



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. V. Miroshin, The exterior Dirichlet problem for
a degenerate elliptic operator,
Trudy Mat. Inst. Steklov., 1979, Volume 150, 198–211

<https://www.mathnet.ru/eng/tm2486>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have
read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

May 20, 2025, 16:09:07



Н. В. МИРОШИН

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть G — ограниченная область n -мерного пространства E^n точек $x = (x_1; \dots; x_n)$, состоящая из конечного числа конечносвязных областей; ∂G — граница области G — $(n-1)$ -мерное многообразие класса C^{m+1} ; $G^* = E^n \setminus \bar{G}$. В области G^* рассматривается дифференциальный оператор

$$L(x, D)u = \sum_{|s|, |t| \leq m} (-1)^{|s|} D^s (a_{st}(x) D^t u) \quad (1)$$

с коэффициентами $a_{st}(x)$, которые могут иметь степенной порядок вырождения при подходе к границе $\partial G = \partial G^*$ и на бесконечности.

Основная часть работы посвящена выделению главной части оператора $L(x, D)$, которая в случае невырождающего эллиптического оператора (в конечной области) соответствует членам

$$L_0(x, D) = \sum_{|s|=|t|=m} (-1)^m D^s (a_{st}(x) D^t)$$

и от которой зависит постановка краевых условий и задание условий на бесконечности. При дополнительных ограничениях на эту часть оператора (условия коэрцитивности в смысле монографии [1, гл. II, п. 9]) для оператора $L(x, D)$ ставится обобщенная первая краевая задача и доказывается ее фредгольмова разрешимость в некотором специально подобранном весовом пространстве. В случае ограниченной области такое рассмотрение первой краевой задачи проведено в работе автора [2].

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 даются основные определения и доказываются вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельный интерес (теоремы вложения с ε для весовых пространств). В § 2 рассматривается краевая задача.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим через $\rho(x)$ функцию класса $C^m(E^n)$, эквивалентную расстоянию от точки $x \in G^*$ до границы ∂G^* (такая функция существует, так как граница ∂G^* — $(n-1)$ -мерное многообразие класса C^{m+1}); $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Пусть $K_R = \{x \in E^n, |x| < R\}$, $K_R^* = E^n \setminus \bar{K}_R$ (где $\bar{K}_R = K_R \cup \partial K_R$) и пусть G_1 — такая область в E^n ,

что $\bar{G} \subset G_1$. В дальнейшем мы считаем, что R выбрано так, что $\bar{G}_1 \subset K_R$. Введем пространства ($1 < p < \infty$)

$$W_{p, \alpha}^m(G_1 \setminus G) = \{u \in L_p(G_1 \setminus G), |u, W_{p, \alpha}^m(G_1 \setminus G)| < \infty\},$$

$$|u, W_{p, \alpha}^m(G_1 \setminus G)|^p = \int_{G_1 \setminus G} (\rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + |u|^p) dx;$$

$$W_{p, \beta, \gamma}^m(E^n) = \{u; |u, W_{p, \beta, \gamma}^m(E^n)| < \infty\},$$

$$|u, W_{p, \beta, \gamma}^m(E^n)|^p = \int_{E^n} (d(x)^\beta \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + d(x)^\gamma |u|^p) dx.$$

Здесь α, β, γ — вещественные числа, $s = (s_1; \dots; s_n)$ — мультииндекс, $|s| = s_1 + \dots + s_n$. Наконец, символом \bar{B} мы будем обозначать замыкание множества бесконечно дифференцируемых, финитных относительно бесконечности функций в метрике пространства B . Для получения теорем вложения с ε для введенных пространств нам понадобится

Л е м м а 1. А). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, удовлетворяющие условиям

1) $X \subset Y \subset Z$, 2) вложение X в Y компактно. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) > 0$ такая, что $\forall u \in X$

$$|u, Y| \leq \varepsilon |u, X| + K(\varepsilon) |u, Z|. \quad (2)$$

Б) Пусть 1) $X \subset Y \subset Z$, 2) вложение X в Z компактно, 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) > 0$ такая, что $\forall x \in X$ имеет место (2). Тогда вложение X в Y компактно.

Доказательство пункта (А) см. в работе [1, гл. 1, п. 16]. Пункт Б) приведен для полноты, в дальнейшем не используется, и поэтому доказательство не проводится (в случае специального $K(\varepsilon)$ см. [3, гл. VI]).

Л е м м а 2. Пусть $1 < p < \infty, m > k \geq 0, \alpha$ и $\alpha_1 \geq 0$. Рассмотрим пространства $W_{p, \alpha}^m(\Omega)$ и $W_{p, \alpha_1}^k(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в E^n , состоящая из конечного числа конечносвязных областей (в частности, $\Omega = G_1 \setminus \bar{G}$). Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$а) m - \frac{\alpha}{p} > k - \frac{\alpha_1}{p},$$

$$б) \alpha_1 > \alpha \frac{k}{m}.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) > 0$ такая, что $\forall u \in W_{p, \alpha}^m(\Omega)$

$$|u, W_{p, \alpha_1}^k(\Omega)| < \varepsilon |u, W_{p, \alpha}^m(\Omega)| + K(\varepsilon) |u, L_p(\Omega)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай (б) при $p = 2$ доказан в работе автора [4], при $1 < p < \infty$ доказательство проводится аналогично, если воспользоваться неравенством (*), приведенном в лемме 3. Докажем лемму в случае выполнения условия а).

Положим $\beta_0 = \alpha - p(m - k)$. Из условия а) получаем, что $\alpha_1 > \beta_0$ и, следовательно, $\gamma = \alpha_1 - \beta_0 > 0$. Рассмотрим сначала случай $\beta_0 < 0$. В этом случае $m - \alpha/p = k - \beta_0/p > 0$, так как $k \geq 0$ и мы можем применить известные теоремы вложения ([5]):

$$W_{p, \alpha}^m(\Omega) \subset W_p^{m - \frac{\alpha}{p}}(\Omega) \subset W_p^k(\Omega) \subset W_{p, \alpha_1}^k(\Omega) \subset L_p(\Omega).$$

Вложение $W_p^{m-\alpha/p}(\Omega)$ в $W_p^k(\Omega)$ компактно, так как $m - \alpha/p > k \geq 0$, а остальные вложения, по крайней мере, ограничены. Тогда к цепочке пространств

$$W_{p,\alpha}^m(\Omega) \subset W_{p,\alpha_1}^k(\Omega) \subset L_p(\Omega)$$

мы можем применить пункт А) леммы 1. Получаем

$$|u, W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)| + K(\varepsilon) |u, L_p(\Omega)|.$$

Пусть теперь $\beta_0 \geq 0$. Тогда $W_{p,\alpha}^m(\Omega) \subset W_{p,\beta_0}^k(\Omega)$ и, следовательно, $|u, W_{p,\beta_0}^k(\Omega)| \leq C |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\int_{\Omega} \rho(x)^{\alpha_1} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leq \varepsilon^\gamma \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \rho(x)^{\beta_0} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx + \\ + c_1 (\text{diam } \Omega)^{\alpha_1} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx.$$

Здесь $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ — область с границей $\partial\Omega_\varepsilon$ класса C^{m+1} такая, что $\varepsilon < \text{dist}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) < 2\varepsilon$, $\text{diam } \Omega = \sup(|x - y|; x, y \in \Omega)$. В силу компактности вложения $W_p^m(\Omega_\varepsilon)$ в $W_p^k(\Omega_\varepsilon) \forall \eta > 0 \exists K_1(\eta) > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leq \eta \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \leq \\ \leq \eta \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \leq \\ \leq \frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha} \int_{\Omega} \rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Отсюда

$$\int_{\Omega} \rho(x)^{\alpha_1} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx < \varepsilon^\gamma \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \rho(x)^{\beta_0} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx + \\ + C_1 (\text{diam } \Omega)^{\alpha_1} \left[\frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha} |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p + K_1(\eta) |u, L_p(\Omega)|^p \right] \leq \\ \leq \left(C\varepsilon^\gamma + C_1 C_2 (\text{diam } \Omega)^{\alpha_1} \frac{\eta}{\varepsilon^\alpha} \right) |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p + C_1 (\text{diam } \Omega)^{\alpha_1} K_1(\eta) |u, L_p(\Omega)|^p.$$

Выбираем η так, чтобы $C\varepsilon^\gamma = (\eta/\varepsilon^\alpha) C_1 C_2 (\text{diam } \Omega)^{\alpha_1}$, переобозначаем $2C\varepsilon^\gamma \rightarrow \varepsilon^p$ и после несложных преобразований приходим к неравенству

$$|u, W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)| + K(\varepsilon) |u, L_p(\Omega)|.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть $1 < p < \infty$, $m > k \geq 0$, и пусть выполнено одно из условий:

а) $\beta > \theta\alpha + (1 - \theta)\gamma$, где $\theta = k/m$;

б) $\beta + pk > \alpha + pm$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) > 0$ такая, что $\forall u(x) \in \widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$

$$|u, W_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)| + K(\varepsilon) |u, L_{p,\gamma}(E^n)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено б) и $\gamma > \alpha + pm$. В этом случае легко показать, что вложение $\widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$ в $\widetilde{W}_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)$ компактно,

и нужная нам оценка следует из леммы 1. Если же при условии б) $\gamma \leq \alpha + pt$, то

$$\theta\alpha + (1 - \theta)\gamma \leq \theta\alpha + (1 - \theta)(\alpha + pt) = \alpha + p(m - k),$$

и, следовательно, из условия б) следует выполнение условия а), т. е. достаточно доказать лемму при выполнении условия а) и при $\gamma \leq \alpha + pt$.

Воспользуемся известным неравенством (см. [3, гл. III, § 15], где рассматриваются гораздо более общие неравенства и имеющиеся там ссылки):

$$\int_{\Omega} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leq \varepsilon^{\frac{1}{\theta}} \int_{\Omega} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} + 1\right) \int_{\Omega} |u|^p dx, \quad (*)$$

$0 < \theta = k/m < 1$ (случай $\theta = 0$, т. е. $k = 0$, очевиден и далее без оговорок отбрасывается).

Это неравенство мы рассмотрим для шара $K_1 = \{x \in E^n; |x| < 1\}$ и шарового слоя $\Pi_1 = \{x \in E^n, 1/2 < |x| < 2\}$. Положим в этом неравенстве $\varepsilon = \eta\lambda$. В дальнейшем у нас λ будет ограниченным параметром. Переобозначая $\eta^{1/\theta}$ снова через ε , приходим к неравенству:

$$\int_{\Omega} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leq \varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_{\Omega} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} K(\varepsilon) \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Заметим, что в $K_1^* = E^n \setminus \bar{K}_1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}|x|} < d(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда для шарового слоя Π_1

$$\int_{\Pi_1} |x|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx < C \left(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\gamma} |u|^p dx \right).$$

Пусть $x \in \Pi_1$, $u(x) = v(Rx)$. Тогда $y = Rx \in \Pi_R$, $dx = R^{-n} dy$, $D_x^s v(Rx) = R^{|s|} D_y^s v(y)$. Приходим к неравенству $R^{\beta+pk-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s v(y)|^p dy \leq$

$$\leq C \left(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s v(y)|^p dy + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\gamma} |u(y)|^p dy \right).$$

Выбираем λ так, чтобы

$$\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-\beta-pk} = 1,$$

$$\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-\beta-pk} = 1,$$

т. е. $\theta(\beta + pk - \alpha - pm) = (1 - \theta)(\gamma - \beta - pk)$. Отсюда после простых преобразований получаем

$$\beta = \theta\alpha + (1 - \theta)\gamma.$$

Кроме того, так как $\gamma \leq \alpha + pt$, то легко проверяется, что $\alpha + pm \geq \beta + pk$ достаточно для ограниченности параметра λ при всех $R \geq 1$. Тог-

да и при любом $\beta \geq \theta\alpha + (1 - \theta)\gamma$ в Π_R выполняется неравенство

$$\int_{\Pi_R} d(x)^\beta \sum_{|s|=k} |D^s v|^p dx \leq C \left(\varepsilon \int_{\Pi_R} d(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s v|^p dx + K(\varepsilon) \int_{\Pi_R} d(x)^\gamma |v|^p dx \right).$$

Мы воспользовались тем, что при $R \geq 1$ $d(x) \sim |x|^{-1}$. Записывая аналогичное неравенство для шара K_1 , полагая R последовательно равным 2^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, и суммируя полученные неравенства, получаем

$$\int_{E^n} d(x)^\beta \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leq C \left(\varepsilon \int_{E^n} d(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K(\varepsilon) \int_{E^n} d(x)^\gamma |u|^p dx \right).$$

Отсюда следует лемма.

Пусть $r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha$ при $x \in \bar{G}_1$ и $r(x) \equiv -\beta$ при $x \in \bar{K}_R^*$. Введем пространство

$$W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*) = \{u \in L_{p,\gamma}(G^*); |u, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| < \infty\},$$

$$|u, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)|^p = \int_{G^*} \left\{ \rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + d(x)^\gamma |u|^p \right\} dx.$$

Пусть G_2 — область с гладкой границей, промежуточная между G и G_1 , т. е. $\bar{G} \subset G_2$ и $\bar{G}_2 \subset G_1$. Построим следующее разбиение единицы: $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$ — функции класса $C^\infty(E^n)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $e_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in E^n$;
 - 2) $e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) \equiv 1 \quad \forall x \in E^n$;
 - 3) $e_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \bar{G}_2, \\ 0, & \text{при } x \in \bar{G}_1^*, \end{cases}$
- $$e_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \bar{K}_{2R}^*, \\ 0, & \text{при } x \in \bar{K}_R. \end{cases}$$

Положим $u_i(x) = u(x)e_i(x)$, т. е. $u = u_1 + u_2 + u_3$.

Лемма 4. Пусть $u(x) \in W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)$. Тогда

- 1) $u_1(x) \in W_{p,\alpha}^m(G_1 \setminus G)$, $u_2(x) \in W_p^m(K_{2R} \setminus G_2)$, $u_3(x) \in W_{p,\beta,\gamma}^m(K_R^*)$;
- 2) $|u, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| \sim |u_1, W_{p,\alpha}^m(G_1 \setminus G)| + |u_2, W_p^m(K_{2R} \setminus G_2)| + |u_3, W_{p,\beta,\gamma}^m(K_R^*)|$.

Доказательство. Имеем

$$|u_1 + u_2 + u_3, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| \leq |u_1, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| + |u_2, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| + |u_3, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)| \leq C [|u_1, W_{p,\alpha}^m(G_1 \setminus G)| + |u_2, W_p^m(K_{2R} \setminus G_2)| + |u_3, W_{p,\beta,\gamma}^m(K_R^*)|].$$

С другой стороны, например, для $u_1(x)$ получаем

$$|u_1(x), W_{p,\alpha}^m(G_1 \setminus G)| = \int_{G_1 \setminus G} \left[\rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s(e_1 u)|^p + |e_1 u|^p \right] dx \leq \int_{G_1 \setminus G} \left[\rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + |u|^p \right] dx + C \int_{G_1 \setminus G_2} \rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} \sum_{0 < t \leq s} |D^t e_1(x)|^p |D^{s-t} u(x)|^p dx.$$

Поскольку

$$\max_{x \in E^n} \max_{|t| \leq m} |D^t e_1(x)|^p = M < \infty,$$

то, в силу известных теорем вложения для невесовых классов, второй интеграл оценивается величиной $C|u, W_p^m(C_1 \setminus G_2)|^p$, а она, очевидно, не превосходит величину $C|u, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)|^p$, умноженную на некоторую константу.

Таким образом, мы доказали

$$|u_1, W_{p,\alpha}^m(G_1 \setminus G)| \leq C|u, W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)|.$$

Аналогично доказываются неравенства для функций $u_2(x)$ и $u_3(x)$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем считаем $p = 2$. Перейдем к оценкам формы Дирихле оператора $L(x, D)$, т. е. формы

$$a(u, v) = \int_{G^*} \sum_{|s|, |t| \leq m} a_{st}(x) D^t u \overline{D^s v} dx, \quad (3)$$

которая рассматривается первоначально на гладких финитных относительно бесконечности функциях. Предположим, что в $\Omega = \overline{G_1} \setminus G$ форма (3) представима в виде суммы

$$a(u, v) = a_1(u, v) + \dots + a_r(u, v) \quad (4)$$

таких форм $a_j(u, v)$, что

$$|a_j(u, v)| \leq C_j |u, W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)| |v, W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)|, \quad (4')$$

где $m = m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0$, а α_j — некоторые неотрицательные числа.

Пусть аналогично в $\overline{K_R^*}$ форма $a(u, v)$ представима в виде суммы

$$a(u, v) = a'_1(u, v) + \dots + a'_k(u, v) \quad (5)$$

таких форм $a'_j(u, v)$, что

$$|a'_j(u, v)| \leq C'_j |u, W_{2,\beta_j,\gamma}^{m_j}(K_R^*)| |v, W_{2,\beta_j,\gamma}^{m_j}(K_R^*)|, \quad (5')$$

где $m = m_1 > m_2 > \dots > m_k > 0$, а β_j и γ — некоторые вещественные числа.

Дадим следующие определения:

О п р е д е л е н и е 1. Форму $a_1(u, v)$ назовем старшей в $\Omega = \overline{G_1} \setminus G$. Далее, обозначим для удобства $m = m_1$ через l_1 , α_1 через α_{l_1} и $a_1(u, v)$ через $a_{l_1}(u, v)$. Другие старшие в Ω формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие в Ω формы $a_{l_1}(u, v), \dots, a_{l_{n-1}}(u, v)$ и пусть l_n — наибольшее из чисел $\{m_1; \dots; m_r\}$, меньшее l_{n-1} , для которого одновременно выполняются неравенства

$$l_n - \frac{1}{2} \alpha_{l_n} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ l_i - \frac{1}{2} \alpha_{l_i} \right\},$$

$$\frac{1}{l_n} \alpha_{l_n} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{l_i} \alpha_{l_i} \right\}.$$

Тогда форму $a_{l_n}(u, v)$ также назовем старшей в Ω . Если же такого l_n не найдется, то старшими в Ω будем называть только формы $a_{l_1}(u, v), \dots, a_{l_{n-1}}(u, v)$.

О п р е д е л е н и е 2. Форму $a'_1(u, v)$ назовем старшей в K_R^* . Далее, обозначим для удобства $m = m_1$ через q_1 , β_1 через β_{q_1} , $a'_1(u, v)$ через $a'_{q_1}(u, v)$. Другие

старшие формы определим по индукции. Пусть уже указанные старшие в K_R^* формы $a'_{q_1}(u, v), \dots, a'_{q_{n-1}}(u, v)$ и пусть q_n — наибольшее из чисел $\{m_1, \dots, m_k\}$, меньшее q_{n-1} , для которого одновременно выполняются неравенства

$$\beta_{q_n} + 2q_n \leq \min_{1 \leq i \leq n-1} \{\beta_{q_i} + 2q_i\},$$

$$\beta_{q_n} < \min_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \beta_{q_i} \frac{q_n}{q_i} + \left(1 - \frac{q_n}{q_i}\right) \gamma \right\}.$$

Тогда форму $a'_{q_n}(u, v)$ также назовем старшей в K_R^* . Если же такого q_n не найдется, то старшими будем называть только формы $a'_{q_1}(u, v), \dots, a'_{q_n}(u, v)$.

Пусть $\{a_j(u, v)\}_{j=1}^p$ и $\{a'_j(u, v)\}_{j=1}^h$ — старшие формы в Ω и K_R^* соответственно, выбранные согласно данным выше определениям. На каждую из старших форм мы наложим условия коэрцитивности в соответствующих пространствах, т. е. $\exists \lambda_j, \lambda'_j \geq 0$ и $\exists \delta_j, \delta'_j > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \{a_j(u, u) + \lambda_j |u, L_2(\Omega)|^2\} \geq \delta_j |u, W_{2, \alpha_j}^{l_j}(\Omega)|^2, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \{a'_j(u, u) + \lambda'_j |u, L_{2, \gamma}(K_R^*)|^2\} \geq \delta'_j |u, W_{2, \beta_{q_j}, \gamma}^{q_j}(K_R^*)|^2. \quad (7)$$

Заметим, что $l_1 = q_1 = m$. Пусть можно выбрать форму $a_0(u, v)$ такую, что

$$a_0(u, v) \equiv a_{l_1}(u, v) \text{ в } \Omega,$$

$$a_0(u, v) \equiv a'_{q_1}(u, v) \text{ в } K_R^*,$$

и пусть $\exists r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha_{l_1}$ при $x \in \bar{\Omega}$, $r(x) \equiv -\beta_{q_1}$ при $x \in \bar{K}_R^*$, и такая что

$$\operatorname{Re} \{a_0(u, u) + \lambda' |u, L_{2, \gamma}(G^*)|^2\} \geq \delta' |u, W_{2, r(x), \gamma}^m(G^*)|^2 \quad (8)$$

с некоторыми λ' и $\delta' > 0$.

Коэффициенты оператора $L(x, D)$ будем считать комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, ограниченными в $K_{2R} \setminus G_2$. Заметим, что в других частях области G^* поведение коэффициентов $a_{s_l}(x)$ определено оценками (4)–(5) и (6)–(7).

Введем пространство

$$H_+ = \{u \in L_{2, \gamma}(G^*), |u, H_+| = \|u\|_+ < \infty\},$$

$$\|u\|_+^2 = \sum_{j=1}^p |u_1, W_{2, \alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + \sum_{j=1}^h |u_3, W_{2, \beta_{q_j}, \gamma}^{q_j}(K_R^*)|^2,$$

а функции u_1, u_2, u_3 ($u \equiv u_1 + u_2 + u_3$) те же, что в лемме 4. Наконец, через \bar{H}_+ мы обозначаем замыкание гладких, финитных относительно бесконечности функций в метрике H_+ .

Т е о р е м а 1. Пусть форма $a(u, v)$ на гладких, финитных относительно бесконечности функциях удовлетворяет наложенным выше условиям ((4)–(5), (6)–(8) и условию ограниченности $a_{s_l}(x)$ в $K_{2R} \setminus G_2$). Тогда $\exists \lambda_0 \geq 0, \delta_0 > 0, C_0 > 0$ такие, что для всех $u, v \in \bar{H}_+$ выполняются оценки:

- 1) $|a(u, v)| \leq C_0 \|u\|_+ \|v\|_+$,
- 2) $\operatorname{Re} \{a(u, u) + \lambda_0 |u, L_{2, j}(G^*)|^2\} \geq \delta_0 \|u\|_+^2$.

Доказательство. 1) Полагая $u = u_1 + u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$, получаем

$$a(u, v) = a(u_1; v_1) + a(u_1; v_2) + a(u_2; v_1) + a(u_2; v_2) + a(u_2; v_3) + a(u_3; v_2) + a(u_3; v_3).$$

Оценка для $a(u_1; v_1)$ получается следующим образом. Так как носители u_1 и v_1 лежат в G_1 , то имеем

$$\begin{aligned} |a(u_1; v_1)| &\leq \sum_{j=1}^r |a_j(u_1; v_1)| \leq \sum_{j=1}^r C_j |u_1; W_{2, \alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2, \alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \leq \\ &\leq C \sum_{j=1}^p |u_1; W_{2, \alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2, \alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|. \end{aligned}$$

Первое и второе неравенство следуют из (4) и (4'), а последнее из определения старшей формы.

Аналогично

$$\begin{aligned} |a(u_2; v_2)| &\leq C |u_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)| \cdot |v_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|, \\ |a(u_3; v_3)| &\leq C \sum_{j=1}^h |u_3; W_{2, \beta_{q_j}, \gamma}^{q_j}(K_R^*)| \cdot |v_3; W_{2, \beta_{q_j}, \gamma}^{q_j}(K_R^*)|. \end{aligned}$$

Оценим форму $a(u_1; v_2)$. Другие формы оцениваются аналогично. Для $a(u_1; v_2)$ имеем

$$\begin{aligned} |a(u_1; v_2)| &= \left| \int_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|, |t| \leq m} a_{st}(x) D^t u_1 \overline{D^s v_2} dx \right| \leq \\ &\leq M \int_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|, |t| \leq m} |D^t u_1| \cdot |D^s v_2| dx \leq MC_1 |u_1; W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \times \\ &\times |v_2; W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \leq C |u_1; W_{2, \alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)| \cdot |v_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко получить первую из доказываемых оценок.

2) Докажем вторую оценку. Положим $a'(u, v) = a(u, v) - a_0(u, v)$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{a(u, u) + \lambda |u, L_{2, j}(G^*)|^2\} &= \operatorname{Re} \{a_0(u, u) + \lambda' \times |u, L_{2, \gamma}(G^*)|^2\} + \\ + \operatorname{Re} \{a'(u, u) + (\lambda - \lambda') |u, L_{2, \gamma}(G^*)|^2\} &\geq \delta' |u, W_{2, r(x), \gamma}^m(G^*)|^2 + \\ + \operatorname{Re} \{a'(u, u) + (\lambda, \lambda') |u, L_{2, \gamma}(G^*)|^2\} &\geq \delta'' (|u_1, W_{2, \alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + \\ + |u_3, W_{2, \beta_{q_1}, \gamma}^{q_1}(K_R^*)|^2) &+ \operatorname{Re} \{a'(u, u) + (\lambda - \lambda') |u, L_{2, \gamma}(G^*)|^2\}. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство следует из оценки (8), а последнее из леммы 4. Форму $a'(u, u)$ представим в виде $a'(u, u) = a'(u_1, u_1) + a'(u_1, u_2) + a'(u_2; u_1) + a'(u_2; u_2) + a'(u_2; u_3) + a'(u_3; u_2) + a'(u_3; u_3)$.

Так как форма $a'(u, v)$ не содержит членов с обеими старшими производными, то, пользуясь неравенствами

$$\begin{aligned} |D^s u_1| |D^t u_2| &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 + \frac{1}{2} \eta |D^t u_2|^2, \\ \int_{G_2 \setminus G_2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 dx &\leq \varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_2^m(G_1 \setminus G_2)|^2 + \frac{1}{\eta} K(\varepsilon) |u_1, L_2(G_1 \setminus G_2)|^2 \leq \\ &\leq C\varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_{2, \alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)|^2 + CK(\varepsilon) \frac{1}{\eta} |u_1, L_2(\Omega)|^2 \end{aligned}$$

при $|t| \leq m$ и $|s| < m$, выбирая сначала η , а затем ε достаточно малыми,

легко оцениваем слагаемые $a'(u_1; u_2)$, $a'(u_2, u_1)$, $a'(u_2; u_2)$. Оценки для $a'(u_2; u_3)$ и $a'(u_3; u_2)$ получаем аналогично.

Для $a'(u_1; u_1)$ получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1; u_1) = \sum_{j=1}^p \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1; u_1) + \sum_i \operatorname{Re} a_i(u_1; u_1).$$

Во вторую сумму включены не старшие формы. Из определения 4 и леммы 2 следует, что для любой не старшей формы $a_i(u_1; u_1)$ найдется старшая форма $a_{l_i}(u_1; u_1)$ такая, что

$$\operatorname{Re} a_{l_i}(u_1; u_1) + \lambda_i |u_1, L_2(\Omega)|^2 \geq \delta_i |u_1; W_{2, \alpha_i}^{l_i}(\Omega)|^2,$$

$$\operatorname{Re} a_i(u_1; u_1) \leq |a_i(u_1; u_1)| \leq C_i |u_1, W_{2, \alpha_i}^{m_i}(\Omega)|^2 \leq C_i [\varepsilon_i |u_1, W_{2, \alpha_i}^{l_i}(\Omega)|^2 + K(\varepsilon) |u_1, L_2(\Omega)|^2].$$

Отсюда, выбирая ε_i достаточно малыми, а параметр λ достаточно большим, получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1; u_1) \geq \sum_{j=2}^p \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1; u_1) - \sum_i |a_i(u_1; u_1)| \geq \sum_{j=2}^p \frac{1}{2} \delta_j |u_1; W_{2, \alpha_j}^{l_j}(\Omega)|^2 - \lambda |u, L_2(\Omega)|^2.$$

Аналогично оценивается слагаемое $a'(u_3; u_3)$. Из приведенных выше оценок слагаемых $a'(u_i; u_j)$ легко следует вторая оценка теоремы. Теорема доказана.

§ 2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Перейдем к постановке и решению краевой задачи. Пусть H_+ — то же пространство, что и в § 1, и пусть s_0 — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\mu - \frac{1}{2} \leq s_0 < \mu + \frac{1}{2},$$

где $\mu = \max\{l_j - \frac{1}{2}\alpha_{l_j}, 1 \leq j \leq p\}$.

Тогда у любой функции u из H_+ на границе ∂G существуют следы:

$$u|_{\partial G} = \varphi_0 \in W_2^{\mu - \frac{1}{2}}(\partial G), \dots, \frac{\partial^{s_0-1} u}{\partial n^{s_0-1}}|_{\partial G} = \varphi_{s_0-1} \in W_2^{\mu - s_0 + \frac{1}{2}}(\partial G),$$

где $n = n(\bar{x})$ — единичная внешняя нормаль к ∂G . Это легко следует из строения пространства H_+ и теорем о следах функций из весовых пространств, приведенных, например, в работе [6] (если $s_0 \leq 0$, то функция не имеет следов на ∂G).

Обозначим через H_+^0 подпространство функций из H_+ с нулевыми выписанными следами на ∂G . По пространствам H_+^0 и $L_{2, \gamma}(G^*)$ построим оснащенное гильбертово пространство $\tilde{H}_+^0 \subset L_{2, \gamma} \subset \tilde{H}^0$ (относительно определения оснащенного пространства и построения \tilde{H}^0 см. [7, гл. 1]). Наконец, определим класс

$$\mathfrak{M} = \{g, |a(g, u)| \leq C(g) |u, H_+\} \quad (9)$$

для всякой функции $u \in H_+^0$.

Рассмотрим следующую задачу: для заданного элемента $g \in \mathfrak{M}$ и заданного функционала $F \in \tilde{H}^0$ найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (10)$$

$$u - g \in \tilde{H}_+^0. \quad (11)$$

Из (9) следует, что $a(g, \varphi)$ является при фиксированном g линейным функционалом над \tilde{H}_+^0 , следовательно, $\exists G \in \tilde{H}^0$ такой, что $a(g, \varphi) = \langle G, \varphi \rangle$, где $\langle \cdot; \cdot \rangle$ обозначает действие функционала из \tilde{H}^0 на элемент из \tilde{H}_+^0 . Переобозначив $(u - g)$ снова через u , а $(F - G)$ снова через F , задачу (10)–(11) сводим к задаче

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (12)$$

$$u \in \tilde{H}_+^0. \quad (13)$$

Наряду с задачей (12)–(13) рассмотрим вспомогательную задачу

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (14)$$

$$u \in \tilde{H}_+^0, \quad (15)$$

и отвечающие задаче (14) – (15) однородную и формально сопряженные задачи:

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (16)$$

$$u \in \tilde{H}_+^0; \quad (17)$$

$$a^+(v, \varphi) + \bar{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = \langle \Phi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (18)$$

$$v \in \tilde{H}_+^0; \quad (19)$$

$$a^+(v, \varphi) + \bar{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (20)$$

$$v \in \tilde{H}_+^0. \quad (21)$$

Здесь $(u, \varphi)_{2,\gamma}$ обозначает скалярное произведение функций в гильбертовом пространстве $L_{2,j}(G^*)$, $a^+(u, \varphi) = \overline{a(\varphi, u)}$.

Т е о р е м а 2. Пусть форма $a(u, v)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и пусть вложение пространства \tilde{H}_+^0 в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно. Тогда задачи (14) – (21) фредгольмовы в следующем смысле:

1) задача (14)–(15) разрешима для тех и только тех $F \in \tilde{H}^0$, которые удовлетворяют условию $\langle F, v \rangle \equiv 0$ на всех решениях задачи (20)–(21);

2) задача (16) – (17) имеет ненулевое решение лишь для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$; $|\lambda_k| \rightarrow \infty$;

3) задача (20) – (21) имеет те же собственные значения, что и задача (16) – (17), причем размерности пространств решений, отвечающих одному и тому же значению параметра λ , конечны и равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 для случая невырождающегося эллиптического оператора хорошо известно (см., например, [7 гл. II, § 3]). В нашем случае оно проводится аналогично с использованием оценок теоремы 1 и компактности вложения \tilde{H}_+^0 в $L_{2,\gamma}(G^*)$.

Л е м м а 5. Пусть выполнены условия

$$\mu = \max \left\{ l_j - \frac{1}{2} \alpha_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq p \right\} > 0, \quad (22)$$

$$\gamma > \min \{ \beta_{q_j} + 2q_j, \quad 1 \leq j \leq h \}. \quad (23)$$

Тогда вложение \tilde{H}_+^0 в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in \tilde{H}_+$, — такая последовательность, что $\sup_n \|u_n\|_+ < M$. Покажем, что

$$\exists \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$|w_n - w_m; L_{2,\gamma}(G^*)| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Отсюда будет следовать лемма. Пусть $\{e_i(x)\}_{i=1}^3$ — разбиение единицы, построенное в § 1; рассмотрим последовательность функций $u_{1n}(x) = u_n e_1(x)$.

Тогда $u_{1n}(x) \in \bigcap_{j=1}^p W_{2,\alpha_{1j}}^{l_j}(\Omega) = B_1$ и $\forall n |u_{1n}; B_1| < C_1 M$. Но вложение B_1 в $L_2(\Omega)$ компактно, так как

$$B_1 = \bigcap_{j=1}^p W_{2,\alpha_{1j}}^{l_j}(\Omega) \subset W_2^{\mu}(\Omega) \subset L_2(\Omega),$$

а последнее вложение, в силу условия $\mu > 0$ и ограниченности Ω , компактно. Следовательно, существует подпоследовательность

$$\{v_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$|v_{1n}(x) - v_{1m}(x); L_2(\Omega)| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($v_{1n} = v_n e_1(x)$). Аналогично, положим $v_{2n}(x) = v_n(x) e_2(x)$. Тогда

$$v_{2n}(x) \in W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)$$

и

$$\sup_n |v_{2n}; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)| < C_2 M.$$

В силу компактности вложения $W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)$ в $L_2(K_{2R} \setminus G_2)$ получаем

$$\exists \{h_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{v_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$|h_{2n} - h_{2m}; L_2(K_{2R} \setminus G_2)| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим, далее, последовательность $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($h_{2n}(x) = h_n(x) e_2(x)$) и заметим, что

$$h_{3n}(x) = e_3(x) h_n(x) \in \bigcap_{j=1}^h W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*) = B_3, \quad \sup_n |h_{3n}; B_3| < C_3 M.$$

Обозначим, далее, через \bar{q} и $\beta_{\bar{q}}$ те значения q_j и β_{q_j} , на которых достигается минимум в (23). Тогда

$$B_3 \subset W_{2,\beta_{\bar{q}},\gamma}^{\bar{q}}(K_R^*) \subset L_{2,\gamma}(K_R^*),$$

а последнее вложение компактно в силу условия $\gamma > \beta_{\bar{q}} + 2\bar{q}$ (см. [8, гл. VI, с. 301—302]). Отсюда

$$\exists \{w_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{h_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$|w_{3n} - w_{3m}; L_{2,\gamma}(K_R^*)| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда для последовательности $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$|w_n - w_m; L_{2,\gamma}(G^*)| \leq C \{ |w_{1n} - w_{1m}; L_2(\Omega)| + |w_{2n} - w_{2m}; L_2(K_{2R} \setminus G_2)| + |w_{3n} - w_{3m}; L_{2,\gamma}(K_R^*)| \} \rightarrow 0,$$

так как каждый член справа стремится к нулю при n и $m \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

В качестве следствия леммы 5 и теоремы 2 для задачи (12) — (13) получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и леммы 5. Тогда для задачи (12)—(13) имеет место следующая альтернатива: либо однородная задача

$$a(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0, \quad (24)$$

$$u \in \tilde{H}_+^0 \quad (25)$$

имеет ненулевое решение, либо задача (12)—(13) разрешима и притом однозначно при любом $F \in \tilde{H}^0$. Если задача (24)—(25) имеет ненулевое решение, то задача (12)—(13) разрешима для тех и только тех $F \in \tilde{H}^0$, которые удовлетворяют условию $\langle F, v \rangle \equiv 0$ на всех решениях задачи

$$a^+(v, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_+^0,$$

$$v \in \tilde{H}_+^0.$$

Отметим, что идея использования норм весовых пространств для оценки формы Дирихле оператора Лапласа в неограниченной области впервые реализована Л. Д. Кудрявцевым в работе [9] (см. также имеющуюся там библиографию). Внешние краевые задачи для полигармонического оператора рассмотрены В. И. Половинкиным [10] (см. также монографию [8] и имеющиеся там ссылки).

В заключение рассмотрим один простой пример указанной схемы. Пусть $L(x, D)$ равен сумме двух вырождающихся полигармонических операторов:

$$L(x, D) = L_m(x, D) + L_k(x, D),$$

т. е. операторов, которым соответствуют формы Дирихле вида

$$a(u, v) = a_m(u, v) + a_k(u, v) = \int_{G^*} \left(\sum_{|s|=|t|=m} a_{st}(x) D^t u \overline{D^s v} \right) dx + \int_{G^*} \left(\sum_{|s|=|t|=k} b_{st}(x) D^t u \overline{D^s v} \right) dx. \quad (26)$$

Будем считать, что коэффициенты $a_{st}(x)$ и $b_{st}(x)$ являются комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, и пусть для $x \in G_1$ ($\bar{G} \subset G_1$)

$$\max_{|s|=|t|=m} |a_{st}(x)| \leq M_1(\rho(x))^\alpha, \quad \max_{|s|=|t|=k} |b_{st}(x)| \leq M_2(\rho(x))^{\alpha_1},$$

и вне некоторого большого шара K_R ($\bar{G}_1 \subset K_R$)

$$\max_{|s|, |t|=m} |a_{st}(x)| \leq N_1(d(x))^\beta, \quad \max_{|s|=|t|=k} |b_{st}(x)| \leq N_2(d(x))^{\beta_1}.$$

Числа α и α_1 неотрицательные, а β и β_1 любые вещественные.

Кроме того, пусть в $K_R \setminus G$ коэффициенты $a_{st}(x)$, $b_{st}(x)$ ограничены. Пусть, наконец, \exists — функция $r(x)$, непрерывная, равная α в \bar{G}_1 и $(-\beta)$ в $\overline{K_R^*}$, такая, что

$$\operatorname{Re} a_m(u, u) \geq \delta |u|, \quad \omega_{2, r(x)}^m(G^*) |^2,$$

где

$$|u|, \omega_{2, r(x)}^m(G^*) |^2 = \int_{G^*} \rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^2 dx.$$

Из условий, наложенных на коэффициенты, очевидна оценка

$$|a_m(u, v)| \leq C |u, \omega_{2,r(x)}^m(G^*)| \cdot |v, \omega_{2,r(x)}^m(G^*)| \quad (27)$$

на все функции из $\omega_{2,r(x)}^m(G^*)$.

Займемся оценкой формы $a_k(u, v)$. В области G_1 (т. е., по крайней мере, на гладких функциях с носителями в G_1) имеет место оценка

$$|a_k(u, v)| \leq C_1 |u, \omega_{2,\alpha_1}^k(G_1 \setminus G)| \cdot |v, \omega_{2,\alpha_1}^k(G_1 \setminus G)|, \quad (28)$$

а в K_R^* —

$$|a_k(u, v)| \leq C_2 |u, \omega_{2,-\beta_1}^k(K_R^*)| \cdot |v, \omega_{2,-\beta_1}^k(K_R^*)|. \quad (29)$$

Если одновременно выполняются неравенства

$$k - \frac{1}{2} \alpha_1 \geq m - \frac{1}{2} \alpha, \quad \frac{1}{k} \alpha_1 \leq \frac{1}{m} \alpha, \quad (30)$$

то, согласно определению 1, форму $a_k(u, v)$ мы называем старшей в $G_1 \setminus G$ и на нее накладываем дополнительное условие (в данном случае $\lambda = 0$)

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) \geq \delta |u, \omega_{2,\alpha_1}^k(G_1 \setminus G)|^2, \quad (31)$$

которое должно выполняться на всех достаточно гладких функциях с носителями в $G_1 \setminus G$ с некоторой константой $\delta > 0$. Если же хотя бы одно из неравенств (30) не выполняется, то на форму $a_k(u, v)$ условие (31) не накладывается.

Аналогично, если для некоторого числа γ , удовлетворяющего неравенству

$$\gamma > \min \{ \beta_1 + 2k, \beta + 2m \}, \quad (32)$$

одновременно выполняются неравенства

$$\beta_1 + 2k \leq \beta + 2m, \quad \beta_1 < \beta \frac{k}{m} + \left(1 - \frac{k}{m}\right) \gamma, \quad (33)$$

то форму $a_k(u, v)$, согласно определению 2, мы называем старшей в K_R^* и накладываем на нее условие

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) > \delta' |u, \omega_{2,-\beta_1}^k(K_R^*)|^2, \quad (34)$$

которое должно выполняться, по крайней мере, на всех достаточно гладких функциях с носителями, лежащими в K_R^* и финитными на бесконечности.

Если же условия (33) не выполняются, то условие (34) не накладывается. Заметим, что в данном простом случае всегда можно γ брать равным любому числу, большему $\beta + 2m$. Тогда при выполнении неравенства $\beta_1 + 2k \leq \beta + 2m$ второе из неравенств (33) выполняется автоматически.

Рассмотрим, например, случай, когда форма $a_k(u, v)$ является старшей в K_R^* , но не старшей в $\Omega = G_1 \setminus G$. Тогда в качестве пространства H_+ мы берем пространство с нормой

$$\|u\|_+^2 = |u_1; W_{2,\alpha}^m(\Omega)|^2 + |u_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + |u_3; W_{2,\beta,\gamma}^m(K_R^*)|^2 + |u_3; W_{2,\beta_1,\gamma}^k(K_R^*)|^2.$$

Область G_2 , шар K_{2R} и функции u_1, u_2 и u_3 строятся так же, как в § 1. Как и ранее, обозначим через \tilde{H}_+ замыкание финитных относительно бесконечности функций в норме пространства H_+ . Условия леммы 5 (т. е. условия компактности вложения \tilde{H}_+ в $L_{2,\gamma}(G)$) в данном случае сводятся к требо-

ванию: $m - 1/2\alpha > 0$, так как γ уже выбрано: $\gamma > \beta + 2m$. В качестве правых частей мы можем брать функционалы из пространства H_-^0 (H_+^0 — подпространство в \tilde{H}_+ , которое состоит из функций с нулевым допустимым следом на ∂G). В качестве начальных данных мы можем брать функции из пространства

$$\mathfrak{M} \cong \omega_{2,r(x)}^m(G^*) \cap \omega_{2,-\beta}^k(K_R^*),$$

так как из оценок (27) и (29) следует, что это пространство вложено в класс \mathfrak{M}_0 .

Теперь для данной формы легко ставится краевая задача и для нее получаются результаты теорем 2 и 3. Аналогично рассматриваются другие случаи.

Очевидно, полученные результаты легко распространяются на случай нескольких полигармонических вырождающихся на границе операторов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору П. И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. Мирошин Н. В. Первая краевая задача для эллиптических операторов, вырождающихся на границе области.— ДАН СССР, 1976, 230, № 2, с. 275—278.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. Мирошин Н. В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства.— Диф. уравнения, 1976, 12, № 6.
5. Успенский С. В. О теоремах вложения функций в гладких областях.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
6. Никольский С. М., Лизоркин П. И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением.— ДАН СССР, 1964, 159, № 3, с. 512—515.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова Думка, 1965.
8. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.
9. Кудрявцев Л. Д. Решение краевых задач в неограниченных областях при конечности интеграла энергии.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
10. Половинкин В. И. Внешняя задача Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения.— Диф. уравнения, 1971, 7, № 1.