Е. К. Макаров, И. В. Марченко, Н. В. Семерикова, Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 215–224

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 215-224

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДЛЯ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ НА ПОЛУОСИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2005 г. Е. К. Макаров, И. В. Марченко, Н. В. Семерикова

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq \leq M < +\infty$ при всех $t \geq 0$, и показателями $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей условию интегральной ограниченности [1, с. 252], т.е. неравенству $\int_t^{t+1} \|Q(\tau)\|\, d\tau \leq C_Q < +\infty$ при всех $t \geq 0$, где C_Q – некоторая константа, зависящая от Q. Для показателей системы (2) будем использовать обозначения $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$.

Одной из важных задач современной теории характеристических показателей является задача построения достижимых верхних оценок для старшего показателя возмущенной системы (2), т.е. величин $\sup\limits_Q \lambda_n(A+Q)$, где возмущение Q предполагается принадлежащим какому-либо классу малости.

Оценка сверху для старшего показателя системы (2) с малыми возмущениями – так называемый центральный показатель $\Omega(A)$ системы (1) – была построена в [2] (см. также [1, с. 114]). Достижимость этой оценки доказана В.М. Миллионщиковым в [3] с помощью его, ставшего уже классическим, метода поворотов [3, 4, см. также 5, с. 90]. Старший сигма-показатель $\nabla_\sigma(A)$, являющийся достижимой оценкой сверху для старшего показателя системы (2) с σ-возмущениями, т.е. возмущениями, удовлетворяющими при всех $t \geq 0$ неравенству $\|Q(t)\| \leq \leq N_Q e^{-\sigma t}$ с фиксированным $\sigma > 0$ и некоторой постоянной N_Q, зависящей от Q, вычислен в [6], где установлено равенство $\nabla_\sigma(A) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\xi_m(\sigma)$, в котором последовательность $\xi_m(\sigma)$ при $m>1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\xi_m(\sigma) = \max\limits_{k<m}(\ln\|X(m,k)\| + \xi_k(\sigma) - \sigma k)$, $m, k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1(\sigma) = 0$. В [7] рассмотрен класс всех экспоненциально убывающих возмущений и вычислен экспоненциальный показатель $\nabla_0(A)$, оценивающий показатели систем с такими возмущениями. Промежуточные случаи, когда возмущение затухает на бесконечности, но скорость его убывания медленнее, чем экспоненциальная, рассмотрены в [8, 9]. В работе [10] для старшего показателя системы (2) с абсолютно интегрируемыми на полуоси $[0, +\infty[$ возмущениями, которые определяются условием $\int_0^\infty \|Q(t)\| dt < +\infty$, установлена достижимая оценка $\lambda_n(A+Q) \leq \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\xi_m$, где последовательность ξ_m при $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$, определяется рекуррентным соотношением $\xi_m = \max\limits_{k<m}(\ln\|X(m,k)\| + \xi_k - \ln k)$, $k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1 = 0$. Точные границы подвижности показателей Ляпунова при малых в среднем возмущениях найдены в [11]. В [12] доказана достижимость верхнего центрального показателя для систем с возмущениями, стремящимися к нулю на бесконечности.

В настоящей работе получены достижимые оценки сверху для старшего показателя системы (2) с возмущениями, суммируемыми на полуоси с монотонным положительным весом, а также с возмущениями, суммируемыми со степенью. Указанные оценки по своей структуре аналогичны тем, которые построены в [6, 8–10], но в настоящей работе с целью получения более компактных формул для них принято мультипликативное представление, т.е. в их записи используются величины $\eta_k = \exp \xi_k$.

Замечание 1. При рассмотрении постоянно действующих возмущений, малость которых определяется различными интегральными условиями, естественно принимать во внимание не только те из них, которым соответствует ограниченная матрица Q, но и те, для которых она неограничена при $t \geq 0$. Чтобы при этом не выйти за пределы класса систем, у которых каждое решение имеет конечный показатель, на матрицу возмущений наложено условие интегральной ограниченности. Напротив, матрица коэффициентов исходной системы предполагается ограниченной, поскольку [1, с. 253] всегда существует замена времени, приводящая систему с интегрально ограниченными коэффициентами к системе, коэффициенты которой ограничены в обычном смысле. В случае системы (2) такая замена оказывается существенно зависящей от выбора матрицы возмущений Q, поэтому в настоящей работе она не используется.

Пусть $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau)$ – матрицы Коши систем (1) и (2) соответственно. Обозначим $X_k = X(k+1,k)$, $Y_k = Y(k+1,k)$, где $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Лемма 1. *Каково бы ни было $k \in \mathbb{N}_0$, для матрицы Коши системы (2) имеет место представление $Y_k = X_k(E+V_k)$, причем справедливы неравенства $\|V_k\| \leq b\int_k^{k+1} \|Q(\tau)\|\,d\tau \leq$ $\leq bC_Q$, где $b := e^{2M+C_Q}$.*

Доказательство. Применяя формулу Коши, матрицу $Y(t,s)$ можно представить в виде $Y(t,s) = X(t,s)(E + \int_s^t X(s,\tau)Q(\tau)Y(\tau,s)\,d\tau)$. Положив $V_k = \int_k^{k+1} X(k,\tau)Q(\tau)Y(\tau,k)\,d\tau$, будем иметь требуемое равенство $Y_k = X_k(E+V_k)$. Оценим теперь величину $\|V_k\|$. Согласно [13, с. 14], для матрицы Коши системы (2) при любых $t > s \geq 0$ справедлива оценка $\|Y(t,s)\| \leq \exp(\int_s^t \|A(\tau)+Q(\tau)\|\,d\tau)$. Отсюда при $1 \geq t-s > 0$, учитывая свойства матриц A и Q, получаем неравенства $\|Y(t,s)\| \leq \exp(\int_s^t(\|A(\tau)\| + \|Q(\tau)\|)\,d\tau) \leq e^{M+C_Q}$ и $\|X(s,t)\| \leq e^M$. Таким образом, имеем оценку

$$\|V_k\| \leq \int\limits_k^{k+1} \|X(k,\tau)\|\|Q(\tau)\|\|Y(\tau,k)\|\,d\tau \leq \int\limits_k^{k+1} e^M\|Q(\tau)\|e^{M+C_Q}\,d\tau = b\int\limits_k^{k+1} \|Q(\tau)\|\,d\tau \leq bC_Q.$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим $\langle m\rangle = \{0,1,\ldots,m-1\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Пусть d – произвольное подмножество множества $\langle m\rangle$. Пронумеруем элементы множества d в порядке возрастания $d_1 < d_2 < \ldots$ $\ldots < d_{|d|} =: H(d)$, где $|d|$ – число элементов множества d, тогда $d = \{d_1, d_2, \ldots, H(d)\}$. Пусть B_i, U_i, $i \in \langle m\rangle$, – некоторые последовательности вещественных квадратных матриц одного порядка. Каждому $d \subset \langle m\rangle$ поставим в соответствие матрицу $S_d^m(B,U) = \prod_{i=0}^{m-1} B_iW_i(d)$, где $W_i(d) = U_i$, если $i \in d$, и $W_i(d) = E$, если $i \notin d$. Здесь и далее будем считать, что символ $\prod$ обозначает произведение, упорядоченное по убыванию номеров.

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для любых двух последовательностей квадратных матриц одного порядка B_i, U_i, $i \in \langle m\rangle$, справедливо равенство $\sum_{d\subset\langle m\rangle} S_d^m(B,U) = \prod_{i=0}^{m-1} B_i(E+U_i)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $m \in \mathbb{N}$ и разобьем множество $2^{\langle m+1\rangle}$ всех подмножеств множества $\langle m+1\rangle$ на два непересекающихся класса $G(m)$ и $\overline{G}(m)$. К $G(m)$ отнесем все элементы множества $2^{\langle m+1\rangle}$, не содержащие m, к $\overline{G}(m)$ – все остальные элементы множества $2^{\langle m+1\rangle}$.

Так как любое $d \in G(m)$ состоит из элементов множества $\langle m+1\rangle \setminus \{m\} = \langle m\rangle$, то $d \subset \langle m\rangle$. С другой стороны, для любого $d \subset \langle m\rangle$ выполняется $d \subset \langle m+1\rangle$ и $m \notin d$, т.е. $d \in G(m)$. Таким образом, $G(m) = 2^{\langle m\rangle}$.

Для любого элемента $d \in \overline{G}(m)$ имеем $d^* := d\setminus\{m\} \subset \langle m\rangle$, поэтому справедливо равенство $d = d^*\cup\{m\}$, где $d^* \in 2^{\langle m\rangle}$. Обратно, для любого $d^* \subset \langle m\rangle$ выполнено $d := d^*\cup\{m\} \subset \langle m+1\rangle$, т.е. $d \in 2^{\langle m+1\rangle}$ и $d \in \overline{G}(m)$. Таким образом, $\overline{G}(m) = \{d \cup \{m\} : d \in 2^{\langle m\rangle}\}$ и справедлива

формула
$$2^{\langle m+1\rangle} = 2^{\langle m\rangle} \sqcup \{d \cup \{m\} : d \in 2^{\langle m\rangle}\} = G(m) \sqcup \overline{G}(m). \tag{3}$$

Теперь докажем требуемое равенство методом математической индукции. При $m = 1$ имеем соотношения $\sum_{d\subset\langle 1\rangle} S_d^1(B,U) = B_0E + B_0U_0 = B_0(E + U_0) = \prod_{i=0}^{0} B_i(E + U_i)$. Пусть утверждение леммы имеет место при $m = k$. Проверим его выполнение при $m = k + 1$. В силу формулы (3) справедливы равенства

$$\sum_{d\subset\langle k+1\rangle} S_d^{k+1}(B,U) = \sum_{d\in G(k)} S_d^{k+1}(B,U) + \sum_{d\in\overline{G}(k)} S_d^{k+1}(B,U) =$$

$$= B_kE \sum_{d\subset\langle k\rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_iW_i(d) + B_kU_k \sum_{d\subset\langle k\rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_iW_i(d) =$$

$$= B_k(E + U_k) \sum_{d\subset\langle k\rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_iW_i(d) = B_k(E + U_k) \sum_{d\subset\langle k\rangle} S_d^k(B,U).$$

Учитывая предположение индукции, получаем

$$\sum_{d\subset\langle k+1\rangle} S_d^{k+1}(B,U) = B_k(E + U_k) \prod_{i=0}^{k-1} B_i(E + U_i) = \prod_{i=0}^{k} B_i(E + U_i).$$

Доказательство леммы 2 завершено.

Следствие 1. *Для любой последовательности положительных чисел u_i, $i \in \langle m\rangle$, справедливы соотношения $\sum_{d\subset\langle m\rangle} \prod_{i\in d} u_i = \prod_{i=0}^{m-1}(1 + u_i) \le \exp\sum_{i=0}^{m-1} u_i$, где предполагается, что $\prod_{i\in\emptyset} u_i = 1$.*

Доказательство. При $B_i = 1$, $U_i = u_i$, $i \in \langle m\rangle$, по лемме 2 получаем указанное равенство. В силу соотношения $1 + u \le e^u$, справедливого для любого $u \in \mathbb{R}$, при $u_i > 0$, $i \in \langle m\rangle$, выполняется неравенство $0 < 1 + u_i \le e^{u_i}$, из которого вытекает требуемое. Следствие 1 доказано.

Пусть зафиксировано некоторое возмущение Q, удовлетворяющее сделанным выше предположениям. Определим множители V_i, $i \in \mathbb{N}_0$, соответствующие этому возмущению в силу леммы 1, и рассмотрим матрицы $S_d^m := S_d^m(X,V)$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $X_{k+s}\cdots X_{k+1}X_k = X(k+s+1,k)$ при любых $k,s \in \mathbb{N}_0$, перемножая все X_k, такие, что $k \ge H(d)$, $k < d_1$ или $d_{i+1} > k \ge d_i$, $i = 1,\ldots,|d|$, т.е. те X_k, между которыми нет промежуточных множителей V_k, для S_d^m получаем представление $S_d^m = X(m,H(d))V_{H(d)}\cdots X(d_2,d_1)V_{d_1}X(d_1,0)$. Отсюда вытекает оценка

$$\|S_d^m\| \le \|X(m,H(d))\|\|V_{H(d)}\|\cdots\|X(d_2,d_1)\|\|V_{d_1}\|\|X(d_1,0)\| =: Z_d(m). \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольную последовательность положительных чисел h_i, $i \in \mathbb{N}_0$, и построим последовательность матриц $\widetilde{V}_i = h_iV_i$, $i \in \mathbb{N}_0$. Тогда в силу положительной однородности нормы будем иметь неравенства $\|S_d^m(X,\widetilde{V})\| \le Z_d(m)\prod_{i\in d} h_i =: Z_d^h(m)$. Величины $Z_d^h(m)$ играют основную роль в проводимых ниже оценках.

Теорема 1. *Пусть заданы положительные числа h_i, $i \in \mathbb{N}_0$, и $K(m)$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что выполнено неравенство $\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{-1} \le K(m)$. Тогда для матрицы Коши системы (2) имеет место оценка $\|Y(m,0)\| \le e^{K(m)}I_m^h$, где $I_m^h := \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)$, $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. При всяком $m \in \mathbb{N}$ матрицу Коши системы (2) можно представить в виде $Y(m,0) = Y_{m-1}\cdots Y_1Y_0$. Используя леммы 1 и 2, отсюда получаем соотношения

$$Y(m,0) = \prod_{i=0}^{m-1} X_i(E + V_i) = \sum_{d\subset\langle m\rangle} S_d^m.$$

Согласно (4), имеем оценку

$$\|Y(m,0)\| \le \sum_{d\subset\langle m\rangle} \|S_d^m\| \le \sum_{d\subset\langle m\rangle} Z_d(m). \tag{5}$$

Пусть числа $K(m)$ и $h_i > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяют условию теоремы. Так как $Z_d^h(m) = Z_d(m)\prod_{i\in d} h_i$, то при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\|Y(m,0)\| \le \sum_{d\subset\langle m\rangle} Z_d(m) = \sum_{d\subset\langle m\rangle}(Z_d^h(m)\prod_{i\in d} h_i^{-1}) \le \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)\sum_{d\subset\langle m\rangle}\prod_{i\in d} h_i^{-1}$. Отсюда в силу следствия 1 имеем $\|Y(m,0)\| \le \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)\exp\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{-1} \le e^{K(m)} \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)$. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Если ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} h_i^{-1}$ *сходится, то для матрицы Коши системы (2) справедлива оценка* $\|Y(m,0)\| \le e^K I_m^h$, *где* $K = \sum_{i=0}^{\infty} h_i^{-1}$.

Установим связь полученных результатов с методом верхних функций.

Следствие 3. *Пусть заданы функции* $R: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *и* $a: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *такие, что для матрицы Коши системы (1) справедлива оценка* $\ln\|X(t,s)\| \le R(t) - R(s) + a(s)$. *Пусть также заданы некоторые кусочно-непрерывные и интегрально ограниченные возмущения* Q. *Тогда при всех* $m \in \mathbb{N}_0$ *для матрицы Коши системы (2) выполняется неравенство* $\|Y(m,0)\| \le e^{\widetilde K(m)} e^{R(m)}$, *где* $\widetilde K(m) = a(0) - R(0) + \sum_{i=0}^{m-1}\|V_i\|\exp a(i)$, *а числа* $\|V_k\|$ *определяются согласно лемме 1.*

Доказательство. Используя (4) и оценку для нормы матрицы Коши системы (1), указанную в условии следствия, получаем оценку $Z_d(m) \le \exp(R(m) - R(H(d)) + a(H(d)) + R(H(d)) + \ldots + R(d_2) - R(d_1) + a(d_1) + R(d_1) - R(0) + a(0))\prod_{i\in d}\|V_i\|$. Отсюда после взаимного уничтожения членов с противоположными знаками в показателе экспоненты будем иметь соотношения $Z_d(m) \le \exp(R(m) - R(0) + a(0))\exp(\sum_{i\in d} a(i))\prod_{i\in d}\|V_i\| = \exp(R(m) - R(0) + a(0))\prod_{i\in d}(\|V_i\|\exp a(i))$. В силу (5) справедливы неравенства $\|Y(m,0)\| \le \sum_{d\subset\langle m\rangle} Z_d(m) \le \exp(R(m)-R(0)+a(0))\sum_{d\subset\langle m\rangle}\prod_{i\in d}(\|V_i\|\exp a(i))$, из которых требуемая оценка получается в результате применения следствия 1. Следствие 3 доказано.

Чтобы получить формулу для рекуррентного вычисления максимума $\max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)$, введем в рассмотрение величину $\Gamma_d^\beta(m) = \gamma_0\|X(m,H(d))\|\beta(H(d))\cdots\|X(d_2,d_1)\|\beta(d_1)\|X(d_1,0)\|$, где $\beta: \mathbb{N}_0 \to [0,+\infty[$ и $\gamma_0 > 0$.

Лемма 3. *Последовательность чисел* $\eta_m = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m)$, $m \in \mathbb{N}$, *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *с начальным условием* $\eta_1 = \gamma_0\|X(1,0)\|\max\{1,\beta(0)\}$.

Доказательство. Пусть множество $D(k) \subset \langle k\rangle$ реализует $\max\limits_{d\subset\langle k\rangle}\Gamma_d^\beta(k)$, т.е. $\Gamma_{D(k)}^\beta(k) = \eta_k$ при всяком $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеем соотношения

$$\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k = \|X(m,k)\|\beta(k)\Gamma_{D(k)}^\beta(k) = \Gamma_{D'}^\beta(m) \le \max_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m) = \eta_m, \tag{6}$$

где $D' = D(k)\cup\{k\}$, $0 < k < m$. Это означает, что $\eta_m \ge \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$.

С другой стороны, справедливы равенства $\eta_m = \Gamma_{D(m)}^\beta(m) = \|X(m,j)\|\beta(j)\Gamma_{D^*}^\beta(j)$, где $j = H(D(m))$ – наибольший элемент множества $D(m)$, $D^* = D(m)\setminus\{j\}$. Учитывая, что $D^* \subset \langle j\rangle$, имеем неравенство $\Gamma_{D^*}^\beta(j) \le \max\limits_{d\subset\langle j\rangle}\Gamma_d^\beta(j) = \eta_j$. Предположим, что $\Gamma_{D^*}^\beta(j) < \eta_j$. Тогда, используя оценку (6), приходим к противоречию

$$\eta_m = \|X(m,j)\|\beta(j)\Gamma_{D^*}^\beta(j) < \|X(m,j)\|\beta(j)\eta_j \le \eta_m.$$

Таким образом, $\Gamma_{D^*}^\beta(j) = \eta_j$ и, следовательно, $\eta_m = \|X(m,j)\|\beta(j)\eta_j$. Так как

$$\eta_m \ge \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$$

и $0 < j < m$, это означает, что $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$.

Наконец, если $m = 1$, то по определению η_m имеем равенства

$$\eta_1 = \max_{d\subset\langle 1\rangle} \Gamma_d^\beta(1) = \max\{\gamma_0\|X(1,0)\|\beta(0), \gamma_0\|X(1,0)\|\} = \gamma_0\|X(1,0)\| \max\{1, \beta(0)\}.$$

Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Множество $D(k)$ в доказанной лемме 3 может быть неединственным. В этом случае в качестве $D(k)$ следует взять любое из множеств, реализующих указанный максимум.

Следствие 4. *Последовательность чисел* $I_m^h = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)$, $m \in \mathbb{N}$, *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $I_m^h = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|h_k\|V_k\|I_k^h)$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *с начальным условием* $I_1^h = \|X(1,0)\| \max\{1, h_0\|V_0\|\}$.

Доказательство. Так как величина $Z_d^h(m)$ совпадает с $\Gamma_d^\beta(m)$ при $\beta(k) = h_k\|V_k\|$ и $\gamma_0 = 1$, то, согласно лемме 3, числовая последовательность $I_m^h = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m)$ удовлетворяет указанному рекуррентному соотношению при $I_1^h = \|X(1,0)\| \max\{1, h_0\|V_0\|\}$. Следствие 4 доказано.

Лемма 4. *Если ряд* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *с неотрицательными членами сходится, то при любом* $m_0 \in \mathbb{N}_0$ *выполняется равенство* $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=m_0}^m ka_k = 0$.

Доказательство. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Так как ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k$ сходится и все a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, неотрицательные, то, согласно признаку Коши сходимости ряда, для этого ε найдется такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon > m_0$, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, таких, что $m > n \geq n_\varepsilon$, справедливо неравенство $\sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon$. Тогда $\sum_{k=m_0}^m ka_k = \sum_{k=m_0}^{n_\varepsilon-1} ka_k + \sum_{k=n_\varepsilon}^m ka_k < \sum_{k=m_0}^{n_\varepsilon-1} ka_k + m\varepsilon$. Разделив полученное неравенство на m и перейдя к пределу при $m \to \infty$, получим $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=m_0}^m ka_k \leq \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем требуемое. Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *Пусть заданы возмущения* Q *и положительная функция* β, *определенная на множестве* $\mathbb{N}_0$, *такая, что справедливо равенство* $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0$, *в котором матрицы* V_k *определяются согласно лемме 1. Тогда для старшего показателя системы (2) выполняется оценка* $\lambda_n(A+Q) \leq \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m, $m \in \mathbb{N}$, *определяется равенством* $\eta_m = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m)$, *причем величина* $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$ *не зависит от выбора* $\gamma_0 > 0$.

Доказательство. Пусть $P = \{k \in \mathbb{N}_0 : V_k \neq 0\}$. Построим последовательность h_k следующим образом. Если $k \in P$, то положим $h_k = \beta(k)\|V_k\|^{-1}$. Если же $k \notin P$, то $h_k > 0$ выберем такими, чтобы выполнялось неравенство $L := \sum_{k\notin P} h_k^{-1} < +\infty$. Тогда $\sum_{k=0}^{m-1} h_k^{-1} \leq$ $\leq \sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| + L =: K(m) < +\infty$ и по теореме 1 справедлива оценка $\|Y(m,0)\| \leq$ $\leq e^{K(m)}I_m^h$. Возьмем произвольное $\gamma_0 > 0$ и по заданной функции β образуем величину $\Gamma_d^\beta(m)$. В соответствии со сделанным выбором h_k выполняются неравенства $\beta(k) \geq h_k\|V_k\|$, $k \in \mathbb{N}_0$, так как $\beta(k) = h_k\|V_k\|$ при $k \in P$ и $\beta(k) \geq 0 = h_k\|V_k\|$ при $k \notin P$. Поэтому, согласно (4), при любом $d \subset \langle m\rangle$ имеют место соотношения

$$Z_d^h(m) \leq \|X(m, H(d))\|\beta(H(d))\cdots\|X(d_2,d_1)\|\beta(d_1)\|X(d_1,0)\| = \gamma_0^{-1}\Gamma_d^\beta(m),$$

из которых вытекает неравенство $I_m^h = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} Z_d^h(m) \leq \gamma_0^{-1}\max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m) = \gamma_0^{-1}\eta_m$. Таким образом, получаем оценку $\|Y(m,0)\| \leq e^{K(m)}I_m^h \leq \gamma_0^{-1}e^{K(m)}\eta_m$. Согласно [1, с. 537; 13, с. 47, 51], имеют место равенства $\lambda_n(A+Q) = \varlimsup\limits_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|Y(t,0)\| = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\|Y(m,0)\|$ и, следовательно, справедлива оценка $\lambda_n(A+Q) \leq \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}K(m) + \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, так как $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}K(m) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0$ по условию теоремы. Величина

$\gamma_0^{-1}\Gamma_d^\beta(m)$ не зависит от γ_0 по построению. Это означает, что и величина $\gamma_0^{-1}\eta_m$ тоже не зависит от $\gamma_0 > 0$. Но $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln(\gamma_0^{-1}\eta_m)$, и поэтому при всех $\gamma_0 > 0$ предел $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$ имеет одно и то же значение. Теорема 2 доказана.

Следствие 5. *В условиях теоремы 2 для старшего показателя возмущенной системы (2) имеет место неравенство* $\lambda_n(A+Q) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, *в котором последовательность* η_m *при* $m > 1$ *определяется рекуррентным соотношением* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$, *причем величина* $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$ *не зависит от выбора* $\eta_1 > 0$.

Доказательство. По лемме 3 последовательность $\eta_m = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m)$ при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k), \quad k, m \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $\eta_1 = \gamma_0\|X(1,0)\|\max\{1,\beta(0)\}$. Поскольку $\gamma_0 > 0$ произвольно и $\|X(1,0)\|\max\{1,\beta(0)\} > 0$, то $\eta_1 > 0$ также может быть выбрано произвольным образом без изменения величины $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$. Отсюда и из теоремы 2 имеем требуемое. Следствие 5 доказано.

Следствие 6. *Если возмущения* Q *удовлетворяют условию* $\int_0^\infty\|Q(t)\|\,dt < +\infty$, *то* $\lambda_n(A+Q) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m > 1$ *определяется рекуррентным соотношением* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1}\eta_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем матрицу Q, удовлетворяющую условию следствия. Положительная функция β такая, что $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, для суммы $S(m) := \sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1}k\|V_k\|$ справедлива оценка $S(m) \le bC_Q + b\sum_{k=1}^{m-1}k\int_k^{k+1}\|Q(t)\|\,dt$. Так как $\sum_{k=0}^\infty\int_k^{k+1}\|Q(t)\|\,dt = \int_0^\infty\|Q(t)\|\,dt < \infty$, то в силу леммы 4 имеет место стремление $m^{-1}S(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда, согласно следствию 5, получаем требуемое. Следствие 6 доказано.

Замечание 3. Оценка, доказанная в следствии 6, другими методами впервые получена в работе [10]. Там же доказана и ее достижимость.

Следствие 7. *Если возмущения* Q *для всякого* $t \ge 0$ *удовлетворяют условию* $\|Q(t)\| \le N_Q e^{-\sigma t}$ *с некоторой постоянной* N_Q, *зависящей от* Q, *и фиксированным* $\sigma > 0$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка* $\lambda_n(A+Q) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m > 1$ *определена рекуррентным соотношением* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|e^{-(\sigma-\varepsilon)k}\eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем матрицу возмущений Q, удовлетворяющую условию следствия. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Положительная функция $\beta(k) = e^{-(\sigma-\varepsilon)k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, для суммы

$$S(m) := \sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = \sum_{k=0}^{\infty}e^{(\sigma-\varepsilon)k}\|V_k\|$$

справедлива оценка $S(m) \le b\sum_{k=0}^\infty e^{(\sigma-\varepsilon)k}\int_k^{k+1}\|Q(t)\|\,dt$. Так как при любом $t \in [k, k+1]$ выполняются соотношения $\|Q(t)\| \le N_Q e^{-\sigma t} \le N_Q e^{-\sigma k}$, то $S(m) \le bN_Q\sum_{k=0}^\infty e^{-\varepsilon k} = bN_Q(1-e^{-\varepsilon})^{-1}$. Отсюда следует равенство $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0$. Тогда в силу следствия 5 имеем требуемое неравенство. Следствие 7 доказано.

Замечание 4. Следствие 7 другими методами впервые доказано в работе [6].

Следствие 8. *При всех* $\sigma > 0$ *для старшего* σ*-показателя системы (2) справедливо равенство* $\nabla_\sigma = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln \max\limits_{d\subset\langle m\rangle} \Gamma_d^\beta(m)$, *где* $\beta(k) = e^{-\sigma k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, *а* $\gamma_0 > 0$ *произвольно.*

Доказательство. Согласно работе [6], справедливо равенство $\nabla_\sigma = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\xi_m$, где последовательность ξ_m при $m > 1$ задается формулой $\xi_m = \max\limits_{k<m}(\ln\|X(m,k)\| + \xi_k - \sigma k)$, $k,m \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1 = 0$. В силу этого для последовательности $\exp\xi_m$ выполнены соотношения $\exp\xi_m = \exp\max\limits_{k<m}(\ln\|X(m,k)\| + \xi_k - \sigma k) = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\exp\xi_k\exp(-\sigma k))$, $\exp\xi_1 = 1$. По лемме 3 последовательность $\eta_m = \max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m)$ с $\beta(k) = e^{-\sigma k}$, $k,m \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет рекуррентной формуле $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|e^{-\sigma k}\eta_k)$ с начальным условием $\eta_1 = \gamma_0\|X(1,0)\|$, и поэтому при $\gamma_0 = \|X(1,0)\|^{-1}$ она совпадает с последовательностью $\exp\xi_m$, $m\in\mathbb{N}$. Так как величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\max\limits_{d\subset\langle m\rangle}\Gamma_d^\beta(m)$ не зависит от выбора γ_0, то при любом $\gamma_0 > 0$ имеют место равенства $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\xi_m = \nabla_\sigma$. Следствие 8 доказано.

Применим теперь теорему 2 в случае возмущений, суммируемых на полуоси с монотонным положительным весом, а также возмущений, суммируемых со степенью. Предполагая матрицу коэффициентов невозмущенной системы (1) фиксированной, для произвольного класса возмущений $\mathfrak{M}$ введем обозначение $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$. В дальнейшем нам понадобится класс возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, где $\sigma > 0$ и θ – некоторая положительная кусочно-непрерывная функция, состоящий из кусочно-непрерывных матриц Q, удовлетворяющих неравенству $\|Q(t)\| \le N_Q\theta^{-\sigma}(t)$ с константой N_Q, зависящей от Q.

Замечание 5. Если функция θ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $t\to\infty$, то из результатов работы [9] вытекает, что имеет место равенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m(\sigma)$, где последовательность $\eta_m(\sigma)$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_1(\sigma) = 1$, $\eta_m(\sigma) = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta^{-\sigma}(k)\eta_k)$, $m > 1$, $k,m\in\mathbb{N}$, причем величина $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$ непрерывна как функция параметра $\sigma > 0$.

Пусть класс $\mathfrak{I}[\varphi]$, где φ – положительная функция, определенная на промежутке $[0,+\infty[$, составляют кусочно-непрерывные матрицы Q такие, что $\int_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|\,dt < +\infty$.

Если число $a = \inf\{\varphi(t) : t \ge 0\}$ положительно, то для всякого $Q \in \mathfrak{I}[\varphi]$ при любом $t \ge 0$ справедливы соотношения

$$\int\limits_t^{t+1}\|Q(\tau)\|\,d\tau \le a^{-1}\int\limits_t^{t+1}\varphi(\tau)\|Q(\tau)\|\,d\tau \le a^{-1}\int\limits_0^\infty\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt < +\infty,$$

означающие, что матрица Q интегрально ограничена.

Теорема 3. *Если кусочно-непрерывная функция* φ *монотонно возрастает на* $[0,+\infty[$, *то справедливо равенство* $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1}\varphi^{-1}(k)\eta_k)$, $k,m\in\mathbb{N}$, *с произвольным* $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Докажем неравенство $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$. Зафиксируем матрицу Q, удовлетворяющую условиям теоремы, и определим положительную функцию β равенствами $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1}\varphi^{-1}(k)$ при $k\in\mathbb{N}$. Рассмотрим сумму

$$S(m) := \sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1}k\varphi(k)\|V_k\|.$$

Так как функция φ возрастающая, то при всех $t \ge 0$ справедливы неравенства $\varphi(t) \ge \varphi(0) > 0$, поэтому матрица Q интегрально ограничена. Тогда, согласно лемме 1, имеем

$$S(m) \le bC_Q + b\sum_{k=1}^{m-1} k\varphi(k)\int\limits_k^{k+1} \|Q(t)\|\,dt = bC_Q + b\sum_{k=1}^{m-1} k\int\limits_k^{k+1} \varphi(k)\|Q(t)\|\,dt.$$

При $t \in [k, k+1]$ выполнено неравенство $\varphi(k) \le \varphi(t)$, поэтому справедливо соотношение $S(m) \le bC_Q + b\sum_{k=1}^{m-1} k\int_k^{k+1}\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_k^{k+1}\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt = \int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt < +\infty,$$

то в силу леммы 4 имеем равенство $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}S(m) = 0$, откуда, согласно следствию 5, вытекает требуемое неравенство.

Докажем теперь обратное неравенство $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) \ge \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$. Возьмем $\theta(t) = t\varphi(t)$ при $t > 1$, $\theta(t) = \varphi(1)$ при $0 \le t \le 1$ и рассмотрим однопараметрическое семейство классов возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, $\sigma > 0$. Так как $\theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, то применимы результаты работы [9], указанные в замечании 5.

Для любой матрицы $Q \in \mathfrak{B}_\sigma[\theta]$ при всяком $\sigma > 1$ имеют место соотношения

$$\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt \le N_Q\varphi^{-\sigma}(1)\int\limits_0^{1}\varphi(t)\,dt + N_Q\int\limits_1^{\infty}\varphi(t)(t\varphi(t))^{-\sigma}\,dt \le$$

$$\le N_Q\varphi^{1-\sigma}(1) + N_Q\int\limits_1^{\infty}\varphi^{1-\sigma}(t)t^{-\sigma}\,dt \le N_Q\varphi^{1-\sigma}(1)\left(1 + \int\limits_1^{\infty}t^{-\sigma}\,dt\right) = N_Q\varphi^{1-\sigma}(1)\sigma(\sigma-1)^{-1} < +\infty,$$

т.е. при любом $\sigma > 1$ выполнено включение $\mathfrak{B}_\sigma[\theta] \subset \mathfrak{I}[\varphi]$, из которого вытекает неравенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta]) \le \Lambda(\mathfrak{I}[\varphi])$. Переходя в нем к пределу при $\sigma \to 1+0$, в силу замечания 5 получаем оценку $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) \ge \Lambda(\mathfrak{B}_1[\theta]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ при $\eta_1 = 1$. Поскольку, согласно следствию 5, величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$, доказанная оценка справедлива при любых $\eta_1 > 0$. Теорема 3 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{I}^p$, $p > 1$, множество кусочно-непрерывных матриц Q, для которых выполнено неравенство $\int_0^{\infty}\|Q(t)\|^p dt < +\infty$. Для таких Q при всех $t \ge 0$ имеем оценку

$$\int\limits_t^{t+1}\|Q(s)\|\,ds \le \left(\int\limits_t^{t+1}\|Q(s)\|^p\,ds\right)^{1/p}\left(\int\limits_t^{t+1}ds\right)^{1/q} \le \left(\int\limits_0^{\infty}\|Q(s)\|^p\,ds\right)^{1/p} \le \infty,$$

где, как обычно, $1/p + 1/q = 1$, означающую, что всякое $Q \in \mathfrak{I}^p$ является интегрально ограниченным.

Теорема 4. *При всех* $p > 1$ *справедливо равенство* $\Lambda(\mathfrak{I}^p) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *в котором последовательность* η_m *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1/p}\eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Докажем неравенство $\Lambda(\mathfrak{I}^p) \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$. Зафиксируем матрицу возмущений Q, удовлетворяющую условиям теоремы. Положительная функция $\beta(k)$ такая, что $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1/p}$ для $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k)\|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p}\|V_k\| \le bC_Q + b\sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p} \int\limits_k^{k+1} \|Q(\tau)\|\,d\tau.$$

Так как функция $\tau^{1/p}$ при $p > 1$ возрастает, то на каждом из отрезков $[k, k+1]$ выполняется неравенство $\tau^{1/p} > k^{1/p}$, отсюда

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p}\|V_k\| \le b\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_k^{k+1} \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau = b\int\limits_1^m \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau.$$

Поскольку $\int_0^\infty \|Q(t)\|^p\,dt < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $t_\varepsilon > 0$ такое, что справедливо неравенство $\int_{t_\varepsilon}^\infty \|Q(t)\|^p\,dt < \varepsilon$. Тогда имеют место соотношения

$$\varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p}\|V_k\| \le \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}b\biggl(C_Q + \int\limits_1^m \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau\biggr) =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}b\biggl(C_Q + \int\limits_1^{t_\varepsilon} \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau + \int\limits_{t_\varepsilon}^m \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau\biggr).$$

Применяя ко второму интегралу неравенство Гёльдера, получаем неравенства

$$\int\limits_{t_\varepsilon}^m \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau \le \biggl(\int\limits_{t_\varepsilon}^m \tau^{q/p}\,d\tau\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{t_\varepsilon}^m \|Q(\tau)\|^p\,d\tau\biggr)^{1/p} \le m\biggl(\int\limits_{t_\varepsilon}^\infty \|Q(\tau)\|^p\,d\tau\biggr)^{1/p} \le m\varepsilon^{1/p}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p}\|V_k\| \le \varlimsup_{m\to\infty} bm^{-1}\biggl(C_Q + \int\limits_1^{t_\varepsilon} \tau^{1/p}\|Q(\tau)\|\,d\tau + m\varepsilon^{1/p}\biggr) \le b\varepsilon^{1/p},$$

из которой в силу произвольности выбора ε вытекает равенство $\varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p}\|V_k\| = 0$. Отсюда, согласно следствию 5, получаем требуемое.

Докажем теперь обратное неравенство. Возьмем $\theta(t) = t^{1/p}$ при $t > 1$, $\theta(t) = 1$ при $0 \le t \le 1$ и рассмотрим однопараметрическое семейство классов возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, $\sigma > 0$. Так как $\theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, то применимы результаты работы [9], указанные в замечании 5.

Для возмущений из класса $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$ при указанном θ и любом $\sigma > 1$ выполнены соотношения

$$\int\limits_0^\infty \|Q(t)\|^p\,dt = \int\limits_0^1 \|Q(t)\|^p\,dt + \int\limits_1^\infty \|Q(t)\|^p\,dt \le N_Q^p\biggl(1 + \int\limits_1^\infty t^{-\sigma}\,dt\biggr) = N_Q^p\sigma(\sigma-1)^{-1} < +\infty.$$

Отсюда следует включение $\mathfrak{B}_\sigma[\theta] \subset \mathfrak{I}^p$, в силу которого выполняется неравенство $\Lambda(\mathfrak{I}^p) \ge \Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$. Согласно замечанию 5, функция $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$ является непрерывной функцией от σ, поэтому, переходя в данном неравенстве к пределу при $\sigma \to 1+0$, будем иметь $\Lambda(\mathfrak{I}^p) \ge \Lambda(\mathfrak{B}_1[\theta]) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$ при $\eta_1 = 1$. Поскольку, согласно следствию 5, величина

$\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$, доказанная оценка справедлива при любых $\eta_1 > 0$. Теорема 4 доказана.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Виноград Р.Э.* // Мат. сб. 1957. Т. 42. № 2. С. 207–222.
3. *Миллионщиков В.М.* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
4. *Миллионщиков В.М.* // Мат. заметки. 1968. Т. 4. Вып. 2. С. 173–180.
5. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
6. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
7. *Изобов Н.А.* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
8. *Барабанов Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.
9. *Барабанов Е.А.* Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
10. *Барабанов Е.А., Вишневская О.Г.* // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 5. С. 29–34.
11. *Сергеев И.Н.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1986. Вып. 11. С. 32–73.
12. *Сергеев И.Н.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 438–448.
13. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. С.-Петербург, 1992.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
30.04.2004 г.