$ и $u(t, x)$ — решение задачи (1)—(2) в области G. Тогда либо 1) $u \equiv 0$ в G, либо 2) для достаточно больших r*

$$M(r) > \left(\int_0^{\frac{b}{81} r^2} \frac{d\tau}{\rho^2(\tau, 0)} \right)^N + \left(\frac{1}{60} \int_0^r \frac{d\xi}{\rho(0, \xi)} \right)^N.$$

З а м е ч а н и е. В случае когда $\rho(\tau, \eta) \to 0$ при $\tau \to \infty$ и при $\eta \to \infty$ константа C может быть произвольной.

Пусть $p(\tau)$ — непрерывно дифференцируемая, положительная, монотонно возрастающая, выпуклая вверх функция и $p(\tau) = o(\tau)$ при $\tau \to \infty$, $p(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$. Положим $\Psi(\xi) = \xi \exp(-ap(\ln \xi))$, где a — достаточно большая константа, $F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\Psi(\xi)}$, и обозначим через $\Phi(r)$ функцию, обратную $F(\xi)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\varphi(\xi) = \xi p(\ln \xi)$; $\xi > \xi_0 > 1$. *Пусть* $u(t, x)$ — *решение задачи* (1)—(2) *в области* G. *Тогда либо* 1) $u \equiv 0$ *в* G, *либо* 2) *для достаточно больших* r

$$2M(r) > \Phi\left(2\int_0^{\frac{b}{81}r^2} \frac{d\tau}{\rho^2(\tau, 0)}\right) + \Phi\left(\frac{1}{30}\int_0^r \frac{d\xi}{\rho(0, \xi)}\right).$$

Следствие. *Пусть задано произвольное* α, $0 < \alpha < 1$. *Существует такое число* $\delta > 0$, *что если* $\varphi(\xi) = \delta\xi \,|\ln|\ln \xi||$ *и* $u(t, x)$ — *решение задачи* (1)—(2) *в области* G, *то либо* 1) $u \equiv 0$ *в* G, *либо* 2) *для достаточно больших* r

$$2M(r) > \exp\left(2\int_0^{\frac{b}{81}r^2} \frac{d\tau}{\rho^2(\tau, 0)}\right)^{\alpha} + \exp\left(\frac{1}{30}\int_0^r \frac{d\xi}{\rho(0, \xi)}\right)^{\alpha}.$$

Теоремы, приведенные в данной работе, а также следствие из теоремы 3 являются усилениями аналогичных результатов работы [2, теоремы 1.1, 2.1, 2.2, а также обзор на с. 46—47]. Доказательство каждого из этих утверждений проводится в два этапа. Например, теорема 1 доказывается по следующей схеме.

1) Рассмотрим неограниченную область

$D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t_1 < t < t_2, \psi_1(r) < x_1 < \psi_2(r), -\infty < x_i < +\infty, i = \overline{2, n}\}$,

где функции $\psi_k(r)$ удовлетворяют всем требованиям, наложенным на функции $\psi_k(t, r)$ по второму аргументу. Для решений задачи (1)—(2) в области D получается оценка $M(r) > N\int_0^r \frac{d\xi}{[\rho(\xi)]^{1/\alpha}}$. Эта оценка, так же как и аналогичные результаты работы [2], получается с помощью построения суперрешения. Более точной оценка получается в силу суживания области D.

2) Рассмотрим теперь неограниченную область

$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t < 0, \quad \psi_1(t) < x_1 < \psi_2(t), \quad -\infty < x_i < +\infty, i = \overline{2, n}\}$,

где функции $\psi_k(t)$ удовлетворяют всем требованиям, наложенным на функции $\psi_k(t, r)$ по первому аргументу. Для решений задачи (1)—(2) в области Ω получается оценка $M(r) > N\int_0^{\frac{b}{81}r^2} \frac{d\tau}{[(\rho(\tau)]^{1+1/\alpha}}$. Эта оценка получается подобно предыдущей, с той лишь разницей что суперрешение строится с помощью функции $F_{s,\beta}(t, x)$, свойства которой описаны в работе [1, с. 176—178]. Из указанных двух оценок и следует утверждение теоремы 1:

$$M(r) > N\int_0^r \frac{d\xi}{[\rho(0, \xi)]^{1/\alpha}}.$$

Туркменский
политехнический институт

Поступило
19.03.87
Переработанный вариант
27.02.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 2. Ландис Е. М. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 45—62.